



TESIS-SM 142501

**SINKRONISASI PENJADWALAN TRANS JOGJA  
YANG TERINTEGRASI DI YOGYAKARTA MENGGUNAKAN  
ALJABAR MAX-PLUS BILANGAN *FUZZY***

ALLEXANDER GUMAWANG  
NRP 1213 201 205

DOSEN PEMBIMBING  
Dr. Subiono, M.S.

PROGRAM MAGISTER  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2016



THESIS-SM 142501

# **SYNCHRONIZATION SCHEDULING TRANS JOGJA INTEGRATED AT YOGYAKARTA USING MAX-PLUS ALGEBRA FUZZY NUMBERS**

ALLEXANDER GUMAWANG  
NRP 1213 201 205

SUPERVISOR  
Dr. Subiono, M.S.

MASTER'S DEGREE  
MATHEMATICS DEPARTMENT  
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCE  
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2016

**SINKRONISASI PENJADWALAN TRANS JOGJA YANG  
TERINTEGRASI DI YOGYAKARTA MENGGUNAKAN ALJABAR  
MAX-PLUS BILANGAN FUZZY**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Sains (M.Si)  
di  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:  
ALEXANDER GUMAWANG  
NRP. 1213 2012 05

Tanggal Ujian : 13 Januari 2016  
Periode Wisuda : Maret 2016

Disetujui oleh:



1. Dr. Subiono, M.S.  
NIP. 19570411 198403 1 001 (Pembimbing)



2. Dr. Dra. Mardlijah, M.T.  
NIP. 19670114 199102 2 001 (Penguji)




3. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.  
NIP. 19830517 200812 1 003 (Penguji)



4. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.  
NIP. 19730930 199702 1 001 (Penguji)

Direktur Program Pascasarjana,



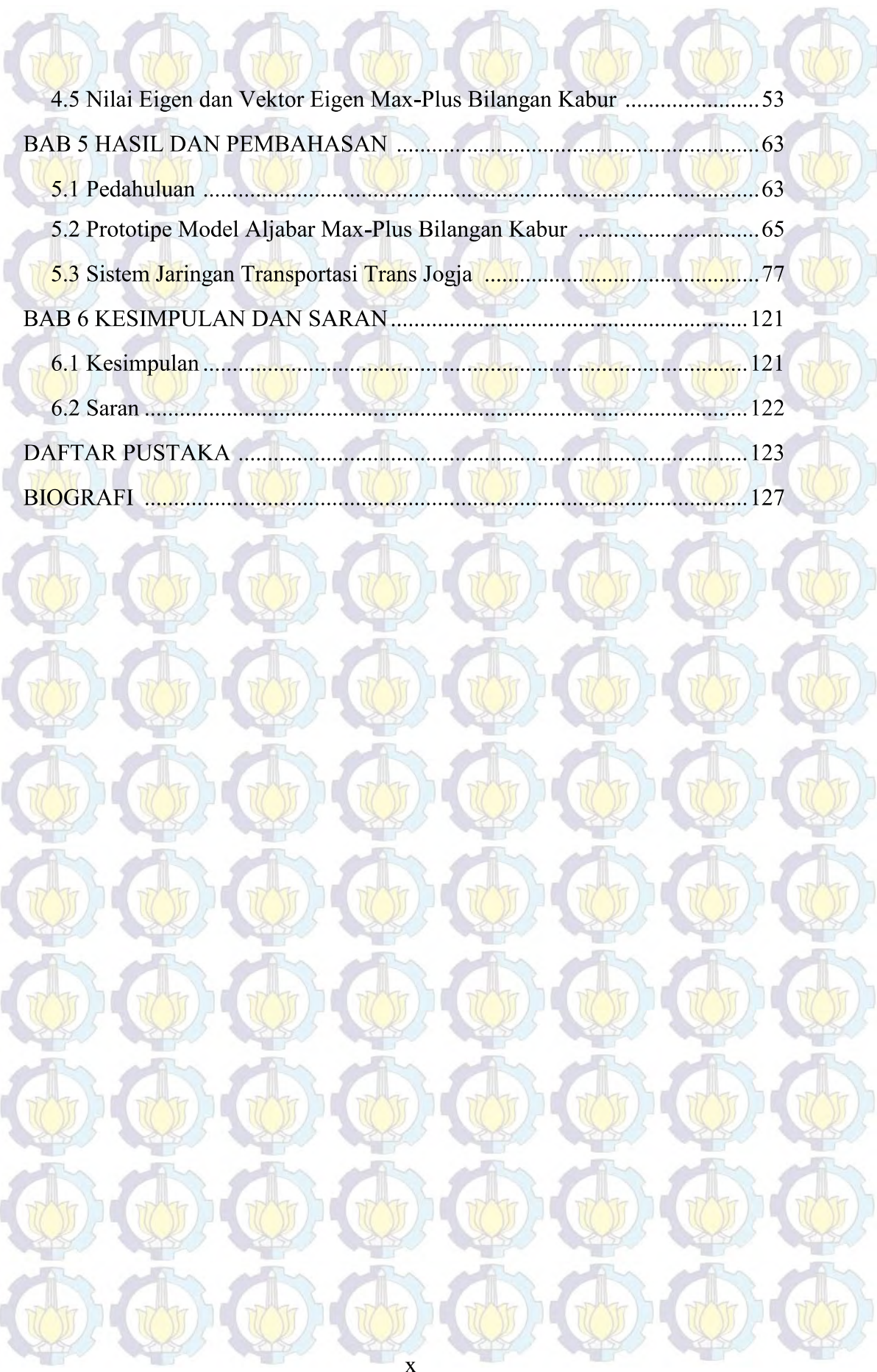
  
Prof. H. Daulharmanfaat, M.Sc., Ph.D.  
NIP. 19601202 198701 1 001



## DAFTAR ISI

|  |      |
|--|------|
| LEMBAR PENGESAHAN .....  | i    |
| ABSTRAK .....  | iii  |
| <i>ABSTRACT</i> .....  | v    |
| KATA PENGANTAR .....   | vii  |
| DAFTAR ISI .....   | ix   |
| DAFTAR GAMBAR .....  | xi   |
| DAFTAR TABEL .....   | xiii |
| BAB 1 PENDAHULUAN .....  | 1    |
| 1.1 Latar Belakang .....   | 1    |
| 1.2 Rumusan Masalah .....  | 7    |
| 1.3 Batasan Masalah .....  | 8    |
| 1.4 Tujuan Penelitian .....  | 8    |
| 1.5 Manfaat Penelitian .....   | 8    |
| BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI.....                              | 9    |
| 2.1 Aljabar Max-Plus .....   | 9    |
| 2.2 Himpunan Kabur dan Bilangan Kabur .....                            | 22   |
| 2.3 Sistem Jaringan Transportasi Bus Rapid Transit Trans Jogja .....   | 27   |
| BAB 3 METODE PENELITIAN .....  | 33   |
| 3.1 Tempat Penelitian .....  | 33   |
| 3.2 Bentuk Data .....  | 33   |
| 3.3 Tahapan Penelitian .....   | 34   |
| BAB 4 ALJABAR MAX-PLUS BILANGAN KABUR.....                             | 37   |
| 4.1 Definisi dan Konsep Dasar .....                                    | 37   |
| 4.2 Matriks dan Vektor atas Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur .....      | 42   |
| 4.3 Matriks dan Teori Graf atas Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur.....   | 44   |
| 4.4 Sistem Persamaan Linear Atas Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur ..... | 46   |





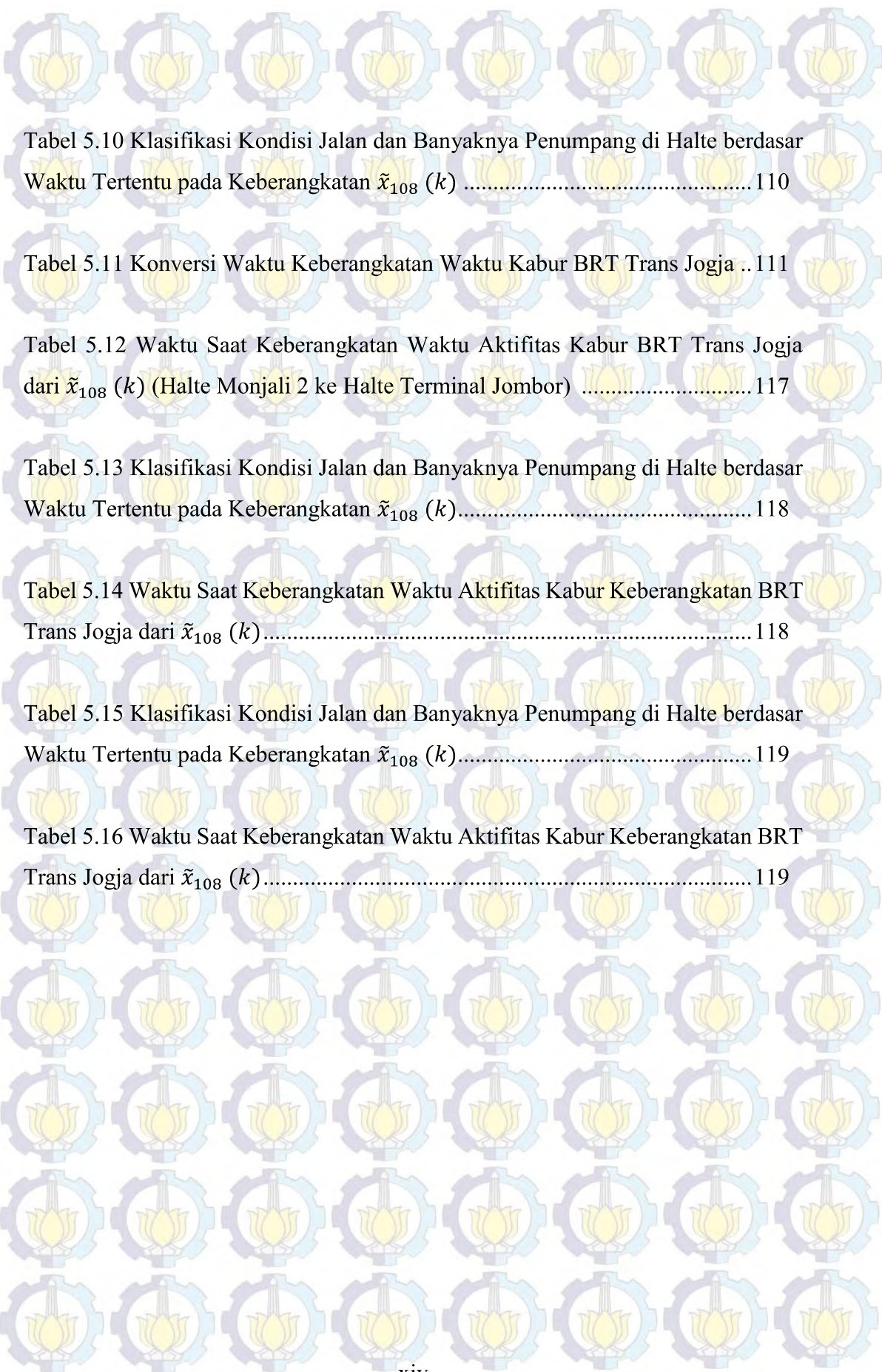
|  |            |
|--|------------|
| 4.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen Max-Plus Bilangan Kabur ..... | 53         |
| <b>BAB 5 HASIL DAN PEMBAHASAN .....</b>                        | <b>63</b>  |
| 5.1 Pedahuluan .....   | 63         |
| 5.2 Prototipe Model Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur .....      | 65         |
| 5.3 Sistem Jaringan Transportasi Trans Jogja .....             | 77         |
| <b>BAB 6 KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>                        | <b>121</b> |
| 6.1 Kesimpulan .....   | 121        |
| 6.2 Saran .....  | 122        |
| <b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>                                    | <b>123</b> |
| <b>BIOGRAFI .....</b>  | <b>127</b> |



## DAFTAR TABEL

|  |     |
|--|-----|
| Tabel 5.1 Perhitungan Waktu Aktifitas Kabur dari Keberangkatan BRT Dalam Satuan Menit .....  | 71  |
| Tabel 5.2 Batas-Batas Nilai Eigen Bilangan Kabur dan Komponen-Komponen Vektor Eigen Bilangan Kabur dari Prototipe Dinamika Jaringan Transportasi BRT Sederhana .....   | 75  |
| Tabel 5.3 Perhitungan Waktu Aktifitas Kabur dari Keberangkatan BRT dalam Satuan Menit .....  | 76  |
| Tabel 5.4 Lima Contoh Durasi Waktu Kabur Lamanya BRT Melakukan Perjalanan Antar Halte dalam Satuan Menit .....   | 85  |
| Tabel 5.5 Hasil Perhitungan Batas-Batas Potongan- $\alpha$ Nilai Eigen dan Vektor Eigen AljabarMax-Plus Bilangan Kabur pada Dinamika Sistem Jaringan Transportasi BRT Trans Jogja dalam Satuan Menit .....             | 101 |
| Tabel 5.6 Perhitungan Keberangkatan Waktu Kabur Keberangkatan BRT Trans Jogja dalam Satuan Menit .....   | 103 |
| Tabel 5.7 Klasifikasi Kondisi Jalan dan Banyaknya Penumpang di Halte pada Waktu Tertentu .....   | 104 |
| Tabel 5.8 Klasifikasi Kondisi Banyaknya Penumpang di Halte Ring Road Monjali 2 di Jalur 2B pada Waktu Tertentu (dalam satuan WIB) .....  | 107 |
| Tabel 5.9 Klasifikasi Kondisi Lalulintas Lalulintas Aliran Kendaraan dari Jogjakarta Menuju Sleman Utara/Magelang pada Simpang Jombor di Jalan Magelang pada Hari Efektif pada Waktu Tertentu (dalam satuan WIB) ..... | 109 |





Tabel 5.10 Klasifikasi Kondisi Jalan dan Banyaknya Penumpang di Halte berdasar Waktu Tertentu pada Keberangkatan  $\tilde{x}_{108}(k)$  ..... 110

Tabel 5.11 Konversi Waktu Keberangkatan Waktu Kabur BRT Trans Jogja .. 111

Tabel 5.12 Waktu Saat Keberangkatan Waktu Aktifitas Kabur BRT Trans Jogja dari  $\tilde{x}_{108}(k)$  (Halte Monjali 2 ke Halte Terminal Jombor) ..... 117

Tabel 5.13 Klasifikasi Kondisi Jalan dan Banyaknya Penumpang di Halte berdasar Waktu Tertentu pada Keberangkatan  $\tilde{x}_{108}(k)$ ..... 118

Tabel 5.14 Waktu Saat Keberangkatan Waktu Aktifitas Kabur Keberangkatan BRT Trans Jogja dari  $\tilde{x}_{108}(k)$ ..... 118

Tabel 5.15 Klasifikasi Kondisi Jalan dan Banyaknya Penumpang di Halte berdasar Waktu Tertentu pada Keberangkatan  $\tilde{x}_{108}(k)$ ..... 119

Tabel 5.16 Waktu Saat Keberangkatan Waktu Aktifitas Kabur Keberangkatan BRT Trans Jogja dari  $\tilde{x}_{108}(k)$ ..... 119



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 5.1 Graph Berarah Jaringan Transportasi BRT Trans Jogja ..... 66

Gambar 5.2 Grafik Batas-Batas Nilai Eigen Bilangan Kabur dan Komponen-Komponen Vektor Eigen Bilangan Kabur dari Prototipe Dinamika Jaringan Transportasi BRT Sederhana ..... 74

Gambar 5.3 Graf Dinamika Jaringan BRT Trans Jogja ..... 83

Gambar 5.4 Graf Keberangkatan BRT dari Halte Jalan Solo Maguwo ke Halte Bandara Adisucipto pada Jalur 1A ..... 89

Gambar 5.5 Graf Keberangkatan BRT dari Halte Senopati ke Tentara Pelajar pada Jalur 1B ..... 90

Gambar 5.6 Graf Keberangkatan BRT dari Halte Ring Road Utara Monjali ke Terminal Jombor pada jalur 2B ..... 91

Gambar 5.7 Graf Keberangkatan BRT dari Halte Gedong Kuning Dep Kehutanan ke Gedong Kuning JEC pada Jalur 3A ..... 92

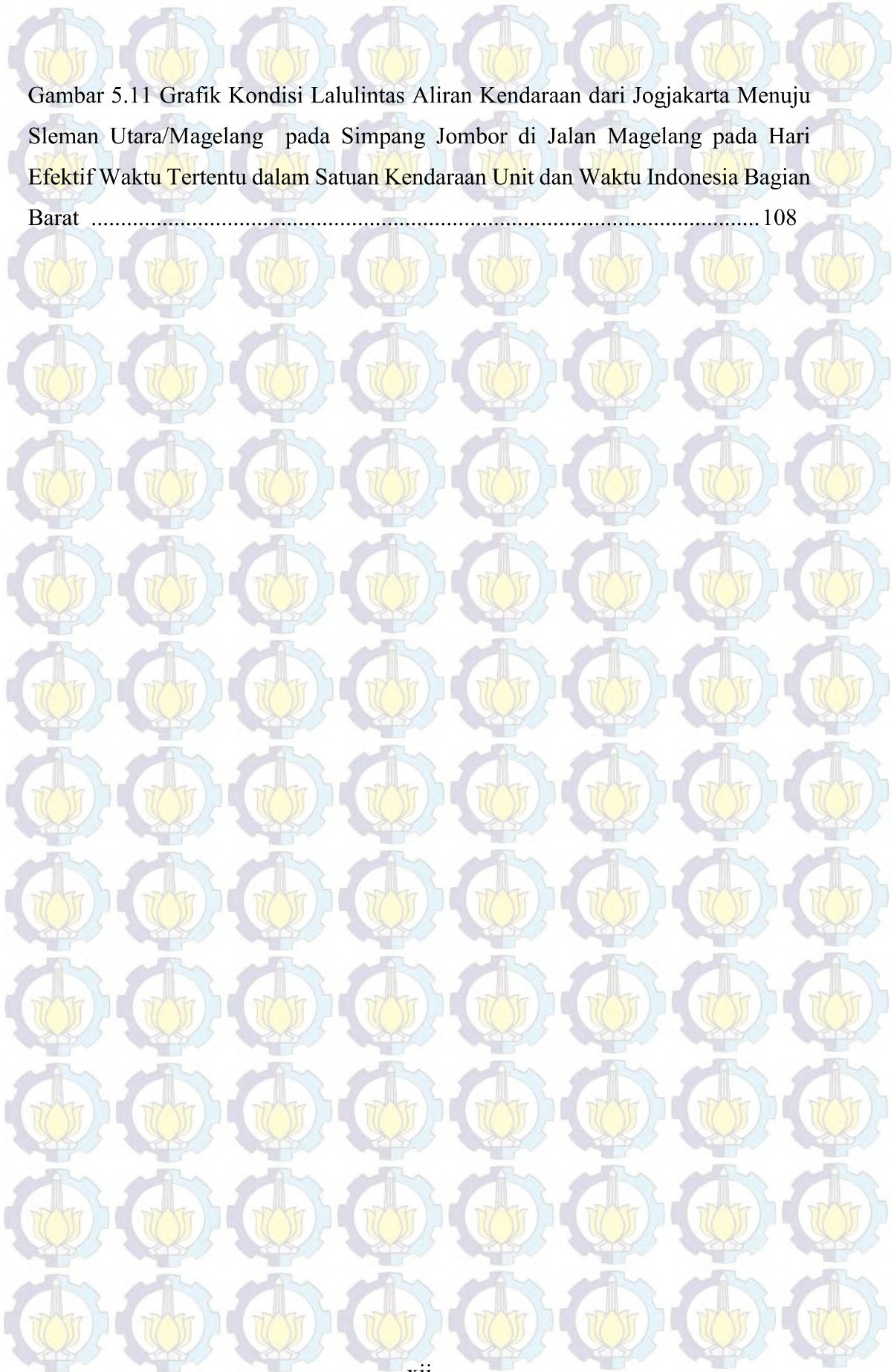
Gambar 5.8 Graf Keberangkatan BRT dari Halte UAD Ke Halte Terminal Giwangan pada Jalur 4A ..... 93

Gambar 5.9 Graf Keberangkatan BRT dari Halte Ring Road Utara Monjali 2 ke Terminal Jombor pada Jalur 2B ..... 105

Gambar 5.10 Grafik Kondisi Penumpang pada Keberangkatan  $\tilde{x}_{108}(k)$  di Jalur 2B pada Waktu Tertentu dalam Satuan Penumpang Orang dan Waktu Indonesia Bagian Barat ..... 106



Gambar 5.11 Grafik Kondisi Lalulintas Aliran Kendaraan dari Jogjakarta Menuju Sleman Utara/Magelang pada Simpang Jombor di Jalan Magelang pada Hari Efektif Waktu Tertentu dalam Satuan Kendaraan Unit dan Waktu Indonesia Bagian Barat ..... 108





## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah Yang Maha Esa karena atas berkat-Nya penulis mampu menyelesaikan Tesis yang berjudul:

### **SINKRONISASI PENJADWALAN TRANS JOGJA YANG TERINTEGRASI DI YOGYAKARTA MENGGUNAKAN ALJABAR MAX-PLUS BILANGAN *FUZZY***

Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Penulis mengambil topik ini karena sebagai salah satu usaha wujud peduli terhadap Transportasi yang ada di Indonesia, terkhusus di D.I.Yogyakarta. Harapannya jika hasil analisis ini sudah dapat dengan baik, maka akan dapat membantu dalam pembuatan penjadwalan operasional Trans Jogja.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini jauh dari kata sempurna. Oleh sebab itu, jika ada kritik dan saran yang membangun dari semua pihak maka dengan senang hati diterima penulis. Dengan harapan bahwa penelitian selanjutnya bisa lebih baik lagi. terselesaikannya Tesis ini tentu saja tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis bermaksud untuk mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.Es., Ph.D. selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.
2. Bapak Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D. selaku Direktur Program Pascasarjana ITS.
3. Bapak Dr. Imam Mukhlash, MT. selaku Ketua Jurusan Matematika ITS.
4. Bapak Dr. Subiono, M.S. selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika ITS, dosen wali dan dosen pembimbing. Terima kasih atas segala waktu, bimbingan, perhatian, nasehat, motivasi, dan ilmu yang telah diberikan kepada penulis. Sehingga penulis mampu menyelesaikan Tesis.



5. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, M.T., Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si., dan Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang banyak memberi masukan sehingga Tesis ini menjadi semakin baik.
6. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika ITS atas segala bantuan, kemudahan, dan kelancaran selama masa perkuliahan.
7. Bapak Dr. Andy Rudhito, S.Pd., M.Si., Dosen Pendidikan Matematika USD Yogyakarta yang memberi masukan saat berdiskusi tentang Aljabar Max-Plus Bilangan *Fuzzy*.
8. Bapak Prof. Ir. Sigit Priyanto, M.Sc., Ph.D., dan Ibu Prof. Dr. Ir. Siti Malkhamah, M.Sc., Dosen Teknik Sipil UGM Yogyakarta yang memberikan ide awal penelitian tentang transportasi Trans Jogja.
9. Segenap staf Dishubkominfo D.I.Yogyakarta yang dengan sabar memberikan dan menjelaskan data-data yang diperlukan mengenai Trans Jogja dan lalu lintas di Yogyakarta.
10. Bapak Fx Subandiyono, Ibu Ch Djatining Winarti, Clara Datu, Vinsenvius Bismar, Yulius Wahyu Putranto dan Yuliana Pebri Heriawati dengan segala kasih sayangnya memberi segenap dukungan kepada penulis guna terselesaikannya Tesis ini.
11. Teman-teman seperjuangan S2 Matematika ITS angkatan 2013 genap yang telah menemani, memotivasi, dan segala bantuannya selama ini.
12. Teman Asrama St. Agnes Surabaya dan Suster-suster SSpS dengan segala kemuarahan hatinya.
13. Para sahabat dan semua pihak yang turut serta mendukung dalam penyusunan Tesis ini.

Penulis berharap semoga laporan Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, bagi ilmu pengetahuan kedepan, dan dapat berkontribusi demi kemajuan Matematika, demi kemajuan ITS, serta kemajuan Indonesia.

Terima Kasih

Surabaya, Januari 2016

Penulis



# SINKRONISASI PENJADWALAN TRANS JOGJA YANG TERINTEGRASI DI YOGYAKARTA MENGGUNAKAN ALJABAR MAX-PLUS BILANGAN *FUZZY*

Nama Mahasiswa : Allexander Gumawang  
NRP : 1213 201 205  
Dosen Pembimbing : Dr. Subiono, M.S.

## ABSTRAK

Yogyakarta adalah kota wisata dan kota pelajar yang membutuhkan mobilitas cukup tinggi. Percepatan pertumbuhan transportasi pribadi dan perlambatan pembangunan sistem jaringan transportasi publik menimbulkan masalah. Masalah tersebut adalah kemacetan. Salah satu solusi yang diberikan oleh pemerintah D.I. Yogyakarta pada tahun 2008 adalah dibangunnya sistem jaringan *Bus Rapid Transit (BRT)*, yang dikenal dengan Trans Jogja. Selama beroperasi, Trans Jogja mendapat sambutan baik dari masyarakat, namun pelayanan Trans Jogja masih perlu ditingkatkan. Pelayanan Trans Jogja yang perlu ditingkatkan adalah ketepatan waktu, sinkronisasi jadwal antar Trans Jogja, dan keteraturan jadwal operasional Trans Jogja. Trans Jogja memiliki karakteristik yang berbeda dengan *Bus Rapid Transit* lainnya, yaitu tidak memiliki jalur khusus. Implikasi dari Trans Jogja yang tidak memiliki jalur khusus adalah waktu tempuhnya tidak tetap atau pasti. Pada penelitian ini, peneliti mengusulkan sebuah kajian analisis penjadwalan Trans Jogja yang saling tersinkronisasi, keberangkatan yang periodik sesuai dengan kondisi lalu lintas di jalan raya. Teori dasar aljabar max-plus bilangan *fuzzy* digunakan untuk analisis dalam penelitian ini. Bilangan *fuzzy* dalam penelitian ini digunakan untuk menyatakan waktu tempuh Trans Jogja yang tidak pasti. Dengan teori aljabar max-plus bilangan *fuzzy* akan didapatkan jadwal Trans Jogja yang saling tersinkronisasi, keberangkatan yang periodik sesuai dengan kondisi lalu lintas di jalan raya.

**Kata kunci:** aljabar max-plus bilangan *fuzzy*, penjadwalan, sinkronisasi, Trans Jogja





## SYNCHRONIZATION SCHEDULING TRANS JOGJA INTEGRATED AT YOGYAKARTA USING MAX-PLUS ALGEBRA FUZZY NUMBERS

Name : Allexander Gumawang  
Student Identity Number : 1213 201 205  
Supervisor : Dr. Subiono, M.S.

### *ABSTRACT*

Yogyakarta is a tourist town and city students who require mobility is high enough. Acceleration and deceleration gain personal transportation system development of public transport networks pose a problem. The problem is congestion. One solution offered by the government DI Yogyakarta in 2008 was the construction of a network system Bus Rapid Transit (BRT), which is known as the Trans Jogja. During the operation, Trans Jogja well received by the public, but the service of Trans Jogja still needs to be improved. Trans Jogja service needs to be improved is the timeliness, synchronization between Trans Jogja schedule, and regular operational schedule Trans Jogja. Trans Jogja has different characteristics with other Bus Rapid Transit, which does not have a special track. The implications of the Trans Jogja who do not have a special path latency is not fixed or definite. In this study, we propose a scheduling analysis study Trans Jogja mutually synchronized, departure periodically in accordance with the conditions of traffic on the highway. The basic theory max-plus algebra fuzzy numbers used for analysis in this study. Fuzzy numbers in this study are used to express the travel time Trans Jogja uncertain. With a max-plus algebra theory of fuzzy numbers will be obtained Trans Jogja schedule mutually synchronized, departure periodically in accordance with the conditions of traffic on the highway.

**Keywords:** max-plus algebra fuzzy numbers, scheduling, synchronization, Trans Jogja



# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Profil penduduk D.I.Yogyakarta sebagai kota wisata, pelajar, dan budaya, semakin bertambah padat. Pada sensus tahun 2010 (Badan Pusat Statistik/BPS Provinsi D.I.Yogyakarta, 2014a), jumlah penduduk yang tinggal di Provinsi D.I.Yogyakarta mencapai 3.457.491 jiwa. Berdasarkan data Badan Pusat Statistik Provinsi D.I.Yogyakarta (2014a), dalam sepuluh tahun terakhir (2000-2010) rata-rata laju pertumbuhan penduduk sebesar 1,04 persen per tahun. Jika dikaitkan dengan luas daerah provinsi D.I.Yogyakarta, kepadatan penduduk pada tahun ini sebesar 1.085 jiwa per kilometer persegi. Berdasarkan data kepadatan ini, D.I.Yogyakarta berada pada peringkat ke tiga secara nasional, setelah Provinsi D.K.I Jakarta dan Jawa Barat yang masing-masing mencapai 14.469 jiwa per kilometer persegi dan 1.217 jiwa per kilometer persegi. Berdasarkan wilayah di Provinsi D.I.Yogyakarta, kepadatan tertinggi terdapat di Kota Yogyakarta dengan kepadatan penduduk sebesar 11.958 jiwa per kilometer persegi. Kemudian Kabupaten Sleman dengan kepadatan penduduk sebesar 1.902 jiwa per kilometer persegi. Selanjutnya, Kabupaten Bantul dengan kepadatan penduduk sebesar 1.798 jiwa per kilometer persegi. Kepadatan terendah adalah Kabupaten Gunung Kidul yang memiliki kepadatan penduduk sebesar 445 jiwa per kilometer persegi. Kepadatan penduduk ini bertambah. Penambahan kepadatan penduduk dikarenakan peningkatan secara signifikan wisatawan yang berkunjung ke D.I.Yogyakarta. Berdasarkan data Badan Pusat Statistik Provinsi D.I.Yogyakarta (2014b), selama sembilan tahun terakhir yang tercatat pada tahun 2013, jumlah rata-rata kunjungan wisatawan yang masuk ke D.I.Yogyakarta meningkat sebesar 7,83 persen. Selama tahun 2013, banyaknya wisatawan domestik maupun mancanegara mencapai 3,81 juta. Sementara itu, predikat kota pelajar juga menambah kepadatan penduduk. Pada tahun 2013, mahasiswa dari luar D.I.Yogyakarta mencapai 310.867 mahasiswa.



Implikasi dari kepadatan penduduk D.I.Yogyakarta adalah mobilitas transportasi yang cukup tinggi. Pada jam sibuk pagi, masyarakat D.I.Yogyakarta, pelajar maupun pekerja menuju sekolah dan tempat kerja, akibatnya jalan menjadi macet. Kemudian, pada jam sibuk sore kemacetan kembali terjadi karena masyarakat kembali ke tempat asal masing-masing. Selain itu, setiap tahun kira-kira 3,81 juta wisatawan bergerak menuju tempat wisata yang tersebar dalam empat kabupaten dan satu kota di Provinsi D.I.Yogyakarta.

Percepatan penambahan transportasi pribadi dan lambatnya pembangunan sistem jaringan transportasi publik (angkutan umum dan infrastruktur jalan) ini menimbulkan kemacetan. Hal ini dapat dilihat dari peningkatan transportasi pribadi yang berada di ruas jalan raya D.I.Yogyakarta tiap tahunnya. Berdasarkan data Badan Pusat Statistik D.I.Yogyakarta (2014c), pada tahun 2012 hingga tahun 2013 peningkatan jumlah transportasi sebesar 9,05 persen, yaitu dari 1.749.738 unit menjadi 1.908.058 unit didominasi oleh transportasi pribadi. Jenis kendaraan mobil memiliki peningkatan yang paling tinggi yaitu 11,69 persen, kemudian diikuti sepeda motor sebanyak 8,87 persen. Hal ini tidak sebanding dengan pembangunan sistem transportasi publik. Berdasarkan data Badan Pusat Statistik D.I.Yogyakarta (2014c), pada tahun 2013 peningkatan transportasi publik (bus) hanya mencapai 0,531 persen, yaitu dari 11.109 unit menjadi 11.168 unit. Keadaan ini diperparah dengan pelebaran jalan raya yang berjalan di tempat. Menurut Firdausi (2013), berdasarkan hasil penelitian di ruas Jalan Raya Yogya-Solo dan Jalan Lingkar Maguwo ke Prambanan, ada beberapa kriteria yang tidak terpenuhi, yaitu lebar jalan yang kurang ideal. Jalan yang tidak ideal, kapasitas jalan tidak dapat menampung volume kendaraan, mengakibatkan masalah kemacetan di D.I.Yogyakarta.

Kemacetan lalu lintas di jalan terjadi ketika permintaan perjalanan melebihi kapasitas jalan (Sugiyanto, 2011). Masalah kemacetan di ruas-ruas jalan D.I.Yogyakarta menimbulkan kerugian yang cukup besar. Sebagai contoh ruas jalan yang sering macet adalah di Jalan Malioboro dan Jalan Gejayan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa biaya transportasi mobil pada kondisi sebenarnya di kawasan Malioboro adalah Rp5.513,77 per-*trip* dan pada kondisi kecepatan arus



bebas adalah Rp2.598,78 per-*trip*. Oleh karena itu, biaya kemacetan bagi pengguna mobil pribadi di kawasan ini adalah Rp2.914,99 per-*trip* (Sugiyanto, 2011). Sedangkan penelitian yang dilakukan di ruas Jalan Gejayan juga memperlihatkan hasil yang tidak jauh berbeda. Hasil penelitian menunjukkan bahwa hubungan jumlah arus dengan kecepatan yang terjadi adalah berbanding terbalik dengan besarnya arus lalu lintas. Kerugian akibat keterlambatan arus lalu lintas yang terjadi di Jalan Gejayan adalah sebesar Rp11.282.182,21 perjam (Basuki, 2008). Dari studi kasus di atas dapat disimpulkan bahwa kemacetan menimbulkan kerugian yang cukup besar.

Salah satu program Pemerintah D.I.Yogyakarta untuk mengatasi kemacetan adalah membuat sistem jaringan transportasi publik, yaitu *Bus Rapid Transit (BRT)* yang dikenal dengan Trans Jogja. Trans Jogja mulai beroperasi pada bulan Maret 2008. Pada awal operasionalnya, Trans Jogja hanya terdiri dari 54 armada, 67 halte, dan 6 jalur. Selama 7 tahun beroperasi, Trans Jogja mengalami penambahan armada, dan penambahan jalur. Pada tahun 2015, armada Trans Jogja sebanyak 65 armada dan 8 jalur dan sebanyak 111 halte.

Trans Jogja memiliki karakteristik yang berbeda dengan *Bus Rapid Transit* lainnya. *Bus Rapid Transit* pada umumnya, seperti TransJakarta memiliki jalur khusus. Berbeda dengan TransJakarta, Trans Jogja tidak memiliki jalur khusus. Jika memiliki jalur khusus, maka waktu tempuh Trans Jogja dapat dinyatakan sebagai waktu tempuh tegas. Waktu tempuh tegas dimaksudkan waktu yang selalu pasti. Karena Trans Jogja tidak memiliki jalur khusus, maka waktu tempuh Trans Jogja tidak pasti. Oleh sebab itu, waktu tempuh Trans Jogja pada pagi, siang, sore, dan malam hari akan berbeda. Hal ini dipengaruhi oleh tingkat kemacetan jalan.

Trans Jogja mendapat sambutan yang baik, namun masih perlu ditingkatkan pelayanannya. Sebuah penelitian di awal tahun 2008 tentang analisis pelayanan yang diberikan oleh Trans Jogja terhadap kepuasan pengguna ditinjau dari dimensi kualitas jasa, menunjukkan hasil yang baik (Arifuddin, 2008). Penelitian lain yang dilakukan oleh Munawar pada tahun yang sama juga menunjukkan hasil baik. Hasil penelitian menunjukkan 94 persen responden mengatakan pelayanan bus Trans Jogja baik (Munawar, 2008). Pelayanan yang



dimaksud adalah *safe* dan *on time*. Akan tetapi, hasil penelitian akhir-akhir ini menunjukkan hal yang tidak sama dengan penelitian awal Trans Jogja beroperasi. Penelitian pada tahun 2014 menunjukkan tingkat kepuasan pengguna Trans Jogja adalah sebesar 68,76 persen, hal ini menunjukkan bahwa kepuasan pengguna secara keseluruhan masih rendah (Syukri, 2014). Berdasarkan hasil analisis, ketidakpuasan ini berdasarkan waktu kedatangan bus yang kurang sesuai dengan kebutuhan penumpang. Penelitian lain juga menunjukkan hasil yang sama. Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan Idris (2009), *CSI (Consumer service index)* menghasilkan 27,02 persen sampai dengan 60,83 persen yang artinya kepuasan konsumen lemah, dilihat dari kepercayaan, tanggap, jaminan, empati, dan keberwujudan.

Berdasarkan kekurangan-kekurangan jaringan sistem transportasi Trans Jogja dan kondisi jalan raya yang ada di D.I.Yogyakarta, peneliti membuat suatu sinkronisasi jadwal keberangkatan Trans Jogja antar jalur yang berbeda.

Penelitian ini merupakan irisan dari beberapa penelitian yang pernah dilakukan. Berikut ini disajikan penelitian yang berkaitan dengan penerapan aljabar max-plus dan bilangan *fuzzy*.

Penelitian yang pertama, dikerjakan oleh Subiono pada tahun 2000. Penelitian berjudul *On Classes of Min-Max-Plus Systems and Their Applications*, yang merupakan disertasi di Delft University. Dalam penelitian ini dibahas dasar teori mengenai aljabar max-min plus. Selain itu, dalam penelitian ini juga dibahas mengenai penerapan aljabar max-plus pada sistem transportasi kereta api di Belanda.

Penelitian yang kedua, berjudul *Penjadwalan Jalur Bus dalam Kota dengan Aljabar Max-Plus*, merupakan tesis di Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, yang dikerjakan oleh Winarni pada tahun 2009. Jaringan jalur bus dalam kota merupakan salah satu fasilitas transportasi umum yang memegang peranan penting dalam kehidupan masyarakat kota yang mempunyai karakteristik mobilitas cukup tinggi. Jaringan bus TransJakarta (*Busway*) di Jakarta merupakan salah satu contohnya. Jaringan bus tersebut dibangun antara lain sebagai solusi permasalahan di sektor angkutan umum dan memberikan pilihan solusi untuk



mengatasi kemacetan lalu lintas di Jakarta. Salah satu masalah penting dalam sistem transportasi tersebut yang menjadi keluhan masyarakat adalah mengenai ketidakpastian waktu tunggu kedatangan bus di tiap-tiap halte, hal ini dimungkinkan antara lain karena belum adanya penjadwalan yang baik pada sistem tersebut. Dalam penelitian ini dilakukan penjadwalan keberangkatan bus menggunakan pendekatan aljabar max-plus dengan terlebih dahulu mengkonstruksi model sistem dengan petri net. Studi kasus dalam penelitian ini adalah jaringan bus TransJakarta. Dari penelitian ini diperoleh desain jadwal keberangkatan bus di tiap halte pada masing-masing koridor (Winarni, 2009).

Penelitian yang ketiga dikerjakan oleh Rudhito pada tahun 2011 yang berjudul *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya Pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian Kabur*, yang merupakan disertasi di Universitas Gajah Mada. Pada penelitian ini dibahas mengenai landasan dasar aljabar max-plus bilangan *fuzzy* (kabur) dan penerapannya pada penjadwalan sebuah jaringan proyek. Waktu aktivitas yang tidak diketahui secara pasti dalam suatu jaringan, dapat dimodelkan dengan bilangan kabur. Disertasi ini membahas pendekatan aljabar max-plus untuk pemodelan dan analisa jaringan kabur yang diharapkan akan memberikan model yang lebih kompak dan hasil yang lebih analitis. Pendekatan ini memerlukan konsep-konsep aljabar max-plus dalam himpunan semua bilangan kabur. Dalam penelitian ini dibahas terlebih dahulu generalisasi konsep-konsep dalam aljabar max-plus ke dalam aljabar maxplus bilangan kabur yang meliputi sistem persamaan linear dan nilai *eigen*. Dinamika jaringan proyek kabur dapat dimodelkan sebagai sistem persamaan linear iteratif max-plus bilangan kabur di mana penyelesaian sistem tersebut adalah waktu awal tercepat kabur yang berasal dari setiap titik. Dalam jaringan antrian serial tertutup kabur, untuk suatu tingkat resiko yang diberikan, dapat ditentukan waktu keberangkatan awal tercepat pelanggan, sehingga interval waktu keberangkatan pelanggan akan berada dalam interval terkecil yang batas bawah dan batas atasnya periodik (Rudhito, 2011).

Penelitian keempat berjudul *Studi Perencanaan Jadwal Busway Di Surabaya menggunakan Aljabar Max-Plus*, merupakan tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya yang dikerjakan oleh Rakhmawati (2012). Pada



penelitian ini, dirancang suatu interval keberangkatan beberapa jalur *busway* yang kemudian dianalisa menjadi sebuah pemodelan jalur *busway* menggunakan aljabar max-plus yang studi kasusnya adalah wilayah Surabaya. Selanjutnya dari pemodelan yang diperoleh dianalisa sebuah desain penjadwalan untuk keberangkatan *busway* dengan jalur yang ditentukan agar memberikan kepastian jadwal bagi pengguna *busway* di Surabaya. Dengan menggunakan aljabar max-plus interval, diperoleh *possible eigen value* yaitu  $5,495 \leq (A) \leq 6,87$ , yang menyatakan keperiodikan sistem. Interpretasi dari nilai *eigen* ini bahwasanya periode keberangkatan bus di masing-masing titik pertemuan adalah setiap 5 hingga 7 menit sekali (Rakhmawati, 2012).

Penelitian yang kelima berjudul *Aplikasi Aljabar Max-Plus Pada Pemodelan dan Penjadwalan Busway yang Diintegrasikan dengan Kereta api Komuter*, merupakan penelitian yang dikerjakan oleh Fahim pada tahun 2013. Pada penelitian ini dibuat desain penjadwalan untuk keberangkatan *busway* dan kereta api (KA) komuter menggunakan aljabar max-plus interval. Langkah awal dalam penelitian ini mengumpulkan data yang diperlukan, yaitu jalur dari KA dan *busway*. Langkah selanjutnya dibuat aturan sinkronisasi yang menjamin penumpang berpindah dari sembarang pemberhentian *busway* atau KA komuter awal ke sembarang pemberhentian *busway* atau KA komuter tujuan yang ada pada jalur tersebut. Kemudian dibentuk model penjadwalan untuk keberangkatan *busway* dan KA komuter (Fahim, 2013).

Sistem jaringan transportasi adalah salah satu contoh *Discrete Event System (DES)*. Perubahan ditentukan oleh *event* tertentu. Secara umum, dalam jaringan transportasi misalnya jaringan sistem *Bus Rapid Transit*, contoh *discrete event* adalah keberangkatan dari halte atau kedatangan di halte. Secara khusus dalam penelitian ini, yaitu pada sistem jaringan Trans Jogja, contoh *discrete event* adalah kedatangan dan keberangkatan Trans Jogja di masing-masing halte. Pada fenomena sistem transportasi publik Trans Jogja di D.I.Yogyakarta terdapat beberapa *discrete event*. *Discrete event* yang pertama adalah kedatangan dan keberangkatan antar Trans Jogja dengan trayek/jalur berbeda di masing-masing halte.



Kendala sinkronisasi pada *Discrete Event System* dapat dijelaskan dengan model linear yang memenuhi syarat struktur aljabar max-plus. Aljabar max-plus terdiri dari bilangan real dan negatif tak hingga dengan operasi maksimum dan penjumlahan. Pada penelitian ini, sistem jaringan Trans Jogja memiliki waktu tempuh yang tidak pasti berdasarkan waktu pagi, siang, sore, dan malam hari. Waktu tempuh yang berbeda ini akan dimodelkan dengan sistem bilangan kabur (*fuzzy*). Sehingga dasar matematika yang digunakan adalah aljabar max-plus bilangan *fuzzy*.

Dalam penelitian ini, peneliti akan mengusulkan sebuah analisis penjadwalan keberangkatan operasional Trans Jogja yang terintegrasi dengan Trans Jogja lainnya yang berbeda jalur. Analisis yang digunakan dalam studi kasus ini adalah teori aljabar max-plus bilangan *fuzzy*. Fungsi objektif dari permasalahan yang akan dipecahkan dengan analisis aljabar max-plus bilangan *fuzzy* adalah sebuah jadwal keberangkatan operasional Trans Jogja dengan beberapa kriteria. Kriteria yang pertama, waktu tempuh tiap lintasan adalah berbeda sesuai tingkat kemacetan. Kriteria yang kedua, keberangkatan Trans Jogja di setiap halte menunggu kedatangan Trans Jogja lain dari jalur/trayek lainnya untuk memungkinkan pertukaran penumpang antar Trans Jogja di masing-masing halte. Kriteria yang terakhir, keberangkatan Trans Jogja di masing-masing halte adalah sesegera mungkin.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimanakah pemodelan aljabar max-plus bilangan *fuzzy* sistem jaringan transportasi publik Trans Jogja yang saling terintegrasi antar trayek/jalur?
2. Bagaimanakah teori aljabar max-plus bilangan *fuzzy* memberikan solusi penjadwalan sistem jaringan transportasi publik Trans Jogja yang terintegrasi antar trayek/jalur?



### 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang diberikan dalam tesis ini adalah mengkaji dinamika sistem jaringan transportasi *BRT* berdasarkan keadaan perjalanan Trans Jogja pada hari efektif.

### 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian berdasarkan rumusan masalah di atas adalah sebagai berikut:

1. Menentukan model aljabar max-plus bilangan *fuzzy* sistem jaringan transportasi publik Trans Jogja yang saling terintegrasi antar trayek.
2. Mencari solusi penjadwalan sistem jaringan transportasi publik Trans Jogja yang saling terintegrasi dengan teori aljabar max-plus bilangan *fuzzy*. Solusi jadwal yang diharapkan memenuhi kriteria berikut ini:
  - a. waktu tempuh tiap lintasan adalah berbeda sesuai tingkat kemacetan,
  - b. keberangkatan Trans Jogja di setiap halte menunggu kedatangan Trans Jogja lain,
  - c. keberangkatan Trans Jogja di masing-masing halte adalah sesegera mungkin.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini berdasarkan tujuan yang telah dipaparkan adalah sebagai berikut.

1. Sebagai usulan kepada Dinas Perhubungan, Komunikasi dan Informatika Pemerintah Daerah Istimewa Yogyakarta terhadap varian cara pembuatan jadwal Trans Jogja.
2. Sebagai salah satu kontribusi untuk pengembangan ilmu pengetahuan Matematika di bidang Teknik Sipil dan Jaringan Transportasi.



## BAB 2

### TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dikaji teori-teori yang melandasi pembahasan mengenai penerapan aljabar max-plus bilangan kabur pada sistem transportasi *bus rapid transit* Trans Jogja. Pertama, bab ini mengkaji teori aljabar max-plus yang diambil dari Subiono (2015). Selanjutnya, bab ini mengkaji mengenai teori himpunan dan bilangan kabur yang diambil dari Susilo (2006). Terakhir, bab ini mengkaji mengenai sistem transportasi *bus rapid transit* Trans Jogja yang mengacu pada data Dinas Perhubungan, Komunikasi dan Informatika Pemerintah Daerah Istimewa Yogyakarta terhadap varian cara pembuatan jadwal Trans Jogja.

#### 2.1 Aljabar Max-Plus

##### 2.1.1 Definisi dan Konsep Dasar

**Definisi 2.1** Pertama didefinisikan konsep elemen netral dan identitas sebagai berikut:

$$\text{elemen netral; } \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty \text{ (bilangan tak hingga negatif)} \quad (2.1)$$

dan,

$$\text{identitas; } e \stackrel{\text{def}}{=} 0 \text{ (bilangan nol)} \quad (2.2)$$

dan dinotasikan oleh  $\mathbb{R}_{\max}$  himpunan  $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ , dimana  $\mathbb{R}$  adalah himpunan bilangan bulat.

**Definisi 2.2** Untuk setiap elemen  $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$ , didefinisikan operasi  $\max\{\oplus\}$  dan plus  $\{\otimes\}$  oleh

$$\text{operasi maksimum; } a \oplus b \stackrel{\text{def}}{=} \max(a, b) \quad (2.3)$$

dan,

$$\text{operasi plus; } a \otimes b \stackrel{\text{def}}{=} a + b. \quad (2.4)$$



Oleh karena itu, berdasarkan konsep dan definisi pada *perasamaan* (2.1) dan (2.2),

untuk setiap  $a \in \mathbb{R}_{\max}$  kita dapatkan,

- a. Berdasarkan konsep elemen netral dan definisi operasi maksimum

$$\max(a, -\infty) = \max(-\infty, a) = a$$

$$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$$

- b. Berdasarkan konsep elemen netral dan definisi operasi penjumlahan

$$a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$$

$$a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon.$$

Himpunan  $\mathbb{R}_{\max}$  bersama dengan operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  disebut *aljabar max-plus* dan dinotasikan sebagai berikut

$$\mathcal{R}_{\max} = (\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e).$$

Seperti pada aljabar biasa, operasi  $\otimes$  memiliki prioritas lebih besar dari pada operasi  $\oplus$ .

### Contoh 2.1

Menentukan nilai  $5 \otimes -9 \oplus 7 \otimes 1$ , telah dipahami bahwa  $(5 \otimes -9) \oplus (7 \otimes 1)$ .

Catatan bahwa  $(5 \otimes -9) \oplus (7 \otimes 1) = 8$ , sedangkan  $5 \otimes -(9 \oplus 7) \otimes 1 = 13$ .

### 2.1.2 Definisi dan Teorema Aljabar Max-Plus

**Definisi 2.3** (Subiono, 2015) Suatu semiring  $(\mathcal{S}, +, \times)$ , adalah suatu himpunan tak kosong  $\mathcal{S}$  disertai dengan dua operasi biner  $+$  dan  $\times$ , yang memenuhi aksioma berikut:

- a. Semigrup komutatif  $(\mathcal{S}, +)$  dengan elemen netral  $0$ , yaitu  $\forall x, y, z \in \mathcal{S}$

$$x + y = y + x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

- b. Semigrup  $(\mathcal{S}, \times)$  dengan elemen satuan  $1$ , yaitu  $\forall x, y, z \in \mathcal{S}$  memenuhi

$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

$$x \times 1 = 1 \times x = x.$$

- c. Sifat penyerapan elemen netral  $0$  terhadap operasi  $\times$ , yaitu  $\forall x \in \mathcal{S}$  memenuhi



$$x \times 0 = 0 \times x = 0.$$

d. Operasi  $\times$  distributif terhadap  $+$ , yaitu  $\forall x, y, z \in \mathcal{S}$  berlaku

$$(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z),$$

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z).$$

**Definisi 2.4** (Subiono, 2015) Bila suatu semiring  $(\mathcal{S}, +, \times)$  terhadap operasi  $\times$  berlaku  $\forall x, y \in \mathcal{S}, x \times y = y \times x$ , maka dikatakan semiring komutatif.

**Definisi 2.5** (Subiono, 2015) Bila suatu semiring  $(\mathcal{S}, +, \times)$  mempunyai sifat **idempoten** terhadap operasi  $+$  yaitu untuk setiap  $x$  di  $\mathcal{S}$  berlaku  $x + x = x$ , maka dikatakan semiring idempoten atau **dioid**.

**Definisi 2.6** (Subiono, 2015) Semiring  $\mathbb{R}_{\max}$  merupakan semiring komutatif yang sekaligus idempoten, sebab untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}_{\mathcal{E}}$  berlaku

$$x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x$$

dan,

$$x \otimes x = \max\{x, x\} = x.$$

**Definisi 2.7** (Subiono, 2015) Suatu semiring komutatif  $(\mathcal{S}, +, \times)$  dinamakan *semifield* bila setiap elemen  $x$  di  $\mathcal{S} - \{0\}$  ada  $x^{-1}$  sehingga,

$$x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1.$$

**Teorema 2.1** (Subiono, 2015) Diberikan semiring  $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ . Idempoten dari  $\oplus$  berakibat bahwa elemen invers terhadap  $\oplus$  tidak ada.

### 2.1.3 Sifat-sifat Aljabar Max-Plus

Berikut ini disampaikan sifat-sifat aljabar yang dimiliki aljabar max-plus.

Operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  yang didefinisikan dalam *persamaan* (2.1) dan (2.2) memiliki beberapa kesamaan dengan sifat-sifat aljabar biasa. Sebagai contoh, untuk setiap  $x, y, z \in \mathbb{R}_{\max}$ , hal ini berlaku



$$\begin{aligned}
 x \otimes (y \oplus z) &= x + \max(y, z) \\
 &= \max(x + y, x + z) \\
 &= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z).
 \end{aligned}$$

Berikut ini diberikan sifat aljabar dari aljabar max-plus:

a. Asosiatif

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{\max} : x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

dan,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{\max} : x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$$

b. Komutatif

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_{\max} : x \oplus y = y \oplus x$$

dan,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_{\max} : x \otimes y = y \otimes x.$$

c. Distributif  $\otimes$  terhadap  $\oplus$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{\max} : x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z).$$

d. Eksistensi elemen netral

$$\forall x, \varepsilon \in \mathbb{R}_{\max} : x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x.$$

e. Existensi elemen identitas

$$\forall x, e \in \mathbb{R}_{\max} : x \otimes e = e \otimes x = x.$$

f. Sifat penyerapan elemen netral terhadap operasi  $\otimes$

$$\forall x, \varepsilon \in \mathbb{R}_{\max} : x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon.$$

g. Idempoten

$$\forall x \in \mathbb{R}_{\max} : x \oplus x = x.$$

#### 2.1.4 Definisi Pangkat pada Aljabar Max-Plus

Pangkat dijelaskan di aljabar max-plus secara alami menggunakan sifat-sifat asosiatif.

**Definisi 2.8** Notasikan himpunan bilangan asli termasuk nol oleh  $\mathbb{N}$  dan didefinisikan, untuk setiap  $x \in \mathbb{R}_{\max}$ ,  $x^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}}$ , untuk semua  $n \in \mathbb{N}$ , dengan  $n \neq 0$ .



Akan tetapi, untuk  $n = 0$  kita definisikan  $x^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} e (= 0)$ . Perhatikan bahwa  $x^{\otimes n}$ , untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$ , dibaca dalam aljabar konvensional sebagai berikut, untuk setiap  $x \in \mathbb{R}_{\max}$ ,

$$x^{\otimes n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{x + x + \cdots + x}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}} = n \times x. \quad (2.5)$$

**Contoh 2.2**

$$5^{\otimes 3} = 3 \times 5 = 15.$$

Terinspirasi oleh hal ini, kita kenalkan hal yang sama mengenai pangkat negatif bilangan real, seperti contoh di bawah ini.

**Contoh 2.3**

$$8^{\otimes -2} = -2 \times 8 = -16 = 16^{\otimes -1}.$$

Dengan pengertian yang sama, pangkat dalam aljabar max-plus dapat dijelaskan sebagai berikut,

$$x^{\otimes \alpha} = \alpha \times x \text{ untuk } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

**Contoh 2.4**

$$8^{\otimes \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

dan,

$$12^{\otimes -\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \times 12 = -3 = 3^{\otimes -1}.$$

**2.1.5 Graf atas Aljabar Max-Plus**

Matriks dan Graf (Subiono, 2015) Misalkan  $A \in R_{\max}^{n \times n}$ , suatu graf berarah dari matriks  $A$  adalah  $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{N}, \mathcal{D})$ . Graf  $\mathcal{G}(A)$  mempunyai  $n$  titik, himpunan semua titik dari  $\mathcal{G}(A)$  dinyatakan  $\mathcal{N}$ . Himpunan semua *arc* (garis) dari graf  $\mathcal{G}(A)$  atau pasangan terurut dari beberapa titik di  $\mathcal{N}$  dinotasikan oleh  $\mathcal{D}$ . Suatu garis dari titik  $j$  ke titik  $i$  ada bila  $a_{i,j} \neq \varepsilon$ , garis ini dinotasikan oleh  $(j, i)$ , dengan demikian



$(j, i) \in \mathcal{D}$ . Bobot dari garis  $(j, i)$  adalah nilai dari  $a_{i,j}$  yang dinotasikan oleh  $w(i, j) = a_{i,j} \in R_{\max}$ . Bila  $a_{i,j} = \varepsilon$ , maka garis  $(i, j)$  tidak ada. Suatu barisan garis  $(i_1, i_2), (i_2, i_3) \dots, (i_{l-1}, i_l)$  dari suatu graf dinamakan suatu *path*. Suatu *path* dikatakan *elementer* bila tidak ada titik terjadi dua kali dalam *path* tersebut. Suatu sirkuit adalah *path elementer tertutup*, yaitu  $(i_1, i_2), (i_2, i_3) \dots, (i_{l-1}, i_l)$ . Bobot dari suatu *path*  $p = (i_1, i_2), (i_2, i_3) \dots, (i_{l-1}, i_l)$  dinotasikan oleh  $|p|_w$  dan diberikan oleh  $|p|_w = w(i_1, i_2) + w(i_2, i_3) + \dots + w(i_{l-1}, i_l) = (a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \dots + a_{i_l, i_{l-1}})$ , sedangkan panjang dari *path*  $p$  atau banyaknya garis dalam *path*  $p$  dinotasikan oleh  $|p|_l$ . Himpunan semua *path* dari titik  $i$  ke titik  $j$  dengan panjang  $k$  dinotasikan oleh  $P(j, i; k)$ . Bobot rata-rata dari *path*  $p$  adalah bobot dari  $p$  dibagi oleh banyaknya garis dalam *path*  $p$ , yaitu

$$\frac{|p|_w}{|p|_l} = \frac{(a_{i_2, i_1} + a_{i_3, i_2} + \dots + a_{i_l, i_{l-1}})}{(l-1)} \quad (2.7)$$

Sirkuit rata-rata adalah bobot rata-rata dari suatu sirkuit. Sembarang sirkuit dengan sirkuit rata-rata maksimum dinamakan *sirkuit kritis*. Suatu graf dikatakan *strongly connected* bila suatu *path* ada untuk setiap titik  $i$  ke setiap titik  $j$ . Bila graf  $\mathcal{G}(A)$  adalah *strongly connected*, maka matrik  $A$  juga dikatakan *irreducible* (tak-tereduksi).

Graf kritis dari  $\mathcal{G}(A)$  dinotasikan dengan  $\mathcal{G}^c(A) = (\mathcal{N}^c(A), \mathcal{D}^c(A))$  adalah graf yang terdiri dari himpunan titik dan *arc* yang berada pada sirkuit kritis dari graf  $\mathcal{G}(A)$ .

Graf dan matriks representasi dari graf saling berkaitan satu sama lain. Kondisi dari suatu graf dapat dibaca melalui matriks representasinya. Berikut diberikan teorema yang menjelaskan bahwa elemen  $[A^{\otimes k}]_{i,j}$ , menghasilkan bobot maksimal dari suatu *path* dengan panjang  $k$  dari titik  $j$  ke titik  $i$ , asalkan suatu *path* ada.



**Teorema 2.2** (Subiono, 2015) Diberikan  $A \in R_{\max}^{n \times n}$ . Untuk setiap  $k \geq 1$  berlaku

$$[A^{\otimes k}]_{i,j} = \max\{|p|_w : p \in P(j, i; k)\},$$

dengan  $[A^{\otimes k}]_{i,j} = \varepsilon$  pada kasus  $P(j, i; k)$  adalah himpunan kosong, yaitu ketika tidak ada path dengan panjang  $k$  dari  $j$  ke  $i$  dalam  $\mathcal{G}(A)$ .

Dari teorema 2.2 didapat, untuk suatu matriks persegi  $A \in R_{\max}^{n \times n}$ , matriks  $A^+$  didefinisikan sebagai

$$A^+ \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^{\infty} A^{\otimes i} \quad (2.8)$$

Catatan bahwa, elemen  $[A^{\otimes k}]_{i,j}$  adalah bobot maksimum dari semua path dengan panjang  $k$  dari titik  $j$  ke titik  $i$ . Jadi elemen  $[A^+]_{i,j}$  adalah bobot maksimum dari path-path dengan panjang sebarang dari titik  $j$  ke titik  $i$ , sehingga didapat

$$[A^+]_{i,j} = \max\{[A^{\otimes k}]_{i,j} \mid k \geq 1\}.$$

Perhatikan bahwa matriks pangkat  $A^{\otimes i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, +\infty$ . Berikut ini diberikan suatu teorema mengenai  $A^+$  dengan matriks pangkat  $A^{\otimes i}$  berhenti untuk  $i = n$  dengan  $n$  adalah ukuran dari matriks  $A$  yaitu banyaknya baris dan banyaknya kolom dari  $A$ .

**Teorema 2.3** (Subiono, 2015) Misalkan  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  sedemikian hingga setiap sirkuit di  $\mathcal{G}(A)$  mempunyai bobot sirkuit rata-rata kurang atau sama dengan 0. Maka,

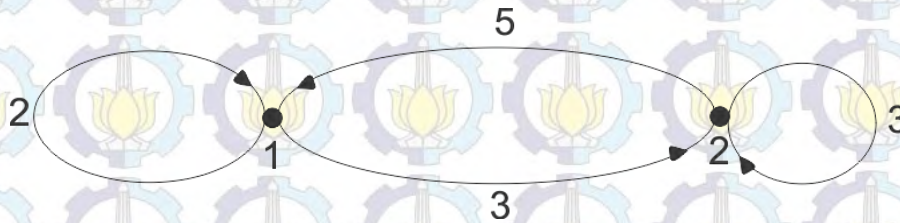
$$A^+ \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=1}^{\infty} A^{\otimes i} = A \otimes A^{\otimes 2} \otimes \dots \otimes A^n \in R_{\max}^{n \times n}. \quad (2.9)$$



**Contoh 2.5** (Subiono, 2012)

Misalkan matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ .

Matriks  $A$  dinyatakan dalam graf berarah sebagai berikut.



Gambar 2.1 Graf Berarah Suatu Lintasan Kereta

Gambar graf dari matriks  $A$  tampak ada 3 sirkuit yaitu:  $(1,1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(2,1)$  dan  $(2,2)$ . Masing-masing sirkuit mempunyai rata-rata bobot sirkuit  $2/1 = 2$ ,  $(5 + 3)/2 = 4$ , dan  $3/1 = 3$ . Tampak bahwa sirkuit rata-rata maksimum adalah 4 terjadi pada sirkuit  $(1,2)$ ,  $(2,1)$ . Juga tampak bahwa graf  $\mathcal{G}(A)$  adalah *strongly connected*.

### 2.1.5 Matriks dan Vektor atas Aljabar Max-Plus

**Definisi 2.9** (Subiono, 2015) Himpunan matriks ukuran  $n \times m$  dalam *aljabar max-plus* dinotasikan oleh  $\mathbb{R}_{max}^{n \times m}$ . Untuk  $n \in \mathbb{N}$  dengan  $n \neq 0$ , didefinisikan sebagai,

$$\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.10)$$

Elemen  $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$  baris ke- $i$  kolom ke- $j$  dinotasikan oleh  $a_{i,j}$  untuk  $i \in \underline{n}$  dan  $j \in \underline{m}$ .

Dalam hal ini matriks  $A$  ditulis sebagai,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

Biasanya elemen  $a_{i,j}$  juga dinotasikan sebagai  $[A]_{i,j}$ ,  $i \in \underline{n}, j \in \underline{m}$ .



**Definisi 2.10** (Subiono, 2015) Penjumlahan matriks  $A, B \in R_{\max}^{n \times n}$  dinotasikan oleh  $A \oplus B$ , penjumlahan matriks didefinisikan sebagai,

$$[A \oplus B]_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} = \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\} = \quad (2.10)$$

untuk  $i \in \underline{n}$ , dan  $j \in \underline{m}$ .

**Contoh 2.6** (Subiono, 2015) diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & e \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ \varepsilon & 10 \end{bmatrix},$$

maka,

$$[A \oplus B]_{1,1} = 1 \oplus -3 = \max\{1, -3\} = 1$$

$$[A \oplus B]_{1,2} = e \oplus 3 = \max\{0, 3\} = 3$$

$$[A \oplus B]_{2,1} = 2 \oplus \varepsilon = \max\{2, -\infty\} = 2$$

$$[A \oplus B]_{2,2} = 5 \oplus 10 = \max\{5, 10\} = 10$$

Dengan menggunakan notasi matriks didapat

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Catatan bahwa, untuk  $A, B \in R_{\max}^{n \times n}$  berlaku bahwa  $A \oplus B = B \oplus A$ , sebab

$$[A \oplus B]_{i,j} = \max\{a_{i,j}, b_{i,j}\} = \max\{b_{i,j}, a_{i,j}\} = [B \oplus A]_{i,j},$$

untuk  $i \in \underline{n}$  dan  $i \in \underline{m}$ .

**Definis 2.11** Perkalian dengan skalar matriks  $A \in R_{\max}^{n \times m}$ , dan skalar  $\alpha \in R_{\max}$

Perkalian  $\alpha \otimes A$  didefinisikan (Subiono, 2015) sebagai

$$[\alpha \otimes A]_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \otimes a_{i,j}$$

untuk  $i \in \underline{n}$  dan  $j \in \underline{m}$ . Sebagai contoh, misalkan matriks  $A$  seperti dalam Contoh 2.3 dan  $\alpha = 3$ , maka

$$[\alpha \otimes A]_{1,1} = 3 \otimes 1 = 3 + 1 = 4$$

$$[\alpha \otimes A]_{1,2} = 3 \otimes e = 3 + 0 = 3$$

$$[\alpha \otimes A]_{2,1} = 3 \otimes 2 = 3 + 2 = 5$$

$$[\alpha \otimes A]_{2,2} = 3 \otimes 5 = 3 + 5 = 8$$



Dengan menggunakan notasi matriks didapat

$$\alpha \otimes A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Untuk matriks  $A \in R_{\max}^{n \times p}$  dan  $B \in R_{\max}^{p \times m}$  perkalian matriks  $A \otimes B$  didefinisikan sebagai,

$$\begin{aligned} [A \otimes B]_{i,j} &= \bigoplus_{k=1}^p a_{i,k} \otimes b_{k,j} \\ &= \max_{k \in \underline{p}} \{a_{i,k} + b_{k,j}\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

untuk  $i \in \underline{n}$  dan  $j \in \underline{m}$ .

Perkalian matriks ini serupa dalam perkalian matriks aljabar biasa dimana  $+$  diganti dengan  $\max$  dan  $\times$  dengan plus.

**Contoh 2.4** (Subiono, 2015) diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & e \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ \varepsilon & 10 \end{bmatrix}$$

maka,

$$[A \otimes B]_{1,1} = 1 \otimes -3 \oplus e \otimes \varepsilon = \max\{1 + (-3), 0 + (-\infty)\} = -2$$

$$[A \otimes B]_{1,2} = 1 \otimes 3 \oplus e \otimes 10 = \max\{1 + 3, 0 + 10\} = 10$$

$$[A \otimes B]_{2,1} = 2 \otimes -3 \oplus 5 \otimes \varepsilon = \max\{2 + (-3), 5 + (-\infty)\} = -1$$

$$[A \otimes B]_{2,2} = 2 \otimes 3 \oplus 5 \otimes 10 = \max\{2 + 3, 5 + 10\} = 15$$

Dengan menggunakan notasi matriks didapat,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 15 \end{bmatrix}.$$

**Teorema 2.4** Beberapa sifat berikut berlaku untuk sembarang matriks  $A, B$ , dan  $C$  dengan ukuran yang bersesuaian dan operasi matriks terdefinisi.

- $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
- $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
- $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
- $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
- $A \oplus A = A$



### 2.1.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen atas Aljabar Max-Plus

Pengertian nilai eigen (nilai karakteristik) dan vektor eigen (vektor karakteristik) yang bersesuaian dari suatu matriks persegi  $A$  berukuran  $n \times n$  sebagaimana dijumpai dalam aljabar linear biasa juga dijumpai dalam aljabar max-plus, yaitu bila diberikan suatu persamaan

$$A \otimes x = \lambda \otimes x \quad (2.12)$$

dalam hal ini masing-masing vektor  $x \in R_{\max}^n$  dan  $\lambda \in R$  dinamakan vektor eigen dan nilai eigen dari matriks  $A$  dengan vektor  $x \neq (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)^T$  (Hahlia Rakhmawati, 2012). Algoritma untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks  $A \in R_{\max}^{n \times n}$  dilakukan secara berulang dari bentuk persamaan linear

$$x(k+1) = A \otimes x(k), k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.13)$$

Perilaku periodik dari persamaan (2.13) baik untuk matriks  $A$  yang tak tereduksi maupun tereduksi erat kaitannya dengan apa yang dinamakan *vektor waktu sikel* yang didefinisikan sebagai:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} \quad (2.14)$$

Limit ini ada untuk setiap keadaan awal  $x(0) \neq (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)^T$  dan untuk matriks dalam persamaan (2.13) yang tereduksi selalu bisa dijadikan suatu bentuk blok matriks segitiga atas, yang diberikan oleh bentuk:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & A_{q,q} \end{bmatrix}$$



dan untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, q$ ,  $A_{i,j}$  berukuran  $q_i \times q_i$  adalah matriks tak tereduksi dengan nilai eigen  $\lambda_i$ . Dalam hal yang demikian vektor waktu siklus diberikan oleh

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_q \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

dengan,

$$\lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

dan vektor  $\lambda_i$  berukuran  $q_i \times 1$ . Kejadian nilai eigen dari matriks persegi  $A$  diberikan dalam teorema berikut.

**Teorema 2.5** (Subiono, 2012) Bila untuk sembarang keadaan awal  $x(0) \neq \varepsilon$  sistem persamaan (2.13) memenuhi  $x(p) = c \otimes x(q)$  untuk beberapa bilangan bulat  $p$  dan  $q$  dengan  $p > q \geq 0$  dan beberapa bilangan real  $c$ , maka

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = [\lambda \quad \lambda \quad \dots \quad \lambda]^T \quad (2.17)$$

dengan  $\lambda = \frac{c}{p-q}$ . Selanjutnya  $\lambda$  adalah suatu nilai eigen dari matriks  $A$  dengan vektor eigen diberikan oleh

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)). \quad (2.18)$$

Berdasarkan Teorema 2.5, menginspirasi suatu algoritma untuk mendapatkan nilai eigen sekaligus vektor eigen dari suatu matriks persegi  $A$  yang dikenal dengan *Algoritma Power* (Subiono, 2010), yaitu sebagai berikut :



- Mulai dari sembarang vektor awal  $x(0) \neq \varepsilon$ .
- Iterasi persamaan (2.13) sampai ada bilangan bulat  $p > q \geq 0$  dan bilangan real  $c$  sehingga suatu perilaku periodik terjadi, yaitu  $x(p) = c \otimes x(q)$ .
- Hitung nilai eigen  $\lambda = \frac{c}{p-q}$ .
- Hitung vektor eigen  $v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1))$ .

Algoritma tersebut sudah diimplementasikan dengan *Scilab* dalam *Max-Plus Toolbox* versi 1.1.0 (Subiono, 2008).

Informasi mengenai nilai eigen dan vektor eigen dari matriks  $A$  dapat digunakan untuk menyusun penjadwalan yang regular jika vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen tersebut dijadikan sebagai nilai awal maka akan terbentuk jadwal yang regular dan periode jadwal sebesar nilai eigen (Nahlia Rakhmawati, 2012).

**Contoh 2.7.** (Subiono, 2012) Diberikan matriks tak tereduksi

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \varepsilon & A_{2,2} \end{bmatrix}$$

dengan  $A_{1,1} = 2, A_{1,2} = [2 \quad \varepsilon]$  dan  $A_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ ,

Jelas bahwa matriks  $A_{1,1}$  dan  $A_{1,2}$  matriks tak tereduksi. Dengan demikian matriks  $A$  diberikan oleh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 4 \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Untuk keadaan awal

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

didapat evolusi keadaan,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}, \dots$$



Terlihat bahwa  $x(2) = 6 \otimes x(0)$  dalam hal ini  $q = 0, p = 2$  dan  $c = 6$ . Jadi nilai eigen dari matriks  $A$  diberikan oleh

$$\lambda = \frac{c}{p-q} = \frac{6}{2-0} = 3$$

dan vektor eigen dari matriks  $A$  adalah

$$v = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1))$$

$$v = \bigoplus_{i=1}^{2-0} (\lambda^{\otimes(2-0-i)} \otimes x(0+i-1))$$

$$v = \bigoplus_{i=1}^2 3^{\otimes(2-i)} \otimes x(i-1)$$

$$= \left( 3^{\otimes 1} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \oplus \left( 3^{\otimes 0} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan pengecekan pada hasil yang didapat, maka

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & 4 \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

## 2.2 Himpunan Kabur dan Bilangan Kabur

### 2.2.1 Himpunan Kabur

Suatu himpunan  $A$  dalam semesta  $X$  dapat dinyatakan dengan *fungsi karakteristik*  $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  yang didefinisikan dengan aturan sebagai berikut;

$$\chi_A(x) \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in A \\ 0 & \text{jika } x \notin A \end{cases} \text{ untuk setiap } x \in X. \quad (2.19)$$

Himpunan kabur  $\tilde{K}$  dalam semesta  $X$  dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut  $\tilde{K} = \{(x, \mu_{\tilde{K}}(x)) | x \in X\}$  dimana  $\mu_{\tilde{K}}(x)$  adalah *fungsi keanggotaan* himpunan kabur  $\tilde{K}$ , yang merupakan pemetaan dari semesta  $X$  ke



interval tertutup  $[0, 1]$ . *Pendukung* (*support*) suatu himpunan kabur  $\tilde{K}$ , dengan lambang  $pend(\tilde{K})$ , adalah himpunan tegas (*crisp*) yang memuat semua anggota semesta yang mempunyai derajat *keanggotaan* tak nol dalam  $\tilde{K}$ , yaitu  $pend(\tilde{K}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{K}}(x) > 0\}$ . *Tinggi* (*height*) suatu himpunan kabur  $\tilde{K}$ , dengan lambang  $tinggi(\tilde{K})$ , didefinisikan sebagai  $tinggi(\tilde{K}) = \sup_{x \in X} \{\mu_{\tilde{K}}(x)\}$ . Suatu himpunan kabur  $\tilde{K}$  dikatakan *normal* jika  $tinggi(\tilde{K}) = 1$ .

Dua buah himpunan kabur  $\tilde{K}$  dan  $\tilde{L}$  dalam semesta  $X$  dikatakan *sama*, dengan lambang  $\tilde{K} = \tilde{L}$  jika  $\mu_{\tilde{K}}(x) = \mu_{\tilde{L}}(x)$  untuk setiap  $x \in X$ . Himpunan kabur  $\tilde{K}$  dikatakan merupakan *himpunan bagian* dari himpunan kabur  $\tilde{L}$ , dengan lambang  $\tilde{K} \subseteq \tilde{L}$  jika  $\mu_{\tilde{K}}(x) \leq \mu_{\tilde{L}}(x)$  untuk setiap  $x \in X$ .

*Gabungan* dua buah himpunan kabur  $\tilde{K}$  dan  $\tilde{L}$  adalah himpunan kabur  $\tilde{K} \cup \tilde{L}$  dengan fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{K} \cup \tilde{L}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{K}}(x), \mu_{\tilde{L}}(x)\}$  untuk setiap  $x \in X$ .

Sedangkan *irisan* dua buah himpunan kabur  $\tilde{K}$  dan  $\tilde{L}$  adalah himpunan kabur  $\tilde{K} \cap \tilde{L}$  dengan fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{K} \cap \tilde{L}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{K}}(x), \mu_{\tilde{L}}(x)\}$  untuk setiap  $x \in X$ .

Jika  $\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_n$  adalah himpunan-himpunan kabur berturut-turut dalam semesta  $X_1, \dots, X_n$ , maka hasil kali Cartesius  $\tilde{K}_1 \times \dots \times \tilde{K}_n$  adalah himpunan kabur dalam  $X_1 \times \dots \times X_n$  dengan fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{K}_1 \times \dots \times \tilde{K}_n}(X_1, \dots, X_n) = \min\{\mu_{\tilde{K}_1}(x), \dots, \mu_{\tilde{K}_n}(x)\}$ .

Untuk suatu bilangan  $\alpha \in [0, 1]$ , *potongan*  $-\alpha$  suatu himpunan kabur  $\tilde{K}$ , dengan lambang  $pot^\alpha(\tilde{K}) = K^\alpha$ , adalah himpunan crisp (tegas) yang memuat semua elemen semesta dengan derajat keanggotaan dalam  $\tilde{K}$  lebih besar atau sama dengan  $\alpha$ , yang didefinisikan sebagai  $K^\alpha = \{x \in X | \mu_{\tilde{K}}(x) \geq \alpha\}$ . Salah satu sifat potongan  $-\alpha$  suatu himpunan kabur  $\tilde{K}$  adalah jika  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  maka  $K^{\alpha_2} \subseteq K^{\alpha_1}$ , yang disebut dengan sifat *tersarang* (*nested*). Suatu himpunan kabur  $\tilde{K}$  dikatakan *konveks* jika  $K^\alpha$  konveks untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Teorema 2.6** (Susilo, 2006) Teorema Dekomposisi: Jika  $K^\alpha$  adalah potongan  $-\alpha$  himpunan kabur  $\tilde{K}$  dalam semesta  $X$  dan  $\tilde{K}^\alpha$  adalah himpunan kabur dalam  $X$



dengan fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{K}^\alpha}(x) = \alpha \chi_{K^\alpha}(x)$ , dimana  $\chi_{K^\alpha}$  adalah fungsi karakteristik himpunan  $K^\alpha$ , maka

$$\tilde{K} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \tilde{K}^\alpha. \quad (2.20)$$

Teorema dekomposisi menyatakan bahwa suatu himpunan kabur dapat dinyatakan dengan menggunakan potongan-potongan- $\alpha$ -nya. Sifat-sifat himpunan tegas dapat digeneralisir ke dalam himpunan kabur melalui representasi potongan-potongan- $\alpha$ -nya, dengan memprasyaratkan bahwa sifat tersebut dipenuhi oleh semua potongan- $\alpha$  dari himpunan kabur yang bersangkutan.

Telah ditunjukkan dalam Susilo (2006) bahwa  $\tilde{K} \subseteq \tilde{L}$  jika dan hanya jika  $K^\alpha \subseteq L^\beta$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ . Dengan menunjukkan relasi ketermuatan, lebih lanjut dapat ditunjukkan bahwa  $\tilde{K} = \tilde{L}$  jika dan hanya jika  $K^\alpha = L^\alpha$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ .

**Teorema 2.7** (Pedrycz & Gomide, 2007) (*Teorema Representasi*) Jika  $\{\tilde{K}^\alpha\}$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$  adalah keluarga himpunan dalam semesta  $X$  yang memenuhi sifat tersarang (*nested*), yaitu jika  $\alpha \leq \beta$  maka berlaku  $K^\alpha \supseteq L^\beta$  untuk setiap  $\alpha, \beta \in [0,1]$ , maka terdapat dengan tunggal himpunan kabur  $\tilde{L}$  dalam semesta  $X$  sedemikian hingga  $K^\alpha = L^\alpha$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ .

Prinsip Perluasan (Extension Principel): Misalkan  $f$  adalah fungsi dari  $X_1 \times \dots \times X_n$  ke  $Y$ , dan  $\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_n$  adalah himpunan-himpunan kabur berturut-turut dalam semesta  $X_1, \dots, X_n$ . Fungsi  $f$  dapat diperluas menjadi fungsi bernilai kabur  $\tilde{f}: \mathbf{F}(X_1 \times \dots \times X_n) \rightarrow \mathbf{F}(Y)$ , dimana  $\mathbf{F}(X_1 \times \dots \times X_n)$  dan  $\mathbf{F}(Y)$  berturut-turut adalah himpunan kuasa kabur dari semesta  $X_1 \times \dots \times X_n$  dan  $Y$ , yaitu himpunan semua himpunan kabur dalam  $X_1 \times \dots \times X_n$  dan dalam  $Y$ , dengan aturan bahwa untuk setiap himpunan kabur  $\tilde{K}_1 \times \dots \times \tilde{K}_n \in \mathbf{F}(X_1 \times \dots \times X_n)$ ,  $\tilde{f}(\tilde{K}_1 \times \dots \times \tilde{K}_n)$  adalah himpunan kabur dalam  $\mathbf{F}(Y)$  dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut



$$\mu_{\tilde{f}(\tilde{R}_1 \times \dots \times \tilde{R}_n)}(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x_1, \dots, x_n)} \min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{R}_n}(x_n)\} & \text{jika } (\exists(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n, y = f(x_1, \dots, x_n)) \\ 0 & \text{jika } (\forall(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n, y \neq f(x_1, \dots, x_n)) \end{cases} \quad (2.21)$$

### 2.2.2 Bilangan Kabur

**Definisi 2.12** *Bilangan kabur*  $\tilde{a}$  didefinisikan sebagai himpunan kabur dalam semesta  $\mathbf{R}$  yang memenuhi sifat berikut:

a. Normal, yaitu jika *tingginya* = 1.

atau, normal, yaitu  $a^1 \neq \emptyset$

b. Mempunyai *support* terbatas

atau, *pend*( $\tilde{a}$ ) terbatas.

c. Semua  $\alpha$  – *cutnya* berupa selang tertutup dalam  $\mathbf{R}$

Untuk setiap  $\alpha \in (0,1]$ ,  $a^\alpha$  adalah interval tertutup dalam  $\mathbf{R}$ , yaitu terdapat

$\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha \in \mathbf{R}, \underline{a}^\alpha \leq \overline{a}^\alpha$ , sehingga  $a^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha] = \{x \in \mathbf{R} | \underline{a}^\alpha \leq x \leq \overline{a}^\alpha\}$

d. Konveks

Untuk  $\alpha = 0$ , didefinisikan bahwa

$$a^0 = [\inf(\text{pend}(\tilde{a})), \sup(\text{pend}(\tilde{a}))].$$

Mengingat setiap interval tertutup dalam  $\mathbf{R}$  konveks maka  $a^\alpha$  konveks untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ , sehingga  $\tilde{a}$  konveks.

Suatu bilangan real  $a$  dapat dipandang sebagai *bilangan kabur titik*  $\tilde{a}$

adalah bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x = a \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$



Contoh bilangan kabur yang sederhana adalah *bilangan kabur segitiga* dan *bilangan kabur trapesium*.

a. Bilangan Kabur Segitiga

Bilangan kabur segitiga  $\tilde{a}$ , dengan lambang *BKS*  $(a_1, a, a_2)$ , adalah bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a - a_1}, & \text{untuk } a_1 \leq x \leq a; \\ \frac{a_2 - x}{a_2 - a}, & \text{untuk } a \leq x \leq a_2; \\ 0, & \text{untuk lainnya,} \end{cases}$$

untuk suatu  $a_1 \leq a \leq a_2$ .

Pendukung (*support*)  $\tilde{a}$  di atas adalah interval terbuka  $(a_1, a_2)$  dan rumus potongan  $-\alpha$  adalah

$$a^\alpha = \begin{cases} [(a - a_1)\alpha + a_1, -(a_2 - a)\alpha + a_2] & 0 < \alpha \leq 1 \\ [a_1, a_2], & \alpha = 0. \end{cases}$$

b. Bilangan Kabur Trapezium

Bilangan kabur trapesium  $\tilde{a}$ , dengan lambang *BKT*  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ , adalah suatu bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} & \text{untuk } a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & \text{untuk } a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & \text{untuk } a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}, \text{dimana } a_1 \neq a_2 \text{ dan } a_3 \neq a_4.$$

*BKT*  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  kadang cukup dituliskan dengan  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ . Rumus potongan  $-\alpha$   $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  adalah

$$a^\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, (a_3 - a_4)\alpha + a_4].$$

Pendukung (*support*)  $\tilde{a}$  di atas adalah interval terbuka  $(a_1, a_4)$ .

**Contoh 2.8**

Suatu keluarga interval tertutup dalam  $\mathbf{R}$   $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$  dikatakan *tersarang* jika untuk  $\alpha \leq \beta$  maka berlaku  $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \supseteq [a_1(\beta), a_2(\beta)]$  untuk setiap  $\alpha, \beta \in [0, 1]$



### 2.2.3 Bilangan Kabur Operasi Aritmatika Bilangan Kabur

Operasi-operasi aritmatika bilangan kabur dapat didefinisikan dengan menggunakan prinsip perluasan atau dengan menggunakan potongan  $-\alpha$ . Dengan menggunakan prinsip perluasan didefinisikan operasi-operasi bilangan kabur berikut. Misal  $\tilde{a}$  dan  $\tilde{b}$  adalah bilangan-bilangan kabur.

a. Maksimum  $\tilde{a}$  dan  $\tilde{b}$ , yaitu  $\tilde{a} \oplus \tilde{b}$ , adalah himpunan kabur dengan fungsi

$$\text{keanggotaan} : \mu_{\tilde{a} \oplus \tilde{b}}(z) = \sup_{z=x \oplus y} \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\}$$

b. Penjumlahan  $\tilde{a}$  dan  $\tilde{b}$ , yaitu  $\tilde{a} \otimes \tilde{b}$ , adalah himpunan kabur dengan fungsi

$$\text{keanggotaan} : \mu_{\tilde{a} \otimes \tilde{b}}(z) = \sup_{z=x \otimes y} \min\{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\}.$$

Sedangkan dengan menggunakan potongan  $-\alpha$  didefinisikan operasi-operasi bilangan kabur berikut. Misalkan  $\tilde{a}$  dan  $\tilde{b}$  adalah bilangan-bilangan kabur, dengan  $a^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha]$  dan  $b^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha]$ , dimana  $\underline{a}^\alpha$  dan  $\overline{a}^\alpha$  berturut-turut adalah batas bawah dan batas atas interval  $a^\alpha$ , sedangkan untuk  $\underline{b}^\alpha$  dan  $\overline{b}^\alpha$  berturut-turut adalah batas bawah dan batas atas interval  $b^\alpha$ .

a. Maksimum  $\tilde{a}$  dan  $\tilde{b}$ , yaitu  $\tilde{a} \oplus \tilde{b}$ , adalah himpunan kabur dengan

potongan  $-\alpha$ -nya adalah interval  $[\underline{a}^\alpha \oplus \underline{b}^\alpha, \overline{a}^\alpha \oplus \overline{b}^\alpha]$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ .

b. Penjumlahan  $\tilde{a}$  dan  $\tilde{b}$ , yaitu  $\tilde{a} \otimes \tilde{b}$ , adalah himpunan kabur dengan

potongan  $-\alpha$ -nya adalah interval  $[\underline{a}^\alpha \otimes \underline{b}^\alpha, \overline{a}^\alpha \otimes \overline{b}^\alpha]$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ .

## 2.3 Sistem Jaringan Transportai Bus Rapid Transit Trans Jogja

Trans Jogja adalah sebuah sistem transportasi bus cepat, murah dan ber-AC di seputar Kota Yogyakarta, Indonesia. Trans Jogja merupakan salah satu bagian dari program penerapan *Bus Rapid Transit (BRT)* yang dicanangkan



Departemen Perhubungan. Sistem ini mulai dioperasikan pada awal bulan Maret 2008 oleh Dinas Perhubungan, Pemerintah Provinsi DIY. Motto pelayanannya adalah Aman, Nyaman, Andal, Terjangkau, dan Ramah lingkungan. Sistem yang menggunakan bus (berukuran sedang) ini menerapkan sistem tertutup, dalam arti penumpang tidak dapat memasuki bus tanpa melewati gerbang pemeriksaan, seperti juga Trans Jakarta (Lova, Isye Novranti, 2010).

### 2.3.1 Trayek BRT Trans Jogja

Sistem jaringan transportasi *BRT* Trans Jogja terdiri dari 8 jalur/trayek, yakni 1A, 1B, 2A, 2B, 3A, 3B, 4A dan 4B. Berikut ini dirinci trayek beserta halte yang dilaluinya.

#### a. Trayek 1A: Terminal Prambanan - Bandara Adisucipto - Stasiun Tugu - Malioboro - JEC:

Terminal Prambanan - S5. Kalasan - Bandara Adisucipto - S3. Maguwoharjo - Janti (bawah) - S3. UIN Kalijaga - S4. Demangan - S4. Gramedia - S4. Tugu - Stasiun Tugu - Malioboro - S4. Kantor Pos Besar - S4. Gondomanan - S4. Pasar Sentul - S4. SGM - Gembira Loka - S4. Babadan -Gedongkuning - JEC - S4. Blok O - Janti (atas) - S3. Maguwoharjo - Bandara Adisucipto - S5. Kalasan - Terminal Prambanan.

Rute yang dilalui: Jl. Jogja-Solo - Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Urip Sumoharjo - Jl. Jend. Sudirman - Jl. Margoutomo - Jl. Kleringan - Jl. Abu Bakar Ali - Jl. Malioboro - Jl. Margomulyo - Jl. Panembahan Senopati - Jl. Sultan Agung - Jl. Kusumanegara - Jl. Janti - Jl. Ring Road Timur - Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Jogja-Solo

#### b. Trayek 1B: Bandara Adisucipto - JEC - Kantor Pos Besar - Pingit - UGM - Terminal Condong Catur:

Bandara Adisucipto – S3. Maguwoharjo – S3. Babarsari – Janti (lewat bawah) – S4. Blok O – JEC - S4. Babadan -Gedongkuning – Gembira Loka – S4. SGM – S4. Pasar Sentul - S4. Gondomanan – S4. Kantor Pos Besar - S3. RS.PKU Muhammadiyah – S3. Pasar Kembang - S4. Badran – Bundaran SAMSAT – S4. Pingit – S4. Tugu – S4. Gramedia – Bundaran UGM – S3. Colombo – S4.



Demangan – Terminal Condongcatur – S3. UIN Sunan Kalijaga – Janti – S3. Maguwoharjo – Bandara Adisucipto.

Rute yang dilalui: Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Ring Road Timur - Jl. Janti - Jl. Kusumanegara - Jl. Sultan Agung - Jl. Panembahan Senopati - Jl. KH Ahmad Dahlan - Jl. Bhayangkara - Jl. Gandekan - Jl. Pasar Kembang - Jl. Tentara Pelajar - Jl. Diponegoro - Jl. Jend. Sudirman - Jl. Cik Di Tiro - Jl. Colombo - Jl. Gejayan - Jl. Anggajaya - Jl. Gejayan - Jl. Affandi - Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Ring Road Timur - Jl. Laksda Adisucipto

**c. Trayek 2A: Terminal Jombor - Malioboro – Basen – Kridosono – UGM – Terminal Condong Catur:**

Terminal Jombor - S4. Monjali - S4. Tugu - Stasiun Tugu - Malioboro - S4. Kantor Pos Besar - S4. Gondomanan - S4. Jukteng Wetan - S4. Tungkak - S4. Gambiran - S3 . Basen - S4. Rejowinangun - S4. Babadan Gedongkuning - Gembira Loka - S4. SGM - S3. Cendana - S4. Mandala Krida - S4. Gayam - Flyover Lempuyangan - Kridosono - S4. Duta Wacana - S4. Galeria - S4. Gramedia - Bundaran UGM - S3. Colombo - Terminal Condongcatur - S4. Kentungan - S4. Monjali - Terminal Jombor.

Rute yang dilalui: Jl. Magelang - Jl. Ring Road Utara - Jl. Nyi Tjokrolukito - Jl. AM Sangaji - Jl. Margoutomo - Jl. Kleringan - Jl. Abu Bakar Ali - Jl. Malioboro - Jl. Margomulyo - Jl. Panembahan Senopati - Jl. Brigjen Katamso - Jl. Kol. Sugiyono - Jl. Menteri Supeno - Jl. Veteran - Jl. Gambiran - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Gedongkuning Utara - Jl. Kusumanegara - Jl. Cendana - Jl. Kenari - Jl. Bung Tarjo - Jl. Dr. Sutomo - Jl. Krasak Timur - Jl. Sudarso - Jl. Yos Sudarso - Jl. Wardhani - Jl. Trimono - Jl. Dr. Wahidin - Jl. Jend. Sudirman - Jl. Cik Di Tiro - Jl. Colombo - Jl. Gejayan - Jl. Anggajaya - Jl. Ring Road Utara - Jl. Magelang

**d. Trayek 2B: Terminal Jombor – Terminal Condongcatur – UGM – Kridosono – Basen – Kantor Pos Besar – Wirobrajan - Pingit:**

Terminal Jombor – S4. Monjali – S4. Kentungan – Terminal Condong Catur – S3. Colombo – Bundaran UGM – S4. Gramedia – Kridosono – S4. Duta Wacana - Fly-over Lempuyangan - S4. Gayam – S4. Mandala Krida – S3.



Cendana – S4. SGM – Gembiraloka– S4. Babadan Gedongkuning – S4.  
Rejowinangun – S3. Basen – S4.Tungkak – S4. Juktengwetan – S4.  
Gondomanan – S4. Kantor Pos Besar – S3. RS PKU Muhammadiyah – S4.  
Ngabean – S4. Wirobrajan – S3. BPK – S4. Badran – Bundaran SAMSAT –  
S4. Pingit – S4. Tugu – S4. Monjali – Terminal Jombor.

Rute yang dilalui: Jl. Magelang - Jl. Ring Road Utara - Jl. Anggajaya - Jl.  
Gejayan - Jl. Colombo - Jl. Cik Di Tiro - Jl. Suroto - Jl. Yos Sudarso - Jl.  
Sudarso - Jl. Krasak Timur - Jl. Dr. Sutomo - Jl. Bung Tarjo - Jl. Cendana - Jl.  
Kusumanegara - Jl. Gedongkuning Utara - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl.  
Gambiran - Jl. Veteran - Jl. Menteri Supeno - Jl. Kol. Sugiyono - Jl. Brigjen  
Katamso - Jl. Panembahan Senopati - Jl. KH Ahmad Dahlan - Jl. KH Wahid  
Hasyim - Jl. Wates - Jl. HOS Cokroaminoto - Jl. Peta - Jl. Letjen Suprpto - Jl.  
Tentara Pelajar - Jl. Magelang - Jl. Wolter Monginsidi - Jl. AM Sangaji - Jl.  
Nyi Tjokrolukito - Jl. Ring Road Utara - Jl. Magelang

**e. Trayek 3A: Terminal Giwangan – Kotagede – Bandara Adisucipto –  
Ringroad Utara – MM UGM – Pingit – Malioboro – Jukteng Kulon:**

Terminal Giwangan – S4. Tegalgendu – S3. HS-Silver – Jl. Nyi Pembayun -  
S3. Pegadaian Kotagede – S3. Basen – S4. Rejowinangun – S4. Babadan  
Gedongkuning – JEC - S4. Blok O – Janti (lewat atas) - S3. Janti – S3.  
Maguwoharjo - Bandara ADISUCIPTO - S3. Maguwoharjo – Ringroad Utara  
– Terminal Condongcatur – S4. Kentungan – S4. MM UGM - S4.  
MirotaKampus – S3. Gondolayu – S4. Tugu – S4. Pingit – Bundaran SAMSAT  
- S4. Badran – S3. PasarKembang – Stasiun TUGU - Malioboro – S4. Kantor  
Pos Besar – S3. RS PKU Muhammadiyah – S4. Ngabean – S4. Pojok Beteng  
Kulon – S4. Plengkung Gading - S4. Pojok Beteng Wetan – S4. Tungkak – S4.  
Wirosaban – S4. Tegalgendu – Terminal Giwangan.

Rute yang dilalui: Jl. Imogiri - Jl. Pramuka - Jl. Tegal Gendu - Jl. Nyi  
Pembayun - Jl. Kemasan - Jl. Gedongkuning Utara - Jl. Janti - Jl. Ring Road  
Timur - Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Ring Road Utara -  
Jl. Anggajaya - Jl. Ring Road Utara - Jl. Kaliurang - Jl. Teknik Utara - Jl.  
Kesehatan Sekip - Jl. Bhinneka Tunggal Ika - Jl. Kaliurang - Jl. Cik Di Tiro -



Jl. Suroto - Jl. Yos Sudarso - Jl. Abu Bakar Ali - Jl. Ahmad Jazuli - Jl. Prau -  
Jl. Jend. Sudirman - Jl. Diponegoro - Jl. Tentara Pelajar - Jl. Letjen Suprpto -  
Jl. Pasar Kembang - Jl. Malioboro - Jl. Margomulyo - Jl. KH Ahmad Dahlan -  
Jl. KH Wahid Hasyim - Jl. MT Haryono - Jl. Mayjen Sutoyo - Jl. Kol. Sugiyono  
- Jl. Menteri Supeno - Jl. Gambiran - Jl. Pramuka - Jl. Imogiri

**f. Trayek 3B: Terminal Giwangan – Jokteng Kulon – Pingit – MM UGM –  
Ring Road Utara – Bandara Adisucipto – Kotagede:**

Terminal Giwangan – S4. Tegalgendu - S4. Wirosaban – S4. Tunggak – S4.  
Pojoy Beteng Wetan – S4. Plengkung Gading - S4. Pojoy Beteng Kulon – S4.  
Ngabean – S3. RS PKU Muhammadiyah – S3. Pasar Kembang – S4. Badran –  
Bundaran SAMSAT – S4. Pingit – S4. Tugu – S3. Gondolayu – S4. Mirota  
Kampus – S4. MM UGM - S4. Kentungan – Terminal Condong Catur –  
Ringroad Utara – S3. Maguwoharjo – Bandara Adisucipto – S3. Maguwoharjo  
– Flyover Janti (lewat bawah) – S4. Blok O – JEC - S4. Babadan Gedongkuning  
– S4. Rejowinangun – S3. Basen – S3. Pegadaian Kotagede – Jl. Nyi Pembayun  
- S3. HS-Silver – S4. Tegalgendu – Terminal Giwangan.

Rute yang dilalui: Jl. Imogiri - Jl. Pramuka - Jl. Tegalturi - Jl. Sorogenen - Jl.  
Lowanu - Jl. Kol. Sugiyono - Jl. Mayjen Sutoyo - Jl. MT Haryono - Jl. KH  
Wahid Hasyim - Jl. Bhayangkara - Jl. Gandekan - Jl. Pasar Kembang - Jl.  
Tentara Pelajar - Jl. Diponegoro - Jl. Jend. Sudirman - Jl. I Dewa Nyoman Oka  
- Jl. Abu Bakar Ali - Jl. Cik Di Tiro - Jl. Kaliurang - Jl. Bhinneka Tunggal Ika  
- Jl. Kesehatan Sekip - Jl. Teknika Utara - Jl. Kaliurang - Jl. Ring Road Utara  
- Jl. Anggajaya - Jl. Ring Road Utara - Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Laksda  
Adisucipto - Jl. Ring Road Timur - Jl. Janti - Jl. Gedongkuning Utara - Jl.  
Kemasan - Jl. Nyi Pembayun - Jl. Tegal Gendu - Jl. Pramuka - Jl. Imogiri

**g. Tayek 4A: Terminal Giwangan - Tamansiswa - Pakualaman -  
Lempuyangan - Kridosono:**

Terminal Giwangan - Jl. Imogiri Timur - Jl. Pramuka - Jl. Perintis  
Kemerdekaan - Jl. Menteri Supeno - Jl. Taman Siswa - Jl. Sultan Agung - Jl.  
Gajah Mada - Jl. Hayam Wuruk - Stadion Kridosono - Jl. Hayam Wuruk - Jl.



Gajah Mada - Jl. Sultan Agung - Jl. Taman Siswa - Jl. Menteri Supeno - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Pramuka - Jl. Imogiri Timur - Terminal Giwangan. Rute yang dilalui: Jl. Imogiri - Jl. Pramuka - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Menteri Supeno - Jl. Taman Siswa - Jl. Sultan Agung - Jl. Gajah Mada - Jl. Hayam Wuruk - Jl. Yos Sudarso - Jl. Hayam Wuruk - Jl. Gajah Mada - Jl. Sultan Agung - Jl. Taman Siswa - Jl. Menteri Supeno - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Pramuka - Jl. Imogiri Timur

**h. Trayek 4B: Terminal Giwangan - XT Square - SGM - Balaikota - UIN - Kridosono - Balai Yasa - UIN:**

Terminal Giwangan - Jl. Imogiri Timur - Jl. Pramuka - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Veteran - Jl. Pandean - Jl. Glagahsari - Jl. Kusumanegara - Jl. Sidobali - Jl. Ipda Tut Harsono - Jl. Urip Sumoharjo - Jl. Sudirman - Jl. Suroto - Jl. Wardani - Jl. Kusbini - Jl. Langensari - Jl. Urip Sumoharjo - Jl. Ipda Tut Harsono - Jl. Sidobali - Jl. Kusumanegara - Jl. Glagahsari - Jl. Pandean - Jl. Veteran - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Pramuka - Jl. Imogiri Timur - Terminal Giwangan

Rute yang dilalui: Jl. Imogiri Timur - Jl. Pramuka - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Veteran - Jl. Pandean - Jl. Glagahsari - Jl. Kusumanegara - Jl. Sidobali - Jl. Ipda Tut Harsono - Jl. Urip Sumoharjo - Jl. Sudirman - Jl. Suroto - Jl. Wardani - Jl. Kusbini - Jl. Langensari - Jl. Urip Sumoharjo - Jl. Ipda Tut Harsono - Jl. Sidobali - Jl. Kusumanegara - Jl. Glagahsari - Jl. Pandean - Jl. Veteran - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Pramuka - Jl. Imogiri Timur

### **2.3.2 Jaringan Transportasi Perkotaan**

Jaringan transportasi terdiri dari jaringan prasarana dan jaringan pelayanan pada tiap-tiap alat transportasi. Jaringan prasarana meliputi *simpul*, yang berfungsi sebagai ruang yang digunakan untuk menaikkan dan menurunkan penumpang, tempat bongkar muat barang, mengatur jadwal dan perpindahan intra dan antar alat transportasi, serta *ruang lalulintas*, yang berfungsi sebagai ruang gerak untuk sarana transportasi (Munawar, Ahmad, 2011).



## **BAB 3**

### **METODE PENELITIAN**

Dalam bab ini akan dibahas tempat, data, tahapan, dan jadwal penelitian tentang penjadwalan ulang operasional Trans Jogja yang tersinkronisasi antar jalur. Berikut ini dijabarkan tempat, data, dan tahapan dalam penelitian ini.

#### **3.1 Tempat Penelitian**

Berikut ini disajikan tempat-tempat penelitian yang akan dilaksanakan untuk observasi dan pengambilan data baik sekunder maupun primer, yaitu:

1. Seluruh jalur Trans Jogja,
2. Dinas Perhubungan, Komunikasi dan Informatika Provinsi D.I.Yogyakarta,
3. Badan Statistik Provinsi D.I.Yogyakarta,
4. Laboratorium Transportasi Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

#### **3.2 Bentuk Data**

Berikut ini disajikan bentuk data yang akan digunakan dalam penelitian.

Data dibagi dua yaitu:

1. Data Sekunder

Data sekunder dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

- a. Jalur, panjang jalur, waktu tempuh, dan titik-titik halte Trans Jogja yang didapatkan dari penelitian-penelitian sebelumnya, Dishubkominfo (Dinas Perhubungan, Komunikasi dan Informatika) D.I.Yogyakarta, BPS (Badan Pusat Statistik) D.I.Yogyakarta, dan Laboratorium Transportasi Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.
- b. Peta transportasi D.I.Yogyakarta dari Dishubkominfo DIY.

2. Data Primer

Data primer dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

- a. Jalur, panjang jalur, waktu tempuh, dan titik-titik halte Trans Jogja yang didapatkan dari studi kasus di lapangan.



- b. Peta transportasi D.I.Yogyakarta dari studi kasus di lapangan.

### 3.3 Tahapan Penelitian

Berikut disajikan tahapan penelitian yang akan dilakukan dalam penelitian ini, yaitu:

1. Pengumpulan Data

Dalam penelitian ini terdapat dua jenis data. Data tersebut adalah data sekunder dan primer. Data sekunder didapatkan dari penelitian-penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan penelitian ini. Selain itu, data sekunder diambil dari BPS DIY, Dishubkominfo DIY, dan Laboratorium Transportasi Universitas Gajah Mada, Yogyakarta. Kemudian, data primer didapatkan dengan observasi dan studi kasus di lapangan.

2. Validasi Data

Validasi data yang dimaksud adalah pencocokkan data sekunder dan primer. Jika terdapat data yang jauh berbeda, dilakukan kajian studi khusus yang lebih mendalam di lapangan. Selain itu, peneliti juga memvalidasi data yang sudah didapat ke pakar yang memiliki kredibilitas tentang masalah transportasi. Pakar dibagi dalam tiga kategori, praktisi (Dinas Perhubungan, Komunikasi dan Informatika), orang lapangan (*driver* dan *crew* perjalanan Trans Jogja), dan akademisi (dosen pembimbing Tesis Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya).

3. Mengkaji dan Analisis Data

Dari data yang sudah divalidasi, peneliti menganalisis, memetakan dan membuat deskripsi yang tepat tentang masalah yang akan dipecahkan.

4. Pembuatan Graf dan Matriks Jaringan Jalur Transportasi Publik Trans Jogja yang Saling Terintegrasi

Setelah data dikaji dan dianalisis, peneliti membuat graf dan matriks sistem jaringan transportasi publik di D.I.Yogyakarta. Graf terdiri dari titik-titik yang merupakan tempat pemberhentian dan garis-garis yang merupakan jalur Trans Jogja. Matriks terdiri dari bobot tiap garis di graf, bobot ini berisi waktu tempuh perjalanan.





5. Memahami Kajian Aljabar Max-Plus *Bilangan Fuzzy*

Dalam tahapan ini, peneliti mengumpulkan referensi-referensi yang berkaitan dengan Aljabar Bilangan *Fuzzy*, kemudian memahami dan mengkonstruksi kembali berdasarkan dengan literature yang ada.

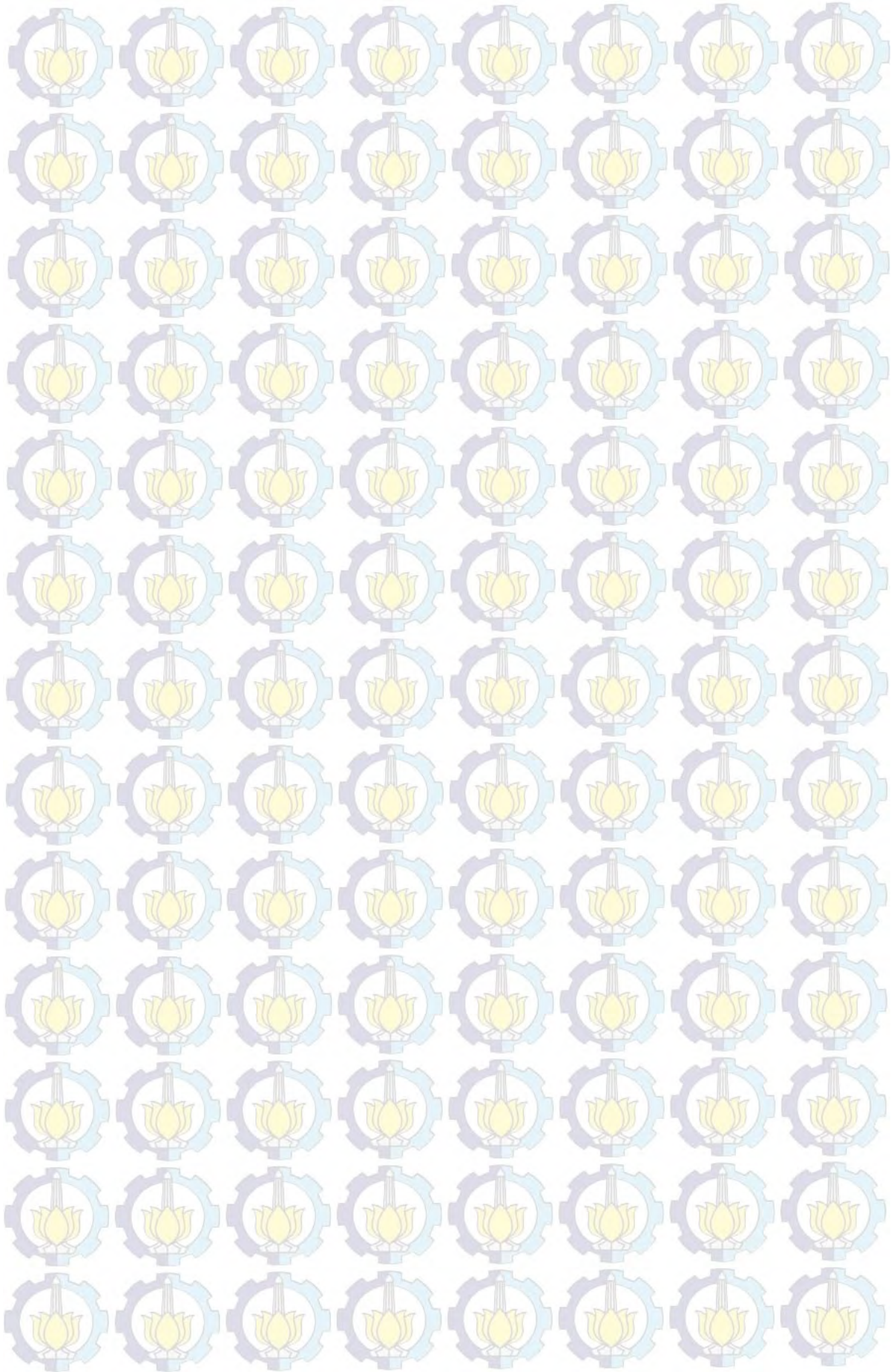
6. Memodelkan Jaringan Jalur Transportasi Publik Trans Jogja yang Saling Terintegrasi dengan Teori Aljabar Max-Plus Bilangan Fuzzy

Berdasarkan graf yang telah dibuat, selanjutnya peneliti membuat model jaringan jalur transportasi publik Trans Jogja yang terintegrasi dengan teori aljabar max-plus bilangan *fuzzy*.

7. Analisis Penjadwalan Sistem Jaringan Trans Jogja yang Terintegrasi Menggunakan Aljabar Max-Plus Bilangan *Fuzzy*

8. Pembuatan Algoritma dan Simulasi Hasil Beberapa Contoh Penjadwalan Implementasi algoritma aljabar max-plus bilangan fuzzy dan simulasi jadwal menggunakan program Scilab.







## BAB 4

### ALJABAR MAX-PLUS BILANGAN KABUR

Pada bab ini akan dibahas mengenai teori utama yang berkaitan dengan pembahasan pada tesis ini. Teori aljabar max-plus bilangan kabur yang akan dibahas ini berdasarkan teori aljabar max-plus yang dikembangkan oleh Rudhito (2011). Pada sub-bab yang pertama membahas teori aljabar max-plus bilangan kabur. Selanjutnya, pada sub-bab yang kedua membahas matriks dan vektor atas aljabar max-plus bilangan kabur. Selanjutnya pada sub-bab yang ketiga membahas mengenai matriks dan teori graf atas aljabar max-plus bilangan kabur. Pada sub-bab yang keempat membahas mengenai sistem persamaan linear max-plus bilangan kabur. Untuk sub-bab yang terakhir, pada sub-bab ini membahas mengenai nilai eigen dan vektor eigen atas aljabar max-plus bilangan kabur.

#### 4.1 Definisi dan Konsep Dasar

Pertama diberikan  $\mathbf{F}_{\tilde{\varepsilon}}: \mathbf{F} \cup \{\tilde{\varepsilon}\}$  dengan  $\mathbf{F}$  adalah himpunan semua bilangan kabur dan  $\tilde{\varepsilon} := \{-\infty\}$ . Kemudian didefinisikan konsep elemen identitas dan netral atas aljabar max-plus bilangan kabur sebagai berikut.

##### Definisi 4.1 Elemen Identitas dan Netral

a. Elemen identitas

$$\tilde{\varepsilon} := \{-\infty\}$$

Dalam hal ini  $\{-\infty\}$  dapat dipandang sebagai bilangan kabur dengan  $\alpha$ -cut adalah  $\{-\infty, -\infty\}$ , untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ .

b. Elemen netral

$$\tilde{0} := \{0\}$$

Dalam hal ini  $\{0\}$  dapat dipandang sebagai bilangan kabur dengan  $\alpha$ -cut adalah  $\{0,0\}$ , untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ .

Selanjutnya didefinisikan operasi maksimum (*max*) dan penjumlahan (*plus*) pada  $\mathbf{F}_{\tilde{\varepsilon}}$ . Misalkan  $a$  dan  $b$  adalah bilangan-bilangan kabur dengan



potongan  $-\alpha$  berturut-turut adalah  $a^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha]$  dan  $b^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha]$ , dengan  $\underline{a}^\alpha$  dan  $\overline{a}^\alpha$  berturut-turut adalah batas atas dan batas bawah interval  $a^\alpha$ . Begitu juga dengan  $\underline{b}^\alpha$  dan  $\overline{b}^\alpha$  berturut-turut adalah batas atas dan bawah interval  $b^\alpha$ .

**Definisi 4.2** Operasi Max dan Plus atas Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur.

Untuk setiap elemen  $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbf{F}_{\tilde{\varepsilon}}$  didefinisikan operasi max ( $\oplus$ ) dan plus ( $\otimes$ ) sebagai berikut.

- a. Maksimum  $\tilde{a}$  dan  $\tilde{b}$ , yaitu  $\tilde{a} \oplus \tilde{b}$ , adalah himpunan kabur dengan potongan  $-\alpha$ -nya adalah interval  $[\underline{a}^\alpha \oplus \underline{b}^\alpha, \overline{a}^\alpha \oplus \overline{b}^\alpha]$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ .

Atau dapat dituliskan  $(\max(a, b))^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} [\max(\underline{a}^\alpha, \underline{b}^\alpha), \max(\overline{a}^\alpha, \overline{b}^\alpha)]$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ .

**Contoh 4.1**

Diberikan dua himpunan kabur trapesium

$$\tilde{a} = \text{BKT}(a_1, a_2, a_3, a_4) \text{ dan } \tilde{b} = \text{BKT}(b_1, b_2, b_3, b_4)$$

Maka potongan  $-\alpha$  dari  $a$  dan  $b$  adalah,

$$a^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, (a_3 - a_4)\alpha + a_4]$$

$$b^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha] = [(b_2 - b_1)\alpha + b_1, (b_3 - b_4)\alpha + b_4]$$

Kemudian potongan  $-\alpha$  dari  $\tilde{a} \oplus \tilde{b} =$

$$= [((a_2 - a_1)\alpha + a_1) \oplus ((b_2 - b_1)\alpha + b_1), ((a_3 - a_4)\alpha + a_4) \oplus ((b_3 - b_4)\alpha + b_4)]$$

Untuk  $(a \oplus b)^\alpha$ , jika  $\underline{a}^\alpha \leq_m \underline{b}^\alpha$  dan  $\overline{a}^\alpha \leq_m \overline{b}^\alpha$ , maka  $(a \oplus b)^\alpha = b^\alpha$ , yaitu

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} = \tilde{b}.$$

**Contoh 4.2**

Diberikan himpunan kabur trapesium  $\tilde{a} = \text{BKT}(2,3,3,4)$  dan  $\tilde{b} =$

$$\text{BKT}(1,4,5,6)$$

maka,



$$a^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha] = [(3-2)\alpha + 2, (3-4)\alpha + 4] = [\alpha + 2, -\alpha + 4]$$

$$b^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha] = [(4-1)\alpha + 1, (5-6)\alpha + 6] = [3\alpha + 1, -\alpha + 6]$$

Kemudian potongan  $-\alpha$  dari  $\tilde{a} \oplus \tilde{b} =$

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} = [\alpha + 2 \oplus 3\alpha + 1, -\alpha + 4 \oplus -\alpha + 6].$$

- b. Penjumlahan  $\tilde{a}$  dan  $\tilde{b}$ , yaitu  $\tilde{a} \otimes \tilde{b}$ , adalah himpunan kabur dengan potongan  $-\alpha$ -nya adalah interval  $[\underline{a}^\alpha \otimes \underline{b}^\alpha, \overline{a}^\alpha \otimes \overline{b}^\alpha]$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$  atau dapat dituliskan  $(a+b)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} [\underline{a}^\alpha + \underline{b}^\alpha, \overline{a}^\alpha + \overline{b}^\alpha]$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$

### Contoh 4.3

Diberikan dua himpunan kabur trapesium

$$\tilde{a} = \text{BKT}(a_1, a_2, a_3, a_4) \text{ dan } \tilde{b} = \text{BKT}(b_1, b_2, b_3, b_4)$$

Maka potongan  $-\alpha$  dari  $a$  dan  $b$  adalah,

$$a^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, (a_3 - a_4)\alpha + a_4]$$

$$b^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha] = [(b_2 - b_1)\alpha + b_1, (b_3 - b_4)\alpha + b_4].$$

Kemudian potongan  $-\alpha$  dari  $\tilde{a} \otimes \tilde{b}$  adalah

Potongan  $-\alpha$  dari  $\tilde{a} \otimes \tilde{b} =$

$$\tilde{a} \otimes \tilde{b} = [((a_2 - a_1)\alpha + a_1) \otimes ((b_2 - b_1)\alpha + b_1), ((a_3 - a_4)\alpha + a_4) \otimes ((b_3 - b_4)\alpha + b_4)].$$

Perhatikan bahwa untuk potongan  $-\alpha$  dari  $\tilde{a} \otimes \tilde{b}$  berlaku

$$\begin{aligned} & [((a_2 - a_1)\alpha + a_1) \otimes ((b_2 - b_1)\alpha + b_1), ((a_3 - a_4)\alpha + a_4) \\ & \quad \otimes ((b_3 - b_4)\alpha + b_4)] = \\ & = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1 + (b_2 - b_1)\alpha + b_1, (a_3 - a_4)\alpha + a_4 + (b_3 - b_4)\alpha \\ & \quad + b_4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = [(a_2\alpha - a_1\alpha) + a_1 + (b_2\alpha - b_1\alpha) + b_1, (a_3\alpha - a_4\alpha) + a_4 \\ & \quad + (b_3\alpha - b_4\alpha) + b_4] \end{aligned}$$

$$= [a_2\alpha - a_1\alpha + a_1 + b_2\alpha - b_1\alpha + b_1, a_3\alpha - a_4\alpha + a_4 + b_3\alpha - b_4\alpha + b_4]$$

$$= [a_2\alpha + b_2\alpha - a_1\alpha - b_1\alpha + a_1 + b_1, a_3\alpha + b_3\alpha - a_4\alpha - b_4\alpha + a_4 + b_4]$$

$$= [a_2\alpha + b_2\alpha - a_1\alpha - b_1\alpha + a_1 + b_1, a_3\alpha + b_3\alpha - a_4\alpha - b_4\alpha + a_4 + b_4]$$

$$= [((a_2 + b_2) - (a_1 + b_1))\alpha + (a_1 + b_1), ((a_3 + b_3) - (a_4 + b_4))\alpha + (a_4 + b_4)]$$



$$\tilde{a} \otimes \tilde{b} = \text{BKT}((a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3), (a_4 + b_4))$$

**Contoh 4.4**

Diberikan dua himpunan kabur trapesium

$$\tilde{a} = \text{BKT}(2,3,3,4) \text{ dan } \tilde{b} = \text{BKT}(1,4,5,6)$$

maka potongan  $-\alpha$  dari  $a$  dan  $b$  adalah,

$$a^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha] = [(3-2)\alpha + 2, (3-4)\alpha + 4] = [\alpha + 2, -\alpha + 4]$$

$$b^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha] = [(4-1)\alpha + 1, (5-6)\alpha + 6] = [3\alpha + 1, -\alpha + 6]$$

Potongan  $-\alpha$  dari  $\tilde{a} \otimes \tilde{b}$  =

$$\tilde{a} \otimes \tilde{b} = \text{BKT}((2 + 1), (3 + 4), (3 + 5), (4 + 6))$$

$$\tilde{a} \otimes \tilde{b} = \text{BKT}(3,7,8,10)$$

Perhatikan bahwa hasil operasi interval-interval tertutup dari potongan  $-\alpha$  di atas juga berupa interval tertutup. Kemudian jika  $\alpha \leq \beta$  maka berlaku  $a^\alpha \subseteq a^\beta$  dan  $b^\alpha \subseteq b^\beta$ , yaitu  $\underline{a}^\alpha \leq \underline{a} \leq \overline{a}^{-\beta} \leq \overline{a}^{-\alpha}$  dan  $\underline{b}^\alpha \leq \underline{b} \leq \overline{b}^{-\beta} \leq \overline{b}^{-\alpha}$ . Hal ini berakibat bahwa

$$\max(\underline{a}^\alpha, \underline{b}^\alpha) \leq \max(\underline{a}^\beta, \underline{b}^\beta) \leq \max(\overline{a}^\beta, \overline{b}^\beta) \leq \max(\overline{a}^\alpha, \overline{b}^\alpha)$$

dan,

$$\underline{a}^\alpha + \underline{b}^\alpha \leq \underline{a}^\beta + \underline{b}^\beta \leq \overline{a}^\beta + \overline{b}^\beta \leq \overline{a}^\alpha + \overline{b}^\alpha.$$

Dengan demikian  $[\max(\underline{a}^\alpha, \underline{b}^\alpha), \max(\overline{a}^\alpha, \overline{b}^\alpha)]$  dan  $[\underline{a}^\alpha + \underline{b}^\alpha, \overline{a}^\alpha + \overline{b}^\alpha]$  merupakan selang tersarang (*nested interval*) yang merupakan syarat sebagai potongan  $-\alpha$  suatu bilangan kabur. Jadi operasi max dan plus tertutup dalam  $\mathbf{F}_{\tilde{\varepsilon}}$ .

Aljabar max-plus bilangan fuzzy  $(\mathbf{F}_{\tilde{\varepsilon}}, \oplus, \otimes)$  merupakan semiring dengan elemen netral  $\tilde{\varepsilon} = \{-\infty\}$  dan dengan elemen satuan  $\tilde{e} = \{0\}$  memiliki sifat-sifat aljabar sebagai berikut ini.

Untuk setiap  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathbf{F}_{\tilde{\varepsilon}}$ , dengan potongan  $-\alpha$  berturut-turut adalah  $a^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha]$ ,  $b^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \overline{b}^\alpha]$ , dan  $c^\alpha = [\underline{c}^\alpha, \overline{c}^\alpha]$ , untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$  berlaku:

- a. Komutatif



$$\begin{aligned}
 (\max(a, b))^\alpha &= [\max(\underline{a}^\alpha, \underline{b}^\alpha), \max(\overline{a}^\alpha, \overline{b}^\alpha)] \\
 &= [\max(\underline{b}^\alpha, \underline{a}^\alpha), \max(\overline{b}^\alpha, \overline{a}^\alpha)] = (\max(b, a))^\alpha
 \end{aligned}$$

b. Asosiatif pada Operasi Maksimal

$$\begin{aligned}
 (\max(\max(a, b)^\alpha, c)^\alpha &= \\
 &= [\max(\max(\underline{a}^\alpha, \underline{b}^\alpha), \underline{c}^\alpha), \max(\max(\overline{a}^\alpha, \overline{b}^\alpha), \overline{c}^\alpha)] \\
 &= [\max(\underline{a}^\alpha, \underline{b}^\alpha, \underline{c}^\alpha), \max(\overline{a}^\alpha, \overline{b}^\alpha, \overline{c}^\alpha)] \\
 &= [\max(\underline{a}^\alpha, \max(\underline{b}^\alpha, \underline{c}^\alpha)), \max(\overline{a}^\alpha, \max(\overline{b}^\alpha, \overline{c}^\alpha))] \\
 &= (\max(a, \max(b, c))^\alpha)^\alpha
 \end{aligned}$$

c. Asosiatif pada Penjumlahan

$$\begin{aligned}
 ((a + b) + c)^\alpha &= \\
 &= [(\underline{a}^\alpha + \underline{b}^\alpha) + \underline{c}^\alpha, (\overline{a}^\alpha + \overline{b}^\alpha) + \overline{c}^\alpha] \\
 &= [\underline{a}^\alpha + (\underline{b}^\alpha + \underline{c}^\alpha), \overline{a}^\alpha + (\overline{b}^\alpha + \overline{c}^\alpha)] \\
 &= (a + (b + c))^\alpha
 \end{aligned}$$

d. Eksistensi Elemen Netral terhadap Maksimum

$$(\max(a, -\infty))^\alpha = [\max(\underline{a}^\alpha, -\infty), \max(\overline{a}^\alpha, -\infty)] = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha] = a^\alpha$$

e. Sifat penyerapan elemen netral terhadap operasi penjumlahan

$$\begin{aligned}
 (a + (-\infty))^\alpha &= [\underline{a}^\alpha + (-\infty), \overline{a}^\alpha + (-\infty)] = [-\infty, -\infty] \\
 &= [-\infty + \underline{a}^\alpha, -\infty + \overline{a}^\alpha] = (-\infty + a)^\alpha
 \end{aligned}$$

f. Eksistensi Elemen Identitas

$$\begin{aligned}
 (a + 0)^\alpha &= [\underline{a}^\alpha + 0, \overline{a}^\alpha + 0] = [\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha] = a^\alpha = [0 + \underline{a}^\alpha, 0 + \overline{a}^\alpha] \\
 &= (0 + a)^\alpha
 \end{aligned}$$

g. Distributif dari kanan dan kiri penjumlahan terhadap maksimum

$$\begin{aligned}
 (\max(a, b) + c)^\alpha &= \\
 &= [\max(\underline{a}^\alpha, \underline{b}^\alpha) + \underline{c}^\alpha, \max(\overline{a}^\alpha, \overline{b}^\alpha) + \overline{c}^\alpha] \\
 &= [\max(\underline{a}^\alpha + \underline{c}^\alpha, \underline{b}^\alpha + \underline{c}^\alpha), \max(\overline{a}^\alpha + \overline{c}^\alpha, \overline{b}^\alpha + \overline{c}^\alpha)] \\
 &= (\max(a + c, b + c))^\alpha
 \end{aligned}$$

atau,



$$\begin{aligned}
(a + \max(b, c))^\alpha &= \\
&= [\underline{a}^\alpha + \max(\underline{b}^\alpha, \underline{c}^\alpha), \overline{a}^\alpha + \max(\overline{b}^\alpha, \overline{c}^\alpha)] \\
&= [\max(\underline{c}^\alpha + \underline{a}^\alpha, \underline{c}^\alpha + \underline{b}^\alpha), \max(\overline{c}^\alpha + \overline{a}^\alpha, \overline{c}^\alpha + \overline{b}^\alpha)] \\
&= (\max(c + a, c + b))^\alpha
\end{aligned}$$

h. Idempoten

$$\begin{aligned}
(\max(a, a))^\alpha &= [\max(\underline{a}^\alpha, \underline{a}^\alpha), \max(\overline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha)] \\
[\underline{a}^\alpha, \overline{a}^\alpha] &= a^\alpha
\end{aligned}$$

## 4.2 Matriks dan Vektor atas Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur

**Definisi 4.3** Didefinisikan  $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n} := \{\tilde{A} = (\tilde{A}_{i,j}) | \tilde{A}_{i,j} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}, \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, n\}$ . Matriks anggota  $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  disebut matriks atas aljabar max plus bilangan kabur.

**Definisi 4.4** Matriks  $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  dikatakan sama jika  $\tilde{A}_{i,j} = \tilde{B}_{i,j}$  untuk setiap  $i, j$ .

Operasi  $\tilde{\oplus}$  dan  $\tilde{\otimes}$  pada  $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}$  dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks bilangan kabur pada  $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ .

a. Diketahui  $\tilde{\lambda} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}, \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ . Didefinisikan  $\tilde{\lambda} \tilde{\otimes} \tilde{A}$  adalah matriks yang unsur ke- $ij$ -nya:

$$(\tilde{\lambda} \tilde{\otimes} \tilde{A})_{ij} = \tilde{\lambda} \tilde{\otimes} \tilde{A}_{ij} \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

$$\text{dan } (\tilde{A} \tilde{\oplus} \tilde{B})_{ij} = \tilde{A}_{ij} \tilde{\oplus} \tilde{B}_{ij} \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

b. Diketahui  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times p}$  dan  $\tilde{B} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{p \times n}$ . Didefinisikan  $\tilde{A} \tilde{\otimes} \tilde{B}$  adalah matriks yang unsur-unsur ke- $ij$ -nya :

$$(\tilde{A} \tilde{\otimes} \tilde{B})_{ij} = \tilde{\oplus}_{k=1}^p \tilde{A}_{ik} \tilde{\otimes} \tilde{B}_{kj} \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, n.$$



**Definisi 4.5** Untuk setiap  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  dan  $\alpha \in [0,1]$ , didefinisikan matriks potongan- $\alpha$  dari  $\tilde{A}$ , yaitu matriks interval  $A^\alpha = (A_{ij}^\alpha) \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ , dengan  $A_{ij}^\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$ . Didefinisikan juga matriks  $\underline{A}^\alpha = (\underline{A}_{ij}^\alpha) \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$  dan  $\overline{A}^\alpha = (\overline{A}_{ij}^\alpha) \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$  yang berturut-turut disebut **batas bawah** dan **batas atas** matriks  $A^\alpha$ .

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa matriks  $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  adalah *sama* jika dan hanya jika  $A^\alpha = B^\alpha$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ , yaitu  $A_{ij}^\alpha = B_{ij}^\alpha$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ .

Mengingat  $A^\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  dan menurut Teorema 3.2.5 (dalam Rudhito, 2011), semimodul  $A^\alpha = (A_{ij}^\alpha) \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  atas  $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$  isomorfis dengan semimodul  $\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{m \times n})_b$  atas  $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$  maka untuk setiap matriks bilangan kabur  $\tilde{A}$  berlaku bahwa  $A^\alpha \approx [\underline{A}^\alpha, \overline{A}^\alpha]$ . Dengan juga operasi-operasi matriks bilangan kabur yang didefinisikan di atas dapat dituliskan dalam potongan- $\alpha$ -nya dan interval matriks yang bersesuaian berikut, yaitu bahwa  $\tilde{\lambda} \otimes \tilde{A}$  adalah matriks bilangan kabur dengan matriks potongan- $\alpha$ -nya:

$$(\lambda \otimes A)^\alpha \approx [\underline{\lambda}^\alpha \otimes \underline{A}^\alpha, \overline{\lambda}^\alpha \otimes \overline{A}^\alpha] \text{ untuk setiap } \alpha \in [1,0], \text{ dan}$$

$\tilde{A} \oplus \tilde{B}$  adalah matriks bilangan kabur dengan matriks potongan- $\alpha$ -nya:

$$(A \oplus B)^\alpha \approx [\underline{A}^\alpha \oplus \underline{B}^\alpha, \overline{A}^\alpha \oplus \overline{B}^\alpha] \text{ untuk setiap } \alpha \in [1,0].$$

Selanjutnya menurut Teorema 3.2.6 (dalam Rudhito, 2011), semiring  $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$  isomorfis dengan semiring  $(\mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max}^{n \times n})_b, \oplus, \otimes)$ , maka diperoleh bahwa

$\tilde{A} \otimes \tilde{B}$  adalah matriks bilangan kabur dengan matriks potongan- $\alpha$ -nya:

$$(A \otimes B)^\alpha \approx [\underline{A}^\alpha \otimes \underline{B}^\alpha, \overline{A}^\alpha \otimes \overline{B}^\alpha] \text{ untuk setiap } \alpha \in [1,0].$$

**Contoh 4.5**

Diketahui matriks bilangan kabur dengan elemen- elemennya berupa bilangan kabur segitiga sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} [4,5,6] & [-1,0,1] & [7,8,10] \\ [2,3,4] & [7,7,7] & [6,8,9] \\ [1,2,2] & [-2,-1,0] & [9,10,11] \end{bmatrix}$$



$$B = \begin{bmatrix} [-\infty, -\infty, -\infty] & [0,0,0] & [2,4,4] \\ [5,6,7] & [1,2,3] & [4,4,4] \\ [7,8,10] & [0,2,4] & [1,2,4] \end{bmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} [4,5,6] & [-1,0,1] & [7,8,10] \\ [2,3,4] & [7,7,7] & [6,8,9] \\ [1,2,2] & [-2, -1,0] & [9,10,11] \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} [-\infty, -\infty, -\infty] & [0,0,0] & [2,4,4] \\ [5,6,7] & [1,2,3] & [4,4,4] \\ [7,8,10] & [0,2,4] & [1,2,4] \end{bmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} [4,5,6] & [0,0,1] & [7,8,10] \\ [5,6,7] & [7,7,7] & [6,8,9] \\ [7,8,10] & [0,2,4] & [9,10,11] \end{bmatrix}$$

### 4.3 Matriks dan Teori Graf atas Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur

Diberikan graf berarah  $\tilde{G} = (\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{A}})$  dengan  $\mathcal{V} = \{1,2,3,\dots,p\}$ . Graf berarah  $\tilde{G}$  dikatakan *berbobot bilangan kabur* jika setiap busur  $(j,i) \in \tilde{\mathcal{A}}$  dikawankan dengan suatu bilangan kabur  $\tilde{A}_{ij} \in (\mathbf{F}(\mathbf{R}_{\tilde{\varepsilon}}) - \{\tilde{\varepsilon}\})$ . Bilangan kabur  $\tilde{A}_{ij}$  disebut *bobot bilangan kabur* busur  $(i,j)$ , dinotasikan dengan  $fw(j,i)$ . Dalam penyajiannya dengan gambar untuk graf berarah berbobot bilangan kabur, busur diberi label dengan bobot bilangannya. Didefinisikan *graf preseden bilangan kabur* dari matriks  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R}_{\max})^{n \times n}$  adalah berarah berbobot bilangan kabur  $\tilde{G}(\tilde{A}) = (\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{A}})$  dengan  $\mathcal{V} = \{1,2,3,\dots,n\}$ ,  $\tilde{\mathcal{A}} = \{(j,i) | fw(i,j) = \tilde{A}_{ij} \neq \tilde{\varepsilon}\}$ . Perhatikan sebaliknya bahwa untuk setiap graf berarah berbobot bilangan kabur  $\tilde{G} = (\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{A}})$  selalu dapat didefinisikan suatu matriks  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R}_{\max})^{n \times n}$ , yang disebut *matriks bobot kabur* graf  $\tilde{G}$ , dimana

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{cases} fw(j,i), & \text{jika } (j,i) \in \tilde{\mathcal{A}} \\ \tilde{\varepsilon}, & \text{jika } (j,i) \notin \tilde{\mathcal{A}} \end{cases}$$

Jelas bahwa graf berarah berbobot bilangan kabur tersebut merupakan graf preseden bilangan kabur dari  $\tilde{A}$  (Rudhito,2011).

Untuk setiap graf berarah  $\tilde{G} = (\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{A}})$  dengan  $n$  titik, didefinisikan suatu matriks  $\tilde{U} \in \mathbf{F}(\mathbf{R}_{\max})^{n \times n}$ , yang disebut dengan *matriks adjesensi kabur* graf berarah  $\tilde{G}$ , dimana unsur-unsurnya adalah



$$\tilde{U} = \begin{cases} \neq \tilde{\varepsilon}, & \text{jika } (j, i) \in \tilde{A} \\ = \tilde{\varepsilon}, & \text{jika } (j, i) \notin \tilde{A} \end{cases}$$

Berikut didefinisikan *semi-definit* dan *definit* untuk suatu matriks bilangan kabur.

**Definisi 4.6** Suatu matriks  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$  dikatakan *semi-definit* jika  $A^\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$  *semi-definit* untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$  dan dikatakan *definit* jika  $A^\alpha$  *definit* untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ .

Berikut ini diberikan Teorema mengenai syarat perlu dan cukup untuk suatu matriks  $\tilde{A}$  semi-definit.

**Teorema 4.1** Diberikan  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$ . Matriks  $\tilde{A}$  *semi-definit* jika dan hanya jika  $A^0 \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$  *semi-definit*.

**Bukti:**( $\Rightarrow$ ): jelas menurut Definisi 4.6

( $\Leftarrow$ ) : Andaikan  $A^0 \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$  *semi-definit*, maka menurut Teorema 3.3.1 (dalam Rudhito, 2011),  $A^0$  *semi-definit*. Hal ini berarti untuk setiap  $A = [\underline{A}^0, \overline{A}^0]$  *semi-definit*. Kemudian untuk setiap  $\alpha \geq 0$ , berlaku  $A_{ij}^\alpha \subseteq A_{ij}^0$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ . Hal ini berakibat  $[\underline{A}^\alpha, \overline{A}^\alpha] \subseteq [\underline{A}^0, \overline{A}^0]$ , sehingga untuk setiap  $A \in [\underline{A}^\alpha, \overline{A}^\alpha]$  *semi-definit*.

Akibatnya  $A^\alpha$  *semi-definit* untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ . Jadi terbukti  $\tilde{A}$  *semi-definit*.  
Bukti selesai.

Berikut diberikan *iireduisibilitas* suatu matriks bilangan kabur.

**Definisi 4.7** Suatu matriks  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$  dikatakan *irreducible* jika  $A^\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  *irreducible* untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ .

Berikut diberikan teorema mengenai syarat perlu dan cukup suatu matriks  $\tilde{A}$  *irreducible*.

**Teorema 4.2** Diberikan  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$ . Matriks  $\tilde{A}$  *irreducible* jika dan hanya jika  $\underline{A}^0 \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$  *irreducible*.

**Bukti:**( $\Rightarrow$ ): jelas menurut Definisi 4.7



( $\Leftarrow$ ): Andaikan  $\underline{A}^0 \in \mathbf{R}_{\max}^{n \times n}$  irreducible, maka  $A^0$  irreducible. Kemudian untuk setiap  $\alpha \geq 0$ , berlaku  $A_{ij}^\alpha \subseteq A_{ij}^0$  untuk setiap  $i$  dan  $j$ . Hal ini berakibat  $[\underline{A}^\alpha, \overline{A}^\alpha] \subseteq [\underline{A}^0, \overline{A}^0]$ , sehingga untuk setiap  $A \in [\underline{A}^\alpha, \overline{A}^\alpha]$  irreducible. Akibatnya  $A^\alpha$  irreducible untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ . Jadi terbukti  $\tilde{A}$  irreducible. Bukti selesai.

**Proposisi 4.1** 4.3.3 Jika  $\tilde{U} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$  merupakan matriks adjesensi kabur suatu graf taksiklik  $\tilde{\mathcal{G}}$ , maka  $\tilde{U}^{\otimes q} = \tilde{\varepsilon}$ , untuk semua  $q > p$ , dengan  $p$  adalah panjang lintasan terpanjang dari  $\tilde{\mathcal{G}}$ .

**Bukti:** Mengingat  $\tilde{U} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$  merupakan matriks adjesensi kabur, maka matriks interval, yaitu matriks *potongan*  $-\alpha$ ,  $U^\alpha \approx [\underline{U}^\alpha, \overline{U}^\alpha]$  merupakan matriks adjesensi interval untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ . Mengingat graf berarah tersebut taksiklik, maka,  $(U^\alpha)^{\otimes q} = \varepsilon$ , untuk semua  $q > p$  dan untuk semua  $\alpha \in [0,1]$ . Dengan demikian untuk semua  $q > p$  berlaku  $\tilde{U}^{\otimes q} = \tilde{\varepsilon}$ .

Bukti selesai

#### 4.4 Sistem Persamaan Linear Atas Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur

Dalam sub bab ini akan dibahas persamaan linear max-plus bilangan kabur yang merupakan generalisasi dari sistem persamaan linear max-plus. Penyelesaian sistem persamaan linear max-plus interval melalui *teorema dekomposisi*. Ada dua macam sistem persamaan linear max-plus bilangan kabur yang akan dibahas, yaitu sistem persamaan linear *input-output* max-plus bilangan kabur dan sistem persamaan linear *iterative* max-plus bilangan kabur. Terlebih dahulu akan dibahas sistem persamaan linear *input-output* max-plus bilangan kabur yang mempunyai bentuk umum  $\tilde{A} \tilde{\otimes} \tilde{x} = \tilde{b}$ , dimana  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  dan  $\tilde{b} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^m$ . Sistem persamaan linear input-output max-plus bilangan kabur tersebut selanjutnya cukup disebut sistem kabur  $\tilde{A} \tilde{\otimes} \tilde{x} = \tilde{b}$  (Rudhito,2011).



**Definisi 4.8** Diberikan  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  dan  $\tilde{b} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^m$ . Suatu vektor bilangan kabur  $\tilde{x}^* \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$  disebut penyelesaian bilangan kabur sistem persamaan linear max-plus bilangan kabur  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$  jika  $\tilde{x}^*$  memenuhi sistem tersebut.

**Definisi 4.9** Diberikan  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  dan  $\tilde{b} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^m$ . Suatu vektor bilangan kabur  $\tilde{x}' \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$  disebut *subpenyelesaian terbesar bilangan kabur* sistem kabur  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$  jika berlaku  $\tilde{A} \otimes \tilde{x}' \leq_{\mathbf{Fm}} \tilde{b}$ .

**Definisi 4.10** Diberikan  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  dan  $\tilde{b} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^m$ . Suatu vektor bilangan kabur  $\hat{x} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$  disebut *subpenyelesaian terbesar bilangan kabur* sistem kabur  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$  jika  $\tilde{x}' \leq_{\mathbf{Fm}} \hat{x}$  untuk setiap subpenyelesaian bilangan kabur  $\tilde{x}'$  dari sistem  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$ .

Misalkan  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$  dengan unsur-unsur tiap kolomnya tidak semuanya sama dengan  $\tilde{\varepsilon}$  dan  $\tilde{b} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$ . Maka, vektor internal  $\hat{x}^\alpha \approx \left[ -\left( (\underline{A}^\alpha)^T \otimes (-\underline{b}^\alpha) \right), -\left( (\overline{A}^\alpha)^T \otimes (-\overline{b}^\alpha) \right) \right]$  merupakan subpenyelesaian terbesar sistem interval  $A^\alpha \otimes x = b^\alpha$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ . Perhatikan bahwa

$\hat{x}_i^\alpha = \left[ -\left( (\underline{A}^\alpha)^T \otimes (-\underline{b}^\alpha) \right)_i, -\left( (\overline{A}^\alpha)^T \otimes (-\overline{b}^\alpha) \right)_i \right]$  adalah suatu interval.

Mengingat  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$  dan  $\tilde{b} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$ , maka jika  $\alpha \leq \beta$  berlaku  $A^\alpha \leq_m A^\beta \leq_m A^\alpha$  dan  $b^\alpha \leq_m b^\beta \leq_m b^\alpha$ . Meskipun operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  pada matriks konsisten terhadap urutan " $\leq_m$ ", tetapi ketaksamaan

$$-\left( (\underline{A}^\alpha)^T \otimes (-\underline{b}^\alpha) \right) \leq_m -\left( (\underline{A}^\beta)^T \otimes (-\underline{b}^\beta) \right) \leq_m \left( (\overline{A}^\beta)^T \otimes (-\overline{b}^\beta) \right) \leq_m \left( (\overline{A}^\alpha)^T \otimes (-\overline{b}^\alpha) \right)$$

tidak selalu dipenuhi. Akibatnya  $\left( -\left( (\underline{A}^\alpha)^T \otimes (-\underline{b}^\alpha) \right) \right)_i \leq_m \left( -\left( (\underline{A}^\beta)^T \otimes (-\underline{b}^\beta) \right) \right)_i \leq_m$



$\left( (\overline{A^\beta})^T \otimes (-\overline{b^\beta}) \right)_i \leq_m \left( (\overline{A^\alpha})^T \otimes (-\overline{b^\alpha}) \right)_i$  juga tidak selalu dipenuhi. Jadi
  $\left[ -\left( (\overline{A^\alpha})^T \otimes (-\overline{b^\alpha}) \right)_i, -\left( (\overline{A^\alpha})^T \otimes (-\overline{b^\alpha}) \right)_i \right]$  tidak selalu merupakan keluarga interval tersarang.

**Definisi 4.11** Diberikan  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  dengan unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan  $\tilde{\varepsilon}$  dan  $\tilde{b} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^m$ . Didefinisikan vektor bilangan kabur  $\hat{x}$  yang komponen-komponennya adalah  $\hat{x}_i$ , yaitu bilangan kabur dimana potongan  $-\alpha$ -nya adalah  $\hat{x}_i^\alpha = \left[ \underline{\hat{x}_i^\alpha}, \overline{\hat{x}_i^\alpha} \right]$ . Batas-batas  $\hat{x}_i^\alpha$  didefinisikan secara rekursif berikut.

Misalkan  $\underline{\hat{x}_i^\alpha} = \min \left\{ -\left( (\overline{A^\alpha})^T \otimes (-\overline{b^\alpha}) \right)_i, -\left( (\overline{A^\alpha})^T \otimes (-\overline{b^\alpha}) \right)_i \right\}$  dan

$$\overline{\hat{x}_i^\alpha} = -\left( (\overline{A^\alpha})^T \otimes (-\overline{b^\alpha}) \right)_i.$$

$$\underline{\hat{x}_i^\alpha} = \begin{cases} \min_{\beta \in [0,1]} \left\{ \underline{\hat{x}_i^\beta} \right\} & \text{jika } \min_{\beta \in [0,1]} \left\{ \underline{\hat{x}_i^\beta} \right\} \leq_m \underline{\hat{x}_i^\alpha} \\ \underline{\hat{x}_i^\beta} \text{ jika } \underline{\hat{x}_i^\beta} \leq_m \underline{\hat{x}_i^\alpha} & \text{untuk setiap } \alpha, \beta \in [0,1], \alpha > \beta \\ \underline{\hat{x}_i^\alpha} \text{ jika } \underline{\hat{x}_i^\beta} >_m \underline{\hat{x}_i^\alpha} & \text{jika } \underline{\hat{x}_i^\alpha} \leq_m \min_{\beta \in [0,1]} \left\{ \underline{\hat{x}_i^\beta} \right\} \end{cases}$$

$$\overline{\hat{x}_i^\alpha} = \begin{cases} \overline{\hat{x}_i^\beta} \text{ jika } \overline{\hat{x}_i^\beta} \leq_m \overline{\hat{x}_i^\alpha} & \text{untuk setiap } \alpha, \beta \in [0,1], \alpha < \beta. \\ \overline{\hat{x}_i^\alpha} \text{ jika } \overline{\hat{x}_i^\beta} >_m \overline{\hat{x}_i^\alpha} \end{cases}$$

Perhatikan bahwa keluarga potongan  $-\alpha$  komponen vektor bilangan kabur  $\hat{x}$  seperti Definisi 4.1 di atas sungguh-sungguh merupakan keluarga potongan  $-\alpha$  suatu bilangan kabur. Hal ini karena  $\hat{x}_i^\alpha$  didefinisikan dengan menggunakan  $\hat{x}_i^\alpha$  dan karena

- $c$  merupakan interval, maka  $\hat{x}_i^\alpha$  juga merupakan interval,
- $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  dan  $\tilde{b} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^m$ , maka  $A_{ij}^1 \neq \emptyset$  dan  $b_i^1 \neq \emptyset$  sehingga  $\hat{x}_i^1 \neq \emptyset$ .

Sementara dari definisi rekursif di atas nampak bahwa  $\hat{x}_i^1 = \left[ \underline{\hat{x}_i^1}, \min_{\beta \in [0,1]} \left\{ \underline{\hat{x}_i^\beta} \right\} \right]$ ,



$$\underline{\hat{x}}_i^1 = \begin{cases} \max_{\beta \in [0,1]} \{\underline{\hat{x}}_i^\beta\} & \text{jika untuk setiap } \alpha \in [0,1] \underline{\hat{x}}_i^\alpha \leq_m \min_{\beta \in [0,1]} \{\underline{\hat{x}}_i^\beta\} \\ \max_{\beta \in [0,1]} \{\overline{\hat{x}}_i^\beta\} & \text{jika terdapat } \alpha \in [0,1] \underline{\hat{x}}_i^\alpha >_m \min_{\beta \in [0,1]} \{\underline{\hat{x}}_i^\beta\} \end{cases},$$

sehingga  $\underline{\hat{x}}_i^1 \neq \emptyset$ ,

c. dari definisi  $\hat{x}_i^\alpha$  pada definisi 4.1 di atas nampak  $\hat{x}_i^\alpha$  merupakan keluarga interval tersarang.

d.  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  dan  $\tilde{b} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^m$ , maka  $A_{ij}^0$  dan  $b_i^0$  masing-masing terbatas,  $\hat{x}_i^0$  terbatas. Sementara dari definisi rekursif di atas nampak bahwa  $\hat{x}_i^0 = [\underline{\hat{x}}_i^0, \overline{\hat{x}}_i^0]$ ,

$$\text{dengan } \underline{\hat{x}}_i^0 = \begin{cases} \min_{\beta \in [0,1]} \{\overline{\hat{x}}_i^\beta\} & \text{jika untuk setiap } \alpha \in [0,1] \underline{\hat{x}}_i^\alpha \geq_m \min_{\beta \in [0,1]} \{\overline{\hat{x}}_i^\beta\} \\ \min_{\beta \in [0,1]} \{\underline{\hat{x}}_i^\beta\} & \text{jika terdapat } \alpha \in [0,1] \underline{\hat{x}}_i^\alpha <_m \min_{\beta \in [0,1]} \{\overline{\hat{x}}_i^\beta\} \end{cases},$$

sehingga  $\hat{x}_i^0$  juga terbatas.

Dengan menggunakan *teorema dekomposisi* dapat diperoleh komponen-komponen vektor kabur  $\hat{x}$ , yaitu

$$\hat{x}_i = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \tilde{c}_i^\alpha$$

dimana  $\tilde{c}_i^\alpha$  adalah himpunan kabur dalam  $\mathbf{R}$  dengan fungsi keanggotaannya  $\mu_{\tilde{c}_i^\alpha}(x) = \alpha \chi_{(c)_i^\alpha}(x)$ , di mana  $\chi_{(c)_i^\alpha}$  adalah fungsi karakteristik interval  $\hat{x}_i^\alpha$ . Dengan

konstruksi  $\hat{x}$  di atas nampak bahwa  $\hat{x}$  merupakan bilangan kabur terbesar di mana  $\hat{x}_i^\alpha \leq_{\text{Im}} \hat{x}_i'^\alpha$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$  dan untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Teorema

berikut memberikan eksistensi subpenyelesaian terbesar bilangan kabur dari sistem

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}.$$

Teorema berikut menjamin bahwa vektor bilangan kabur seperti yang didefinisikan pada Definisi 4.4 di atas merupakan subpenyelesaian terbesar sistem

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b} \text{ seperti di atas.}$$

**Teorema 4.3** Diberikan  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  dengan unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan  $\tilde{\varepsilon}$  dan  $\tilde{b} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^m$ . Vektor bilangan kabur  $\hat{x}$  yang



komponen-komponennya didefinisikan seperti pada Definisi 4.4 di atas merupakan subpenyelesaian terbesar bilangan kabur sistem  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$ .

**Bukti** vektor interval  $\hat{x}^\alpha$  dimana komponen-komponennya adalah  $\hat{x}_i^\alpha = [\underline{\hat{x}}_i^\alpha, \overline{\hat{x}}_i^\alpha]$ ,

dengan  $\underline{\hat{x}}_i^\alpha = \min\{-((A^\alpha)^T \otimes (-b^\alpha))_i, -((\overline{A^\alpha})^T \otimes (-\overline{b^\alpha}))_i\}$  dan

$\overline{\hat{x}}_i^\alpha = \max\{((A^\alpha)^T \otimes (-b^\alpha))_i, ((\overline{A^\alpha})^T \otimes (-\overline{b^\alpha}))_i\}$  untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , merupakan subpenyelesaian

terbesar sistem interval  $A^\alpha \otimes x = b^\alpha$  untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ . Misalkan  $\hat{x}$  adalah

vektor bilangan kabur yang komponen-komponennya berupa bilangan kabur  $\hat{x}_i$ ,

dimana potongan  $\alpha$ -nya adalah  $\hat{x}_i^\alpha = [\underline{\hat{x}}_i^\alpha, \overline{\hat{x}}_i^\alpha]$  yang batas-batasnya

didefinisikan secara rekursif seperti pada Definisi 4.1 di atas (Rudhito, 2011).

Dari definisi  $\hat{x}_i^\alpha$  di atas nampak bahwa  $\hat{x}_i^\alpha \leq_{\text{Im}} \hat{x}_i^{\alpha'}$ . Dengan demikian

$\hat{x}^\alpha \leq_{\text{Im}} \hat{x}^{\alpha'}$  untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ . Mengingat vektor interval  $\hat{x}^{\alpha'}$  merupakan

subpenyelesaian terbesar sistem interval  $A^{\alpha'} \otimes x = b^{\alpha'}$  untuk setiap  $\alpha' \in [0, 1]$ ,

maka berlaku bahwa  $A^{\alpha'} \otimes \hat{x}^{\alpha'} \leq_{\text{Im}} b^{\alpha'}$  untuk setiap  $\alpha' \in [0, 1]$ . Mengingat

$\hat{x}_i^{\alpha'} \leq_{\text{Im}} \hat{x}_i^{\alpha}$  untuk setiap  $\alpha' \in [0, 1]$  dan operasi  $\otimes$  pada matriks interval konsisten

terhadap urutan " $\leq_{\text{Im}}$ ", maka  $A^{\alpha'} \otimes \hat{x}^{\alpha'} \leq_{\text{Im}} A^{\alpha'} \otimes \hat{x}^{\alpha} \leq_{\text{Im}} b^{\alpha'}$  untuk setiap  $\alpha' \in$

$[0, 1]$ . Dengan demikian  $\tilde{A} \otimes \hat{x} \leq_{\text{Im}} \tilde{b}$ , yang berarti  $\hat{x}$  merupakan subpenyelesaian

sistem  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$ . Misalkan vektor kabur  $\tilde{x}' \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\text{max}}^n$  adalah subpenyelesaian

kabur sistem  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$  maka berlaku  $\tilde{A} \otimes \tilde{x}' \leq_{\text{Fm}} \tilde{b}$  atau untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$A^\alpha \otimes x'^{\alpha} \leq_{\text{Im}} b^\alpha$ . Mengingat vektor interval  $\hat{x}^\alpha$  merupakan subpenyelesaian

terbesar sistem terbesar sistem interval  $A^\alpha \otimes x = b^\alpha$ , maka  $x'^{\alpha} \leq_{\text{Im}} \hat{x}^{\alpha}$  untuk

setiap  $\alpha \in [0, 1]$ . Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa  $\tilde{x}' \leq_{\text{Fm}} \hat{x}$ , tinggal

ditunjukkan bahwa  $\tilde{x}'_i \leq_{\text{Fm}} \hat{x}_i$  atau  $x'_i \leq_{\text{Im}} \hat{x}_i^\alpha$  untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ . Andaikan

terdapat  $\alpha_k \in [0, 1]$  sedemikian sehingga  $x'_i \not\leq_{\text{Im}} \hat{x}_i^{\alpha_k}$  yang ekuivalen dengan

$$\underline{x}'_i \not\leq_m \underline{\hat{x}}_i^{\alpha_k} \text{ atau } \overline{x}'_i \not\leq_m \overline{\hat{x}}_i^{\alpha_k}.$$

a. Untuk  $\underline{x}'_i \not\leq_m \underline{\hat{x}}_i^{\alpha_k}$  ada tiga kemungkinan.



i. Andaikan  $\underline{\hat{x}}_i^{\alpha_k} <_m \underline{\hat{x}}_i'^{\alpha_k} <_m \underline{x}_i'^{\alpha_k}$ . Hal ini berakibat  $\underline{x}_i'^{\alpha_k} \not\prec_m \underline{\hat{x}}_i'^{\alpha_k}$ .

Mengingat  $\underline{\hat{x}}_i'^{\alpha_k}$  merupakan subpenyelesaian terbesar sistem  $\underline{A}^{\alpha_k} \otimes \mathbf{x} = \underline{\mathbf{b}}^{\alpha_k}$ . Kontradiksi dengan fakta bahwa  $\tilde{\mathbf{x}}'$  merupakan subpenyelesaian bilangan kabur  $\tilde{A} \otimes \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ .

ii. Andaikan  $\underline{\hat{x}}_i^{\alpha_k} <_m \underline{x}_i'^{\alpha_k} \leq_m \underline{\hat{x}}_i'^{\alpha_k}$ . Berdasarkan pendefinisian secara rekursif pada Definisi 4.1 di atas untuk  $\underline{\hat{x}}_i^\alpha$ , maka terdapat  $\alpha_m \in [0,1]$ ,  $\alpha_m \geq \alpha_k$  sedemikian hingga  $\underline{\hat{x}}_i^{\alpha_k} \leq_m \underline{\hat{x}}_i'^{\alpha_m} <_m \underline{x}_i'^{\alpha_k}$ . Andaikan tidak

demikian, maka  $\underline{\hat{x}}_i^{\alpha_k} \leq_m \underline{\hat{x}}_i'^{\alpha_k} <_m \underline{x}_i'^{\alpha_k}$ , yang kontradiksi dengan pengandaian di atas. Selanjutnya, karena keluarga potongan  $-\alpha$  komponen vektor bilangan kabur  $\tilde{\mathbf{x}}'$  adalah tersarang, maka berlaku

$\underline{x}_i'^{\alpha_k} \leq_m \underline{x}_i'^{\alpha_m}$ . Mengingat  $\underline{\hat{x}}_i'^{\alpha_m} <_m \underline{x}_i'^{\alpha_k}$  dan  $\underline{x}_i'^{\alpha_k} \leq_m \underline{x}_i'^{\alpha_m}$ , maka  $\underline{\hat{x}}_i'^{\alpha_m} <_m \underline{x}_i'^{\alpha_m}$ . Hal ini berakibat  $\underline{x}'^{\alpha_m} \not\prec_m \underline{\hat{x}}'^{\alpha_m}$ . Mengingat  $\underline{\hat{x}}'^{\alpha_m}$

merupakan subpenyelesaian terbesar sistem  $\underline{A}^{\alpha_m} \otimes \mathbf{x} = \underline{\mathbf{b}}^{\alpha_m}$  maka  $\underline{A}^{\alpha_m} \otimes \underline{x}'^{\alpha_m} \not\prec_m \underline{\mathbf{b}}^{\alpha_m}$ . Kontradiksi dengan fakta bahwa  $\tilde{\mathbf{x}}'$  merupakan subpenyelesaian bilangan kabur sistem  $\tilde{A} \otimes \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ .

iii. Andaikan  $\underline{\tilde{x}}_i^{\alpha_k} = \min_{\beta \in [0,1]} \left\{ \underline{\hat{x}}_i^\beta \right\} <_m \underline{x}_i'^{\alpha_k} \leq_m \underline{\hat{x}}_i^{\alpha_k}$ . Mengingat potongan  $-\alpha$

komponen vektor bilangan kabur  $\tilde{\mathbf{x}}'$  berupa interval, maka  $\underline{x}_i'^{\alpha_k} \leq_m \overline{x}_i'^{\alpha_k}$ .

Berdasarkan pendefinisian rekursif pada Definisi 4.4 di atas, maka terdapat

$\alpha_j, \beta^* \in [0,1]$ ,  $\alpha_j \leq \alpha_k$  sedemikian hingga  $\overline{\hat{x}}_i^{\beta^*} \leq_m \overline{\hat{x}}_i'^{\alpha_j} <_m \overline{x}_i'^{\alpha_k}$ .

Andaikan tidak demikian maka  $\underline{\tilde{x}}_i^{\alpha_k} \neq \min_{\beta \in [0,1]} \left\{ \underline{\hat{x}}_i^\beta \right\}$ , yang kontradiksi dengan pengandaian di atas. Selanjutnya, karena keluarga potongan  $-\alpha$

komponen vektor bilangan kabur  $\tilde{\mathbf{x}}'$  adalah tersarang, maka  $\overline{x}_i'^{\alpha_k} \leq_m \overline{x}_i'^{\alpha_j}$ .

Mengingat  $\overline{\hat{x}}_i'^{\alpha_j} <_m \overline{x}_i'^{\alpha_k}$  dan  $\overline{x}_i'^{\alpha_k} \leq_m \overline{x}_i'^{\alpha_j}$ , maka  $\overline{\hat{x}}_i'^{\alpha_j} <_m \overline{x}_i'^{\alpha_j}$ . Hal ini

berakibat  $\overline{x}'^{\alpha_j} \not\prec_m \overline{\hat{x}}'^{\alpha_j}$ . Mengingat  $\overline{\hat{x}}'^{\alpha_j}$  merupakan sub penyelesaian

terbesar sistem  $\overline{A}^{\alpha_j} \otimes \mathbf{x} = \overline{\mathbf{b}}^{\alpha_j}$  maka  $\overline{A}^{\alpha_j} \otimes \overline{x}'^{\alpha_j} \not\prec_m \overline{\mathbf{b}}^{\alpha_j}$ . Kontradiksi



dengan fakta bahwa  $\tilde{x}'$  merupakan subpenyelesaian bilangan kabur sistem

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}.$$

b. Untuk kasus  $\overline{x_i^{\alpha_k}} >_m \overline{\tilde{x}_i^{\alpha_k}}$  ada dua kemungkinan berikut.

i. Andaikan  $\overline{\tilde{x}_i^{\alpha_k}} <_m \overline{\hat{x}_i^{\alpha_k}} <_m \overline{x_i^{\alpha_k}}$ . Hal ini berakibat  $\overline{x_i^{\alpha_k}} \not\leq_m \overline{\hat{x}_i^{\alpha_k}}$ .

Mengingat  $\overline{\hat{x}^{\alpha_k}}$  merupakan subpenyelesaian terbesar sistem  $\overline{A^{\alpha_k}} \otimes x = \overline{b^{\alpha_k}}$  maka  $\overline{A^{\alpha_k}} \otimes \overline{x_i^{\alpha_k}} \not\leq_m \overline{b^{\alpha_k}}$ . Kontradiksi dengan fakta bahwa  $\tilde{x}'$  merupakan subpenyelesaian bilangan kabur sistem  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$ .

ii. Andaikan  $\overline{\tilde{x}_i^{\alpha_k}} <_m \overline{x_i^{\alpha_k}} \leq_m \overline{\hat{x}_i^{\alpha_k}}$ . Berdasarkan pedefinisian pada Definisi 4.4 untuk  $\overline{\tilde{x}_i^{\alpha_k}}$ , maka terdapat  $\alpha_j \in [0,1], \alpha_j \leq \alpha_k$  sedemikian hingga

$\overline{\tilde{x}_i^{\alpha_k}} \leq_m \overline{\hat{x}_i^{\alpha_j}} <_m \overline{x_i^{\alpha_k}}$ . Andaikan tidak demikian, maka  $\overline{x_i^{\alpha_k}} <_m \overline{\tilde{x}_i^{\alpha_k}} \leq_m \overline{\hat{x}_i^{\alpha_k}}$ , yang kontradiktif dengan pengandaian di atas.

Selanjutnya, karena keluarga potongan –  $\alpha$  komponen vektor bilangan kabur  $\tilde{x}'$  adalah tersarang, maka berlaku  $\overline{x_i^{\alpha_k}} \leq_m \overline{x_i^{\alpha_j}}$ . Mengingat

$\overline{\hat{x}_i^{\alpha_j}} <_m \overline{x_i^{\alpha_k}}$  dan  $\overline{x_i^{\alpha_k}} \leq_m \overline{x_i^{\alpha_j}}$ , maka  $\overline{\hat{x}_i^{\alpha_j}} <_m \overline{x_i^{\alpha_j}}$ . Hal ini berakibat

$\overline{x_i^{\alpha_j}} \not\leq_m \overline{\hat{x}_i^{\alpha_j}}$ . Mengingat  $\overline{\hat{x}^{\alpha_j}}$  merupakan subpenyelesaian terbesar sistem

$\overline{A^{\alpha_j}} \otimes x = \overline{b^{\alpha_j}}$  maka  $\overline{A^{\alpha_j}} \otimes \overline{x_i^{\alpha_j}} \not\leq_m \overline{b^{\alpha_j}}$ . Kontradiksi dengan fakta

bahwa  $\tilde{x}'$  merupakan subpenyelesaian bilangan kabur sistem  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$ .

Selanjutnya dengan Teorema Dekomposisi diperoleh subpenyelesaian terbesar sistem di atas yaitu vektor bilangan kabur  $\hat{x}$  dengan komponen-komponennya adalah

$$\hat{x}_i = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \tilde{c}_i^\alpha$$

dimana  $\tilde{c}_i^\alpha$  adalah himpunan kabur dalam  $\mathbf{R}$  dengan fungsi keanggotaannya  $\mu_{\tilde{c}_i^\alpha}(x) = \alpha \chi_{(c)_i}^\alpha(x)$ , dimana  $\chi_{(c)_i}^\alpha$  adalah fungsi karakteristik interval  $\hat{x}_i^\alpha$ .

Bukti selesai



Secara umum eksistensi penyelesaian bilangan kabur untuk sistem  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$  diberikan dalam teorema berikut ini.

**Teorema 4.4** Diberikan  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$  dengan unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan  $\tilde{\varepsilon}$  dan  $\tilde{b} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^m$ . Sistem  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$  mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} \succeq_{\text{Fm}} \tilde{b}$ , dimana vektor  $\tilde{x}$  adalah subpenyelesaian terbesar bilangan kabur sistem  $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$ .

#### 4.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen Max-Plus Bilangan Kabur

Dalam subbab ini akan dibahas nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur yang merupakan generalisasi dari nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus. Penentuan nilai eigen dan vektor eigen ini didasarkan pada penentuan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar max-plus interval melalui Teorema Dekomposisi (Rudhito, 2011).

**Definisi 4.12** Diberikan  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$ . Skalar bilangan kabur  $\tilde{\lambda} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}$  disebut nilai eigen max-plus bilangan kabur matriks  $\tilde{A}$  jika terdapat suatu vektor bilangan kabur  $\tilde{v} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$  dengan  $\tilde{v} \neq \tilde{\varepsilon}_{n \times 1}$  sehingga  $\tilde{A} \otimes \tilde{v} = \tilde{\lambda} \otimes \tilde{v}$ . Vektor  $\tilde{v}$  tersebut disebut vektor eigen aljabar max-plus bilangan kabur matriks  $\tilde{A}$  yang bersesuaian dengan  $\tilde{\lambda}$ .

Misalkan  $A^\alpha$  adalah matriks potongan –  $\alpha$  matriks  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$ , dimana  $A^\alpha \approx [A^\alpha, \overline{A^\alpha}]$ . Misalkan pula  $\lambda^\alpha = \lambda_{\max}(A^\alpha) = [\lambda_{\max}(A^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A^\alpha})]$  dimana  $\lambda_{\max}(A^\alpha)$  dan  $\lambda_{\max}(\overline{A^\alpha})$  berturut-turut dalam bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam  $\mathcal{G}(A^\alpha)$  dan  $\mathcal{G}(\overline{A^\alpha})$ .

Sebagai catatan “  $\lambda_{\max}(\tilde{A})$ ” dalam hal ini dimaksudkan sama seperti  $\lambda(\tilde{A})$  yang ada pada buku Subiono (2015). Lambang  $\lambda_{\max}(\tilde{A})$  merupakan nilai eigen dari suatu matriks persegi yang elemen-elemennya berupa bilangan kabur.



Akan ditunjukkan bahwa keluarga interval  $[\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]$ , dengan  $\alpha \in [0,1]$  merupakan keluarga potongan –  $\alpha$  suatu bilangan kabur.

a. Mengingat  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$ , maka  $\underline{A}^\alpha \leq_m \overline{A}^\alpha$ . Mengingat operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  pada matriks konsisten terhadap urutan " $\leq_m$ ", maka  $(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \leq_m (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k}$ , untuk  $k = 1,2,3, \dots$ , sehingga berlaku

$$\bigoplus_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^n \left( (\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \right)_{ii} \right) \leq_m \bigoplus_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^n \left( (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \right)_{ii} \right)$$

atau  $\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha) \leq_m \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)$ .

Jadi  $\lambda^\alpha = \lambda_{\max}(A^\alpha) = [\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]$  merupakan interval untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$

b. Nilai Eigen dari Matriks Tersebut Bukan Himpunan Kosong

Mengingat  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ , maka  $A_{ij}^1 \neq \phi$ , sehingga  $\lambda_{\max}(A^1) = [\lambda_{\max}(\underline{A}^1), \lambda_{\max}(\overline{A}^1)] \neq \phi$

c. Nilai Eigen Tersarang

Mengingat  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ , maka untuk  $\alpha \leq \beta$  berlaku  $\underline{A}^\alpha \leq_m \underline{A}^\beta \leq_m \overline{A}^\beta \leq_m \overline{A}^\alpha$ . Mengingat operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  pada matriks konsisten terhadap urutan " $\leq_m$ ", maka berlaku

$$(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \leq_m (\underline{A}^\beta)^{\otimes k} \leq_m (\overline{A}^\beta)^{\otimes k} \leq_m (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k}, \text{ untuk } k = 1,2,3, \dots,$$

sehingga berlaku,

$$\begin{aligned} \bigoplus_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^n \left( (\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \right)_{ii} \right) &\leq_m \bigoplus_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^n \left( (\underline{A}^\beta)^{\otimes k} \right)_{ii} \right) \\ &\leq_m \bigoplus_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^n \left( (\overline{A}^\beta)^{\otimes k} \right)_{ii} \right) \leq_m \bigoplus_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^n \left( (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \right)_{ii} \right) \end{aligned}$$

atau

$\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha) \leq_m \lambda_{\max}(\underline{A}^\beta) \leq_m \lambda_{\max}(\overline{A}^\beta) \leq_m \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)$  untuk setiap  $\alpha, \beta \in [0,1]$ . Jadi  $\lambda_{\max}(A^\alpha) = [\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]$ , dengan  $\alpha \in [0,1]$ , merupakan keluarga interval tersarang.

d. Nilai Eigen Terbatas



Mengingat  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ , maka  $A_{ij}^0$  terbatas, sehingga  $\lambda_{\max}(A^0) = [\lambda_{\max}(\underline{A}^0), \lambda_{\max}(\overline{A}^0)]$  juga terbatas.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa untuk setiap interval  $\lambda^\alpha = \lambda_{\max}(A^\alpha) = [\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]$ , dengan  $\alpha \in [0,1]$ , terdapat vektor interval  $v^\alpha \approx [v^\alpha, \overline{v}^\alpha]$ , sedemikian sehingga setiap komponennya, yaitu  $v_i^\alpha = [v_i^\alpha, \overline{v}_i^\alpha]$  merupakan keluarga potongan  $\alpha$  suatu bilangan kabur. Ambil  $\underline{v}_b^\alpha$  dan  $\overline{v}_c^\alpha$ , dimana  $b, c = 1, 2, \dots, p$ , dengan  $p \leq n$ , berturut-turut adalah vektor-vektor eigen max-plus fundamental yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha)$  dan  $\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)$ . Kemungkinan yang dapat terjadi adalah sebagai berikut.

a. Jika terdapat pasangan  $\underline{v}_b^\alpha$  dan  $\overline{v}_c^\alpha$  sedemikian hingga berlaku  $\underline{v}_b^\alpha \leq_m \overline{v}_c^\alpha$ , maka komponen-komponen vektor interval yang bersesuaian dengan  $[v_b^\alpha, \overline{v}_c^\alpha]$  yaitu  $[v_{bi}^\alpha, \overline{v}_{ci}^\alpha]$  merupakan interval untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$  dan untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, n$ . Lebih lanjut ada dua kemungkinan berikut.

i. Jika untuk setiap  $\alpha, \beta \in [0,1]$  dimana  $\alpha \leq \beta$  dan berlaku  $\underline{v}_b^\alpha \leq_m \underline{v}_b^\beta \leq_m \overline{v}_c^\beta \leq_m \overline{v}_c^\alpha$ , maka komponen-komponen vector interval yang bersesuaian dengan  $[v_b^\alpha, \overline{v}_c^\alpha]$ , yaitu  $[v_{bi}^\alpha, \overline{v}_{ci}^\alpha]$ , merupakan keluarga interval tersarang untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Dengan demikian untuk kasus ini diperoleh bahwa  $v^\alpha \approx [v^\alpha, \overline{v}^\alpha] = [v_b^\alpha, \overline{v}_c^\alpha]$ .

ii. Jika terdapat  $\alpha, \beta \in [0,1]$  dimana  $\alpha \leq \beta$  dan berlaku  $\underline{v}_b^\alpha \not\leq_m \underline{v}_b^\beta$  atau  $\overline{v}_c^\alpha \not\leq_m \overline{v}_c^\beta$ .

1. Jika  $\underline{v}_b^\alpha \not\leq_m \underline{v}_b^\beta$  maka terdapat  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  sedemikian hingga  $v_{bi}^\alpha >_m v_{bi}^\beta$ .

Misalkan



$$\underline{v}_{bi}^{\alpha} = \begin{cases} \underline{v}_{bi}^{\beta} & \text{jika } \underline{v}_{bi}^{\beta} \geq_m \underline{v}_{bi}^{\alpha} \\ \underline{v}_{bi}^{\alpha} & \text{jika } \underline{v}_{bi}^{\beta} <_m \underline{v}_{bi}^{\alpha} \end{cases} \text{ untuk setiap } \alpha, \beta \in [0,1], \alpha > \beta$$

$$\underline{\delta}_j(\alpha) = \underline{v}_{bi}^{\alpha} - v_{bi}^{\alpha},$$

$$\underline{\delta}'_i(\alpha) = \begin{cases} \underline{\delta}_i(\beta) & \text{jika } \underline{\delta}_i(\alpha) \geq \underline{\delta}_i(\beta) \\ \underline{\delta}_i(\alpha) & \text{jika } \underline{\delta}_i(\alpha) < \underline{\delta}_i(\beta) \end{cases} \text{ untuk setiap } \alpha, \beta \in [0,1], \alpha > \beta,$$

$$\underline{\delta}(\alpha) = \min_i \{\underline{\delta}_i(\alpha)\}, i \in \{1,2,3, \dots, n\}$$

$$\underline{\delta}'(\alpha) = \min_i \{\underline{\delta}'_i(\alpha)\}, i \in \{1,2,3, \dots, n\}.$$

Selanjutnya dibentuk kombinasi linear  $\underline{v}_b^{\alpha} = (\underline{\delta}(\alpha) + \underline{\delta}'(\alpha)) \otimes$

$$\underline{v}_b^{\alpha}.$$

Dari definisi  $\underline{v}_{bi}^{\alpha}, \underline{\delta}_i(\alpha), \underline{\delta}'_i(\alpha), \underline{\delta}(\alpha),$  dan  $\underline{\delta}'(\alpha)$  di atas nampak

bahwa untuk setiap  $\alpha, \beta \in [0,1]$  dengan  $\alpha \leq \beta$  berlaku  $\underline{v}_b^{\alpha} \leq_m \underline{v}_b^{\beta},$

sehingga  $\underline{v}_{bi}^{\alpha} \leq_m \underline{v}_{bi}^{\beta}$  untuk setiap  $i \in \{1,2,3, \dots, n\}.$

2. Jika  $\underline{v}_c^{\beta} \leq_m \underline{v}_c^{\alpha}$  maka terdapat  $i \in \{1,2, \dots, n\}$  sedemikian hingga

$$\underline{v}_{ci}^{\beta} > \underline{v}_{ci}^{\alpha}.$$

Misalkan  $\overline{v}_{ci}^{\alpha} = \begin{cases} \overline{v}_{ci}^{\alpha} & \text{jika } \overline{v}_{ci}^{\beta} \leq_m \overline{v}_{ci}^{\alpha} \\ \overline{v}_{ci}^{\beta} & \text{jika } \overline{v}_{ci}^{\beta} >_m \overline{v}_{ci}^{\alpha} \end{cases}$  untuk setiap  $\alpha, \beta \in$

$[0,1], \alpha > \beta$

$$\overline{\delta}_i(\alpha) = \overline{v}_{ci}^{\alpha} - \overline{v}_{ci}^{\alpha},$$

$$\overline{\delta}'_i(\alpha) = \begin{cases} \overline{\delta}_i(\beta) & \text{jika } \overline{\delta}_i(\alpha) \leq \overline{\delta}_i(\beta) \\ \overline{\delta}_i(\alpha) & \text{jika } \overline{\delta}_i(\alpha) > \overline{\delta}_i(\beta) \end{cases} \text{ untuk setiap } \alpha, \beta \in [0,1], \alpha > \beta,$$



$$\bar{\delta}_i(\alpha) = \min_i \{\bar{\delta}_i(\alpha)\}, i \in \{1,2,3, \dots, n\}$$

$$\bar{\delta}'_i(\alpha) = \min_i \{\bar{\delta}'_i(\alpha)\}, i \in \{1,2,3, \dots, n\}$$

Selanjutnya dibentuk kombinasi linear  $\hat{v}_c^\alpha = (\bar{\delta}_i(\alpha) + \bar{\delta}'_i(\alpha)) \otimes \bar{v}_c^\alpha$ .

Didefinisikan  $\bar{v}_{ci}^\alpha, \bar{\delta}_i(\alpha), \bar{\delta}'_i(\alpha), \bar{\delta}(\alpha),$  dan  $\bar{\delta}'(\alpha)$  di atas nampak bahwa untuk setiap  $\alpha, \beta \in [0,1]$  dengan  $\alpha \leq \beta$  berlaku  $\hat{v}_c^\beta \leq_m \hat{v}_c^\alpha$ , sehingga  $\hat{v}_{ci}^\beta \leq_m \hat{v}_{ci}^\alpha$  untuk setiap  $i \in \{1,2,3, \dots, n\}$ .

Selanjutnya karena  $v_{bi}^\beta \leq_m \bar{v}_{bi}^\beta$ , dengan demikian diperoleh bahwa  $\hat{v}_{bi}^\alpha \leq_m \hat{v}_{bi}^\beta \leq_m \hat{v}_{ci}^\beta \leq_m \hat{v}_{ci}^\alpha$  untuk setiap  $\alpha, \beta \in [0,1]$  dengan  $\alpha \leq \beta$  dan setiap  $i \in \{1,2,3, \dots, n\}$ . Jadi dapat diperoleh keluarga interval tersarang  $[\hat{v}_{bi}^\alpha, \hat{v}_{ci}^\alpha]$ , dengan  $\alpha \in [0,1]$  dan untuk setiap  $i = 1,2,3, \dots, n$ . Dengan demikian dalam kasus ini  $v^\alpha \approx [\underline{v}^\alpha, \bar{v}^\alpha] = [\hat{v}_b^\alpha, \hat{v}_c^\alpha]$

b. Jika untuk setiap pasangan  $\underline{v}_b^\alpha$  dan  $\bar{v}_c^\alpha$  berlaku  $\underline{v}_b^\alpha \leq_m \bar{v}_c^\alpha$  maka dapat dibentuk kombinasi linear vektor-vektor eigen fundamental yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_{\max}(A^\alpha)$ , sehingga diperoleh  $\underline{v}_b^{*\alpha}$  dimana  $\underline{v}_b^{*\alpha} \leq_m \bar{v}_c^{*\alpha}$ . Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan membentuk  $\underline{v}_b^{*\alpha} = \delta \otimes \underline{v}_b^\alpha$ , dengan  $\delta = \min_i \left\{ \min_\alpha \{\bar{v}_{ci}^\alpha\} - \underline{v}_{bi}^\alpha \right\}$ , untuk  $\alpha \in [0,1]$  dan  $i = 1,2,3, \dots, n$ . Dengan demikian komponen-komponen vektor interval  $v^\alpha \approx [\underline{v}_b^{*\alpha}, \bar{v}_c^\alpha]$ , yaitu  $[\underline{v}_{bi}^{*\alpha}, \bar{v}_{ci}^\alpha]$  merupakan interval untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$  dan  $i = 1,2,3, \dots, n$ . Lebih lanjut ada dua kemungkinan berikut.

i. Jika untuk setiap  $\alpha, \beta \in [0,1]$  dimana  $\alpha \leq \beta$  berlaku  $\underline{v}_b^{*\alpha} \leq_m \underline{v}_b^{*\beta} \leq_m \bar{v}_c^\beta \leq_m \bar{v}_c^\alpha$ , maka komponen-komponen vektor interval yang bersesuaian dengan  $[\underline{v}_b^{*\alpha}, \bar{v}_c^\alpha]$ , yaitu  $[\underline{v}_{bi}^{*\alpha}, \bar{v}_{ci}^\alpha]$  merupakan



interval keluarga tersarang untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dengan demikian

untuk kasus ini diperoleh bahwa  $v^\alpha \approx [\underline{v}^\alpha, \overline{v}^\alpha] = [v_b^{*\alpha}, \overline{v}_c^\alpha]$ .

- ii. Jika terdapat  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  dimana  $\alpha \leq \beta$  dan berlaku  $v_b^{*\alpha} \leq_m v_b^{*\beta}$  atau  $\overline{v}_c^\alpha \leq_m \overline{v}_c^\beta$ , analog dengan cara di atas dapat diperoleh suatu keluarga interval tersarang.

Selanjutnya karena  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ , maka  $A_{ij}^1 \neq \emptyset$ , sehingga  $\lambda_{\max}(A^1) = [\lambda_{\max}(A^1), \lambda_{\max}(\overline{A}^1)] \neq \emptyset$ . Demikian pula karena  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ , maka  $A_{ij}^0$  masing-masing terbatas, sehingga  $\lambda_{\max}(A^0) = [\lambda_{\max}(A^0), \lambda_{\max}(\overline{A}^0)]$  dan  $v^0 = [\underline{v}_i^0, \overline{v}_i^0]$  juga terbatas.

Jadi terdapat vektor interval  $v^\alpha \approx [\underline{v}^\alpha, \overline{v}^\alpha]$ , sedemikian hingga setiap komponennya, yaitu  $v_i^\alpha = [\underline{v}_i^\alpha, \overline{v}_i^\alpha]$  merupakan keluarga potongan- $\alpha$  suatu bilangan kabur.

**Teorema 4.5** Diberikan  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$ . Skalar bilangan kabur

$$\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A}) = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \tilde{\lambda}_{\max}^\alpha$$

dimana  $\tilde{\lambda}_{\max}^\alpha$  adalah himpunan kabur dalam  $\mathbf{R}$  dengan fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{\lambda}_{\max}^\alpha}(x) = \alpha \chi_{\tilde{\lambda}_{\max}^\alpha}(x)$ , dan  $\chi_{\tilde{\lambda}_{\max}^\alpha}$  adalah fungsi karakteristik himpunan (interval)  $[\lambda_{\max}(A^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]$ , merupakan nilai eigen max-plus bilangan kabur matriks  $\tilde{A}$ .

**Bukti**

Menurut penjelasan di atas, interval  $[\lambda_{\max}(A^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]$  dan vektor interval  $v^\alpha \approx [\underline{v}^\alpha, \overline{v}^\alpha]$ , yang memenuhi persamaan  $A^\alpha \otimes v^\alpha = \lambda^\alpha \otimes v^\alpha$  untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ . Menurut penjelasan di atas,  $\lambda^\alpha = [\lambda_{\max}(A^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]$  dan  $[v_i^\alpha, \overline{v}_i^\alpha]$  masing-masing merupakan potongan -  $\alpha$  suatu bilangan kabur. Kemudian dengan menggunakan Teorema Dekomposisi, skalar bilangan kabur

$$\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A}) = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \tilde{\lambda}_{\max}^\alpha$$



merupakan nilai eigen max-plus bilangan kabur matriks  $\tilde{A}$ . Menurut penjelasan di atas Teorema 4.4 untuk setiap interval  $\lambda^\alpha$ , dengan  $\alpha \in [0,1]$ , terdapat vektor interval  $v_i^\alpha = [\underline{v}_i^\alpha, \overline{v}_i^\alpha]$  merupakan keluarga potongan  $-\alpha$  suatu bilangan kabur.

Dengan demikian dapat diperoleh  $\tilde{v}$ , yaitu vektor eigen max-plus bilangan kabur yang bersesuaian dengan  $\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A})$ , dengan

$$\tilde{v}_i = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \tilde{v}_i^\alpha$$

dimana  $\tilde{v}_i^\alpha$  adalah himpunan kabur dalam  $\mathbf{FU}\{\tilde{\varepsilon}\}$  dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{v}_i^\alpha}(x) = \alpha \chi_{v_i^\alpha}(x)$$

dimana  $\chi_{v_i^\alpha}$  adalah fungsi karakteristik himpunan  $v_i^\alpha = [\underline{v}_i^\alpha, \overline{v}_i^\alpha]$  untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Bukti selesai.

Vektor eigen max-plus bilangan kabur seperti yang diperoleh dalam bukti Teorema di atas disebut *vektor eigen max-plus bilangan kabur fundamental*.

Hasil berikut memberikan ketunggalan nilai eigen bilangan kabur max-plus matriks bilangan kabur.

**Akibat 4.1** Diberikan  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$ . Jika matriks  $\tilde{A}$  irreduisibel, maka  $\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A})$ , seperti dalam Teorema di atas, merupakan nilai eigen max-plus bilangan kabur tunggal matriks  $\tilde{A}$ , dengan  $\tilde{v}$  adalah vektor eigen max-plus bilangan kabur yang bersesuaian dengan  $\lambda_{\max}(\tilde{A})$ , dimana  $\tilde{v}_i \neq \tilde{\varepsilon}$  untuk setiap  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

**Bukti**

Meurut Teorema 4.4 di atas, skalar bilangan kabur  $\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A})$  merupakan nilai eigen max-plus bilangan kabur matriks  $\tilde{A}$  di atas. Misalkan bahwa skalar bilangan kabur  $\tilde{\lambda}$  adalah nilai eigen max-plus bilangan kabur matriks  $\tilde{A}$ , maka terdapat suatu vektor bilangan kabur  $\tilde{v} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$  dengan  $\tilde{v} \neq \tilde{\varepsilon}_{n \times 1}$  sehingga  $\tilde{A} \otimes \tilde{v} = \tilde{\lambda} \otimes \tilde{v}$  atau  $A^\alpha \otimes v^\alpha = \lambda^\alpha \otimes v^\alpha$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ . Mengingat matriks  $A^\alpha$  irreduisibel untuk  $\alpha \in [0,1]$ , maka nilai eigen max-plus interval matriks  $A^\alpha$  tunggal, yaitu  $\lambda^\alpha = \lambda_{\max}(A^\alpha) = [\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$ . Jadi dapat disimpulkan



bahwa skalar bilangan kabur  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A})$ , yang berarti nilai eigen max-plus bilangan kabur matriks  $\tilde{A}$  tunggal. Selanjutnya andaikan  $\tilde{v}$  adalah vektor eigen max-plus bilangan kabur yang bersesuaian dengan  $\lambda_{\max}(\tilde{A})$  di atas, maka vektor  $\underline{v}^\alpha$  dan  $\overline{v}^\alpha$ , berturut-turut merupakan vektor eigen max-plus yang bersesuaian dengan  $\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha)$  dan  $\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)$ . Mengingat matriks  $\tilde{A}$  irreduisibel,  $\underline{A}^\alpha$  dan  $\overline{A}^\alpha$  irreduisibel, maka  $\underline{v}_i^\alpha \neq \varepsilon$  dan  $\overline{v}_i^\alpha \neq \varepsilon$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$  dan untuk setiap  $i \in \{1,2, \dots, n\}$ . Jadi  $v_i^\alpha \neq \varepsilon$  untuk setiap  $\alpha \in [0,1]$  dan untuk setiap  $i \in \{1,2, \dots, n\}$ , sehingga terbukti  $\tilde{v}_i \neq \tilde{\varepsilon}$  untuk setiap  $i \in \{1,2, \dots, n\}$ .

Bukti selesai.

#### 4.5.1 Menentukan Algoritma Penentuan Nilai Eigen Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur

Sebelum menentukan algoritma penentuan nilai eigen aljabar max-plus bilangan kabur, diketahui terlebih dahulu  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$  yang merupakan matriks atas suatu model matematika  $\tilde{x}(k) = \tilde{A} \oplus \tilde{x}(k-1)$  dengan  $k = 1,2,3, \dots, n$ . Dimana,  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$  merupakan matriks persegi dengan ukuran  $n \times n$  dan elemen-elemennya merupakan bilangan kabur segitiga seperti di bawah ini.

Bilangan kabur segitiga  $\tilde{a}$ , dengan lambang BKS  $(a_1, a, a_2)$ , adalah bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a_1}{a - a_1}, & \text{untuk } a_1 \leq x \leq a; \\ \frac{a_2 - x}{a_2 - a}, & \text{untuk } a \leq x \leq a_2; \\ 0, & \text{untuk lainnya,} \end{cases}$$

untuk suatu  $a_1 \leq a \leq a_2$ .

Berikut ini diberikan langkah-langkah menentukan nilai eigen atas aljabar max-plus bilangan kabur.

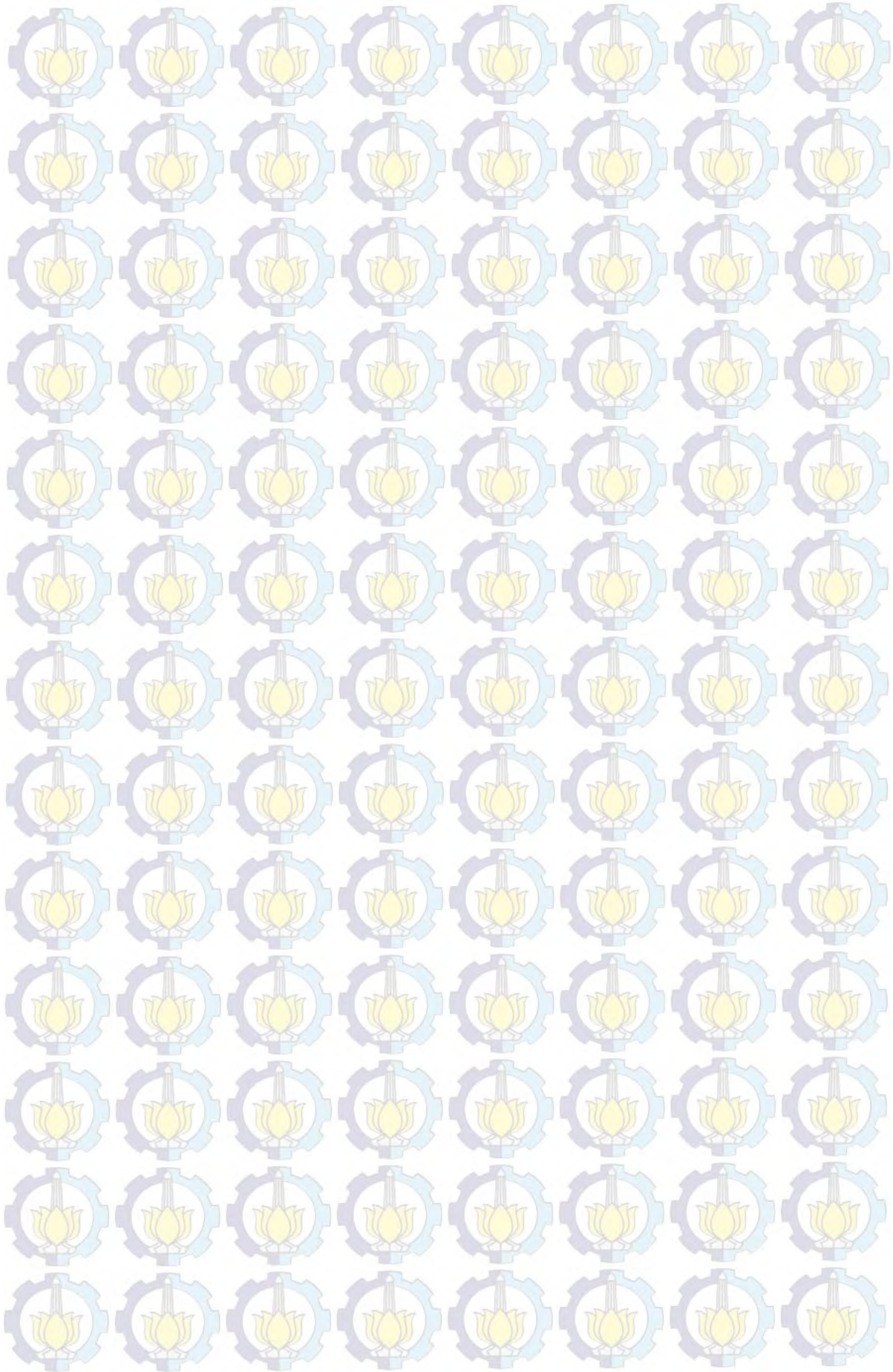


1. Menentukan banyaknya potongan  $\alpha$ . Banyaknya potongan  $\alpha = 1, 2, 3, \dots, k$ . Oleh karena itu, didapatkan  $\alpha$  yang merupakan selang interval tertutup 0 sampai dengan 1.
2. Membentuk matriks  $\tilde{A}$  berdasarkan potongan  $\alpha$ . Oleh karena itu, kita dapatkan matriks  $A^\alpha \approx [\underline{A}^\alpha, \overline{A}^\alpha]$ . Matriks  $\underline{A}^\alpha$  dan  $\overline{A}^\alpha \in (\mathbb{R}_{\max})_{\max}^{n \times n}$  berukuran  $n \times n$  dengan elemen-elemen dari matriks  $\underline{A}^\alpha$  dan  $\overline{A}^\alpha$  merupakan potongan  $\alpha$  yang merupakan bilangan real. Rumus potongan  $\alpha$  untuk bilangan kabur segitiga adalah sebagai berikut.

$$a^\alpha = \begin{cases} [(a - a_1)\alpha + a_1, -(a_2 - a)\alpha + a_2] & 0 < \alpha \leq 1 \\ [a_1, a_2], & \alpha = 0. \end{cases}$$

3. Menentukan nilai eigen  $\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha)$  dan  $\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)$  dari masing-masing matriks hasil potongan  $\alpha$ , yaitu  $\underline{A}^\alpha$  dan  $\overline{A}^\alpha$ . Penentuan nilai eigen  $\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha)$  dan  $\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)$  berdasarkan Algoritma Power yang dibuat oleh Subiono (2000). Dalam hal ini, nilai eigen yang didapatkan sesuai dengan  $\tilde{A} \otimes \tilde{v} = \tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A}) \otimes \tilde{v}$ .
4. Oleh karena itu, didapatkan  $\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A}) = [\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]$  sebanyak potongan  $\alpha$ .







## BAB 5

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 5.1 Pedahuluan

Pada bagian ini akan dibahas mengenai penerapan aljabar max-plus bilangan kabur pada sistem jaringan *Bus Rapid Transit (BRT)* Trans Jogja. Model matematika dari sistem jaringan *BRT* Trans Jogja dibangun berdasarkan teori-teori yang ada dalam aljabar max-plus bilangan kabur.

Sistem jaringan transportasi *BRT* Trans Jogja terdiri dari beberapa spesifikasi. Sistem jaringan transportasi *BRT* Trans Jogja terdiri dari 8 jalur, yakni 1A, 1B, 2A, 2B, 3A, 3B, 4A dan 4B. Pada sistem ini, jumlah *BRT* yang beroperasi pada sistem jaringan ini sebanyak 65 bus. Pada masing-masing jalur jumlah *BRT* yang beroperasi berbeda-beda, yakni pada jalur 1A sebanyak 12 bus, 1B sebanyak 8 bus, 2A sebanyak 10 bus, 2B sebanyak 9 bus, 3A sebanyak 9 bus, 3B sebanyak 9 bus, 4A sebanyak 4 bus, dan 4B sebanyak 4 bus. Halte/selter pada sistem ini berjumlah 193 halte, di mana satu halte dimungkinkan dapat dilalui *BRT* pada jalur trayek yang berbeda. Awal keberangkatan masing *BRT* tersebar di beberapa halte tertentu, *BRT* berjalan dari halte awal dan halte yang lain sesuai dengan jalurnya masing-masing. Setiap jalur membentuk sirkuit dan antar jalur saling menghubungkan.

Asumsi yang digunakan dalam penelitian terdiri dari beberapa asumsi. Data dalam penelitian ini diambil berdasarkan hari efektif. Hari efektif disini dimaksudkan hari-hari di mana masyarakat beraktivitas normal dan bukan hari libur tertentu. Kondisi jalan diasumsikan normal. Dalam hal ini, kondisi jalan normal diartikan tidak ada pengalihan jalan tertentu karena ada masalah pada jalan tersebut. Kondisi bus pada masing-masing jalur diasumsikan tidak mengalami kerusakan. Satuan dursi perjalanan bus diasumsikan dalam satuan waktu *menit*.

Data waktu tempuh *BRT* dalam melakukan perjalanan di masing-masing jalur merupakan bilangan kabur segitiga (*BKS*). Di mana konsep bilangan kabur pada penelitian ini berdasarkan hasil observasi lapangan yang menyatakan waktu



tempuh *BRT* dari halte satu ke yang lain tidak tepat/pasti. Sebagai contoh, misalkan waktu tempuh perjalanan *BRT* dari Halte KR 2 ke Halte Kalasan adalah “kira-kira 2 menit”. Secara intuitif, dalam kasus ini dapat diterima ungkapan bahwa “kurang lebih 2 menit” dapat dinyatakan dengan suatu himpunan kabur semesta  $\mathbb{R}$ , di mana bilangan 2 mempunyai derajat keanggotaan sama dengan 1, bilangan-bilangan di sekitar 2 mempunyai derajat keanggotaan kurang dari 1, dan semakin jauh bilangan itu, maka derajat keanggotaannya semakin mendekati nol. Berdasarkan data dan hasil observasi didapatkan bilangan-bilangan lain di sekitar 2 yaitu 1 dan 3, di mana 1 adalah waktu tempuh tercepat yang dapat dicapai dan 3 adalah waktu tempuh terlama yang dapat dicapai. Oleh karena itu, berdasarkan data dan observasi didapatkan  $\tilde{a}$  = bilangan kabur segitiga  $\tilde{z} = \text{BKS}(1; 2; 3)$ , dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{1} & \text{untuk } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3-x}{1} & \text{untuk } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{untuk } 3 \leq x \end{cases}$$

Dalam penelitian ini, peneliti mengambil data pada situasi tertentu, yaitu pada pukul 5:33 WIB untuk menentukan posisi dan banyaknya *BRT* pada masing-masing jalur. Pada pukul 5:33 WIB merupakan awal keberangkatan dari masing-masing *BRT* Trans Jogja.

Dalam penelitian ini, peneliti melakukan sinkronisasi *BRT* yang akan berangkat dari halte tertentu. *BRT* yang akan berangkat dari halte tertentu harus menunggu kedatangan *BRT* dari jalur lain yang akan datang di halte tersebut. Hal ini dimaksudkan supaya memungkinkan perpindahan penumpang antar *BRT* jalur yang berbeda.

Sirkuit kritis dari keseluruhan sistem jaringan transportasi *BRT* Trans Jogja dihitung menggunakan kajian-kajian yang ada di aljabar max-plus bilangan kabur. Dari sistem yang dibangun menjadi sebuah model matematika dan menggunakan aljabar max-plus didapatkan nilai eigen dan vektor eigen yang masing-masing merupakan keperiodikan waktu interval keberangkatan dan waktu awal keberangkatan dari sistem jaringan transportasi *BRT* Trans Jogja. Lebih lanjut lagi,



keperiodikan waktu interval keberangkatan dan waktu awal keberangkatan merupakan bilangan kabur segitiga. Saat pembuatan jadwal keberangkatan dan kedatangan *BRT* pada acuan waktu tertentu, *BKS* dapat dipilih nilai pastinya berdasarkan kondisi di halte, yaitu banyaknya penumpang (sedikit, rata-rata, banyak) dan di jalan, yaitu tingkat kemacetan (lengang, lancar, macet). Misalkan Halte Malioboro 1, dari tingkat kemacetan jalan yang mengarah di Halte Malioboro jam 11:00 WIB sampai dengan 12:00 WIB adalah lengang dan penumpang banyak maka dapat dibuat frekuensi keberangkatan yang semakin banyak dengan cara memilih interval keberangkatan yang berjangka waktu pendek. Hal ini mungkin karena masih masuk dalam kriteria waktu interval bilangan kabur tersebut.

## **5.2 Prototipe Model Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur**

Berikut ini diberikan prototipe model sederhana sistem jaringan transportasi *BRT* untuk mempermudah memahami bagaimana sistem *BRT* dapat diselesaikan. Data contoh diambil dari sebagian kecil sistem sistem jaringan transportasi *BRT*.

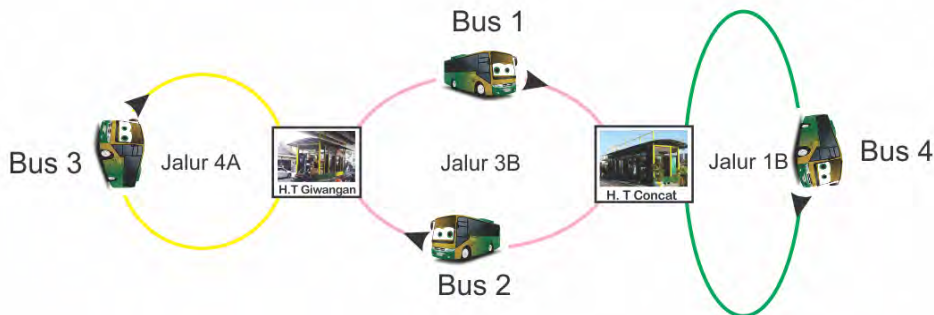
### **5.2.1 Keadaan Fenomena Fisik Jaringan Transportasi *BRT***

Berikut ini diberikan contoh penerapan aljabar max-plus bilangan kabur dalam sistem jaringan transportasi sederhana. Untuk memudahkan diambil data sistem jaringan transportasi *BRT* Trans Jogja yang mirip dengan contoh dalam Subiono (2015). Jalur tersebut adalah jalur 1B, 3B, dan 4A. Sedangkan halte sebagai titik pertemuan dan perpindahan penumpang adalah Halte Terminal Condong Catur dan Terminal Giwangan. Secara sederhana sistem tersebut dapat digambarkan sebagai berikut ini.



### Contoh 5.1

Diberikan sistem jaringan transportasi *BRT* dengan waktu aktivitas kabur seperti di bawah ini.



Gambar 5.1 Graph Berarah Jaringan Transportasi  
BRT Trans Jogja

Gambar 5.1 di atas menunjukkan sistem jaringan transportasi *BRT* Trans Jogja. Diberikan dua halte, yaitu Halte Terminal Giwangan dan Halte Terminal Condong Catur (Concat). Pada Jalur 4, bus berangkat dari Terminal Giwangan kemudian melakukan perjalanan melalui halte-halte lain di sepanjang jalur 4A dan kembali lagi ke Halte Terminal Giwangan. Pada jalur 3, bus berangkat dari Halte Giwangan kemudian melakukan perjalanan melalui halte-halte lain di sepanjang jalur 3B dan datang ke Halte Terminal Condong Catur. Setelah dari Halte Terminal Condong Catur kembali lagi ke Halte Terminal Giwangan. Pada Jalur 1, bus berangkat dari Terminal Condong Catur kemudian melakukan perjalanan melalui halte-halte lain di sepanjang jalur 1B dan kembali lagi ke Halte Terminal Condong Catur.

Berikut ini diberikan waktu lamanya perjalanan *BRT* Trans Jogja dalam bilangan kabur segitiga.

Misalkan:

- Durasi waktu  $\tilde{t}_i$  = waktu kabur lamanya perjalanan *BRT* antar halte, dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .



- b. Durasi waktu  $\tilde{t}_1$  = waktu kabur lamanya *BRT* melakukan perjalanan dari Halte Terminal Giwangan ke Halte Terminal Condong Catur.
- c. Durasi waktu  $\tilde{t}_2$  = waktu kabur lamanya *BRT* melakukan perjalanan dari Halte Terminal Condong Catur ke Halte Terminal Giwangan.
- d. Durasi waktu  $\tilde{t}_3$  = waktu kabur lamanya *BRT* melakukan perjalanan dari Halte Terminal Giwangan ke Halte Terminal Giwangan.
- e. Durasi waktu  $\tilde{t}_4$  = waktu kabur lamanya *BRT* melakukan perjalanan dari Halte Terminal Condong Catur ke Halte Terminal Condong Catur.

Akan dibuat model untuk jadwal keberangkatan *BRT* dengan kriteria:

- a. Waktu tempuh tiap jalur adalah waktu tempuh aktivitas kabur berupa bilangan kabur dan jumlah keberangkatan *BRT* persatuan waktu adalah sebanyak mungkin.
- b. Keberangkatan *BRT* di setiap halte menunggu kedatangan *BRT* dari jalur lainya untuk memungkinkan pertukaran penumpang antar *BRT* di masing-masing halte (penumpang berpindah dari *BRT* satu ke *BRT* lainnya).
- c. Keberangkatan *BRT* di masing-masing halte adalah sesegera mungkin.

Diberikan aturan sinkronisasi sebagai berikut:

- a. Pada jalur 3B, keberangkatan *BRT* dari Halte Terminal Giwangan ke Halte Terminal Condong Catur harus menunggu kedatangan *BRT* dari Halte Terminal Condong Catur ke Halte Terminal Giwangan dan kedatangan *BRT* dari Halte Terminal Giwangan ke Halte Terminal Giwangan.
- b. Pada jalur 3B, keberangkatan *BRT* dari Halte Terminal Giwangan ke Halte Terminal Condong Catur harus menunggu kedatangan *BRT* dari Halte Terminal Condong Catur ke Halte Terminal Giwangan dan kedatangan *BRT* dari Halte Terminal Giwangan ke Halte Terminal Giwangan.
- c. Pada jalur 3B, keberangkatan *BRT* dari Halte Terminal Giwangan ke Halte Terminal Condong Catur harus menunggu kedatangan *BRT* dari Halte Terminal Condong Catur ke Halte Terminal Giwangan dan kedatangan *BRT* dari Halte Terminal Giwangan ke Halte Terminal Giwangan.



- d. Pada jalur 3B, keberangkatan *BRT* dari Halte Terminal Giwangan ke Halte Terminal Condong Catur harus menunggu kedatangan *BRT* dari Halte Terminal Condong Catur ke Halte Terminal Giwangan dan kedatangan *BRT* dari Halte Terminal Giwangan ke Halte Terminal Giwangan.

Permisalan notasi waktu keberangkatan *BRT*:

$\tilde{x}_1(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Terminal Giwangan ke Condong Catur;

$\tilde{x}_2(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Terminal Condong Catur ke Giwangan;

$\tilde{x}_3(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Terminal Giwangan ke Giwangan;

$\tilde{x}_4(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Terminal Condong Catur ke Condong Catur;

### 5.2.2 Model Matematika Jaringan Transportasi *BRT*

Waktu keberangkatan tersebut dinyatakan dalam vektor  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$ ,

yaitu  $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix}$ , di mana keberangkatan yang pertama kali diberikan oleh  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ ,

keberangkatan selanjutnya adalah  $\tilde{\mathbf{x}}(1)$ , dan seterusnya. Keberangkatan yang ke- $k$  (keberangkatan sebelumnya) bergantung pada keberangkatan ke- $(k-1)$  (keberangkatan sebelumnya). Keberangkatan *BRT* dalam model disebut sebagai *event*.

Berdasarkan kriteria yang diberikan di atas, maka keberangkatan *BRT* di Halte Terminal Giwangan dan Halte Terminal Giawangan harus memenuhi persamaan di bahwa ini:



$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1(k) &= \max\{\tilde{t}_2 + x_2(k-1), \tilde{t}_3 + x_3(k-1)\} \\
\tilde{x}_2(k) &= \max\{\tilde{t}_1 + x_1(k-1), \tilde{t}_4 + x_4(k-1)\} \\
\tilde{x}_3(k) &= \max\{\tilde{t}_2 + x_2(k-1), \tilde{t}_3 + x_3(k-1)\} \\
\tilde{x}_4(k) &= \max\{\tilde{t}_1 + x_1(k-1), \tilde{t}_4 + x_4(k-1)\}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Persamaan (5.1) di atas dapat dinyatakan dalam notasi aljabar max-plus bilangan kabur sebagai berikut;

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1(k) &= \tilde{t}_2 \otimes \tilde{x}_2(k-1) \oplus \tilde{t}_3 \otimes \tilde{x}_3(k-1) \\
\tilde{x}_2(k) &= \tilde{t}_1 \otimes \tilde{x}_1(k-1) \oplus \tilde{t}_4 \otimes \tilde{x}_4(k-1) \\
\tilde{x}_3(k) &= \tilde{t}_2 \otimes \tilde{x}_2(k-1) \oplus \tilde{t}_3 \otimes \tilde{x}_3(k-1) \\
\tilde{x}_4(k) &= \tilde{t}_1 \otimes \tilde{x}_1(k-1) \oplus \tilde{t}_4 \otimes \tilde{x}_4(k-1)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Dengan kata lain dapat dinyatakan dalam bentuk  $\tilde{x}(k) = \tilde{A} \oplus \tilde{x}(k-1)$ , yaitu

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k) \\ \tilde{x}_2(k) \\ \tilde{x}_3(k) \\ \tilde{x}_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} & \tilde{t}_2 & \tilde{t}_3 & \tilde{\varepsilon} \\ \tilde{t}_1 & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} & \tilde{t}_4 \\ \tilde{\varepsilon} & \tilde{t}_2 & \tilde{t}_3 & \tilde{\varepsilon} \\ \tilde{t}_1 & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} & \tilde{t}_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(k-1) \\ \tilde{x}_2(k-1) \\ \tilde{x}_3(k-1) \\ \tilde{x}_4(k-1) \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Kemudian, didapatkan waktu aktivitas kabur berturut-turut  $\tilde{t}_1 = (34; 75; 121)$ ,  $\tilde{t}_2 = (24; 49; 78)$ ,  $\tilde{t}_3 = (18; 52; 111)$ , dan  $\tilde{t}_4 = (48; 107; 178)$ .

Sehingga, dapat dinyatakan dalam matriks  $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} & (24; 49; 78) & (18; 52; 111) & \tilde{\varepsilon} \\ (34; 75; 121) & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} & (48; 107; 178) \\ \tilde{\varepsilon} & (24; 49; 78) & (18; 52; 111) & \tilde{\varepsilon} \\ (34; 75; 121) & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} & (48; 107; 178) \end{bmatrix}$$

Jika diberikan waktu keberangkatan awal adalah  $\tilde{x}(0)$  dengan  $\tilde{x}_1(0) = \tilde{x}_2(0) = \tilde{x}_3(0) = \tilde{x}_4(0) = 0$ , maka dengan bantuan program komputasi *Scilab*



operasi  $\tilde{\otimes}$  pada dua buah matriks atas aljabar max-plus bilangan kabur akan diperoleh waktu keberangkatan, urutan keberangkatan untuk  $k = 1, 2, 3, \dots$  sebagai berikut ini.

a. Keberangkatan ke-1

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(1) \\ \tilde{x}_2(1) \\ \tilde{x}_3(1) \\ \tilde{x}_4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} & (24; 49; 78) & (18; 52; 111) & \tilde{\varepsilon} \\ (34; 75; 121) & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} & (48; 107; 178) \\ \tilde{\varepsilon} & (24; 49; 78) & (18; 52; 111) & \tilde{\varepsilon} \\ (34; 75; 121) & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} & (48; 107; 178) \end{bmatrix} \tilde{\otimes} \begin{bmatrix} (0; 0; 0) \\ (0; 0; 0) \\ (0; 0; 0) \\ (0; 0; 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (24; 52; 111) \\ (48; 107; 178) \\ (24; 52; 111) \\ (48; 107; 178) \end{bmatrix}$$

b. Keberangkatan ke-2

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(2) \\ \tilde{x}_2(2) \\ \tilde{x}_3(2) \\ \tilde{x}_4(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} & (24; 49; 78) & (18; 52; 111) & \tilde{\varepsilon} \\ (34; 75; 121) & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} & (48; 107; 178) \\ \tilde{\varepsilon} & (24; 49; 78) & (18; 52; 111) & \tilde{\varepsilon} \\ (34; 75; 121) & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} & (48; 107; 178) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (24; 52; 111) \\ (48; 107; 178) \\ (24; 52; 111) \\ (48; 107; 178) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (72; 156; 256) \\ (96; 214; 356) \\ (72; 156; 256) \\ (96; 214; 356) \end{bmatrix}$$

c. Keberangkatan ke-3

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(3) \\ \tilde{x}_2(3) \\ \tilde{x}_3(3) \\ \tilde{x}_4(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} & (24; 49; 78) & (18; 52; 111) & \tilde{\varepsilon} \\ (34; 75; 121) & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} & (48; 107; 178) \\ -\infty & (24; 49; 78) & (18; 52; 111) & \tilde{\varepsilon} \\ (34; 75; 121) & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} & (48; 107; 178) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (72; 156; 256) \\ (96; 214; 356) \\ (72; 156; 256) \\ (96; 214; 356) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (120; 263; 434) \\ (144; 321; 534) \\ (120; 263; 434) \\ (144; 321; 534) \end{bmatrix}$$

dan seterusnya.



Dalam bentuk tabel keberangkatan dapat dituliskan sebagai berikut.

Tabel 5.1 Perhitungan Waktu Aktivitas Kabur dari Keberangkatan BRT Dalam Satuan Menit

| <b>k</b>      | <b>0</b>  | <b>1</b>       | <b>2</b>       | <b>3</b>        |
|---------------|-----------|----------------|----------------|-----------------|
| $\tilde{x}_1$ | (0; 0; 0) | (24; 52; 111)  | (72; 156; 256) | (120; 263; 434) |
| $\tilde{x}_2$ | (0; 0; 0) | (48; 107; 178) | (96; 214; 356) | (144; 321; 534) |
| $\tilde{x}_3$ | (0; 0; 0) | (24; 52; 111)  | (72; 156; 256) | (120; 263; 434) |
| $\tilde{x}_4$ | (0; 0; 0) | (48; 107; 178) | (96; 214; 356) | (144; 321; 534) |

k : keberangkatan

Dari *Tabel 5.1* pada contoh prototipe di atas, dengan waktu keberangkatan awal *BRT* adalah  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = [\tilde{0}, \tilde{0}, \dots, \tilde{0}]^T$ , nampak bahwa interval waktu aktivitas kabur dari keberangkatan *BRT* tidak seluruhnya periodik. Selanjutnya, akan dibahas cara penentuan interval waktu kabur keberangkatan *BRT* di mana setiap keberangkatan *BRT* adalah periodik.

### 5.2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen atas Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur pada Model Matematika Dinamika Jaringan Transportasi *BRT*

Persamaan (5.3) model matematika jaringan transportasi *BRT* dengan waktu kabur di bawah ini,

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon} & \tilde{t}_2 & \tilde{t}_3 & \tilde{\varepsilon} \\ \tilde{t}_1 & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} & \tilde{t}_4 \\ \tilde{\varepsilon} & \tilde{t}_2 & \tilde{t}_3 & \tilde{\varepsilon} \\ \tilde{t}_1 & \tilde{\varepsilon} & \tilde{\varepsilon} & \tilde{t}_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \\ x_4(k-1) \end{bmatrix}$$

juga dapat dinyatakan melalui saat keberangkatan awal *BRT*  $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ , dengan potongan- $\alpha$ -nya  $\mathbf{x}^\alpha(0) \approx [\underline{\mathbf{x}}^\alpha(0), \overline{\mathbf{x}}^\alpha(0)]$  untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ . Perhatikan bahwa untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$   $\overline{\mathbf{x}}^\alpha(k) = A^\alpha \otimes \overline{\mathbf{x}}^\alpha(k-1) \approx [\underline{A}^\alpha \otimes \underline{\mathbf{x}}^\alpha(k-1), \overline{A}^\alpha \otimes \overline{\mathbf{x}}^\alpha(k-1)]$ . Mengingat saat keberangkatan awal *BRT* dapat ditentukan



dengan pasti, maka saat keberangkatan awal *BRT* merupakan waktu tegas atau bilangan kabur titik.

Untuk matriks bilangan kabur  $\tilde{A}$  tersebut, karena graf berarah dari matriks  $\underline{A}^0$  pada model jaringan antrian di atas terhubung kuat maka matriks  $\underline{A}^0$  takreduabel. Selanjutnya, matriks  $\tilde{A}$  mempunyai nilai eigen max-plus bilangan kabur tunggal, yaitu  $\tilde{\lambda}_{max}(\tilde{A})$  dengan  $\tilde{v}$  adalah vektor eigen max-plus bilangan kabur yang bersesuaian dengan  $\tilde{\lambda}_{max}(\tilde{A})$ , di mana  $\tilde{v}_i \neq \tilde{\epsilon}$  untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Selanjutnya, dibentuk vektor bilangan kabur  $\tilde{v}^*$  di mana vektor potongan- $\alpha$ -nya adalah  $\underline{v}^{*\alpha} \approx [\underline{v}^{*\alpha}, \overline{v}^{*\alpha}]$ , dengan langkah-langkah sebagai berikut (Rudhito, 2011). Untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$  dan  $i = 1, 2, \dots, n$ , dibentuk

1.  $\underline{v}'^\alpha = \delta_1 \otimes \underline{v}^\alpha, \overline{v}'^\alpha = \delta_1 \otimes \overline{v}^\alpha$ , dengan  $\delta_1 = -\min_i(\underline{v}_i^0)$ .
2.  $\underline{v}''^\alpha = \delta_2(\alpha) \otimes \underline{v}'^\alpha, \overline{v}''^\alpha = \delta_2(\alpha) \otimes \overline{v}'^\alpha$ , dengan  $\delta_2(\alpha) = -\min_i(\underline{v}_i'^\alpha - \underline{v}_i^0)$ .
3.  $\underline{v}'''^\alpha = \delta_3 \otimes \overline{v}''^\alpha$ , dengan  $\delta_3 = -\min_i(\underline{v}_i''^\alpha - \overline{v}_i'^0)$ .
4.  $\underline{v}^{*\alpha} = \underline{v}''^\alpha, \overline{v}^{*\alpha} = \delta_4(\alpha) \otimes \overline{v}'''^\alpha$ , dengan  $\delta_4(\alpha) = -\min_i(\overline{v}_i'''^\alpha - \overline{v}_i^{*\alpha})$ .

Vektor bilangan kabur  $\tilde{v}^*$  tersebut juga merupakan vektor eigen aljabar max-plus bilangan kabur yang bersesuaian dengan  $\tilde{\lambda}_{max}(\tilde{A})$ . Dari konstruksi vektor eigen aljabar max-plus bilangan kabur di atas diperoleh bahwa komponen  $\underline{v}^{*0}$  yaitu  $\underline{v}_i^{*0}$ , semuanya tak negatif dan terdapat  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sedemikian hingga,  $\underline{v}_i^{*\alpha}$  untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ . Sementara vektor potongan- $\alpha$ -nya merupakan interval- interval terkecil, dalam arti  $\min_i(\overline{v}_i^{*0} - \underline{v}_i^{*0}) = 0$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ , di antara semua kemungkinan vektor eigen aljabar max-plus bilangan kabur hasil modifikasi vektor eigen max-plus bilangan kabur  $\tilde{v}$  di atas, yang semua batas bawah komponennya tak negatif dan paling sedikit satu bernilai nol.

Mengingat vektor bilangan kabur  $\tilde{v}^*$  merupakan vektor eigen max-plus bilangan kabur yang bersesuaian dengan  $\tilde{\lambda}_{max}(\tilde{A})$ , maka berlaku,

$$\tilde{A} \otimes \tilde{v}^* = \tilde{\lambda}_{max}(\tilde{A}) \otimes \tilde{v}^*$$



atau,

$$A^\alpha \otimes \underline{v}^{*\alpha} = \lambda_{\max}(A^\alpha) \otimes \underline{v}^{*\alpha}$$

atau,

$$[\underline{A}^\alpha \otimes \underline{v}^{*\alpha}, \overline{A}^\alpha \otimes \overline{v}^{*\alpha}] = [\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha) \otimes \underline{v}^{*\alpha}, \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha) \otimes \overline{v}^{*\alpha}]$$

yang berarti pula,

$$\underline{A}^\alpha \otimes \underline{v}^{*\alpha} = \lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha) \otimes \underline{v}^{*\alpha} \text{ dan } \overline{A}^\alpha \otimes \overline{v}^{*\alpha} = \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha) \otimes \overline{v}^{*\alpha}$$

untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ .

Untuk suatu nilai  $\alpha \in [0, 1]$ , diambil saat keberangkatan awal *BRT*  $\tilde{x}(0) = \underline{v}^{*\alpha}$  yang merupakan saat keberangkatan awal tercepat *BRT*, sehingga batas bawah interval saat keberangkatan *BRT* periodik. Hal ini karena terdapat  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sedemikian hingga  $\underline{v}^{*\alpha}_i = 0$  untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ . Mengingat operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  pada matriks konsisten terhadap urutan " $\leq_m$ ", maka berlaku

$$(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha} \leq_m (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha} \leq_m (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \overline{v}^{*\alpha}.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\alpha(k) &\approx [(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha}, (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \overline{v}^{*\alpha}] \subseteq [(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha}, (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \overline{v}^{*\alpha}] = \\ & [(\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha))^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha}, (\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha))^{\otimes k} \otimes \overline{v}^{*\alpha}] = \\ & [(\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha))^{\otimes k}, (\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha))^{\otimes k}] \otimes [\underline{v}^{*\alpha}, \overline{v}^{*\alpha}] = \\ & [\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]^{\otimes k} \otimes [\underline{v}^{*\alpha}, \overline{v}^{*\alpha}] \end{aligned}$$

untuk setiap  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Dengan demikian untuk suatu  $\alpha \in [0, 1]$ , vektor  $\underline{v}^{*\alpha}$  merupakan saat keberangkatan awal tercepat *BRT*, sehingga interval saat keberangkatan *BRT* akan berada dalam interval terkecil yang batas bawah dan batas atasnya periodik dengan besar periode berturut-turut  $\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha)$  dan  $\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)$ .

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan pula bahwa, untuk suatu nilai  $\alpha \in [0, 1]$ , jika diambil saat penjadwalan awal  $\tilde{x}(0) = \mathbf{v}$ , di mana

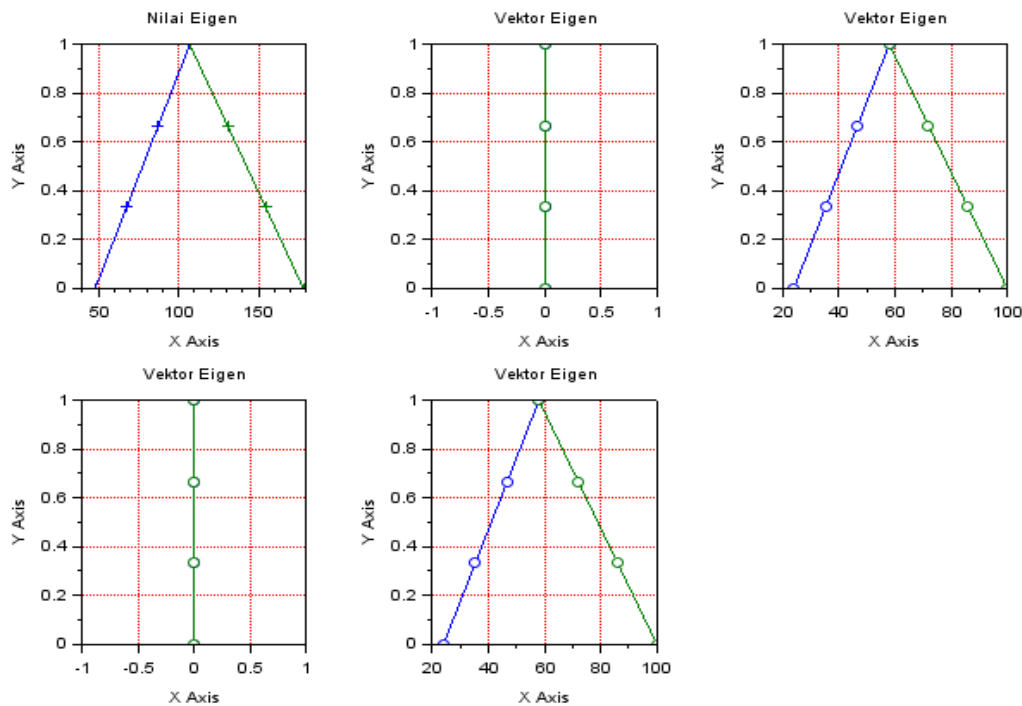
$$\underline{v}^{*\alpha} \leq_m \mathbf{v} \leq_m \overline{v}^{*\alpha}$$

maka,



$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\alpha(k) &\approx [(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \mathbf{v}, (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \mathbf{v}] \subseteq [(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{\mathbf{v}}^{*\alpha}, (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \overline{\mathbf{v}}^{*\alpha}] \\ &= [\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]^{\otimes k} \otimes [\underline{\mathbf{v}}^{*\alpha}, \overline{\mathbf{v}}^{*\alpha}] \end{aligned}$$

Berdasarkan data-data contoh prototipe jaringan transportasi *BRT* sederhana di atas dan dengan bantuan *program scilab aljabar max-plus bilangan kabur*, berikut ini akan ditampilkan hasil potongan nilai eigen dan vektor eigen. Nilai eigen dan vektor eigen dalam perhitungan ini masing-masing merupakan waktu interval keberangkatan dan waktu saat awal keberangkatan *BRT*.



Gambar 5.2 Grafik Batas-Batas Nilai Eigen Bilangan Kabur dan Komponen-Komponen Vektor Eigen Bilangan Kabur dari Prototipe Dinamika Jaringan Transportasi *BRT* Sederhana

Batas-batas nilai eigen bilangan kabur dan komponen-komponen vektor eigen bilangan kabur dari prototipe dinamika jaringan transportasi *brt* sederhana tersebut dapat ditampilkan dalam tabel berikut ini.



Tabel 5.2 Batas-Batas Nilai Eigen Bilangan Kabur dan Komponen-Komponen Vektor Eigen Bilangan Kabur dari Prototipe Dinamika Jaringan Transportasi BRT Sederhana

| No | $\alpha$<br>- cut | $\lambda_{\max}$<br>( $\underline{A}^\alpha$ ) | $\lambda_{\max}$<br>( $\overline{A}^\alpha$ ) | $\underline{v}^\alpha_1$ | $\overline{v}^\alpha_1$ | $\underline{v}^\alpha_2$ | $\overline{v}^\alpha_2$ | $\underline{v}^\alpha_3$ | $\overline{v}^\alpha_3$ | $\underline{v}^\alpha_4$ | $\overline{v}^\alpha_4$ |
|----|-------------------|--|---|--------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1  | 0                 | 48   | 178   | 0                        | 0                       | 24                       | 100                     | 0                        | 0                       | 24                       | 100                     |
| 2  | 0,25              | 62,75  | 160,25  | 0                        | 0                       | 32,5                     | 89,5                    | 0                        | 0                       | 32,5                     | 89,5                    |
| 3  | 0,5               | 77,5   | 142,5   | 0                        | 0                       | 41                       | 79                      | 0                        | 0                       | 41,0                     | 79                      |
| 4  | 0,75              | 92,25  | 124,75  | 0                        | 0                       | 49,5                     | 68,5                    | 0                        | 0                       | 49,5                     | 68,5                    |
| 5  | 1,0               | 107  | 107   | 0                        | 0                       | 58                       | 58                      | 0                        | 0                       | 58,0                     | 58                      |

Berdasarkan Gambar 5.2 dan Tabel 5.2 *Batas-Batas Nilai Eigen Bilangan Kabur dan Komponen-Komponen Vektor Eigen Bilangan Kabur dari Prototipe Dinamika Jaringan Transportasi BRT Sederhana* di atas diperoleh nilai eigen atas aljabar max-plus bilangan kabur, yakni  $\lambda_{\max}(\tilde{A}) = BKS(48; 107; 178)$  dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut,

$$\mu_{\lambda_{\max}(\tilde{A})}(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x \leq 48 \\ \frac{x-107}{59} & \text{untuk } 48 \leq x \leq 107 \\ \frac{107-x}{71} & \text{untuk } 107 \leq x \leq 178 \\ 0 & \text{untuk } 178 \leq x \end{cases}$$

Sedangkan, vektor eigen atas aljabar max-plus bilangan kabur sebagai berikut ini,

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} BKS(0; 0; 0) \\ BKS(24; 58; 100) \\ BKS(0; 0; 0) \\ BKS(24; 58; 100) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan nilai eigen aljabar max-plus bilangan kabur yang diperoleh terlihat bahwa rata-rata waktu kabur antar keberangkatan *BRT* adalah  $BKS(48; 107; 178)$  dan waktu aktivitas kabur awal keberangkatan adalah sebagai berikut,



$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} BKS(0; 0; 0) \\ BKS(24; 58; 100) \\ BKS(0; 0; 0) \\ BKS(24; 58; 100) \end{bmatrix}$$

Jika akan disusun jadwal keberangkatan *BRT* hingga keberangkatan ke-3, maka hasilnya adalah sebagai berikut.

Tabel 5.3 Perhitungan Waktu Aktivitas Kabur dari Keberangkatan *BRT* dalam Satuan Menit

| k             | 0           | 1            | 2             | 3             |
|---------------|-------------|--------------|---------------|---------------|
| $\tilde{x}_1$ | (0,0,0)     | (48,107,178) | (96,214,356)  | (144,321,532) |
| $\tilde{x}_2$ | (24,58,100) | (72,165,278) | (120,272,456) | (168,379,634) |
| $\tilde{x}_3$ | (0,0,0)     | (48,107,178) | (96,214,356)  | (144,321,532) |
| $\tilde{x}_4$ | (24,58,100) | (72,165,278) | (120,272,456) | (168,379,634) |

k = keberangkatan

Jika akan disusun jadwal keberangkatan *BRT*, maka akan dipilih *Tabel 5.3* karena keberangkatannya lebih teratur dibanding dengan jadwal keberangkatan pada *Tabel 5.2*.

Dari pembahasan di atas, pendekatan aljabar max-plus bilangan kabur telah memberikan suatu pemodelan dinamika jaringan transportasi *BRT* sederhana dengan waktu aktivitas yang bentuknya analog dengan sistem dinamika diskrit. Dengan model yang diperoleh ini dan dengan memanfaatkan konsep nilai dan vektor eigen dapat dibahas sifat periodik antar waktu keberangkatan *BRT*. Waktu aktivitas kabur dalam jaringan transportasi *BRT* dengan sifat periodik seperti di atas belum dibahas dalam Rudhito (2011) dan Subiono (2000).



### 5.3 Sistem Jaringan Transportasi Trans Jogja

Trans Jogja adalah sebuah sistem transportasi bus cepat, murah dan ber-AC di seputar Kota Yogyakarta, Indonesia. Trans Jogja merupakan salah satu bagian dari program penerapan *Bus Rapid Transit (BRT)* yang dicanangkan Departemen Perhubungan. Sistem ini mulai dioperasikan pada awal bulan Maret 2008 oleh Dinas Perhubungan, Pemerintah Provinsi DIY. Motto pelayanannya adalah *Aman, Nyaman, Andal, Terjangkau, dan Ramah lingkungan*. Sistem yang menggunakan bus (berukuran sedang) ini menerapkan sistem tertutup, dalam arti penumpang tidak dapat memasuki bus tanpa melewati gerbang pemeriksaan, seperti juga Trans Jakarta.

#### 5.3.1 Trayek Trans Jogja

Sistem jaringan transportasi *BRT* Trans Jogja terdiri dari 8 jalur/trayek, yakni 1A, 1B, 2A, 2B, 3A, 3B, 4A dan 4B. Berikut ini dirinci trayek beserta halte yang dilaluinya.

**a. Trayek 1A: Terminal Prambanan - Bandara Adisucipto - Stasiun Tugu - Malioboro - JEC:**

Terminal Prambanan - S5. Kalasan - Bandara Adisucipto - S3. Maguwoharjo - Janti (bawah) - S3. UIN Kalijaga - S4. Demangan - S4. Gramedia - S4. Tugu - Stasiun Tugu - Malioboro - S4. Kantor Pos Besar - S4. Gondomanan - S4. Pasar Sentul - S4. SGM - Gembira Loka - S4. Babadan - Gedongkuning - JEC - S4. Blok O - Janti (atas) - S3. Maguwoharjo - Bandara Adisucipto - S5. Kalasan - Terminal Prambanan.

Rute yang dilalui: Jl. Jogja-Solo - Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Urip Sumoharjo - Jl. Jend. Sudirman - Jl. Margoutomo - Jl. Kleringan - Jl. Abu Bakar Ali - Jl. Malioboro - Jl. Margomulyo - Jl. Panembahan Senopati - Jl. Sultan Agung - Jl. Kusumanegara - Jl. Janti - Jl. Ring Road Timur - Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Jogja-Solo



**b. Trayek 1B: Bandara Adisucipto - JEC - Kantor Pos Besar - Pingit - UGM**

**- Terminal Condong Catur:**

Bandara Adisucipto – S3. Maguwoharjo – S3. Babarsari – Janti (lewat bawah)  
– S4. Blok O – JEC - S4. Babadan -Gedongkuning – Gembira Loka – S4. SGM  
– S4. Pasar Sentul - S4. Gondomanan – S4. Kantor Pos Besar - S3. RS.PKU  
Muhammadiyah – S3. Pasar Kembang - S4. Badran – Bundaran SAMSAT –  
S4. Pingit – S4. Tugu – S4. Gramedia – Bundaran UGM – S3. Colombo – S4.  
Demangan – Terminal Condongcatur – S3. UIN Sunan Kalijaga – Janti – S3.  
Maguwoharjo – Bandara Adisucipto.

Rute yang dilalui: Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Ring Road Timur - Jl. Janti - Jl.  
Kusumanegara - Jl. Sultan Agung - Jl. Panembahan Senopati - Jl. KH Ahmad  
Dahlan - Jl. Bhayangkara - Jl. Gandekan - Jl. Pasar Kembang - Jl. Tentara  
Pelajar - Jl. Diponegoro - Jl. Jend. Sudirman - Jl. Cik Di Tiro - Jl. Colombo -  
Jl. Gejayan - Jl. Anggajaya - Jl. Gejayan - Jl. Affandi - Jl. Laksda Adisucipto -  
Jl. Ring Road Timur - Jl. Laksda Adisucipto

**c. Trayek 2A: Terminal Jombor - Malioboro – Basen – Kridosono – UGM –**

**Terminal Condong Catur:**

Terminal Jombor - S4. Monjali - S4. Tugu - Stasiun Tugu - Malioboro - S4.  
Kantor Pos Besar - S4. Gondomanan - S4. Jukteng Wetan - S4. Tungkak - S4.  
Gambiran - S3 . Basen - S4. Rejowinangun - S4. Babadan Gedongkuning -  
Gembira Loka - S4. SGM - S3. Cendana - S4. Mandala Krida - S4. Gayam -  
Flyover Lempuyangan - Kridosono - S4. Duta Wacana - S4. Galeria - S4.  
Gramedia - Bundaran UGM - S3. Colombo - Terminal Condongcatur - S4.  
Kentungan - S4. Monjali - Terminal Jombor.

Rute yang dilalui: Jl. Magelang - Jl. Ring Road Utara - Jl. Nyi Tjokrolukito -  
Jl. AM Sangaji - Jl. Margoutomo - Jl. Kleringan - Jl. Abu Bakar Ali - Jl.  
Malioboro - Jl. Margomulyo - Jl. Panembahan Senopati - Jl. Brigjen Katamso  
- Jl. Kol. Sugiyono - Jl. Menteri Supeno - Jl. Veteran - Jl. Gambiran - Jl. Perintis  
Kemerdekaan - Jl. Gedongkuning Utara - Jl. Kusumanegara - Jl. Cendana - Jl.  
Kenari - Jl. Bung Tarjo - Jl. Dr. Sutomo - Jl. Krasak Timur - Jl. Sudarso - Jl.  
Yos Sudarso - Jl. Wardhani - Jl. Trimo - Jl. Dr. Wahidin - Jl. Jend. Sudirman -



Jl. Cik Di Tiro - Jl. Colombo - Jl. Gejayan - Jl. Anggajaya - Jl. Ring Road Utara  
- Jl. Magelang

**d. Trayek 2B: Terminal Jombor – Terminal Condongcatur – UGM – Kridosono – Basen – Kantor Pos Besar – Wirobrajan - Pingit:**

Terminal Jombor – S4. Monjali – S4. Kentungan – Terminal Condong Catur – S3. Colombo – Bundaran UGM – S4. Gramedia – Kridosono – S4. Duta Wacana - Fly-over Lempuyangan - S4. Gayam – S4. Mandala Krida – S3. Cendana – S4. SGM – Gembiraloka– S4. Babadan Gedongkuning – S4. Rejowinangun – S3. Basen – S4. Tungkak – S4. Juktengwetan – S4. Gondomanan – S4. Kantor Pos Besar – S3. RS PKU Muhammadiyah – S4. Ngabean – S4. Wirobrajan – S3. BPK – S4. Badran – Bundaran SAMSAT – S4. Pingit – S4. Tugu – S4. Monjali – Terminal Jombor.

Rute yang dilalui: Jl. Magelang - Jl. Ring Road Utara - Jl. Anggajaya - Jl. Gejayan - Jl. Colombo - Jl. Cik Di Tiro - Jl. Suroto - Jl. Yos Sudarso - Jl. Sudarso - Jl. Krasak Timur - Jl. Dr. Sutomo - Jl. Bung Tarjo - Jl. Cendana - Jl. Kusumanegara - Jl. Gedongkuning Utara - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Gambiran - Jl. Veteran - Jl. Menteri Supeno - Jl. Kol. Sugiyono - Jl. Brigjen Katamso - Jl. Panembahan Senopati - Jl. KH Ahmad Dahlan - Jl. KH Wahid Hasyim - Jl. Wates - Jl. HOS Cokroaminoto - Jl. Peta - Jl. Letjen Suprpto - Jl. Tentara Pelajar - Jl. Magelang - Jl. Wolter Monginsidi - Jl. AM Sangaji - Jl. Nyi Tjokrolukito - Jl. Ring Road Utara - Jl. Magelang

**e. Trayek 3A: Terminal Giwangan – Kotagede – Bandara Adisucipto – Ringroad Utara – MM UGM – Pingit – Malioboro – Jukteng Kulon:**

Terminal Giwangan – S4. Tegalgendu – S3. HS-Silver – Jl. Nyi Pembayun - S3. Pegadaian Kotagede – S3. Basen – S4. Rejowinangun – S4. Babadan Gedongkuning – JEC - S4. Blok O – Janti (lewat atas) - S3. Janti – S3. Maguwoharjo - Bandara ADISUCIPTO - S3. Maguwoharjo – Ringroad Utara – Terminal Condongcatur – S4. Kentungan – S4. MM UGM - S4. MirotaKampus – S3. Gondolayu – S4. Tugu – S4. Pingit – Bundaran SAMSAT - S4. Badran – S3. PasarKembang – Stasiun TUGU - Malioboro – S4. Kantor Pos Besar – S3. RS PKU Muhammadiyah – S4. Ngabean – S4. Pojok Beteng



Kulon – S4. Plengkung Gading - S4. Pojok Beteng Wetan – S4. Tungkak – S4.

Wirosaban – S4. Tegalgendu – Terminal Giwangan.

Rute yang dilalui: Jl. Imogiri - Jl. Pramuka - Jl. Tegalgendu - Jl. Nyi  
Pembayun - Jl. Kemasan - Jl. Gedongkuning Utara - Jl. Janti - Jl. Ring Road  
Timur - Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Ring Road Utara -  
Jl. Anggajaya - Jl. Ring Road Utara - Jl. Kaliurang - Jl. Teknik Utara - Jl.  
Kesehatan Sekip - Jl. Bhinneka Tunggal Ika - Jl. Kaliurang - Jl. Cik Di Tiro -  
Jl. Suroto - Jl. Yos Sudarso - Jl. Abu Bakar Ali - Jl. Ahmad Jazuli - Jl. Prau -  
Jl. Jend. Sudirman - Jl. Diponegoro - Jl. Tentara Pelajar - Jl. Letjen Suprpto -  
Jl. Pasar Kembang - Jl. Malioboro - Jl. Margomulyo - Jl. KH Ahmad Dahlan -  
Jl. KH Wahid Hasyim - Jl. MT Haryono - Jl. Mayjen Sutoyo - Jl. Kol. Sugiyono  
- Jl. Menteri Supeno - Jl. Gambiran - Jl. Pramuka - Jl. Imogiri

**f. Trayek 3B: Terminal Giwangan – Jukteng Kulon – Pingit – MM UGM –  
Ring Road Utara – Bandara Adisucipto – Kotagede:**

Terminal Giwangan – S4. Tegalgendu - S4. Wirosaban – S4. Tungkak – S4.  
Pojok Beteng Wetan – S4. Plengkung Gading - S4. Pojok Beteng Kulon – S4.  
Ngabean – S3. RS PKU Muhammadiyah – S3. Pasar Kembang – S4. Badran –  
Bundaran SAMSAT – S4. Pingit – S4. Tugu – S3. Gondolayu – S4. Mirota  
Kampus – S4. MM UGM - S4. Kentungan – Terminal Condong Catur –  
Ringroad Utara – S3. Maguwoharjo – Bandara Adisucipto – S3. Maguwoharjo  
– Flyover Janti (lewat bawah) – S4. Blok O – JEC - S4. Babadan Gedongkuning  
– S4. Rejowinangun – S3. Basen – S3. Pegadaian Kotagede – Jl. Nyi Pembayun  
- S3. HS-Silver – S4. Tegalgendu – Terminal Giwangan.

Rute yang dilalui: Jl. Imogiri - Jl. Pramuka - Jl. Tegalturi - Jl. Sorogenen - Jl.  
Lowanu - Jl. Kol. Sugiyono - Jl. Mayjen Sutoyo - Jl. MT Haryono - Jl. KH  
Wahid Hasyim - Jl. Bhayangkara - Jl. Gandekan - Jl. Pasar Kembang - Jl.  
Tentara Pelajar - Jl. Diponegoro - Jl. Jend. Sudirman - Jl. I Dewa Nyoman Oka  
- Jl. Abu Bakar Ali - Jl. Cik Di Tiro - Jl. Kaliurang - Jl. Bhinneka Tunggal Ika  
- Jl. Kesehatan Sekip - Jl. Teknik Utara - Jl. Kaliurang - Jl. Ring Road Utara  
- Jl. Anggajaya - Jl. Ring Road Utara - Jl. Laksda Adisucipto - Jl. Laksda



Adisucipto - Jl. Ring Road Timur - Jl. Janti - Jl. Gedongkuning Utara - Jl. Kemasan - Jl. Nyi Pembayun - Jl. Tegal Gendu - Jl. Pramuka - Jl. Imogiri

**g. Tayek 4A: Terminal Giwangan - Tamansiswa - Pakualaman - Lempuyangan - Kridosono:**

Terminal Giwangan - Jl. Imogiri Timur - Jl. Pramuka - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Menteri Supeno - Jl. Taman Siswa - Jl. Sultan Agung - Jl. Gajah Mada - Jl. Hayam Wuruk - Stadion Kridosono - Jl. Hayam Wuruk - Jl. Gajah Mada - Jl. Sultan Agung - Jl. Taman Siswa - Jl. Menteri Supeno - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Pramuka - Jl. Imogiri Timur - Terminal Giwangan.  
Rute yang dilalui: Jl. Imogiri - Jl. Pramuka - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Menteri Supeno - Jl. Taman Siswa - Jl. Sultan Agung - Jl. Gajah Mada - Jl. Hayam Wuruk - Jl. Yos Sudarso - Jl. Hayam Wuruk - Jl. Gajah Mada - Jl. Sultan Agung - Jl. Taman Siswa - Jl. Menteri Supeno - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Pramuka - Jl. Imogiri Timur

**h. Trayek 4B: Terminal Giwangan - XT Square - SGM - Balaikota - UIN - Kridosono - Balai Yasa - UIN:**

Terminal Giwangan - Jl. Imogiri Timur - Jl. Pramuka - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Veteran - Jl. Pandean - Jl. Glagahsari - Jl. Kusumanegara - Jl. Sidobali - Jl. Ipda Tut Harsono - Jl. Urip Sumoharjo - Jl. Sudirman - Jl. Suroto - Jl. Wardani - Jl. Kusbini - Jl. Langensari - Jl. Urip Sumoharjo - Jl. Ipda Tut Harsono - Jl. Sidobali - Jl. Kusumanegara - Jl. Glagahsari - Jl. Pandean - Jl. Veteran - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Pramuka - Jl. Imogiri Timur - Terminal Giwangan  
Rute yang dilalui: Jl. Imogiri Timur - Jl. Pramuka - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Veteran - Jl. Pandean - Jl. Glagahsari - Jl. Kusumanegara - Jl. Sidobali - Jl. Ipda Tut Harsono - Jl. Urip Sumoharjo - Jl. Sudirman - Jl. Suroto - Jl. Wardani - Jl. Kusbini - Jl. Langensari - Jl. Urip Sumoharjo - Jl. Ipda Tut Harsono - Jl. Sidobali - Jl. Kusumanegara - Jl. Glagahsari - Jl. Pandean - Jl. Veteran - Jl. Perintis Kemerdekaan - Jl. Pramuka - Jl. Imogiri Timur



### 5.3.2 Graf Jaringan Transportasi BRT Trans Jogja

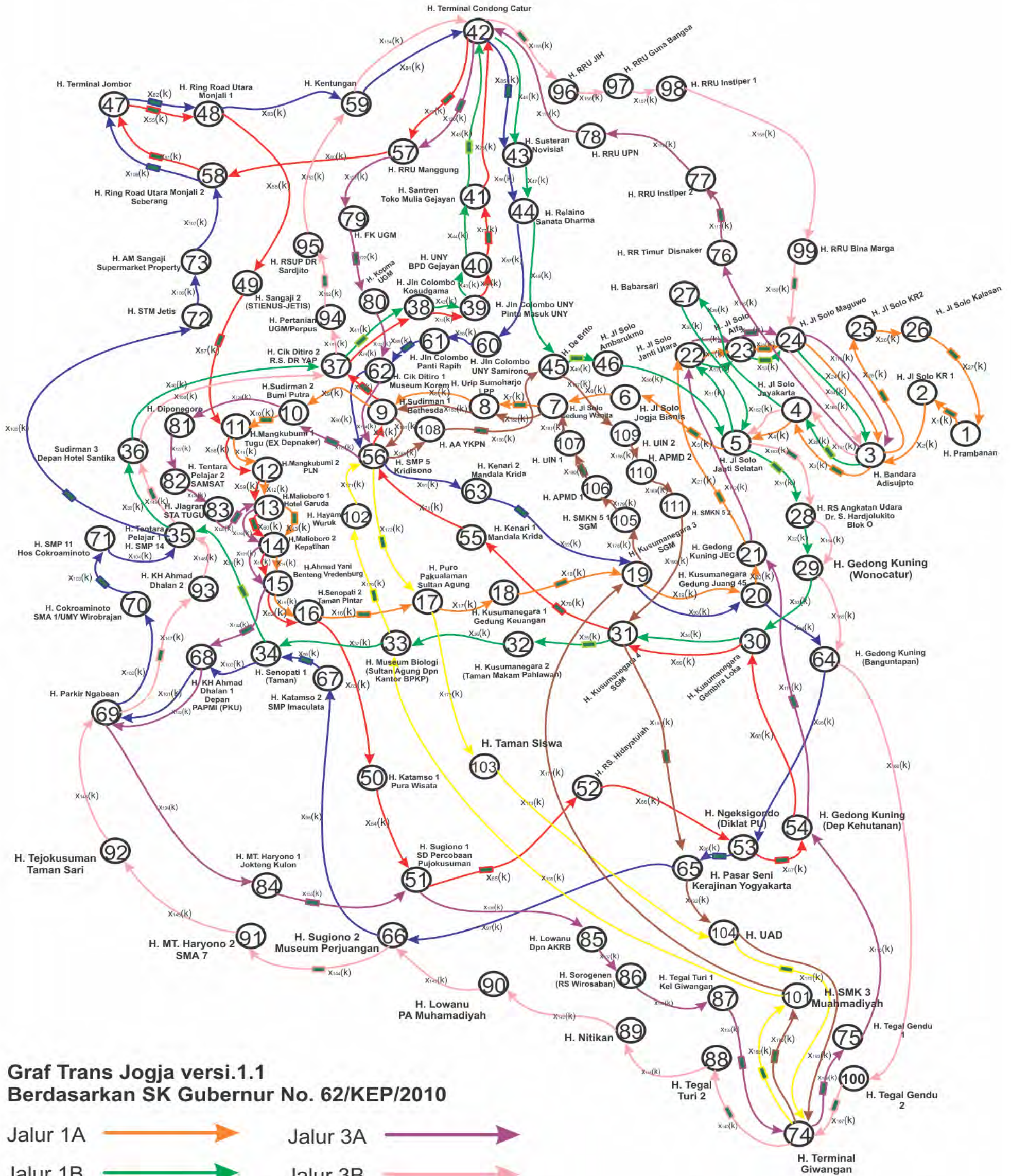
Setelah memahami fenomena dinamika sistem jaringan transportasi BRT Trans Jogja, selanjutnya akan dibuat suatu graf berarah dari dinamika sistem tersebut. Secara umum, graf atas aljabar max-plus bilangan kabur dinyatakan sebagai  $\tilde{G} = (\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{A}})$ . Graf berarah  $\tilde{G} = (\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{A}})$  dengan  $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ . Graf berarah  $\tilde{G}$  dikatakan *berbobot bilangan kabur* jika setiap busur  $(j, i) \in \tilde{\mathcal{A}}$  dikawankan dengan suatu bilangan kabur  $\tilde{A}_{ij} \in (\mathbf{F}(\mathbf{R}_{\tilde{\varepsilon}}) - \{\tilde{\varepsilon}\})$ . Bilangan kabur  $\tilde{A}_{ij}$  disebut *bobot bilangan kabur* busur  $(i, j)$ , dinotasikan dengan  $fw(j, i)$ . Dalam penyajiannya dengan gambar untuk graf berarah berbobot bilangan kabur, busur diberi label dengan bobot bilangannya. Didefinisikan *graf berarah bilangan kabur* dari matriks  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R}_{\max})^{n \times n}$  adalah berarah berbobot bilangan kabur  $\tilde{G}(\tilde{A}) = (\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{A}})$  dengan  $\mathcal{V} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ,  $\tilde{\mathcal{A}} = \{(j, i) | fw(i, j) = \tilde{A}_{ij} \neq \tilde{\varepsilon}\}$ . Perhatikan sebaliknya bahwa untuk setiap graf berarah berbobot bilangan kabur  $\tilde{G} = (\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{A}})$  selalu dapat didefinisikan suatu matriks  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R}_{\max})^{n \times n}$ , yang disebut *matriks bobot kabur* graf  $\tilde{G}$ , di mana

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{cases} fw(j, i), & \text{jika } (j, i) \in \tilde{\mathcal{A}} \\ \tilde{\varepsilon}, & \text{jika } (j, i) \notin \tilde{\mathcal{A}} \end{cases}$$

Pada dinamika sistem jaringan transportasi BRT Trans Jogja Graf berarah terdiri dari simpul dan garis yang masing-masing merupakan halte dan perjalanan BRT antar halte. Dalam graf berarah  $\tilde{G} = (\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{A}})$  ini terdiri dari 111 halte dan 193 garis perjalanan Trans Jogja antar halte yang terbagi dalam 8 jalur. Berikut ini ditampilkan graf berarah  $\tilde{G} = (\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{A}})$  dan posisi BRT dari dinamika sistem jaringan transportasi BRT Trans Jogja pada saat pukul 5.33 WIB. Data diambil pada tanggal 12 Mei 2015.



# Graf Berarah Trans Jogja 2015



Gambar 5.3 Graf Dinamika Jaringan BRT Trans Jogja



Graf berarah Trans Jogja 2015 menunjukkan dinamika sistem transportasi *BRT* Trans Jogja dengan berbagai rincian informasi seperti jalur, halte, notasi keberangkatan antar halte, waktu interval keberangkatan antar halte dan posisi *BRT* dalam sistem pada waktu tertentu. Pada graf tersebut jalur 1A ditunjukkan dengan garis anak panah berwarna *orange*, 1B ditunjukkan dengan garis anak panah berwarna hijau, 2A ditunjukkan dengan garis anak panah berwarna merah, 2B ditunjukkan dengan garis anak panah berwarna biru, 3A ditunjukkan dengan garis anak panah berwarna ungu, 3B ditunjukkan dengan garis anak panah berwarna merah muda, 4A ditunjukkan dengan garis anak panah berwarna kuning dan 4B ditunjukkan dengan garis anak panah berwarna coklat. Armada *BRT* Trans Jogja ditunjukkan oleh persegi panjang berwarna hujau dengan garis tepi sesuai dengan jalur. Kemudian, halte pada graf tersebut ditunjukkan oleh lingkaran yang diberi nomor masing-masing halte dan nama-nama halte. Halte pertama adalah Halte Prambanan, halte ke-dua adalah Halte Jalan Solo KR 1, dan seterusnya sampai halte terakhir adalah bernomor 111, yaitu Halte SMKN 5-2. Selanjutnya, notasi keberangkatan antar halte ditunjukkan sebagai berikut. Pada Gambar 5.3, secara umum waktu keberangkatan yang ke- $k$  ditunjukkan oleh simbol  $x_i(k)$ , dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, 193$ , selanjutnya diganti dengan  $\tilde{x}_i(k)$  yang menunjukkan waktu aktivitas kabur.

Contoh notasi waktu keberangkatan

$\tilde{x}_{24}(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Jalan Solo Maguwo ke Halte Bandara Adisucipto pada jalur 1A;

$\tilde{x}_{38}(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Senopati ke Tentara Pelajar pada jalur 1B;

$\tilde{x}_{108}(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Ring Road Utara Monjali ke Terminal Jombor pada jalur 2B ;

$\tilde{x}_{111}(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Gedong Kuning Dep Kehutanan ke Gedong Kuning JEC pada jalur 3A;

$\tilde{x}_{175}(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte UAD ke Halte Terminal Giwangan pada jalur 4A;



dan seterusnya. Sedangkan, untuk keberangkatan yang lain secara umum dinotasikan sebagai berikut,  $\tilde{x}_i(k)$  dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, 193$ .

Terakhir, berdasarkan graf tersebut dinotasikan durasi waktu tempuh dengan indeks seperti pada waktu saat keberangkatan. Berikut adalah penotasian secara umum, contoh penotasian dan durasi waktu tempuh aktivitas kabur.

*Penotasi secara umum,*

Durasi waktu  $\tilde{t}_i =$  waktu kabur lamanya perjalanan *BRT* antar halte, dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  dan  $n = 193$ .

*Contoh penotasian,*

- Durasi waktu  $\tilde{t}_1 =$  waktu kabur lamanya *BRT* melakukan perjalanan dari Halte Prambanan ke Halte Jalan Solo KR 1.
- Durasi waktu  $\tilde{t}_{28} =$  waktu kabur lamanya *BRT* melakukan perjalanan dari Halte Bandara Adisucipto ke Jalan Solo Jayakarta.
- Durasi waktu  $\tilde{t}_{55} =$  waktu kabur lamanya *BRT* melakukan perjalanan dari Halte Terminal Jombor ke Ring Road Utara Monjali 1.
- Durasi waktu  $\tilde{t}_{109} =$  waktu kabur lamanya *BRT* melakukan perjalanan dari Halte Terminal Condong Catur ke Tegal Gendu 1.
- Durasi waktu  $\tilde{t}_{176} =$  waktu kabur lamanya *BRT* melakukan perjalanan dari Halte Terminal Giwangan ke SMK3 Muhammadiyah.

Berikut ini adalah durasi waktu kabur yang didapatkan dari observasi lapangan.

Tabel 5.4 Lima Contoh Durasi Waktu Kabur Lamanya *BRT* Melakukan Perjalanan Antar Halte dalam Satuan Menit

| Waktu Kabur ( $\tilde{t}_i$ ),<br>untuk $i =$ | Waktu Tempuh<br>Tercepat | Waktu Tempuh<br>Rata-rata | Waktu Tempuh<br>Paling Lama |
|---|--------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| 1   | 2                        | 6                         | 8                           |
| 28  | 1                        | 3                         | 6                           |
| 55  | 3                        | 5                         | 8                           |
| 109   | 2                        | 4                         | 6                           |
| 176   | 3                        | 5                         | 9                           |



Data-data di atas didapatkan dari hasil observasi dari Dinas Perhubungan dan Komunikasi Propinsi D.I Yogyakarta, hasil peneliti melakukan perjalanan dengan Trans Jogja, dan dari hasil observasi kepada operator Trans Jogja. Waktu tempuh secara lengkap dapat dilihat pada *Dokumen Waktu Tempuh Kabur BRT Trans Jogja*.

### 5.3.3 Model Matematika Jaringan Transportasi BRT Trans Jogja

Merujuk pada graf berarah  $\tilde{\mathcal{G}} = (\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{A}})$  dan posisi BRT dari dinamika sistem jaringan transportasi BRT Trans Jogja, selanjutnya akan dibuat model matematika untuk dinamika sistem tersebut. Secara umum, model sistem dinamika dinyatakan seperti persamaan di bawah ini.

$$\tilde{x}(k) = \tilde{A} \otimes \tilde{x}(k-1), k = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.4)$$

di mana  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$  dan  $\tilde{x}(k) \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$ .

Akan dibuat model untuk jadwal keberangkatan BRT Trans Jogja dengan kriteria:

- waktu tempuh tiap jalur adalah waktu tempuh kabur dan jumlah keberangkatan BRT persatuan waktu adalah sebanyak mungkin,
- waktu keberangkatan BRT yang teratur,
- keberangkatan BRT di setiap Halte menunggu kedatangan BRT dari jalur lainnya untuk memungkinkan pertukaran penumpang antar BRT di masing-masing halte (penumpang berpindah ke BRT lain), dan
- keberangkatan BRT di masing-masing halte adalah sesegera mungkin.

Diberikan lima contoh aturan sinkronisasi dinamika sistem jaringan transportasi BRT Trans Jogja, sebagai berikut ini.

- Pada jalur 1A, keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Jalan Solo Maguwo ke Halte Bandara Adisucipto ( $\tilde{x}_{24}(k)$ ), harus menunggu kedatangan BRT dari



Halte Jalan Solo Alfa ke Halte Jalan Solo Maguwo dari jalur 1A-1B-3A dan harus menunggu kedatangan *BRT* dari Halte RUU Bina Marga ke Halte Jalan Maguwo dari jalur 3B.

- b. Pada jalur 1B, keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Senopati ke Tentara Pelajar ( $\tilde{x}_{38}(k)$ ), harus menunggu kedatangan *BRT* dari Halte Katamso 2 ke Halte Senopati dari jalur 2B dan kedatangan *BRT* dari Halte Museum Biologi ke Halte Halte Senopati dari jalur 1B. Keberangkatan *BRT* dari Halte Museum Biologi ke Halte Halte Senopati, harus menunggu kedatangan *BRT* dari Halte Kusumanegara 4 ke Museum Biologi melalui Halte Kusumanegara 2 pada jalur 1B dan menunggu kedatangan *BRT* dari Halte SMK 3 Muhammadiyah ke Museum Biologi pada jalur 4A. Sedangkan keberangkatan *BRT* Halte SMK 3 Muhammadiyah ke Museum Biologi harus menunggu, keberangkatan *BRT* dari Halte Terminal Giwangan ke SMK 3 Muhammadiyah pada jalur 4A dan 4B.
- c. Pada jalur 2B, keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Ring Road Utara Monjali ke Terminal Jombor ( $\tilde{x}_{108}(k)$ ), harus menunggu kedatangan *BRT* dari Halte Tentara Pelajar ke Ring Road Utara Monjali 2 melalui Halte STM Jetis-Halte AM Sangaji pada jalur 2B dan kedatangan *BRT* dari Halte RUU Manggung ke Ring Road Utara Monjali pada jalur 2A. Keberangkatan Halte RUU Manggung ke Ring Road Utara Monjali pada jalur 2A harus menunggu kedatangan *BRT* dari Halte Terminal Condong Catur ke RUU Manggung pada jalur 2A dan 3A.
- d. Pada jalur 3A, keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Gedong Kuning Dep. Kehutanan ke Gedong Kuning JEC ( $\tilde{x}_{111}(k)$ ), menunggu kedatangan *BRT* dari Halte Diklat PU ke Halte Gedong Kuning Dep Kehutanan pada jalur 2A dan kedatangan *BRT* dari Halte Terminal Giwangan ke Gedong Kuning Dep Kehutanan melalui Halte Tegal Gendu 1 pada jalur 3A.
- e. Pada jalur 4A, keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte UAD ke Halte Terminal Giwangan ( $\tilde{x}_{175}(k)$ ), harus menunggu kedatangan *BRT* dari Halte Pasar Seni Kerajinan Yogyakarta dan Halte Taman Siswa. Keberangkatan *BRT* dari Halte Pasar Seni ke UAD harus menunggu *BRT* yang datang dari Halte Kusuma Negara dan Halte Diklat PU. Keberangkatan *BRT* dari Halte Puro Pakualaman



ke Halte Taman Siswa harus menunggu kedatangan *BRT* yang datang dari Halte Senopati 2 Taman Pintar dan SMP 5 Kridosono.

Berikut ini diberikan permisalan notasi keberangkatan *BRTT* dalam sistem jaringan transportasi Trans Jogja,

$\tilde{x}_{24}(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Jalan Solo Maguwo ke Halte Bandara Adisucipto pada jalur 1A;

$\tilde{x}_{38}(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Senopati ke Tentara Pelajar pada jalur 1B;

$\tilde{x}_{108}(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Ring Road Utara Monjali ke Terminal Jombor pada jalur 2B ;

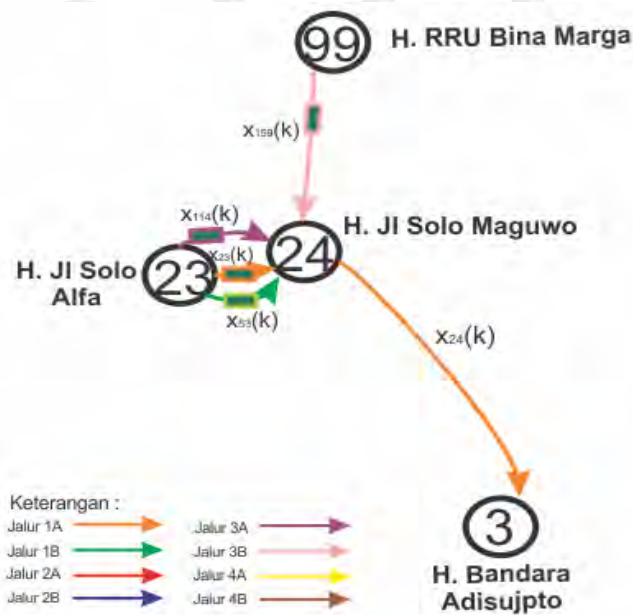
$\tilde{x}_{111}(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Gedong Kuning Dep Kehutanan ke Gedong Kuning JEC pada jalur 3A;

$\tilde{x}_{175}(k)$  = waktu keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte UAD ke Halte Terminal Giwangan pada jalur 4A.



Berdasarkan kriteria, aturan sinkronisasi, dan permisalan notasi dari dinamika sistem jaringan transportasi *BRT* Trans Jogja didapatkan model matematika sebagai berikut.

- a. Model matematis keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Jalan Solo Maguwo ke Halte Bandara Adisucipto pada jalur 1A.



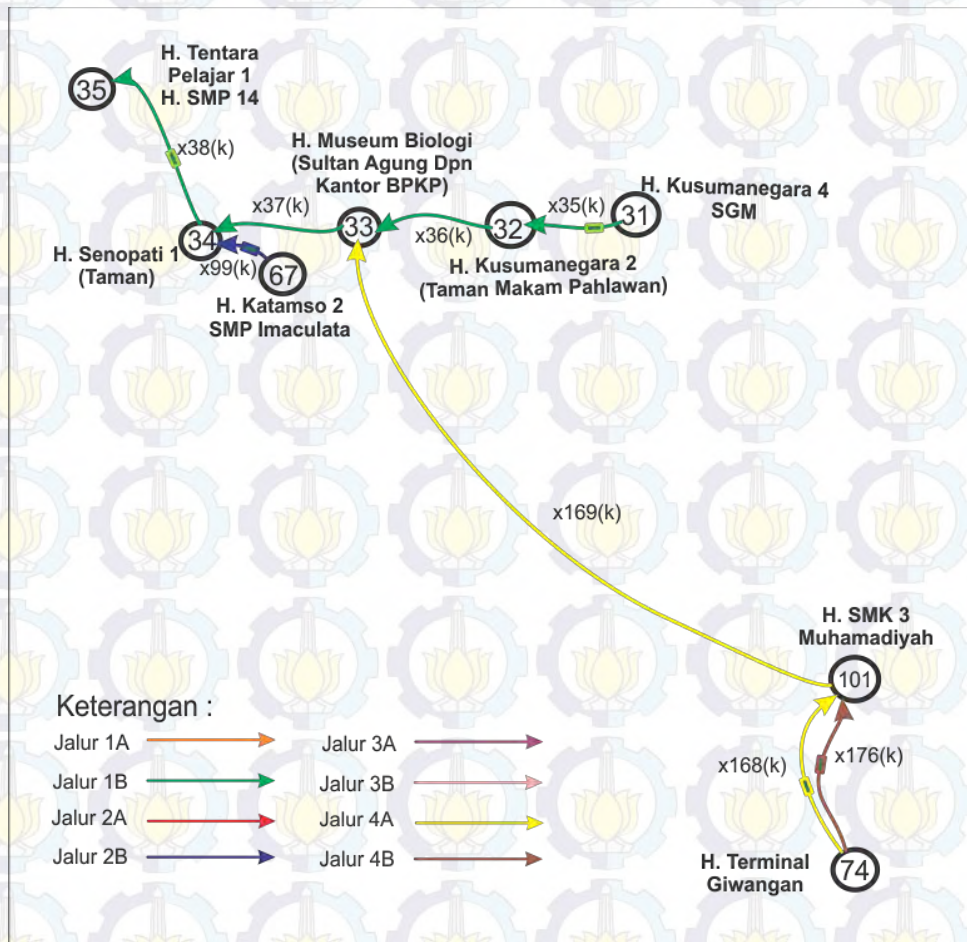
Gambar 5.4 Graf Keberangkatan BRT dari Halte Jalan Solo Maguwo ke Halte Bandara Adisucipto pada Jalur 1A

Model matematika yang dapat dikonstruksi,

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_{24}(k) = & t_{23} \otimes \tilde{x}_{23}(k-1) \\
 & \oplus t_{53} \otimes \tilde{x}_{53}(k-1) \\
 & \oplus t_{114} \otimes \tilde{x}_{114}(k-1) \\
 & \oplus t_{159} \otimes \tilde{x}_{159}(k-1)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$



b. Model matematis keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Senopati ke Tentara Pelajar pada jalur 1B



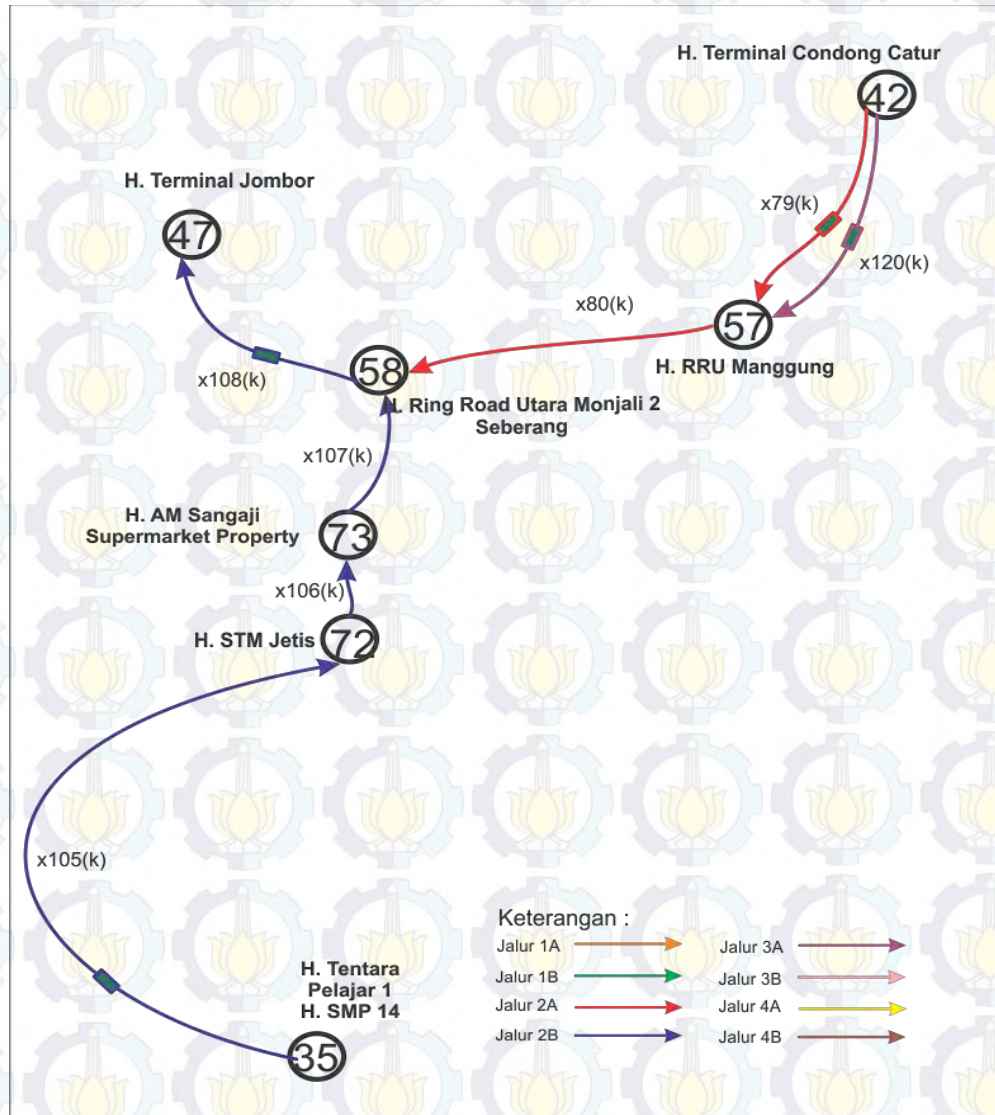
Gambar 5.5 Graf Keberangkatan BRT dari Halte Senopati ke Tentara Pelajar pada Jalur 1B

Model matematika yang dapat dikonstruksi,

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_{38}(k) = & t_{37} \otimes t_{169} \otimes t_{168} \otimes \tilde{x}_{168}(k-1) \\
 & \oplus t_{37} \otimes t_{169} \otimes t_{176} \otimes \tilde{x}_{176}(k-1) \\
 & \oplus t_{37} \otimes t_{36} \otimes t_{35} \otimes \tilde{x}_{35}(k-1) \\
 & \oplus t_{99} \otimes \tilde{x}_{99}(k-1)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$



- c. Model matematis keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Ring Road Utara Monjali ke Terminal Jombor pada jalur 2B ;



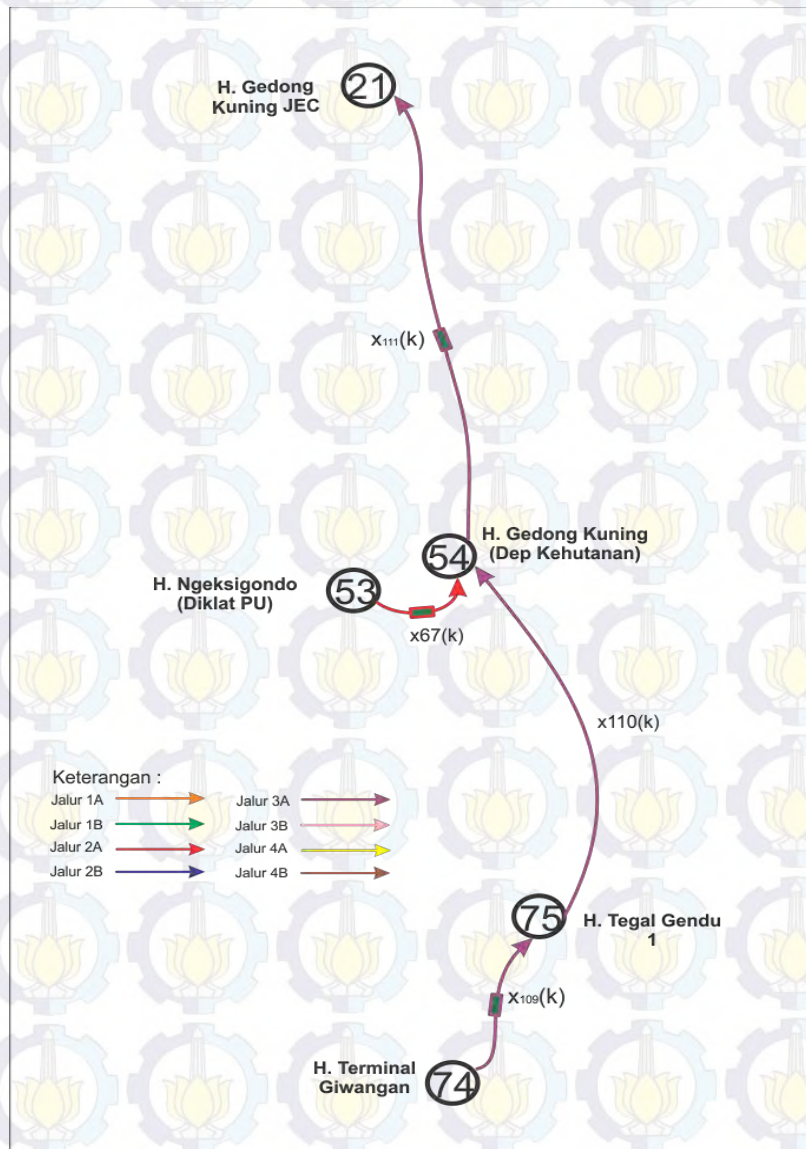
Gambar 5.6 Graf Keberangkatan BRT dari Halte Ring Road Utara Monjali ke Terminal Jombor pada jalur 2B

Model matematika yang dapat dikonstruksi,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{108}(k) = & t_{107} \otimes t_{106} \otimes t_{105} \otimes \tilde{x}_{105}(k-1) \\ & \oplus t_{80} \otimes t_{79} \otimes \tilde{x}_{79}(k-1) \\ & \oplus t_{80} \otimes t_{120} \otimes \tilde{x}_{120}(k-1) \end{aligned} \quad (5.7)$$



d. Model matematis keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte Gedong Kuning Dep Kehutanan ke Gedong Kuning JEC pada jalur 3A;



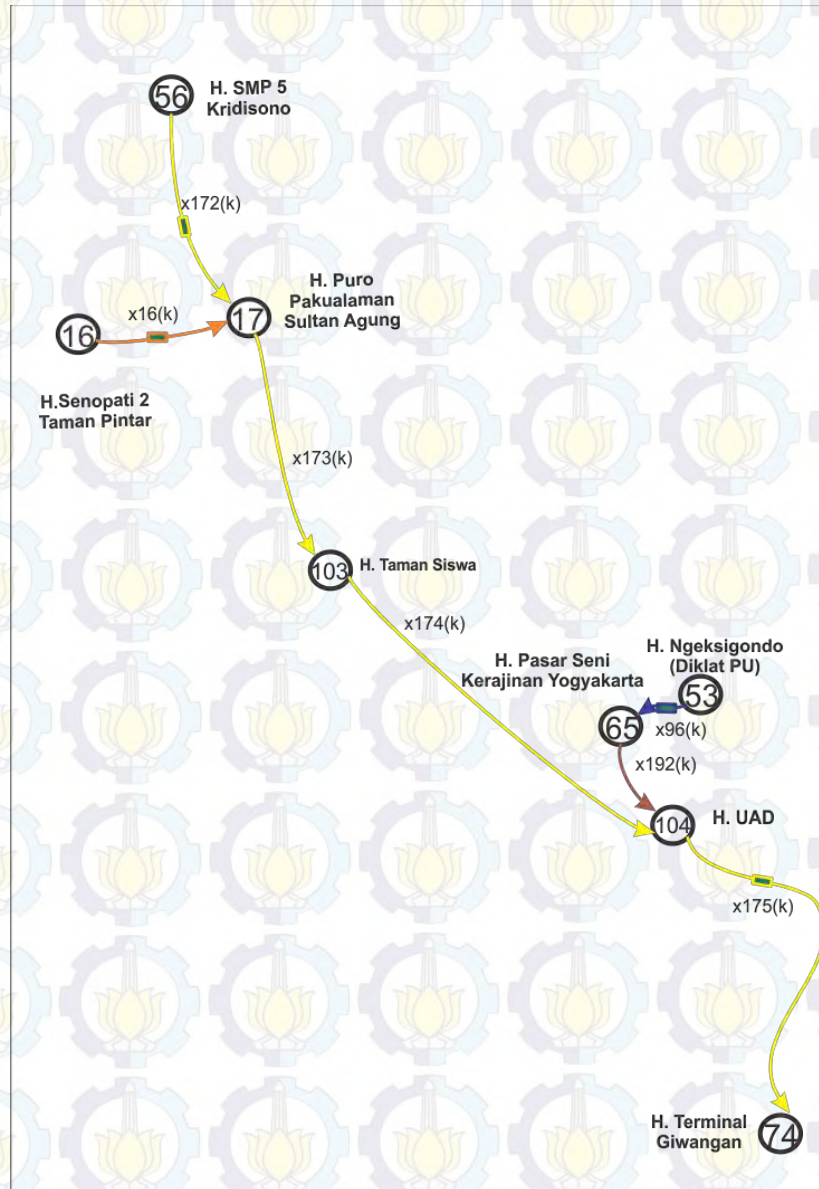
Gambar 5.7 Graf Keberangkatan BRT dari Halte Gedong Kuning Dep Kehutanan ke Gedong Kuning JEC pada Jalur 3A

Model matematika yang dapat dikonstruksi,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{111}(k) &= t_{110} \otimes t_{109} \otimes \tilde{x}_{109}(k-1) \\ &\oplus t_{67} \otimes \tilde{x}_{67}(k-1) \end{aligned} \quad (5.8)$$



- e. Model matematis keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte UAD ke Halte Terminal Giwangan pada jalur 4A.



Gambar 5.8 Graf Keberangkatan BRT dari Halte UAD Ke Halte Terminal Giwangan pada Jalur 4A

Model matematika yang dapat dikonstruksi,

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_{175}(k) &= t_{174} \otimes t_{173} \otimes t_{172} \otimes \tilde{x}_{172}(k-1) \\
 &\oplus t_{174} \otimes t_{173} \otimes t_{16} \otimes \tilde{x}_{16}(k-1) \\
 &\oplus t_{192} \otimes t_{191} \otimes \tilde{x}_{191}(k-1) \\
 &\oplus t_{192} \otimes t_{96} \otimes \tilde{x}_{96}(k-1)
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$



Model matematika dinamika jaringan sistem transportasi *BRT* Trans Jogja secara lengkap dapat dilihat dalam lembar *Dokumen Model Matematika Dinamika Jaringan Sistem Transportasi BRT Trans Jogja*.

#### 5.3.4 Matriks $\tilde{A}$ atas Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dari Model Dinamika Jaringan *Bus Rapid Transit*

Setelah membangun dan memahami model matematika dinamika jaringan sistem transportasi *BRT* Trans Jogja secara lengkap. Selanjutnya akan dibangun matriks  $\tilde{A}$  yang didefinisikan sebagai berikut:

Didefinisikan  $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n} := \{\tilde{A} = (\tilde{A}_{i,j}) | \tilde{A}_{i,j} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}, \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, n\}$ . Matriks anggota  $\mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$  disebut matriks atas aljabar max plus bilangan kabur.

Matriks  $\tilde{A}$  diperoleh dari model matematika dinamika jaringan sistem transportasi *BRT* Trans Jogja yang mempunyai bentuk umum seperti persamaan (5.4) di bawah ini.

$$\tilde{x}(k) = \tilde{A} \otimes \tilde{x}(k-1), k = 1, 2, 3, \dots, \text{ di mana } \tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n} \text{ dan } \tilde{x}(k) \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$$

Berdasarkan pada contoh model yang telah dikonstruksi di sub-bab 5.3.3 pada persamaan (5.5), (5.6), (5.7), (5.8), dan (5.9), pada bagian ini akan diberikan gambaran cara mengkonstruksi matriks  $\tilde{A}$ .

- a. Untuk model matematis keberangkatan *BRT* yang ke- $k$  dari Halte Jalan Solo Maguwo ke Halte Bandara Adisucipto pada jalur 1A. Dengan mensubstitusi nilai-nilai waktu aktivitas kabur pada *Dokumen Waktu Tempuh Kabur BRT Trans Jogja*, didapatkan model sebagai berikut.

$$\tilde{x}_{24}(k) = (2; 6; 8) \otimes \tilde{x}_{23}(k-1) \\ \oplus (2; 6; 8) \otimes \tilde{x}_{53}(k-1)$$



$$\oplus(2; 6; 8) \otimes \tilde{x}_{114}(k-1)$$

$$\oplus(1; 4; 8) \otimes \tilde{x}_{159}(k-1)$$

Dengan demikian, didapatkan elemen matriks  $\tilde{A}$ , baris ke-24, kolom ke-23 adalah  $BKS(2; 6; 8)$ , kolom ke-53 adalah  $BKS(2; 6; 8)$ , kolom ke-114 adalah  $BKS(2; 6; 8)$  dan kolom ke-195 adalah  $(1; 4; 8)$ .

- b. Untuk model matematis keberangkatan *BRT* yang ke- $k$  dari Halte Senopati ke Tentara Pelajar pada jalur 1B. Dengan mensubstitusi nilai-nilai waktu aktivitas kabur pada *Dokumen Waktu Tempuh Kabur BRT Trans Jogja*, didapatkan model sebagai berikut.

$$\tilde{x}_{38}(k) = (3; 5; 8) \otimes (3; 6; 9) \otimes (3; 6; 9) \otimes \tilde{x}_{168}(k-1)$$

$$\oplus(3; 5; 8) \otimes (3; 6; 9) \otimes (3; 5; 9) \otimes \tilde{x}_{176}(k-1)$$

$$\oplus(3; 5; 8) \otimes (1; 3; 4) \otimes (1; 4; 6) \otimes \tilde{x}_{35}(k-1)$$

$$\oplus(1; 2; 4) \otimes \tilde{x}_{99}(k-1)$$

$$\tilde{x}_{38}(k) = (9; 17; 26) \otimes \tilde{x}_{168}(k-1)$$

$$\oplus(9; 16; 26) \otimes \tilde{x}_{176}(k-1)$$

$$\oplus(5; 12; 18) \otimes \tilde{x}_{35}(k-1)$$

$$\oplus(1; 2; 4) \otimes \tilde{x}_{99}(k-1)$$

Dengan demikian, didapatkan elemen matriks  $\tilde{A}$ , baris ke-38, kolom ke-168 adalah  $BKS(9; 17; 26)$  kolom ke-176 adalah  $BKS(9; 16; 26)$  kolom ke-35 adalah  $BKS(5; 12; 18)$  dan kolom ke-99 adalah  $(1; 2; 4)$ .

- c. Untuk model matematis keberangkatan *BRT* yang ke- $k$  dari Halte Ring Road Utara Monjali ke Terminal Jombor pada jalur 2B. Dengan mensubstitusi nilai-nilai waktu aktivitas kabur pada *Dokumen Waktu Tempuh Kabur BRT Trans Jogja*, didapatkan model sebagai berikut.

$$x_{108}(k) = (3; 6; 9) \otimes (1; 4; 5) \otimes (8; 8; 11) \otimes x_{105}(k-1)$$

$$\oplus(5; 6; 9) \otimes (1; 3; 4) \otimes x_{79}(k-1)$$

$$\oplus(5; 6; 9) \otimes (1; 3; 4) \otimes x_{120}(k-1)$$

$$x_{108}(k) = (12; 18; 25) \otimes x_{105}(k-1)$$



$$\oplus(6; 9; 13) \otimes x_{79}(k - 1)$$

$$\oplus(6; 9; 13) \otimes x_{120}(k - 1)$$

Dengan demikian, didapatkan elemen matriks  $\tilde{A}$ , baris ke-108, kolom ke-105 adalah  $BKS(12; 18; 25)$  kolom ke-79 adalah  $BKS(6; 9; 13)$ , kolom ke-120 adalah  $BKS(6; 9; 13)$ .

- d. Untuk model matematis keberangkatan *BRT* yang ke- $k$  dari Halte Gedong Kuning Dep Kehutanan ke Gedong Kuning JEC pada jalur 3A. Dengan mensubstitusi nilai-nilai waktu aktivitas kabur pada *Dokumen Waktu Tempuh Kabur BRT Trans Jogja*, didapatkan model sebagai berikut.

$$x_{111}(k) = (4; 5; 7) \otimes (2; 4; 6) \otimes x_{109}(k - 1)$$

$$\oplus(1; 2; 2) \otimes x_{67}(k - 1)$$

$$x_{111}(k) = (6; 9; 13) \otimes x_{109}(k - 1)$$

$$\oplus(1; 2; 2) \otimes x_{67}(k - 1)$$

Dengan demikian, didapatkan elemen matriks  $\tilde{A}$ , baris ke-111, kolom ke-109 adalah  $BKS(6; 9; 13)$  kolom ke-79 adalah  $BKS(6; 9; 13)$ , kolom ke-69 adalah  $BKS(1; 2; 2)$ .

- e. Untuk model matematis keberangkatan *BRT* yang ke- $k$  dari Halte UAD ke Halte Terminal Giwangan pada jalur 4A. Dengan mensubstitusi nilai-nilai waktu aktivitas kabur pada *Dokumen Waktu Tempuh Kabur BRT Trans Jogja*; didapatkan model sebagai berikut.

$$x_{175}(k) = (7; 12; 23) \otimes x_{172}(k - 1)$$

$$\oplus(6; 11; 21) \otimes x_{16}(k - 1)$$

$$\oplus(7; 11; 18) \otimes x_{191}(k - 1)$$

$$\oplus(8; 13; 19) \otimes x_{96}(k - 1)$$

Dengan demikian, didapatkan elemen matriks  $\tilde{A}$ , baris ke-175, kolom ke-172 adalah  $BKS(7; 12; 23)$ , kolom ke-16 adalah  $BKS(6; 11; 21)$ , kolom ke-191 adalah  $BKS(7; 11; 19)$  dan kolom ke-96 adalah  $BKS(8; 13; 19)$ .



Dengan bantuan Scilab pada *Dokumen Program Model Dinamika Sistem Jaringan Transportasi BRT Trans Jogja* dan berdasar cara yang sama untuk memodelakan model dinamika sistem jaringan transportasi *BRT Trans Jogja* didapatkanlah matriks  $\tilde{A}$ . Dalam sistem ini matriks  $\tilde{A}$  yang didapatkan berukuran  $193 \times 193$ . Di mana, elemen-elemen matriks  $\tilde{A}$  merupakan durasi waktu aktivitas kabur. Durasi waktu aktivitas kabur pada matriks  $\tilde{A}$  dinyatakan dalam bilangan kabur segitiga.

### 5.3.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen atas Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dari Model Matematika Jaringan Transportasi *BRT Trans Jogja*

Persamaan (5.4) model matematika jaringan transportasi *BRT* dengan waktu kabur di bawah ini,

$$\tilde{x}(k) = \tilde{A} \otimes \tilde{x}(k-1), k = 1, 2, 3, \dots,$$

di mana  $\tilde{A} \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^{n \times n}$  dan  $\tilde{x}(k) \in \mathbf{F}(\mathbf{R})_{\max}^n$ ,

juga dapat dinyatakan melalui saat keberangkatan awal *BRT*  $\tilde{x}(0)$ , dengan potongan- $\alpha$ -nya  $\mathbf{x}^\alpha(0) \approx [\underline{\mathbf{x}}^\alpha(0), \overline{\mathbf{x}}^\alpha(0)]$  untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ . Perhatikan bahwa untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$   $\overline{\mathbf{x}}^\alpha(k) = A^{\alpha} \otimes \overline{\mathbf{x}}^\alpha(k-1) \approx [\underline{A}^{\alpha} \otimes \underline{\mathbf{x}}^\alpha(k-1), \overline{A}^{\alpha} \otimes \overline{\mathbf{x}}^\alpha(k-1)]$ . Mengingat saat keberangkatan awal *BRT* dapat ditentukan dengan pasti, maka saat keberangkatan awal *BRT* merupakan waktu tegas atau bilangan kabur titik.

Untuk matriks bilangan kabur  $\tilde{A}$  tersebut, karena graf berarah dari matriks  $\underline{A}^0$  pada model jaringan antrian di atas terhubung kuat maka matriks  $\underline{A}^0$  takreduabel. Selanjutnya, matriks  $\tilde{A}$  mempunyai nilai eigen max-plus bilangan kabur tunggal, yaitu  $\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A})$  dengan  $\tilde{v}$  adalah vektor eigen max-plus bilangan



kabur yang bersesuaian dengan  $\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A})$ , di mana  $\tilde{v}_i \neq \tilde{\varepsilon}$  untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sebagai catatan “  $\lambda_{\max}(\tilde{A})$ ” dalam hal ini dimaksudkan sama seperti  $\lambda(\tilde{A})$  yang ada pada buku Subiono (2015). Lambang  $\lambda_{\max}(\tilde{A})$  merupakan nilai eigen dari suatu matriks persegi yang elemen-elemennya berupa bilangan kabur.

Selanjutnya, dibentuk vektor bilangan kabur  $\tilde{v}^*$  di mana vektor potongan- $\alpha$ -nya adalah  $\underline{v}^{*\alpha} \approx [\underline{v}^{\alpha}, \overline{v}^{\alpha}]$ , dengan langkah-langkah sebagai berikut (Rudhito, 2011). Untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$  dan  $i = 1, 2, \dots, n$ , dibentuk

1.  $\underline{v}'^{\alpha} = \delta_1 \otimes \underline{v}^{\alpha}, \overline{v}'^{\alpha} = \delta_1 \otimes \overline{v}^{\alpha}$ , dengan  $\delta_1 = -\min_i(\underline{v}_i^0)$ .
2.  $\underline{v}''^{\alpha} = \delta_2(\alpha) \otimes \underline{v}'^{\alpha}, \overline{v}''^{\alpha} = \delta_2(\alpha) \otimes \overline{v}'^{\alpha}$ , dengan  $\delta_2(\alpha) = -\min_i(\underline{v}_i'^{\alpha} - \underline{v}_i^0)$ .
3.  $\underline{v}'''^{\alpha} = \delta_3 \otimes \underline{v}''^{\alpha}$ , dengan  $\delta_3 = -\min_i(\underline{v}_i''^{\alpha} - \underline{v}_i^0)$ .
4.  $\underline{v}^{*\alpha} = \underline{v}'''^{\alpha}, \overline{v}^{*\alpha} = \delta_4(\alpha) \otimes \overline{v}'''^{\alpha}$ , dengan  $\delta_4(\alpha) = -\min_i(\overline{v}_i'''^{\alpha} - \overline{v}_i^0)$ .

Vektor bilangan kabur  $\tilde{v}^*$  tersebut juga merupakan vektor eigen aljabar max-plus bilangan kabur yang bersesuaian dengan  $\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A})$ . Dari konstruksi vektor eigen aljabar max-plus bilangan kabur di atas diperoleh bahwa komponen  $\underline{v}^{*0}$  yaitu  $\underline{v}_i^{*0}$ , semuanya tak negatif dan terdapat  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sedemikian hingga,  $\underline{v}_i^{*0}$  untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ . Sementara vektor potongan- $\alpha$ -nya merupakan interval- interval terkecil, dalam arti  $\min_i(\overline{v}_i^{*0} - \underline{v}_i^{*0}) = 0$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ , di antara semua kemungkinan vektor eigen aljabar max-plus bilangan kabur hasil modifikasi vektor eigen max-plus bilangan kabur  $\tilde{v}$  di atas, yang semua batas bawah komponennya tak negatif dan paling sedikit satu bernilai nol.

Mengingat vektor bilangan kabur  $\tilde{v}^*$  merupakan vektor eigen max-plus bilangan kabur yang bersesuaian dengan  $\tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A})$ , maka berlaku,

$$\tilde{A} \otimes \tilde{v}^* = \tilde{\lambda}_{\max}(\tilde{A}) \otimes \tilde{v}^*$$

atau,



$$A^\alpha \bar{\otimes} \underline{v}^{*\alpha} = \lambda_{\max}(A^\alpha) \bar{\otimes} \underline{v}^{*\alpha}$$

atau,

$$[\underline{A}^\alpha \otimes \underline{v}^{*\alpha}, \overline{A}^\alpha \otimes \underline{v}^{*\alpha}] = [\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha) \otimes \underline{v}^{*\alpha}, \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha) \otimes \underline{v}^{*\alpha}]$$

yang berarti pula,

$$\underline{A}^\alpha \otimes \underline{v}^{*\alpha} = \lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha) \otimes \underline{v}^{*\alpha} \text{ dan } \overline{A}^\alpha \otimes \underline{v}^{*\alpha} = \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha) \otimes \underline{v}^{*\alpha}$$

untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ .

Untuk suatu nilai  $\alpha \in [0, 1]$ , diambil saat keberangkatan awal *BRT*  $\tilde{x}^\alpha(0) = \underline{v}^{*\alpha}$  yang merupakan saat keberangkatan awal tercepat *BRT*, sehingga batas bawah interval saat keberangkatan *BRT* periodik. Hal ini karena terdapat  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sedemikian hingga  $\underline{v}^{*\alpha}_i = 0$  untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ . Mengingat operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  pada matriks konsisten terhadap urutan " $\leq_m$ ", maka berlaku

$$(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha} \leq_m (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha} \leq_m (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha}.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} x^\alpha(k) &\approx [(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha}, (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha}] \subseteq [(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha}, (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha}] = \\ &[(\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha))^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha}, (\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha))^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha}] = \\ &[(\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha))^{\otimes k}, (\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha))^{\otimes k}] \bar{\otimes} [\underline{v}^{*\alpha}, \underline{v}^{*\alpha}] = \\ &[\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]^{\otimes k} \bar{\otimes} [\underline{v}^{*\alpha}, \underline{v}^{*\alpha}] \end{aligned}$$

untuk setiap  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Dengan demikian untuk suatu  $\alpha \in [0, 1]$ , vektor  $\underline{v}^{*\alpha}$  merupakan saat keberangkatan awal tercepat *BRT*, sehingga interval saat keberangkatan *BRT* akan berada dalam interval terkecil yang batas bawah dan batas atasnya periodik dengan besar periode berturut-turut  $\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha)$  dan  $\lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)$ .

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan pula bahwa, untuk suatu nilai  $\alpha \in [0, 1]$ , jika diambil saat penjadwalan awal  $\tilde{x}^\alpha(0) = \underline{v}$ , di mana

$$\underline{v}^{*\alpha} \leq_m \underline{v} \leq_m \overline{v}^{*\alpha}$$

maka,

$$x^\alpha(k) \approx [(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}, (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}] \subseteq [(\underline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha}, (\overline{A}^\alpha)^{\otimes k} \otimes \underline{v}^{*\alpha}]$$



$$= [\lambda_{\max}(\underline{A}^\alpha), \lambda_{\max}(\overline{A}^\alpha)]^{\otimes k} \otimes [\underline{v}^{*\alpha}, \overline{v}^{*\alpha}]$$

Berdasarkan data-data jaringan transportasi *BRT* Trans Jogja di atas dan dengan bantuan program *Scilab Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur*, berikut ini akan ditampilkan hasil potongan nilai eigen dan vektor eigen. Nilai eigen dan vektor eigen dalam perhitungan ini masing-masing merupakan waktu interval keberangkatan dan waktu saat awal keberangkatan *BRT*.



Tabel 5.5 Hasil Perhitungan Batas-Batas Potongan- $\alpha$  Nilai Eigen dan Vektor Eigen AljabarMax-Plus Bilangan Kabur pada Dinamika Sistem Jaringan Transportasi BRT Trans Jogja dalam Satuan Menit

| No | $\alpha - cut$ | $\lambda_{\max}(A^{\bar{\alpha}})$ | $\lambda_{\max}(A^{\alpha})$ | $\underline{v}_{24}^{\alpha}$ | $\overline{v}_{24}^{\alpha}$ | $\underline{v}_{38}^{\alpha}$ | $\overline{v}_{38}^{\alpha}$ | $\underline{v}_{108}^{\alpha}$ | $\overline{v}_{108}^{\alpha}$ | $\underline{v}_{111}^{\alpha}$ | $\overline{v}_{111}^{\alpha}$ | $\underline{v}_{175}^{\alpha}$ | $\overline{v}_{175}^{\alpha}$ |
|----|----------------|------------------------------------|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| 1  | 0              | 30,2                               | 59,5                         | 95,8                          | 142,5                        | 63,4                          | 172                          | 55,4                           | 131                           | 148,2                          | 234,5                         | 64,4                           | 172                           |
| 2  | 0,5            | 34,4                               | 48                           | 104,6                         | 115,5                        | 77,8                          | 116,5                        | 61,8                           | 84                            | 160,4                          | 189                           | 78,8                           | 117                           |
| 3  | 1              | 38,6                               | 38,6                         | 113,4                         | 113,4                        | 92,2                          | 92,2                         | 68,2                           | 68,2                          | 172,6                          | 172,6                         | 93,2                           | 93,2                          |



Berdasarkan Tabel 5.5 Hasil Perhitungan Batas-Batas Potongan- $\alpha$  Nilai Eigen dan Vektor Eigen AljabarMax-Plus Bilangan Kabur pada Dinamika Sistem Jaringan Transportasi BRT Trans Jogja dalam Satuan Menit di atas diperoleh nilai eigen max-plus bilangan kabur  $\lambda_{\max}(\tilde{A}) = BKS(30,2; 38,6; 59,5)$  dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut,

$$\mu_{\lambda_{\max}(\tilde{A})}(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x \leq 30,2 \\ \frac{x-38,6}{8,4} & \text{untuk } 30,2 \leq x \leq 38,6 \\ \frac{38,6-x}{20,9} & \text{untuk } 38,6 \leq x \leq 59,5 \\ 0 & \text{untuk } 59,5 \leq x \end{cases}$$

Nilai eigen ini merupakan keperiodikan waktu keberangkatan Trans Jogja pada dinamika jaringan Trans Jogja.

Sedangkan, vektor eigen max-plus bilangan kabur untuk keberangkatan dengan nomor 24, 38, 108, 111 dan 175 berturut-turut adalah sebagai berikut ini.

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} BKS(95,8; 113,4; 142,5) \\ BKS(63,4; 92,2; 172) \\ BKS(55,4; 68,2; 131) \\ BKS(148,2; 172,6; 234,5) \\ BKS(64,4; 93,2; 172) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan nilai eigen aljabar max-plus bilangan kabur yang diperoleh terlihat bahwa rata-rata waktu kabur antar keberangkatan BRT adalah  $BKS(30,2; 38,6; 59,5)$  dan waktu awal kabur saat keberangkatan untuk keberangkatan 24, 38, 108, 111 dan 175 adalah sebagai berikut.

$$\tilde{v} = \begin{bmatrix} BKS(95,8; 113,4; 142,5) \\ BKS(63,4; 92,2; 172) \\ BKS(55,4; 68,2; 131) \\ BKS(148,2; 172,6; 234,5) \\ BKS(64,4; 93,2; 172) \end{bmatrix}$$

Jika akan disusun jadwal keberangkatan BRT hingga keberangkatan ke-4, maka hasilnya adalah sebagai berikut.



Tabel 5.6 Perhitungan Keberangkatan Waktu Kabur Keberangkatan BRT Trans Jogja dalam Satuan Menit

| k                 | Keberangkatan ke-     |                        |                         |                        |
|-------------------|-----------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
|                   | 1                     | 2                      | 3                       | 4                      |
| $\tilde{x}_{24}$  | (95,8; 113,4; 142,5)  | (126 ; 152 ; 202)      | (156,2 ; 190,6 ; 261,5) | (186,4 ; 229,2 ; 321 ) |
| $\tilde{x}_{38}$  | (63,4; 92,2; 172)     | (93,6 ; 130,8 ; 231,5) | (123,8 ; 169,4 ; 291 )  | (154 ; 208 ; 350,5 )   |
| $\tilde{x}_{108}$ | (55,4; 68,2; 131)     | (85,6 ; 106,8 ; 190,5) | (115,8 ; 145,4 ; 250 )  | (146 ; 184 ; 309,5 )   |
| $\tilde{x}_{111}$ | (148,2; 172,6; 234,5) | (178,4 ; 211,2 ; 294)  | (208,6 ; 249,8 ; 353,5) | (238,8 ; 288,4 ; 413)  |
| $\tilde{x}_{175}$ | (64,4; 93,2; 172)     | (94,6 ; 131,8 ; 231,5) | (124,8 ; 170,4 ; 291)   | (155 ; 209 ; 350,5 )   |

k = keberangkatan

Untuk keberangkatan selanjutnya sampai dengan keberangkatan yang ke-15 dapat dilihat pada dokumen lima contoh keberangkatan.



### 5.3.6 Pengambilan Keputusan Penjadwalan Operasional

Jika akan disusun jadwal keberangkatan *BRT* yang siap digunakan operator Trans Jogja, maka bilangan kabur yang menyatakan waktu keberangkatan tersebut harus diubah menjadi waktu tetap atau pasti yang disesuaikan dengan kondisi jalan, banyaknya penumpang di halte berdasarkan waktu tertentu.

Pada waktu tertentu ada beberapa kondisi jalan dan halte yang mungkin saja terjadi. Peneliti mengklasifikasikan kondisi tersebut sebagai berikut. Dalam waktu tertentu, kondisi jalan dibagi dalam tiga keadaan, yakni lengang, normal, dan macet. Sedangkan, untuk kondisi banyaknya penumpang di halte dibagi dalam tiga keadaan, yakni sedikit, rata-rata, dan banyak. Dari dua kondisi tersebut peneliti mengkombinasikannya, sehingga terbentuk keadaan yang terinci berikut ini.

Tabel 5.7 Klasifikasi Kondisi Jalan dan Banyaknya Penumpang di Halte pada Waktu Tertentu

| Jalan \ Halte | Lengang              | Normal              | Macet              |
|---------------|----------------------|---------------------|--------------------|
| Sedikit       | (sedikit, lengang)   | (sedikit, normal)   | (sedikit, macet)   |
| Rata-rata     | (rata-rata, lengang) | (rata-rata, normal) | (rata-rata, macet) |
| Banyak        | (banyak, lengang)    | (banyak, normal)    | (banyak, macet)    |

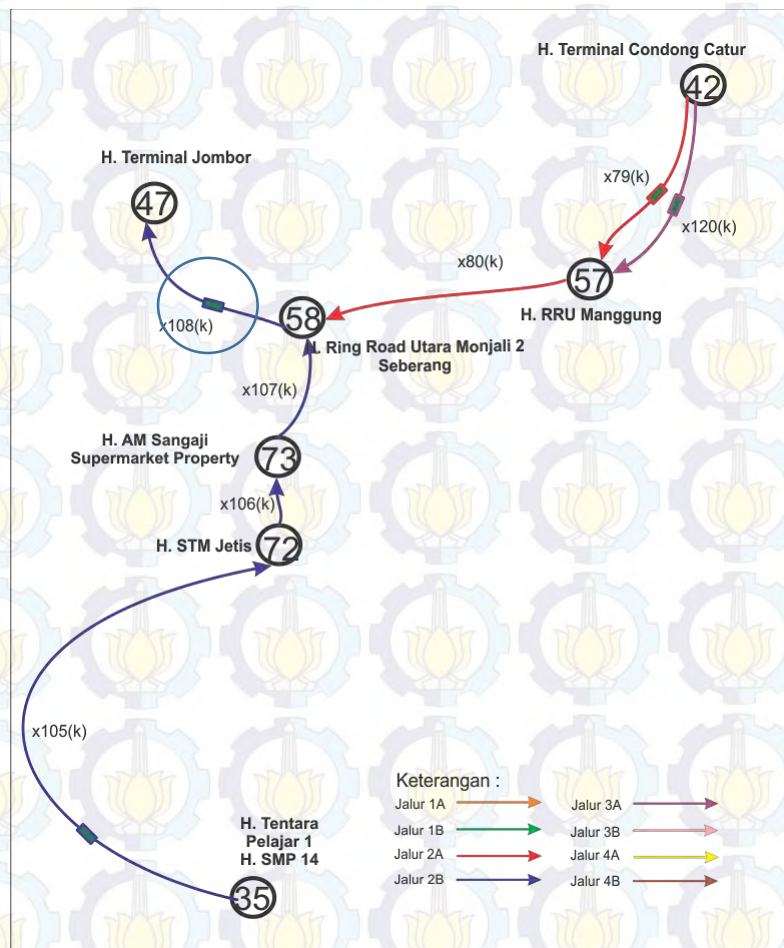
Pasangan terurut dalam tabel tersebut berturut-turut merupakan keadaan banyaknya penumpang dan keadaan lalu lintas di jalan raya atau secara umum dinyatakan (keadaan banyaknya penumpang di halte, keadaan lalu lintas jalan) pada waktu tertentu. Sebagai contoh, diambil pasangan terurut (sedikit, lengang) maksudnya adalah keadaan penumpang di halte pada kategori sedikit dan keadaan lalu lintas pada kategori lengang.

Pengambilan keputusan penentuan jadwal berdasarkan waktu aktivitas kabur ini, juga harus memenuhi prinsip pelayanan baik dan keefektifan. Dalam pengertian ini, jika terjadi banyak penumpang di halte, maka sedapat mungkin



frekuensi keberangkatan *BRT* di halte pada waktu tertentu frekuensinya banyak. Pengertian ini juga analog terhadap keadaan penumpang yang semakin sedikit.

Sebagai contoh perhatikan keberangkatan  $\tilde{x}_{108}(k)$  : keberangkatan *BRT* dari halte Ring Road Utara Monjali 2 ke Terminal Jombor pada jalur 2B aktivitas kabur berikut ini.

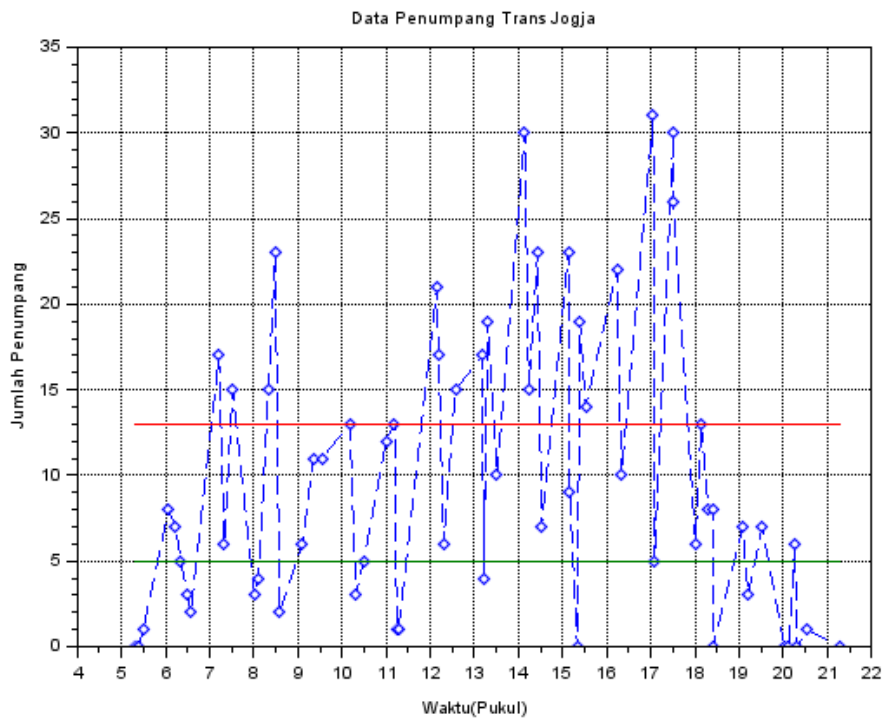


Gambar 5.9 Graf Keberangkatan *BRT* dari Halte Ring Road Utara Monjali 2 ke Terminal Jombor pada Jalur 2B

Berdasarkan dinamika sistem jaringan *BRT* Trans Jogja, keberangkatan bus paling awal dimulai pukul 05.30 WIB. Berdasarkan data observasi, berikut ini akan ditampilkan jumlah penumpang dan keadaan jalan pada keberangkatan Trans Jogja  $\tilde{x}_{108}(k)$  jalur 2B pada waktu-waktu tertentu.



Berikut ini, ditampilkan data jumlah penumpang *BRT* Trans Jogja yang berada pada keberangkatan  $\tilde{x}_{108}(k)$  (keberangkatan dari Halte Ring Road Utara Monjali 2 ke Terminal Jombor) jalur 2B berdasarkan data di Halte Ring Road Utara Monjali 2.



Gambar 5.10 Grafik Kondisi Penumpang pada Keberangkatan  $\tilde{x}_{108}(k)$  di Jalur 2B pada Waktu Tertentu dalam Satuan Penumpang Orang dan Waktu Indonesia Bagian Barat

Data dalam Gambar 5.10 merepresentasikan jumlah penumpang yang ada pada keberangkatan *Tras* Jogja dari Halte Ring Road Utara Monjali 2 ke Halte Terminal Jombor dari waktu ke waktu, yakni dari pukul 05:30 WIB sampai dengan 21:30 WIB. Dalam gambar tersebut terdapat garis berwarna merah dan hijau yang merupakan pembagian letak ukuran data yang tersedia. Dalam hal ini jumlah penumpang dibagi dalam 3 daerah kategori jumlah penumpang, yakni banyak, rata-rata, sedikit. Garis merah merupakan garis batas antara daerah jumlah penumpang banyak dan rata-rata, sedangkan daerah berwarna hijau menunjukkan batas antara jumlah penumpang rata-rata dan sedikit. Selanjutnya, diperhatikan secara seksama



jumlah penumpang berdasar waktu ke waktu. Berdasar perubahan waktu dari data tersebut, secara intuitif jumlah penumpang dapat diklasifikasikan berdasar kategori yang sudah ditentukan. Berdasarkan data tersebut, terlihat antara pukul 05:30 WIB sampai dengan pukul 07:00 WIB, jumlah penumpang dapat dikatakan sedikit (ada 5 titik yang berada pada wilayah kategori penumpang sedikit). Sedangkan, pada pukul 07:00 WIB sampai dengan 13:00 WIB jumlah, penumpang dapat dikategorikan rata-rata (penyebaran data pada sekitaran wilayah rata-rata). Pada pukul 13:00 WIB sampai dengan pukul 18:00 WIB, penyebaran data lebih dominan ke wilayah dengan jumlah kategori penumpang banyak. Selanjutnya, pada pukul 18:00 WIB sampai dengan pukul 20:00 WIB persebaran data jumlah penumpang lebih dominan ke wilayah dengan kategori rata-rata. Terakhir, pada pukul 20:00 WIB sampai dengan pukul 21.30 WIB, jumlah penumpang berada pada kategori sedikit. Untuk lebih mudah melihat gambaran secara umum kondisi jumlah penumpang berikut ini saya tampilkan dalam bentuk tabel sederhana.

Tabel 5.8 Klasifikasi Kondisi Banyaknya Penumpang di Halte Ring Road Monjali 2 di Jalur 2B pada Waktu Tertentu (dalam satuan WIB)

|     |             |             |             |             |             |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $t$ | 05:30-07:00 | 07:00-13:00 | 13:00-18.00 | 18.00-20:00 | 20:00-21:30 |
| $n$ | sedikit     | rata-rata   | banyak      | rata-rata   | sedikit     |

Keterangan :

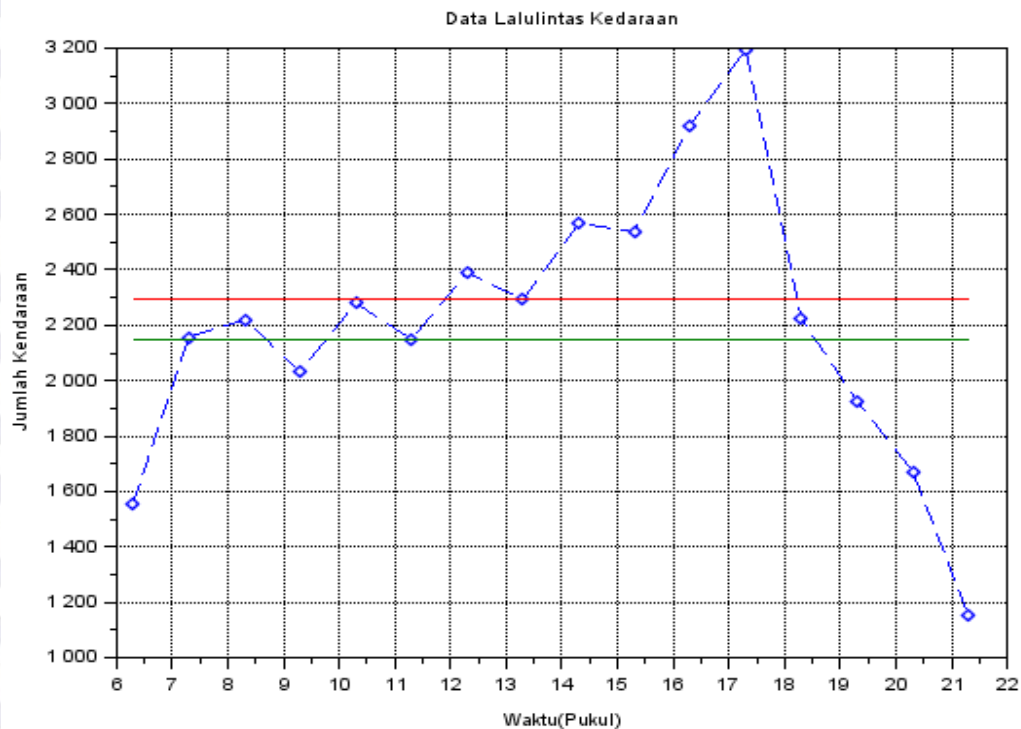
$t$  = waktu

$n$  = banyak penumpang dalam kategori

Untuk selanjutnya akan dibahas mengenai data lalu lintas di sekitaran halte dan jalur yang dilalui *BRT* Trans Jogja yang melakukan kerangkatan dari Halte Ring Road Monjali 2 ke Halte Terminal Jombor.



Berikut ini ditampilkan data lalu lintas kendaraan yang melaju dari Yogyakarta menuju Sleman Utara/ Magelang pada simpang Jombor. Simpang Jombor secara letak berada pada Ring Road Utara dan merupakan akses menuju Terminal Jombor.



Gambar 5.11 Grafik Kondisi Lalu lintas Aliran Kendaraan dari Yogyakarta Menuju Sleman Utara/Magelang pada Simpang Jombor di Jalan Magelang pada Hari Efektif Waktu Tertentu dalam Satuan Kendaraan Unit dan Waktu Indonesia Bagian Barat

Gambar 5.11 menunjukkan data lalu lintas kendaraan bermotor pada Simpang Jombor. Aliran kendaraan yang ditampilkan dalam data ini hanya kendaraan yang keluar melakukan perjalanan dari Yogyakarta menuju arah Sleman Utara dan Magelang. Data tersebut menunjukkan volume kendaraan yang berada pada aliran tersebut pada pukul 06:00 WIB sampai dengan pukul 22:00 WIB. Berdasarkan data tersebut, terlihat antara pukul 06:00 WIB sampai dengan pukul 07:00 WIB, jumlah kendaraan dapat dikatakan sedikit dibandingkan data yang lain



berdasar ukuran letak data. Pada interval jam tersebut, jumlah kendaraan yang melalui Simpang Jombor untuk arus keluar Yogyakarta yakni 1556 unit. Jadi untuk pukul 06:00 WIB sampai dengan pukul 07:00 WIB kategori lalu lintas dapat dinyatakan lengang. Sedangkan, pada pukul 07:00 WIB sampai dengan 13:00 WIB, jumlah kendaraan dapat dikategorikan normal (penyebaran data pada sekitaran wilayah kategori lalu lintas normal). Pada pukul 13:00 WIB sampai dengan pukul 18:00 WIB, penyebaran data lebih dominan ke wilayah dengan jumlah kategori kendaraan banyak. Jadi pada waktu interval ini dapat dikatakan macet. Selanjutnya, pada pukul 18:00 WIB sampai dengan pukul 19:00 WIB persebaran data jumlah kendaraan lebih dominan ke wilayah dengan kategori normal. Terakhir, pada pukul 19:00 WIB sampai dengan pukul 22:00 WIB persebaran data jumlah kendaraan lebih dominan ke wilayah dengan kategori lengang. Untuk lebih mudah melihat gambaran secara umum kondisi lalu lintas berikut ini ditampilkan dalam bentuk tabel sederhana.

Tabel 5.9 Klasifikasi Kondisi Lalu lintas Aliran Kendaraan dari Yogyakarta Menuju Sleman Utara/Magelang pada Simpang Jombor di Jalan Magelang pada Hari Efektif pada Waktu Tertentu (dalam satuan WIB)

|          |             |             |             |             |             |
|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <i>t</i> | 06:00-07:00 | 07:00-13:00 | 13:00-18:00 | 18:00-19:00 | 19:00-22:00 |
| <i>n</i> | lelang      | normal      | macet       | normal      | lelang      |

Keterangan :

*t* = waktu

*n* = banyak penumpang dalam kategori

Untuk selanjutnya, akan dibahas gabungan kondisi jumlah penumpang dan kondisi lalu lintas jalan raya. Gabungan dari kondisi ini akan digunakan untuk menentukan waktu aktivitas kabur keberangkatan  $\tilde{x}_{108}(k)$  untuk dari keberangkatan pertama sampai dengan keberangkatan terakhir.



Tabel 5.10 Klasifikasi Kondisi Jalan dan Banyaknya Penumpang di Halte berdasar Waktu Tertentu pada Keberangkatan  $\tilde{x}_{108}(k)$

|          |                    |                    |                    |                    |                    |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| <i>t</i> | <b>05:30-07:00</b> | <b>07:00-13:00</b> | <b>13:00-18.00</b> | <b>18.00-20:00</b> | <b>20:00-21:30</b> |
| <i>n</i> | sedikit            | rata-rata          | banyak             | rata-rata          | sedikit            |

|          |                    |                    |                    |                    |                    |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| <i>t</i> | <b>06:00-07:00</b> | <b>07:00-13:00</b> | <b>13:00-18.00</b> | <b>18.00-19:00</b> | <b>19:00-22:00</b> |
| <i>n</i> | lengang            | normal             | macet              | normal             | lengang            |

|          |                       |                        |                    |                        |                         |                       |
|----------|-----------------------|------------------------|--------------------|------------------------|-------------------------|-----------------------|
| <i>t</i> | <b>06:00-07:00</b>    | <b>07:00-13:00</b>     | <b>13:00-18.00</b> | <b>18.00-19:00</b>     | <b>19:00-20:00</b>      | <b>20:00-21:30</b>    |
| <i>p</i> | (sedikit,<br>lengang) | (rata-rata,<br>normal) | (banyak,<br>macet) | (rata-rata,<br>normal) | (rata-rata,<br>lengang) | (sedikit,<br>lengang) |

Keterangan :

*t* = waktu

*n* = banyak penumpang dalam kategori

*p* = pasangan terurut kondisi halte dan jalan (halte, jalan)



Berdasarkan Tabel 5.10 *Klasifikasi Kondisi Jalan dan Banyaknya Penumpang di Halte berdasar Waktu Tertentu pada Keberangkatan  $\tilde{x}_{108}(k)$*  dan menggunakan prinsip pelayanan baik-keefektifan disusunlah jadwal operasional keberangkatan  $\tilde{x}_{108}(k)$  dari keberangkatan ke-1 sampai dengan keberangkatan ke-21.

Sebelum melakukan penyusunan jadwal, dilakukan konversi waktu keberangkatan hasil hitungan Scilab Tabel 5.6 *Perhitungan Keberangkatan Waktu Kabur Keberangkatan BRT Trans Jogja dalam Satuan Menit* ke waktu operasional Trans Jogja dengan waktu paling awal dari sistem adalah 05:30 WIB.

Tabel 5.11 Konversi Waktu Keberangkatan Waktu Kabur BRT Trans Jogja

| k                 | 1<br>(dalam menit)    | Konversi Waktu<br>(dalam WIB)   |
|-------------------|-----------------------|---------------------------------|
| $\tilde{x}_{24}$  | (95,8; 113,4; 142,5)  | (7:05:48 ; 7:23:24 ; 7:52:30 )  |
| $\tilde{x}_{38}$  | (63,4; 92,2; 172)     | ( 6:33:24 ; 7:02:12 ; 8:22:00 ) |
| $\tilde{x}_{108}$ | (55,4; 68,2; 131)     | (6:25:24 ; 6:38:12 ; 7:41:00 )  |
| $\tilde{x}_{111}$ | (148,2; 172,6; 234,5) | (7:58:12 ; 8:22:36 ; 9:24:30 )  |
| $\tilde{x}_{175}$ | (64,4; 93,2; 172)     | (6:34:24 ; 7:03:12 ; 8:22:00 )  |

| k                 | 2<br>(dalam menit)     | Konversi Waktu<br>(dalam WIB)   |
|-------------------|------------------------|---------------------------------|
| $\tilde{x}_{24}$  | (126 ; 152 ; 202)      | (7:36:0 ; 8:02:0 ; 8:52:00 )    |
| $\tilde{x}_{38}$  | (93,6 ; 130,8 ; 231,5) | (7:03:36 ; 7:40:48 ; 9:21:30 )  |
| $\tilde{x}_{108}$ | (85,6 ; 106,8 ; 190,5) | (6:55:36 ; 7:16:48 ; 8:40:30 )  |
| $\tilde{x}_{111}$ | (178,4 ; 211,2 ; 294)  | (8:28:24 ; 9:01:12 ; 10:24:00 ) |
| $\tilde{x}_{175}$ | (94,6 ; 131,8 ; 231,5) | (7:04:36 ; 7:41:48 ; 9:21:30 )  |



| k                 | 3<br>(dalam menit)      | Konversi Waktu<br>(dalam WIB)         |
|-------------------|-------------------------|---------------------------------------|
| $\tilde{x}_{24}$  | (156,2 ; 190,6 ; 261,5) | (8: 06: 12 ; 8: 40: 36 ; 9: 51: 30 )  |
| $\tilde{x}_{38}$  | (123,8 ; 169,4 ; 291 )  | (7: 33: 48 ; 8: 19: 24 ; 10: 21: 00 ) |
| $\tilde{x}_{108}$ | (115,8 ; 145,4 ; 250 )  | (7: 25: 48 ; 7: 55: 24 ; 9: 40: 00 )  |
| $\tilde{x}_{111}$ | (208,6 ; 249,8 ; 353,5) | (8: 58: 36 ; 9: 39: 48 ; 11: 23: 30 ) |
| $\tilde{x}_{175}$ | (124,8 ; 170,4 ; 291)   | (7: 34: 48 ; 8: 20: 24 ; 10: 21: 00 ) |

| k                 | 4<br>(dalam menit)     | Konversi Waktu<br>(dalam WIB)          |
|-------------------|------------------------|--|
| $\tilde{x}_{24}$  | (186,4 ; 229,2 ; 321 ) | (8: 36: 24 ; 9: 19: 12 ; 10: 51: 00 )  |
| $\tilde{x}_{38}$  | (154 ; 208 ; 350,5 )   | (8: 04: 00 ; 8: 58: 00 ; 11: 20: 30 )  |
| $\tilde{x}_{108}$ | (146 ; 184 ; 309,5 )   | (7: 56: 00 ; 8: 34: 00 ; 10: 39: 30)   |
| $\tilde{x}_{111}$ | (238,8 ; 288,4 ; 413)  | (9: 28: 48 ; 10: 18: 24 ; 12: 23: 00 ) |
| $\tilde{x}_{175}$ | (155 ; 209 ; 350,5 )   | (8: 05: 00 ; 8: 59: 00 ; 11: 20: 30 )  |

Untuk keberangkatan selanjutnya sampai dengan keberangkatan yang ke-15 dapat dilihat pada *dokumen lima contoh keberangkatan*.

Berdasarkan hal tersebut disusunlah jadwal operasional keberangkatan  $\tilde{x}_{108}(k)$  dari keberangkatan ke-1 sampai dengan keberangkatan ke-15.

- Keberangkatan pertama ( $k = 1$ ), perkiraan waktu aktivitas kabur keberangkatan pertama menurut perhitungan pada *Tabel 5.11* adalah (6: 25: 24 ; 6: 38: 12 ; 7: 41: 0 ). Menurut *Tabel 5.10*, antara pukul 06:00 WIB sampai dengan pukul 07:00 WIB diketahui bahwa kondisi jumlah penumpang sedikit dan kondisi jalan lengang. Selain itu, pukul 07:00 WIB sampai dengan 09:00 WIB kondisi jumlah penumpang rata-rata dan kondisi jalan normal. Dengan kondisi jalan lengang dan normal, secara realistis dapat dipilih waktu tercepat atau waktu normal atau waktu paling lama. Jika dibuat waktu keberangkatan, maka waktu yang dipilih adalah waktu yang mungkin



berdasarkan kondisi jalan dan untuk pelayanan terbaik kepada penumpang. Karena frekuensi keberangkatan yang diharapkan banyak, maka untuk keberangkatan pertama dibuat secara umum adalah waktu tercepat. Jadi keberangkatan yang dipilih dari waktu aktivitas kabur (6: 25: 24 ; 6: 38: 12 ; 7: 41: 0 ) adalah pukul 06:25:24 WIB.

- b. Keberangkatan kedua ( $k = 2$ ), perkiraan waktu aktivitas kabur keberangkatan kedua menurut perhitungan pada *Tabel 5.11* adalah (6: 55: 36 ; 7: 16: 48 ; 8: 40: 30 ). Menurut *Tabel 5.10*, antara jam 07:00 WIB sampai dengan 09:00 diketahui bahwa kondisi jumlah penumpang rata-rata dan kondisi jalan normal. Dengan kondisi jalan normal, secara realistis dapat dipilih waktu normal atau waktu paling lama. Jika dibuat waktu keberangkatan, maka waktu yang dipilih adalah waktu yang mungkin berdasarkan kondisi jalan normal dan jumlah penumpang rata-rata. Sehingga, supaya penumpang tidak terlalu lama menunggu dan frekuensi keberangkatan bus sebanyak mungkin namun juga sesuai dengan kondisi jalan, maka waktu yang diambil adalah waktu normal. Jadi keberangkatan yang dipilih dari waktu aktivitas kabur (6: 55: 36 ; 7: 16: 48 ; 8: 40: 30 ) adalah pukul 7:16:48 WIB. Berdasarkan *Tabel 5.10*, pada pukul 07:00 WIB sampai dengan pukul 13:00 WIB diketahui bahwa kondisi jalan dan banyaknya penumpang masing-masing adalah normal dan rata-rata, maka analog dengan keberangkatan kedua, dengan bantuan program *Scilab Iterasi Keberangkatan* ditentukan waktu keberangkatan yang ke-3 sampai dengan keberangkatan ke-11 sebagai berikut ini.

|                        |                                 |                                |
|------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| $\tilde{x}_{108}(3) =$ | (7:25:48 ; 7:55:24 ; 9:40:00)   | sehingga dipilih, 7:55:24 WIB  |
| $\tilde{x}_{108}(4) =$ | (7:56:00 ; 8:34:00;10:39:30)    | sehingga dipilih, 8:34:00 WIB  |
| $\tilde{x}_{108}(5) =$ | (8:26:12; 9:12:36 ; 11:39:0)    | sehingga dipilih, 9:12:36 WIB  |
| $\tilde{x}_{108}(6) =$ | (8:56:24 ; 9:51:12 ; 12:38:30)  | sehingga dipilih, 9:51:12 WIB  |
| $\tilde{x}_{108}(7) =$ | (9:26:36 ; 10:29:48 ; 13:38:00) | sehingga dipilih, 10:29:48 WIB |
| $\tilde{x}_{108}(8) =$ | (9:56:48 ; 11:08:24 ; 14:37:30) | sehingga dipilih, 11:08:24 WIB |



$\tilde{x}_{108}(9) = (10:26:60 ; 11:47:03 ; 15:37:00)$  sehingga dipilih, 11:47:03 WIB

$\tilde{x}_{108}(10) = (10:57:12 ; 12:25:36 ; 16:36:30)$  sehingga dipilih, 12:25:36 WIB

$\tilde{x}_{108}(11) = (11:27:24 ; 13:04:12 ; 17:36:00)$  sehingga dipilih, 13:04:12 WIB

- c. Keberangkatan keduabelas ( $k = 12$ ), perkiraan waktu aktivitas kabur keberangkatan keduabelas menurut perhitungan pada *Tabel 5.11* adalah (11: 57: 36; 13: 42: 48; 18: 35: 30). Menurut *Tabel 5.10*, antara jam 13:00 WIB sampai dengan 18:00 WIB diketahui bahwa kondisi jumlah penumpang banyak dan kondisi jalan macet. Dengan kondisi jalan macet, secara realistis dapat dipilih waktu paling lama. Jadi keberangkatan yang dipilih dari waktu aktivitas kabur (11: 57: 36; 13: 42: 48; 18: 35: 30) adalah pukul 18: 35: 30 WIB. Akan tetapi, timbul pertanyaan; apakah realistis? Berdasarkan keberangkatan sebelumnya yaitu keberangkatan ke-11 pukul 13:04:12 WIB, tentunya jika kita pilih keberangkatan yang ke-12 adalah pukul 18: 35: 30 WIB adalah tidak realistis. Lebih realistis keberangkatan ke-12 diambil dari pukul 13:04:12 WIB ditambah dengan nilai eigen (interval waktu keperiodikan) yang disesuaikan dengan kondisi jalan macet dan penumpang banyak (kondisi antara pukul 13:00 WIB sampai dengan 18:00 WIB). Diketahui nilai eigen dalam sistem ini adalah  $BKS(30,2; 38,6; 59,5)$  sehingga, dapat digunakan interval waktu yang bersesuaian adalah 59,5 menit artinya sama dengan 59 menit 30 detik. Sehingga, keberangkatan yang ke-12 adalah pukul 13:04:12 WIB ditambah dengan 59 menit 30 detik, yaitu pukul 14:03:42 WIB. Berdasarkan *Tabel 5.10*, pada pukul 13:00 WIB sampai dengan pukul 18:00 WIB diketahui bahwa kondisi jalan dan banyaknya penumpang masing-masing adalah macet dan rata-rata, maka analog dengan keberangkatan keduabelas, dengan bantuan program *Scilab Iterasi Keberangkatan* ditentukan waktu keberangkatan yang ke-12 sampai dengan keberangkatan ke-16 sebagai berikut ini.



$$\tilde{x}_{108}(12) = 14:03:42 \text{ WIB}$$

$$\tilde{x}_{108}(13) = 15:03:12 \text{ WIB}$$

$$\tilde{x}_{108}(14) = 16:02:42 \text{ WIB}$$

$$\tilde{x}_{108}(15) = 17:02:12 \text{ WIB}$$

$$\tilde{x}_{108}(16) = 18:01:42 \text{ WIB}$$

d. Keberangkatan ke-17 ( $k = 17$ ), analog dengan keberangkatan yang ke-12 didapatkan keberangkatan yang ke-17 berikut ini. Menurut *Tabel 5.10*, antara pukul 18:00 WIB sampai dengan pukul 19:00 WIB diketahui bahwa kondisi jumlah penumpang rata-rata dan kondisi jalan normal. Analog dengan keberangkatan yang ke-12, maka didapatkan waktu keberangkatan ke-17 adalah waktu keberangkatan ke-16 (18:01:42 WIB) ditambah nilai eigen (interval waktu keperiodikan) yang disesuaikan dengan kondisi jalan normal dan penumpang rata-rata (kondisi antara pukul 18:00 WIB sampai dengan 19:00 WIB). Diketahui nilai eigen dalam sistem ini adalah  $BKS(30,2; 38,6; 59,5)$  sehingga, dapat gunakan interval waktu yang bersesuaian adalah 38,6 menit artinya sama dengan 38 menit 36 detik. Jadi waktu keberangkatan yang dipilih adalah pukul 18:40:06 WIB.

e. Keberangkatan ke-18 ( $k = 18$ ), analog dengan keberangkatan yang ke-12 didapatkan keberangkatan yang ke-18 berikut ini. Menurut *Tabel 5.10*, antara pukul 19:00 WIB sampai dengan pukul 20:00 WIB diketahui bahwa kondisi jumlah penumpang rata-rata dan kondisi jalan lengang. Analog dengan keberangkatan yang ke-12, maka didapatkan waktu keberangkatan ke-18 adalah waktu keberangkatan ke-17 (18:40:06 WIB) ditambah nilai eigen (interval waktu keperiodikan) yang disesuaikan dengan kondisi jalan lengang dan penumpang rata-rata (kondisi antara pukul 19:00 WIB sampai dengan 20:00 WIB). Diketahui nilai eigen dalam sistem ini adalah  $BKS(30,2; 38,6; 59,5)$  sehingga kita gunakan interval waktu yang bersesuaian adalah 30,2 menit artinya sama dengan 30 menit 12 detik. Jadi waktu keberangkatan yang dipilih adalah pukul 19:10:18 WIB.



Sedangkan pada interval pukul 19:00 WIB sampai dengan 20:00 yang lain adalah keberangkatan ke-19 dan ke-20, dengan cara yang sama didapatkan keberangkatan ke-18 dan ke-19 berturut-turut adalah pukul 19:40:30 WIB dan 20:10:42 WIB.

- f. Keberangkatan ke-21 ( $k = 21$ ), analog dengan keberangkatan yang ke-12 didapatkan keberangkatan yang ke-21 berikut ini. Menurut *Tabel 5.10*, antara pukul 20:00 WIB sampai dengan pukul 21:30 WIB diketahui bahwa kondisi jumlah penumpang sedikit dan kondisi jalan lengang. Analog dengan keberangkatan yang ke-12, maka didapatkan waktu keberangkatan ke-21 adalah waktu keberangkatan ke-20 (20:10:42 WIB) ditambah nilai eigen (interval waktu keperiodikan) yang disesuaikan dengan kondisi jalan lengang dan penumpang sedikit (kondisi antara pukul 20:00 WIB sampai dengan 21:30 WIB). Diketahui nilai eigen dalam sistem ini adalah  $BKS(30,2; 38,6; 59,5)$ . Karena kondisi jalan lengang, maka kita dapat memilih waktu interval keberangkatan tercepat, normal, atau waktu paling lama. Karena kondisi penumpang sedikit, untuk efektifitas maka diambil jadwal yang interval waktu tempuh lama untuk menghasilkan frekuensi yang sedikit (d disesuaikan dengan kondisi penumpang yang sedikit). Sehingga dapat digunakan interval waktu yang bersesuaian adalah 59,5 menit, artinya sama dengan 59 menit 30 detik. Jadi waktu keberangkatan yang dipilih adalah pukul 21:11:02 WIB.

Sehingga, dapat disusun sebuah jadwal keberangkatan di Halte Monjali 2 untuk jalur 2B dalam bentuk tabel berikut ini.



Tabel 5.12 Waktu Saat Keberangkatan Waktu Aktivitas Kabur BRT Trans Jogja dari  $\tilde{x}_{108}(k)$  (Halte Monjali 2 ke Halte Terminal Jombor)

| Keberangkatan $\tilde{x}_{108}(k)$ ,<br>untuk $k =$ | Pukul        |
|---|--------------|
| 1   | 06:25:24 WIB |
| 2   | 07:16:48 WIB |
| 3   | 07:55:24 WIB |
| 4   | 08:34:00 WIB |
| 5   | 09:12:36 WIB |
| 6   | 09:51:12 WIB |
| 7   | 10:29:48 WIB |
| 8   | 11:08:24 WIB |
| 9   | 11:47:03 WIB |
| 10  | 12:25:36 WIB |
| 11  | 13:04:12 WIB |
| 12  | 14:03:42 WIB |
| 13  | 15:03:12 WIB |
| 14  | 16:02:42 WIB |
| 15  | 17:02:12 WIB |
| 16  | 18:01:42 WIB |
| 17  | 18:40:06 WIB |
| 18  | 19:10:18 WIB |
| 19  | 19:40:30 WIB |
| 20  | 20:10:42 WIB |
| 21  | 21:11:02 WIB |

Dari hasil tersebut, dapat diketahui bahwa kondisi jalan sangat mempengaruhi waktu keberangkatan. Jika kondisi jalan lengang, maka kita dapat mengatur waktu sesuai dengan kebutuhan fluktuatif jumlah penumpang yang ada



di halte. Akan tetapi, jika kondisi jalan macet, maka kita tidak bisa mengatur waktu sesuai dengan kebutuhan fluktuatif jumlah penumpang yang ada di halte berdasar waktu tertentu yang bergantung pada waktu sebelumnya. Sebagai contoh perhatikan kondisi berikut ini.

- a. Diasumsikan keadaan halte dan jalan pada keberangkatan Trans Jogja  $\tilde{x}_{38}(k)$  (keberangkatan dari Halte Senopati ke Tentara Pelajar pada jalur 1B) untuk keberangkatan pertama ( $k = 1$ ) sampai keberangkatan yang keempat ( $k = 4$ ) terinci sebagai berikut.

Tabel 5.13 Klasifikasi Kondisi Jalan dan Banyaknya Penumpang di Halte berdasar Waktu Tertentu pada Keberangkatan  $\tilde{x}_{38}(k)$

|                                 |                       |                       |                      |                      |
|---------------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|
| Keberangkatan<br>ke-<br>Keadaan | <b>1</b>              | <b>2</b>              | <b>3</b>             | <b>4</b>             |
| <b>(Halte, Jalan)</b>           | (sedikit,<br>lengang) | (sedikit,<br>lengang) | (normal,<br>lengang) | (banyak,<br>lengang) |
| <b>Penentuan Waktu</b>          | Maksimum              | Normal                | Normal               | Normal               |

Berdasarkan asumsi tersebut didapatkan tabel keberangkatan Trans Jogja dari Halte Senopati untuk jalur 1B sebagai berikut.

Tabel 5.14 Waktu Saat Keberangkatan Waktu Aktivitas Kabur Keberangkatan BRT Trans Jogja dari  $\tilde{x}_{38}(k)$

|                     |           |          |          |          |
|---------------------|-----------|----------|----------|----------|
| k                   | 1         | 2        | 3        | 4        |
| $\tilde{x}_{38}(k)$ | 7: 02 WIB | 7: 41WIB | 8: 19WIB | 8: 58WIB |

k = keberangkatan

- b. Diasumsikan keadaan halte dan jalan pada keberangkatan Trans Jogja  $\tilde{x}_{175}(k)$  (keberangkatan yang ke- $k$  dari Halte UAD ke Halte Terminal Giwangan pada



jalur 4A ) untuk keberangkatan pertama ( $k = 1$ ) sampai keberangkatan yang keempat ( $k = 4$ ) terrinci sebagai berikut.

Tabel 5.15 Klasifikasi Kondisi Jalan dan Banyaknya Penumpang di Halte berdasar Waktu Tertentu pada Keberangkatan  $\tilde{x}_{175}(k)$

|                          |                  |                  |                 |                 |
|--------------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| Keberangkatan ke-Keadaan | <b>1</b>         | <b>2</b>         | <b>3</b>        | <b>4</b>        |
| <b>(Halte, Jalan)</b>    | (sedikit, Macet) | (sedikit, Macet) | (normal, Macet) | (banyak, Macet) |
| <b>Penentuan Waktu</b>   | Maksimum         | Maksimum         | Maksimum        | Maksimum        |

Berdasarkan asumsi tersebut didapatkan tabel keberangkatan Trans Jogja dari Halte UAD untuk jalur 4A sebagai berikut.

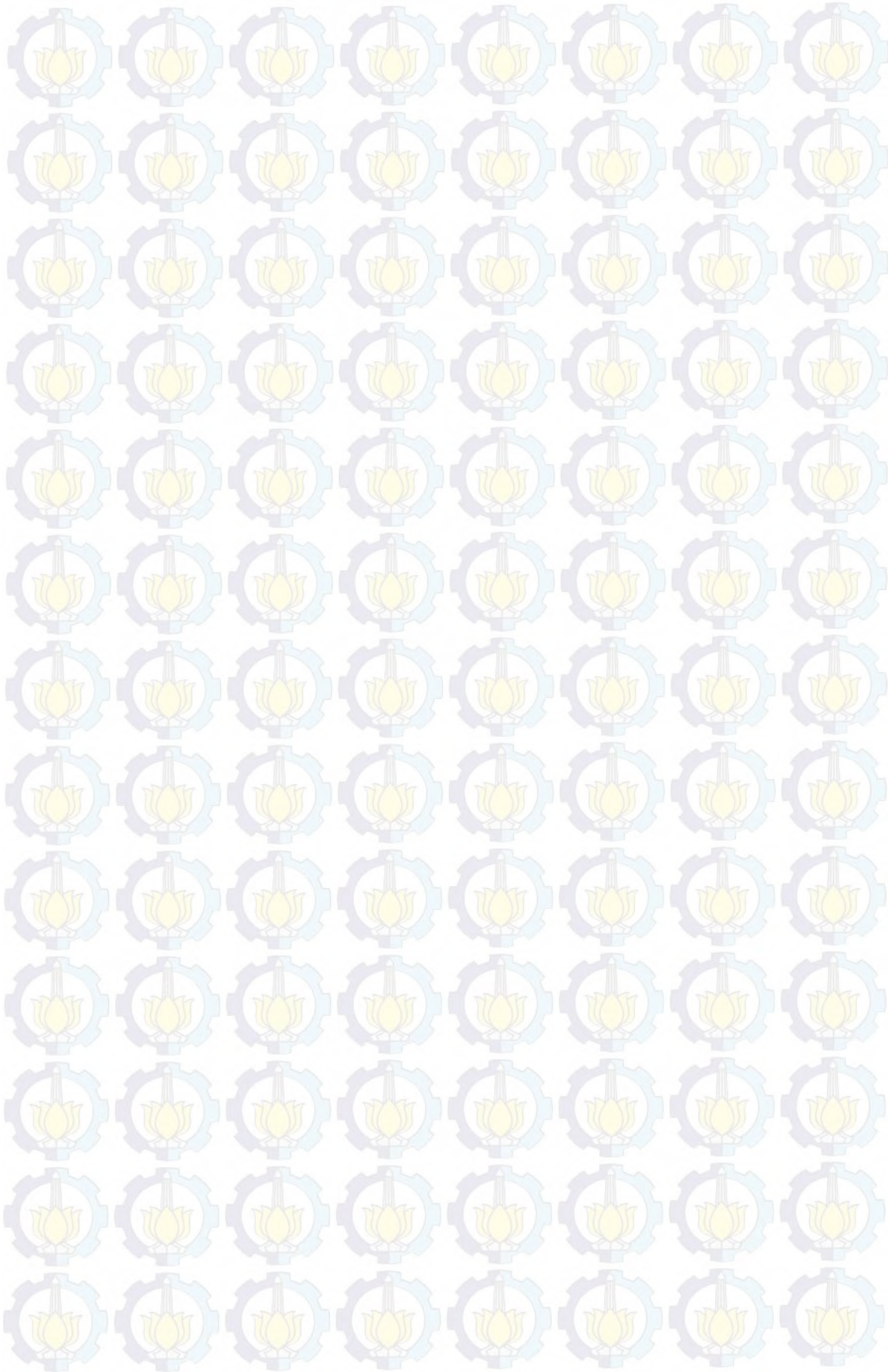
Tabel 5.16 Waktu Saat Keberangkatan Waktu Aktivitas Kabur Keberangkatan BRT Trans Jogja dari  $\tilde{x}_{175}(k)$

|                      |          |          |           |           |
|----------------------|----------|----------|-----------|-----------|
| k                    | 1        | 2        | 3         | 4         |
| $\tilde{x}_{175}(k)$ | 8: 22WIB | 9: 22WIB | 10: 21WIB | 11: 21WIB |

k = keberangkatan

Dari pembahasan di atas, pendekatan aljabar max-plus bilangan kabur telah memberikan suatu pemodelan dinamika jaringan transportasi *BRT* dengan waktu aktivitas kabur bentuknya analog dengan sistem dinamika diskrit. Dengan model yang diperoleh ini, dengan memanfaatkan konsep nilai dan vektor eigen dapat dibahas sifat periodik antar waktu keberangkatan *BRT*. Waktu aktivitas kabur dalam jaringan transportasi *BRT* dengan sifat periodik seperti di atas belum dibahas dalam Subiono (2000) dan Rudhito (2011).







## BAB 6

### KESIMPULAN DAN SARAN

Setelah dilakukan pembahasan, simulasi, dan analisa, pada bab ini dilakukan penarikan kesimpulan dan saran.

#### 6.1 Kesimpulan

Teori aljabar max-plus bilangan *fuzzy* memberikan solusi keperiodikan interval keberangkatan sistem jaringan transportasi publik Trans Jogja yang terintegrasi antar trayek/jalur sebagai berikut ini.

Nilai eigen max-plus bilangan kabur  $\lambda_{\max}(\tilde{A}) = BKS(30,2; 38,6; 59,5)$  dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut,

$$\mu_{\lambda_{\max}(\tilde{A})}(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } x \leq 30,2 \\ \frac{x - 30,2}{8,4} & \text{untuk } 30,2 \leq x \leq 38,6 \\ \frac{38,6 - x}{20,9} & \text{untuk } 38,6 \leq x \leq 59,5 \\ 0 & \text{untuk } 59,5 \leq x \end{cases}$$

Sebagai catatan “ $\lambda_{\max}(\tilde{A})$ ” dalam hal ini dimaksudkan sama seperti  $\lambda(\tilde{A})$  yang ada pada buku Subiono (2015). Lambang  $\lambda_{\max}(\tilde{A})$  merupakan nilai eigen dari suatu matriks persegi yang elemen-elemennya berupa bilangan kabur.

Nilai eigen ini merupakan durasi waktu aktifitas kabur dari keperiodikan keberangkatan Trans Jogja. Dengan didapatkan  $BKS(30,2; 38,6; 59,5)$  dapat dibuat suatu jadwal yang dapat mengikuti fluktuatif lalulintas jalan dan kondisi penumpang. Jika kondisi jalan masing-masing keadaan diketahui langang, normal, macet, maka dapat dipilih interval waktu keberangkatan berturut-turut 30 menit lebih 12 detik, 38 menit lebih 36 detik, dan 59 menit lebih 30 detik. Berdasarkan kondisi banyaknya penumpang, dapat dibuat jadwal dengan kemungkinan sebagai berikut. Jika kondisi jalan langang dan kondisi penumpang berturut-turut sedikit, rata-rata dan banyak, maka dapat dibuat keperiodikan dipilih interval waktu keberangkatan berturut-turut 30 menit lebih 12 detik, 38 menit lebih 36 detik, dan 59 menit lebih 30 detik. Jika kondisi jalan normal dan kondisi penumpang berturut-



turut sedikit, rata-rata dan banyak, maka dapat hanya dapat dibuat keperiodikan dipilih interval waktu keberangkatan 38 menit lebih 36 detik dan 59 menit lebih 30 detik. Jika kondisi jalan macet dan kondisi penumpang berturut-turut sedikit, rata-rata dan banyak, maka dapat hanya dapat dibuat keperiodikan dipilih interval waktu keberangkatan 59 menit lebih 30 detik. Beberapa hal di atas dapat dijadikan sebagai rekomendasi untuk Dinas Perhubungan, Komunikasi dan Informatika Pemerintah Daerah Istimewa Yogyakarta terhadap varian cara pembuatan jadwal Trans Jogja yang didasarkan pada fluktuatif kondisi jalan dan banyaknya penumpang.

## 6.2 Saran

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada tesis ini, beberapa saran yang dapat digunakan untuk pengembangan selanjutnya diantaranya yaitu:

- a. Pada penelitian ini, pembahasan sistem jaringan transportasi *BRT* aljabar max-plus bilangan *fuzzy* segitiga, pada penelitian selanjutnya dapat digunakan bilangan *fuzzy* trapezium, gaussian, kuadratik dan eksponensial.
- b. Perlunya dibahas lagi penentuan indikator kemacetan di ruas jalan dan banyaknya penumpang di masing-masing halte untuk penentuan jadwal yang lebih realistis dalam menentukan bilangan *fuzzy* yang digunakan.
- c. Untuk penelitian selanjutnya, pengambilan data waktu tempuh Trans Jogja sebaiknya dilakukan dengan metode-metode statistika yang dapat diuji kebenarannya. Data yang ditampilkan akan lebih baik jika ditampilkan data waktu tempuh Trans Jogja dalam beberapa kurun waktu tertentu.
- d. Dari hasil simulasi yang diperoleh, untuk penelitian selanjutnya dapat dilanjutkan sampai dibuat *time table* (Jadwal) keberangkatan untuk seluruh halte, sehingga *time table* dapat dimanfaatkan untuk Dinas Perhubungan, Komunikasi dan Informatika Pemerintah Daerah Istimewa Yogyakarta sebagai operasional Trans Jogja.



## DAFTAR PUSTAKA

Alfiah, Siti. (2011), *Pemodelan Jaringan Kereta Rel Listrik (KRL) Menggunakan Aljabar Max-Plus*, Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Arifuddin, Umardhana. (2008), *Analisis Pelayanan yang Diberikan oleh Bus Trans Jogja Terhadap Kepuasan Pelanggan Ditinjau dari Dimensi Kualitas Jasa*, Tesis, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta (2013), *Statistik Lingkungan Hidup D.I.Yogyakarta 2013; Transportasi Data BPS Yogyakarta 2013*, BPS D.I.Yogyakarta, Yogyakarta.

Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta (2014a), *Statistik Daerah Istimewa Yogyakarta 2014; Laju Pertumbuhan Penduduk Per Tahun Di DIY pada Periode 2000-2010 Kembali Meningkatkan Diatas 1 Persen, Setelah Dua Dekade Sebelumnya yang Selalu Di Bawah 1 Persen*, BPS D.I.Yogyakarta, Yogyakarta.

Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta (2014b), *Statistik Daerah Istimewa Yogyakarta 2014; Wisatawan Domestik yang Berkunjung Ke DIY Masih Mendominasi dari Sisi Jumlah, Sementara Wisatawan Asing yang Berkunjung Sebagian Besar Berasal dari Negara-Negara Di Kawasan Asia dan Eropa Terutama dari Negara Belanda dan Jepang*, BPS D.I.Yogyakarta, Yogyakarta.

Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta (2014c), *Jumlah Kendaraan Bermotor yang Terdaftar Menurut Jenisnya di D.I. Yogyakarta*, BPS D.I.Yogyakarta, Yogyakarta.

Basuki, Imam, dan Siswadi. (2008), “Biaya Kemacetan Ruas Jalan Kota Yogyakarta”, *Jurnal Teknik Sipil UAJY*, Vol. 9, No. 1, hal. 71-80.

Chanas, S. and Zielinski, P. (2001), “Critical Path Analysis in The Network with Fuzzy Activity Times”, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 122. No. 1, hal 195–204.



Elka, Vivi Anita. (2010), *Evaluasi Kinerja Bus Trans Jogja*, Tugas Akhir, Universitas Atma Jaya, Yogyakarta.

Fahim, Kistosil, Subchan, dan Subiono. (2013), “Aplikasi Aljabar Max-Plus Pada Pemodelan dan Penjadwalan Busway yang Diintegrasikan dengan Kereta Api Komuter”, *Jurnal Teknik POMITS*, Vol. 1, No. 1, hal. 1-6.

Firdausi, Mutiara, dan Herijanto, Wahyu. (2013), “Evaluasi Kinerja Jalan Arteri Primer Jalan Raya Yogya-Solo Daerah Istimewa Yogyakarta”, *Jurnal Teknik POMITS*, Vol. 1, No. 1, hal. 1-6.

Idris, Zilhardi. (2009), “Kajian ‘Tingkat Kepuasan’ Pengguna Angkutan Umum Di DIY”, *Jurnal Dinamika Teknik Sipil*, Vol. 9, No. 2, hal. 189-196.

Kompas, “Pertahankan ‘Indonesia Mini’ di Yogyakarta”, Kompas, 8 Februari 2013. Sumber elektronik diakses dari: <http://nasional.kompas.com/read/2013/04/08/03164776/Pertahankan.Indonesia.Mini.di.Yogyakarta>. Diakses : Jumat, 27 Februari 2015 Pukul 13.03.

Lova, Isye Novranti. (2010), *Analisis Ketertarikan Penumpang Terhadap Angkutan Umum Perkotaan (Studi Kasus Bis Trans Jogja)*, Tugas Akhir, Universitas Atma Jaya, Yogyakarta.

Munawar, Ahmad, (2008), “Sustainable Urban Public Transport Planning in Indonesia, Case Studies in Yogyakarta and Jakarta”, *Sustainable Development in Indonesia: An Interdisciplinary Approach*, Indonesian Students’ Scientific Meeting Delft University, Netherland, 13-15 May 2008.

Munawar, Ahmad, (2011), *Dasar-dasar Teknik Transportasi*, Beta Offset, Yogyakarta.

Nurwan. (2013),”Solusi Sistem Persamaan Linear Max-Plus Interval Bilangan Fuzzy Trapesium”, *Prosiding Seminar Nasional Sains dan Matematika II*, Jurusan Pendidikan MIPA FKIP UNTAD, Sulawesi Tengah.

Radar Jogja, (2015), “2016, Transjogja Wajib Bus Baru”, Radar Jogja, 25 Januari 2015, Diakses melalui <http://www.radarjogja.co.id/blog/2015/01/25/2016-transjogja-wajib-bus-baru/> Diakses : Pada tanggal 27 Februari 2015, Pukul 13.00 WIB.



Rakhmawati, Nahlia. (2012), *Studi Perencanaan Jadwal Busway Di Surabaya menggunakan Aljabar Max-Plus*, Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Rudhito, M. Andy. (2011), *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya Pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian Kabur*, Disertasi, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Subiono. (2000), *On Classes of Min-Max-Plus Systems and Their Applications*, Disertasi, Technische Universiteit Delft, Delft.

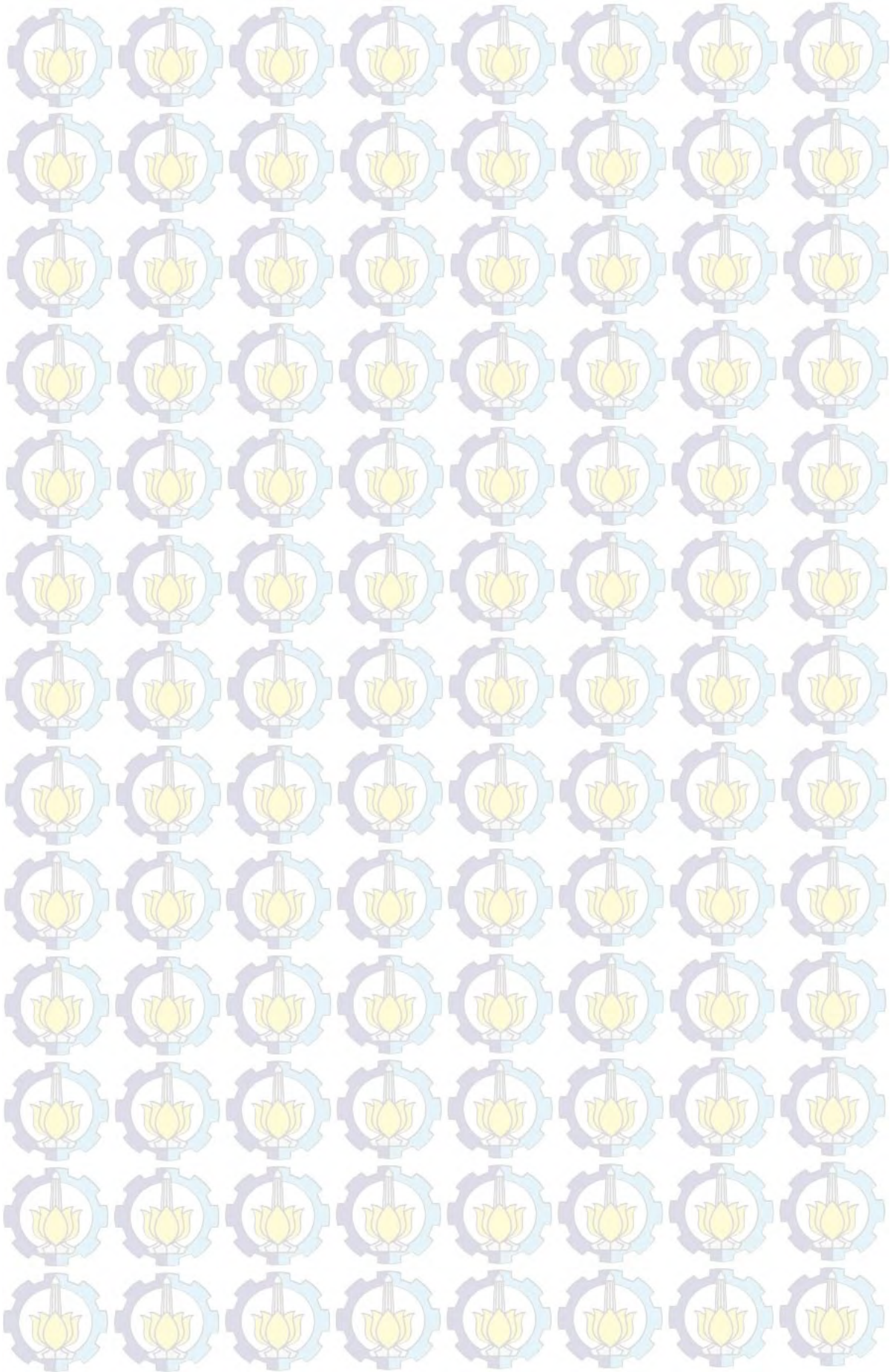
Subiono, (2015), *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Sugiyanto, Gito, dkk. (2011), “Pengembangan Model Biaya Kemacetan Bagi Pengguna Mobil Pribadi Di Daerah Pusat Perkotaan Yogyakarta”, *Jurnal Transportasi UGM*, Vol. 11, No.2, hal. 87-94.

Syukri, Siti Husna AINU, (2014), “Penerapan Customer Satisfaction Index (CSI) dan Analisis Gap pada Kualitas Pelayanan Trans Jogja”, *Jurnal Ilmiah Teknik Industri*, Vol. 13, No. 2, hal.103-113.

Winarni. (2009), *Penjadwalan Jalur Bus Dalam Kota dengan Aljabar Max-Plus*, Tesis, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.









## BIODATA

|                   |  |
|-------------------|--|
| 09 September 1991 | Lahir di Kediri, Jawa Timur, Indonesia.  |
| 2006-2009         | SMA Negeri 1 Sleman, Yogyakarta.   |
| 2009-2013         | Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta  |
|                   | Sarjana (S1) Pendidikan Matematika.<br>Topik Penelitian: Bidang Pembelajaran dalam Aljabar Trigonometri.   |
| 2014-2016         | Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya<br>Pasca Sarjana (S2) Matematika.<br>Topik Penelitian: Bidang Aljabar, Matematika Terapan dalam Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur. |
| Email             | <i>allexander.gumawang@gmail.com</i>   |



