



TESIS - SM 142501

**PENENTUAN BILANGAN DOMINASI SISI PADA GRAF HASIL
OPERASI PRODUK TENSOR**

**ROBIATUL ADAWIYAH
NRP 1214 201 019**

**DOSEN PEMBIMBING
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.**

**PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016**



THESIS - SM 142501

**THE DETERMINATION OF EDGE DOMINATION NUMBER ON
TENSOR PRODUCT OF GRAPH**

ROBIATUL ADAWIYAH
NRP 1214 201 019

SUPERVISOR
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2016

**PENENTUAN BILANGAN DOMINASI SISI PADA GRAF HASIL
OPERASI PRODUK TENSOR**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)

di

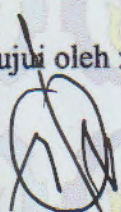
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :

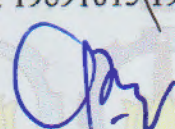
ROBIATUL ADAWIYAH
NRP. 1214 201 019

Tanggal Ujian : 13 Januari 2016
Periode Wisuda : Maret 2016

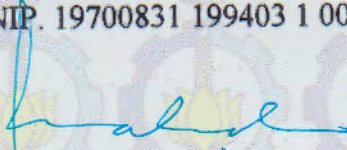
Disetujui oleh :


Dr. Darmaji, S.Si., M.T.
NIP. 19691015199412 1 001


(Pembimbing)


Dr. Imam Mukhlas, S.Si., M.T.
NIP. 19700831 199403 1 003

(Penguji)


Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
NIP. 19620407 198713 1 005

(Penguji)


Dr. Drs. Chairul Imron, Ml.Komp.
NIP. 19611115 198703 1 001

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana


Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

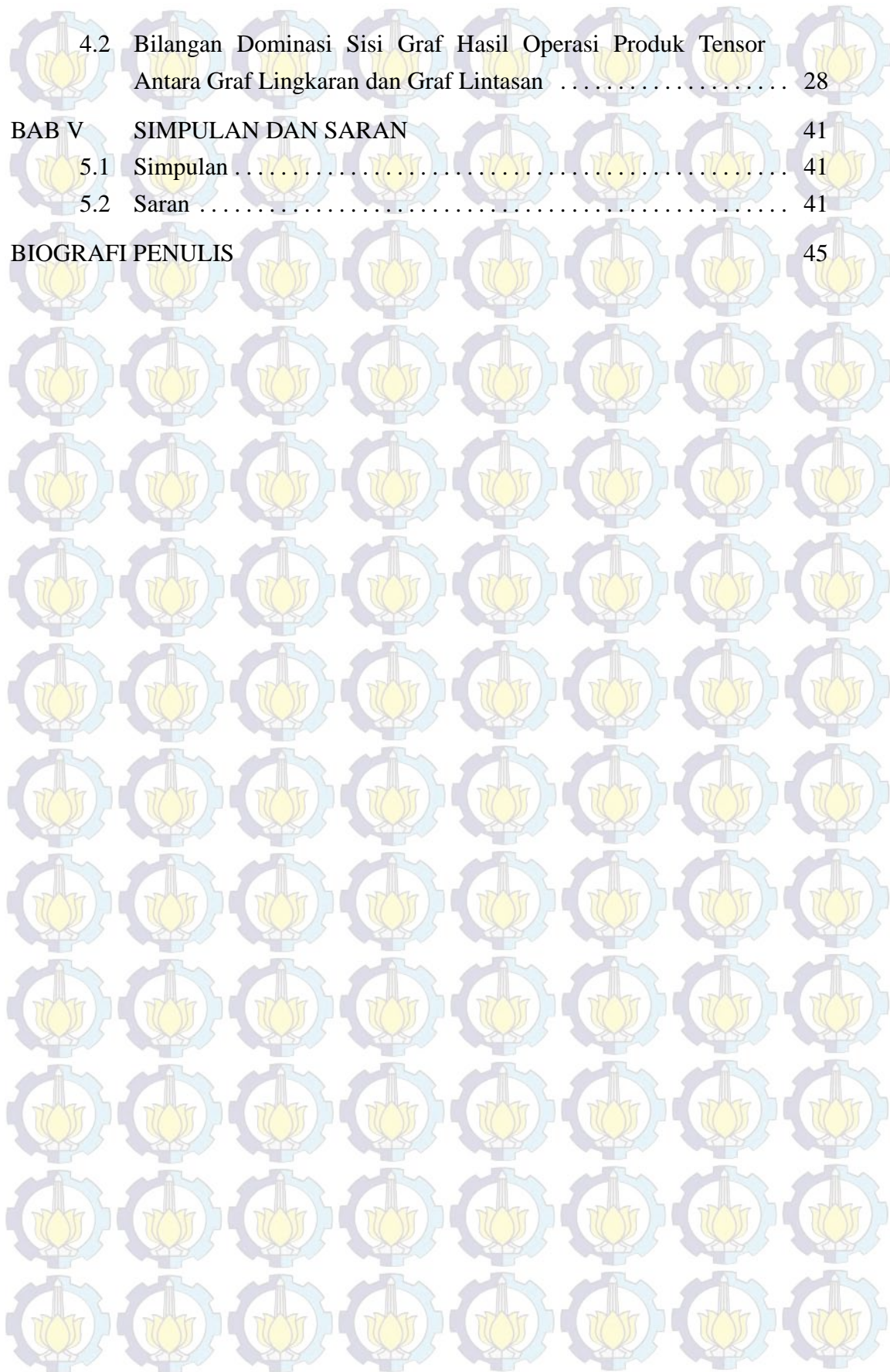




DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
TITLE PAGE	iii
PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR SIMBOL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	3
BAB II KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Terminologi Dasar Graf	5
2.2 Jenis - Jenis Graf	9
2.2.1 Graf Lengkap	9
2.2.2 Graf Lintasan	10
2.2.3 Graf Lingkaran	10
2.3 Operasi Produk Tensor	10
2.4 Himpunan Sisi yang Mendominasi dan Bilangan dominasi Sisi ...	12
BAB III METODA PENELITIAN	13
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	15
4.1 Bilangan Dominasi Sisi Graf Hasil Operasi Produk Tensor Antara Graf Lengkap dan Graf Lintasan	16

4.2	Bilangan Dominasi Sisi Graf Hasil Operasi Produk Tensor Antara Graf Lingkaran dan Graf Lintasan	28
BAB V SIMPULAN DAN SARAN		41
5.1	Simpulan	41
5.2	Saran	41
BIOGRAFI PENULIS		45



DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Representasi Graf Permasalahan Jembatan Konisberg	1
Gambar 2.1	(a) Graf dengan 4 <i>Isolated Vertex</i> , (b) Graf Reguler 7	6
Gambar 2.2	(a) Graf dengan <i>Loop</i> , (b) Graf Sederhana	6
Gambar 2.3	Graf Non-trivial dengan 6 simpul	7
Gambar 2.4	Graf dengan <i>Radius</i> 2 dan <i>Diameter</i> 2	7
Gambar 2.5	Dua Graf Isomorfis	8
Gambar 2.6	Graf dengan Matriks Ketetanggaanya	8
Gambar 2.7	Isomorfisma dalam Graf	9
Gambar 2.8	(a) Graf Lengkap K_4 , (b) Graf Lengkap K_6	9
Gambar 2.9	Graf Lintasan P_n	10
Gambar 2.10	Graf Lingkaran C_n	10
Gambar 2.11	(a) Graf Lingkaran C_3 , (b) Graf Lintasan P_3 , (c) Graf Hasil Operasi <i>Tensor Product</i> $C_3 \otimes P_3$	11
Gambar 2.12	(a) Graf Lintasan P_3 , (b) Graf Lingkaran C_3 , (c) Graf Hasil Operasi <i>Tensor Product</i> $P_3 \otimes C_3$	11
Gambar 2.13	Contoh Himpunan Pendominasi Sisi dengan Bilangan Pendominasi sisi 3	12
Gambar 4.1	Contoh Himpunan Dominasi Simpul dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Simpul	15
Gambar 4.2	Contoh Himpunan Sisi yang Mendominasi dengan Sisi-Sisi bercetak Tebal Merupakan Sisi Elemen Himpunan Sisi yang Mendominasi	16
Gambar 4.3	Graf Hasil Operasi Produk Tensor $K_n \otimes P_2$	17
Gambar 4.4	Graf Hasil Operasi $K_5 \otimes P_2$ dengan $\gamma' = 4$	18
Gambar 4.5	Graf Hasil Operasi Produk Tensor $K_n \otimes P_3$	19
Gambar 4.6	Graf Hasil Operasi Produk Tensor $K_n \otimes P_4$	20
Gambar 4.7	Graf Hasil Operasi $K_5 \otimes P_4$ dengan $\gamma' = 5$	21
Gambar 4.8	Graf Hasil Operasi $K_n \otimes P_m$ dengan $m \equiv 0 \pmod{3}$	23
Gambar 4.9	Graf Hasil Operasi $K_n \otimes P_m$ dengan $m \equiv 2 \pmod{3}$	26
Gambar 4.10	Graf Hasil Operasi $C_n \otimes P_2$	28

Gambar 4.11	Graf Hasil Operasi Produk Tensor $C_n \otimes P_3$	29
Gambar 4.12	Graf Hasil Operasi Produk Tensor $C_n \otimes P_4$	31
Gambar 4.13	Graf Hasil Operasi Produk Tensor $C_n \otimes P_3$	36

DAFTAR SIMBOL

G	:	Graf G
$G(V, E)$:	Graf G dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E
$V(G)$:	Himpunan simpul dari graf G
$E(G)$:	Himpunan sisi dari graf G
$ G $:	<i>Order</i> (banyaknya simpul) graf G
$\ G\ $:	<i>Size</i> (banyaknya sisi) graf G
$\delta(G)$:	Derajat minimum graf G
$\Delta(G)$:	Derajat maksimum graf G
$d(u, v)$:	Jarak dari simpul u ke simpul v
$diam(G)$:	Diameter graf G
$rad(G)$:	<i>Radius</i> graf G
\otimes	:	Operator produk tensor
S	:	<i>Dominating set</i> (himpunan dominasi)
S'	:	<i>Edge dominating set</i> (himpunan dominasi sisi)
$\gamma(G)$:	<i>Domination number</i> (bilangan dominasi)
$\gamma'(G)$:	<i>Edge domination number</i> (bilangan dominasi sisi)
$\gamma'_c(G)$:	<i>Edge domination number of component</i> (bilangan dominasi sisi <i>komponen</i>)
C_n	:	Graf lingkaran order n
K_n	:	Graf lengkap order n
P_n	:	Graf lintasan order n

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt. atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul

”Bilangan Dominasi Sisi pada Graf Hasil Operasi Produk Tensor”

dengan baik. Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Dalam penyelesaian tesis ini, tidak dapat dipungkiri bahwa penulis sering menemui beberapa kendala dalam pengerjaannya. Namun, berkat bimbingan, arahan, bantuan serta dukungan dari berbagai pihak, akhirnya penulis dapat menyelesaikan tesis ini dengan baik. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada semua pihak, terutama kepada yang terhormat:

1. Bapak Dr. Darmaji, S.Si., M.T. selaku dosen pembimbing atas segala bantuan, bimbingan, arahan dan motivasinya dalam mengerjakan Tesis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
2. Bapak Dr. Imam Mukhlas, S.Si., M.T., Dr. Mahmud Yunus, M.Si. dan Dr. Drs. Chairul Imron, MI.Komp. selaku dosen penguji atas semua kritik dan saran yang telah diberikan demi perbaikan Tesis ini.
3. Ibu Dr. Dwi Ratna S., S.Si., M.T. selaku dosen wali yang telah membimbing dan motivasi selama menempuh pendidikan magister.
4. Bapak Dr. Subiono, M.S. selaku Ketua Program Studi Pascasarjana Matematika ITS yang telah memberi bimbingan serta arahan selama menempuh pendidikan magister.
5. Bapak Dr. Imam Mukhlas, S.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika FMIPA ITS yang telah mendidik penulis baik di dalam maupun di luar perkuliahan serta Bapak dan Ibu staf Tata Usaha Jurusan Matematika ITS.
7. Kedua orang tua Bapak H. Suryadi dan Hj. Halimatus Sa'diyah, terima kasih atas perhatian doa dan segala dukungannya, beserta Mas Zelya

Agustian Irawan, terima kasih atas kesetiaan, kesabaran, dukungan, motivasi, perhatian, waktu dan doa yang telah diberikan selama penulis menempuh studi di ITS.

8. Keluarga besar Pascasarjana Matematika ITS 2014 dan warga keputih 3C 67 yang telah menemani, membantu, mendoakan, dan memberikan semangat kepada penulis

9. Pemerintah Republik Indonesia yang telah memberikan dukungan materil melalui beasiswa BUKLN (Beasiswa Unggulan Kerjasama Luar Negeri) sehingga penulis bisa menempuh pendidikan magister matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember tanpa was-was akan kesulitan biaya pendidikan, serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa dalam Tesis ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan untuk kesempurnaan Tesis ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru khususnya dalam bidang teori graf.

Surabaya, Januari 2016

Penulis

BILANGAN DOMINASI SISI PADA GRAF HASIL OPERASI PRODUK TENSOR

Nama Mahasiswa : Robiatul Adawiyah
NRP : 1214 201 019
Pembimbing : Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

ABSTRAK

Graf G adalah suatu himpunan graf tak berarah berhingga yang terdiri atas pasangan terurut (V, E) dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong yang elemennya disebut simpul dan himpunan $E(G)$ yang elemennya disebut sisi. *Edge Dominating set* (S') pada graf G adalah himpunan bagian E sedemikian setiap sisi yang bukan elemen E bertetangga dengan sedikitnya satu sisi dalam E . Kardinalitas minimum antara *edge dominating set* (himpunan sisi yang mendominasi) pada graf G disebut *edge domination number* (bilangan dominasi sisi) dari graf G dan dinotasikan $\gamma'(G)$. Produk tensor dua graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$, dinotasikan oleh $G = G_1 \otimes G_2$ dengan banyaknya himpunan simpul $|V| = |V_1| \times |V_2|$ dan dua buah simpul dalam V pada graf G yaitu (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) akan bertetangga dalam graf hasil operasi produk tensor $G_1 \otimes G_2$ jika $u_1v_1 \in E_1$ dan $u_2v_2 \in E_2$. Pada penelitian ini akan dikaji bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap dan graf Lintasan serta graf Lingkaran dan graf Lintasan.

Kata kunci: Bilangan Dominasi Sisi, Produk Tensor, Graf Lintasan, Graf Lingkaran, Graf Lengkap.

THE EDGE DOMINATION NUMBER ON TENSOR PRODUCT OF GRAPH

Name : Robiatul Adawiyah
NRP : 1214 201 019
Supervisor : Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

ABSTRACT

Let G be a finite undirected graph consist of ordered pair (V, E) with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. An edge dominating set (S') of G is subset E such that every edge not in E is adjacent to some edge in E . The edge domination number of G is the minimum cardinality taken over all edge dominating sets of G denoted by $\gamma'(G)$. Let $G_1(V_1, E_1)$ and $G_2(V_2, E_2)$ be two connected graph. The tensor product of G_1 and G_2 , denoted by $G_1 \otimes G_2$ is a graph with the cardinality of vertex $|V| = |V_1| \times |V_2|$ and two vertices (u_1, u_2) and (v_1, v_2) in V are adjacent in $G_1 \otimes G_2$ if $u_1v_1 \in E_1$ and $u_2v_2 \in E_2$. In this research, we are focus on the problem of verifying an edge domination number on the tensor product of complete graph and path and also on the tensor product of cycle and path.

Keywords: Edge Domination Number, Tensor Product, Path Graph, Cycle Graph, Complete Graph.

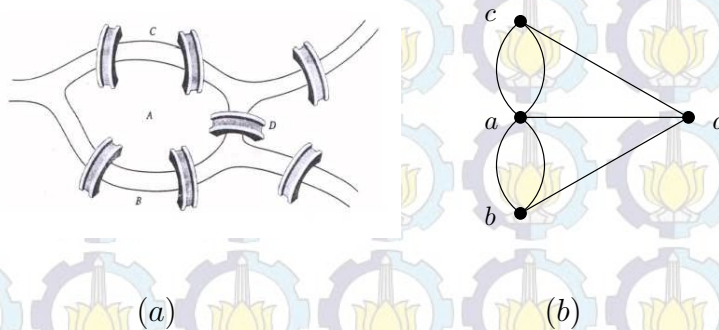
BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah *Mother of Science* yang merupakan induk dari segala ilmu dan menopang perkembangan ilmu-ilmu lainnya [11]. Realita menunjukkan bahwa manusia tidak akan pernah lepas dari perhitungan dan model matematis dalam kesehariannya. Matematika merupakan salah satu ilmu dasar yang berpengaruh besar terhadap kemajuan sains dan teknologi. Salah satu pokok bahasan dalam Matematika yang masih relatif muda usianya adalah Teori Graf.

Pada abad ke - 18, Euler mengenalkan dasar pengembangan Teori Graf. Pada saat itu di kota Koniksberg, terdapat sungai yang membelah kota menjadi empat daratan yang terpisah. Daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan seperti diilustrasikan pada Gambar 1.1 (a). Permasalahan yang muncul adalah warga Kota Koniksberg ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal. Euler membuktikan, dengan menggunakan suatu bentuk representasi tertentu, bahwa hal itu tidak mungkin. Bentuk representasi itu berkembang menjadi teori graf yang kita kenal saat ini. Representasi graf dari permasalahan Jembatan Koniksberg dapat dilihat pada Gambar 1.1 (b).



Gambar 1.1: Representasi Graf Permasalahan Jembatan Konisberg

Salah satu topik menarik dalam teori graf ialah himpunan yang mendominasi (*dominating set*). Himpunan yang mendominasi (S) pada graf G adalah himpunan bagian dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S . Kardinalitas minimum di antara himpunan yang

mendominasi pada graf G disebut bilangan dominasi dari graf G dan dinotasikan $\gamma(G)$ [6].

Sejarah *dominating set* dimulai ketika penggemar catur Eropa mempelajari masalah "dominasi ratu" seperti yang telah dijelaskan pada [3]. Dalam masalah ini, dominasi digunakan untuk menentukan banyaknya ratu sedemikian setiap ratu bisa mendominasi atau menyerang setiap posisi dengan sekali perpindahan pada papan catur ukuran 8×8 . Dalam teori graf, ratu direpresentasikan sebagai simpul dan jalur perpindahan antar kotak pada papan catur dianggap sebagai sisi. Jumlah minimum ratu yang memungkinkan untuk tidak bertabrakan dengan ratu lainnya dengan satu langkah adalah serupa dengan bilangan dominasi dari sebuah himpunan dominasi di G . Manfaat penggunaan himpunan dominasi dan bilangan dominasi dalam kehidupan sehari-hari antara lain untuk menentukan posisi halte bus sekolah, menentukan posisi stasiun radio, survey lahan, dan sistem jaringan komputer. Oleh karena itu, studi mengenai bilangan dominasi telah berkembang sejak lama. Banyak usaha-usaha yang telah dilakukan dalam menentukan himpunan dominasi dan bilangan dominasi untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan.

Serupa dengan konsep himpunan yang mendominasi, terdapat variasi lain dalam pembahasan mengenai dominasi yaitu himpunan sisi yang mendominasi (*edge dominating set*) yang dikenalkan oleh Mitchell and Hedetniemi [7]. Himpunan bagian E dari sisi pada suatu graf G disebut sebagai himpunan sisi yang mendominasi dari G jika setiap sisi yang bukan elemen E bertetangga dengan sedikitnya satu sisi dalam E . Bilangan dominasi sisi (*edge dominating number*) dari G yang dinotasikan dengan $\gamma'(G)$ adalah kardinalitas minimum dari keseluruhan himpunan sisi yang mendominasi dari G .

Operasi antara dua graf merupakan salah satu cara untuk memperoleh bentuk graf baru. Salah satu operasi di dalam graf adalah operasi produk tensor. Operasi ini adalah suatu operasi dari dua graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$, dinotasikan oleh $G = G_1 \otimes G_2$ dengan kardinalitas dari himpunan simpul $|V| = |V_1| \times |V_2|$ dan dua buah simpul dalam V pada graf G yaitu (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) akan bertetangga dalam graf hasil operasi produk tensor $G_1 \otimes G_2$ jika $u_1v_1 \in E_1$ dan $u_2v_2 \in E_2$ [1].

Penelitian-penelitian sebelumnya yang terkait dengan bilangan dominasi diantaranya adalah Araya Chaemchan mendapatkan nilai dari bilangan dominasi sisi pada graf terhubung $\gamma'(G) \leq \frac{n}{2}$ dan untuk setiap graf terhubung G dengan jumlah simpul genap $\gamma'(G) = \frac{n}{2}$ jika dan hanya jika graf tersebut isomorfis dengan K_n atau $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$ [4]. S.Arumugam dan S. Velammal dalam penelitiannya yang berjudul "Edge Domination In Graph" menunjukkan bilangan dominasi sisi pada graf lingkaran adalah $\gamma'(C_p) = \lceil \frac{p}{3} \rceil$ [10] dan berdasarkan V.R Kulli dalam *paper-*

nya yang berjudul *The Neighbourhood of Edge Domination in Graph* menyebutkan bahwa $\gamma'(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$ dan $\gamma'(K_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ [12]. Salah satu topik mengenai bilangan dominasi sisi pada suatu graf yang belum diteliti adalah bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor. Terdapat beberapa jenis graf-graf sederhana yang tergolong *well known graph*. Pada penelitian ini, *well known graph* yang akan dikaji meliputi graf lengkap, graf Lingkaran dan graf Lintasan. Graf Lengkap akan dioperasikan dengan graf Lintasan dan graf Lingkaran akan dioperasikan dengan graf Lintasan menggunakan operator produk tensor, kemudian akan dikaji bilangan dominasi sisi dari masing-masing graf hasil operasi.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, masalah yang dibahas dalam usulan penelitian ini adalah:

1. Berapakah bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lintasan dengan graf Lingkaran.
2. Berapakah bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor dari graf Lintasan dengan graf Lengkap.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari usulan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lintasan dengan graf Lingkaran.
2. Mengetahui bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor dari graf Lintasan dengan graf Lengkap.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini antara lain:

1. Penelitian ini merupakan suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu dalam bidang teori graf, sehingga dapat dijadikan sebagai rujukan bagi para peneliti lain dalam menentukan bilangan dominasi sisi pada suatu graf maupun operasi dari dua buah graf. graf.
2. Dengan ditemukannya bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor maka diperoleh suatu pengetahuan baru dalam kajian mengenai bilangan dominasi sisi sehingga dapat digunakan sebagai suatu rujukan dalam pengaplikasiannya pada kehidupan maupun penelitian-penelitian lain yang terkait dengan bilangan dominasi sisi.

3. Dengan ditemukannya bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor maka diperoleh suatu pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup bilangan dominasi sisi pada

4. Memberikan motivasi kepada pembaca untuk melakukan penelitian tentang bilangan dominasi sisi pada graf-graf yang lain atau dengan pengembangan konsep.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Terminologi Dasar Graf

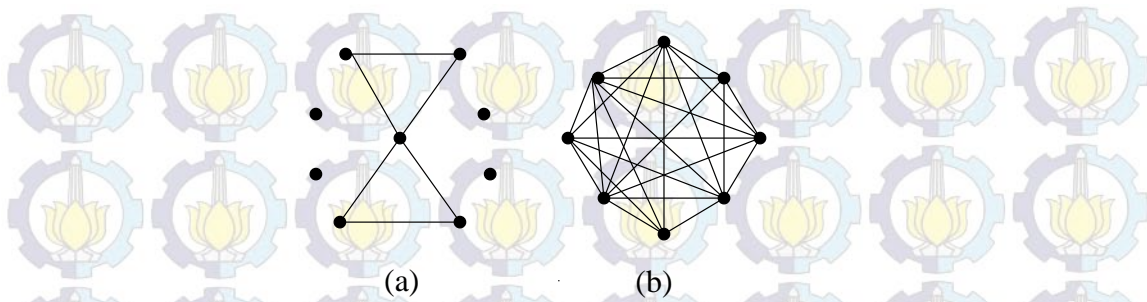
Sebuah graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dan ditulis dengan notasi $G(V, E)$. Notasi $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong yang elemennya disebut simpul (*vertex*), sedangkan $E(G)$ adalah himpunan boleh kosong yang elemennya disebut sisi (*edge*) dan menghubungkan sepasang simpul. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buahpun, tetapi harus memiliki minimal satu simpul [5]. Bila $V(G)$ adalah himpunan berhingga maka graf yang demikian disebut dengan graf berhingga (*finite graph*).

Graf yang hanya terdiri dari satu simpul disebut graf trivial, sedangkan graf dikatakan non-trivial jika paling sedikit terdiri dari dua simpul. Jumlah simpul pada suatu graf G disebut dengan *order* dan dinotasikan dengan $|G|$, sedangkan jumlah sisi dari suatu graf G disebut dengan *size* dan dinotasikan dengan $\|G\|$ [5].

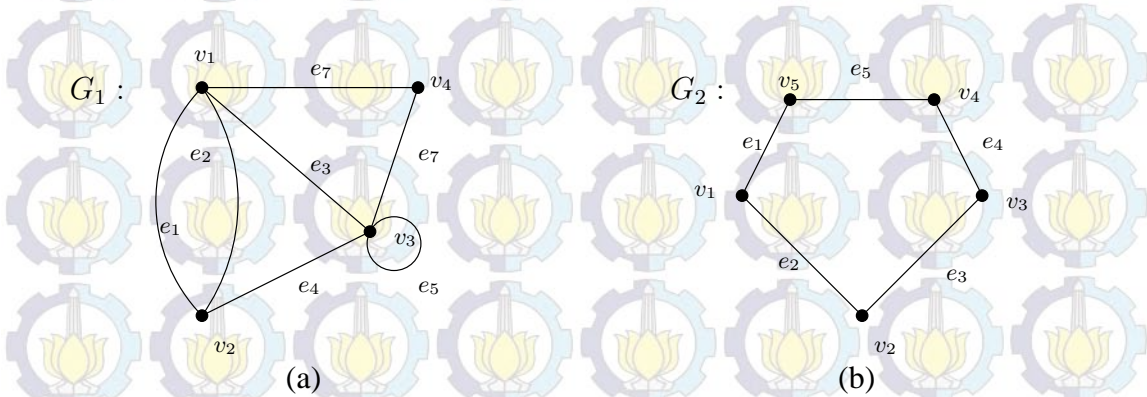
Simpul u dikatakan bertetangga (*adjacent*) dengan simpul v jika terdapat sebuah sisi e diantara u dan v yaitu $e = uv$, atau dapat dinyatakan bahwa sisi e menempel (*incident*) dengan kedua simpul u dan v . Derajat (*degree*) pada setiap simpul didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang menempel pada simpul tersebut. Jika setiap simpul pada graf G mempunyai derajat sama dengan n maka graf G disebut graf reguler n . Jika tidak maka graf tersebut dikatakan non reguler. Simpul v pada suatu graf G yang memiliki derajat 0 disebut *isolated vertex*, sedangkan sebuah simpul yang mempunyai derajat satu disebut daun, simpul ujung atau *pendant*. Derajat terkecil (*minimum degree*) dari graf G adalah derajat minimum dari semua titik pada graf G dan dinotasikan dengan $\delta(G)$. Derajat terbesar (*maximum degree*) graf G adalah derajat maksimum dari semua titik pada graf G dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$ [3]. Pada Gambar 2.1 (a) ditunjukkan contoh graf dengan 4 *isolated vertex* dan Gambar 2.1 (b) ditunjukkan contoh graf reguler 7.

Sebuah sisi yang menghubungkan pasangan simpul yang sama atau dengan kata lain sebuah sisi yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut dengan (*loop*). Dua atau lebih sisi yang mempunyai simpul-simpul ujung yang sama disebut dengan sisi ganda. Sebuah graf yang di dalamnya tidak terdapat loop dan sisi ganda disebut dengan graf sederhana [5].

Berdasarkan Gambar 2.2. G_1 bukan graf sederhana karena memiliki loop yaitu



Gambar 2.1: (a) Graf dengan 4 *Isolated Vertex*, (b) Graf Reguler 7



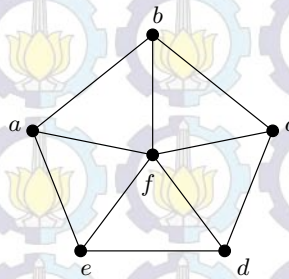
Gambar 2.2: (a) Graf dengan *Loop*, (b) Graf Sederhana

sisi e_5 dan memiliki sisi ganda yaitu e_1 dan e_2 . Sebuah graf G_2 merupakan graf sederhana. Misalkan G graf dengan himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pada graf G , jalan (*walk*) J dari simpul v_0 ke titik v_n adalah barisan berhingga dan bergantian dari simpul dan sisi $v_0 - e_0 - v_1 - \dots - v_{n-1} - e_{n-1} - v_n$ yang dimulai dan diakhiri dengan simpul, dengan sisi $e_i = v_i v_{i+1}$, untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Panjang dari jalan $v_0 - e_0 - v_1 - \dots - v_{n-1} - e_{n-1} - v_n$ adalah banyaknya sisi pada barisan tersebut. Simpul v_0 dan v_n disebut simpul-simpul ujung dari jalan tersebut. Jika pada jalan J berlaku $v_0 = v_n$, maka J disebut jalan *tertutup* [5].

Jalan J disebut lintasan (*path*) bila semua simpul di J berbeda. Sedangkan jika setiap sisinya yang berbeda maka jalan tersebut dinamakan jejak (*trail*). Jejak tertutup disebut sirkuit. Sirkuit yang semua titiknya berlainan disebut siklus [5].

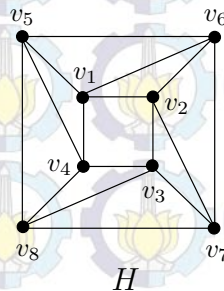
Pada Gambar 2.3, $a - f - b - f - c - d - c$ merupakan jalan, $a - b - f - c - d - e - a$ merupakan jalan tertutup (*close - walk*) $a - f - c - d - f - b$ merupakan jejak (*trail*), $a - e - f - c$ merupakan lintasan (*path*), $a - f - e - d - c - f - b - a$ merupakan sirkuit, dan $a - f - b - c - d - e - a$ merupakan lingkaran (*cycle*).

Jarak $d(u, v)$ dari simpul u ke simpul v adalah panjang lintasan terpendek dari simpul u ke simpul v . Eksentrisitas $ecc(v)$ pada sebuah simpul v dalam graf G



Gambar 2.3: Graf Non-trivial dengan 6 simpul

adalah jarak terjauh dari simpul v ke setiap simpul di G . Jari-jari (*radius*) yang dinotasikan $rad(G)$ dari graf G adalah eksentrisitas minimum di antara simpul-simpul di G . Simpul v disebut simpul pusat jika $ecc(v) = r(G)$, sedangkan diameter dari graf G adalah jarak terpanjang di antara sebarang dua simpul pada G dan dinotasikan $diam(G) = \max\{d(v_i, u_j) | v_i, u_j \in V(G)\}$ [2]. Misalkan graf H pada Gambar 2.4, $d(v_2, v_8) = 2$, $ecc(v_1) = 2$, $r(H) = 2$ dan $diam(H) = 2$.

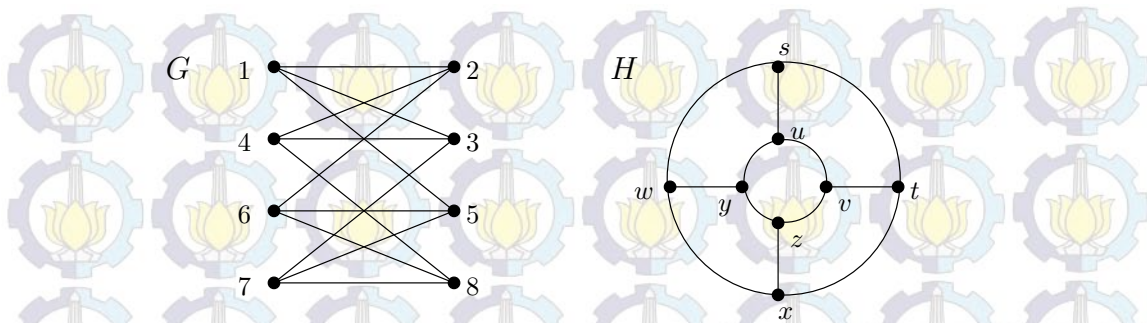


Gambar 2.4: Graf dengan *Radius* 2 dan Diameter 2

Dua buah graf dikatakan isomorfis jika kedua graf tersebut mempunyai struktur yang sama namun berbeda cara pemberian label simpul-simpul dan sisi-sisinya, atau cara menggambarannya. Gambar 2.5 merupakan salah satu contoh dari dua buah graf yang isomorfis.

Dua graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis jika terdapat suatu fungsi bijektif $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ sedemikian hingga simpul u dan v bertetangga dalam $G_1 \iff \phi(u)$ dan $\phi(v)$ bertetangga dalam G_2 . Fungsi ϕ dinamakan sebuah fungsi isomorfis. Notasi dari dua buah graf G_1 dan G_2 yang isomorfis adalah $G_1 \cong G_2$ [5]. Jika graf G_1 dan G_2 isomorfis, maka kedua graf tersebut selalu memenuhi 3 syarat sebagai berikut :

- a. Jumlah simpul $G_1 =$ jumlah simpul G_2 (jumlah simpul yang sama).



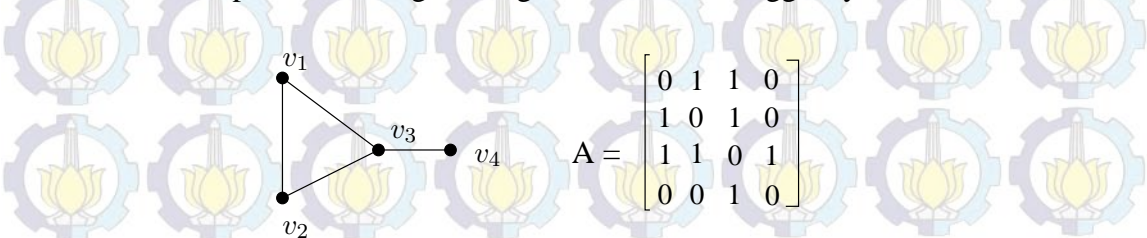
Gambar 2.5: Dua Graf Isomorfis

- b. Jumlah sisi $G_1 =$ jumlah sisi G_2 (jumlah sisi yang sama).
- c. Memiliki jumlah simpul berderajat tertentu yang sama dalam graf G_1 dan G_2 .

Selain ketiga cara yang telah disebutkan, terdapat cara lain untuk menunjukkan bahwa kedua graf G_1 dan G_2 isomorfis. Keisomorfisan dari dua buah graf dapat dilihat dari matriks ketetanggaan kedua graf tersebut sama. Matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) dari sebuah graf G dengan himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ merupakan matriks berordo $n \times n$, yaitu $A_{n \times n} = [a_{ij}]$, dengan:

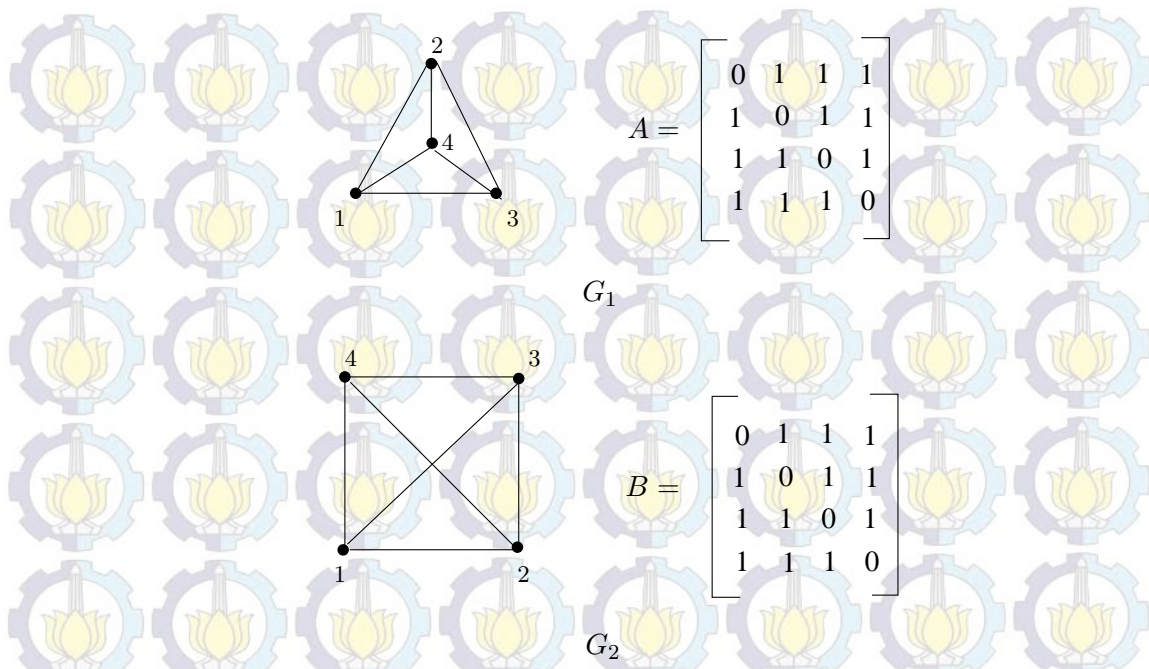
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$$

Matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) digunakan untuk menyatakan graf dengan cara menyatakan jumlah sisi yang menghubungkan simpul-simpulnya. Jumlah baris dan kolom matriks ketetanggaan sama dengan jumlah simpul graf. Gambar 2.6 merupakan contoh graf dengan matriks ketetangganya.



Gambar 2.6: Graf dengan Matriks Ketetangganya

Contoh keisomorfisan graf berdasarkan matriks ketetangannya dapat dilihat pada Gambar 2.7. Graf G_1 dan G_2 isomorfis karena memenuhi ketiga syarat yang telah disebutkan dan matriks ketetangannya juga sama.



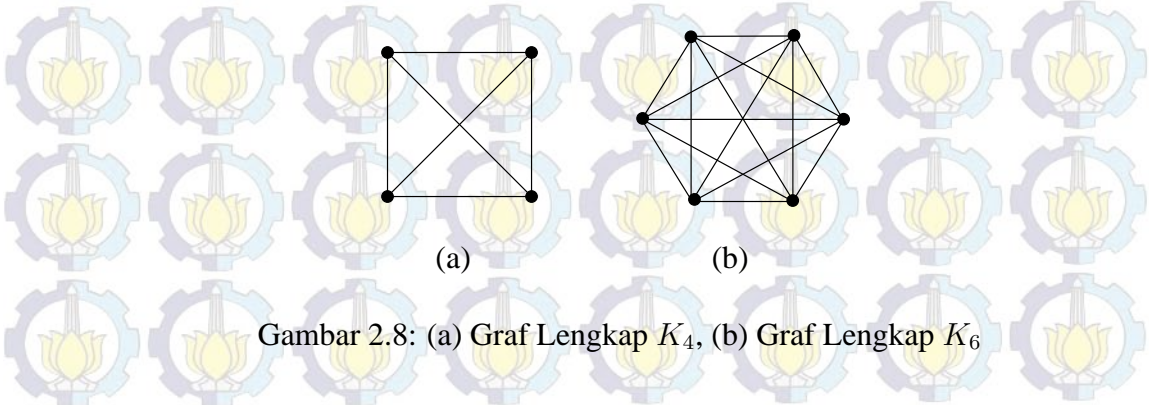
Gambar 2.7: Isomorfisma dalam Graf

2.2 Jenis - Jenis Graf

Terdapat beberapa jenis graf-graf sederhana yang tergolong *well known graph*. Pada penelitian ini, *well known graph* yang akan dikaji meliputi graf lengkap, graf Lingkaran, graf Lintasan, dan graf bintang. Berikut definisi dari masing-masing graf tersebut.

2.2.1 Graf Lengkap

Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n . Berdasarkan Gambar 2.8, jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $n(n - 1)/2$ sisi [5]. Contoh dari graf lengkap bisa dilihat pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8: (a) Graf Lengkap K_4 , (b) Graf Lengkap K_6

2.2.2 Graf Lintasan

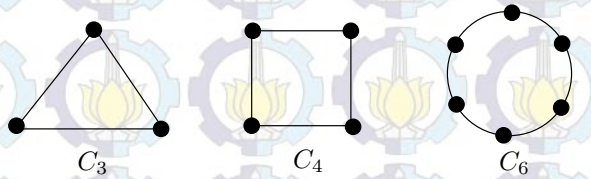
Graf Lintasan yang dinotasikan dengan P_n merupakan graf terhubung sederhana yang membentuk lintasan yang terdiri dari n simpul dan $n - 1$ sisi dengan $n \geq 2$ [5]. Kedua simpul ujung pada graf ini merupakan *pendant*, yaitu simpul dengan derajat sama dengan satu, sedangkan simpul yang lain berderajat dua.



Gambar 2.9: Graf Lintasan P_n

2.2.3 Graf Lingkaran

Graf Lingkaran adalah sebuah graf terhubung yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dapat dibentuk dari graf lintasan dengan simpul awal dan simpul akhir yang sama. Graf Lingkaran dinotasikan dengan C_n dengan n merupakan banyaknya simpul pada lingkaran, $n \geq 3$ [5]. Gambar 2.10 merupakan contoh graf Lingkaran masing-masing dengan 3, 4 dan 5 simpul.



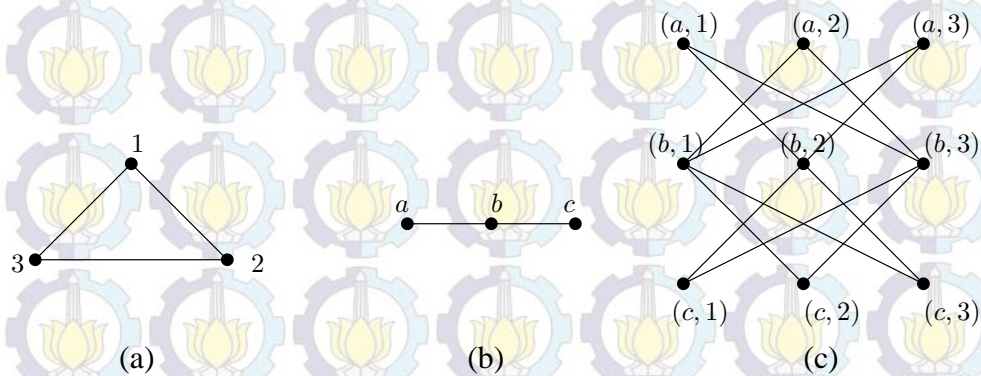
Gambar 2.10: Graf Lingkaran C_n

2.3 Operasi Produk Tensor

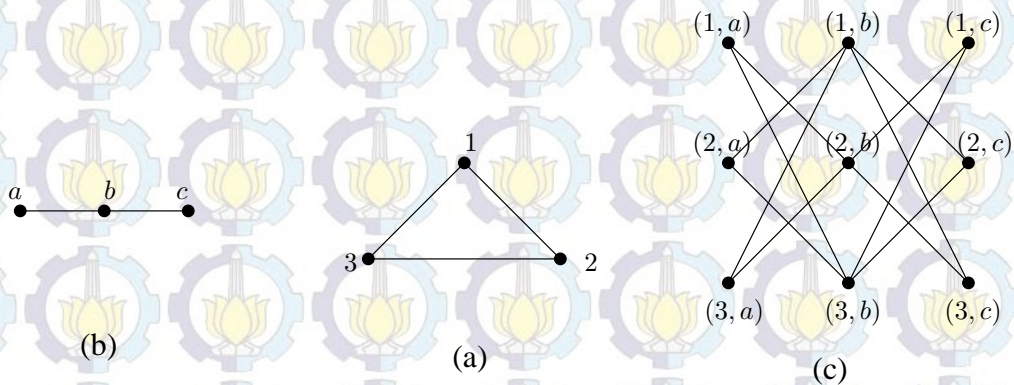
Definisi II.1. Tensor product (*produk tensor*) dua graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$, dinotasikan oleh $G = G_1 \otimes G_2$ dengan banyaknya himpunan simpul $|V| = |V_1| \times |V_2|$ dan dua buah simpul dalam V pada graf G yaitu (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) akan bertetangga dalam graf hasil operasi produk tensor $G_1 \otimes G_2$ jika $u_1v_1 \in E_1$ dan $u_2v_2 \in E_2$ Dengan kata lain, $d_{G_1}(u_1v_1) = 1$ dan $d_{G_2}(u_2v_2) = 1$. Untuk kejelasan, simpul-simpul hasil operasi produk tensor dinotasikan dengan (a, b) [1].

Gambar 2.11 merupakan contoh graf hasil operasi produk tensor dari Graf Lingkaran dan Graf Lintasan. Pada Gambar 2.11 (c) terdapat 9 simpul. Graf lingkaran yang dioperasikan terdiri atas 3 simpul dan graf lintasan terdiri dari 3 simpul. Dengan demikian $|V| = 3 \times 3 = 9$. Dapat dilihat pada Gambar 2.11 (c) simpul $(a, 1)$ dan simpul $(b, 2)$ bertetangga dengan dihubungkan oleh sebuah sisi. Simpul $(a, 1)$ dan simpul $(b, 2)$ bertetangga sebab pada graf lingkaran pada

Gambar 2.11 (a) simpul 1 dan simpul 2 bertetangga sedangkan pada graf lintasan Gambar 2.11 (b) simpul a dan simpul b bertetangga. Sehingga pada graf hasil operasi produk tensor, simpul $(a, 1)$ bertetangga dengan simpul $(b, 2)$. Serupa dengan simpul $(a, 1)$ dan simpul $(b, 2)$, simpul $(b, 1)$ dan simpul $(c, 2)$ juga bertetangga pada graf hasil operasi produk tensor sebab simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 pada graf lingkaran dan simpul b bertetangga dengan simpul c pada graf lintasan. Konsep yang serupa juga berlaku pada simpul-simpul yang lain pada graf hasil operasi produk tensor.



Gambar 2.11: (a) Graf Lingkaran C_3 , (b) Graf Lintasan P_3 , (c) Graf Hasil Operasi Tensor Product $C_3 \otimes P_3$

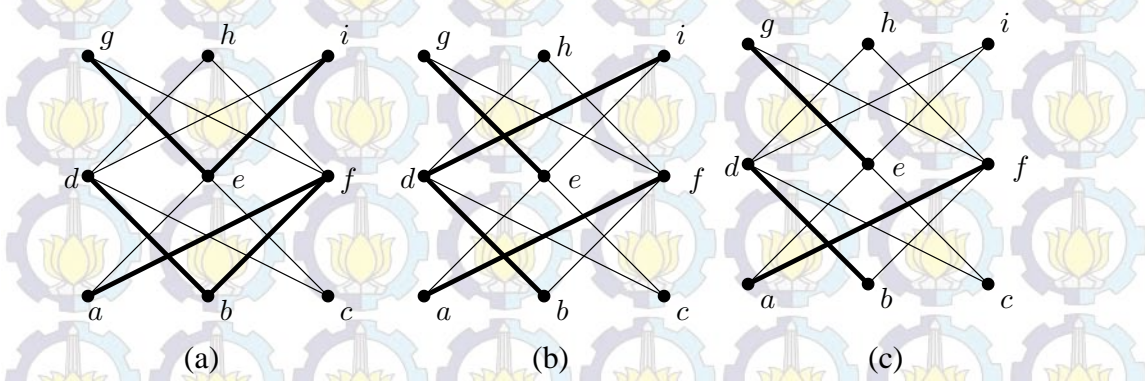


Gambar 2.12: (a) Graf Lintasan P_3 , (b) Graf Lingkaran C_3 , (c) Graf Hasil Operasi Tensor Product $P_3 \otimes C_3$

Selain itu, operasi produk tensor bersifat komutatif. Dimana graf hasil operasi produk tensor antara $G_1 \otimes G_2$ isomorfis dengan graf hasil operasi produk tensor antara $G_2 \otimes G_1$. Contoh dari sifat komutatif tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.11 dan Gambar 2.12. Graf hasil operasi produk tensor antara $C_3 \otimes P_3$ isomorfis dengan graf hasil operasi produk tensor antara $P_3 \otimes C_3$.

2.4 Himpunan Sisi yang Mendominasi dan Bilangan dominasi Sisi

Himpunan sisi yang mendominasi (*edge dominating set*) adalah himpunan bagian E dari sisi pada suatu graf G sedemikian hingga setiap sisi yang bukan elemen E bertetangga dengan beberapa sisi dalam E . Kardinalitas minimum di antara himpunan sisi yang mendominasi pada graf G disebut bilangan pendominasi sisi (*edge dominating number*) dari graf G dan dinotasikan $\gamma'(G)$ [10]. Gambar 2.13 merupakan contoh dari himpunan pendominasi sisi dengan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi adalah 3. Dengan kata lain, bilangan pendominasi sisi dari graf pada Gambar 2.13 adalah 3.



Gambar 2.13: Contoh Himpunan Pendominasi Sisi dengan Bilangan Pendominasi sisi 3

Gambar 2.13 (a) merupakan contoh dari himpunan sisi yang mendominasi dengan kardinalitas dari himpunan dominasi sisi sebesar 5. Berdasarkan Gambar 2.13 (a) sisi af mendominasi sisi eg ; sisi dh mendominasi sisi cd ; sisi bf mendominasi sisi fh ; sisi eg mendominasi sisi dh dan sisi ei mendominasi sisi fi . Sehingga didapatkan himpunan dominasi sisi yaitu $\{af, dh, bf, eg, ei\}$. Selanjutnya, pada Gambar 2.13 (b) dapat dilihat bahwa kardinalitas dari himpunan dominasi sisi adalah 4. Dari graf yang sama dapat ditemukan beragam variasi himpunan dominasi sisi. Namun fokus dari penelitian ini adalah mencari nilai dari kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi. Pada Gambar 2.13 (c), sisi af mendominasi sisi bf , fg dan fh ; sisi bd mendominasi sisi cd , di dan dh , sisi eg mendominasi sisi ae , ei dan ce . Himpunan dominasi sisi graf pada Gambar 2.13 (c) adalah $\{af, bd, eg\}$ dengan kardinalitas sebesar 3. Berdasarkan uraian tersebut, dapat disimpulkan bahwa bilangan dominasi sisi graf pada Gambar 2.13 adalah 3 karena kardinalitas minimum dari himpunan sisi yang mendominasi adalah 3.

BAB III METODA PENELITIAN

Berikut akan diuraikan beberapa tahapan penelitian yang akan digunakan atau dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian.

1. Pemahaman konsep dan studi literatur

Pada tahap ini dilakukan pemahaman konsep dan studi literatur dari berbagai referensi mengenai himpunan dominasi sisi dan bilangan dominasi sisi pada graf-graf sederhana serta graf-graf hasil operasi, khususnya operasi produk tensor.

2. Observasi

Pada tahap ini dilakukan observasi terhadap graf yang akan diteliti kemudian dikonstruksi graf hasil operasi produk tensor antara graf Lintasan, graf Lingkaran, dan graf Lengkap.

3. Penelitian

a. Mengkonstruksi graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap dan graf Lintasan serta graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran dan graf Lintasan.

b. Mengamati sisi-sisi pada graf hasil operasi yang berpeluang untuk menjadi elemen dari himpunan dominasi sisi.

c. Menentukan batas atas bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi.

d. mengurangi batas atas secara bertahap hingga diperoleh kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi.

e. Menentukan hipotesis bilangan dominasi sisi.

f. Membuktikan hipotesis bilangan dominasi dari masing-masing graf hasil operasi.

4. Evaluasi

Pada tahap ini dilakukan evaluasi terhadap analisa yang telah dikerjakan pada tahap penelitian, sehingga dapat diperoleh suatu simpulan.

5. Diseminasi hasil penelitian

Tahap diseminasi hasil penelitian meliputi presentasi pada seminar dan publikasi *paper* dalam prosiding atau jurnal internasional.

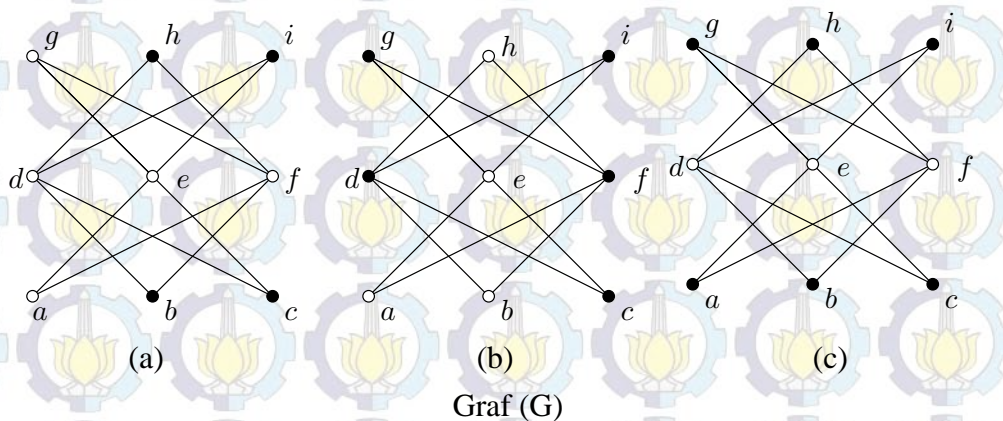
6. Penyusunan laporan

Laporan penelitian ditulis dalam sebuah tesis dengan sistematika penulisan yang telah ditentukan, yang meliputi: Bab 1. Pendahuluan, Bab 2. Kajian Pustaka dan Dasar Teori, Bab 3. Metoda Penelitian, Bab 4. Hasil dan Pembahasan, serta Bab 5. Simpulan dan Saran.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi dari graf lintasan P_m , graf Lingkaran C_n , dan graf Lengkap K_n . Operasi graf yang digunakan adalah operasi produk tensor antara graf lintasan P_m dengan graf lingkaran C_n dan antara graf lintasan P_m dengan graf Lengkap K_n . Bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf lintasan P_m dan graf Lengkap K_n dapat ditentukan untuk sebarang nilai n dan m . Namun, pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran C_n dan graf lintasan P_n untuk nilai n genap, graf hasil operasi produk tensor menghasilkan suatu graf yang *disconnected* (tidak terhubung) sehingga tidak dapat ditentukan bilangan dominasi sisinya. Pembahasan pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran C_n dan graf lintasan P_m difokuskan untuk nilai n ganjil. Sedangkan jika nilai n genap, maka pembahasan mengenai bilangan dominasi sisi difokuskan pada bilangan dominasi sisi dari graf *komponen* tersebut.



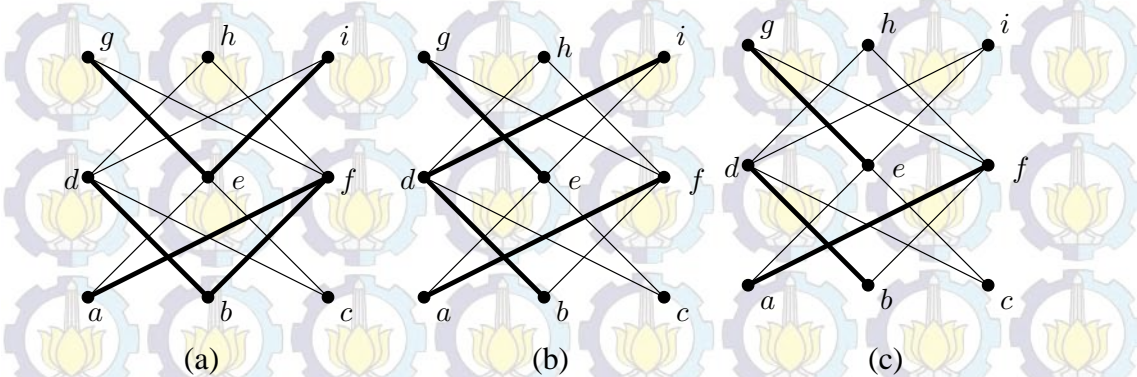
Gambar 4.1: Contoh Himpunan Dominasi Simpul dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Simpul

Sebelum dibahas bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor, terlebih dahulu akan dijelaskan mengenai dominasi sisi dan dominasi simpul. Dominasi sisi merupakan pengembangan dari dominasi simpul. Himpunan simpul yang mendominasi (S) pada graf G adalah himpunan bagian dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S .

Kardinalitas minimum di antara himpunan simpul yang mendominasi pada graf G disebut bilangan dominasi dari graf G dan dinotasikan $\gamma(G)$ [6]. Gambar 4.1 merupakan contoh dari dominasi simpul.

Berdasarkan Gambar 4.1, dapat dilihat terdapat beberapa himpunan simpul yang mendominasi. Pada Gambar 4.1 (a) himpunan simpul yang mendominasi adalah $S_1 = \{a, d, e, f, g\}$, pada Gambar 4.1 (b) himpunan dominasi simpul adalah $S_2 = \{a, b, e, h\}$, dan pada Gambar 4.1 (c) himpunan dominasi simpulnya adalah $S_2 = \{d, e, f\}$. Karena kardinalitas minimum diantara himpunan dominasi pada graf G adalah 3, maka bilangan dominasi simpul pada graf dalam Gambar 4.1 adalah $\gamma(G) = 3$. Sedangkan pada dominasi sisi, kajiannya bukan lagi banyaknya jumlah simpul minimum yang mendominasi, melainkan banyaknya sisi minimum yang bisa mendominasi sisi-sisi yang lainnya.

Himpunan sisi yang mendominasi (*edge dominating set*) adalah himpunan bagian E dari sisi pada suatu graf G sedemikian hingga setiap sisi yang bukan elemen E bertetangga dengan beberapa sisi dalam E . Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi sisi pada graf G disebut bilangan dominasi sisi (*edge dominating number*) dari graf G dan dinotasikan $\gamma'(G)$ [10]. Gambar 4.2 merupakan contoh dari dominasi sisi dengan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi sebesar 3.



Gambar 4.2: Contoh Himpunan Sisi yang Mendominasi dengan Sisi-Sisi bercetak Tebal Merupakan Sisi Elemen Himpunan Sisi yang Mendominasi

Setelah diuraikan pengertian dari bilangan dominasi sisi, berikut adalah pembahasan bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor.

4.1 Bilangan Dominasi Sisi Graf Hasil Operasi Produk Tensor Antara Graf Lengkap dan Graf Lintasan

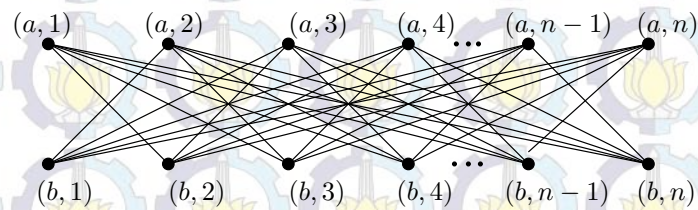
Graf Lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf Lintasan merupakan graf terhubung sederhana yang

membentuk lintasan, terdiri dari m simpul dan $m - 1$ sisi dengan $m \geq 2$ dimana kedua simpul ujung pada graf ini merupakan *pendant* sedangkan simpul yang lain berderajat dua. Graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap K_n dan graf Lintasan P_m untuk $n \geq 3$ menghasilkan suatu graf terhubung.

Sebelum kita mengkaji teorema yang berkaitan dengan bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap K_n dan graf Lintasan P_m untuk sebarang nilai n dan m , terlebih dahulu dikaji bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf lintasan dengan order yang kecil, yaitu graf lintasan order dua, tiga dan empat. Pembahasan tersebut akan disajikan dalam beberapa fakta. Selain itu, akan disajikan pula fakta mengenai pembagian bilangan dominasi sisi dalam modulo tiga. Berikut adalah pembahasan mengenai fakta-fakta tersebut.

Fakta 1.

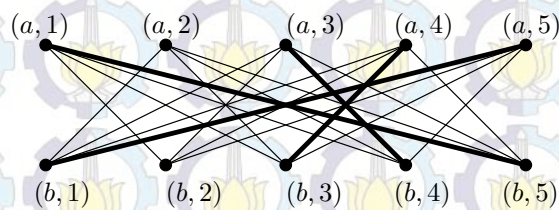
Fakta pertama adalah fakta mengenai bilangan dominasi sisi pada graf Lengkap order n dan graf Lintasan order dua. Graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order 2 dapat dilihat pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3: Graf Hasil Operasi Produk Tensor $K_n \otimes P_2$

Graf hasil operasi $K_n \otimes P_2$ terdiri dari $n(n - 1)$ sisi dan $2n$ simpul. Untuk menentukan nilai dari bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_2$ maka kita perlu mengamati sisi dengan derajat sisi paling besar. Derajat sisi maksimum pada graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_2$ adalah $\deg(u_1v_1) = \deg(u_1) + \deg(v_1) - 2 = 2n - 4$. Jadi, setiap sisi dengan derajat maksimum dapat mendominasi $2n - 3$ sisi termasuk dirinya sendiri. Misalkan sisi dengan degree maksimum merupakan salah satu anggota dari himpunan bilangan dominasi sisi dalam $K_n \otimes P_2$. Untuk n ganjil dan $n > 5$, jika kita mengambil sisi dengan derajat maksimum, maka hanya terdapat dua buah sisi dengan derajat maksimum sebagai anggota dalam himpunan dominasi sisi. Karena $K_n \otimes P_2$ terdiri dari $n(n - 1)$ sisi, jadi masih belum semua sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_2$ dapat didominasi oleh sisi dengan derajat maksimum. Jika kita perhatikan anggota dari himpunan dominasi sisi, diperlukan $2\left(\frac{n-1}{2} - 2\right)$ sisi dengan banyaknya sisi yang

dapat didominasi adalah $2n - 3 - 4i$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, (\frac{n-1}{2} - 2)$ dan dua buah sisi lainnya yang dapat 3 buah sisi. Jadi, total sisi yang dapat didominasi oleh himpunan dominasi sisi dengan anggota dari himpunan dominasi sisi adalah sisi dengan derajat tertinggi adalah $2(2n - 3) + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}-2} 2(2n - 3 - 4i) + 2 \cdot 3 = n(n - 1)$. Jumlah anggota dari himpunan dominasi sisi yang diperlukan untuk mendominasi keseluruhan sisi yang terdapat pada graf hasil operasi tensor produk antara graf Lengkap order n , n bilangan ganjil dan graf Lintasan order 2 adalah $|S'| = 2 + 2 \cdot (\frac{n-1}{2} - 2) + 2 = n - 1$. Untuk membuktikan bahwa $|S'| = n - 1$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi, digunakan suatu kontradiksi. Misalkan $|S'| = n - 2$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi. Jika, $|S'| = n - 2$ maka jumlah maksimal sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah $n(n - 1) - 3$ dan akan terdapat minimal tiga buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Jadi, kita membutuhkan minimal $n - 1$ buah sisi untuk mendominasi seluruh sisi pada graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_2$. Sama halnya untuk n genap, jika kita mengambil sisi dengan derajat terbesar, maka hanya terdapat dua buah sisi dengan derajat maksimum sebagai elemen himpunan dominasi sisi. Karena dua buah sisi tidak dapat mendominasi keseluruhan sisi dalam $K_n \otimes P_2$, maka masih diperlukan $n - 3$ sisi yang lainnya untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam $K_n \otimes P_2$. Jika $|S'| = n - 2$, maka minimal ada tiga buah sisi yang tidak dapat terdominasi. Dengan demikian, dibutuhkan $n - 1$ sisi untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam $K_n \otimes P_2$. Dapat disimpulkan bahwa kardinalitas minimum himpunan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order 2 adalah $\gamma'(K_n \otimes P_2) = n - 1$. Gambar 4.4 merupakan contoh graf hasil operasi produk tensor $K_5 \otimes P_2$ dengan kardinalitas minimum dari bilangan dominasi sisi sebesar 4.

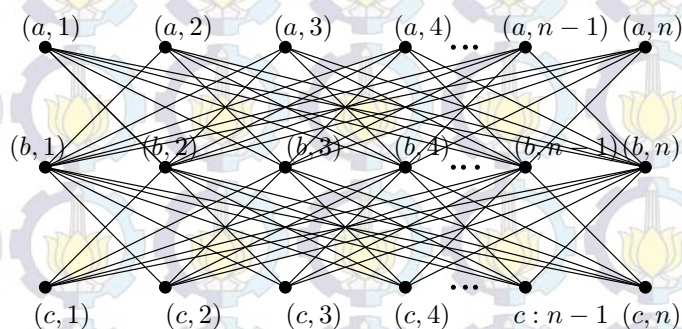


Gambar 4.4: Graf Hasil Operasi $K_5 \otimes P_2$ dengan $\gamma' = 4$

Fakta 2.

Fakta selanjutnya adalah fakta mengenai bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order tiga. Graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_3$ terdiri dari $2n(n - 1)$ sisi. Sesuai definisi dari

operasi produk tensor, simpul-simpul yang terdapat dalam graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_3$ misalnya (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) akan bertetangga jika $u_1v_1 \in E(K_n)$ dan $u_2v_2 \in E(P_3)$. Graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order tiga dapat dilihat pada Gambar 4.5.

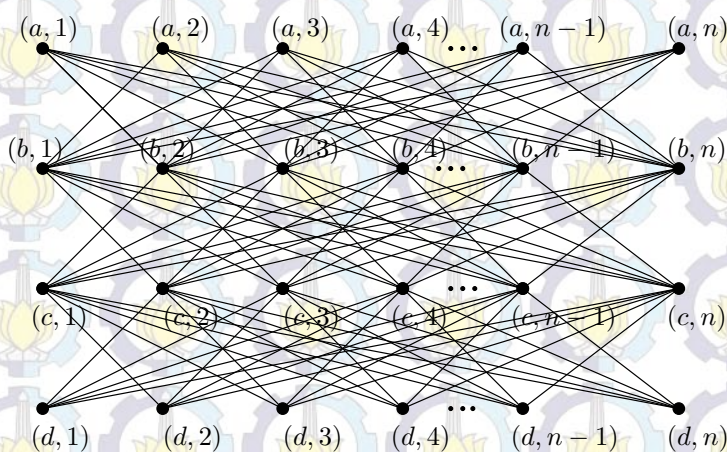


Gambar 4.5: Graf Hasil Operasi Produk Tensor $K_n \otimes P_3$

Derajat sisi terbesar pada $K_n \otimes P_3$ adalah $\deg(u_1v_1) = \deg(u_1) + \deg(v_1) - 2 = 3n - 5$. Jadi sisi dengan derajat maksimum dapat mendominasi $3n - 4$ sisi termasuk dirinya sendiri. Misalkan sisi dengan derajat maksimum merupakan anggota dari himpunan dominasi sisi. Maka hanya terdapat dua buah sisi dengan derajat maksimum yang bisa menjadi anggota himpunan dominasi sisi. Karena $K_n \otimes P_3$ terdiri dari $2n(n-1)$ sisi, jadi masih belum keseluruhan sisi dalam $K_n \otimes P_3$ dapat didominasi oleh dua buah sisi dengan derajat maksimum. Kita perlu memperhatikan sisi-sisi yang lainnya sebagai anggota himpunan dominasi sisi. Jika kita perhatikan, dibutuhkan $n - 4$ sisi dengan jumlah sisi yang bisa di dominasi yaitu $3n - 7 - 2i, i = 0, 1, 2, 3, \dots, (n - 5)$ dan dua buah sisi yang bisa mendominasi n buah sisi termasuk dirinya sendiri. Jumlah total sisi yang bisa didominasi oleh S' adalah $2(3n - 4) + \sum_{i=0}^{n-5} (3n - 7 - 2i) + 2n = 2n(n - 1)$. Jadi, jumlah minimum sisi yang diperlukan untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_3$ adalah $|S'| = 2 + n - 4 + 2 = n$ buah sisi. Misalkan $|S'| = n - 1$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi. Maka jumlah maksimal sisi yang bisa didominasi oleh S' adalah $2n^2 - 3n$ sisi. Tidak semua sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_3$ dapat didominasi oleh S' jika $|S'| = n - 1$. Terdapat minimal n buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Oleh karena itu, $|S'| = n$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi keseluruhan sisi dalam $K_n \otimes P_3$. Dapat disimpulkan, $\gamma'(K_n \otimes P_3) = n$.

Fakta 3.

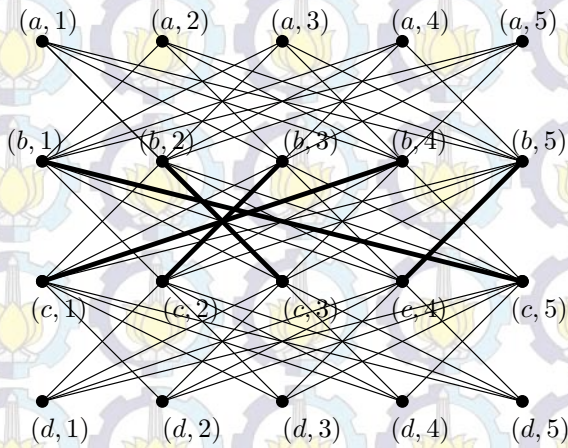
Fakta selanjutnya akan dipaparkan bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order 4 yang akan berguna dalam pembuktian teorema terkait bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order m . Graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_4$ terdiri dari $4n$ simpul dan $3n(n - 1)$ sisi. Misalkan $V(K_n) = \{u_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ merupakan himpunan simpul dalam graf Lengkap order n , $V(P_4) = \{v_j \mid j = 1, 2, 3, 4\}$ merupakan himpunan simpul dalam graf Lintasan order 4, $V(K_n \otimes P_4) = \{(v_j u_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n ; j = 1, 2, 3, 4\}$ merupakan himpunan simpul dalam graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap dan graf Lintasan order empat dan simpul (v_j, u_i) bertetangga dalam $K_n \otimes P_4$ jika $u_i u_{i+1} \in E(K_n)$ dan $v_j v_{j+1} \in E(P_4)$. Graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order empat dapat dilihat pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6: Graf Hasil Operasi Produk Tensor $K_n \otimes P_4$

Derajat sisi terbesar dalam $K_n \otimes P_4$ adalah $\deg(u_1 v_1) = \deg(u_1) + \deg(v_1) - 2 = 3n - 4$. Jadi setiap sisi dengan derajat maksimum dapat mendominasi $3n - 3$ sisi termasuk dirinya sendiri. Misalkan kita ambil sisi dengan derajat sisi terbesar sebagai anggota dari himpunan dominasi sisi. Maka akan terdapat n buah sisi dengan derajat terbesar sebagai anggota dari himpunan dominasi sisi. Jumlah sisi yang dapat didominasi oleh n buah sisi dengan derajat maksimum adalah $n(3n - 3) = 3n^2 - 3n$. Telah disebutkan sebelumnya, bahwa jumlah sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order 4 adalah $3n(n - 1) = 3n^2 - 3n$. Dapat dilihat bahwa keseluruhan sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_4$ dapat didominasi oleh n buah sisi

dengan derajat terbesar. Misalkan $|S'| = n$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi. Untuk membuktikan bahwa $|S'| = n$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi, kita gunakan kontradiksi. Misalkan $|S'| = n - 1$ merupakan kardinalitas minimum himpunan dominasi sisi. Maka jumlah sisi maksimal yang dapat didominasi oleh S' adalah $(n - 1)(3n - 3) = 3n^2 - 6n - 3 < 3n^2 - 3n$. Tidak semua sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_4$ dapat didominasi oleh S' . Jika $|S'| = n - 1$, terdapat minimal $3n - 3$ buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . jadi, kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi keseluruhan sisi dalam $K_n \otimes P_4$ adalah $|S'| = n$. Dapat disimpulkan bahwa jika diberikan graf Lengkap K_n dan graf Lintasan P_4 dengan masing-masing ordernya n dan 4, maka bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_4$ adalah $\gamma'(K_n \otimes P_4) = n$ untuk $n \geq 3$. Gambar 4.7 merupakan contoh graf hasil operasi produk tensor $K_5 \otimes P_4$ dengan kardinalitas minimum dari bilangan dominasi sisi sebesar 5.



Gambar 4.7: Graf Hasil Operasi $K_5 \otimes P_4$ dengan $\gamma' = 5$

Fakta 4.

Beberapa penjelasan mengenai bilangan dominasi sisi yang telah dibahas sebelumnya menjelaskan bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf lintasan order m , dimana $m = 2, 3$ dan 4. Berikut ini akan dibahas bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap dan graf Lintasan untuk sebarang nilai n dan m . Pembahasan mengenai bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap dengan graf Lintasan akan dibagi ke dalam 3 kasus. Pengelompokan ini didasarkan pada kesamaan pola bilangan dominasi sisi pada tiap-tiap kasus.

- a. $\gamma'(K_n \otimes P_4) = n, \gamma'(K_n \otimes P_7) = 2n, \gamma'(K_n \otimes P_{10}) = 3n, \gamma'(K_n \otimes P_{13}) = 4n,$

$\gamma'(K_n \otimes P_{16}) = 5n$, dan seterusnya.

b. $\gamma'(K_n \otimes P_5) = 2n - 1$, $\gamma'(K_n \otimes P_8) = 3n - 1$, $\gamma'(K_n \otimes P_{11}) = 4n - 1$,
 $\gamma'(K_n \otimes P_{14}) = 5n - 1$, $\gamma'(K_n \otimes P_{17}) = 6n - 1$, dan seterusnya.

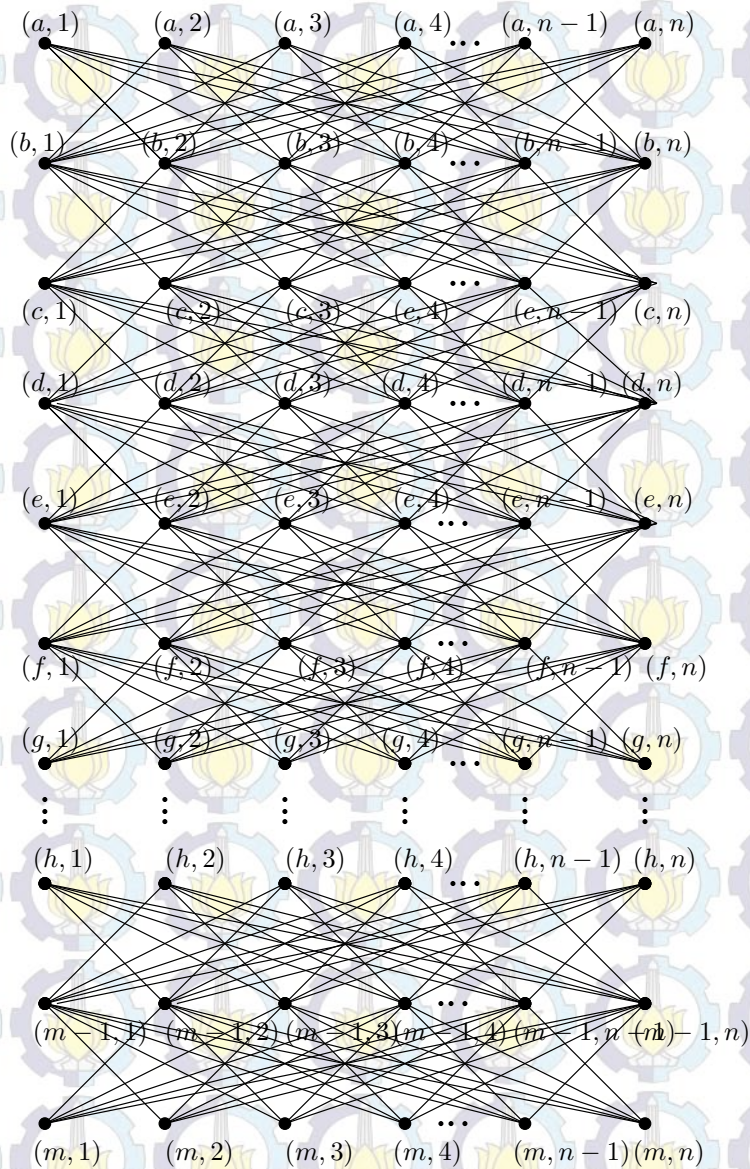
c. $\gamma'(K_n \otimes P_6) = 2n$, $\gamma'(K_n \otimes P_9) = 3n$, $\gamma'(K_n \otimes P_{12}) = 4n$, $\gamma'(K_n \otimes P_{15}) = 5n$,
 $\gamma'(K_n \otimes P_{18}) = 6n$, dan seterusnya.

Berdasarkan penjelasan tersebut, diketahui bahwa graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf lintasan order m dikelompokkan berdasarkan nilai m . Untuk nilai $m = 4$, bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ akan memiliki pola yang sama dengan $m = 7, 10, 13, 16, 19, \dots, m \equiv 1(\text{mod } 3)$. Untuk nilai $m = 5$, bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ akan memiliki pola yang sama dengan $m = 8, 11, 14, 17, 20, \dots, m \equiv 2(\text{mod } 3)$, dan Untuk nilai $m = 6$, bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ akan memiliki pola yang sama dengan $m = 9, 12, 15, 18, 21, \dots, m \equiv 0(\text{mod } 3)$. Oleh karena itu, pembahasan bilangan dominasi sisi pada $K_n \otimes P_m$ dibagi kedalam tiga kasus, bergantung pada nilai m . Untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, ketika $m = 4$, graf hasil oprasi produk tensor terdiri dari satu buah graf hasil operasi $K_n \otimes P_4$. Berdasarkan fakta 3., diketahui $\gamma'(K_n \otimes P_4) = n$, ketika $m = 7$, graf hasil oprasi produk tensor terdiri dari dua buah subgraf graf hasil operasi $K_n \otimes P_4$, sehingga $\gamma'(K_n \otimes P_7) = 2n$, ketika $m = 10$, graf hasil operasi produk tensor terdiri dari tiga buah subgraf graf hasil operasi $K_n \otimes P_4$, sehingga $\gamma'(K_n \otimes P_{10}) = 3n$, dan seterusnya. Berdasarkan pola yang terbentuk, maka diperoleh formula $\gamma'(K_n \otimes P_m) = n(\frac{m-1}{3})$ untuk $m \equiv 1(\text{mod } 3)$. Penjelasan yang serupa juga berlaku untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$ dan $m \equiv 2(\text{mod } 3)$. Untuk $m \equiv 0(\text{mod } 3)$, graf hasil operasi produk tensor memiliki formula $\gamma'(K_n \otimes P_m) = n(\frac{m-3}{3}) + n$ dan untuk $m \equiv 2(\text{mod } 3)$, graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ terdiri dari $\frac{m-2}{3}$ buah subgraf berupa graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_4$ dan satu subgraf berupa graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_2$ sehingga graf hasil operasi produk tensor memiliki formula $\gamma'(K_n \otimes P_m) = n(\frac{m-2}{3}) + n + 1$.

Berikut adalah teorema mengenai bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 4$.

Teorema 4.1. *Diberikan graf Lengkap K_n dan graf Lintasan P_m dengan masing-masing ordernya n dan m . Jika $n \geq 3$, $m \geq 4$ dan $n, m \in \mathbb{Z}^+$, maka bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ adalah:*

$$\gamma'(K_n \otimes P_m) = \begin{cases} n\binom{m-3}{3} + n & \text{jika } m \equiv 0 \pmod{3} \\ n\binom{m-1}{3} & \text{jika } m \equiv 1 \pmod{3} \\ n\binom{m-2}{3} + n - 1 & \text{jika } m \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$



Gambar 4.8: Graf Hasil Operasi $K_n \otimes P_m$ dengan $m \equiv 0 \pmod{3}$

Bukti:

Kasus 1 : $m \equiv 0 \pmod{3}$

Berdasarkan fakta 4., graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$, $m \geq 4$ dan $n \geq 3$, disusun oleh $\frac{m-3}{3}$ subgraf $K_n \otimes P_4$ dan satu subgraf

$K_n \otimes P_3$. Misalnya untuk $m = 6$, graf hasil operasi $K_n \otimes P_m$ terdiri dari satu buah subgraf berupa $K_n \otimes P_4$ dan satu buah subgraf berupa $K_n \otimes P_3$, untuk $m = 9$, graf hasil operasi $K_n \otimes P_m$ terdiri dari dua buah subgraf berupa $K_n \otimes P_4$ dan satu buah subgraf berupa $K_n \otimes P_3$, untuk $m = 12$, graf hasil operasi $K_n \otimes P_m$ terdiri dari tiga buah subgraf berupa $K_n \otimes P_4$ dan satu buah subgraf berupa $K_n \otimes P_3$, dan seterusnya. Oleh karena itu, bilangan dominasi sisi pada $K_n \otimes P_m$ memiliki pola yang sama untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$. Graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order m , untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$ dapat dilihat pada Gambar 4.8.

Untuk menentukan bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order m , $m \equiv 0 \pmod{3}$, maka kita perlu memperhatikan bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi $K_n \otimes P_4$ dan $K_n \otimes P_3$.

Pertama, kita perlu memperhatikan subgraf dari $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$ yaitu subgraf berupa $\frac{m-3}{3}$ buah graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_4$. Telah dijelaskan sebelumnya bahwa $\gamma'(K_n \otimes P_4) = n$. Karena graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$ terdiri dari $\frac{m-3}{3}$ subgraf $K_n \otimes P_4$ maka kita membutuhkan $n(\frac{m-3}{3})$ sisi untuk mendominasi keseluruhan sisi pada $\frac{m-3}{3}$ buah subgraf $K_n \otimes P_4$. Untuk membuktikan bahwa $n(\frac{m-3}{3})$ merupakan kardinalitas minimal dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi $\frac{m-3}{3}$ subgraf $K_n \otimes P_4$ maka digunakan kontradiksi. $\frac{m-3}{3}$ subgraf $K_n \otimes P_4$ isomorfis dengan graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_{m-2}$. Jumlah sisi pada $K_n \otimes P_{m-2}$ adalah $n(m-3)(n-1)$. Misalkan $|S'| = n(\frac{m-3}{3}) - 1$, jumlah maksimal sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah $(n(\frac{m-3}{3}) - 1) \cdot (3n - 3) = n(m-3)(n-1) - 3n - 3 < n(m-3)(n-1)$. Jadi, jika $|S'| = n(\frac{m-3}{3}) - 1$ maka akan terdapat $3n - 3$ buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Dibutuhkan minimal $|S'| = n(\frac{m-3}{3})$ untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam $\frac{m-3}{3}$ subgraf $K_n \otimes P_4$. Setelah diketahui jumlah minimum sisi yang diperlukan untuk mendominasi $\frac{m-3}{3}$ subgraf $K_n \otimes P_4$, selanjutnya kita perlu memperhatikan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi $K_n \otimes P_3$.

Berdasarkan fakta 2., graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_3$ terdiri dari $2n(n-1)$ sisi. Derajat sisi terbesar pada $K_n \otimes P_3$ adalah $\deg(u_1v_1) = \deg(u_1) + \deg(v_1) - 2 = 3n - 5$. Jadi sisi dengan derajat maksimum dapat mendominasi $3n - 4$ sisi termasuk dirinya sendiri. Misalkan sisi dengan derajat maksimum merupakan anggota dari himpunan dominasi sisi. Maka hanya terdapat dua buah sisi dengan derajat maksimum yang bisa menjadi anggota himpunan dominasi sisi. Karena $K_n \otimes P_3$ terdiri dari $2n(n-1)$ sisi, jadi masih belum keseluruhan sisi dalam

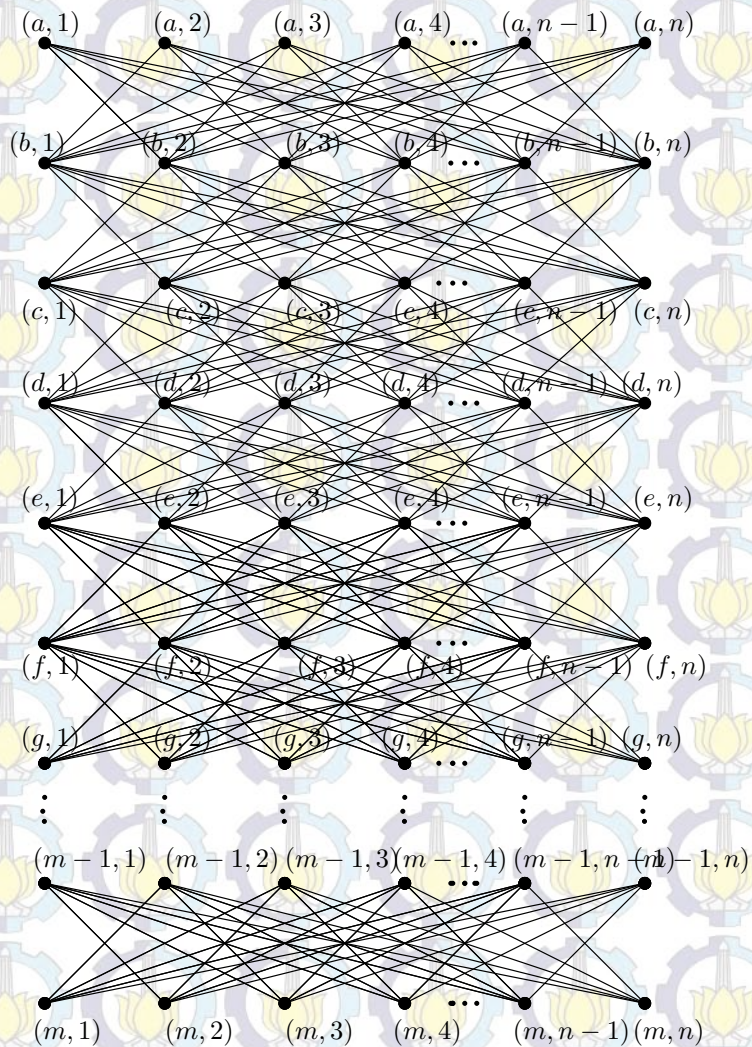
$K_n \otimes P_3$ dapat didominasi oleh dua buah sisi dengan derajat maksimum. Kita perlu memperhatikan sisi-sisi yang lainnya sebagai anggota himpunan dominasi sisi. Jika kita perhatikan, dibutuhkan $n - 4$ sisi dengan jumlah sisi yang bisa didominasi yaitu $3n - 7 - 2i, i = 0, 1, 2, 3, \dots, (n - 5)$ dan dua buah sisi yang bisa mendominasi n buah sisi termasuk dirinya sendiri. Jumlah total sisi yang bisa didominasi oleh S' adalah $2(3n - 4) + \sum_{i=0}^{n-5} (3n - 7 - 2i) + 2.n = 2n(n - 1)$. Jadi, jumlah sisi minimum yang diperlukan untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_3$ adalah $|S'| = 2 + n - 4 + 2 = n$ buah sisi. Misalkan $|S'| = n - 1$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi. Maka jumlah maksimal sisi yang bisa didominasi oleh S' adalah $2n^2 - 3n$ sisi. Tidak semua sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_3$ dapat didominasi oleh S' jika $|S'| = n - 1$. Terdapat minimal n buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Oleh karena itu, $|S'| = n$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi keseluruhan sisi dalam $K_n \otimes P_3$. Dapat disimpulkan bahwa kardinalitas minimum himpunan dominasi sisi graf hasil operasi produk tensor $\gamma'(K_n \otimes P_3) = n$.

Karena graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$ disusun oleh $\frac{m-3}{3}$ subgraf $K_n \otimes P_4$ dan satu subgraf $K_n \otimes P_3$, maka kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi dalam $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$ adalah $n(\frac{m-3}{3}) + n$. Misalkan, $|S'| = n(\frac{m-3}{3}) + n - 1$, maka akan terdapat minimal n buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Dapat disimpulkan $\gamma'(K_n \otimes P_m) = n(\frac{m-3}{3}) + n$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}, m \geq 4$ dan $n \geq 3$.

Kasus 2 : $m \equiv 1 \pmod{3}$

Graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 1 \pmod{3}, m \geq 4$ dan $n \geq 3$, terdiri dari nm simpul dan $n(m - 1)(n - 1)$ sisi. Misalkan $V(K_n) = \{u_i, i = 1, 2, \dots, n\} n \geq 3, V(P_m) = \{v_j, j = 1, 2, \dots, m\}, m > 4, m = 1 \pmod{3}, V(K_n \otimes P_m) = \{(v_j u_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}$ dan simpul (v_j, u_i) bertetangga pada graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ jika $u_i u_{i+1} \in E(K_n)$ dan $v_i v_{i+1} \in E(P_m)$. Berdasarkan fakta 4., subgraf dari graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 1 \pmod{3}$ terdiri dari $\frac{m-1}{3}$ buah graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_4$. Telah dijelaskan sebelumnya bahwa $\gamma'(K_n \otimes P_4) = n$. Karena graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ jika $m = 1 \pmod{3}$ terdiri dari $\frac{m-1}{3}$ subgraf $K_n \otimes P_4$, maka dibutuhkan $n(\frac{m-1}{3})$ sisi untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ jika $m \equiv 1 \pmod{3}$. Untuk membuktikan bahwa $|S'| = n(\frac{m-1}{3})$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi, maka kita gunakan kontradiksi. Kita andaikan

$|S'| = n\left(\frac{m-1}{3}\right) - 1$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi dalam $K_n \otimes P_m$. Jumlah maksimal sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah $(n\left(\frac{m-1}{3}\right) - 1)(3n - 3) = n(m - 1)(n - 1) - 3n - 3 < n(m - 1)(n - 1)$. Jika $|S'| = n\left(\frac{m-1}{3}\right) - 1$, tidak semua sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 1 \pmod{3}$, $m > 4$ dan $n \geq 3$ dapat didominasi. Setidaknya, minimal terdapat $3n - 3$ buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Oleh karena itu, $|S'| = n\left(\frac{m-1}{3}\right)$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi keseluruhan sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 1 \pmod{3}$, $m > 4$ dan $n \geq 3$. Dapat disimpulkan, $\gamma'(K_n \otimes P_m) = n\left(\frac{m-1}{3}\right)$ untuk $m \equiv 1 \pmod{3}$, $m > 4$ dan $n \geq 3$.



Gambar 4.9: Graf Hasil Operasi $K_n \otimes P_m$ dengan $m \equiv 2 \pmod{3}$

Kasus 3 : $m \equiv 2 \pmod{3}$

Berdasarkan fakta 4, graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 2 \pmod{3}$ terdiri dari $\frac{m-2}{3}$ buah subgraf berupa graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_4$ dan satu subgraf berupa graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_2$.

Misalnya untuk $m = 5$, graf hasil operasi $K_n \otimes P_m$ terdiri dari satu buah subgraf berupa $K_n \otimes P_4$ dan satu buah subgraf berupa $K_n \otimes P_2$, untuk $m = 8$, graf hasil operasi $K_n \otimes P_m$ terdiri dari dua buah subgraf berupa $K_n \otimes P_4$ dan satu buah subgraf berupa $K_n \otimes P_2$, untuk $m = 11$, graf hasil operasi $K_n \otimes P_m$ terdiri dari tiga buah subgraf berupa $K_n \otimes P_4$ dan satu buah subgraf berupa $K_n \otimes P_2$, dan seterusnya. Oleh karena itu, bilangan dominasi sisi pada $K_n \otimes P_m$ memiliki pola yang sama untuk $m \equiv 2 \pmod{3}$. Graf Hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order m , untuk $m \equiv 2 \pmod{3}$ dapat dilihat pada Gambar 4.9.

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa $\gamma'(K_n \otimes P_4) = n$. Karena graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 2 \pmod{3}$ terdiri dari $\frac{m-2}{3}$ buah subgraf $K_n \otimes P_4$, maka dibutuhkan minimal $n(\frac{m-2}{3})$ buah sisi untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam $\frac{m-2}{3}$ subgraf $K_n \otimes P_4$. Untuk membuktikan bahwa $n(\frac{m-2}{3})$ merupakan kardinalitas minimal dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi $\frac{m-2}{3}$ subgraf $K_n \otimes P_4$ maka digunakan kontradiksi. Subgraf berupa $\frac{m-2}{3}$ buah graf hasil operasi $K_n \otimes P_4$ isomorfis dengan graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_{m-1}$. Jumlah sisi pada $K_n \otimes P_{m-1}$ adalah $n(m-2)(n-1)$. Misalkan $|S'| = n(\frac{m-2}{3}) - 1$, maka jumlah maksimal sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah $(n(\frac{m-2}{3}) - 1) \cdot (3n - 3) = n(m-2)(n-1) - 3n - 3 < n(m-2)(n-1)$. Jadi, jika $|S'| = n(\frac{m-2}{3}) - 1$ maka akan terdapat $3n - 3$ buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Dibutuhkan minimal $|S'| = n(\frac{m-2}{3})$ untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam $\frac{m-2}{3}$ subgraf $K_n \otimes P_4$.

Setelah diketahui jumlah minimum sisi yang diperlukan untuk mendominasi $\frac{m-2}{3}$ subgraf $K_n \otimes P_4$, selanjutnya kita perlu memperhatikan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi $K_n \otimes P_2$. Berdasarkan fakta 2., diketahui bahwa kita membutuhkan minimal $n - 1$ buah sisi untuk mendominasi seluruh sisi pada graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_2$. Dengan kata lain, $\gamma'(K_n \otimes P_2) = n - 1$.

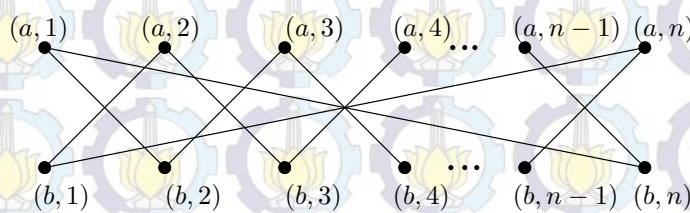
Karena graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 2 \pmod{3}$ disusun oleh $\frac{m-2}{3}$ subgraf berupa $K_n \otimes P_4$ dan satu subgraf berupa $K_n \otimes P_2$, maka kardinalitas minimum himpunan dominasi sisi dalam $K_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$ adalah $n(\frac{m-2}{3}) + n - 1$ jika n ganjil. Untuk membuktikan $n(\frac{m-2}{3}) + n - 1$ adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi sisi, kita menggunakan kontradiksi. Misalkan, $|S'| = n(\frac{m-2}{3}) + n - 2$. Jumlah maksimum sisi yang dapat didominasi

oleh S' adalah $n(m - 1)(n - 1) - 3$ sisi. Maka akan terdapat minimal 3 buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Dengan demikian, $|S'| = n(\frac{m-2}{3}) + n - 1$ adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order m untuk n gasal dan $m \equiv 0 \pmod{3}$. Dapat disimpulkan $\gamma'(K_n \otimes P_m) = n(\frac{m-2}{3}) + n - 1$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$. \square

4.2 Bilangan Dominasi Sisi Graf Hasil Operasi Produk Tensor Antara Graf Lingkaran dan Graf Lintasan

Graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran C_n dan graf Lintasan P_m menghasilkan suatu graf terhubung jika n ganjil. Sedangkan bila nilai n genap, maka graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ menghasilkan suatu graf tidak terhubung yang terdiri dari dua buah graf *komponen* isomorfis. Oleh karena itu, pada sub bab ini dikaji bilangan dominasi pada masing-masing graf hasil operasi produk tensor, baik itu untuk n gasal maupun graf *komponen* hasil operasi untuk n genap.

Graf Lingkaran adalah sebuah graf terhubung yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf Lintasan merupakan graf terhubung sederhana yang membentuk Lintasan dengan kedua simpul ujung pada graf ini merupakan *pendant* sedangkan simpul yang lain berderajat dua. Graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran C_n dengan graf Lintasan P_m untuk nilai n gasal menghasilkan suatu graf terhubung. Pada sub bab ini dibahas mengenai bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ untuk nilai n gasal.



Gambar 4.10: Graf Hasil Operasi $C_n \otimes P_2$

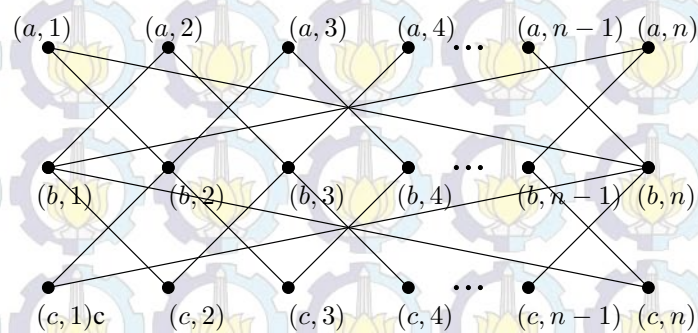
Sebelum kita mengkaji teorema yang berkaitan dengan bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran C_n dan graf Lintasan P_m untuk sebarang nilai n dan m , terlebih dahulu dikaji beberapa fakta bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dimana $n \in$ bilangan gasal dan graf lintasan dengan order yang kecil, yaitu graf lintasan order dua, tiga dan empat. Berikut adalah fakta mengenai bilangan

dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran order n dan graf Lintasan dengan order dua, tiga dan order empat. Selain itu, dikaji pula fakta mengenai pembagian bilangan dominasi sisi dalam modulo tiga. Berikut adalah pembahasan mengenai fakta-fakta tersebut.

Fakta 5.

Graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_2$ adalah sebuah graf reguler 2. Setiap simpul pada $C_n \otimes P_2$ memiliki derajat 2. Berdasarkan definisi, untuk setiap graf reguler dengan derajat 2 adalah sebuah Lingkaran. Graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_2$ dapat dilihat pada Gambar 4.10.

Jika kita mengamati graf $C_n \otimes P_2$, graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_2$ isomorfik dengan graf Lingkaran dengan banyaknya sisi sebesar $2n$. Karena setiap sisi pada graf $C_n \otimes P_2$ berderajat dua, maka setiap sisi $E \in S'$ dapat mendominasi maksimal 3 sisi pada graf $C_n \otimes P_2$ termasuk dirinya sendiri. Graf Lingkaran $C_n \otimes P_2$ memiliki $2n$ sisi, sehingga banyaknya sisi yang dapat mendominasi adalah $|S'| \geq \frac{2n}{3}$. Misalkan $|S'| = \frac{2n}{3}$ kita anggap sebagai kardinalitas minimum dari himpunan pendominasi. Karena S' adalah bilangan bulat positif, maka kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi adalah $|S'| = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Untuk membuktikan bahwa $|S'| = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi, maka diandaikan $\gamma'(C_n \otimes P_2) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1$. Banyaknya sisi maksimum yang dapat didominasi adalah $3(\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1) \leq 3(\frac{2n+2}{3}) - 1 = 2n - 1$. Telah diketahui bahwa banyaknya sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_2$ adalah $2n$. Jadi, jika $\gamma'(C_n \otimes P_2) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1$ maka akan ada 1 sisi pada graf hasil operasi $C_n \otimes P_2$ yang tidak terdominasi. Oleh karena itu, dapat kita simpulkan bahwa kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_2$ adalah $\gamma'(C_n \otimes P_2) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.



Gambar 4.11: Graf Hasil Operasi Produk Tensor $C_n \otimes P_3$

Fakta 6.

Jika diberikan Lingkaran C_n dan graf Lintasan P_3 dengan masing-masing ordernya n dan 3, maka bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $H = C_n \otimes P_3$ adalah $\gamma'(C_n \otimes P_3) = n$ untuk $n \geq 3$ dan n bilangan ganjil. Untuk membuktikannya kita misalkan $V(C_n) = \{u_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, $V(P_3) = \{v_j \mid j = 1, 2, 3\}$, $V(H) = \{(v_j u_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n ; j = 1, 2, 3\}$ dan simpul (v_j, u_i) bertetangga pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ jika $u_i u_{i+1} \in E(C_n)$ dan $v_j v_{j+1} \in E(P_3)$. Graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ dapat dilihat pada Gambar 4.11.

Jika kita mengambil anggota himpunan dominasi sisi dari sisi-sisi berderajat maksimum, maka hanya akan terdapat $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ sisi dengan derajat maksimum 4 yang bisa mendominasi 5 buah sisi termasuk dirinya sendiri pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$. Jika kita mengasumsikan sisi-sisi dengan derajat maksimum merupakan anggota dari himpunan dominasi, maka himpunan dominasi dari $C_n \otimes P_3$ adalah sebagai berikut:

$$S' = \{a_1 b_2, b_4 a_5, a_7 b_8, b_{10} a_{11}, a_{n-2} b_{n-1}, \dots, b_1 a_2, a_4 b_5, b_7 a_8, a_{10} b_{11}, \dots, b_{n-2} a_{n-1}, c_5 b_6, c_{11} b_{12}, \dots, c_{n-1} b_n\}$$

Sisi dengan derajat sisi maksimum pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ yaitu $\{a_1 b_2, b_4 a_5, a_7 b_8, b_{10} a_{11}, a_{n-2} b_{n-1}, \dots, b_1 a_2, a_4 b_5, b_7 a_8, a_{10} b_{11}, \dots, b_{n-2} a_{n-1}\}$ sebanyak $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ sisi dan dapat mendominasi 5 buah sisi termasuk dirinya sendiri. Sedangkan sisi-sisi yang lain yang belum terdominasi yaitu sisi-sisi yang menghubungkan simpul b_i dan c_i akan didominasi oleh sisi $c_5 b_6, c_{11} b_{12}, \dots, c_{n-1} b_n$ sebanyak $\frac{n}{3}$ sisi dengan banyaknya sisi yang bisa didominasi sebesar dua buah sisi. Jumlah sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah: $5 \cdot \frac{2n}{3} + 2 \cdot \frac{n}{3} = 4n$ jika n kelipatan 3, $5 \cdot \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 2 \cdot (\frac{n-1}{3}) + 4 = 4n$ jika $n - 1$ kelipatan 3, dan $5 \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 3 = 4n$ jika $n + 1$ kelipatan 3.

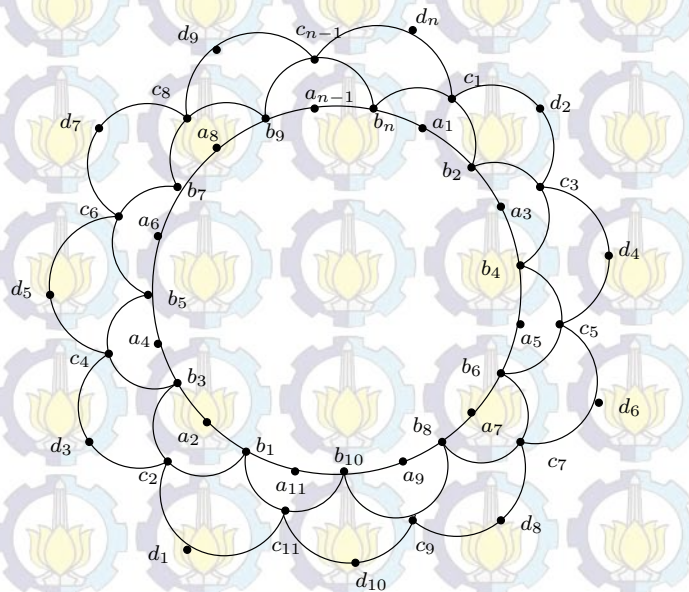
Berdasarkan penjelasan tersebut, dapat dilihat bahwa kardinalitas himpunan dominasi sisi S' adalah $|S'| = \frac{2n}{3} + \frac{n}{3} = n$ jika $n = 0 \pmod{3}$, $|S'| \geq \frac{2n-2}{3} + \frac{n-1}{3} + 1 = n$ jika $n - 1$ kelipatan 3 dan $|S'| \geq \frac{2n-1}{3} + \frac{n-2}{3} + 1 = n$ jika $n + 1$ kelipatan 3. Jumlah sisi yang dibutuhkan untuk mendominasi keseluruhan sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ adalah n . Andaikan kardinalitas minimum himpunan dominasi sisi adalah $n - 1$, maka minimal ada 2 buah sisi yang tidak dapat didominasi. Jadi, dapat disimpulkan bahwa kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ adalah n .

Berdasarkan pembuktian-pembuktian tersebut, dapat disimpulkan bahwa bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ adalah

$\gamma'(C_n \otimes P_3) = n$ untuk n bilangan ganjil.

Fakta 7.

Fakta selanjutnya adalah ulasan mengenai bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran order n dan graf Lintasan order 4. Misalkan $V(C_n) = \{u_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, $V(P_3) = \{v_j \mid j = 1, 2, 3, 4\}$, $V(C_n \otimes P_4) = \{(v_j u_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n ; j = 1, 2, 3, 4\}$ dan simpul (v_j, u_i) bertetangga pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$ jika $u_i u_{i+1} \in E(C_n)$ dan $v_i v_{i+1} \in E(P_4)$. Untuk menentukan nilai dari bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$, maka kita perlu mempertimbangkan sisi dengan derajat sisi paling besar. Misalkan, sisi-sisi dengan derajat paling besar adalah anggota dari himpunan pendominasi S' . Derajat maksimum pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$ adalah $\deg(u_1 v_1) = \deg(u_1) + \deg(v_1) - 2 = 4 + 4 - 2 = 6$. Jadi, setiap sisi dengan derajat maksimum dapat mendominasi 7 sisi termasuk dirinya sendiri. Graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$ dapat dilihat pada Gambar 4.12.



Gambar 4.12: Graf Hasil Operasi Produk Tensor $C_n \otimes P_4$

Perhatikan Gambar 4.12. Sisi dengan derajat sisi maksimum pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$ yaitu $\{c_1 b_2, c_2 b_3, \dots, c_{n-1} b_n\}$. Jika kita mengambil keseluruhan elemen himpunan dominasi sisi dari sisi-sisi dengan derajat sisi maksimum, maka hanya akan terdapat $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ sisi dengan derajat maksimum yang dapat mendominasi sisi-sisi yang lainnya. Sisi dengan derajat sisi maksimum dapat mendominasi 7 buah sisi termasuk dirinya sendiri. Namun apabila kita memilih sisi

dengan derajat maksimum sebagai elemen dari himpunan dominasi sisi, maka masih terdapat sisi-sisi lainnya yang masih belum terdominasi. Untuk mengetahui jumlah sisi yang belum terdominasi dan mengetahui kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi S' yang diperlukan untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$, maka berikut akan dikaji kardinalitas himpunan dominasi sisi untuk masing-masing nilai n .

1. Jika n kelipatan tiga, maka terdapat $\frac{2n}{3}$ sisi dengan derajat 2 yang belum terdominasi. Jadi, diperlukan $|S'| = \frac{2n}{3} + \frac{2n}{3} = \frac{4n}{3}$ sisi untuk mendominasi keseluruhan sisi dari graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$ jika n kelipatan 3. Jumlah sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah $7 \cdot \frac{2n}{3} + 2 \cdot \frac{2n}{3} = 6n$ jika n kelipatan 3.
2. Jika $n - 1$ kelipatan tiga, maka terdapat $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ sisi dengan derajat 2 dan satu buah sisi dengan derajat 6 yang belum terdominasi. Jadi, diperlukan $|S'| = \frac{2n-2}{3} + \frac{2n-2}{3} + 1 = \frac{4n-1}{3}$ sisi untuk mendominasi keseluruhan sisi dari graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$ jika $n - 1$ kelipatan 3. Jumlah sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah $7 \cdot \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 2 \cdot \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1 \cdot 6 = 6n$ jika $n - 1$ kelipatan 3.
3. Jika $n + 1$ kelipatan tiga, maka terdapat terdapat $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 1$ sisi dengan derajat 2 dan satu buah sisi dengan derajat 5 yang belum terdominasi. Jadi, diperlukan $|S'| = \frac{2n-1}{3} + \frac{2n-1}{3} - 1 + 1 = \frac{4n-2}{3}$ sisi untuk mendominasi keseluruhan sisi dari graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ jika $n + 1$ kelipatan 3. Jumlah sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah $7 \cdot \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 2 \cdot (\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 1) + 1 \cdot 5 = 6n$ jika $n + 1$ kelipatan 3.

Berdasarkan Gambar 4.12, kita misalkan himpunan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$ adalah:

$$S' = \{c_1b_2, c_3b_4, c_5b_6, c_nb_1, \dots, c_2b_3, c_4b_5, \dots, c_{n-1}b_n\}$$

Sisi c_1b_2 dapat mendominasi tujuh buah sisi, sisi $c_3b_4, c_5b_6, c_nb_1, \dots, c_2b_3, c_4b_5, c_{n-2}b_{n-1}$ dapat mendominasi masing-masing enam buah sisi, dan sisi $c_{n-1}b_n$ dapat mendominasi lima buah sisi. Berdasarkan himpunan dominasi $S' = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ tersebut, dapat dilihat bahwa kardinalitas dari himpunan dominasi sisi adalah n . Jumlah dari keseluruhan sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah $7 + \sum_{n=2}^{n-1} 6 + 5 = 6n$. Dibuktikan minimal n buah sisi untuk mendominasi seluruh sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$.

Dari beberapa himpunan dominasi sisi yang telah disebutkan sebelumnya, maka diperoleh bahwa kardinalitas dari himpunan dominasi sisi $n \leq \frac{4n-2}{3} \leq \frac{4n-1}{3} \leq \frac{4n}{3}$ karena $n \geq 3$. Maka kita pilih himpunan dominasi dengan kardinalitas minimum yaitu n . Andaikan kardinalitas minimum himpunan dominasi sisi bukan n melainkan $n - 1$, maka akan ada minimal lima buah sisi yang tidak dapat terdominasi. Sehingga banyaknya himpunan pendominasi minimum pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$ adalah n . Berdasarkan pembuktian tersebut, dapat disimpulkan bahwa bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$ adalah $\gamma'(C_n \otimes P_4) = n$ untuk n bilangan gasal.

Fakta 8.

Berikut ini akan dibahas bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap dan graf Lintasan untuk sebarang nilai n dan m . Pembahasan mengenai bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran dengan graf Lintasan akan dibagi ke dalam 3 kasus. Pengelompokan ini didasarkan pada kesamaan pola bilangan dominasi sisi pada tiap-tiap kasus.

- a. $\gamma'(C_n \otimes P_4) = n, \gamma'(C_n \otimes P_7) = 2n, \gamma'(C_n \otimes P_{10}) = 3n, \gamma'(C_n \otimes P_{13}) = 4n, \gamma'(C_n \otimes P_{16}) = 5n$, dan seterusnya.
- b. $\gamma'(C_n \otimes C_5) = n + \lceil \frac{2n}{3} \rceil, \gamma'(C_n \otimes P_8) = 2n + \lceil \frac{2n}{3} \rceil, \gamma'(C_n \otimes P_{11}) = 3n + \lceil \frac{2n}{3} \rceil, \gamma'(C_n \otimes P_{14}) = 4n + \lceil \frac{2n}{3} \rceil, \gamma'(C_n \otimes P_{17}) = 5n + \lceil \frac{2n}{3} \rceil$, dan seterusnya.
- c. $\gamma'(C_n \otimes P_6) = 2n, \gamma'(C_n \otimes P_9) = 3n, \gamma'(C_n \otimes P_{12}) = 4n, \gamma'(C_n \otimes P_{15}) = 5n, \gamma'(C_n \otimes P_{18}) = 6n$, dan seterusnya.

Berdasarkan penjelasan tersebut, diketahui bahwa graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order m dikelompokkan berdasarkan nilai m . Untuk nilai $m = 4$, bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ akan memiliki pola yang sama dengan $m = 7, 10, 13, 16, 19, \dots, m \equiv 1(mod 3)$. Untuk nilai $m = 5$, bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ akan memiliki pola yang sama dengan $m = 8, 11, 14, 17, 20, \dots, m \equiv 2(mod 3)$, dan Untuk nilai $m = 6$, bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ akan memiliki pola yang sama dengan $m = 9, 12, 15, 18, 21, \dots, m \equiv 0(mod 3)$. Oleh karena itu, pembahasan bilangan dominasi sisi pada $C_n \otimes P_m$ untuk n gasal dapat dibagi kedalam tiga kasus, bergantung pada nilai m . Untuk $m \equiv 1(mod 3)$, ketika $m = 4$, graf hasil operasi produk tensor terdiri dari satu buah graf hasil operasi $C_n \otimes P_4$. Berdasarkan fakta 7. diketahui $\gamma'(K_n \otimes P_4) = n$, ketika $m = 7$, graf hasil oprasi produk tensor

terdiri dari dua buah subgraf graf hasil operasi $C_n \otimes P_4$, sehingga $\gamma'(C_n \otimes P_7) = 2n$, ketika $m = 10$, graf hasil operasi produk tensor terdiri dari tiga buah subgraf graf hasil operasi $C_n \otimes P_4$, sehingga $\gamma'(C_n \otimes P_{10}) = 3n$, dan seterusnya. Berdasarkan pola yang terbentuk, maka diperoleh formula $\gamma'(C_n \otimes P_m) = n(\frac{m-1}{3})$ untuk $m \equiv 1(mod 3)$. Penjelasan yang serupa juga berlaku untuk $m \equiv 0(mod 3)$ dan $m \equiv 2(mod 3)$. Untuk $m \equiv 0(mod 3)$, graf hasil operasi produk tensor memiliki antara graf Lingkaran dan graf Lintasan dengan order dari graf Lingkaran ganjil memiliki formula $\gamma'(C_n \otimes P_m) = n(\frac{m-3}{3}) + n$ dan untuk $m \equiv 2(mod 3)$, graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ terdiri dari terdiri dari $\frac{m-2}{3}$ buah subgraf berupa graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$ dan satu subgraf berupa graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_2$ sehingga graf hasil operasi produk tensor memiliki formula $\gamma'(C_n \otimes P_m) = n(\frac{m-2}{3}) + \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

Setelah dijelaskan bebrapa fakta bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran dan graf Lintasan, selanjutnya akan dibahas bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ untuk sebarang nilai n . Namun, nilai n terbatas pada $n \geq 3$, sebab graf Lingkaran hanya dapat terbentuk jika $n \geq 3$. Berikut adalah teorema mengenai bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ untuk n gasal, $n \geq 3$ dan $m \geq 4$.

Teorema 4.2. *Diberikan graf Lingkaran C_n dan graf Lintasan P_m dengan masing-masing ordernya n dan m . Jika $n \geq 3$, $m \geq 4$, n gasal dan $n, m \in \mathbb{Z}^+$, maka bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ adalah:*

$$\gamma'(C_n \otimes P_m) = \begin{cases} n(\frac{m-3}{3}) + n & \text{jika } m \equiv 0 (mod 3) \\ n(\frac{m-1}{3}) & \text{jika } m \equiv 1 (mod 3) \\ n(\frac{m-2}{3}) + \lceil \frac{2n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 2 (mod 3) \end{cases}$$

Bukti:

Kasus 1 : $m \equiv 0 (mod 3)$

Berdasarkan fakta 8., graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 0 (mod 3)$, $m \geq 4$ dan $n \geq 3$, disusun oleh $\frac{m-3}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$ dan satu subgraf $C_n \otimes P_3$. Untuk menentukan bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap order n dan graf Lintasan order m , $m = 0 (mod 3)$, maka kita perlu memperhatikan bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi $C_n \otimes P_4$ dan $C_n \otimes P_3$.

Pertama, kita perlu memperhatikan subgraf dari $C_n \otimes P_m$ untuk $m = 0 (mod 3)$

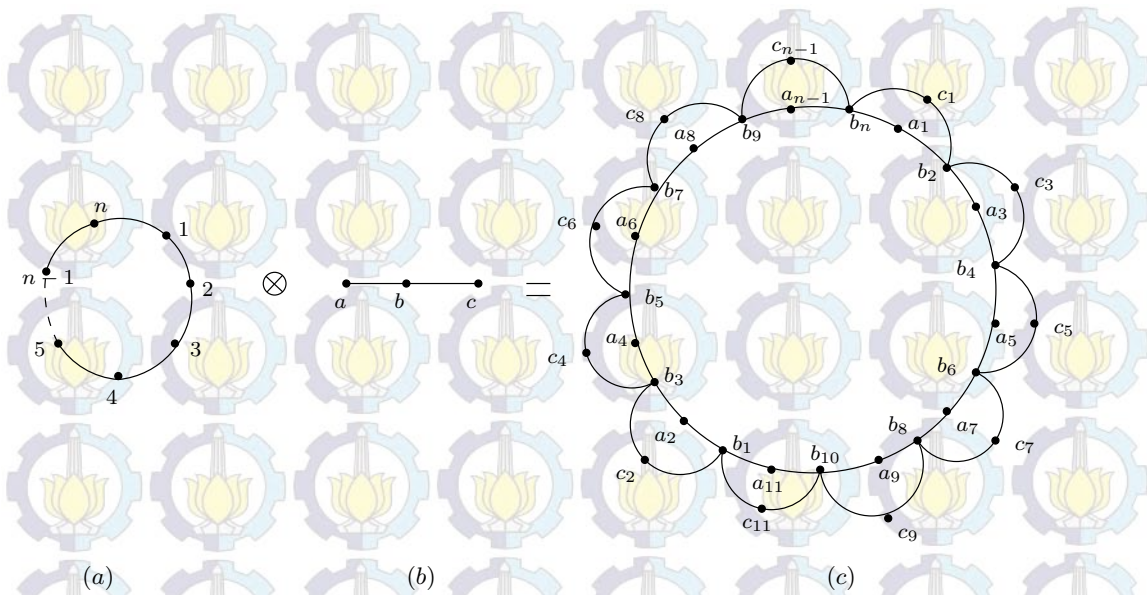
yaitu subgraf berupa $\frac{m-3}{3}$ buah graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$. Telah dijelaskan sebelumnya bahwa $\gamma'(C_n \otimes P_4) = n$. Karena graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ untuk $m = 0 \pmod{3}$ terdiri dari $\frac{m-3}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$ maka kita membutuhkan $n(\frac{m-3}{3})$ sisi untuk mendominasi keseluruhan sisi pada $\frac{m-3}{3}$ buah subgraf $C_n \otimes P_4$. Untuk membuktikan bahwa $n(\frac{m-3}{3})$ merupakan kardinalitas minimal dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi $\frac{m-3}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$ maka digunakan kontradiksi. $\frac{m-3}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$ isomorfis dengan graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_{m-2}$. Jumlah sisi pada $C_n \otimes P_{m-2}$ adalah $2n(m-3)$. Jika $|S'| = n(\frac{m-3}{3}) - 1$, jumlah maksimal sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah $2n(m-3) - 5$ sisi. Jadi, jika $|S'| = n(\frac{m-3}{3}) - 1$ maka akan terdapat minimal 5 buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Dibutuhkan minimal $|S'| = n(\frac{m-3}{3})$ untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam $\frac{m-3}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$. Setelah diketahui jumlah minimum sisi yang diperlukan untuk mendominasi $\frac{m-3}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$, selanjutnya kita perlu memperhatikan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi $C_n \otimes P_3$.

Misalkan $V(C_n) = \{u_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, $V(P_3) = \{v_j \mid j = 1, 2, 3\}$, $V(C_n \otimes P_3) = \{(v_j u_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n ; j = 1, 2, 3\}$ dan simpul (v_j, u_i) bertetangga pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ jika $u_i u_{i+1} \in E(C_n)$ dan $v_i v_{i+1} \in E(P_3)$. Untuk menentukan nilai dari bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ maka kita perlu mengamati sisi dengan derajat sisi paling besar. Misalkan, sisi-sisi dengan derajat paling besar adalah anggota dari himpunan pendominasi S' . Derajat maksimum pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ adalah $\deg(u_1 v_1) = \deg(u_1) + \deg(v_1) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4$. Jadi, setiap sisi dengan derajat maksimum dapat mendominasi lima sisi termasuk dirinya sendiri. Graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ dapat dilihat pada Gambar 4.13.

Berdasarkan gambar Gambar 4.13, kita misalkan himpunan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ adalah:

$$S' = \{a_1 b_2, a_3 b_4, a_5 b_6, a_n b_1, \dots, a_2 b_3, a_4 b_5, \dots, a_{n-1} b_n\}$$

Sisi $a_1 b_2$ dapat mendominasi lima buah sisi, sisi $a_3 b_4, a_5 b_6, a_n b_1, \dots, a_2 b_3, a_4 b_5, a_{n-2} b_{n-1}$ dapat mendominasi masing-masing empat buah sisi dan sisi $a_{n-1} b_n$ dapat mendominasi tiga buah sisi. Berdasarkan himpunan dominasi $S' = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ tersebut, dapat dilihat bahwa kardinalitas dari himpunan dominasi sisi adalah n . Jumlah dari keseluruhan sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah $5 + \sum_{n=2}^{n-1} 4 + 3 = 4n$. Jadi, dibutuhkan minimal n buah sisi untuk mendominasi seluruh sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$. Jika



Gambar 4.13: Graf Hasil Operasi Produk Tensor $C_n \otimes P_3$

$|S'| < n$, maka minimal akan ada tiga buah sisi yang tidak dapat terdominasi. Sehingga banyaknya himpunan pendominasi minimum pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_3$ adalah n .

Karena graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$ disusun oleh $\frac{m-3}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$ dan satu subgraf $C_n \otimes P_3$, maka kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi dalam $C_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$ adalah $n(\frac{m-3}{3}) + n$. Misalkan, $|S'| = n(\frac{m-3}{3}) + n - 1$, maka akan terdapat minimal 3 buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Dapat disimpulkan $\gamma'(C_n \otimes P_m) = n(\frac{m-3}{3}) + n$ untuk $m \equiv 0 \pmod{3}$.

Kasus 2 : $m \equiv 1 \pmod{3}$

Berdasarkan fakta 8., Graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 1 \pmod{3}$, $m \geq 4$, n ganjil dan $n \geq 3$, terdiri dari nm simpul dan $2n(m-1)$ sisi. Misalkan $V(C_n) = \{u_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, $V(P_m) = \{v_j \mid j = 1, 2, \dots, m\}$ dan $V(C_n \otimes P_m) = \{(v_j u_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n ; j = 1, 2, \dots, m\}$ dan simpul (v_j, u_i) bertetangga pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ jika $u_i u_{i+1} \in E(C_n)$ dan $v_i v_{i+1} \in E(P_m)$. Graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 1 \pmod{3}$ terdiri dari $\frac{m-1}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$. Telah dijelaskan sebelumnya bahwa $\gamma'(C_n \otimes P_4) = n$. Karena graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ jika $m \equiv 1 \pmod{3}$ terdiri dari $\frac{m-1}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$, maka dibutuhkan $n(\frac{m-1}{3})$ sisi untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ jika $m \equiv 1 \pmod{3}$. Untuk membuktikan bahwa $|S'| = n(\frac{m-1}{3})$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi, maka kita gunakan

kontradiksi. Misalkan $|S'| = n\left(\frac{m-1}{3}\right) - 1$ merupakan kardinalitas minimal dari himpunan dominasi sisi dalam $K_n \otimes P_m$. Jumlah maksimal sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah $2n(m-1) - 5$. Jika $|S'| = n\left(\frac{m-1}{3}\right) - 1$, tidak semua sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$, $m \equiv 1 \pmod{3}$, $m \geq 4$ dan $n \geq 3$ dapat didominasi. Setidaknya, minimal terdapat 5 buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Oleh karena itu, $|S'| = n\left(\frac{m-1}{3}\right)$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi keseluruhan sisi dalam graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 1 \pmod{3}$, $m \geq 4$, n gasal dan $n \geq 3$. Dapat disimpulkan, $\gamma'(C_n \otimes P_m) = n\left(\frac{m-1}{3}\right)$ untuk $m \equiv 1 \pmod{3}$, $m \geq 4$, n gasal dan $n \geq 3$.

Kasus 3 : $m \equiv 2 \pmod{3}$

Berdasarkan fakta 8., graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ untuk n gasal, $m \equiv 2 \pmod{3}$ terdiri dari $\frac{m-2}{3}$ buah subgraf berupa $C_n \otimes P_4$ dan satu subgraf berupa $C_n \otimes P_2$. Telah Dijelaskan sebelumnya bahwa $\gamma'(C_n \otimes P_4) = n$. Karena graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 1 \pmod{3}$ terdiri dari $\frac{m-2}{3}$ buah subgraf $C_n \otimes P_4$, maka dibutuhkan minimum $n\left(\frac{m-2}{3}\right)$ buah sisi untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam $\frac{m-2}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$. Untuk membuktikan bahwa $n\left(\frac{m-2}{3}\right)$ merupakan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi $\frac{m-2}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$ maka digunakan kontradiksi. Subgraf $C_n \otimes P_m$ berupa $\frac{m-2}{3}$ buah graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_4$ isomorfis dengan graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_{m-1}$. Jumlah sisi pada $C_n \otimes P_{m-1}$ adalah $2n(m-2)$. Jika $|S'| = n\left(\frac{m-2}{3}\right) - 1$, jumlah maksimal sisi yang dapat didominasi oleh S' adalah $2n(m-2) - 5$. Jadi, jika $|S'| = n\left(\frac{m-2}{3}\right) - 1$ maka akan terdapat 5 buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Dibutuhkan minimum $|S'| = n\left(\frac{m-2}{3}\right)$ sisi untuk mendominasi keseluruhan sisi dalam $\frac{m-2}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$.

Setelah diketahui jumlah minimal sisi yang diperlukan untuk mendominasi $\frac{m-3}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$, selanjutnya kita perlu memperhatikan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi yang dapat mendominasi $C_n \otimes P_2$.

Berdasarkan fakta 5., graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_2$ adalah sebuah graf reguler 2. Setiap simpul pada $C_n \otimes P_2$ memiliki derajat 2. Berdasarkan definisi, untuk setiap graf reguler dengan derajat 2 adalah sebuah Lingkaran. Jika kita mengamati graf $C_n \otimes P_2$, graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_2$ isomorfik dengan graf Lingkaran dengan banyaknya sisi sebesar $2n$. Karena setiap sisi pada graf $C_n \otimes P_2$ berderajat dua, maka setiap sisi $E \in S'$ dapat mendominasi maksimal 3 sisi pada graf $C_n \otimes P_2$ termasuk dirinya sendiri. Graf Lingkaran $C_n \otimes P_2$ memiliki $2n$ sisi, sehingga banyaknya sisi yang dapat mendominasi adalah $|S'| \geq \frac{2n}{3}$.

Misalkan $|S'| = \frac{2n}{3}$ kita anggap sebagai kardinalitas minimum dari himpunan pendominasi. Karena S' adalah bilangan bulat positif, maka kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi adalah $|S'| = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$. Untuk membuktikan bahwa $|S'| = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi, maka kita andaikan $\gamma'(C_n \otimes P_2) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1$. Banyaknya sisi maksimum yang dapat didominasi adalah $3(\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1) \leq 3(\frac{2n+2}{3}) - 1 = 2n - 1$. Telah diketahui bahwa banyaknya sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_2$ adalah $2n$. Jadi, jika $\gamma'(C_n \otimes P_2) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1$ maka akan ada satu buah sisi pada graf hasil operasi $C_n \otimes P_2$ yang tidak terdominasi. Oleh karena itu, dapat kita simpulkan bahwa kardinalitas minimum dari himpunan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_2$ adalah $\gamma'(C_n \otimes P_2) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.

Karena graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 2 \pmod{3}$ disusun oleh $\frac{m-2}{3}$ subgraf $C_n \otimes P_4$ dan satu subgraf $C_n \otimes P_2$, maka kardinalitas minimum himpunan dominasi sisi dalam $C_n \otimes P_m$ untuk $m \equiv 2 \pmod{3}$ adalah $n(\frac{m-2}{3}) + \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ jika n gasal. Untuk membuktikan $n(\frac{m-2}{3}) + \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi sisi, kita menggunakan kontradiksi. Misalkan, $|S'| = n(\frac{m-2}{3}) + \lceil \frac{2n}{3} \rceil - 1$. Jumlah maksimum sisi yang dapat di dominasi oleh S' adalah $2n(m-1) - 1$ sisi. Maka akan terdapat minimal 1 buah sisi yang tidak dapat didominasi oleh S' . Dengan demikian, $|S'| = n(\frac{m-2}{3}) + \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ adalah kardinalitas minimum himpunan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran order n dan graf Lintasan order m untuk n gasal dan $m \equiv 2 \pmod{3}$. Dapat disimpulkan $\gamma'(C_n \otimes P_m) = n(\frac{m-2}{3}) + \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ untuk n gasal dan $m = 2 \pmod{3}$. \square

Pembahasan selanjutnya adalah pembahasan mengenai bilangan dominasi sisi dari graf komponen $C_n \otimes P_m$. Graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran C_n dan graf Lintasan P_m untuk nilai n genap menghasilkan suatu graf tidak terhubung yang terdiri dari dua buah *komponen* graf isomorfis. Serupa dengan pembahasan mengenai bilangan dominasi sisi $C_n \otimes P_m$ untuk n gasal, graf komponen $C_n \otimes P_m$ untuk n genap merupakan dua buah graf yang isomorfis. Jadi, untuk $\gamma'_c(C_6 \otimes P_m)$ akan memiliki formula yang sama dengan $\gamma'(C_3 \otimes P_m)$, untuk $\gamma'_c(C_8 \otimes P_m)$ akan memiliki formula yang sama dengan $\gamma'(C_4 \otimes P_m)$, untuk $\gamma'_c(C_{10} \otimes P_m)$ akan memiliki formula yang sama dengan $\gamma'(C_5 \otimes P_m)$, dan seterusnya. Sehingga didapatkan bilangan dominasi sisi graf komponen $C_n \otimes P_m$ untuk n genap sebagai berikut:

Jika diberikan graf Lingkaran C_n dan graf Lintasan P_m dengan masing-masing ordernya n dan m . Jika $n \geq 3$, $m \geq 4$, n genap dan $n, m \in \mathbb{Z}^+$, maka bilangan dominasi sisi dari graf *komponen* hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ adalah:

$$\gamma'_c(C_n \otimes P_m) = \begin{cases} \frac{n}{2} \left(\frac{m-3}{3} \right) + \frac{n}{2} & \text{jika } m \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{n}{2} \left(\frac{m-1}{3} \right) & \text{jika } m \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{n}{2} \left(\frac{m-2}{3} \right) + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Dengan demikian, bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran order n dan graf Lintasan order m hanya terdefinisi jika order dari graf Lingkaran adalah ganjil. Sedangkan untuk order genap, bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran order n dan graf Lintasan order m tidak terdefinisi. Namun, kita bisa mencari bilangan dominasi sisi dari graf komponen hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran order n dan graf Lintasan order m dengan $n \in$ bilangan genap.

BAB V

SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian mengenai bilangan dominasi sisi baik pada graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap dan graf Lintasan maupun graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran dan graf Lintasan diperoleh hasil sebagai berikut:

1. Jika diberikan graf Lengkap K_n dan graf Lintasan P_m dengan masing-masing ordernya n dan m , $n \geq 3$, $m \geq 4$ dan $n, m \in \mathbb{Z}^+$, maka bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $K_n \otimes P_m$ adalah:

$$\gamma'(K_n \otimes P_m) = \begin{cases} n\left(\frac{m-3}{3}\right) + n & \text{jika } m \equiv 0 \pmod{3} \\ n\left(\frac{m-1}{3}\right) & \text{jika } m \equiv 1 \pmod{3} \\ n\left(\frac{m-2}{3}\right) + n - 1 & \text{jika } m \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

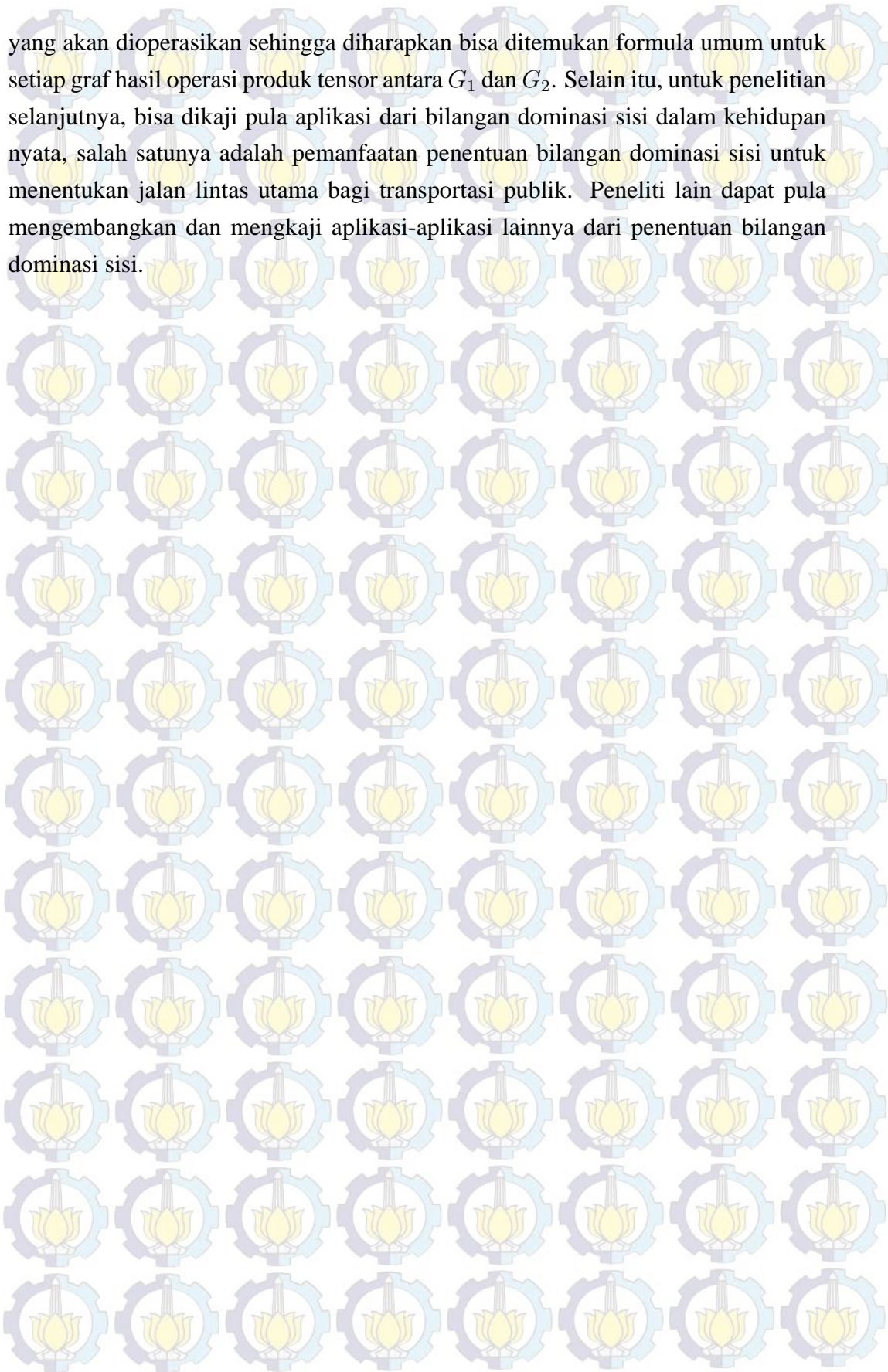
2. Jika diberikan graf Lingkaran C_n dan graf Lintasan P_m dengan masing-masing ordernya n dan m , $n \geq 3$, $m \geq 4$, n ganjil dan $n, m \in \mathbb{Z}^+$, maka bilangan dominasi sisi dari graf hasil operasi produk tensor $C_n \otimes P_m$ adalah:

$$\gamma'(C_n \otimes P_m) = \begin{cases} n\left(\frac{m-3}{3}\right) + n & \text{jika } m \equiv 0 \pmod{3} \\ n\left(\frac{m-1}{3}\right) & \text{jika } m \equiv 1 \pmod{3} \\ n\left(\frac{m-2}{3}\right) + \lceil \frac{2n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

5.2 Saran

Bilangan dominasi yang dikaji pada graf hasil operasi produk tensor pada penelitian adalah graf hasil operasi produk tensor antara graf Lengkap dengan graf Lintasan dan graf hasil operasi produk tensor antara graf Lingkaran dengan graf Lintasan. Sehingga, masih memungkinkan pengembangan dari penentuan bilangan dominasi sisi pada graf-graf hasil operasi produk tensor yang lainnya. Penelitian lanjutan dapat dilakukan dengan harapan bisa diperoleh suatu formula umum dari bilangan dominasi sisi pada graf hasil operasi produk tensor $G_1 \otimes G_2$. Bagi para peneliti yang ingin melanjutkan penelitian, disarankan untuk mengembangkan graf

yang akan dioperasikan sehingga diharapkan bisa ditemukan formula umum untuk setiap graf hasil operasi produk tensor antara G_1 dan G_2 . Selain itu, untuk penelitian selanjutnya, bisa dikaji pula aplikasi dari bilangan dominasi sisi dalam kehidupan nyata, salah satunya adalah pemanfaatan penentuan bilangan dominasi sisi untuk menentukan jalan lintas utama bagi transportasi publik. Peneliti lain dapat pula mengembangkan dan mengkaji aplikasi-aplikasi lainnya dari penentuan bilangan dominasi sisi.

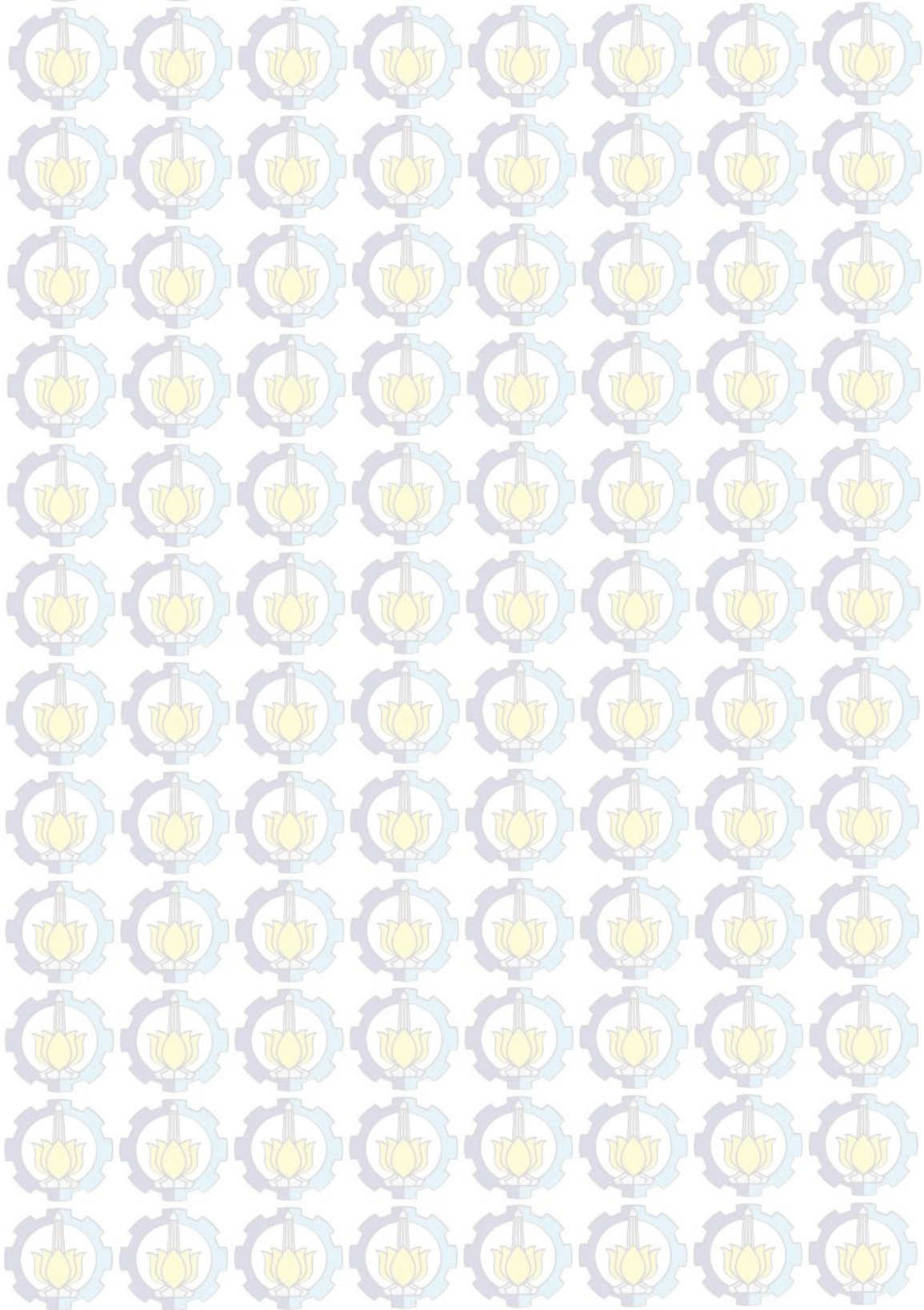




DAFTAR PUSTAKA

- [1] Acharya, U.P. dan Mehta, H. S., (2014), "2-Tensor Product of Graph", *International Journal Of Mathematics and Scientific Computing*, Vol.4, no. 1.
- [2] Bejamin, A., Gary, C., dan Ping, Z., (2015), *The Fascinating World of Graph Theory*, Princeton University Press, New Jersey.
- [3] Chatrand, G. dan Lesniak, L., (1996), *Graph and Digraph-Third Edition*, Chapman and Hall, 2-6 Boundary Row, London SE1 8HN, UK.
- [4] Chemcan, A., (2010), "The Edge Domination Number of Connected Graphs", *Australian Journal of Combinatorics*, Vol. 48, hal. 185-189.
- [5] Gross, L., Jonathan, Yellen, dan Jay. (2006), *Graph Theory and It's Application*, Chapman and Hall CRC, United State Of America.
- [6] Haynes, T. W., Hendetemi, S. T., dan Slater, P.J., (1998), *Fundamental of Domination in Graph*, Monograph and Textbook in Pure and Applied Mathematics, New York, NY, USA.
- [7] Hedetniemi, S. T., dan Mitchell, S., (1977), "Edge Domination in Graphs", *Congr Numer 19* , hal. 489-509.
- [8] Muddebihal, M.H. dan Sedamkar, A. R., (2013), "Characterization of Tree With Equal edge Domination and Edge Domination Number", *International Journal Of Mathematics and Computer Application Research*, Vol.3, no. 1, hal. 33-42.
- [9] Velamal, S., dan Arumugum, S., (2013), "Equality of Edge Domination and Connected Edge Domination In Graph", *International Journal of Advance and innovative Research*, Vol 2, hal. 218-222.
- [10] Velamal, S., dan Arumugum, S., (1998), "Edge Domination In Graph", *Taiwanese Journal of Mathematics*, hal. 173-179.
- [11] Velamal, S., dan Vinary, K., (2012), "Mathematics Is Science: A Topic Revisited in Context of FCS of India", *I.J.Modern Education and Computer Science*, hal. 17-26.

[12] V. R. Kulli., (2015), "The Neighborhood Total Edge Domination Number of a Graph", *International Research Journal of Pure Algebra-5(3)*, hal. 26-30.



BIODATA PENULIS



Penulis yang memiliki nama lengkap Robiatul Adawiyah lahir di Jember, 31 Juli 1992. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Bhayangkari Tanggul, SDN Tanggul Wetan 1, SMP Negeri 2 Tanggul, dan SMA Negeri 1 Jember. Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi S1 di FKIP Matematika Universitas Jember (2010-2014) melalui jalur PMDK dan diterima sebagai mahasiswa angkatan 2010. Penulis lulus sarjana dengan tujuh semester dan wisuda pada bulan Maret 2014 dengan mendapat gelar Sarjana Pendidikan. Penulis melanjutkan studi S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan beasiswa dari Kementerian Riset dan Teknologi melalui beasiswa unggulan kerjasama luar negeri (BUKLN) pada tahun 2014 dengan NRP. 1214 201 019. Untuk membentuk jaringan atau membutuhkan informasi yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui email obi.mat31@gmail.com.