DISERTASI – SS143506

PENGEMBANGAN DIAGRAM KONTROL MEWMA BERBASIS MODEL UNTUK PENGAMATAN TAK RANDOM

Jonathan K. Wororomi
NRP. 1309 301 005

PROMOTOR/CO-PROMOTOR
Dr. Muhammad Mashuri, M.T
Dr. Irhamah, M.Si
Dr. Agus Z. Arifin, M.Kom

PROGRAM DOKTOR
JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016

DISERTATION– SS143506

MODEL BASED OF MEWMA CONTROL CHARTS FOR NON RANDOM OBSERVATIONS

Jonathan K. Wororomi
NRP. 1309 301 005

PROMOTOR/CO-PROMOTOR
Dr. Muhammad Mashuri, M.T
Dr. Irhamah, M.Si
Dr. Agus Z. Arifin, M.Kom

DOCTORAL PROGRAMME
OF STATISTICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATEMATICS AND NATURAL SCIENCE
INSTITUTE OF TECHNOLOGY SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016

Lembar Pengesahan Disertasi

Disertasi disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Doktor di Program Doktor Jurusan Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Disusun Oleh:

Jonathan Kiwasi Wororomi
NRP. 1310930 1005

Tanggal Ujian : 11 Februari 2016
Periode Wisuda : Maret 2016

Disetujui Oleh:

Prof. Dr. Ir. Dyah Erny Herwindiati, M.Si. **NIDN. 0306046301**	.... **Penguji (Eksternal)**
Dr. Muhammad Mashuri, M.T **NIP.19620408 198701 1 001**	.... **Promotor**
Dr. Irhamah, S.Si., M.Si. **NIP.19780406 200112 2 002**	.... **Co-Promotor**
Dr. Agus Zainal Arifin, M.Kom **NIP. 19720809 199512 1 001**	.... **Co-Promotor**
Dr. Purhadi, M.Sc. **NIP. 19620204 198701 1 001**	.... **Penguji**
Prof. Drs. Nur Iriawan,M.IKomp., Ph.D **NIP.19621015 198803 1 002**	.... **Penguji**
Dr. Brodjol Sutijo Suprih Ulama, M.Si. **NIP. 19631223 198803 2 001**	.... **Penguji**

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER PROGRAM PASCASARJANA

Direktur Pascasarjana,

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI

AO	: *Additive Outlier*
ARL	: *Average Run Length*
ARL_0	: *in control Average Run Length*
ARL_1	: *out of control Average Run Length*
GA	: *Genetic Algorithm*
LS	: *Least Sqaured*
MEWMA	: *Multivariate Exponentially Weight Moving Average*
MSE	: *Mean Square Error*
MSE_{B^*}	: *Mean Square Error* Model VAR(1) Melalui GA
SSE	: *Sum Square Error*
UCL_B	: *Upper Limit Control of Beta distribution*
UCL_F	: *Upper Limit Control of F distribution*
UCL_{χ^2}	: *Upper Limit Control of Chi-Square distribution*
VAR	: *Vector Auto-Regressive*
VAR(p)	: *Vector Auto-Regressive orde-p*
VAR-GA	: *Vector Auto-Regressive Genetic Algorithm*
VARMA	: *Vector Auto-Regressive Moving Average*

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

α	: Nilai peluang *false alarm*
$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$	: Taksiran koefisien model
$\mathbf{A}$	: Matriks *generalized*
$\widehat{\mathbf{B}}_{GA}$	: Matriks koefisien yang ditaksir melalui GA
$\widehat{\mathbf{B}}_{LS}$	: Matriks koefisien yang ditaksir melalui LS
$\mathbf{B}_{LS}^{(1)}$	: Matriks koefisien yang diberikan melalui LS
$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$	: Kromosom dari penaksir LS
$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}$	: Kromosom dari penaksir GA
$\Delta\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i^{*}$	: Selisih vektor-vektor taksiran yang bebas linier melalui GA
γ	: Elemen dari matriks varians-kovarians
$\boldsymbol{\Gamma}$	: Matriks varians-kovarians
ρ	: Elemen dari matriks korelasi
$\boldsymbol{\mu}$	: Vektor mean
$\boldsymbol{\Sigma}$	: Matriks kovarians
$\boldsymbol{\phi}$	: Vektor auto-regresif
$\boldsymbol{\Phi}$	: Matriks koefisien auto-regresif
$\mathbf{D}_i$	: Matriks barisan dari model VARMA
h	: Batas atas kontrol dari statistik MEWMA (skalar positif)
$\mathbf{I}_m$	: Matriks identitas berukuran $m \times m$
$\mathbf{M}_n(\Re)$	: Matriks normal bernilai riil dengan ukuran n
$\mathbf{M}_{n,2}(\Re)$	: Matriks normal bernilai riil dengan ukuran $2 \times n$
$\boldsymbol{\delta}$	: Parameter non-sentralitas
$\boldsymbol{\delta}_1$	: *Shift* mean jenis-1(delta-1)
$\boldsymbol{\delta}_2$	: *Shift* mean jenis-2 (delta-2)
λ	: Parameter pemulus/eksponen (skalar)
P_m	: Nilai peluang permutasi
P_c	: Nilai peluang kawin silang
Q	: Statistik MEWMA
q_t	: Statistik MEWMA pada saat t (skalar)
$\mathbf{R}$	: Matriks pembobot MEWMA
$\boldsymbol{r}$	: Parameter pembobot (skalar)
$\mathbf{R}_r$	: Matriks pembobot dengan besaran skalar
$\mathbf{R}_{r_p}$	: Matriks pembobot dengan barisan skalar
$\bar{\mathrm{S}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$	: Fungsi yang meminimumkan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$
$\bar{\mathrm{S}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*})$	: Fungsi yang meminimumkan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}$
T^2	: Diagram kontrol Hotelling atau Shewhart
T_i^2	: Diagram kontrol Hotelling dengan indeks waktu i
$T_{\boldsymbol{u}_t}^2$	: Diagram kontrol Hotelling untuk residual pada saat t
$\boldsymbol{u}_t$	: Vektor residual
$\mathbf{U}$	: Matriks residual
$\mathbf{W}$	: Matriks diagonal yang memuat sub-matriks pembobot $\mathbf{R}$
$\boldsymbol{x}_t$	: Data *time series* saat t

$\boldsymbol{x}_i$	: Data *time series* dengan indeks waktu *i*
$\boldsymbol{x}_{t-1}$	: Data *time series* saat $t-1$
$\boldsymbol{y}_t$	: Model VAR saat *t*
$\mathbf{Y}$	: Matriks dari model VAR
$\boldsymbol{z}_i$	: Model *time series* dengan indeks waktu *i*
$\boldsymbol{z}_{t-1}$	: Model *time series* saat $t-1$
$\boldsymbol{z}_t$	: Model *time series* saat *t*

KATA PENGANTAR

Puji syukur atas rahmat dan anugrahNya yang melimpah, hingga terselesaikan penyusunan disertasi dengan judul **Pengembangan Diagram Kontrol MEWMA untuk Pengamatan Tak Random**. Diharapkan tulisan ini bisa menjadi salah satu acuan atau referensi bagi peneliti berikutnya maupun para praktisi yang tertarik pada kajian pengontrolan kualitas statistika, khususnya dalam penanganan data berpola menggunakan penaksir kuadrat terkecil dan penaksir *genetic algorithm* melalui pendekatan model *vector auto-regressive*. Penyelesaian tulisan ini tidak terlepas dari bantuan dari berbagai pihak, oleh karena itu penulis menghaturkan terima kasih yang sebesar-besarnya dengan penghargaan yang sertinggi-tingginya kepada :

1. Rektor Universitas Cenderawasih periode sebelumnya Prof. Dr. Beltazar Kambuaya, MBA, yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk melanjutkan studi ke jenjang pendidikan Program Doktor Statistika di ITS Surabaya, dan Rektor Universitas Cenderawasih periode ini Prof. Dr. Ones Sahuleka, M.Si;
2. Bapak Dr. Muhammad Mashuri, M.T sebagai promotor, Bapak Dr. Agus Zainal Arifin, M.Kom, dan Ibu Dr. Irhamah, M.Si sebagai *co*-promotor yang dengan sabar dan tulus telah membimbing dan mengarahkan dalam penyusunan dan penyelesaian disertasi ini;
3. Bapak Dr.Sony Sunaryo, M.Si dan Dr. Purhadi, M.Sc selaku dosen pembimbing akademik yang senantiasa memberi perhatian dalam proses belajar;
4. Ibu Prof. Dr. Dyah Erny Herwindiati, M.Si sebagai penguji eksternal dari Fakultas Teknik Informatika-Universitas Tarumanegara, yang telah memberikan saran dan masukan pada saat pelaksanaan ujian tertutup;
5. Bapak Dr. Suhartono, M.Sc dan Dr.rer.pol. Dedy, D. Prastyo, M.Si sebagai tim validasi yang telah memberikan masukan serta perbaikan guna penyempurnaan disertasi ini;
6. Bapak Dr. Purhadi, M.Sc, Prof. Drs. H. Nur Iriawan, M.Ikom., Ph.D, dan Dr. Brodjol Sutijo Suprih Ulama, M.Si, sebagai tim penilai yang telah banyak memberikan saran dan masukan dalam perbaikan disertasi ini;
7. Bapak Dr. Suhartono, M.Sc, sebagai Ketua Jurusan Statistika, staf pengajar, staf tata usaha, dan karyawan di jurusan Statistika FMIPA ITS Surabaya, yang telah memberikan kemudahan serta fasilitas kepada penulis selama menyelesaikan pendidikan Doktor;

8. Bapak Dr. Suhartono,M.Sc dan Bapak Dr. Purhadi, M.Sc selaku Kepala Program Studi dan Sekretaris Program Studi Pascasarjana, jurusan Statistika, FMIPA-ITS, yang telah berupaya mengevaluasi kemajuan belajar secara periodik;
9. Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi (DIKTI) Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan yang telah memberikan beasiswa BPPS, dan Universitas Cenderawasih yang telah memberikan kesempatan belajar dan bantuan dana penelitian;
10. Ketua Jurusan Matematika FMIPA Uncen, bapak Alvian M. Sroyer, M.Si dan tenaga pengajar di jurusan Matematika Universitas Cenderawasih untuk semua *support* yang telah diberikan dengan sukacita;
11. Bapak dan mama terkasih, Jeheskiel Wororomi dan Dominggas Suweni, keluarga besar Wororomi-Waramori-Suweni-Wakdomi, keluarga besar ibu Marto Suwito, keluarga besar bapak A. Wayangkau/Borai, kakak A.Y. Imbenai/Korwa, dan kerukunan keluarga besar Mambui-Paradoi di Manokwari, yang dengan setia memberikan dukungan doa demi terselesaikannya disertasi ini;
12. Istri dan anak-anak terkasih, Debora Sugiani dan Diva-Omi-Eki-Meki, yang selalu mendoakan, memberikan semangat dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan disertasi ini;
13. Segenap rekan mahasiswa Program Doktor Statistika ITS angkatan 2006-2014 yang telah memberikan dukungan semangat pada penulis. Khususnya rekan seangkatan 2009 yang selalu saling menyemangati hingga akhirnya tulisan ini terselesaikan.

Akhirnya penulis berharap semoga disertasi ini dapat memberikan manfaat dan sumbangan keilmuan bagi para pembaca. Meskipun demikian, penulis juga menyadari bahwa tulisan ini tentu masih terdapat banyak kekurangan. Oleh sebab itu, penulis terbuka menerima kritik dan saran konstruktif.

Surabaya, 2016

Penulis

ABSTRAK

Proses produksi pada umumnya melibatkan lebih dari satu karakteristik kualitas (yang saling berkorelasi atau berautokorelasi). Karakteristik ini dikenali sebagai pola sistematik atau pola data tak random. Pola data tak random dalam proses multivariat tidak hanya berpengaruh pada penentuan sensitivitas batas kontrol yang bersesuaian dengan jenis diagram kontrol multivariat, tetapi juga pada kesalahan pendeteksian *outlier* atau *assignable cause* lainnya dalam proses multivariat. Diagram kontrol *Multivariate Exponential Weighted Moving Average* (MEWMA) konvensional pada umumnya mampu bekerja pada *shift-shift* kecil sampai moderat, dan tidak optimal bila bekerja pada suatu data yang bersifat tak random dengan pola sistematik. Sehingga diperlukan pengembangan suatu diagram kontrol MEWMA yang juga mampu bekerja optimal pada pola data tak random. Penelitian dalam disertasi ini bertujuan untuk mengembangkan suatu diagram kontrol MEWMA baru mampu meningkatkan sensitivitas diagram kontrol MEWMA konvensional terhadap efek pola data tak random.

Diagram kontrol MEWMA yang dikembangkan ini merupakan diagram kontrol MEWMA baru berbasis residual dari model Vektor Auto-Regresif (VAR) yang mengadopsi *Genetic Algorithm* (GA). GA tidak hanya memperbaiki kinerja diagram kontrol MEWMA dalam mendeteksi *outlier* pada kenaikan-kenaikan *shift* kecil dan moderat, tetapi juga bermanfaat dalam mendeteksi *outlier* pada kenaikan-kenaikan *shift* besar dalam proses vektor mean.

Hasil evaluasi terhadap kinerja diagram kontrol MEWMA berbasis model melalui GA dan penaksir *Least Squared* (LS) menunjukkan perbaikkan kinerja diagram kontrol dalam penanganan efek non normalitas yang berasal dari observasi tak random. Secara analitik, ditunjukkan bahwa efek *shift* dalam vektor mean dan variabilitas yang terjadi dalam suatu proses dapat dikontrol dan dievaluasi melalui matriks koefisien. Secara numerik, matriks koefisien $\hat{\mathbf{B}}_{GA}$ sebagai parameter utama model VAR(p) merepresentasikan kromosom terbaik dalam proses reproduksi melalui GA. Hasil taksiran kedua metode ini tidak hanya dapat dibandingkan dalam evaluasi diagram kontrol, tetapi juga dapat diaplikasikan dalam perbaikkan kinerja pengontrolan kualitas pada kasus multivariat.

Kata kunci: Diagram kontrol MEWMA, Vektor Auto-Regresif (VAR), Pola data tak random, dan *Genetic Algorithm* (GA)

ABSTRACT

Generally, a process of production involves more than one quality of characteristics (correlated or autocorrelated). These qualities of characteristics are known as systematic patterns or non random data patterns. Impact of a non random data patterns in the multivariable process is not affected by sensitivity of an associate control limits determination only, but also by fault detection of outlier or from other assignable causes in multivariate process. A conventional multivariate exponential weighed moving average (MEWMA) works on small shifts to moderate shifts level, but it does not optimally work on a non randomized data patterns with a systematic patterns. Therefore, it has been required to develop a new MEWMA control charts that can work optimally on non random data. The aim of the research in this dissertation is to develop a new MEWMA control charts in order to modify the conventional MEWMA due to its sensitivities to effect of the non random data patterns.

This new developed MEWMA control chart is MEWMA that based on residuals from a Vector Auto-Regressive (VAR) model with Genetic Algorithm (GA) as an unbiased estimator. The GA estimator was used to improve not only the MEWMA control charts for outlier detection on small to moderate shift increaments, but also large shift increaments in mean vector processes.

Due to the result of MEWMA control charts based model evaluations by using of GA and Least Squared (LS) estimator, the performances of the control charts were improved according to non-normality effects from non random observation. Analytically, the occurance of the shift effects on mean vector and variability in a process were controllable and could be evaluated by a coefficient matrices. As the main parameter of VAR(p) models, $\widehat{\mathbf{B}}_{GA}$ represented the best chromosome on reproduction process according to GA so that could be compared to the result of LS estimator numerically. Moreover, both of these estimators are, not only comparable to the control charts evaluation but also can be applied in the development of monitoring schemes to improve a production quality control on multivariate cases.

Key words: MEWMA control charts, Vector Auto-Regressive (VAR), non randomized data patterns, and Genetic Algorithm (GA)

BAB. I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Diagram kontrol merupakan alat yang bermanfaat dalam pendeteksian *assignable cause* dan pereduksian variabilitas pada suatu proses produksi. Proses produksi umumnya melibatkan lebih dari satu karakteristik kualitas yang saling berkorelasi. Sebagai contoh riil, dalam monitoring di bidang industri bahan penyekat resistensi listrik, pengukuran viskositas, ukuran diameter roda pesawat, dan komposisi tabung diode (*Philips case*) yang diberikan oleh Wieringa (1999). Contoh-contoh tersebut menunjukkan bahwa asumsi independensi tidak lagi dipenuhi karena adanya hubungan kebergantungan baik antar pengamatan itu sendiri (berautokorelasi) maupun antar variabel (berkorelasi atau berkorelasi silang) yang merupakan efek dari sifat-sifat pola data tak random atau pola sistematik. Oleh karena itu, pertimbangan terhadap pemilihan diagram kontrol terkait skema pengontrolan dan sistim monitoring (baik pada kasus univariat atau multivariat) yang efektif dan efisien diperlukan guna meningkatkan kualitas suatu proses produksi baik barang atau jasa.

Pola data tak random ini umumnya dapat diidentifikasi terlebih dahulu pada tahap pra-pengontrolan atau sebelum fase I guna mengetahui pola umum pada data historis. Sebagai ilustrasi terhadap adanya pola sistematik dalam kasus setdata Holmes dan Mergen diberikan pada Montgomery (2005) yang menunjukkan adanya tren dalam proses *shift* mean. Bahkan pada kasus data individual yang sebelumnya telah diidentifikasi berdistribusi normal multivariat. Dalam hal ini, peran dari jenis statistik pengontrolan kualitas (SPK) yang sesuai menjadi penting dan tentu bermanfaat guna pendeteksian *assignable cause* dan pereduksian variabilitas dalam suatu proses produksi. Pemanfaatan diagram kontrol untuk memonitor sumber variasi yang terjadi dalam sistem dapat dialamatkan pada kehadiran data berautokorelasi. Sumber variasi ini dapat dideteksi dan dikenali melalui struktur data-nya yang bersifat tak random karena memiliki pola tertentu (data berpola). Pengamatan terhadap data tak random dalam SPK untuk proses multivariat dapat diasosiasikan dengan pengamatan yang berautokorelasi dan/atau pengamatan berkorelasi. Penanganan terhadap struktur data seperti ini memerlukan metode pendekatan yang efisien dan efektif guna mengakomodir kehadiran gejala tersebut, karena berpotensi sebagai sumber variasi dalam proses pengontrolan kualitas.

Pengontrolan kualitas dalam kasus multivariat menggunakan dekomposisi Mason-Young-Tracy (MYT) yang dilakukan oleh Mason, Chou, Sullivan, Stoumbos, dan Young

(2003), mempunyai kinerja diagram kontrol Hotelling T^2 yang belum optimal dalam penanganan autokorelasi. Terkait dengan hal tersebut, maka studi performansi terhadap kinerja diagram kontrol yang *applicable* untuk mendeteksi pola-pola data tak random atau pola sistematik seperti pola siklis, *trend*, autokorelasi, dan *shift* dalam proses parameter masih diperlukan. Secara umum, evaluasi terhadap kinerja suatu diagram kontrol multivariat dapat mengacu pada fase I pengontrolan. Walaupun pada fase ini merupakan suatu permasalahan tersendiri yang masih terus berkembang sampai saat ini. Dimana pada fase I, data yang berasal dari data histori perlu diestimasi terlebih dahulu, baik menggunakan estimator klasik maupun estimator yang bersifat *robust*. Hal ini terkait dengan penentuan batas kontrol yang dapat diaplikasikan dalam sistim monitoring di fase II pengontrolan. Kajian ini menjadi penting dikerjakan guna mengembangkan dan memodifikasi suatu estimator lokasi dan dispersi *robust* dalam pendeteksian atau penanganan pola-pola tersebut.

Sensitivitas batas kontrol yang digunakan pada kedua fase terhadap fenomena ketakrandoman ini dapat terjadi secara tiba-tiba dalam proses mean ataupun proses variasinya. Kombinasi dari diagram kontrol Hotelling T^2 dengan beberapa estimator yang lebih *robust* seperti *Minimal Vector Variance* (MVV) dan *Minimal Covariance Determinant* (MCD) masih terus dikembangkan dan dimodifikasi. Misalnya estimator MVV yang diaplikasikan pada diagram Hotelling T^2 yang dikerjakan oleh Pan dan Chen (2011). Melalui estimator MVV, diagram kontrol Hotelling T^2 menjadi lebih sensitif dalam mendeteksi *multiple outlier* tetapi kurang sensitif dalam mendeteksi *trend* atau *shift* mean proses. Sehingga dalam pengembangan selanjutnya, estimator MVV dapat disandingkan dengan estimator *Mean Square Successive Difference* (MSSD) terboboti sebagai skema modifikasi terkini yang dikonstruksi melalui diagram kontrol T^2.

Analogi ini juga dapat diterapkan untuk diagram kontrol multivariat lain seperti pada diagram kontrol MEWMA, khususnya pengembangan diagram kontrol MEWMA berbasis observasi atau berbasis model (residual) yang merupakan bagian dari skema utama dalam penelitian ini. Dengan perkataan lain, skema pengembangan yang meliputi kombinasi dari estimator yang menjadi perhatian kita disini adalah bagaimana cara mendesain dan memilih beberapa estimator *robust* yang dapat disandingkan dengan diagram kontrol MEWMA dalam menangani kasus data tak random. Estimator *robust* dapat menaikkan sensitivitas batas pengontrolan guna mengantisipasi efek yang ditimbulkan oleh pola-pola tak random dalam proses *shift* yang kecil sekalipun. Dalam aplikasinya, hal ini tentu saja tidak hanya terbatas dalam bidang produksi manufaktur saja atau bidang spesifik lainnya seperti bidang kedokteran dan khemometrik yang sering dihadapkan penanganan variabel *latent* sebagai manifestasi langsung dari keterlibatan pola-pola sistematik. Gejala ini akan berdampak langsung pada proses desain dan evaluasi skema monitoring dalam aplikasinya di bidang nyata.

Disamping itu, metode pengontrolan multivariabel diperlukan untuk menyediakan pilihan kepada produser monitoring terhadap beberapa variabel pada *lag* waktu berbeda secara simultan. Dalam praktik, kehadiran data tak random dalam proses multivariat mengakibatkan kesulitan dalam menentukan batas kontrol yang bersesuaian. Walaupun demikian, diagram *Vector Auto-Regressive* (VAR) untuk residual dapat dimanfaatkan sebagai salah satu metode pendekatan untuk menangani persoalan data tak random. Diagram VAR residual yang dihasilkan oleh Jarrett dan Pan (2007) dan Pan dan Jarrett (2007), selain efektif dalam monitoring proses multivariat yang berautokorelasi, juga sensistif terhadap perubahan kecil pada satu parameter tunggal yang memiliki efek terhadap keseluruhan sistem.

Pertimbangan terhadap beberapa kasus nyata yang dikerjakan oleh Wieringa (1999) untuk kasus univariat dengan tegas telah menolak asumsi kebebasan data. Efek dari sumber variasi memiliki kompleksitas tersendiri dan berdampak langsung pada perfomansi diagram kontrol. Hal tersebut terlihat pada koefisien model deret waktu autoregresif orde satu, atau model AR(1) yang belum ditentukan secara eksak pada sistem monitoring dan pengontrolan statistik. Salah satu dampak serius yang terjadi ketika mengabaikan asumsi dependensi data adalah kesalahan pendeteksian signal di luar atau di dalam kontrol. Hal ini dicirikan oleh nilai *Average Run Length* (ARL) yang tidak stabil, terutama untuk koefisien model deret waktu yang bernilai negatif. Sementara untuk nilai koefisien model deret waktu yang bernilai positif pun, ternyata verifikasinya masih terbatas pada nilai koefisien positif kecil sampai moderat saja. Skema modifikasi dan skema residual pada kasus data univariat yang dikerjakan oleh Wieringa (1999) terhadap diagram kontrol EWMA melalui pendekatan model deret waktu AR(1), menunjukkan bahwa, secara implisit skema modifikasi residual memiliki keunggulan tersendiri dibandingkan dengan skema modifikasi yang lain. Demikian juga studi kinerja melalui simulasi numerik (terhadap ARL diagram kontrol) berdasarkan pendekatan metode integral Friedholm kedua adalah masih bersifat tentatif dan terbatas pada kasus univariat.

Studi kinerja yang khusus mengkaji perfomansi ARL dari diagram kontrol EWMA dan proses estimasi parameter residual telah diberikan juga oleh Gombay dan Serban (2009), dan Fuentes (2008) terhadap perfomansi EWMA residual dan proses *error* dari model AR(1). Hasil studi tersebut menunjukkan bahwa diagram kontrol EWMA yang dikonstruksi dari observasi memiliki perfomansi yang lebih baik ketika digunakan pada level autokorelasi rendah sampai moderat. Sementara EWMA yang dikonstruksi dari model (EWMA residual) memiliki perfomansi yang lebih baik ketika digunakan pada level autokorelasi tinggi dan pada *shift* yang besar (Robinson dan Ho, 1978, Maravelakis dan Castagliola, 2009). Ide yang mendasari studi perfomansi ini terletak pada penelusuran terhadap fungsi distribusi kumulatif (*cdf*) dari ARL. Hal ini dapat dijadikan dasar perbandingan dan evaluasi terhadap diagram kontrol EWMA berbasis residual.

Skema perbaikan alternatif yang berkaitan dengan pendekatan model deret waktu untuk kasus univariat diberikan oleh Fuentes, (2008) atau VAR(p) yang diberikan oleh Pan (2007) dan Pan dan Jarrett (2007) untuk kasus multivariat. Kedua *author* tersebut menunjukkan bahwa pendekatan residual pada diagram kontrol T^2 merupakan metode yang masih eksis dalam pendeteksian proses *shift*. Meskipun demikian, pemeriksaan terhadap jenis dan efek *shift* residual dari proses VAR(p) dan VARMA (p,q) belum sepenuhnya menjamin efisiensi dalam pereduksian variabilitas proses parameter.

Terkait dengan upaya pereduksian variabilitas dalam proses parameter, terdapat tiga metode pendekatan dalam penanganan data berautokorelasi, yaitu metode berbasis pengamatan (observasi), metode berbasis residual, dan metode yang mengacu pada skema khusus. Ketiga metode pendekatan inilah yang kemudian dijadikan dasar acuan pengembangan dalam penanganan data berautokorelasi. Skema monitoring ini bertujuan untuk memeriksa variasi yang terjadi dalam pengukuran *error* dalam produksi yang dikontrol menggunakan *Special Cause Chart* (SCC) dan *Common Cause Chart* (CCC) melalui pengaitan terhadap fungsi transfer. Fungsi transfer bermanfaat dalam membedakan sumber variasi guna mendeteksi lokasi dimana sumber variasi yang terjadi dalam proses. Pendekatan metode semacam ini penting dilakukan untuk menghindari kesalahan deteksi terhadap sumber variasi (ambigu) ketika dihadapkan terhadap pengukuran dua atau lebih variabel laten yang bertanggung jawab terhadap *shift* proses.

Istilah *shift* atau pergeseran sendiri merupakan salah satu ciri pola data yang hadir baik pada data random dan tak random. Pola data tak random berpotensi menyebabkan situasi suatu proses berada di luar kontrol (*outlier*). Pada umumnya, *shift* yang terjadi dalam proses produksi sebagai akibat pergantian atau perubahan pada mesin produksi, *skill* operator, *rate* produksi, atau perkenalan terhadap suatu teknologi baru dapat berakibat terjadinya *shift* dalam suatu proses produksi. Hal pokok yang menjadi perhatian kita disini akan tertuju kepada diagram kontrol mana yang lebih efektif dalam mendeteksi *shift*. Contohnya dalam kasus multivariat, diagram kontrol T^2 tidak hanya dapat mendeteksi proses *shift* yang terjadi, tetapi juga dapat memberikan gambaran terhadap level perubahan yang terjadi dalam observasi.

Beberapa pola umum dari data tak random yang dibahas dalam Mason, Chou, Sullivan, Stoumbos, dan Young (2003) mencakup pola siklis, pola campuran, tingkat *shift* dalam proses, stratifikasi, dan *trend* (mencirikan sifat tak random dalam data) dikenali juga sebagai pola sistematik. Umumnya, diagram kontrol seperti $\bar{\mathbf{x}}$ dan $\boldsymbol{R}$ akan mengindikasikan keadaan di luar kontrol walaupun dari *ploting* yang dihasilkan tidak terdapat adanya *single-point* yang berada di luar batas kontrol. Pola yang terbentuk dari hasil *ploting* memberikan informasi yang bermafaat dalam diagnosis proses, dan perlu diakomodir dengan cara memodifikasi skema pengontrolannya. Salah satu cara yang membantu dalam pencarian sumber *assignable* adalah mengkategorisasi keseluruhan domain *assignable cause* ke dalam beberapa sub-kategori. Kemudian, pendeteksian terhadap *assignable cause* dapat dikerjakan dengan menggunakan diagram kontrol yang sesuai berdasarkan jenis dan penyebab pola yang berdampak pada proses. Cara ini dimaksudkan untuk meminimalkan usaha tambahan (prosedur *adjustment*) yang diperlukan, serta menyajikan pola tak random pada diagram kontrol yang dapat diiterpertasikan secara benar.

Proses interpertasi terhadap suatu diagram kontrol yang berasal dari proses tak random yang dikerjakan oleh Yu (2007) melalui algoritma jaringan syaraf tiruan atau Neural Network (NN). Dimana NN memberikan hasil yang menjajikan untuk diaplikasikan pada proses multivariat. Skema yang dibangun berdasarkan NN memberikan prosedur pengaplikasian guna menentukan pola (*pattern recognition*) dan proses pendeteksian *shift*. Skema yang dikembangkan ini mengacu pada hipotesa tipe II, dimana proses pengontrolan diasumsikan berada di luar kontrol (diasumsikan nilai ARL di luar kontrol). Hasil evaluasinya pun memberikan kontribusi yang signifikan, karena skema pada NN memberikan performansi yang lebih baik (efektif dan efisien) dalam mendeteksi pola data tak random pada kasus bivariat dibandingkan dengan diagram kontrol MEWMA tanpa NN. Keterbatasan dari skema ini terletak pada variasi yang masih menggunakan dua variabel *input* dalam mendeteksi data histori.

Dilain pihak, penelusuran terhadap distribusi ARL sendiri merupakan persoalan lain yang telah dikembangkan oleh Aparisi dan Darcía-Díaz (2004) melalui algoritma genetika guna menentukan parameter optimal dari MEWMA. Terkait dengan upaya optimalisasi, algoritma genetika dapat dipertimbangkan sebagai bagian dari skema utama dalam mengevaluasi dan menelusuri distribusi model (residual) yang diusulkan dalam penelitian ini. Sementara itu, permasalahan umum yang sering dijumpai dalam penanganan data berautokorelasi adalah proses parameter yang umumnya diestimasi dari sampel (tidak diketahui). Karena tidak dapat diaplikasikan secara langsung pada data berkorelasi independen yang diasumsikan berada dalam kontrol. Secara umum, desain optimal terhadap diagram kontrol MEWMA yang diberikan oleh Aparisi dan Darcía-Díaz (2004) mengacu pada penentuan parameter ***r*** (parameter pemulus) dan parameter *h* (batas kontrol). Sedangkan prosedur desain optimal diagram kontrol MEWMA mengacu pada penentuan parameter (***r***,*h*) optimum. Hal ini terkait dengan pendeteksian *shift* proses atau parameter *non*-sentralitas (jarak Mahalanobis), penentuan jumlah variabel yang dikontrol secara simultan, dan penentuan ukuran sampel. Demikian juga penetapan *in-control average run length* (ARL_0) yang diinginkan.

Efek pola tak random yang berdampak pada teknik optimasi perlu dipertimbangkan dalam mendesain diagram kontrol MEWMA yang optimum. Setiap individu dalam populasi asal ini merepresentasikan solusi yang memungkinkan adanya solusi dalam masalah optimasi. Terkait dengan pemanfaatan aplikasi khusus melalui algoritma genetika, selain mengacu pada konsep desain optimum, dapat juga dikaitkan dengan studi evaluasi terhadap perfomansi diagram kontrol MEWMA berbasis residual yang diberikan oleh Fuentes (2008). Kajian lain terhadap performansi diagram kontrol MEWMA berbasis observasi yang diberikan oleh Reynolds dan Cho (2006) dan Reynolds dan Stoumbos (2008). Dimana beberapa diagram kontrol multivariat dapat dikombinasikan untuk memonitor vektor mean dan matriks kovarians. *Shift* yang bersifat *sustained* dan *transient* dapat diatasi melalui kombinasi diagram kontrol MEWMA untuk proses mean dan jumlahan kudrat deviasi dari target, serta diagram Shewhart. Walaupun kombinasi diagram kontrol MEWMA terhadap sampel mean dan jumlahan kuadrat dari deviasi regresi *adjusted* memberikan perfomansi terbaik, proses pengontrolan yang dilakukan masih bekerja dibawah asusmsi kenormalan.

Menurut Maravelakis dan Castagliola (2009), Lu. dan Reynolds (1999), Prabhu dan Runger (1997), dan Lucas dan Saccucci (1990), dalam penanganan data berautokorelasi, diagram kontrol EWMA atau MEWMA perlu didesain sebelum diterapkan pada observasi melalui tahapan *fitting* model, estimasi parameter. namun masih memerlukan *set* data yang lebih besar dibandingkan ketika kita bekerja dibawah asumsi kenormalan. Studi perfomansi terhadap diagram kontrol MEWMA yang diberikan oleh Lu dan Reynolds (1999) menunjukkan bahwa performansi dari diagram kontrol MEWMA dan MCUSUM yang didasarkan pada matriks kovariansi asimtotis memberikan performansi ARL yang similar. Matriks kovariansi asimtotis direkomendasikan oleh Prabhu dan Runger (1997), dan Lu dan Reynolds (1999) dalam prosedur perhitungan statistik MEWMA guna menginisiasi matriks kovarians proses di luar kontrol. Prosedur ini tidak hanya memberikan perfomansi ARL yang menjanjikan, tetapi juga merupakan prosedur yang efektif dalam merespon perubahan dalam proses dengan cepat. Disamping itu, pengontrolan kualitas untuk proses multivariat yang umumnya menggunakan diagram kontrol Hotelling T^2 sebagai statistik kontrol, sudah tidak efektif lagi untuk diaplikasikan pada data yang berautokorelasi dan berkorelasi, baik terhadap data *subgroup* dan observasi individual. Hal ini merujuk pada sifat diagram kontrol Hotelling T^2 yang hanya menggunakan informasi dari sampel saat ini (*current sample*) saja, sehingga relatif tidak sensitif lagi terhadap *shift* mean kecil dan moderat yang berasal dari data berautokorelasi. Sebagai alternatifnya, Montgomery (2005) telah mengemukakan prosedur MCUSUM dan MEWMA untuk mengatasi kekurangan pada diagram kontrol Hotelling T^2. Sementara itu, walaupun diagram kontrol VARMA (p,q) yang diberikan pada Pan (2007) melalui pendekatan model residual menggunakan diagram kontrol T^2 merupakan metode yang masih eksis dalam pendeteksian *shift* dalam proses.

Pemeriksaan terhadap jenis dan efek *shift* residual dari proses VAR(p) dan VARMA (p,q) dapat diawali dari model AR(p) dan ARMA (p,q) yang dikerjakan oleh Pan dan Jarett (2007) belum sepenuhnya terjamin efisien.

Terdapat tiga kelas parameter dalam model VAR, yaitu mean proses $\boldsymbol{\mu}$, matriks kovarians $\mathbf{\Sigma}$, dan koefisien autoregresif model $\mathbf{\Phi}$. *Shift* dapat terjadi pada ketiga kelas parameter ini dan berakibat pada siatuasi di luar kontrol (Pan dan Jarett, 2007). Walaupun *shift* dalam mean proses dari variabel lebih sering dibahas, namun sebenarnya jika salah satu saja dari ketiga jenis *shift* ini terjadi dalam suatu parameter proses, maka akan memberikan perubahan dalam distribusi dari statistik diagram kontrol dan memberikan *signal* di luar kontrol. Efek dari *shift* yang terjadi disini bergantung hanya pada besaran *shift*, matriks koefisien, dan matriks kovarians yang diestimasi (Pan, 2005). Hal ini sejalan juga dengan penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Prabhu dan Runger (1999) yang telah mengembangkan kerangka dasar diagram kontrol MEWMA sebagai perluasan dari EWMA univariat. Menurut Montgomery (2005), kedua diagram kontrol ini (MEWMA dan MCUSUM) memiliki perfomansi ARL yang similar, namun demikian, diagram kontrol MEWMA lebih sederhana untuk diimplementasikan.

Cakupan dalam tahapan pengembangan yang dimaksudkan dalam penelitian ini didasari pada hasil penelusuran pada distribusi residual model. Pertimbangannya adalah distribusi residual dari model VAR dapat ditelusuri berdasarkan kriteria pemilihan model terbaik. Model ini dapat diestimasi terlebih dahulu untuk menentukan orde polinom model yang bersesuaian dalam konteks pendekatan model VAR. Metode pendeteksian pada kasus univariat dan kasus multivariat dikaji berdasarkan suatu kriteria keputusan yang dapat diimplemetasikan pada diagram kontrol MEWMA.

Berdasarkan simulasi terkini yang dikerjakan oleh Hochreiter dan Krottendorfer (2013) dengan estimator *Least Square* (LS), dimana GA dimanfaatkan dalam mengestimasi parameter model VAR dan diaplikasikan dalam kasus *stock price*. Dalam hal ini GA dapat dimanfaatkan dalam penaksiran parameter model dari suatu pengamatan multivariat yang berautokorelasi. Sehingga pertimbangan dalam studi ini adalah bagaimana mengembangkan suatu diagram kontrol berbasis residual yang tidak hanya sesuai dalam menangani data tak random saja. Tetapi juga dapat menaikan kinerja diagram kontrol multivariat dalam mengantisipasi efek *shift* sebagai konsekuensi dari data berautokorelasi atau berkorelasi.

Terkait dengan permasalahan dalam penaksiran parameter model yang dihadapi oleh Pan (2007), Pan dan Jarrett (2007), dan Aparisi dan Darcía-Díaz (2004). Maka disini prosedur LS diadopsi pada algoritma genetika guna menaksir parameter optimal model yang direpresentasikan melalui kromosom model. Kromosom model dalam penaksir LS merupakan matriks koefisien autoregresif bersifat dinamik dan cenderung mengalami perubahan pada setiap *order lag time* yang berbeda. Hasil taksiran melalui penaksir LS pada setiap *order lag time* dapat distasionerkan dengan cara restriksi nol pada elemen matriks koefisien. Restriksi nol yang diterapkan pada matriks koefisien berdasarkan kriteria pemberhentian tertentu memberikan hasil taksiran optimum pada model VAR(p) dan bermanfaat dalam proses pengontrolan kualitas melalui diagram kontrol MEWMA yang diusulkan.

Manfaat utama dari penaksiran parameter model melalui GA adalah untuk mengatasi permasalahan dalam kasus multivariat berautokorelasi sebagai keutamaan dari penelitian ini, khususnya dalam mengembangkan diagram kontrol MEWMA berbasis model. GA memberikan solusi global optimum dan dapat dibandingkan terhadap metode LS. Hasil penaksiran parameter dari kedua metode ini juga dapat dimanfaatkan sebagai dasar dalam penentuan batas atas kontrol dan proses evaluasi diagram kontrol, serta penelusuran distribusi MEWMA terhadap efek parameter pembobot **R**. Salah satu kelemahan yang dimiliki GA adalah hasil penaksiran parameter yang selalu berubah karena bersifat metaheuristik, namun kemudian masih dapat ditangani melalui pemanfaatan operator *ellitisme* guna mempertahankan kromosom terbaik di setiap generasi yang dijalankan oleh GA. Walaupun demikian, disertasi ini dimaksudkan untuk mengembangkan suatu diagram kontrol MEWMA berbasis model yang baru. Diagram kontrol MEWMA baru ini merupakan penyempurnaan terhadap diagram kontrol MEWMA konvensional melalui GA sehingga menjadi sensitif terhadap efek dari pola data tak random.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan diatas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

i. Bagaimana mengembangkan diagram kontrol MEWMA yang sensitif terhadap efek pola data tak random?
ii. Bagaimana menentukan batas atas kontrol dan distribusi dari statistik MEWMA terhadap efek parameter pembobot **R**? dan
iii. Bagaimana mengevaluasi kinerja diagram kontrol MEWMA melalui penaksir LS dan GA?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan penelitian ini adalah mengembangkan suatu diagram kontrol MEWMA baru berbasis residual dari model VAR(p) untuk pengamatan tak random. Adapun rincian dari tujuan penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut:

i. Menentukan batas atas kontrol MEWMA berbasis residual dari model VAR(p) dan menelesuri distribusi statistik MEWMA terhadap efek parameter pembobot **R**; dan
ii. Mengevaluasi kinerja diagram kontrol MEWMA berbasis residual dari model VAR(p) melalui penaksir LS dan penaksir GA melalui simulasi, serta mengaplikasikannya pada data riil.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini terdiri atas manfaat teoritis dan manfaat praktis yang diuraikan sebagai berikut:

Manfaat teoritis,

i. Memberikan suatu statistik uji yang robust terhadap estimasi parameter model dalam pengujian statistik MEWMA untuk pengamatan tak random; dan
ii. Memberikan suatu prosedur yang berguna untuk menelusuri distribusi MEWMA pada pengamatan tak random.

Manfaat praktis,

Memberikan solusi bagi dunia industri dalam pengontrolan kualitas dalam proses produksi barang dan jasa melalui diagram kontrol MEWMA dalam penanganan data berpola. Hal terkait dengan kesalahan prosedur dalam pengoperasian alat atau mesin produksi (*human error*) atau juga karena kelelahan mesin (*fatique*) yang sering terjadi dalam proses produksi.

1.5 Kontribusi Penelitian

Kontribusi teoritis, diagram kontrol MEWMA berbasis model dapat diaplikasikan pada pengamatan tak random. Dalam praktik (di bidang industri), pengamatan tak random yang sering terjadi dalam proses produksi masih dapat dimonitor melalui diagram kontrol MEWMA.

1.6 Batasan Masalah

Cakupan dalam proses pengembangan diagram kontrol MEWMA melalui pendekatan model VAR(p). Namun pada bagian aplikasi, estimasi residual melalui penaksir LS dibatasi pada model VAR(1). Sementara GA disini diadopsi dalam prosedur LS guna mengoptimalkan proses optimasi residual dari model.

1.7 Orisinilitas Penelitian

Berdasarkan *road map* orisinalitas penelitian yang diberikan pada Gambar 1.1, proses pengembangan diagram kontrol MEWMA diawali dari suatu proses data tak random dan berkorelasi serial, sehingga berpotensi memuat multiple *outlier*. Terkait dengan *gap* ini, diusulkan suatu pengembangan diagram kontrol EWMA multivariat berbasis residual yang tidak hanya dapat dibandingkan dengan Reynolds dan Cho (2006) dan Reynolds dan Stoumbos (2008), tetapi juga bermanfaat dalam pereduksian variabilitas proses dan pengoptimalan penaksiran parameter model melalui penaksir LS sekaligus melengkapi hasil pada Stefatos dan Hamza (2009) dan Wororomi, Mashuri, Irhamah, Arifin (2013) dalam kasus kesalahan pendeteksian *outlier*.

Berdasarkan peta jalan penelitian pada Gambar 1.1, orisinalitas penelitian ini mengacu pada pengembangan diagram kontrol MEWMA berbasis model yang memanfaatkan GA, sehingga tidak hanya dapat dibandingkan MEWMA konvensional, tetapi juga bermanfaat dalam pereduksian variabilitas proses dan pengoptimalan penaksiran parameter model. Konsekuensi dalam proses evaluasi kinerja diagram kontrol MEWMA berbasis model, dikemukan pada *Proposisi* 4.1 yang dapat dioperasionalkan melalui Algoritma 4.1 bermanfaat dalam penentuan distribusi MEWMA untuk pengamatan tak random.

Pendekatan diagram kontrol MEWMA untuk pengamatan tak random

Asumsi: data berautokorelasi/berkorelasi

Metode	Klasifikasi metode pendekatan dalam monitoring proses tak random & jenis diagram kontrol
Metode berbasis observasi	**Diagram kontrol univariat** • Lucas & Saccuci,(1990): Mengevaluasi sifat-sifat EWMA untuk monitoring proses *shift* mean melalui *fast initial respone* (FIR) pada diagram kontrol Shewhart-EWMA untuk mendeteksi shift kecil dan besar; • Wieringa,(1999): Mengusulkan skema pengontrolan yang efektif dalam pendeteksian proses *shift* (mean dan dispersi) EWMA; • Schöne (1999):Kajian analitik ARL EWMA sebagai proses Gaussian stasioner dengan waktu *fix* & sifat-sifat kemonotonan proses autokorelasi ; • Maravelakis & Castagliola,(2009) + Huwang, (2010): Mengusulkan skema monitoring proses variabilitas EWMA melalui estimasi parameter (*unknown*) pada phase I; **Diagram kontrol multivariat** • Lowry, Woodall, Champ, & Ridgon, (1992): Memberikan ide dasar skema pengembangan MEWMA dan kinerjanya yang dapat dibandingkan dengan diagram kontrol CUSUM dari Crosier (1992); • Reynolds & Cho, (2006)+ Reynolds & Stoumbos, (2008): Mengkombinasikan beberapa diagram kontrol multivariat untuk memonitor vektor mean dan matriks kovarians;
Aplikasi khusus: *statistical learning*	• Aplikasi GA pada EWMA & MEWMA: Aparisi & Darcia-Diaz, (2004): Optimal design pada diagram kontrol EWMA dan MEWMA melalui algoritma genetik • Yu, (2007)Aplikasi N.N pada pendeteksian shift mean dlm proses multivariat berautokorelasi: ; • Cheng, & Cheng, (2009); Aplikasi Analisis Wavelet dan N.N pada pendeteksian pola diagram kontrol:
Metode berbasis residual	**Diagram kontrol univariat** • Vermat,(2008): Sifat asimtotis dari variansi statistik EWMA pada proses AR; • Gombay dan Serban, (2009): Pengujian sekuensial yang diperumum berdasarkan statistik uji CUSUM untuk mendeteksi perubahan parameter dari suatu model AR. **Diagram kontrol multivariat** • Pan,(2005): Studi terhadap efek shift parameter proses multivariat berautokorelasi pada model ARMA residual menggunakan diagram kontrol T^2; • Jarrett & Pan (2007a, 2007b): Mendeteksi proses *shift* pada parameter model VAR(p) residual secara univariat dan multivariat.

Asumsi: data tanpa autokorelasi/korelasi

Metode	▪ Sun,(2000): Pengontrolan diagram kontrol T^2 untuk proses non *i.i.d* melalui transformasi Haar; ▪ Srivastava & Fujikoshi, (2006): Pengujian hipotesis parameter + MANOVA dengan kasus observasi kurang dari dimensi; ▪ Pan, (2006): Pra-pengontrolan pada diagram kontrol multivariat; ▪ Chang & Richards, (2009): Inferensi sampel hingga pada kasus MVN tak lengkap; ▪ Stefatos & Hamza,(2009) : Kesalahan pendeteksian pada diagram kontrol robust multivariat;

Mengembangkan diagram kontrol MEWMA baru berbasis residual dari model VAR(p)

- Menentukan batas atas kontrol MEWMA berbasis residual dari model VAR(p) dan menelesuri distribusi statistik MEWMA terhadap efek parameter pembobot **R**;
- Mengevaluasi kinerja diagram kontrol MEWMA berbasis residual dari model VAR(p) melalui penaksir LS dan penaksir GA melalui simulasi, serta mengaplikasikannya pada data riil.

Ket. gambar:
— · — Belum dikerjakan
— — Sudah dikerjakan

Gambar 1.1 *Road map* orisinalitas penelitian

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori yang dikemukakan dalam BAB ini terdiri atas bagian utama dan dua bagian tambahan terkait dengan konsep pengembangan diagram kontrol MEWMA. Bagian pertama adalah diagram kontrol MEWMA dan bagian kedua adalah deret waktu multivariat, serta bagian ketiga adalah algoritma genetika (GA) sebagai suatu metode optimasi yang diimplementasikan dalam studi pengembangan diagram kontrol MEWMA berbasis model.

2.1 Diagram Kontrol MEWMA

Diagram kontrol konvensional jenis Shewhart seperti diagram T^2 umumnya efektif untuk mendeteksi *shift* mean. Walau demikian, diagram kontrol ini memiliki reaksi yang lambat dalam mendeteksi *shift* kecil dan moderat dalam proses mean. Untuk mengatasi persoalan ini, Montgomery (2005) telah mengembangkan diagram kontrol MEWMA yang lebih sensitif terhadap *shift* mean kecil. Misal, $\boldsymbol{x}_t = (\boldsymbol{x}_{t1}, \dots, \boldsymbol{x}_{tm})'$ untuk $t = 1,2, \dots, n$ sebagai suatu vektor acak multivariat berdimensi $m \leq n$ dengan komponen dari variabel acak pada saat *t*. Statistik *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) yang dikonstruksi dari diagram kontrol EWMA oleh Lowry, Woodall, Champ, dan Ridgon (1992) berdasarkan observasi sebelumnya dan didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{z}_t = r\boldsymbol{x}_t + (1-r)\boldsymbol{z}_{t-1},\ t = 1,2, \dots, n, \tag{2.1}$$

dengan *r* sebagai parameter pemulus $(0 < r \leq 1)$ dan diasumsikan $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{0}_t$. Misal, $\boldsymbol{x}_t$ suatu vektor acak pada saat *t*. Persamaan (2.1) dapat diperluas secara rekursif untuk setiap *t* sebagai:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}_1 &= r\boldsymbol{x}_1, \\
\boldsymbol{z}_2 &= r\boldsymbol{x}_2 + r(1-r)\boldsymbol{x}_1, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{z}_{t-1} &= r\boldsymbol{x}_{t-1} + r(1-r)\boldsymbol{x}_{t-2} + \cdots + r(1-r)^{t-1}\boldsymbol{x}_1, \\
\boldsymbol{z}_t &= r\boldsymbol{x}_t + r(1-r)\boldsymbol{x}_{t-1} + r(1-r)^2\boldsymbol{x}_{t-2} + \cdots + r(1-r)^{t-1}\boldsymbol{x}_1 + (1-r)^t\boldsymbol{z}_0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Misal dipilih bobot dari observasi ke-j yang bersesuaian dengan observasi ke $\boldsymbol{x}_{t-j}$ dan ditulis sebagai $w_j = r(1-r)^j$ dengan $(1-r) \leq 1$. Jumlahan bobot ini dapat dinyatakan dalam bentuk satuan sebagai $r\sum_{t=0}^{t-j}(1-r)^t = r\left[\frac{1-(1-r)^t}{1-(1-r)}\right] = 1-(1-r)^t$.

Perhatikan bahwa bobot w_j akan mengalami kenaikan mengikuti kenaikan *t*. Dalam hal ini, bobot dari observasi sekarang akan lebih besar dari observasi sebelumnya, sehingga bobot $r(1-r)^t$ akan mengalami penurunan secara geometrik dengan bertambahnya usia sampel mean. Jadi, $\boldsymbol{z}_t$ pada (2.2) merupakan suatu vektor rata-rata terboboti (*weighted average*) dari pengukuran *t* observasi yang mengikuti bentuk geometrik (Roberts,1959). Dalam beberapa literatur, parameter *r* dikenali juga sebagai bobot eksponensial dari statistik MEWMA dan dapat didekati oleh distribusi Khi-kuadrat.

Misal diasumsikan bahwa

$$E[\boldsymbol{x}_t] = \boldsymbol{\mu} = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_0 & \text{saat proses berada dalam target (\textit{in control})}, \\ \boldsymbol{\mu}_1 & \text{saat proses berada di luar target (\textit{out of control})}, \end{cases}$$

dan $\quad Var[\boldsymbol{x}_t] = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}$.

Diagram kontrol MEWMA memberikan *warning signal* ketika

$$q_t = \boldsymbol{z}_t' \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{z}_t}^{-1} \boldsymbol{z}_t > h, \tag{2.3}$$

dengan *h* dispesifikasikan sebagai batas atas kontrol atau *upper limit control* (UCL) dengan *lower limit control* (LCL) bernilai nol. Sementara kasus khusus dari diagram kontrol MEWMA adalah ketika $r = 1$ yang memberikan $\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{x}_t$ dan $q_t = \boldsymbol{x}_t' \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}^{-1} \boldsymbol{x}_t$. Bentuk ini analog dengan diagram kontrol Shewhart multivariat yang juga dikenal sebagai diagram kontrol Khi-kuadrat.

Disini variabel ditransformasi ke bentuk $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2}(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{\mu}_0)$, sehingga nilai harapan dan variansi dari observasi $\boldsymbol{x}_t$ yang diberikan masing-masing sebagai:

$$E\left[\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2}(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{\mu}_0)\right] = \begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2} \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_t\text{-}\boldsymbol{\mu}_0) = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}_t}^{-1/2}(\boldsymbol{\mu}_0\text{-}\boldsymbol{\mu}_0) = \mathbf{0}, \textit{ in control} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2} \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_t\text{-}\boldsymbol{\mu}_0) = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}_t}^{-1/2}(\boldsymbol{\mu}_1\text{-}\boldsymbol{\mu}_0), \textit{ out of control} \end{cases}$$

dan

$$Var\left[\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2}(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{\mu}_0)\right] = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2}\right)' = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{1/2} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2}\right)' = \mathbf{I}.$$

Parameter non-sentralitas δ didefinisikan sebagai $\delta = (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)$. Jadi parameter non-sentralitas hasil transformasi dari bentuk $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2}(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{\mu}_0)$ adalah:

$$\begin{aligned} \delta &= \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2} - (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) - \mathbf{0}\right)' \mathbf{I}^{-1} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2} - (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) - \mathbf{0}\right), \\ &= (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1/2} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)\ , \\ &= (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0). \end{aligned}$$

Dari hasil transformasi ini, dan diasumsikan bahwa $\boldsymbol{x}_t$ mempunyai varians identitas dan mean nol akan menunjukkan bahwa diagram kontrol MEWMA merupakan fungsi dari $\boldsymbol{\mu}$

melalui parameter non-sentralitas (Lucas dan Saccucci, 1990 dan Lowry, Woodall, Champ, dan Ridgon, 1992).

Sistim monitoring menggunakan diagram kontrol MEWMA konvensional tidak lagi sesuai untuk menangani proses data tak random yang diasosiasikan dengan kasus data berautokorelasi dan data berkorelasi. Berdasarkan penelusuran pustaka di bagian pendahuluan terkait perluasan dari diagram kontrol MEWMA, perlu dikembangkan suatu skema monitoring yang tepat dalam penanganan proses tak random atau proses data tak-normal. Namun disini, diagram kontrol MEWMA yang diketengahkan melalui pendekatan model residual, dimana konstruksinya dapat diawali melalui aproksimasi bentuk kuadratis dari statistik T^2 dengan indeks waktu i sebagai berikut:

$$T_i^2 = \boldsymbol{z}_i' \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{z}_i}^{-1} \boldsymbol{z}_i, \tag{2.4}$$

dengan $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{z}_i}$ sebagai matriks kovarian dari $\boldsymbol{z}_i$. Penggunaan indeks waktu yang berbeda bersifat sementara karena dalam bentuk kanonik sudah tidak menggunakan indeks tersebut. Melalui pengaitan terhadap (2.3), misal vektor mean $\boldsymbol{z}_0$ di-*set* di nol dan statistik MEWMA untuk residual yang diasumsikan *i.i.d.* Misal $\boldsymbol{x}_i \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ dengan parameter diketahui sehingga $\boldsymbol{z}_i$ diketahui juga normal multivariat. Walau demikian, nilai awal $\boldsymbol{z}_0$ dari EWMA dapat diabaikan, dimana $\boldsymbol{z}_0$ di-*set* sebagai suatu nilai tertentu (misal $\boldsymbol{z}_0 = \mathbf{0}$), sehingga statistik T_i^2 menjadi berbeda dengan χ_m^2 eksak.

Dalam hal ini, untuk indeks waktu $i = 1,2,\dots,n$, $\boldsymbol{x}_i = \left(\boldsymbol{x}_{i1}', \boldsymbol{x}_{i2}', \dots, \boldsymbol{x}_{im}'\right)'$ sebagai vektor kolom berukuran $(nm \times 1)$, dan untuk $j = 1,2,\dots,m$, $(m < n)$ parameter pembobot $\boldsymbol{r} = \left[r, r(1-r), \dots, r(1-r)^j\right]'$ pada (2.2) dituliskan kembali dalam bentuk vektor kolom berukuran $(j \times 1)$, serta $\mathbf{I}_m$ sebagai matriks identitas berukuran $(m \times m)$. Sehingga di bawah asumsi kenormalan yaitu $\boldsymbol{x}_i \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$ dengan $\mathbf{V} = \left(\mathbf{I}_i \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_i}\right)$, vektor EWMA awal yang di-*set* untuk $\boldsymbol{z}_0 = \mathbf{0}$ memberikan

$$\boldsymbol{z}_i = (\boldsymbol{r} \otimes \mathbf{I}_m)\boldsymbol{x}_i, \tag{2.5}$$

dan
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{z}_i} = E[\boldsymbol{z}_i \boldsymbol{z}_i'] &= (\boldsymbol{r} \otimes \mathbf{I}_m) E[\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'] (\boldsymbol{r} \otimes \mathbf{I}_m)', \\
&= (\boldsymbol{r} \otimes \mathbf{I}_m)\left(\mathbf{I}_i \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_i}\right)(\boldsymbol{r} \otimes \mathbf{I}_m)', \\
&= (\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}') \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_i}, \\
&= \frac{1}{2-\boldsymbol{r}}\left(1 - (1-\boldsymbol{r})^{2i}\right)\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_i},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan $E[\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'] = \left(\mathbf{I}_i \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_i}\right)$ bersifat independen terhadap observasi di titik waktu i yang berbeda dan $\mathbf{I}_i$ sebagai matriks satuan berukuran $i \times i$, serta $(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}')$ sebagai matriks skalar.

Matriks kovarians pada (2.6) merupakan matriks kovarians eksak. Terkait dengan matriks kovarians asimtotis dari (2.1), Lowry, dkk (1992) memberikan matriks kovarians MEWMA sebagai:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{z}_i} = \left(\frac{r}{2-r}\right)\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_i}. \tag{2.7}$$

Sehingga dengan mengacu pada (2.5) dan (2.7), statistik T_i^2 pada (2.4) dapat dibentuk sebagai:

$$\begin{aligned} T_i^2 &= \boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{z}_i}^{-1}\boldsymbol{z}_i, \\ &= \boldsymbol{x}_i'\left(\boldsymbol{r}\otimes\mathbf{I}_p\right)'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{z}_i}^{-1}\left(\boldsymbol{r}\otimes\mathbf{I}_p\right)\boldsymbol{x}_i, \\ &= \boldsymbol{x}_i'\left(\boldsymbol{r}\otimes\mathbf{I}_p\right)'[(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}')^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]\left(\boldsymbol{r}\otimes\mathbf{I}_p\right)\boldsymbol{x}_i, \\ &= \boldsymbol{x}_i'(\mathbf{R}_r\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{-1})\boldsymbol{x}_i. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Perhatikan bahwa parameter pemulus pada (2.8) yang dinyatakan juga sebagai matriks $\mathbf{R}_{\boldsymbol{r}}$ merupakan parameter pembobot MEWMA dan dapat dinyatakan sebagai suatu matriks diagonal dengan elemen berbeda. Dalam hal ini, jika bobotnya berbeda untuk p variabel yang berbeda, maka untuk $i, j = 1,2,\dots,m \le p$, parameter pembobot MEWMA dapat ditulis sebagai matriks diagonal $\mathbf{W} = \text{diag}(r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im})$ dengan $0 < r_{ij} \le 1$, Dengan demikian dapat didefinisikan suatu matriks diagonal baru $\mathbf{R}$ berukuran $(j \times jm)$ dan ditulis sebagai:

$$\mathbf{R} = \left[\mathbf{W}, \mathbf{W}\left(\mathbf{I}_p - \mathbf{W}\right), \dots, \mathbf{W}\left(\mathbf{I}_p - \mathbf{W}\right)^j\right]. \tag{2.9}$$

Matriks ini menggantikan hasil kali Kronecker sebelumnya pada (2.5) yang dapat dinyatakan dalam bentuk kanonik $\boldsymbol{z} = \mathbf{R}\boldsymbol{x}$. Kemudian dari sifat diagonal matriks $\mathbf{RR}'$ diperoleh matriks kovarians dan ditulis sebagai

$$\boldsymbol{\Sigma}_z = \mathbf{R}\left(\mathbf{I}_p\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}\right)\mathbf{R}' = (\mathbf{RR}')\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}, \tag{2.10}$$

Sehingga berdasarkan (2.10), statistik MEWMA pada (2.3) dapat dinyatakan sebagai:

$$q = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{z}}^{-1}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}'\mathbf{R}\,\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}^{-1}(\mathbf{RR}')^{-1}\mathbf{R}\boldsymbol{x}. \tag{2.11}$$

atau

$$q = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{z}}^{-1}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}'(\mathbf{R}_r\otimes\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}^{-1})\boldsymbol{x}. \tag{2.12}$$

Perhatikan bahwa, jika $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im} = 1$ dalam $\mathbf{W}$, maka (2.10) direduksi ke (2.7), dan (2.11) atau (2.12) direduksi ke (2.8). Dalam hal $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im} < 1$, diagram kontrol MEWMA berbeda dengan diagram kontrol T^2 atau Khi-kuadrat. Berdasarkan hal ini, dapat dipahami bahwa diagram kontrol MEWMA menjadi sensitif terhadap kenaikan nilai $\boldsymbol{r}$ dan nilai *shift* δ yang kecil sekalipun. Meskipun demikian, pengembangan statistik MEWMA pada (2.11) atau (2.12) dibatasi untuk matriks kovarians asimtotis pada (2.7).

Dalam mendesain diagram kontrol MEWMA, Prabhu dan Runger (1997) menunjukkan bahwa pemilihan $\boldsymbol{r}$ yang tepat bergantung pada banyaknya variabel dan ukuran *shift* dalam skema pengontrolan. Sementara ukuran *shift* yang terjadi dalam diagram kontrol MEWMA dinyatakan dalam kuantitas parameter *non*-sentralitas atau dalam besaran skalar yaitu $\delta = (\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^{1/2}$. Nilai $\delta = 0$ menunjukkan keadaan *in-control*, sebaliknya nilai δ yang semakin besar berhubungan dengan *shift* mean yang lebih besar. Secara umum untuk nilai *shift* yang tidak nol akan menaikkan nilai ARL sebagai kenaikan dari parameter $\boldsymbol{r}$.

Terkait dengan batas atas kontrol yang digunakan dalam kasus multivariat dibatasi melalui bentuk kuadratis $\boldsymbol{z}_i'\boldsymbol{\Sigma}_{z_i}^{-1}\boldsymbol{z}_i > h$, dengan $h > 0$ yang dipilih berdasarkan target *in-control* ARL_0. Walaupun demikian, batas atas kontrol h pada (2.3) dapat didekati juga melalui batas atas kontrol berbasis obeservasi individual yang diberikan oleh Mason, Chou, Sullivan, Stoumbos dan Young (2003) dan Montgomery (2005). Penjelasan terkait batas atas kontrol yang digunakan diuraikan sebagai berikut.

Batas atas kontrol

Menurut Mason, dkk (2003) dan Montgomery (2005), penentuan batas atas kontrol yang lebih sesuai pada fase I pengontrolan dalam kasus penanganan observasi individual dengan obyek pengamatan tak random dapat mengacu pada pendekatan distribusi Beta yang didenotasikan sebagai UCL_B, dengan nilai peluang *false alarm* α ditetapkan (*fix*) dan ditulis sebagai:

$$\boxed{UCL_B = \frac{(n-1)^2}{n}\beta_{\alpha,p/2,(n-p-1)/2}} \tag{2.13}$$

Sementara pada fase II pengontrolan untuk $m > 100$, digunakan pendekatan batas atas pengontrolan yang merupakan pendekatan distribusi χ^2 atau F dan dinyatakan masing-masing sebagai:

$$\boxed{UCL_{\chi^2} = \chi^2_{\alpha,p}} \tag{2.14}$$

dan

$$\boxed{UCL_F = \frac{p(n-1)}{n-p} F_{\alpha,p,n-p}} \qquad (2.15)$$

Pada fase I pengontrolan, pertimbangan untuk menggunakan batas atas kontrol melalui pendekatan distribusi Beta adalah karena memiliki UCL yang lebih kecil dibandingkan dua pendekatan distribusi lainnya yang digunakan pada fase II. Hal ini dimaksudkan guna mendeteksi sumber *assignable cause* atau *special cause* lebih awal. Sedangkan pada fase II pengontrolan, sudah lebih ditekankan pada monitoring, khususnya monitoring terhadap efek yang mungkin masih terjadi sebagai akibat dari perubahan struktur parameter kontrol pada fase ini.

Penentuan batas atas kontrol ini terkait dengan efek dari proses tak random pada pemodelan deret waktu multivariat, dimana perubahan struktur parameter yang terjadi merupakan akibat dari akumulasi efek pada periode terjadinya *shock* dalam setiap variabel. Sehingga pemeriksaan utama yang perlu dilakukan dalam proses penentuan batas kontrol ini mengacu juga pada pengujian stabilitas model. Misalnya pada model multivariat time series seperti model VAR. Berdasarkan beberapa pemeriksaan yang telah dilakukan baik secara analitik dan numerik (Montgomery, 2005), pemilihan batas kontrol yang relatif *robust* berdampak positif terhadap efek struktur data *time series*, khususnya dalam penanganan data berpola dengan ukuran sampel tertentu.

Di lain pihak, dari beberapa kajian sebelumnya yang dilaporkan oleh Montgomery (2005) mengenai sensitifitas diagram kontrol MEWMA dan skema desain yang diberikan juga pada Lowry, dkk (1992), dan Reynolds dan Cho (2006). Secara umum, diagram kontrol MEWMA memiliki kinerja yang baik terhadap *shift* kecil. Di lain pihak, diagram kontrol MEWMA juga menjadi tidak sensistif pada nilai ***r*** yang kecil dalam proses data multivariat. Sehingga terlihat bahwa interpertasi terhadap pola tak random menjadi kompleks, ketika lebih dari satu pola juga hadir bersamaan dalam satu diagram kontrol. Hal ini tentu saja memerlukan penanganan yang tepat terhadap perubahan parameter kontrol. Walaupun demikian, penulusuran alternatif terhadap distribusi MEWMA terkait dengan parameter pembobot ***r***, untuk $r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{im}$ bernilai berbeda atau $(r_{i1} > r_{i2} > \cdots > r_{im})$ dalam $\mathbf{W}$ dicapai melalui pendekatan analisis struktur aljabar matriks dari bentuk kuadratis statistik T_i^2 pada entri blok diagonal **W** yang diketengahkan kemudian di sub bab 2.2.2 dan sub bab 4.4.

Inovasi dari penelitian ini terletak pada dua sub bab tersebut di atas guna merekonstruksi suatu matriks *generalized* $\mathbf{A}$ dalam kaitannya dengan distribusi hampiran yang dikenakan pada statistik MEWMA. Hal ini berkaitan dengan distribusi pendekatan yang digunakan dan sifat-sifat estimator seperti MLE yang umumnya dapat dipedomani dalam penelusuran distribusi suatu estimator sebelum diaplikasikan pada statistik MEWMA.

Umumnya, terdapat dua hal yang dapat dijadikan perhatian dalam aplikasi. Pertama, bagaimana distribusi dari matriks *generalized* $\mathbf{A}$ atau yang umumnya dikenali juga sebagai distribusi Wishart *inverted* $\mathbf{A}^{-1}$. Kedua, terkait dengan distribusi normal multivariat untuk matriks kovarians tidak diketahui (Muirhead, 2005). Bagian kedua merupakan bagian aplikasi yang umum digunakan dalam pengujian hipotesa terhadap vektor mean melalui statistik Hotelling T^2 yang diberikan juga pada definisi A1 dan A2 dalam lampiran A. Namun demikian, terkait dengan analisis matriks kovarians sampel $\mathbf{S} = \frac{1}{n}\mathbf{A}$, distribusi Wishart dapat dijadikan sebagai terminologi dalam penelusuran distribusi multivariat. Khususnya dalam analisis terkait sifat-sifat dari estimator $(\bar{\boldsymbol{x}}, \mathbf{A})$ yang diestimasi melalui estimator LS dan GA, dan diimplementasikan pada statistik MEWMA pada (2.11) atau (2.12) diatas. Berikut ini akan diketengahkan kriteria kecukupan yang harus dipenuhi suatu estimator sebelum diaplikasikan pada statistik MEWMA.

2.2 Konsep Analisis Multivariat untuk Diagram Kontrol MEWMA

Beberapa konsep terkait dengan parameter $\mathbf{R}$ dan analisis struktur matriks $\mathbf{A}$ dimaksudkan untuk melakukan pengaitan terhadap analisis matriks kovarians sampel $\mathbf{S} = \frac{1}{N}\mathbf{A}$. Estimator $\bar{\boldsymbol{x}}$ dan $\mathbf{S}$ sebagai estimator tak bias dari $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$, dimana pada bagian 3.1.1 (Anderson, 1983) telah ditunjukkan juga bahwa $\bar{\boldsymbol{x}}$ dan $\mathbf{S}$ memenuhi sifat kecukupan dan kelengkapan. Terkait dengan sifat kecukupan dari estimator $\bar{\boldsymbol{x}}$ dan $\mathbf{S}$ dapat dijelaskan sebagai berikut. Suatu statistik T dikatakan cukup (*sufficient*) untuk suatu keluarga distribusi $\boldsymbol{x}$ atau suatu parameter θ jika distribusi bersyarat dari $\boldsymbol{x}$ diberikan $T = t$ tidak bergantung pada θ. Dalam artian bahwa statistik T memberikan informasi tentang θ sebagai bagian dari sampel $\boldsymbol{x}$. Misal $\boldsymbol{x}$ bersifat *i.i.d*, dan distribusinya bergantung pada suatu parameter θ.

2.2.1 Kriteria Kecukupan suatu Estimator (Anderson,1983)

Suatu statistik $t(\boldsymbol{y})$ dikatakan cukup untuk θ jika $f(\boldsymbol{y};\theta)$ dapat difaktorkan sebagai

$$f(\boldsymbol{y};\theta) = g(t;\theta)k(\boldsymbol{y}) \tag{2.16}$$

dimana k merupakan suatu fungsi non negatif dan tidak bergantung pada θ. Namun demikian, kriteria kecukupan yang dimaksudkan disini selalu bergantung pada asumsi awal mengenai suatu keluarga distribusi dari statistik $t(\boldsymbol{y})$. Adapun penelusuran terhadap kriteria kecukupan dari estimator $(\overline{\boldsymbol{x}}, \mathbf{A})$ diawali melalui Teorema 2.1 berikut ini.

Teorema 2.1 Kriteria Kecukupan (Anderson,1983)

Jika $\boldsymbol{x}_i$ merupakan suatu observasi dari $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ untuk $n \leq N$, maka $\overline{\boldsymbol{x}}$ dan $\mathbf{S}$ disebut cukup untuk $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$. Jika diberikan $\boldsymbol{\mu}$, $\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})'$ sebagai syarat cukup untuk $\boldsymbol{\Sigma}$. Sebaliknya, Jika diberikan $\boldsymbol{\Sigma}$, maka $\overline{\boldsymbol{x}}$ merupakan syarat cukup untuk $\boldsymbol{\mu}$.

Bukti:

Berdasarkan bentuk pemfaktoran fungsi densitas pada (2.16), densitas dari $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N$ dapat difaktorkan sebagai:

$$\prod_{i=1}^{N} n(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}Np}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}N}\, exp\left[-\tfrac{1}{2}\, tr\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})'\right]$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}Np}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}N}\, exp\left\{-\tfrac{1}{2}[N(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}) + (N-1)\, tr\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}]\right\} \tag{2.17}$$

Pandang ruas kanan dari (2.17) dan kaitkan dengan bentuk dari (2.16) yang direpresentasikan oleh statistik $\overline{\boldsymbol{x}}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$. Perhatikan bagian $g(t;\theta)$ pada (2.16), statistik $\boldsymbol{\Sigma}$ direpresentasikan oleh $\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})'$ untuk setiap kasus $k(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = 1$. Sementara itu, statistik $\overline{\boldsymbol{x}}$ dan $\boldsymbol{\mu}$ direpresentasikan oleh $k(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = exp\{-\frac{1}{2}(N-1)\, tr\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}\}$.

Dalam hal ini, jika $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})'$ dengan $\mathbf{S} = \frac{1}{n}\mathbf{A}$ sebagai parameter dan hasil estimasi untuk observasi ke n masing-masing bersifat tak bias terhadap $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$, maka yang dibutuhkan hanya $\overline{\boldsymbol{x}}$ dan $\mathbf{A}$ sebagai fungsi sampel atas $(\overline{\boldsymbol{x}}, \mathbf{S})$ sedemikian hingga memenuhi sifat kecukupan untuk $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$ (pada keluarga distribusi normal multivariat, untuk $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$). Jadi, disimpulkan bahwa penentuan MLE dari $(\overline{\boldsymbol{x}}, \mathbf{S})$ sebagai statistik $\boldsymbol{\mu}$ dan $\boldsymbol{\Sigma}$ dapat memaksimalkan fungsi *likelihood* dari (2.17) dan dinyatakan kembali sebagai:

$$(2\pi)^{-np/2} det(\boldsymbol{\Sigma})^{-n/2} exp\{tr[-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{A} + n(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})')]\}. \quad (2.18)$$

Justifikasi terkait bukti dari (2.18) terhadap penaksir parameter ini diuraikan melalui Teorema 1 pada Lampiran A2. Lebih dari itu, dibawah asumsi yang lebih umum, jika **S** sebagai matriks kovarians sampel yang dibentuk dari n vektor acak $\boldsymbol{x}_i$ yang bersifat *i.i.d* atau *non-i.i.d* (tidak harus normal) berukuran $(n \times p)$ dengan $n > p$, maka **S** bersifat positif definit dengan peluang satu. Sifat ini berlaku jika dan hanya jika $P(\boldsymbol{x}_i \in F_s) = 0$, $\forall s - \mathit{flat}$ pada $\mathbb{R}^p$ dengan $(0 \leq s \leq p)$ sebagai syarat dalam proses penormalan. Proses ini merupakan suatu proses translasi $F_s = \{\boldsymbol{x}_i\} + F_{s(0)}$ dari $\{\boldsymbol{x}_i\}$ yang terletak pada suatu sub ruang linier berdimensi s atau sub ruang s pada $F_{s(0)}$ di $\mathbb{R}^p$ (Muirhead, 2005).

Salah satu sifat penting terkait distribusi Wishart adalah jika **S** ternyata bersifat bias terhadap $\boldsymbol{\Sigma}$, maka pertama-tama harus diperiksa sifat-sifat positif definit dari $\boldsymbol{\Sigma}$. Melalui Teorema 2.2 berikut, akan ditunjukkan $\boldsymbol{\Sigma} > 0$ dan syarat alternatifnya dari suatu vektor acak, serta konsekuensinya terkait dimensi (*rank*) pada fungsi *likelihood*nya.

Teorema 2.2 Syarat Positif Definit Suatu Matriks A (Muirhead, 2005)
Matriks **A** bersifat positif definit dengan peluang satu jika dan hanya jika $n \geq p$.

Bukti:
Misal, $\mathbf{A} = \mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ dengan $\mathbf{Z}$ sebagai matriks berukuran $(n \times p)$ dan $\mathbf{Z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma})$. Karena $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ bersifat non-negatif definit (Definisi 3.1.3, Muirhead, 2005), sehingga cukup ditunjukkan bahwa dengan peluang satu, $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ adalah non-singular jika dan hanya jika $n \geq p$.

Pertama, untuk kasus $n = p$, vektor-vektor kolom $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p$ pada $\mathbf{Z}'$ merupakan vektor-vektor acak yang berdistribusi bebas $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ dan dapat dinyatakan sebagai $P(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p)$ yang bersifat tak bebas secara linier.

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_p) &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{p} P(\boldsymbol{z}_i \text{ sebagai suatu kombinasi linier dari } \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{i-1}, \boldsymbol{z}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{z}_p), \\
&= pP(\boldsymbol{z}_1 \text{ sebagai suatu kombinasi linier dari } \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_p), \\
&= pE[P(\boldsymbol{z}_1 \text{ sebagai suatu kombinasi linier dari } \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_p | \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_p)], \\
&= pE[0] = 0. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Dalam hal ini, fakta bahwa $\boldsymbol{z}_1$ terletak dalam suatu ruang berdimensi kurang dari p dengan peluang nol karena $\boldsymbol{\Sigma} > 0$. Sehingga yang perlu ditunjukkan selanjutnya dalam kasus $n = p$, *rank* dari $\mathbf{Z}$ adalah p (dengan peluang satu). Kedua, untuk kasus $n > p$, *rank* dari $\mathbf{Z}$ adalah p (dengan peluang satu), karena penambahan baris pada $\mathbf{Z}$ tidak dapat mengurangi $rank$ dari $\mathbf{Z}$, dan untuk kasus $n < p$, $rank(\mathbf{Z}) < p$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathbf{Z}$ memiliki $rank = p$ (dengan peluang satu) jika dan hanya jika $n \geq p$ dan akibatnya $\mathbf{A} = \mathbf{ZZ}'$ memiliki $rank = p$ (dengan peluang satu) jika dan hanya jika $n \geq p$. Jadi, $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ bersifat non-singular jika dan hanya jika $n \geq p$.

2.2.2 Analisis Matriks *Generalized* A (Horn dan Johnson, 1985)

Dalam merekonstruksi matriks *generalized* **A** yang juga mengambil bentuk kuadratis (matriks simetris) dari bentuk (2.10) yang diberikan juga melalui (2.6) dan (2.7). Proses rekonstruksi diawali melalui pengaitan dengan matriks normal dan dinyatakan dalam bentuk matrik partisi

$$\mathbf{A} = [\mathbf{R} \vdots \mathbf{A}_i], \tag{2.20}$$

dengan $\mathbf{A}_i \in \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n,2}(\Re)$ dipandang sebagai matriks normal dan **R** sebagai matriks koefisien yang dipartisi sebagai berikut:

Pertama, bentuk **R** matriks koefisien dimana entri blok diagonal sebagai

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \cdots & \mathbf{W}(\mathbf{I}_m - \mathbf{W})^{j \neq i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{W}(\mathbf{I}_m - \mathbf{W})^{j=1} \end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

dengan $\mathbf{R}_{r_1} = \mathbf{W}$, $\mathbf{R}_{r_2} = \mathbf{W}(\mathbf{I}_p - \mathbf{W}), \dots, \mathbf{R}_{r_m} = \mathbf{W}(\mathbf{I}_p - \mathbf{W})^j$ untuk $j = 0,1,2, \dots, m$ dan $(m < n)$. Kedua, bentuk blok matriks partisi $\mathbf{A}_i$ yang dipandang sebagai $\mathbf{A}_i = [\mathbf{A}_0 \colon \mathbf{A}_k]' | \mathbf{A}_i \in \mathbf{M}_{n,2}(\Re)$ untuk $i = 0,1,2, \dots, k$ dan $(k < m < n)$ sehingga dapat dibentuk suatu matriks partisi yang terdiri atas entri matriks blok diagonal pada suatu matriks segitiga atas **A** sebagai berikut,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vdots & \mathbf{A}_0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}, \tag{2.22}$$

dengan

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{r_1} & \cdots & \mathbf{R}_{r_{j \neq m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_{r_m} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{k,1}(\Re), \tag{2.23}$$

$$\mathbf{A}_0 = [\mathrm{A}_{01} \quad \mathrm{A}_{02} \quad \cdots \quad \mathrm{A}_{0k}] \in \mathbf{M}_{k,2}(\Re), \tag{2.24}$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \cdots & \mathrm{A}_{1k} \\ & \mathrm{A}_{22} & \cdots & \mathrm{A}_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \mathrm{A}_{kk} \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Tulis,

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c:cccc} \mathbf{R} & \mathrm{A}_{01} & \mathrm{A}_{02} & \cdots & \mathrm{A}_{0k} \\ \hdashline & \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \cdots & \mathrm{A}_{1k} \\ & & \mathrm{A}_{22} & \cdots & \mathrm{A}_{2k} \\ \mathbf{0} & & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & \mathrm{A}_{kk} \end{array}\right] \in \mathbf{M}_n(\Re), \tag{2.26}$$

untuk $1 \leq k+m \leq n$. Dalam hal ini, **A** merupakan suatu matriks partisi yang terdiri atas entri matriks blok diagonal pada segitiga atas, dengan **R** sebagai matriks blok diagonal pertama pada segitiga kiri atas. Selanjutnya, **A** dipandang sebagai suatu matriks dari klas matriks normal, yang dapat dikaitkan dengan Teorema 6 pada Timm (2002) dan Teorema 2.5.8 pada Horn dan Johnson (1985), dan dijelaskan sebagai berikut.

Misal $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n(\Re)$, **A** disebut matriks normal jika dan hanya jika terdapat suatu matriks orthogonal **Q** bernilai riil atau $\mathbf{Q} \in \mathbf{M}_n(\Re)$ sedemikian hingga

$$\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_2 & \vdots \\ 0 & \ddots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_n(\Re) \text{ untuk } 1 \leq k \leq n, \tag{2.27}$$

dengan **A** yang juga memuat suatu matriks riil berukuran (1×1) atau (2×2) dan ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{A}_j=\begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Dalam hal ini, matriks **A** yang diberikan pada (2.26) disebut sebagai matriks normal dengan akar-akar laten $\lambda_{r_1} \geq \cdots \geq \lambda_{r_i}$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{r_{i1}} & \cdots & \mathbf{R}_{r_{im\neq jm}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_{r_{im}} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_m(\Re),$$

Sedangkan, $[\mathbf{A}_{01} \quad \mathbf{A}_{02} \quad \cdots \quad \mathbf{A}_{0k}] \in \mathbf{M}_{m,2}(\Re)$, dan $\mathbf{A}_{ij} \in \mathbf{M}_2(\Re)$ untuk $i,j=1,2,\dots,k$ dan $j>i$. Berdasarkan pengaitan ini, pertama akan ditunjukkan bahwa **R** adalah matriks diagonal dan $\mathbf{A}_{ij}=\mathbf{0}$ untuk semua $j>i$.

Pertama, entri dari blok matriks diagonal utama yang pertama dengan ukuran $(p \times p)$ disamakan ke bentuk identitas $\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}'$ dan berkorespondensi dengan blok matriks **R** pada (2.21), dalam hal ini

$$\mathbf{R}'\mathbf{R}=\mathbf{R}\mathbf{R}'+\mathbf{A}_{01}\mathbf{A}_{01}'+\cdots+\mathbf{A}_{0k}\mathbf{A}_{0k}', \tag{2.29}$$

Berdasarkan sifat matriks Hermitian yang diberikan pada Horn dan Johnson (1985), (2.29) dapat dinyatakan sebagai

$$tr(\mathbf{R}'\mathbf{R}) = tr(\mathbf{R}\mathbf{R}'), \text{ atau}$$

$$tr(\mathbf{R}'\mathbf{R}) = tr(\mathbf{R}\mathbf{R}') + tr(\mathbf{A}_{01}\mathbf{A}_{01}') + \cdots + tr(\mathbf{A}_{0k}\mathbf{A}_{0k}'),$$

Dari Lemma 2.5.7 pada Horn dan Johnson (1985), ditunjukkan bahwa $tr(\mathbf{R}'\mathbf{R}) \geq 0$, atau

$$0 = tr(\mathbf{R}\mathbf{R}') + tr(\mathbf{A}_{01}\mathbf{A}_{01}') + \cdots + tr(\mathbf{A}_{0k}\mathbf{A}_{0k}'),$$

Selanjutnya, dimisalkan $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{0j}'\mathbf{A}_{0j} = \mathbf{A}_{0j}\mathbf{A}_{0j}' = 0$ untuk $j = 1, \dots, k$ dimana entri diagonal utama ke-i dari $\mathbf{A}_{0j}\mathbf{A}_{0j}'$ sebagai kuadrat jumlahan dari elemen-elemen bernilai riil pada baris ke-i dari $\mathbf{A}_{0j}$. Sehingga elemen-elemen tersebut bernilai nol, atau semua $\mathbf{A}_{0j} = 0, j = 1,2, \dots, k$ dan (2.27) direduksi ke bentuk $\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}'$.

Bukti yang diberikan pada Teorema 2.5.4 pada Horn dan Johnson (1985), ditunjukkan bahwa segitiga atas dari suatu matriks normal merupakan matriks diagonal terurut dengan $\mathbf{R} = diag(\mathbf{R}_{r_1}, \dots, \mathbf{R}_{r_m})$. Dengan demikian diperoleh bahwa entri blok diagonal utama yang berukuran (2×2) juga dapat ditulis dalam bentuk identitas, atau $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}'$ dan berkorespondensi dengan $\mathbf{A}_{11}$ pada (2.26) dan semua $\mathbf{A}_{0j} = 0$, $j = 1,2, \dots, k$. atau

$$\mathbf{A}_{11}'\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{11}' + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{12}' + \cdots + \mathbf{A}_{1k}\mathbf{A}_{1k}', \qquad (2.30)$$

Tetapi, $tr(\mathbf{A}_{11}'\mathbf{A}_{11}) = tr(\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{11}')$, sehingga

$tr(\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{12}') + \cdots + tr(\mathbf{A}_{1k}\mathbf{A}_{1k}') = 0$; $tr(\mathbf{A}_{1j}\mathbf{A}_{1j}') \geq 0$; $tr(\mathbf{A}_{1j}\mathbf{A}_{1j}') = 0$; $\mathbf{A}_{1j}\mathbf{A}_{1j}' = \mathbf{0}$, dan $\mathbf{A}_{1j} = 0$. Selanjutnya untuk $j = 2,3, \dots, k$ dapat memanfaatkan *Lemma* 2.5.7 pada Horn dan Johnson (1985) yang ditulis kembali sebagai *Lemma* 2.1 berikut ini.

***Lemma* 2.1**

Jika $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n$ sebagai matriks Hermitian dan $\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, maka semua nilai Eigen dari $\mathbf{A}$ adalah non negatif. Dalam hal ini, jika $tr(\mathbf{A}) = 0$ maka $\mathbf{A} = 0$.

Bukti:

Tulis, $\mathbf{A} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{u}^*$ dengan $\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2 \dots \boldsymbol{u}_n]$ sebagai matriks unitary dan $\boldsymbol{\Lambda} = diag(\mathbf{R}_{r_1}, \dots, \mathbf{R}_{r_n})$. Maka $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{u}^*\mathbf{A}\boldsymbol{u}$ sehingga $\mathbf{R}_{r_k} = \boldsymbol{u}_k^*\mathbf{A}\boldsymbol{u}_k \geq 0$. Akibatnya semua $\mathbf{R}_{r_k} \geq 0$ (sesuai dengan hipotesa). Dengan demikian, $tr(\mathbf{A}) = tr(\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{u}^*) = tr(\boldsymbol{u}^*\mathbf{A}\boldsymbol{u}) = tr(\boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{R}_{r_1} + \cdots + \mathbf{R}_{r_n}$.

Jadi, jika $tr(\mathbf{A}) = 0$ dan semua $\mathbf{R}_{r_k} \geq 0$, dapat disimpulkan bahwa $\mathbf{R}_{r_k} = 0, \boldsymbol{\Lambda} = 0$ dan $\mathbf{A} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}0\boldsymbol{u}^* = 0$.

Dengan cara yang sama, untuk $j = 2,3, \dots, k$ dapat diuraikan sebagai

$$\mathbf{A}_{22}^{'}\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{22}^{'} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{12}^{'} + \cdots + \mathbf{A}_{2k}\mathbf{A}_{2k}^{'}, \tag{2.31}$$

dengan $tr(\mathbf{A}_{22}^{'}\mathbf{A}_{22}) = tr(\mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{22}^{'})$, sedemikian hingga $tr(\mathbf{A}_{2k}\mathbf{A}_{2k}^{'}) \geq 0$; $tr(\mathbf{A}_{2j}\mathbf{A}_{2j}^{'}) = 0$; $\mathbf{A}_{2j}\mathbf{A}_{2}^{'} = 0$, dan $\mathbf{A}_{2j} = 0$ dan akhirnya $tr(\mathbf{A}_{kk}\mathbf{A}_{kk}^{'}) = 0$; $\mathbf{A}_{kk}\mathbf{A}_{kk}^{'} = 0$; dan $\mathbf{A}_{kk} = 0$. Perhatikan bahwa, (2.31) direduksi ke $\mathbf{A}_{11}^{'}\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{11}^{'}$ sebagai matriks normal $\mathbf{A}_{11}$ dengan blok diagonal berukuran (2×2). Secara berurutan, penentuan entri blok diagonal utama dari identitas $\mathbf{A}^{'}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\prime}$ yang berkorespondensi dengan blok $\mathbf{A}_{ii}$ pada (2.26) untuk $i = 1,2,3,\ldots,k-1$ yaitu:

$$\mathbf{A}_{22}^{'}\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{22}^{'},\ldots,\mathbf{A}_{kk}^{'}\mathbf{A}_{kk} = \mathbf{A}_{kk}\mathbf{A}_{kk}^{'}, \tag{2.32}$$

Sedemikian hingga semua entri blok di luar blok diagonal utama $(i \neq j)$ bernilai nol (terurut) dan semua blok diagonal $\mathbf{A}_{ii}$ merupakan matriks normal. Jadi, suatu matriks orthogonal bernilai riil dapat direduksi menjadi matriks normal. ■

Terkait dengan matriks normal $\mathbf{A}_j$ yang diberikan pada (2.28), misal $\mathbf{A}_j$ dinyatakan sebagai blok matriks berukuran (2×2) dan misal ditulis sebagai

$$\mathbf{A}_{jj} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_2(\Re),$$

sehingga dengan menyamakan kedua blok tersebut, yaitu entri blok 1,1 dan blok 1,2 ke bentuk identitas $\mathbf{A}_{jj}^{'}\mathbf{A}_{jj} = \mathbf{A}_{jj}\mathbf{A}_{jj}^{'}$. Dalam hal ini, bentuk identitasnya diberikan dengan hubungan $b^2 = c^2$, sehingga $c = \pm b$, dan $ac + bd = ab + cd$, atau $2b(a-d) = 0$ jika $c = -b$; Untuk kasus $c = +b$ dan $b = 0$ dapat dikeluarkan, karena $\mathbf{A}_{jj}$ simetrik sehingga yang digunakan kemudian hanyalah entri blok yang bernilai riil pada matriks $\mathbf{A}_{jj}$. Sementara entri blok yang memberikan nilai Eigen non-riil berupa pasangan nilai konjugat dari hubungan $c = -b, a = d$ tidak dibahas disini. Sebagai konsekuensi dari Teorema 5.8.1 pada Horn dan Johnson (1985) yang diaplikasikan hanya pada kasus matriks normal bernilai riil. Akibat dari konsekuensi ini terhadap bentuk kanonik matriks riil normal **A** adalah:

(i) **A** simetrik,

(ii) **A** *skew*-simetrik, dan

(iii) **A** orthogonal.

Akibat dari ketiga bentuk ini (i), (ii), dan (iii) masing-masing diberikan melalui *Corollary* 2.1 berikut.

Corollary 2.1 (Horn dan Johnson, 1985)

Misal $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n(\Re)$, maka

i. $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ jika dan hanya jika ada suatu matriks riil orthogonal $\mathbf{Q} \in \mathbf{M}_n(\Re)$ sedemikian hingga

$$\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_{\mathbf{A}_{11}} & \cdots & \mathbf{A}_{i \neq j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \lambda_{\mathbf{A}_{ij}} \end{bmatrix} \text{ dengan } \forall \lambda_{\mathbf{A}_{ij}} \in \Re, \tag{2.33}$$

ii. $\mathbf{A} = -\mathbf{A}'$ jika dan hanya jika ada suatu matriks riil orthogonal $\mathbf{Q} \in \mathbf{M}_n(\Re)$ sedemikian hingga

$$\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & \mathbf{0} & & & \\ & & & \mathbf{A}_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}, \tag{2.34}$$

dengan $\mathbf{A}_j \in \mathbf{M}_2(\Re)$ dengan bentuk $\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} 0 & \beta_j \\ -\beta_j & 0 \end{bmatrix}$; dan

iii. $\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{I}$ jika dan hanya jika ada suatu matriks riil orthogonal $\mathbf{Q} \in \mathbf{M}_n(\Re)$ sedemikian hingga

$$\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{r_1} & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & \mathbf{R}_{r_j} & & & \\ & & & \mathbf{A}_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

dengan setiap $\mathbf{R}_{r_j} = \pm 1$ dan dengan setiap $\mathbf{A}_j \in \mathbf{M}_2(\Re)$ untuk $j = 1,2, \dots, m < k$ dengan bentuk

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix}, \theta_j \in \Re,$$

Berdasarkan bukti dari ketiga kasus ini diperoleh bahwa secara struktural, matriks $\mathbf{A}$ yang dihipotesakan sebagai matriks riil normal melalui matriks $\mathbf{A}$ pada (2.26) dan (2.27) merepresentasikan tiga bentuk struktural yang mungkin terjadi pada matriks $\mathbf{A}$. Secara umum, bukti dari ketiga bentuk ini disketsakan sebagai berikut:

i. Jika $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$, maka setiap $\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j'$ sehingga semua $\beta_j = 0$ dan $\mathbf{Q}'\mathbf{A}\mathbf{Q}$ diagonal;

ii. Jika $\mathbf{A} = -\mathbf{A}'$, maka setiap $\lambda_{r_j} = -\lambda_{r_j}'$ dan $\mathbf{A}_j = -\mathbf{A}_j'$, sehingga semua $\mathbf{R}_{r_j} = 0$ dan semua $\alpha_j = 0$;

iii. Jika $\mathbf{AA}' = \mathbf{I}$, maka setiap $\lambda_{r_j}\lambda_{r_j} = 1$ dan $\mathbf{A}_j\mathbf{A}_j' = \mathbf{I}$, sehingga semua $\lambda_{r_j}^2 = 1$ dan semua $\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$; Dalam hal ini, $\lambda_{r_j} = \pm 1$ dan $\alpha_j = \sin\theta_j, \beta_j = \cos\theta_j$ ■

Bentuk dari (i) dan (ii) dapat diperiksa kembali dan diawali melalui proses faktorisasi nilai Eigen dengan dua asumsi dasar (diketahui) bahwa nilai Eigen dan vektor Eigen dari matriks simetris adalah bernilai riil. Sementara, jika **A** matriks normal dengan semua nilai Eigennya bernilai riil, maka **A** simetrik. Demikian halnya dengan kasus **A** matriks *skew*-simetrik, berdasarkan Teorema 1.2.39 pada Horn dan Johnson (1985), selalu ada suatu matriks orthogonal **Q** sedemikian hingga dapat dibentuk suatu koleksi dari himpunan semua vektor Eigen dan semua nilai Eigen yang bersesuaian dengan **A**.

Secara umum, dalam kasus normal multivariat, matriks simetriks **A** selalu dapat direduksi ke bentuk (iii) sebagai matriks orthogonal. Adapun bentuk umum dari matriks simetrik (normal) yang didekomposisi ke bentuk matriks orthogonal dengan ukuran dimensi $m < k < n$ dan dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{Q}'\mathbf{AQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{A}_{01} & \mathbf{A}_{02} & \cdots & \mathbf{A}_{0k} \\ & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1k} \\ & & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2k} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{A}_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{A}_{kk} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_{m<k<n}(\Re). \quad (2.36)$$

Aplikasi dari proses rekonstruksi matriks *generalized* **A** dibawah suatu matriks normal ini ditekankan lebih pada pendekatan terhadap sifat-sifat matriks Hermitian.

Tahapan berikutnya, terkait dengan pengembangan diagram kontrol MEWMA berbasis model. Persoalan yang muncul dalam tahap ini kembali merujuk pada hubungan antara parameter pembobot dan parameter non-sentralitas pada statistik MEWMA. Berdasarkan sifat yang dimiliki diagram kontrol EWMA univariat dan perluasannya pada pengembangan diagram kontrol MEWMA dapat diaproksimasi melalui model deret waktu multivariat melalui model VAR(p). Kajian teoritis terkait model VAR(p) yang dimaksudkan diberikan pada bagian 2.3 berikut ini.

2.3 Model Deret Waktu Multivariat

Konsep analisis deret waktu yang terkait dengan proses estimasi pada vektor mean dan statistik kovarians dan atau/ korelasi yang dipandang sebagai matriks dan proses estimasinya pada Brockwell dan Davis (1991) dan Lütkepohl (2005) diketengahkan sebagai berikut:

2.3.1 Konsep Analisis Deret Waktu Multivariat

Misal, $\mathbf{Z}_t = \left[\boldsymbol{z}_{1,t}, \boldsymbol{z}_{2,t}, \dots, \boldsymbol{z}_{m,t}\right]', t = 0, \pm1, \pm2, \dots$ sebagai suatu matriks dari proses stasioner gabungan berdimensi-m yang bernilai riil sehingga mean $E\left[\boldsymbol{z}_{i,t}\right] = \boldsymbol{\mu}_i$ sebagai konstanta untuk setiap $i = 1,2, \dots, m$ dan kovarians silang antara $\boldsymbol{z}_{i,t}$ dan $\boldsymbol{z}_{j,s}$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, m$ dapat dinyatakan sebagai fungsi yang hanya bergantung pada perbedaan waktu (*s*-*t*). Akibatnya, nilai mean dapat dinyatakan dalam bentuk vektor

$$E[\mathbf{Z}_t] = \boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \boldsymbol{\mu}_m]', \tag{2.37}$$

dan matriks kovarians pada lag-k ditulis juga sebagai

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}(k) = Cov[\mathbf{Z}_t, \mathbf{Z}_{t+k}] &= E[(\mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Z}_{t+k} - \boldsymbol{\mu})'], \\ &= E\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{1,t} - \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{z}_{2,t} - \boldsymbol{\mu}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_{m,t} - \boldsymbol{\mu}_m \end{bmatrix} \left[\boldsymbol{z}_{1,t+k} - \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{z}_{2,t+k} - \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \boldsymbol{z}_{m,t+k} - \boldsymbol{\mu}_m\right]\right), \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{11}(k) & \boldsymbol{\gamma}_{12}(k) & \dots & \boldsymbol{\gamma}_{1m}(k) \\ \boldsymbol{\gamma}_{21}(k) & \boldsymbol{\gamma}_{22}(k) & \cdots & \boldsymbol{\gamma}_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_{m1}(k) & \boldsymbol{\gamma}_{m2}(k) & \dots & \boldsymbol{\gamma}_{mm}(k) \end{bmatrix} = Cov[\mathbf{Z}_{t-k}, \mathbf{Z}_t]. \end{aligned} \tag{2.38}$$

dimana $\boldsymbol{\gamma}_{ij}(k) = E\left[\boldsymbol{z}_{i,t} - \boldsymbol{\mu}\right]\left[\boldsymbol{z}_{j,t+k} - \boldsymbol{\mu}\right] = E\left[\boldsymbol{z}_{i,t-k} - \boldsymbol{\mu}\right]\left[\boldsymbol{z}_{j,t} - \boldsymbol{\mu}\right]$, untuk $k = 0, \pm1, \pm2, \dots, i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, m$ sebagai suatu fungsi dari lag-k, dan $\boldsymbol{\Gamma}(k)$ disebut sebagai fungsi matriks kovarians untuk proses dalam $\mathbf{Z}_t$. sehingga,

- Jika $i = j$, maka fungsi $\boldsymbol{\gamma}_{ii}(k)$ disebut fungsi autokovarians dari komponen ke-*i* dalam proses $\boldsymbol{z}_{i,t}$; dan
- Jika $i \neq j$, maka fungsi $\boldsymbol{\gamma}_{ij}(k)$ disebut fungsi kovarians silang antara proses $\boldsymbol{z}_{i,t}$ dan $\mathbf{z}_{j,t}$.

Penulisan $\boldsymbol{\Gamma}(0)$ pada Brockwell dan Davis (1991), menunjukkan bahwa matriks varians-kovarians proses yang bersifat sementara (*contemporaneous*). Dikatakan juga bahwa suatu proses stasioner gabungan mengakibatkan setiap komponen proses univariat menjadi stasioner (tidak berlaku untuk kebalikannya).

Terkait dengan estimasi parameter model dalam diagram kontrol MEWMA berbasis model, maka diberikan juga beberapa konsep yang menunjang proses estimasi, dan diawali dari matiks kovarians dan matriks korelasi apabila dipandang sebagai fungsi. Fungsi matriks korelasi dari suatu vektor proses didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{\rho}(k) = \mathbf{D}^{-1/2}\boldsymbol{\Gamma}(k)\mathbf{D}^{-1/2} = [\rho_{ij}(k)], \tag{2.39}$$

Untuk $i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, m$ dimana $\mathbf{D}$ sebagai matriks diagonal, dimana elemen diagonal ke-i merupakan varians dari proses ke-i, yaitu

$$\mathbf{D} = diag[\boldsymbol{\gamma}_{11}(0), \boldsymbol{\gamma}_{22}(0), \dots, \boldsymbol{\gamma}_{mm}(0)]. \tag{2.40}$$

Disini terlihat bahwa elemen diagonal dari $\boldsymbol{\rho}(k), \rho_{ii}(k)$ merupakan fungsi autokovariansi ke-i untuk komponen deret $\boldsymbol{z}_{i,t}$ mengingat elemen ke (i,j) diluar diagonal dari $\boldsymbol{\rho}(k)$.

$$\rho_{ij}(k) = \frac{\boldsymbol{\gamma}_{ij}(k)}{[\boldsymbol{\gamma}_{ii}(0)\boldsymbol{\gamma}_{jj}(0)]^{1/2}}, \tag{2.41}$$

merepresentasikan fungsi korelasi silang antara $\boldsymbol{z}_{i,t}$ dan $\boldsymbol{z}_{j,t}$. Seperti halnya fungsi autokovarians dan autokorelasi univariat, fungsi matriks kovarians dan matriks korelasi juga merupakan matriks semidefinit positif, dalam artian bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_i^{'} \boldsymbol{\Gamma}(t_i - t_j)\, \boldsymbol{\alpha}_j \geq 0, \tag{2.42}$$

dan

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\alpha}_i^{'} \boldsymbol{\rho}(t_i - t_j)\, \boldsymbol{\alpha}_j \geq 0, \tag{2.43}$$

untuk beberapa himpunan titik waktu $t_1, t_2, \dots, t_n$ dan beberapa himpunan vektor riil $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$. Hasilnya dapat diberikan melalui evaluasi terhadap variansi dari $\sum \boldsymbol{\alpha}_i^{'} \boldsymbol{z}_{t_i}$ dan standarisasinya.

Perhatikan bahwa, walaupun $\boldsymbol{\gamma}_{ij}(k) \neq \boldsymbol{\gamma}_{ij}(-k)$ dan $\boldsymbol{\Gamma}(k) \neq \boldsymbol{\Gamma}(-k)$ untuk $i \neq j$, namun karena

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_{ij}(k) &= E[\boldsymbol{z}_{i,t} - \boldsymbol{\mu}][\boldsymbol{z}_{j,t+k} - \boldsymbol{\mu}] = \boldsymbol{\gamma}_{ij}(k), \\ &= E[\boldsymbol{z}_{j,t+k} - \boldsymbol{\mu}][\boldsymbol{z}_{i,t} - \boldsymbol{\mu}] = \boldsymbol{\gamma}_{ji}(k), \end{aligned} \tag{2.44}$$

sehingga diperoleh,

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}(k) &= \boldsymbol{\Gamma}'(-k), \\ \boldsymbol{\rho}(k) &= \boldsymbol{\rho}'(-k). \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

Estimasi dari vektor mean dan fungsi korelasi silang dari deret waktu multivariat stasioner memainkan peran penting dalam mendeskripsikan dan memodelkan struktur dependensi antara komponen deret waktu. Seperti halnya, $\{\boldsymbol{z}_t = (\boldsymbol{z}_{t1}, \dots, \boldsymbol{z}_{tm})' - \infty < t < \infty\}$, yang merupakan deret waktu stasioner berdimensi-m dengan vektor mean dan fungsi matriks kovarians yang diberikan pada (2.44) dan (2.45).

Misal $\{\boldsymbol{z}_{tj}\}, t = 1,2, \dots, n$ sebagai himpunan semua barisan vektor dan estimasi tak bias dari $\boldsymbol{\mu}$ yang diberikan oleh vektor mean sampel

$$\bar{\mathbf{z}}_n = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{z}_t, \tag{2.46}$$

Maka mean ke-j dari deret waktu $\boldsymbol{\mu}_j$ diestimasi dengan $n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{z}_{tj}$ atau (2.46) merupakan estimator dari vektor mean. Jaminan dari sifat tak bias yang dimaksudkan disini adalah sifat konsistensi dari estimator $\bar{\boldsymbol{z}}_n$ dibawah syarat yang lebih lemah pada $\boldsymbol{\gamma}_{ii}(k)$ minimal yang dapat dibentuk melalui estimasi varians pada deret waktu univariat. Konsep ini diberikan secara rinci melalui Proposisi 3.1.1 dan 3.1.2 pada Brockwell dan Davis (1991) halaman 83-84.

Estimasi dari Matriks Kovarians $\boldsymbol{\Gamma}(k)$

Seperti halnya dalam kasus univariat, estimasi dari matriks kovarians $\boldsymbol{\Gamma}(k) = E[(\boldsymbol{z}_{t+k}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{z}_t-\boldsymbol{\mu})']$ sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(k) = \begin{cases} n^{-1}\sum_{t=1}^{n-k}(\boldsymbol{z}_{t+k}-\bar{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{n}})(\boldsymbol{z}_t-\bar{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{n}})' & \text{untuk } 0 \le k \le n-1 \\ n^{-1}\sum_{t=-k+1}^{n}(\boldsymbol{z}_{t+k}-\bar{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{n}})(\boldsymbol{z}_t-\bar{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{n}})' & \text{untuk } -n+1 \le k \le 0 \end{cases} \tag{2.47}$$

Tulis, $\boldsymbol{\gamma}_{ij}(k)$ untuk komponen (i,j) dari $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(k), i = 1,2$, sehingga fungsi korelasi silang dapat diestimasi melalui $\rho_{ij}(k) = \boldsymbol{\gamma}_{ij}(k)[\boldsymbol{\gamma}_{ii}(0)\boldsymbol{\gamma}_{jj}(0)]^{-1/2}$. Jika $i = j$, maka $\hat{\rho}_{ij}(k)$ direduksi ke fungsi autokorelasi sampel dari deret ke-i.

Sifat kekonsistenan (secara lemah) dari estimator $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}(k)$ atau $\hat{\rho}_{ij}(k)$ untuk model *moving average* orde tak-hingga (MA(∞)) diberikan melalui kasus bivariat (m=2). Sifat ini dapat dimanfaatkan untuk menentukan distribusi asimtotis dari estimator $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}(k)$ atau $\hat{\rho}_{ij}(k)$. Berdasarkan hal ini, pertimbangan terhadap cakupan landasan teori dari model deret waktu multivariat mengacu pada Box, Jenkins dan Reinsel (1994), Brockwell dan Davis (1991) dan Lütkepohl (2005), dapat difokuskan pada model VAR (p) yang diawali dengan bentuk standar dari model VARMA(p,q) berikut.

2.3.2 Model Vektor *Autoregresive Moving Average* (VARMA)

Proses vektor *autoregresive moving average* atau VARMA (p,q) merupakan kelas model parsimoni yang berguna dalam analisis multivariat *time series*, yang dalam Brockwell dan Davis (1991), dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{\Phi}_p(B)\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{\Theta}_q(B)\boldsymbol{a}_t, \tag{2.48}$$

dengan $\boldsymbol{\Phi}_p(B) = \boldsymbol{\Phi}_0 - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \boldsymbol{\Phi}_2 B^2 - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p$,

dan $\boldsymbol{\Theta}_q(B) = \boldsymbol{\Theta}_0 - \boldsymbol{\Theta}_1 B - \boldsymbol{\Theta}_2 B^2 - \cdots - \boldsymbol{\Theta}_q B^q$,

sebagai matriks polinomial *autoregresive order p* dan *moving average order q*, dan $\boldsymbol{\Phi}_0$ dan $\boldsymbol{\Theta}_0$ sebagai matriks *non-singular* berukuran $(m \times m)$. Dalam kasus *non-degenerate*, dimana matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}$ dari $\boldsymbol{a}_t$ atau $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{a}_t}$ adalah definit positif. Dalam hal ini, misal diasumsikan $\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{\Theta}_0 = \mathbf{I}$, dimana $\mathbf{I}$ sebagai matriks identitas berukuran $(m \times m)$ sehingga,

- Jika $p = 0$, maka proses menjadi vektor model MA(q)

$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{a}_t - \mathbf{\Theta}_1 \boldsymbol{a}_{t-1} - \mathbf{\Theta}_2 \boldsymbol{a}_{t-2} - \cdots - \mathbf{\Theta}_q \boldsymbol{a}_{t-q}, \tag{2.49a}$$

- Jika $q = 0$, maka proses menjadi vektor model AR(p)

$$\boldsymbol{z}_t = \mathbf{\Phi}_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \mathbf{\Phi}_2 \boldsymbol{z}_{t-2} + \cdots + \mathbf{\Phi}_p \boldsymbol{z}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t. \tag{2.49b}$$

Proses dikatakan stasioner, jika pembuat nol dari determinan polinomial $|\mathbf{\Phi}_p(B)|$ berada di luar lingkaran satuan. Dalam hal ini, (2.49b) dapat ditulis sebagai

$$\boldsymbol{z}_t = \mathbf{\Psi}(B)\boldsymbol{a}_t, \tag{2.50}$$

dengan $\mathbf{\Psi}(B) = [\mathbf{\Phi}_p(B)]^{-1}\mathbf{\Theta}_q(B) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{\Psi}_s B^s$, sedemikian hingga barisan $\mathbf{\Psi}_s$ merupakan suatu kuadrat jumlahan (*square summable*). Proses disebut *invertible* jika pembuat nol dari determinan polinomial $|\mathbf{\Theta}_q(B)|$ berada di luar lingkaran satuan, dan ditulis sebagai

$$\mathbf{\Pi}(B)\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{a}_t, \tag{2.51}$$

dengan $\mathbf{\Pi}(B) = [\mathbf{\Theta}_q(B)]^{-1}\mathbf{\Phi}_p(B) = \mathbf{I} - \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}_s B^s$ sedemikian hingga barisan $\mathbf{\Pi}_s$ merupakan suatu jumlahan mutlak (*absolutely summable*).

2.3.3 Model VektorAuto-Regresif (VAR)

Pentahapan dalam identifikasi dan penentuan parameter model deret waktu multivariat dapat diawali pada model *autoregressive* bivariat untuk orde polinomial p $(p = 1,2,\dots,m-1)$.

Model VAR(1) diberikan pada Brockwell dan Davis (1991) sebagai

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_1 B)\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{a}_t, \tag{2.52a}$$

atau

$$\boldsymbol{z}_t = \mathbf{\Phi}_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \boldsymbol{a}_t, \tag{2.52b}$$

untuk $m = 2$ (kasus bivariat), bentuk (2.52b) kemudian ditulis kembali sebagai

$$\begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,t} \\ a_{2,t} \end{bmatrix},$$

Proses vektor AR(p) secara umum diberikan sebagai

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_1 B - \cdots - \mathbf{\Phi}_p B^p)\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{a}_t, \tag{2.53a}$$

atau

$$\boldsymbol{z}_t = \mathbf{\Phi}_1 \boldsymbol{z}_{t-1} + \dots + \mathbf{\Phi}_p \boldsymbol{z}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t. \tag{2.53b}$$

Persamaan (2.53b) adalah *invertible*, dan agar proses menjadi stasioner, diperlukan pembuat nol dari $\left|\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_1 B - \cdots - \mathbf{\Phi}_p B^p\right|$ yang terletak diluar satuan lingkaran, atau secara ekuivalen, akar dari $\left|\lambda^p \mathbf{I} - \lambda^{p-1}\mathbf{\Phi}_1 - \cdots - \mathbf{\Phi}_p\right| = \mathbf{0}$ berada di dalam satuan lingkaran, ditulis,

$$\boldsymbol{z}_t = \left[\mathbf{\Phi}_p(B)\right]^{-1} \boldsymbol{a}_t, \tag{2.54a}$$

$$= \textstyle\sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{\Psi}_s \, \boldsymbol{a}_{t-s}, \tag{2.54b}$$

dengan bobot $\mathbf{\Psi}_s$ sebagai jumlahan kuadrat yang diperoleh dengan cara menyamakan koefisien B^j dari persamaan matriks:

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{\Phi}_1 B - \cdots - \mathbf{\Phi}_p B^p\right)\left(\mathbf{I} + \mathbf{\Psi}_1 B + \mathbf{\Psi}_2 B^2 + \cdots + \mathbf{\Psi}_q B^q\right) = \mathbf{I}, \tag{2.55}$$

dengan $\mathbf{\Psi}_1 = \mathbf{\Phi}_1, \cdots, \mathbf{\Psi}_j = \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Psi}_{j-1} + \cdots + \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Psi}_{j-p}$,

karena

$$\left[\mathbf{\Phi}_p(B)\right]^{-1} = \frac{1}{\left|\mathbf{\Phi}_p(B)\right|} \mathbf{\Phi}_p^{+}(B), \tag{2.56}$$

dengan $\mathbf{\Phi}_p^{+}(B) = \left[\mathbf{\Phi}_{ij}^{+}(B)\right]$ sebagai matriks *adjoint* dari $\mathbf{\Phi}_p(B)$, sehingga persamaan (2.56) dapat ditulis kembali sebagai

$$\left|\mathbf{\Phi}_p(B)\right| \boldsymbol{z}_t = \mathbf{\Phi}_p^{+}(B) \boldsymbol{a}_t. \tag{2.57}$$

Sekarang, pandang $\left|\mathbf{\Phi}_p(B)\right|$ sebagai suatu polinomial dalam B pada orde tertinggi mp, dan setiap $\mathbf{\Phi}_{ij}^{+}(B)$ merupakan polinomial dalam B pada orde tertinggi $(m-1)p$. Jadi, setiap komponen deret individual mengikuti model ARMA univariat dapat mencapai orde maksimumnya dengan ukuran$(mp, (m-1)p)$.

Model Vektor Autoregresif (VAR) Stabil (Lütkepohl, 2005)

Konsistensi dari model VAR(p) pada (2.52) dan (2.53) dengan barisan matriks $\mathbf{\Phi}_i$ berukuran $(K \times K)$ dapat dipelajari melalui pendekatan model VAR(1),

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{v} + \mathbf{\Phi}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t. \tag{2.58}$$

Jika mekanisme generasi dimulai pada saat $t = 1$, maka secara rekursif (2.58) ditulis:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{v} + \mathbf{\Phi}_1 \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{u}_1, \\
\boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{v} + \mathbf{\Phi}_1 \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{u}_2, \\
&= \boldsymbol{v} + \mathbf{\Phi}_1(\boldsymbol{v} + \mathbf{\Phi}_1 \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{u}_1) + \boldsymbol{u}_2, \\
&= (\mathbf{I}_K + \mathbf{\Phi}_1)\boldsymbol{v} + \mathbf{\Phi}_1^2 \boldsymbol{y}_0 + \mathbf{\Phi}_1 \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \\
&= (\mathbf{I}_K + \mathbf{\Phi}_1 + \cdots + \mathbf{\Phi}_1^{t-1})\boldsymbol{v} + \mathbf{\Phi}_1^{t} \boldsymbol{y}_0 + \textstyle\sum_{i=0}^{t-1} \mathbf{\Phi}_1^{i} \boldsymbol{u}_{t-i}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Akibatnya vektor $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_t$ dapat ditentukan secara tunggal melalui $\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_t$, demikian juga distribusi bersama dari $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_t$ dapat ditentukan melalui distribusi bersama dari $\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_t$.

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t,$$

$$= \left(\mathbf{I}_K + \boldsymbol{\Phi}_1 + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_1^j\right)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Phi}_1^{j+1} \boldsymbol{y}_{t-j-1} + \textstyle\sum_{i=0}^{j} \boldsymbol{\Phi}_1^i \boldsymbol{u}_{t-i}. \tag{2.60}$$

Jika semua nilai Eigen dari $\boldsymbol{\Phi}_1$ kurang dari 1, maka barisan $\boldsymbol{\Phi}_1^i$, untuk $i = 0,1, \dots$ merupakan bentuk jumlahan mutlak. Akibatnya jumlahan tak-hingga $\sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_1^i \boldsymbol{u}_{t-i}$ ada (*exist*) dalam kuadrat mean (Lütkepohl, 2005). Berdasarkan hal ini, suku pertama di ruas kanan (2.60) yaitu:

$$\left(\mathbf{I}_K + \boldsymbol{\Phi}_1 + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_1^j\right)\boldsymbol{v} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} (\mathbf{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1)^{-1} \boldsymbol{v}, \tag{2.61}$$

Menunjukkan bahwa barisan matriks $\boldsymbol{\Phi}_1^{j+1}$ pada (2.61) konvergen lebih cepat untuk $j \to \infty$, sehingga suku kedua $\boldsymbol{\Phi}_1^{j+1} \boldsymbol{y}_{t-j-1}$ dalam limit dapat diabaikan. Akibatnya, jika semua nilai Eigen dari $\boldsymbol{\Phi}_1$ bernilai kurang dari satu dan memenuhi (2.61), maka $\boldsymbol{y}_t$ merupakan model VAR(1) yang terdefinisi secara baik, yaitu:

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_1^i \boldsymbol{u}_{t-i}, \tag{2.62a}$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1)^{-1} \boldsymbol{v}, \tag{2.62b}$$

dan

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{y}}(h) = \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_1^{h+i} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{u}} \left(\boldsymbol{\Phi}_1^i\right)'. \tag{2.62c}$$

Penurunan dari kedua momen yang diberikan pada (2.62b) dan (2.62c), memberikan $E(\boldsymbol{y}_t) = \boldsymbol{\mu}$, karena $E(\boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_s') = \mathbf{0}$ untuk $s \neq t$ dan $E\left(\boldsymbol{u}_t \boldsymbol{u}_t'\right) = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{u}}$ untuk semua t. Akibatnya, distribusi dari $\boldsymbol{y}_t$ dapat ditentukan secara tunggal melalui distribusi dari proses $\boldsymbol{u}_t$. Artinya, jika nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{\Phi}_1$ terpenuhi atau jika modulusnya bernilai kurang dari 1, maka proses VAR(1) disebut proses stabil. Syarat ini ekuivalen dengan $det(\mathbf{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{z}) \neq 0,$ untuk $|\boldsymbol{z}| \leq 1$.

Selanjutnya, model VAR(p) dapat diperluas untuk $p > 1$, misal $\boldsymbol{y}_t$ merupakan suatu proses VAR(p) seperti dalam (2.62a) yang dikorespondensikan dengan VAR(1) berdimensi Kp dan dinyatakan dalam bentuk kompak sebagai

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{U}_t, \tag{2.63}$$

dengan $\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_t \\ \boldsymbol{y}_{t-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{t-p+1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \boldsymbol{\Phi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{p-1} & \boldsymbol{\Phi}_p \\ \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_k & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{U}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$

$(Kp \times 1) \quad (Kp \times 1) \quad (Kp \times Kp) \quad (Kp \times 1)$

vektor mean $\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{Y}_t] = \left(\mathbf{I}_{Kp} - \boldsymbol{\Pi}\right)^{-1} \boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Y}}(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}^{h+i} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{U}} \left(\boldsymbol{\Phi}^i\right)'$ sebagai matriks autokovarians, dengan $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{U}} = E[\mathbf{U}_t \mathbf{U}_s']$, dan matriks $\mathbf{J} \coloneqq [\mathbf{I}_K : \mathbf{0} : \ldots : \mathbf{0}]$ berukuran $(K \times Kp)$.

Proses $\boldsymbol{y}_t$ dapat ditulis sebagai $\boldsymbol{y}_t = \mathbf{J}\mathbf{Y}_t$ atau vektor mean dan matriks kovariansnya dapat dinyatakan berturut-turut sebagai $E[\boldsymbol{y}_t] = \mathbf{J}\boldsymbol{\mu}$ yang konstan untuk setiap t dan $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{y}}(h) = \mathbf{J}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{Y}}(h)\mathbf{J}'$ yang juga *invariant* terhadap setiap waktu t. Sehingga, $\mathbf{Y}_t$ merupakan suatu proses yang stabil jika hanya $det\left(\mathbf{I}_{Kp} - \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{z}\right) \neq 0$ untuk $|\boldsymbol{z}| \leq 1$, atau

$$det\left(\mathbf{I}_K - \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{z} - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{z}^p\right) \neq 0 \text{ untuk } |\boldsymbol{z}| \leq 1. \tag{2.64}$$

Dengan perkataan lain, proses $\mathbf{y}_t$ pada (2.63) disebut stabil apabila memenuhi (2.64) dan

$$\boldsymbol{y}_t = \mathbf{J}\mathbf{Y}_t = \mathbf{J}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{J}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\mathbf{J}\boldsymbol{\Phi}^i\mathbf{J}'\right)\mathbf{J}\mathbf{U}_{t-i}, \tag{2.65a}$$

dengan $\boldsymbol{\Phi}_i = \mathbf{J}\boldsymbol{\Phi}^i\mathbf{J}'$ yang dinotasikan sebagai *lag* dari matriks ke-*i* pada representasi MA yaitu

$$\boldsymbol{y}_t = \mathbf{J}\mathbf{Y}_t = \mathbf{J}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{J}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\mathbf{J}\boldsymbol{\Phi}^i\mathbf{J}'\right)\mathbf{J}\boldsymbol{u}_{t-i} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{u}_{t-i}. \tag{2.65b}$$

Dilain pihak, pengaitan terhadap model VAR yang dikonstruksi melalui representasi MA pada Lütkepohl (2005), untuk $\mathbf{U}_t = \mathbf{J}'\mathbf{J}\mathbf{U}_t$ dan $\mathbf{J}\mathbf{U}_t = \boldsymbol{u}_t$, karena $\mathbf{U}_t = \left(\boldsymbol{u}_t', 0, \ldots, 0\right)'$ sehingga $\boldsymbol{\Phi}^i$ dan $\boldsymbol{\Phi}_i$ bersifat *absolute summable* yang melibatkan proses *white noise* $\boldsymbol{u}_t$. Jadi, proses $\boldsymbol{y}_t$ ditentukan oleh *white noise* atau proses inovasi. Hal ini mengisyaratkan bahwa model VAR pada (2.63) sebagai asumsi yang diberikan kepada proses $\boldsymbol{u}_t$ berpengaruh terhadap proses $\boldsymbol{y}_t$. Artinya model dapat dibangun melalui (2.65b) sehingga melengkapi uraian sebelumnya terkait representasi model VAR(p) sebagai proses VARMA (lihat Lampiran A2).

Ketika proses parameter tidak diketahui, estimasi dapat dilakukan melalui dua cara sebagai langkah awal dalam konstruksi diagram kontrol. Pertama, matriks autokovarians $\boldsymbol{\Gamma}(k)$ yang diestimasi melalui $\boldsymbol{\Gamma}$. Kedua, konstruksi langsung pada statistik MEWMA eksak yang dapat diawali dari $\boldsymbol{z}_i = r\boldsymbol{x} + (1-r)\boldsymbol{z}_{i-1} \quad i = 1,2,\ldots$, yaitu dari observasi pertama sampai dengan observasi ke-i. Selanjutnya matriks varians-kovarians $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{z}_i}$ diestimasi berdasarkan nilai $\boldsymbol{z}_i$ untuk $i = 1,2,\ldots$

Cara kedua ini lebih menjanjikan dibandingkan terhadap cara pertama dalam konteks $\boldsymbol{z}_i$ sebagai variabel tak random karena dapat dimodelkan melalui proses *moving average*. Sebagaimana yang ditunjukkan pada model VMA(q) pada (2.47) dan (2.49a), matriks autokovarians bernilai nol setelah *lag* ke-q, yaitu $\boldsymbol{\Gamma}(k) = 0$ untuk $k > q$ dan

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma(0) & \Gamma(1)' & \cdots & \Gamma(q)' & \cdots & 0 \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \Gamma(1)' & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \Gamma(1) & \ddots & \ddots & & \Gamma(q)' \\ \Gamma(q) & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \Gamma(1)' \\ 0 & \cdots & \Gamma(q) & \cdots & \Gamma(1) & \Gamma(0) \end{pmatrix} \tag{2.66a}$$

Jika order q kecil, maka cukup mengestimasi $\hat{\Gamma}(0), \hat{\Gamma}(1), \ldots, \hat{\Gamma}(q)$. Misal pada kasus VMA(1),

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{z}_i} &= (\boldsymbol{r}\otimes\mathbf{I}_m)\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{r}\otimes\mathbf{I}_m), \\ &= \frac{r}{2-r}\left(1-(1-r)^{2i}\right)\Gamma(0) + \frac{r(1-r)}{2-r}\left(1-(1-r)^{2i-2}\right)(\Gamma(1)+\Gamma(1)')\end{aligned} \tag{2.66b}$$

Sehingga hanya $\hat{\Gamma}(0)$ dan $\hat{\Gamma}(1)$ yang perlu diestimasi pada konstruksi diagram kontrol. Melalui pendekatan matriks autokovarians untuk proses VMA dengan matriks koefisien dan matriks inovasi yang diketahui, maka matriks autokovarians dari $\boldsymbol{\Gamma}(k) = \sum_{k-i=0}^{q-1} \boldsymbol{\Phi}_i \Sigma_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\Phi}_i'$ dapat dihitung. Sementara untuk proses autoregresif, $\boldsymbol{\Gamma}(k)$ dapat dihitung melalui $\boldsymbol{\Gamma}(k) = \sum_{j=0}^{p} (k-j)\boldsymbol{\Phi}_j'$, dimana untuk lag-$k$ yang besar $(k \to \infty)$, proses autoregresif masih dapat didekati melalui pendekatan model VAR stabil.

Berdasarkan uraian diatas, secara konseptual, model MEWMA seharusnya dapat dimodelkan melalui pendekatan VMA. Namun demikian, atas dasar pertimbangan efisiensi dan kepraktisan dalam proses implementasi algoritma genetika pada diagram kontrol MEWMA maka pendekatan melalui proses VMA dapat digantikan melalui pengontrolan berbasis model VAR.

2.4 Algoritma Genetika

Algoritma genetika atau *Genetic Algorithm* (GA) merupakan algoritma optimasi yang didasarkan pada evolusi spesies yang dikembangkan pertama kali oleh Holland dan Golberg (Gen dan Cheng, 2000).

GA merupakan suatu teknik optimasi berdasarkan hukum seleksi alam dan genetika yang bersifat bebas gradient, parallel, dan juga merupakan algoritma pencarian bebas. GA dapat mengkonfirmasi kehandalannya dalam menyelesaikan berbagai masalah praktis yang secara umum memiliki definisi yang dianggap sakit (*ill-defined*) dan kompleks dengan fungsi objektif multimodal. GA juga dapat dikembangkan sebagai suatu algoritma pencarian lokasi secara langsung dalam penentuan solusi global optimum (Gen dan Cheng, 2000). Secara umum, terdapat lima bagian utama yang dapat dikerjakan melalui pendekatan GA dalam hal

- Bagaimana menentukan representasi genetika terhadap solusi permasalahan;
- Bagaimana menciptakan populasi awal terhadap penyelesaian;
- Bagaimana menentukan fungsi evaluasi yang menilai penyelesaian dalam *fitness*;
- Bagaimana menjalankan operator genetika yang merubah komposisi genetika dari *children* selama reproduksi; dan
- Bagaimana menentukan nilai-nilai parameter dari GA.

GA bersifat mempertahankan suatu populasi individual, misal P(*t*) untuk *t* generasi. Dimana setiap individual dapat merepresentasikan solusi potensial untuk setiap permasalahan yang ada. Kemudian setiap individual dievaluasi berdasarkan fungsi objektif yang diberikan sebagai *fitness*nya guna mencapai solusi. Adapun komponen (faktor) GA dan level pengujian parameter standar yang digunakan dalam mendesain GA oleh Swift dan Liu (2002) kembali dideskripsikan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Faktor dan level parameter uji GA

Faktor	Level
Ukuran populasi	60 dan 80
Pemilihan (*selection*)	*Roulette* dan *tournament*
Kawin silang (*crossover*)	1 titik, 2 titik, uniform
Peluang kawin silang, P_c	0,6 sampai dengan 0,8
Peluang mutasi, P_m	0,01 sampai dengan 0,05

Terkait dengan proses transformasi genetika, beberapa individu dalam populasi menjalani transformasi stokastik dalam hal operasi genetik ke dalam bentuk individu baru. Terdapat dua jenis transformasi: mutasi dan kawin silang. Mutasi merupakan transformasi yang dimaksudkan untuk menciptakan individu baru melalui perubahan dalam suatu individu tunggal, sedangkan kawin silang merupakan transformasi yang mengkreasi individu baru dengan mengkombinasikan bagian dari dua individu. Individu-

individu yang baru disebut sebagai anak (*offspring*) dapat dievaluasi pada proses selanjutnya. Populasi baru yang dibentuk melalui pemilihan beberapa *fitting* individu dalam populasi induk dan anak perlu dikaji kembali berdasarkan fungsi tujuan terhadap kendalanya. Setelah melewati beberapa generasi, algoritma dapat dipastikan telah konvergen ke suatu individu terbaik yang direpresentasikan sebagai solusi optimal atau solusi sub optimal dari suatu masalah.

Sementara dua isu utama dalam strategi pencarian dalam GA guna mengeksploitasi solusi terbaik dan eksplorasi ruang pencarian solusi. GA menyediakan cara pencarian solusi terbaik secara random dalam ruang yang lebih kompleks. Operator genetika mengacu pada pencarian buta (*blind search*), sehingga diharapkan bahwa dalam pemilihan operator dapat melakukan pencarian genetika secara langsung pada daerah/area penyelesaian yang diharapkan (*fiseable*) dari ruang solusi. Salah satu prinsip dasar untuk mengembangkan atau mengimplementasikan algoritma genetika adalah bagaimana membuat keseimbangan antara explorasi dan exploitasi pada ruang pencarian. Untuk memperoleh hal ini, semua komponen pada Tabel 2.1 dari algoritma genetik perlu ditentukan secara seksama.

2.4.1 Pindah Silang dan aplikasinya dalam Prosedur VARGA

Pindah silang (*crossover*) merupakan suatu operator rekombinasi yang mengkombinasikan sub bagian dari dua kromosom induk untuk menghasilkan keturunan (*offspring*) yang memuat beberapa bagian dari genetika induk seperti yang diberikan pada Gen. dan Cheng, 2000.

Pindah silang dilakukan untuk mendapatkan kombinasi yang lebih baik antara satu individu dengan individu yang lain dalam suatu populasi. Parameter penting pindah silang dalam kombinasi linier adalah peluang pindah silang. Jika parameter ini bernilai kecil, maka semakin sedikit kromosom yang mengalami pindah silang, atau sebaliknya, semakin besar nilai peluang (parameter) semakin besar peluang kromosom yang mengalami pindah silang. Misal nilai peluang adalah sebesar 0.5, maka terdapat separuh populasi yang mengalami pindah silang. Adapun metode pindah saling dalam kasus deret waktu multivariat yang diusulkan oleh Swift dan Liu (2002), dapat digunakan juga sebagai suplemen dalam proses reproduksi individual baru. Aturan dalam reproduksi yang berkenaan dengan metode pindah silang, mutasi, dan metode pemilihan dalam prosedur *Vector Autoregressive-Genetic Algorithm* (VARGA) yang diusulkan Swift dan

Liu (2002) menjadi salah satu pertimbangan dalam proses optimasi model VAR(p) residual.

Salah satu aplikasi pindah silang yang digunakan dalam prosedur VARGA yang diberikan oleh Swift dan Liu (2002) terkait dengan *order crossover* dan *gen crossover*. Order *crossover* dilakukan terhadap keseluruhan matriks, sedangkan *gen crossover* dilakukan hanya terhadap elemen matriks. Kedua metode ini didesain agar dapat diaplikasikan sebanyak mungkin pada keseluruhan kromosom guna meningkatkan efisiensi dalam penyilangan. Order pindah silang merupakan matriks yang berasal dari dua induk (*parents*) yang disalin kembali sebagai anak, dalam pengertian yang sama dalam pindah silang *uniform*. Setiap anggota dari populasi saat ini memiliki kesempatan terpilih untuk dikembangbiakan (*order crossover rate*). Subset yang berasal dari populasi yang dikembangbiakan kemudian dipasangkan secara acak sebagai induk (*parents*) guna menghasilkan dua anak dari setiap pasangan induk.

Dua pentahapan dalam konstruksi pembuatan anak diberikan sebagai berikut. Pertama, anak disalin dari orang tua yang diirepresentasikan dalam bentuk matriks, dan kedua, semua matriks dari kedua anak memiliki peluang yang sama (50%) untuk dihapus. Jika kedua anak tersebut memiki ukuran yang berbeda, maka digunakan matriks yang berkorespondensi dengan order. Strategi ini didasari pada asumsi bahwa matriks parameter dari setiap *time lag* selalu konsisten, atau matriks tersebut tidak digunakan jika berasal dari *time lag* yang berbeda. Sebagai tambahan, istilah order yang digunakan dalam konteks pindah silang dan order pada model VAR(p) adalah sama.

Mutasi dalam Prosedur VARGA

Dalam Swift dan Liu (2002), dua operator mutasi yang digunakan adalah mutasi gen dan mutasi terhadap seluruh matriks, termasuk juga penghapusan atau penambahan gen. Mutasi gen dilakukan apabila suatu individual dimutasikan terhadap setiap elemen dengan *rate* mutasi gen tertentu. Pemilihan matriks sigma merupakan acuan dalam mutasi gen. Hal ini dimaksudkan agar mutasi gen selalu berada dalam batas kontrol. Mutasi order diperlukan disini agar mengatasi perbedaan antar ukuran kromosom saat mutasi berlangsung dengan *rate* mutasi gen tertentu. Sementara mutasi antara dua *rate* tidak mempengaruhi kenaikkan dalam populasi.

Pemilihan (*selection*)

Operator pemilihan yang digunakan adalah *ranked survival* mengacu pada teknik *roulette wheel*, hanya saja yang digunakan adalah kromosom-kromosom-nya, bukan *fitness*-nya. Hal ini berhubungan dengan masalah minimilisasi, akibatnya *roulette wheel* yang paling 'jelek' dalam populasi yang digunakan. Peluang dari survival sama dengan hasil bagi antara fitness kromosom dan jumlahan *fitness* populasi. Jadi, hasil ramalan terbesar dari *error* ditentukan berdasarkan nilai peluang terbesar dari survival dan sebaliknya. Dari sini survival dari *rank* diperoleh, demikian halnya operator *elitism* yang diaplikasikan dalam proses pemilihan kromosom-kromosom terbaik yang bisa *survive* sampai pada pemilihan populasi berikutnya.

Motivasi yang mendasari penentuan parameter optimum VAR atau berbasis model melalui pendekatan model MTS pada Swift dan Liu, (2002) yang mengimplementasikan model VAR pada GA atau yang disebut sebagai model VARGA Model VARGA merepresentasikan suatu pemilihan proses nVAR(p) yang mungkin untuk kemudian di*fit* dari observasi sebagai suatu matriks $\mathbf{\Phi}_p$ berukuran $n \times n$. Dalam hal ini, GA diaplikasikan pada suatu populasi dari kandidat solusi atas sub-barisan matriks $\mathbf{\Phi}_p$ guna menentukan *fitting* data generasi yang sesuai dalam pemodelan.

Pada umumnya masalah optimasi berkaitan dengan masalah minimalisasi atau maksimalisasi suatu fungsi dengan beberapa variabel sebagai subjek terhadap suatu kesamaan dan /atau ketaksamaan sebagai konstrainnya. Penentuan nilai optimum global dalam masalah optimalisasi akan diabaikan ketika terdapat suatu pergantian generasi dari popolusi awal dari suatu individual (generasi) ke populasi baru (generasi berikut) melalui suatu penerapan operator genetik. Operator genetika dikategorikan dalam empat klas: (a) Operator konvensional; (b) Operator Aritmatik; (c) *operator based-direction*; dan (d) operator stokastik. Operator konvensional dapat dikonstruksi dengan memperluas operator bentuk representasi biner ke dalam bentuk pengkodean bilangan riil (*real-coding*). Operator-operator aritmatik dapat dikonstruksi berdasarkan konsep dasar kombinasi linier terhadap vektor-vektor dalam suatu ruang himpunan penyelesaian. Konsep dalam teori himpunan yang dapat diaplikasikan disini termasuk dalam area teori himpunan konveks (Gen dan Cheng, 2000). Dalam hal ini, operator-operator yang dibentuk berdasarkan arah (*direction*) merupakan pendekatan gradien (sub-gradien) arah dinyatakan sebagai representasi dari operator genetik. Operator stokastik misalnya, dari yang dihasilkan dari induk secara acak, khususnya yang berdistribusi secara Gaussian diperkenalkan disini sebagai sifat yang digunakan juga dalam operator genetika.

Terdapat beberapa teknik optimasi dalam masalah optimasi genetik, diantaranya adalah teknik optimisasi global, konstrain, kombinatorikal, dan multiobjektif yang dilakukan oleh Gen dan Cheng (2000). Hal ini berbeda dengan pengembangan GA yang diberikan pada Aparisi dan Darcía-Díaz (2004), dengan mengacu pada populasi awal yang bersifat random dan mengabaikan optimasi global yang umumnya tanpa konstrain. Adapun syarat operasional untuk MEWMA terdiri dari beberapa faktor yaitu: ukuran populasi, mekanisme pemilihan (*roulette or tournament*), *crossover* (1 *point*, *2 point*, atau uniform), peluang *crossover* (P_c), dan peluang mutasi (P_m). Prosedur aplikasi algoritma genetika dalam menentukan parameter $(r;k)$ optimum dari diagram kontrol EWMA dan MEWMA yang dikerjakan oleh Aparisi dan Darcía-Díaz (2004), merupakan salah satu acuan dalam penelitian ini.

Hal prinsip yang membedakan antara penelitian ini dengan Aparisi dan Darcía-Díaz (2004), terletak pada obyek pengamatan, dimana obyek utama dari penelitian ini mengacu pada jenis data tak random (pola sistematik). Aplikasi GA pada obyek pengamatan tak random disini dapat memberikan gambaran umum efek non normalitas suatu proses yang tidak hanya dapat dievaluasi berdasarkan teknik optimasi global (populasi) atau lokal (kromosom). Meskipun demikian, hasil dari pengontrolan dengan memanfaatkan GA terhadap peningkatan kinerja diagram kontrol MEWMA berbasis model VAR dapat memperhatikan proses penaksiran parameter melalui operator *ellitisme*. Operator ini bermafaat guna mempertahankan hasil reproduksi terbaik yang diperoleh dalam setiap iterasi.

2.4.2 Optimasi Parameter MEWMA Berbasis Model Melalui Pendekatan GA

Optimisasi mengacu pada masalah minimum atau maksimum suatu fungsi dengan beberapa variabel terhadap (*subject to*) kesamaan atau ketaksamaan yang dikonstrain dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\min f(\boldsymbol{x}) \text{ terhadap } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}, \qquad (2.67)$$

dengan f sebagai fungsi bernilai riil dan $\boldsymbol{\Omega}$ *feasible set* yang merupakan subhimpunan dari E^n. Jika $\boldsymbol{\Omega} = E^n$, maka dikatakan berkorenspodensi dengan kasus *unconstrained* secara lengkap. Dalam banyak aplikasi, sebenarnya yang dibutuhkan adalah $\boldsymbol{\Omega}$ sebagai himpunan tertentu dari E^n. Suatu titik $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{\Omega}$ disebut lokal minimum dari f jika ada

$\epsilon > 0$ sedemikian hingga $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^*)$ untuk semua $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{\Omega}$ dengan jarak ϵ dari $\boldsymbol{x}^*$. Titik $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{\Omega}$ disebut global optimum dari *f* pada $\boldsymbol{\Omega}$ jika hanya $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^*)$ untuk semua $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega}$.

Berdasarkan pengaitan terhadap model MA, diperoleh hubungan analitik antara parameter EWMA univariat dengan model MA asimtotis yang diketahui bersifat proposional, atau ditulis dalam bentuk $r \approx 1 - \theta$ (Montgomery, 2005).

Terkait dengan model VAR(1), atau proses VARMA yang direpresentasikan melalui VAR(1) merupakan salah satu aspek yang perlu diuraikan kembali sebagai terminologi dalam pengaitan dengan statistik EWMA yang dapat dikonstruksi melalui hubungan parameter $\boldsymbol{r}$ dan θ dalam kasus univariat. Khususnya penelusuran terhadap pemilihan parameter pembobot $\mathbf{R}$ dan matriks koefisien regresi $\mathbf{B}$ terhadap korelasi serial yang terjadi dalam statistik MEWMA. Dalam hal ini, pengontrolan terhadap observasi tak random yang memuat korelasi serial terkait erat dengan pemilihan nilai pembobot $\mathbf{R}$ yang memiliki hubungan dengan parameter $\boldsymbol{\theta}$ dalam kasus VMA(1) atau parameter $\boldsymbol{\Phi}$ pada kasus VAR(1) yang diberikan pada (2.62) dan (2.63).

Terkait dengan pengembangan diagram kontrol MEWMA berbasis model, representasi kromosom model VARGA pada Swift dan Liu (2002) dielaborasi melalui penaksir LS dan penaksir GA, dimana residual dari model VARGA inilah yang digunakan dalam mengkonstruksi statistik MEWMA. Dalam hal ini, pengontrolan yang dilakukan adalah terhadap residual dari model untuk order pertama.

Penaksir LS mengacu pada (2.63) dengan penaksir $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_i$ $(i = 1,2, \dots, m \leq p)$ dalam residual $\widehat{\mathbf{U}}_t = \mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\nu} + \widehat{\boldsymbol{\Phi}}_m \mathbf{Y}_{t-1}$ dari model VAR(1) sebagai matriks $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}$ (kromosom) yang dapat ditulis kembali sebagai:

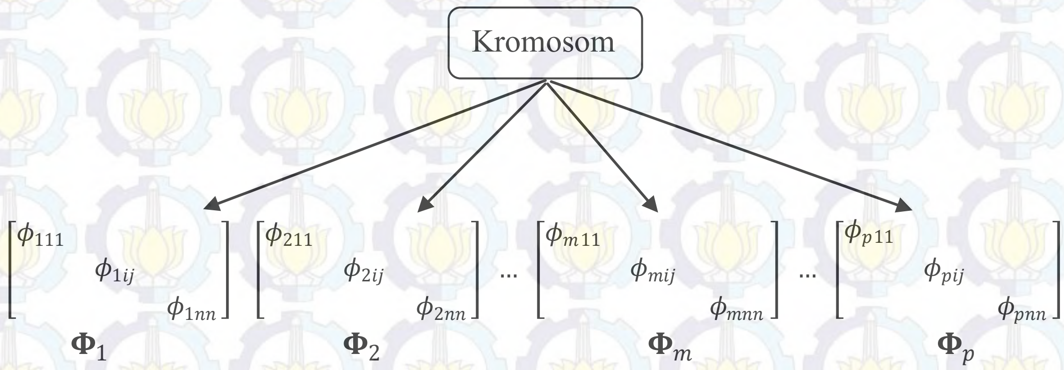
$$\widehat{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Phi}}_1 & \widehat{\boldsymbol{\Phi}}_2 & \cdots & \widehat{\boldsymbol{\Phi}}_m & \widehat{\boldsymbol{\Phi}}_p \\ \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_k & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{2.68}$$

Secara analitik penaksiran melalui GA diberikan kemudian dalam BAB IV, dengan notasi matriks koefisien (kromosom) yang didenotasikan sebagai parameter $\widehat{\mathbf{B}}$. Dalam simulasi dan aplikasi dalam BAB V, parameter $\widehat{\mathbf{B}}$ ditentukan berdasarkan MSE terkecil dan dikenali sebagai *fitness* dari fungsi obyektif sedemikian hingga dapat memenuhi (2.67) dalam pencarian solusi global optimum.

2.4.3 Penentuan Paramater Optimum Model VAR Melalui Pendekatan GA

Metode yang dikerjakan oleh Swift dan Liu (2002) terhadap model VAR(p) atau nVAR(p) merupakan notasi yang diberikan untuk n variable pada proses VAR berorder p. Proses nVAR(p) sendiri ditentukan untuk visualisasi data set dalam peramalan (*one-step ahead forecasting*) dengan memanfaatkan algoritma genetika. Metode ini dikenali sebagai VARGA, yaitu suatu metode aplikasi dari GA untuk menentukan order dan matriks parameter yang diasosiasikan dengan proses nVAR(p).

Representasi kromosom pada model VARGA diberikan berupa matriks berukuran $pn \times n$. Order yang mungkin diberikan pada proses VAR ditentukan (*fix*) antara 1 sampai dengan batas atas dari order maksimum. Misal, elemen dari kromosom didefinisikan sebagai ϕ_{ijk} untuk element baris ke-j dan kolom ke-k dari matriks $\mathbf{\Phi}_i$ (kromosom) untuk $i = 1,2, \dots, n \leq p$ dan direpresentasikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Representasi kromosom pada model VARGA (Swift dan Liu, 2002)

Berdasarkan pengaitan antara kromosom pada model VARGA dengan kandidat kromosom dari model terbaik dalam (2.68). Selanjutnya pada tahap identifikasi dan *cheking* model VAR(1) akan tunjukkan melalui ilustrasikan pada Gambar 3.1 sebagai bagian dalam metodologi penelitian ini.

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Tahapan dan prosedur penelitian terkait dengan studi pengembangan diagram kontrol MEWMA untuk pengamatan tak random diuraikan pada BAB ini sebagai metodologi dalam penelitian ini. Sementara pengembangan konsep dan aplikasinya pada data riil dibahas secara terpisah pada BAB IV dan BAB V. Adapun rincian dari tahapan dan prosedur penelitian diuraikan sebagai berikut:

3.1 Pengembangan Diagram Kontrol MEWMA Berbasis Model

Tahapan dalam pengembangan diagram kontrol MEWMA berbasis model terdiri atas empat tahap, yaitu:

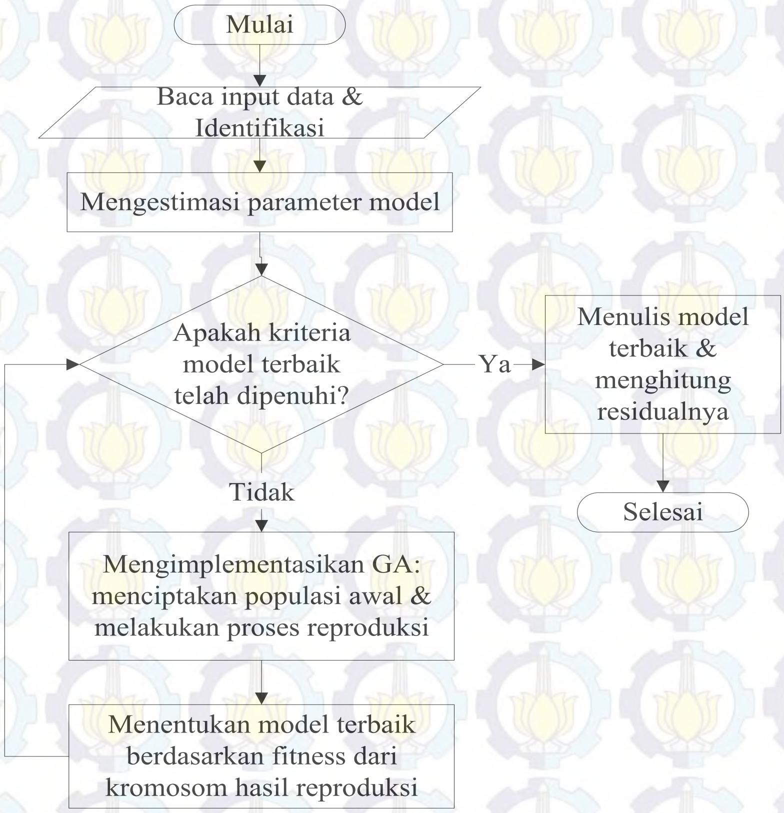
1. Mengidentifikasi *trend* model deret waktu multivariat dan residual model berdasarkan kriteria AIC (dapat dilihat Lampiran A.2.2);
2. Mengestimasi dan menguji distribusi residual melalui pengaitan terhadap model VAR(p) dengan prosedur estimasi kuadrat terkecil (LS) dan GA, yaitu:
   - Mengestimasi matriks koefisien $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}_i$ dan menguji distribusi $\boldsymbol{u}_t$ sebagai justifikasi terhadap asumsi model pada suatu observasi individual;
   - Menghitung matriks kovarians $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{u}_t}$ dari residual, dibawah asumsi $\boldsymbol{u}_t \sim N\left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{u}_t}\right)$ melalui pendekatan model VAR(p);

   Hasil estimasi berdasarkan order polinomial ke-p ini akan dijadikan sebagai informasi awal dalam penentuan model terbaik yang dapat disesuaikan dengan penentuan batas atas pengontrolan;

3. Menentukan batas atas kontrol statistik MEWMA untuk residual berdasarkan berdasarkan angka 1 dan 2;
4. Mengevaluasi kinerja diagram kontrol berdasarkan sensitivitas statistik kontrol MEWMA dan menelusuri distribusi statistik MEWMA dan efek parameter pembobot **R**.

Tujuan dalam pengembangan diagram kontrol MEWMA berbasis model ini mengacu pada angka 3 dan 4. Namun demikian, angka 2 dan 3 dibahas secara rinci dalam BAB IV. Sementara proses evaluasi kinerja diagram kontrol berbasis model pada angka 4 dibahas pada BAB V yang diawali dengan proses simulasi sebelum diaplikasikan pada data riil. Pengontrolan dilakukan terhadap residual dari model terbaik yang diukur secara tidak langsung dari model VAR(p).

Tahapan dalam implementasi GA pada diagram kontrol MEWMA berbasis model bertujuan untuk mencari hasil estimasi parameter model terbaik berdasarkan kriteria *fitness* minimum yang dinyatakan dalam fungsi obyektif sebagai MSE residual minimum. Adapun uraian terhadap pemilihan model terbaik melalui GA diberikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram alir pemilihan model terbaik melalui GA

Tahap implementasi GA dalam optimasi model ini dapat dirangkum sebagai berikut:

1. Membangkitkan data normal multivariat berdasarkan *input* parameter;
2. Memilih kandidat model terbaik dan memeriksa fungsi *fitness* yang diberikan melalui 4.6 (sub-bab 4.3) sampai iterasi maksimum. Dalam penelitian ini, iterasi dibedakan dalam tiga grup pengulangan yaitu $n_1 = 100, n_2 = 200,$ dan $n_3 = 500$ yang ditetapkan sebagai iterasi maksimum (*maxit*) dan merupakan kriteria pemberhentian;
3. Apakah kandidat model terbaik telah mencapai nilai MSE minimum?
   - Jika 'tidak', maka kembali ke angka 2 untuk kembali menciptakan populasi awal, mereproduksi (kawin silang dan mutasi) gen dan kromosom baru;
   - Jika 'ya', maka proses pencarian selesai.
4. Menuliskan model terbaik dan menghitung residual, dilanjutkan pada tahap penentuan batas atas kontrol dan evaluasi kinerja diagram kontrol MEWMA berbasis model.

3.2 Efek Parameter Pembobot R Terhadap Distribusi MEWMA

Efek parameter pembobot $\mathbf{R}$ yang dikaitkan sebagai parameter non sentralitas terhadap distribusi MEWMA berbasis model yang diusulkan melalui *Proposisi 4.1* dan diberikan pada Gambar 3.2.

Gambar 3.2 Prosedur penentuan distribusi MEWMA

Berdasarkan Gambar 3.2 di atas, prosedur penentuan distribusi statistik MEWMA diberikan sebagai berikut.

1. Bentuk blok matriks partisi $\mathbf{A}_i$ yang dipandang sebagai $\{\mathbf{A}_i = [\mathbf{A}_0 \colon \mathbf{A}_k]' \big| \mathbf{A}_i \in \mathbf{M}_{n,2}(\Re)\}$ untuk $i = 0,1,2,\dots,k$ dan $(k < n)$ sehingga dapat dibentuk suatu matriks partisi yang terdiri dari entri matriks blok diagonal pada suatu matriks segitiga atas $\mathbf{A}$. yaitu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vdots & \mathbf{A}_0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}, \text{ dengan } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{r_1} & \cdots & \mathbf{R}_{r_{j \neq i}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_{r_m} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{m,1}(\Re).$$

2. Dekomposisikan matriks $\mathbf{A}$ ke bentuk $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}'$, dengan $\mathbf{B}$ non singular dan dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{U} = \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})$ sedemikian hingga $\mathbf{U} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$.
3. Hitung *trace* dan parameter non sentralitas dari $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{U}'\mathbf{U}$.
4. Hitung *trace* dan parameter non sentralitas dari $\mathbf{R}_r^2 \otimes \mathbf{I}_j = (\mathbf{R}_r \otimes \mathbf{I}_j)(\mathbf{R}_r \otimes \mathbf{I}_j) = \mathbf{U}$.
5. Tentukan efek parameter $\mathbf{R}$ pada distribusi MEWMA pada angka 3 dan 4

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) - (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)'\mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) = \begin{cases} Q \sim \chi^2_{n-m} \text{ jika } \boldsymbol{v}_j^2 = n - m, \\ Q \sim \chi^2_{n-m}(\delta) \text{ jika } \boldsymbol{v}_j^2 = \delta, \end{cases}$$

dengan $\delta = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{v}_j^2 = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}$, untuk $m < j \leq n$.

Inovasi pengontrolan melalui pendekatan GA terhadap peningkatan kinerja diagram kontrol MEWMA berbasis model VAR disini mengacu pada penentuan parameter pembobot **R** optimum yang diberikan pada (2,9), berikut penelusuran terhadap distribusi MEWMA yang bergantung pada parameter pembobot **R** yang diberikan pada Gambar 3.2 dan telah diuraikan pada Bagian 2.2.2. Dengan perkataan lain, hal prinsip yang akan dikemukan dalam penelusuran distribusi MEWMA terkait dengan parameter pembobot **R** dapat mengacu pada penentuan efek non-normalitas pada distribusi MEWMA yang kembali dinyatakan sebagai Algoritma 4.1.

Hasil pencarian residual dari model terbaik yang telah dideskripsikan pada Gambar 3.1 diatas kemudian diaplikasikan pada diagram kontrol T^2 dan MEWMA guna proses evaluasi kinerja dari kedua diagram kontrol tersebut. Secara umum, analogi dari sub-bab 3.1 dan sub-bab 3.2 ini akan diaplikasikan pada data riil yang diletakkan pada sub-bab 5.3. Bagian akhir dari disertasi ini berupa simpulan dan saran diletakkan pada BAB VI.

BAB IV
DIAGRAM KONTROL MEWMA BERBASIS MODEL

Pembahasan dalam bagian ini diawali dengan asumsi kenormalan terkait dasar teori kenormalan dan independensi pada diagram kontrol MEWMA berbasis model melalui pendekatan model *Vector AutoRegressive* (VAR). Terkait dengan skema monitoring MEWMA berbasis model terhadap proses mean dan variabilitas, pemeriksaan struktural menjadi suatu pilihan terhadap kejadian *shift* dalam proses pengontrolan parameter pada observasi tak-random. Hal ini mengacu pada pengontrolan parameter *shift* yang diusulkan oleh Pan dan Jarrett (2007) terhadap tiga jenis *shift* yang terjadi dalam proses parameter, yaitu *shift* pada vektor mean, *shift* pada matriks kovarians, dan *shift* pada matriks-matriks koefisien sebagai sumber *assignable causes*. Ketiga jenis *shift* ini dikonstruksi melalui pendekatan model VAR melalui statistik T^2.

Sebagaimana diagram kontrol Shewhart $\bar{\mathbf{x}}$ yang merefleksikan adanya *shift* dalam vektor mean and variabilitas. Diagram kontrol Hotelling T^2 juga merefleksikan *shift* dalam prosess variabilitas and *shift* dalam prosess koefisien. Dalam hal ini pengembangan diagram kontrol T^2 Hotelling terhadap proses *shift* parameter diuraikan pada Pan dan Jarrett (2007) melalui pendekatan residual dari model VAR kembali ditinjau dari sisi yang berbeda guna memperbaiki kinerja statistik MEWMA berbasis model. Jadi ketika perbaikan dapat dilakukan terhadap diagram kontrol Hotelling T^2 guna menaikkan sensitif dalam membedakan *shift* kecil dan moderat maupun *outlier* yang terjadi dalam proses parameter, sehingga dengan cara yang sama, dapat dikembangkan juga terhadap diagram kontrol MEWMA.

Dilain pihak, Statistik MEWMA berbasis model yang digunakan dalam monitoring proses mean $\boldsymbol{\mu}$ dan proses variasi sampel dalam kasus multivariat yang dikembangkan oleh Reynolds dan Stoumbos (2008), sudah tidak efisien lagi. Karena hanya merepresentasikan variasi proses normal. Pendeteksian dan pemeriksaan terhadap kriteria estimator matriks kovarians model dapat dianalisis melalui prosedur umum metode estimasi kuadrat terkecil bersyarat. Meskipun demikian, persoalan terkait pemilihan model terbaik optimum melalui penaksir GA yang diusulkan disini dapat mereduksi efek *shift* dalam proses variabilitas yang dikontrol melalui statistik Hotelling untuk residual.

Berdasarkan hal ini, pembahasan dalam studi pengembangan diagram kontrol MEWMA untuk pengamatan tak random ini dapat dibagi dalam dua bagian utama. Pertama, pengembangan diagram kontrol MEWMA berbasis model dengan penaksir *Least Square* (LS). Kedua, pengembangan diagram kontrol MEWMA berbasis model melalui GA. Bagian ini merupakan salah satu metode optimasi yang diusulkan dalam penelitian ini, sebagai metode *robust* dalam pencarian parameter model terbaik (optimum) dari model VAR menggunakan GA. Usulan terkait skema monitoring dan evaluasi kinerja diagram kontrol ditempatkan pada bagian akhir dalam pembahasan ini.

4.1 Asumsi Awal dalam Pengujian Hipotesis

Pengontrolan kualitas pada hakekatnya adalah pengujian hipotesis berdasarkan data sub grup ataupun data individual yang dilakukan secara berulang-ulang dari waktu ke waktu. Ketika diagram kontrol MEWMA untuk residual diaplikasikan pada observasi tak random yang umumnya berkorelasi serial (berautokorelasi), maka terdapat dua hipotesis *null* yang perlu diperhatikan terkait dengan efek (*shift*) yang terjadi dalam parameter pengontrolan (pengujian). Pertama, penaksir parameter jika $\boldsymbol{\Sigma}$ yang diketahui dan kedua, penaksir parameter jika $\boldsymbol{\Sigma}$ yang tidak diketahui, sehingga perlu diestimasi dari data histori.

Terkait dengan dua asumsi awal terhadap hipotesa *null* dan alternatif yang digunakan dalam penelusuran distribusi multivariatnya, maka asumsi terkait penaksir parameter diuraikan terlebih dahulu sebagai dasar pengujian yaitu:

- Asumsi I. $H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ dengan $\boldsymbol{\Sigma}$ tidak diketahui;

Disini $\boldsymbol{\Sigma}$ diestimasi dibawah asumsi H_0 dan H_1 sehingga kedua hipotesa bersifat komposit. Pada bagian 4.2.2.1 dalam Mardia, Kent dan Bibby (1979), estimator *likelihood* minimum dari kedua hipotesa ini diketengahkan sebagai berikut:

i. Dibawah H_0, $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}_0$ dan $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{S} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}'$ dengan $\boldsymbol{d} = \bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0$;

ii. Dibawah H_1, $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\boldsymbol{x}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{S}$

Berdasarkan persamaan (5.2.5) dan bagian (4.1.9) pada Mardia, Kent dan Bibby (1979),

$$L_0^* = L(\boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{S} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}') = -\frac{n}{2}\{p \log 2\pi + \log|\mathbf{S}| + \log(1 + \boldsymbol{d}'\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{d} + p)\},$$

dimana $L_1^* = L(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{S})$ yang diperoleh dengan mengambil $\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$. Jadi, $-2\log\lambda = 2(L_1^* - L_0^*) = n\log(1 + \boldsymbol{d}'\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{d})$. Statistik ini bergantung pada $(n-1)\boldsymbol{d}'\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{d}$ yang dikenali sebagai statistik $T^2(p, n-1)$ dari sampel dan dapat dinyatakan sebagai $\{n - p/p\}\boldsymbol{d}'\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{d} \sim F_{p,n-p}$.

Jadi, dibawah $H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$, jika $\boldsymbol{\Sigma}$ tidak diketahui, maka $\{n - p/p\}\boldsymbol{d}'\mathbf{S}^{-1}\boldsymbol{d} \sim F_{v,n-v}$.

- Asumsi II. $H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ dengan $\boldsymbol{\Sigma}$ diketahui

Uji statistik melalui LR untuk menguji H_0 versus H_1 didefinisikan sebagai $\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{L_0^*}{L_1^*}$ atau ekuivalen terhadap $-2\log\lambda = 2(L_1^* - L_0^*)$ dengan $L_1^* = \log L_1^*$ dan $L_0^* = \log L_0^*$. Berdasarkan persamaan (4.19) pada Mardia, Kent dan Bibby (1979), *log likelihood* yang dimaksimalkan dibawah hipotesis H_0 adalah:

$$L^*(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{n}{2}\log|2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{n}{2} tr\, \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{n}{2}(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}).$$

Karena H_1 yang diberikan tanpa konstrain pada $\boldsymbol{\mu}$, MLE $\boldsymbol{\mu}$ adalah $\overline{\boldsymbol{x}}$ dan $L_1^* = L(\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\mu}) = -\frac{n}{2}\log|2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{n}{2} tr\, \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}$, sehingga dengan memanfaatkan uji statistik LR diatas, yaitu:

$$-2\log\lambda = 2(L_1^* - L_0^*) = n(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

Fungsi ini berdistribusi χ_p^2 eksak di bawah H_0 dan berdasarkan Teorema (2.5.2) pada Mardia, Kent dan Bibby (1979), ditulis sebagai

$$U = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_p^2.$$

Jadi, dibawah $H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$, jika $\boldsymbol{\Sigma}$ diketahui, maka $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_p^2$ eksak.

Terkait dengan hal ini, salah satu pendekatan yang dilakukan oleh Pan dan Jarrett (2007) dalam pemodelan proses multivariat berautokorelasi adalah melalui pendekatan diagram kontrol VAR. Pendekatan diagram kontrol VAR digunakan juga oleh Pan (2005) untuk memonitor proses residual univariat berautokorelasi ke proses multivariat yang berasal dari proses independen menggunakan penaksir LS. Namun disini pembahasan terkait pengembangan MEWMA berbasis model dengan penaksir LS dan GA dapat diketengahkan sebagai berikut.

4.2 Pengembangan MEWMA Berbasis Model dengan Penaksir *Least Square*

Misal proses model VAR order *p* atau VAR(*p*) pada (2.7) yang dinyatakan sebagai:

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{y}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\beta}_p\boldsymbol{y}_{t-p} + \boldsymbol{u}_t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (4.1)$$

dengan $\mathbf{y}_t = (\boldsymbol{y}_{1t}, \ldots, \boldsymbol{y}_{Kt})'$ vektor acak berukuran $(K \times 1)$, $\boldsymbol{\beta}$ sebagai elemen matriks koefisien berukuran $(K \times K)$, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_K)'$ sebagai vektor *intercept* (konstan) berukuran $(K \times 1)$. Sementara $\boldsymbol{u}_t = (\boldsymbol{u}_{1t}, \ldots, \boldsymbol{u}_{Kt})'$ merupakan residual yang dikenali juga sebagai *white noise* atau proses inovasi berdimensi *K*, dengan $E(\boldsymbol{u}_t) = \mathbf{0}, E(\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_s') = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{u}}$ dan $E(\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_s') = \mathbf{0}$ untuk $s \neq t$.

Dalam kondisi stabil, matriks kovarians $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{u}}$ dapat diasumsikan *non-singular* dan asumsi awal terhadap vektor residual yang digunakan adalah berdistribusi normal multivariat atau $\boldsymbol{u}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_T \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{u}})$. Dalam hal ini, suatu proses yang berada dalam kontrol menunjukkan bahwa *assignable cause* adalah tetap (*invarian*) terhadap waktu (Pan dan Jarrett, 2007 dan Lütkepohl, 2005)

Sebelum penaksiran pada model (4.1) dioperasikan dalam bentuk partisi dari sampel, notasi dalam *mutiple time series* didefinisikan dengan dimensinya sebagai berikut:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{B} = \left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_p\right), & K \times (Kp+1) \\
\mathbf{Z} = (\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_{T-1}), & (Kp+1) \times T \\
\mathbf{Y} = (\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_T), & (K \times T) \\
\mathbf{U} = (\boldsymbol{u}_0, \dots, \boldsymbol{u}_T), & (K \times T) \\
\boldsymbol{z}_t = \left(1, \boldsymbol{y}_t, \dots, \boldsymbol{y}_{t-p+1}\right)', & (Kp+1) \times 1 \\
\boldsymbol{y} = vec\,(\mathbf{Y}), & (KT \times 1) \\
\boldsymbol{u} = vec(\mathbf{U}), & (KT \times 1) \\
\boldsymbol{\beta} = vec(\boldsymbol{B}), & (K^2 p + K) \times 1 \\
\boldsymbol{b} = vec(\boldsymbol{B}'), & (K^2 p + K) \times 1
\end{array}
$$

Selanjutnya, melalui penaksir LS, proses model VAR(p) pada (4.1) untuk $t = 1, \dots, T$ dapat dituliskan kembali dalam bentuk kompak sebagai:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{BZ} + \mathbf{U}, \tag{4.2a}$$

atau

$$vec(\mathbf{Y}) = vec(\mathbf{BZ}) + vec(\mathbf{U}) = (\mathbf{Z}' \otimes \mathbf{I}_K)\, vec(\boldsymbol{B}) + vec(\mathbf{U}), \tag{4.2b}$$

atau

$$\boldsymbol{y} = (\mathbf{Z}' \otimes \mathbf{I}_K)\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u} \tag{4.2c}$$

Perhatikan bahwa $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ pada Lütkepohl (2005) dapat dinyatakan sebagai:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= ((\mathbf{ZZ}')^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{u}})(\mathbf{Z} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{u}}^{-1})\boldsymbol{y}, \\
&= ((\mathbf{ZZ}')^{-1}\mathbf{Z} \otimes \mathbf{I}_K)\boldsymbol{y}.
\end{aligned} \tag{4.2d}
$$

Jika penaksir LS pada (4.2c) disubtitusikan ke (4.2d) maka diperoleh:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = ((\mathbf{ZZ}')^{-1}\mathbf{Z}\otimes\mathbf{I}_K)[(\mathbf{Z}'\otimes\mathbf{I}_K)\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}],$$

$$= \boldsymbol{\beta} + ((\mathbf{ZZ}')^{-1}\mathbf{Z}\otimes\mathbf{I}_K)\boldsymbol{u}. \tag{4.2e}$$

Persamaan (4.2d) diurutkan dalam operator *vec* sebagai

$vec(\widehat{\mathbf{B}}) = \widehat{\boldsymbol{\beta}} = ((\mathbf{ZZ}')^{-1}\mathbf{Z}\otimes\mathbf{I}_K)\, vec(\mathbf{Y}) = vec\,(\mathbf{YZ}'(\mathbf{ZZ}')^{-1})$, atau

$$\widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{YZ}'(\mathbf{ZZ}')^{-1}. \tag{4.2f}$$

Jadi, estimasi model dan estimasi residualnya diberikan masing-masing sebagai

$$\widehat{\mathbf{Y}} = \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{Z} = \mathbf{YZ}'(\mathbf{ZZ}')^{-1}\mathbf{Z} = \mathbf{YH}. \tag{4.2g}$$

dan

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{Y}},\\ &= \mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{Z},\\ &= \mathbf{Y} - \mathbf{YZ}'(\mathbf{ZZ}')^{-1}\mathbf{Z},\\ &= \mathbf{Y}[\mathbf{I} - \mathbf{Z}'(\mathbf{ZZ}')^{-1}\mathbf{Z}],\\ &= \mathbf{Y}(\mathbf{I} - \boldsymbol{H}).\end{aligned} \tag{4.2h}$$

Dengan demikian hasil penaksiran terhadap matriks koefisien $\widehat{\mathbf{B}}$ pada (4.2g) dan residual $\widehat{\mathbf{U}}$ melalui penaksir LS dengan 'hat' matriks $\mathbf{H}$ sebagai suatu matriks proyeksi dari $\mathbf{Y}$ ke ruang yang direntang oleh setiap kolom $\mathbf{Z}$. Dimana $\mathbf{H}$ juga memuat *generalized invers* $(\mathbf{ZZ}')^{-1}$ atau matriks kovarians $\mathbf{ZZ}'$ yang bersifat non singular dan terkait dengan *sum square error* (SSE) dari residual yang dapat dinyatakan sebagai:

$$\bar{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{y} - (\mathbf{Z}\otimes\mathbf{I}_K)\boldsymbol{\beta}]'[\boldsymbol{y} - (\mathbf{Z}\otimes\mathbf{I}_K)\boldsymbol{\beta}]. \tag{4.3}$$

dengan $\bar{\mathrm{S}}(\boldsymbol{\beta})$ sebagai matriks *Hessian* atau fungsi yang meminimumkan vektor $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$.

Misal, vektor koefisien pada (4.1) diestimasi melalui penaksir LS dan GA. Hasil penaksiran matriks koefisien berupa barisan vektor koefisien $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i$ untuk $i = 1, \dots, p$ yang selanjutnya digunakan untuk membangkitkan K sampel barisan dari $\widehat{\boldsymbol{y}}_t$ dan berkorespondensi nilai-nilai historis pada $\boldsymbol{y}_t$ dalam sistem persamaan (4.4).

$$\left.\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1\boldsymbol{y}_{t-1} + \dots + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_p\boldsymbol{y}_{t-1} &= \widehat{\boldsymbol{y}}_{T-1}\approx\boldsymbol{y}_{T-1},\\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1\boldsymbol{y}_{t-2} + \dots + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_p\boldsymbol{y}_{t-2} &= \widehat{\boldsymbol{y}}_{T-2}\approx\boldsymbol{y}_{T-2},\\ &\vdots\\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1\boldsymbol{y}_{t-K} + \dots + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_p\boldsymbol{y}_{t-K} &= \widehat{\boldsymbol{y}}_{T-K}\approx\boldsymbol{y}_{T-K}.\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Sistem persamaan linier pada (4.4) dapat ditulis kembali dalam notasi matriks sebagai

$$\widehat{\mathbf{B}}\mathbf{Z} = \widehat{\mathbf{Y}}, \tag{4.5}$$

dengan $\widehat{\mathbf{B}}$ sebagai matriks yang memuat barisan vektor koefisien $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ sebagai koefisien pembobot. Sementara $\mathbf{Z}$ sebagai matriks yang memuat barisan vektor $(\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_{T-K})$ pada setiap periode *lag* ke-i untuk $i = T-1, \dots, T-K$ dan $\widehat{\mathbf{Y}}$ memuat matriks dari barisan vektor deret waktu dari sampel $\boldsymbol{y}_t$ diestimasi melalui penaksir LS.

Penaksiran menggunakan LS atau OLS pada prinsipnya bersifat identik karena keduanya bertujuan untuk meminimumkan bentuk kuadratik dari vektor residual pada (4.3). Hal pokok yang membedakan penelitian ini dengan penelitian terdahulu terletak pada pemanfaatan GA terhadap penaksir LS dan prosedur implementasinya dikaji pada Bagian 4.3 berikut ini.

4.3 Pengembangan MEWMA Berbasis Model Melalui GA

Terkait dengan masalah optimalisasi terhadap penaksiran parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ melalui genetic algorithm (GA), maka fungsi *fitness* yang digunakan sebagai fungsi obyektif terhadap $\widehat{\boldsymbol{y}}_t$ yang berkorespondensi nilai-nilai historis pada $\boldsymbol{y}_t \in \mathbf{z}_t$ dinyatakan sebagai:

$$fitness = \mathbf{z}_t - \sum_{i=T-1}^{T-K} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_i \, \mathbf{z}_i, \tag{4.6}$$

dengan $\mathbf{z}_t = \left(1, \boldsymbol{y}_t, \dots, \boldsymbol{y}_{t-p+1}\right)'$ dan $\widehat{\mathbf{B}} = \left(\boldsymbol{v}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_p\right)$.

Proses optimasi *error* melalui penaksiran dengan GA terhadap penentuan koefisien vektor $\boldsymbol{\beta}$ sebagai kromosom dalam proses reproduksi genetika. Dimana kromosom yang terpilih dari proses seleksi merupakan kromosom yang menghasilkan nilai fungsi *fitness* terkecil, sehingga hasil estimasi pada (4.6) dapat diimplementasikan ke model (4.5).

Dalam praktiknya, solusi yang diberikan melalui hasil implementasi pada (4.5) sebenarnya tidak realistis karena berbasis observasional. Artinya tidak selalu sesuai dengan kenyataan dalam dunia nyata, karena distribusinya tidak diketahui. Dilain pihak, statistik MEWMA berbasis model dalam monitoring proses variasi σ sampel melalui pendekatan VAR sering tidak merepresentasikan variasi dari proses normal multivariat. Sebagai alternatifnya, kita dapat mengadopsi GA dalam menaksir parameter model VAR yang diberikan pada (4.2a) yang memuat residual. Sehingga fungsi dari kuadrat jarak dari vektor residual $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}$ yang diberikan pada (4.3) dapat diminimumkan. Fungsi ini dijadikan sebagai fungsi obyektif dalam prosedur implementasi GA guna menentukan solusi optimum berbasis residual.

Secara numerik, jaminan terhadap adanya solusi non-*trivial* yang diharapkan dari implementasi GA pada proses reproduksi genetika mengacu pada fungsi obyektif yang perlu dikonstrain terhadap input matriks kovarians sedemikian hingga memenuhi sifat positif definit. Hal ini dimaksudkan untuk menjamin stasioneritas proses sebelum reproduksi genetika dijalankan. Sementara itu, berdasarkan kajian sebelumnya pada bagian 2.1, 2.2, dan 2.3 terkait sifat-sifat matriks kovarians dan matriks *generalized invers*. Matriks $\mathbf{Z}$ pada proses pemodelan VAR melalui GA diisyaratkan selalu bersifat simetris atau merupakan matriks bujur sangkar dan telah dipenuhi oleh matriks normal.

Misal, model VAR pada (4.2a) diadopsi implementasikan pada GA sebagai model yang dianggap realistis terhadap proses model VAR dan didefinisikan kembali sebagai:

$$\widehat{\mathbf{Y}} = \widehat{\mathbf{B}}^{*}\mathbf{Z} + \mathbf{W}, \tag{4.7}$$

dengan $\widehat{\mathbf{B}}^{*}$ sebagai matriks koefisien taksiran melalui penaksir GA dan $\mathbf{W}$ sebagai residual yang berkorespondensi dengan taksiran $\widehat{\mathbf{B}}^{*}$ sedemikian hingga $\mathbf{U} \cong \mathbf{W}$. Akibatnya,

$$\widehat{\mathbf{B}}^{*}\mathbf{Z} + \mathbf{W} = \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{Z} + \mathbf{U} \Rightarrow \widehat{\mathbf{B}}^{*} \cong \widehat{\mathbf{B}}. \tag{4.8}$$

Sehingga (4.1) dapat ditulis kembali dalam bentuk umum dari (4.4) dengan menambahkan vektor residual $\boldsymbol{w}_T$ dan ditulis sebagai:

$$\boldsymbol{v} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1\boldsymbol{z}_{t-1} + \cdots + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{p-1}\boldsymbol{z}_{t-K} + \cdots + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_p\boldsymbol{z}_K = \widehat{\boldsymbol{y}}_T + \boldsymbol{w}_T, \tag{4.9}$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{y}}_T$ sebagai suatu nilai taksiran dari $\boldsymbol{y}_T$ pada periode *T* melalui GA dan $\boldsymbol{v}$ sebagai konstanta. Jadi, model terbaik yang diharapkan dari penaksir LS disini dapat dianggap bersifat proposional terhadap selisih residual antara (4.5) dan (4.7), yaitu:

$$\boldsymbol{y}_T - \widehat{\boldsymbol{y}}_T \cong \boldsymbol{w}_T + \boldsymbol{u}_T, \tag{4.10a}$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{y}}_T$ sebagai model penaksiran yang similar dengan (4.4) dan $\boldsymbol{u}_T$ sebagai elemen vektor residual yang berkorespondensi dengan fungsi *fitness* pada (4.5) pada periode *T*. Sehingga nilai SSE pada (4.3) dapat dikaitkan dengan model optimum dari penaksir LS melalui GA dapat dicapai melalui pengontrolan terhadap residual $\boldsymbol{w}_T$ dan $\boldsymbol{u}_T$ pada ruas kanan (4.10a), sedemikian hingga $\bar{\mathrm{S}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*})$ dan $\bar{\mathrm{S}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ merupakan penaksir tak bias jika:

- Model optimum dicapai melalui GA, maka

  $\bar{\mathrm{S}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}) = \widehat{\boldsymbol{w}}'\widehat{\boldsymbol{w}} = \left[\boldsymbol{y}_T - (\mathbf{Z}\otimes\mathbf{I}_K)\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right]'\left[\boldsymbol{y}_T - (\mathbf{Z}\otimes\mathbf{I}_K)\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right]$ atau $\widehat{\mathbf{W}} = \mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{B}}^{*}\mathbf{Z}$,

- Model optimum dicapai pada penaksir LS, maka

  $\bar{S}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \widehat{\boldsymbol{u}}'\widehat{\boldsymbol{u}} = \left[\boldsymbol{y}_T - (\mathbf{Z}\otimes\mathbf{I}_K)\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right]'\left[\boldsymbol{y}_T - (\mathbf{Z}\otimes\mathbf{I}_K)\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right]$ atau $\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{B}}\mathbf{Z}$,

Misal diasumsikan bahwa $\boldsymbol{w}_T$ dan $\boldsymbol{u}_T$ bersifat proposional atau $\boldsymbol{w}_T \propto \boldsymbol{u}_T$ dan hubungan antara kedua penaksir didefinisikan sebagai:

$$\Delta\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* \cong \bar{S}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*) + \bar{S}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \cong \mathbf{0}. \qquad (4.10b)$$

Bukti:

Misalkan dalam penaksiran LS, $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_p$ merupakan vektor-vektor yang bebas linier sebagai elemen dari matriks $\mathbf{B}$ dan misal diketahui bahwa vektor $\widehat{\boldsymbol{y}}_T$ dapat ditulis sebagai kombinasi linier secara tunggal untuk $i = 1,2, \ldots, p$ sebagai:

$\widehat{\boldsymbol{y}}_T = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1\boldsymbol{x}_{t-1} + \cdots + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{p-1}\boldsymbol{x}_{t-K} + \cdots + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_p\boldsymbol{x}_K$, dan

$\widehat{\boldsymbol{y}}_T = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1\boldsymbol{y}_{t-1} + \cdots + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{p-1}\boldsymbol{y}_{t-K} + \cdots + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_p\boldsymbol{y}_K$.

Terlihat bahwa nilai $\boldsymbol{x}_{t-1} = \boldsymbol{y}_{t-1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{p-1} = \boldsymbol{y}_{p-1}, \ldots, \boldsymbol{x}_K = \boldsymbol{y}_K$ dan

$\mathbf{0} = \widehat{\boldsymbol{y}}_T - \widehat{\boldsymbol{y}}_T = (\boldsymbol{x}_{t-1} - \boldsymbol{y}_{t-1})\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x}_{p-1} - \boldsymbol{y}_{p-1})\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{p-1} + \cdots + (\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{y}_p)\widehat{\boldsymbol{\beta}}_p\boldsymbol{z}_K$, karena $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ bebas linier, maka persamaan terakhir hanya dipenuhi oleh

$$\boldsymbol{x}_{t-1} - \boldsymbol{y}_{t-1} = \mathbf{0}, \boldsymbol{x}_{p-1} - \boldsymbol{y}_{p-1} = \mathbf{0}, \ldots, \boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{y}_p = \mathbf{0}\ .$$

$\bar{S}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ merupakan fungsi dari kumpulan vektor bebas linier (untuk penaksir LS) dan dengan cara similar, dapat ditunjukkan juga bahwa $\bar{S}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*)$ merupakan fungsi dari kumpulan vektor bebas linier (untuk penaksir GA). Karena kedua fungsi vektor ini bersifat tertutup dibawah operasi penjumlahan dan skalar (memenuhi definisi ruang vektor). Jadi, $\mathbf{0} \cong \bar{S}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*) + \bar{S}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \cong \Delta\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$.∎

Secara umum, penekanan dari pengaitan antara $\Delta\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ dengan matriks *Hessian* pada (4.10b) diberikan lebih kepada interpertasi terhadap efek *shift* dalam proses parameter $\boldsymbol{\beta}$ dibawah asumsi ke-multinormalan model linier multivariat *time series*. Khususnya bagaimana upaya perbaikkan yang diperlukan guna mengoptimumkan fungsi-fungsi vektor $\boldsymbol{\beta}^*$ dalam konteks pereduksian variabilitas melalui penaksir GA. Namun demikian, dengan asumsi kenormalan yang digunakan, dapat dijadikan terminologi dari konsep kebebasan linier terhadap himpunan semua vektor $\boldsymbol{\beta}^*$ dan $\boldsymbol{\beta}$ dapat disubtitusikan pada (4.10b). Sehingga $\mathbf{B}^*$ dan $\mathbf{B}$ dapat dipandang sebagai matriks baru dengan dua ruang vektor yang saling bebas linier sedemikian hingga $\bar{S}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*) + \bar{S}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \cong \mathbf{0}$.

Secara numerik, pengontrolan residual melalui GA yang diberikan melalui penaksiran $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ yang tidak konsisten dapat berdampak pada ketidakkonsistenan pengontrolan vektor residual $\boldsymbol{w}_T$. Untuk mengatasi kekurangan ini, dalam prosedur implementasi dapat diproses dalam n_i pengulangan, yaitu untuk $n_1 = 100, n_2 = 200$, dan $n_3 = 500$. Dari hasil implementasi secara numerik, $n_3 = 500$ dipilih sebagai n pengulangan terbaik taksiran $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ yang lebih stabil dibandingkan grup pengulangan yang kurang dari n_3. Nilai taksiran $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ dimonitor melalui kuantitas *mean square error* (MSE) untuk setiap $\{\widehat{\boldsymbol{u}}_i\}$, yang dinyatakan sebagai:

$$\min_i\{\widehat{\boldsymbol{u}}_i^{'}\widehat{\boldsymbol{u}}_i\} = \min_i E\left[\left(\boldsymbol{z}_t - \textstyle\sum_{i=1}^{p} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^* \ \boldsymbol{z}_{t-1}\right)'\left(\boldsymbol{z}_t - \textstyle\sum_{i=1}^{p} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^* \ \boldsymbol{z}_{t-1}\right)\right], \qquad (4.11)$$

dengan $\{\widehat{\boldsymbol{u}}_i\} \subseteq \widehat{\mathbf{U}}, \forall\ i = 1, \dots, T$.

Dengan demikian upaya pereduksian variabilitas model yang diusulkan dalam pengaitan antara parameter residual dan efek non normalitas dalam pengontrolan dibawah diagram kontrol $T^2_{\boldsymbol{u}_t}$ dapat mengacu pada skema perbaikan yang diberikan melalui pendekatan GA.

Perhatikan bahwa kriteria penaksir yang digunakan dalam mengestimasi matriks koefisien dibawah proses VAR residual, terkait dengan matriks pembobot **R** dengan jumlahan elemen diagonal diisyaratkan bahwa jika sama dengan satu ($\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}_i = 1$) memenuhi kriteria OLS. Sehingga pengontrolan yang dilakukan dapat diaproksimasi oleh suatu statistik $Q \sim \chi^2_m$. Sebaliknya, jika jumlahan elemen diagonal $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}_i < 1$, maka digunakan kriteria LS dan GA, akibatnya $Q \sim \chi^2_m(\delta)$. Selanjutnya perhatian kita pada proses rekonstruksi matriks kovarians pada bagian 2.2.2, dimana **R** dibentuk melalui matriks partisi sebagai entri matriks blok diagonal pada suatu matriks segitiga atas **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vdots & \mathbf{A}_0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}, \text{dengan } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{r_1} & \cdots & \mathbf{R}_{r_{j\neq i}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_{r_m} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{m,1}(\Re).$$

Berdasarkan bagian 2.2.2 dan Teorema 1, 2, 3, 4 (pada Lampiran A2), pengaitan terhadap efek pembobot **R** pada distribusi MEWMA berbasis model dapat dikemukakan melalui Proposisi 4.1 yang diusulkan sebagai berikut:

Proposisi 4.1. (Efek parameter pembobot **R** terhadap distribusi MEWMA berbasis model)

Jika $\boldsymbol{x}$ adalah $N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A})$ dengan $\mathbf{A}$ nonsingular dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}$ dan $\mathbf{A}$ dinyatakan dalam bentuk partisi sebagai:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}.$$

dengan $\boldsymbol{x}_1$dan $\boldsymbol{\mu}_1$ berukuran $(m \times 1)$ dan $\mathbf{R}$ berukuran $(m \times m)$, maka

$$\boxed{Q = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) - (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)'\mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) \sim \chi^2_{n-m}}$$

Bukti:

Tulis,

$$\mathbf{A} = \mathbf{BB'}, \tag{4.12a}$$

dengan $\mathbf{B}$ non singular dan dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{U} = \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})$ sedemikian hingga $\mathbf{U} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ dan

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{U'U}\,. \tag{4.12b}$$

Misal,

$$\mathbf{U} = (\mathbf{R}_r \otimes \mathbf{I}_j)(\mathbf{R}_r \otimes \mathbf{I}_j) = \mathbf{R}_r^2 \otimes \mathbf{I}_j\,, \tag{4.12c}$$

dan (4.12b) dinyatakan dalam bentuk kuadratik

$$\mathbf{U'U} = (\mathbf{I}_j \otimes \mathbf{A})(\mathbf{I}_j \otimes \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{R}_r \otimes \mathbf{I}_j\,. \tag{4.12d}$$

Karena

$$\mathbf{R}_r^2 = \boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}')^{-2} = \boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}')^{-1} = \mathbf{R}_r, \tag{4.12e}$$

Sehingga (4.12d) ditulis kembali sebagai

$$\mathbf{U'U} = \mathbf{R}_r \otimes \mathbf{I}_j\,. \tag{4.12f}$$

dengan $tr(\mathbf{R}_r) = m$ dan $tr(\mathbf{I}_j) = j$ untuk $pm < j \leq n$, dan berdasarkan sifat hasil kali Kroneker yaitu hasil kali nilai-nilai Eigen suatu matriks yang juga merupakan hasil kali Kroneker dan merupakan *trace*, yaitu $tr(\mathbf{U}) = tr(\mathbf{R}_r) = m$, dan $tr(\mathbf{U'U}) = m$. Konsekuensi dari (4.12c-4.12d) dan kebebasan linier dari $\boldsymbol{v}$ pada Teorema 2 (lihat Lampiran A2), akibatnya

- Jika $tr(\mathbf{U}) = n - m$ dan $\boldsymbol{v}_j^{\mathbf{2}} = n - m$, maka $Q \sim \chi^2_{n-m}$; dan
- Jika $tr(\mathbf{U}) = n - m$ dan $\boldsymbol{v}_j^2 = \delta$, maka $Q \sim \chi^2_{n-m}(\delta)$ yang merupakan suatu distribusi non sentral χ^2 dengan $n - m = rank(\mathbf{U}) = tr(\mathbf{U})$ dan parameter non sentralitas $\delta = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{v}_j^2 = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}$.

Dengan demikian matriks pembobot eksponensial yang dinyatakan pada (2.9) dapat aplikasikan dalam bentuk kuadratik yang diberikan pada (2.10), sehingga

$$\mathbf{U} = (\mathbf{I}_k \otimes \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{R}'\boldsymbol{\Sigma}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{RR}')^{-\mathbf{1}}\mathbf{R}) = \mathbf{R}'(\mathbf{RR}')^{-\mathbf{1}}\mathbf{R} \tag{4.12g}$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{R}'(\mathbf{RR}')^{-1}\mathbf{R})(\mathbf{R}'(\mathbf{RR}')^{-1}\mathbf{R}) = \mathbf{R}'(\mathbf{RR}')^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{U}, \tag{4.12h}$$

dengan $tr(\mathbf{R}'(\mathbf{RR}')^{-1}\mathbf{R}) = tr(\mathbf{RR}'(\mathbf{RR}')^{-1}) = tr(\mathbf{I}_j) = j \leq m.$

Jadi, $tr(\mathbf{U}) = tr(\mathbf{U}'\mathbf{U}) = n - m$ dan $Q \sim \chi^2_{n-m}$. Sebaliknya, jika tidak berlaku demikian, maka $Q \sim \chi^2_{n-m}(\delta)$. ■

Matriks skalar $\boldsymbol{r}$ atau matriks koefisien $\mathbf{R}_{\boldsymbol{r}}$ disini ditulis dalam bentuk matriks partisi yang terletak pada blok diagonal **R** menunjukkan bahwa distribusi statistik $Q \sim \chi^2_{m-p}$ bergantung pada masalah nilai Eigen dari **U** yang memuat parameter pembobot eksponensial *r* (skalar). Namun setelah proses orthogonalisasi, nilai Eigen dari **U** yang juga memuat elemen diagonal **W** pada *entry* blok matriks diagonal dan i (indeks waktu) menjadi bebas linier. Jadi, jika parameter pembobot berbeda untuk setiap variabel berbeda pada **W**, maka distribusi statistik dari persamaan (2.10) praktis hanya bergantung pada pereduksian dimensi. Sebaliknya, jika tidak berlaku demikian, maka distribusi statistik MEWMA dapat diaproksimasi melalui $Q \sim \chi^2_{n-m}(\delta)$ dengan δ sebagai parameter non sentralitas yang dinyatakan secara eksplisit melalui bentuk kuadratik MEWMA.

Jadi, dapat simpulkan bahwa di bawah asumsi II, jika parameter pembobot **R** dapat direduksi ke bentuk orthogonal, maka distribusi statistik MEWMA hanya bergantung pada proses pereduksian dimensi. Sementara itu, jika parameter pembobot **R** tidak direduksi ke bentuk orthogonal, maka distribusi statistik MEWMA hanya bergantung pada parameter non sentralitasnya. Adapun efek parameter pembobot **R** terhadap distribusi MEWMA berbasis residual ini diuraikan kembali melalui prosedur berikut ini.

4.4 Algoritma penentuan efek non-normalitas pada distribusi MEWMA

Misal $\boldsymbol{x}_i$ suatu observasi yang diasumsikan berdistribusi normal bivariat $N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A})$ dengan $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{\mu}$ dipartisi sebagai $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{pmatrix}$, dengan $\boldsymbol{x}_1$ dan $\boldsymbol{\mu}_1$ berukuran $(m \times 1)$. Sementara matriks **A** dan **R** dinyatakan dalam hubungan $\mathbf{A} = [\mathbf{R} \vdots \mathbf{A}_i]$, dengan $\mathbf{A}_i \subset \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n,2}(\Re)$ dipandang sebagai matriks normal dan **R** sebagai matriks pembobot yang dipartisi menjadi

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \cdots & \mathbf{W}(\mathbf{I}_m - \mathbf{W})^{i \neq j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{W}(\mathbf{I}_m - \mathbf{W})^{j} \end{bmatrix},$$

dengan $\mathbf{R}_{r_1} = \mathbf{W},\ \mathbf{R}_{r_2} = \mathbf{W}(\mathbf{I}_m - \mathbf{W}), \dots, \mathbf{R}_{r_m} = \mathbf{W}(\mathbf{I}_m - \mathbf{W})^j$.

Sehingga efek parameter pembobot $\mathbf{R}$ terhadap distribusi MEWMA berbasis residual dapat dinyatakan dalam Algorima 4.1 yang diusulkan dalam penelitian ini, yaitu:

Algoritma 4.1 Penentuan efek non-normalitas pada distribusi MEWMA

(i) Bentuk blok matriks partisi $\mathbf{A}_i$ yang dipandang sebagai $\{\mathbf{A}_i = [\mathbf{A}_0 \colon \mathbf{A}_k]' | \mathbf{A}_i \in \mathbf{M}_{n,2}(\Re)\}$ untuk $i = 0,1,2,\dots,k$ dan $(k < n)$ sehingga dapat dibentuk suatu matriks partisi yang terdiri dari entri matriks blok diagonal pada suatu matriks segitiga atas $\mathbf{A}$. yaitu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vdots & \mathbf{A}_0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}, \text{ dengan } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{r_{i1}} & \cdots & \mathbf{R}_{r_{im \neq jm}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_{r_{im}} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{m,1}(\Re), \text{ (lihat sub-bab 2.2.2)}$$

(ii) Dekomposisikan matriks $\mathbf{A}$ ke bentuk $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}'$, dengan $\mathbf{B}$ non singular dan dapat dinyatakan sebagai $\mathbf{U} = \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})$ sedemikian hingga $\mathbf{U} \sim \boldsymbol{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$,

(iii) Hitung *trace* dan parameter non sentralitas dari $(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{U}'\mathbf{U}$,

(iv) Hitung *trace* dan parameter non sentralitas dari $\mathbf{R}_r^2 \otimes \mathbf{I}_j = (\mathbf{R}_r \otimes \mathbf{I}_j)(\mathbf{R}_r \otimes \mathbf{I}_j) = \mathbf{U}$,

(v) Tentukan efek parameter $\mathbf{R}$ pada distribusi MEWMA pada poin (iii) dan (iv)

$$(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}) - (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)'\mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) = \begin{cases} Q \sim \chi^2_{n-m} \text{ jika } \boldsymbol{v}_j^2 = n - m, \\ Q \sim \chi^2_{n-m}(\delta) \text{ jika } \boldsymbol{v}_j^2 = \delta, \end{cases}$$

dengan $\delta = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{v}_j^2 = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}$, untuk $m < j \leq n$.

Selanjutnya, dalam mengevaluasi diagram kontrol MEWMA berbasis model yang diusulkan dalam penelitian ini dapat memperhatikan besaran *shift* yang terjadi pada tahap identifikasi. Besaran *shift* berhubungan dengan parameter non sentralitas, khususnya *shift* dalam vektor mean.

4.5 Evaluasi kinerja diagram kontrol MEWMA berbasis model

Sebelum evaluasi terhadap kinerja diagram kontrol dilakukan, terdapat beberapa faktor yang perlu dipertimbangkan disini guna mengevaluasi proses pengontrolan berdasarkan jenis diagram kontrol secara tepat karena haruslah mengacu pada hasil identifikasi awal yang dilakukan. Berdasarkan pertimbangan tersebut, hasil interpertasi dan analisis efek yang mungkin terjadi pada distribusi statistik MEWMA pada fase I, maka langkah selanjutnya yang dikerjakan pada fase II adalah mengevaluasi kinerja diagram kontrol MEWMA dalam mendeteksi *shift* yang terjadi dalam proses.

Adapun skema monitoring dalam proses pendeteksian shift yang diusulkan dalam mengevaluasi kinerja diagram kontrol MEWMA dapat diawali dengan asumsi bahwa matriks kovarians diketahui dan bersifat positif definit. Sehingga misal terjadi *shift* dalam vektor mean dengan parameter non sentralitas $\delta = \sqrt{\boldsymbol{v}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_t}^{-1}\boldsymbol{v}}$ dengan $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0$ dan *shift* dalam vektor mean didefinisikan sebagai berikut:

- $\boldsymbol{\delta}_1$ adalah jenis *shift* dalam vektor mean berukuran kecil ; dan
- $\boldsymbol{\delta}_2$ adalah jenis *shift* dalam vektor mean berukuran moderat.

Simulasi numerik terkait dengan pemilihan kedua jenis *shift* ini diberikan pada bagian aplikasi menggunakan data riil.Selanjutnya, fungsi dari parameter non sentralitas δ_t sebagai suatu fungsi peluang dari distribusi $F_{m,n-m+1}$ pada Muirhead (2005) dan diaplikasikan dalam perhitungan ARL sebagai:

$$\beta(\delta) = P_\delta\left[\frac{n-m+1}{m}T^2 > F^*_{m,n-m+1}(\alpha)|\delta\right], \tag{4.13}$$

dengan $F^*_{m,n-m+1}(\alpha)$ sebagai titik atas $100\alpha\%$ dan α dipilih (*fix*).

Dengan demikian, jika proses *in-control*, maka

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}. \tag{4.14}$$

Sebaliknya, jika proses *out-of-control*, maka

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta(\delta)}. \tag{4.15}$$

Dalam hal ini, kemampuan diagram kontrol dalam mendeteksi *shift* dalam proses fraksi *nonconforming* dari nilai δ yang diberikan dapat mengacu pada skema monitoring yang diberikan melalui Tabel 4.1. Adapun nilai parameter pembobot $\boldsymbol{r}$ dan besaran *shift* telah ditentukan juga sebagai berikut.

Tabel 4.1 Simulasi pada diagram kontrol MEWMA berbasis model

Parameter pembobot, $\boldsymbol{r}$	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,6	0,7	1,0
Shift mean jenis-1, $\boldsymbol{\delta_1}$	0,0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,009	0,01
Shift mean jenis-2, $\boldsymbol{\delta_2}$	0,0	0,1	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0

Parameter pembobot dan jenis besaran *shift* dalam vektor mean yang diusulkan merupakan bagian dari strategi pengontrolan dalam simulasi terhadap efek non-normilatas pada diagram kontrol MEWMA ini mengacu pada Lowry, Woodall, Champ, dan Ridgon (1992), Pan dan Chen (2011), Reynolds dan Cho (2006), dan Reynolds dan Stoumbos (2008) untuk kasus observasi individual.

4.6 Implementasi GA: Kompleksitas dan Skalabilitas Implementasi

Umumnya suatu solusi yang telah diuraikan secara analitik tidak dapat langsung diimplementasikan secara numerik karena masih memerlukan beberapa penyederhanaan guna mengurangi kompleksitas perhitungan secara operasional. Terkait dengan proses implementasi GA, kompleksitas dan skalabilitas implementasi merupakan alasan dalam menghubungkan kajian secara analitik dan kajian secara numerik. Jika solusi analitik terukur, maka secara numerik, kompleksitas dan skalabilitas pengukuran berasal dari suatu entitas yang terukur.

Berdasarkan tahapan pengembangan diagram kontrol MEWMA yang telah diberikan pada Gambar 3.1, kompleksitas dan skalabilitas dalam proses implementasi GA mengacu pada proses penentuan model optimum. Penentuan model VAR(p) optimum melalui GA merupakan tahap lanjutan yang dikerjakan setelah penentuan penaksiran melalui LS. Tahapan ini merupakan pembanding terhadap tahapan estimasi parameter model VAR(p) melalui penaksir LS. Model yang dihasilkan melalui penaksir LS merupakan model yang telah diuji berdasarkan kriteria AIC minimum.

Secara analitik, telah ditunjukkan melalui statistik Hoteling T^2 untuk residual bahwa suku kedua dan ketiga pada (A.17c) memuat order $\boldsymbol{p^2}$ karena merupakan komposisi dari periode *lag* tertentu. Terlihat bahwa statistik $T^2_{\boldsymbol{u}_t}$ berkorelasi serial karena merupakan efek dari periode sebelumnya. Namun demikian, melalui pendekatan GA, efek *shift* yang terjadi dalam $\Delta\boldsymbol{\beta}$ dapat diminimumkan dengan mengaplikasikan $\Delta\widehat{\mathbf{B}}_{GA} = \Delta\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* \cong \mathbf{0}$ pada periode *lag* tertentu (lihat persamaan 4.10b). Karena parameter $\Delta\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ dianggap merepresentasi kromosom terbaik atau parameter optimum yang diberikan oleh MSE terkecil. Sehingga statistik $T^2_{\boldsymbol{u}_t} \sim \chi^2_p$ dapat diaplikasikan juga dalam proses konstruksi diagram kontrol MEWMA berbasis model. Dengan demikian efek *shift* dalam matriks-matriks koefisien melalui penaksir LS dapat direduksi melalui GA dengan cara merestriksi matriks $\Delta\widehat{\mathbf{B}}_{GA}$ guna menjamin optimalisasi matriks-matriks koefisien vektor regresif.

Secara numerik, proses pengujian parameter model melalui penaksir LS mengacu pada pengujian model dengan restriksi nol atau model tanpa restriksi nol terhadap matriks-matriks koefisien regresif. Meskipun berbeda dengan hasil estimasi matriks-matriks koefisien regresif yang diperoleh melalui GA. Namun hasil estimasi matriks-matriks koefisien regresif dengan level pengujian yang diberikan pada Tabel 2.1 dapat menghasilkan model optimum dengan batas iterasi maksimum adalah 500 yang diusulkan sebagai kriteria pemberhentian. Nilai *fitness* minimum yang dicapai melalui GA dapat mengacu pada $maxit = 500$, dianggap sudah memenuhi syarat tercapainya global optimum.

Sementara itu, hal penting yang perlu juga diperhatikan dalam upaya mereduksi kompleksitas dan skalabilitas implementasi pada kasus pengamatan tak random adalah dengan membatasi ukuran pengamatan yang digunakan, yaitu $\boldsymbol{x}_{n\times p}$ dengan $n \geq p$.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB V
EVALUASI KINERJA DIAGRAM KONTROL MEWMA BERBASIS RESIDUAL DAN APLIKASINYA

Secara umum, deskripsi pengontrolan kualitas multivariat dari data tak random telah dibahas melalui diagram kontrol T^2 dan MEWMA pada bab IV. Dalam hal ini pola umum yang telah diketahui dari adanya pola *shift* dalam vektor mean berakibat pada proses yang telah berada diluar pengontrolan. Dalam hal suatu data dipandang sebagai observasi individual, kedua diagram kontrol biasanya diaplikasikan dalam penanganan observasi dengan *shift-shift* besar, moderat dan kecil mengidikasikan bahwa observasi (individual) berasal dari proses diluar kontrol dan distribusi dari observasi tidak diketahui. Sehingga perlu dilakukan pengaitan terhadap suatu model pendekatan stokastik dengan suatu fungsi parametrik yang dapat diestimasi. Dengan demikian kuantitas parameter model ini dapat diukur melalui suatu fungsi parametrik.

Dari beberapa hasil simulasi numerik terhadap proses estimasi tidak mudah mengaplikasikan matriks kovarians hasil estimasi pada statistik MEWMA dan menentukan batas atas kontrol berdasarkan ARL_0 yang diharapkan dalam suatu proses produksi. Hal ini tidak hanya terkait dengan proses identifikasi dan estimasi parameter model VAR(p), tetapi juga proses penentuan residual dari model VAR melalui serangkaian simulasi dan evaluasi. Evaluasi dilakukan berdasarkan *Run Length* (RL) diagram kontrol secara berulang sebelum ditarik nilai rata-ratanya yang dikenali dalam studi evaluasi ini sebagai ARL diagram kontrol. Ide dibalik proses evaluasi kinerja disini dimaksudkan untuk mengetahui kinerja diagram kontrol pengembangan berdasarkan penaksir kuadrat terkecil dan algoritma genetika yang diimplementasikan pada residual dari model VAR(p).

Prosedur evaluasi kinerja diagram kontrol disini dapat diawali dengan tahapan identifikasi dan estimasi parameter model deret waktu VAR (p) melalui penaksir LS dan GA. Kemudian dilanjutkan dengan mengestimasi matriks koefisien $\hat{\mathbf{B}}$ dan menguji distribusi residual dari model VAR. Pada bagian akhir, evaluasi kinerja diagram kontrol dianalisa berdasarkan hasil estimasi parameter model dan sensitivitas diagram kontrol dalam mendeteksi adanya *outlier* pada masing-masing level *shift* mean jenis pertama dan kedua yang merupakan bagian dari skema monitoring dalam proses pengontrolan untuk pengamatan tak random.

5.1 Identifikasi dan Estimasi Parameter Model Vektor Auto-Regresif Order *p*

Dalam pemodelan multivariat *time series* dengan *k* variabel input yang direpresentasikan melalui suatu vektor autoregresif $\boldsymbol{x}_t$ berukuran $(nk \times 1)$ dengan $\boldsymbol{x}_t = (\boldsymbol{x}_{1t}^{'}, \dots, \boldsymbol{x}_{kt}^{'})'$ untuk $k = 1,2, \dots, p$ dan $t = 1,2, \dots, n$. Untuk $p = 1$, Model vektor autoregresif orde *p* dapat ditulis dalam bentuk sederhana sebagai model VAR(1)

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \tag{5.1}$$

dengan $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\boldsymbol{\varepsilon}_{1t}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{kt})'$ dan

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{11} & \cdots & \boldsymbol{\phi}_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_{nk} & \cdots & \boldsymbol{\phi}_{nk} \end{bmatrix}.$$

Model multivariat *time series* pada (5.1) disebut model VAR order 1 yang umumnya berkorelasi atau juga berautokorelasi dimana vektor $\boldsymbol{x}_t$ bergantung pada vektor $\boldsymbol{x}_{t-1}$.

Tanpa mengurangi bentuk umumnya, sebagai contoh kasus dalam simulasi yang dikerjakan disini dengan mengambil $k = 4$, dimana matriks koefisien $\boldsymbol{\Phi}$ dinotasikan sebagai matriks **B**, dan ditulis kembali dalam bentuk umum sebagai

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{1t} &= \alpha_1 + \beta_{11}\boldsymbol{x}_{1,t-1} + \beta_{12}\boldsymbol{x}_{2,t-1} + \beta_{13}\boldsymbol{x}_{3,t-1} + \beta_{14}\boldsymbol{x}_{4,t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{1t}, \\ \boldsymbol{x}_{2t} &= \alpha_2 + \beta_{21}\boldsymbol{x}_{1,t-1} + \beta_{22}\boldsymbol{x}_{2,t-1} + \beta_{23}\boldsymbol{x}_{3,t-1} + \beta_{24}\boldsymbol{x}_{4,t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{2t}, \\ \boldsymbol{x}_{3t} &= \alpha_3 + \beta_{31}\boldsymbol{x}_{1,t-1} + \beta_{32}\boldsymbol{x}_{2,t-1} + \beta_{33}\boldsymbol{x}_{3,t-1} + \beta_{34}\boldsymbol{x}_{4,t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{3t}, \\ \boldsymbol{x}_{4t} &= \alpha_4 + \beta_{41}\boldsymbol{x}_{1,t-1} + \beta_{42}\boldsymbol{x}_{2,t-1} + \beta_{43}\boldsymbol{x}_{3,t-1} + \beta_{44}\boldsymbol{x}_{4,t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{4t}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

dengan $\boldsymbol{\alpha}_k = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]'$ sebagai vektor konstan, $\boldsymbol{\varepsilon}_{kt} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{1t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{2t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{3t}, \boldsymbol{\varepsilon}_{4t}]'$ sebagai vektor *error*, dan $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix}$.

Persamaan (5.2) dapat ditulis kembali dalam sistem persamaan linier

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{1t} \\ \boldsymbol{x}_{2t} \\ \boldsymbol{x}_{3t} \\ \boldsymbol{x}_{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{1,t-1} \\ \boldsymbol{x}_{2,t-1} \\ \boldsymbol{x}_{3,t-1} \\ \boldsymbol{x}_{4,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{3t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{4t} \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

Selanjutnya (5.3) ditulis kembali dalam bentuk

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B}L)\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t, \tag{5.4}$$

dengan *L* sebagai operator *backshift*, **I** sebagai matriks identitas berukuran (4×4), dan **B***L* merepresentasikan operator matriks

$$\begin{bmatrix} \beta_{11}L & \beta_{12}L & \beta_{13}L & \beta_{14}L \\ \beta_{21}L & \beta_{22}L & \beta_{23}L & \beta_{24}L \\ \beta_{31}L & \beta_{32}L & \beta_{33}L & \beta_{34}L \\ \beta_{41}L & \beta_{42}L & \beta_{43}L & \beta_{44}L \end{bmatrix}.$$

Model (5.4) dapat diperumum sebagai:

$$\mathbf{B}(L)\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t, \tag{5.5}$$

dengan $\boldsymbol{x}_t$ sebagai variabel observasi individual $(n = 1)$ berukuran $(nk \times 1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ sebagai variabel dari vektor *noise* berukuran $(nk \times 1)$, $\mathbf{B}$ sebagai matriks polinomial order *p* dalam operator *backshift L* sedemikian hingga

$$\mathbf{B}(L) = \boldsymbol{I} - \mathbf{B}_1 L - \cdots - \mathbf{B}_p L^p, \tag{5.6}$$

dengan $\boldsymbol{I}$ sebagai matriks identitas berukuran $(k \times k)$ dan $\mathbf{B}$ sebagai matriks koefisien regresif berukuran $(k \times k)$ yang merupakan paramater utama dalam simulasi ini. Secara umum, model VAR(*p*) yang didefinisikan melalui (5.2) dan (5.4) dapat dideskripsikan sebagai berikut.

Misal pada persamaan (5.4), jika elemen matriks $\beta_{12} = 0$, maka variabel $\boldsymbol{x}_{1,t}$ tidak bergantung pada nilai *lag* di variabel $\boldsymbol{x}_{2,t-1}$. Dalam hal ini, jika saja $\boldsymbol{x}_{3,t}$ bergantung pada $\boldsymbol{x}_{2,t-1}$, maka tidak ada *feedback* dari $\boldsymbol{x}_{3,t-1}$ ke $\boldsymbol{x}_{2,t-1}$. Dalam sistim *loop* terbuka, komponen terakhir dari $\boldsymbol{x}_t$ merupakan *output* atau sebagai variabel respon. Hal ini berbeda dengan sistim *loop* tertutup seperti model VAR, dimana *feedback* dari *output* memiliki efek terhadap variabel-variabel *input* sehingga hubungan antar variabel dalam model VAR ini menggambarkan sifat kebergantungan saling lepas atau *mutually dependent*. Selanjutnya variabel-variabel *input* dalam sistim model VAR dapat disimulasikan melalui parameter awal sebelum diaplikasikan pada data riil. Hal ini terkait dengan penambahan suatu variabel deterministik tertentu yang mengandung *shift* atau *outlier* dimaksudkan untuk mengukur konsistensi dari penaksir LS dan GA sebelum diaplikasikan pada data riil.

5.1.1 Model VAR(1) dengan *Additive Outlier*

Additive outlier (AO) adalah *outlier* yang mempengaruhi model pada satu titik waktu saja. Model AO untuk proses AR(1) pada Box (1994), dapat dinyatakan kembali dalam model VAR(1) sebagai

$$\boldsymbol{z}_t = \begin{cases} \boldsymbol{x}_t, \ \ t \neq T_i, \\ \boldsymbol{x}_t + \omega_{AO}\mathbf{I}_t^{(T_i)}, \ \ t = T_i, \end{cases} \tag{5.7a}$$

dimana untuk $i = 1,2,\dots,k \le p; t \in \mathbb{Z}$ dan $\mathbf{I}_t^{(T_i)} = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{jika } t = T_i \text{ (terjadi } outlier) \\ \mathbf{0}, \text{jika } t \ne T_i \text{ (untuk yang lainnya)} \end{cases}$.

atau jika model VAR(1) dikontaminasikan dengan suatu AO pada saat $t = T_i$ dengan konstanta $\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}$ maka model (5.7a) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}_t &= \boldsymbol{x}_t + \omega_{AO}\mathbf{I}_t^{(T_i)}, \\ &= \mathbf{B}_1\boldsymbol{x}_{i,t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \omega_{AO}\mathbf{I}_t^{(T_i)}, \end{aligned} \tag{5.7b}$$

untuk $i = 1,2,\dots,k \le p$, $E[\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t^{'}] = \boldsymbol{\Sigma}_{\varepsilon_t}$, dan $\mathbf{I}_t^{(T_i)}$ sebagai suatu matriks indikator pada periode T_i. Sebagaimana halnya model linier multivariat pada (4.2), model (5.7b) dapat dinyatakan dalam bentuk yang lebih umum dalam vektor baris atau kolom dimana notasinya disusun melalui operator *vec* sebagai,

$$vec(\boldsymbol{z}_t) = vec(\mathbf{B}_i\boldsymbol{x}_{t-1}) + vec(\boldsymbol{\varepsilon}_t) + vec\left(\omega_{AO}\mathbf{I}_t^{(T_i)}\right),$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{1,t} \\ \boldsymbol{z}_{2,t} \\ \boldsymbol{z}_{3,t} \\ \boldsymbol{z}_{4,t} \end{bmatrix} = \left(\boldsymbol{x}_{1,t-1}^{'} \otimes \mathbf{I}_p\right) vec(\mathbf{B}_i) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{3t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{AO}\mathbf{I}_{1t}^{(T_1)} \\ \omega_{AO}\mathbf{I}_{2t}^{(T_2)} \\ \omega_{AO}\mathbf{I}_{3t}^{(T_3)} \\ \omega_{AO}\mathbf{I}_{4t}^{(T_4)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{1,t} \\ \boldsymbol{z}_{2,t} \\ \boldsymbol{z}_{3,t} \\ \boldsymbol{z}_{4,t} \end{bmatrix} = \left(L\boldsymbol{x}_{kt}^{'} \otimes \mathbf{I}_p\right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{1t} \\ \boldsymbol{\beta}_{2t} \\ \boldsymbol{\beta}_{3t} \\ \boldsymbol{\beta}_{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{3t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{AO}\mathbf{I}_{1t}^{(T_1)} \\ \omega_{AO}\mathbf{I}_{2t}^{(T_2)} \\ \omega_{AO}\mathbf{I}_{3t}^{(T_3)} \\ \omega_{AO}\mathbf{I}_{4t}^{(T_4)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{1,t} \\ \boldsymbol{z}_{2,t} \\ \boldsymbol{z}_{3,t} \\ \boldsymbol{z}_{4,t} \end{bmatrix} = \left(L\boldsymbol{x}_{kt}^{'} \otimes \mathbf{I}_p\right) \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{3t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{AO}\mathbf{I}_{1t}^{(T_1)} \\ \omega_{AO}\mathbf{I}_{2t}^{(T_2)} \\ \omega_{AO}\mathbf{I}_{3t}^{(T_3)} \\ \omega_{AO}\mathbf{I}_{4t}^{(T_4)} \end{bmatrix}, \tag{5.7c}$$

dengan $L\boldsymbol{x}_{kt}^{'}$ sebagai operator *back shift* orde satu, $(\boldsymbol{\beta}_{1t}, \boldsymbol{\beta}_{2t}, \boldsymbol{\beta}_{3t}, \boldsymbol{\beta}_{4t})^{'}$ sebagai vektor dari matriks koefisien untuk polinom orde satu untuk dan $\left(\mathbf{I}_{1t}^{(T_1)}, \mathbf{I}_{2t}^{(T_2)}, \mathbf{I}_{3t}^{(T_3)}, \mathbf{I}_{4t}^{(T_4)}\right)' = \mathbf{I}_{kt}^{(T_i)}$ untuk $i = 1,2,\dots,k \le p$.

Hubungan persamaan (5.7c) untuk model AO dari polinom orde ke-*i* dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\boldsymbol{z}_t = \left(L\boldsymbol{x}_{kt}^{'} \otimes \mathbf{I}_p\right) vec(\mathbf{B}_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \omega_{AO}\mathbf{I}_t^{(T_i)} \tag{5.7d}$$

Penerapan AO dalam simulasi pada model VAR(1) dengan ω_{AO} sebagai amplitudo atau suatu besaran skalar dari AO pada saat $t = T_i$ dapat ditentukan secara eksak pada sub vektor *time series* ke-*i*. Salah satu pertimbangan dalam pengambilan nilai ω_{AO} saat $t = T_i$ dapat mengacu pada jarak simpangan ke pusat data yang juga diberikan (diketahui). T_i menyatakan titik *outlier* pada saat *t* di variabel ke *i* untuk $i = 1,2,\ldots,k$. Dengan asumsi bahwa model VAR(1) adalah model yang stabil, sehingga efek yang terjadi dari setiap pemberian ω_{AO} pada model, akibatkan model terkontaminasi. Namun demikian, parameter $\mathbf{B}_1$ dalam simulasi ini dapat dipilih sedemikian hingga memberikan akar-akar karakteristik bernilai riil positif. Sebagai contoh kasus, model dibedakan dalam dua kasus berbeda berdasarkan besaran AO yang akan dibahas pada Bagian 5.1.4.

5.1.2 Prosedur Simulasi

Simulasi ini mengacu pada prosedur LS sehingga matriks koefisien **B** diindekskan sebagai, $\mathbf{B}_{LS}$. Secara umum, parameter $\mathbf{B}_{LS}$ dapat diestimasi melalui *unconditional* LS (*full* model) yang diberikan pada (5.2) dan (5.3). Namun demikian, dalam simulasi ini vektor mean dari $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ di*set* bernilai nol sebagai titik awal dalam proses bangkitan data. Adapun prosedur dalam simulasi ini diberikan sebagai berikut:

1. Tetapkan parameter $\{\mathbf{B}_{LS}\}$ (diberikan) sebagai *input* matriks koefisien auto-regresif berukuran (4×4) dari model VAR(1);
2. Bangkitkan data $\boldsymbol{x}_t$ berukuran $(n \times 4)$ yang mengikuti suatu distribusi multivariat normal dengan vektor mean bernilai berbeda dan matriks kovarians (diberikan);
3. Tambahkan *outlier* pada data bangkitan pada salah satu atau beberapa sub vektor dari variabel $\boldsymbol{x}_t$ pada angka 2; Adapun skema pemberian *outlier* mengacu pada *Additve Outlier* (AO) untuk *n*=100 dan $i = \{1,2\}$ diskemakan sebagai berikut:
   - Satu titik AO di $t = 25$ pada $\boldsymbol{x}'_{1,t-1} = [\boldsymbol{x}_{0,1}, \boldsymbol{x}_{1,1}, \ldots, (\boldsymbol{x}_{25,1} + 6), \ldots, \boldsymbol{x}_{100,1}]$;
   - Dua titik AO di $t = 25; 50$ pada $\boldsymbol{x}'_{1,t-1} = [\boldsymbol{x}_{0,1}, \boldsymbol{x}_{1,1}, \ldots, (\boldsymbol{x}_{25,1} + 6), \ldots, (\boldsymbol{x}_{50,1} + 6.5), \ldots, \boldsymbol{x}_{100,1}]$ dan $\boldsymbol{x}'_{2,t-1} = [\boldsymbol{x}_{0,2}, \boldsymbol{x}_{1,2}, \ldots, (\boldsymbol{x}_{25,2} + 6), \ldots, (\boldsymbol{x}_{50,2} + 6.5), \ldots, \boldsymbol{x}_{100,2}]$;
   - Melalui cara yang sama, untuk *n*=200 dan $t = \{25; 50\}$ diambil sebagai waktu terjadinya AO dalam deret waktu yang sama, baik di satu titik waktu pada $\mathbf{x}'_{1,t-1}$ atau dua titik waktu pada $\boldsymbol{x}'_{1,t-1}$ dan $\boldsymbol{x}'_{2,t-1}$; dan

4. Evaluasi dan bandingkan hasil estimasi MSE melalui LS terhadap nilai MSE melalui GA guna mengukur konsistensi GA yang diadopsi dalam prosedur LS bersyarat.

Misal, matriks koefisien dalam simulasi untuk *input* parameter dalam prosedur LS ditetapkan sebagai berikut:

$$\mathbf{B}_{LS} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & -0{,}7 & 0{,}5 & -0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}7 & -0{,}1 & -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Pada kasus pertama, $\mathbf{B}_{LS}$ disubtitusi ke (5.2) dan (5.3) sehingga diperoleh sistim persamaan baru pertama yaitu

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{1t} \\ \boldsymbol{x}_{2t} \\ \boldsymbol{x}_{3t} \\ \boldsymbol{x}_{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & -0{,}7 & 0{,}5 & -0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}7 & -0{,}1 & -0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{1,t-1} \\ \boldsymbol{x}_{2,t-1} \\ \boldsymbol{x}_{3,t-1} \\ \boldsymbol{x}_{4,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{3t} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{4t} \end{bmatrix},$$

atau

$$\boldsymbol{x}_{1t} = 0{,}7\boldsymbol{x}_{1,t-1} + 0{,}3\boldsymbol{x}_{2,t-1} + 0{,}2\boldsymbol{x}_{3,t-1} + 0{,}1\boldsymbol{x}_{4,t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{1t},$$
$$\boldsymbol{x}_{2t} = 0{,}3\boldsymbol{x}_{1,t-1} - 0{,}7\boldsymbol{x}_{2,t-1} + 0{,}5\boldsymbol{x}_{3,t-1} - 0{,}7\boldsymbol{x}_{4,t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{2t},$$
$$\boldsymbol{x}_{3t} = 0{,}2\boldsymbol{x}_{1,t-1} + 0{,}5\boldsymbol{x}_{2,t-1} + 0{,}5\boldsymbol{x}_{3,t-1} - 0{,}1\boldsymbol{x}_{4,t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{3t},$$
$$\boldsymbol{x}_{4t} = 0{,}1\boldsymbol{x}_{1,t-1} - 0{,}7\boldsymbol{x}_{2,t-1} - 0{,}1\boldsymbol{x}_{3,t-1} - 0{,}5\boldsymbol{x}_{4,t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{4t}.$$

dengan vektor konstan $\boldsymbol{\alpha}_k = [0,0,0,0]'$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ diasumsikan bersifat saling bebas identik yang berdistribusi $N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}^2)$. Sementara variabel $\boldsymbol{x}_t = (\boldsymbol{x}_{1t}', \boldsymbol{x}_{2t}', \boldsymbol{x}_{3t}', \boldsymbol{x}_{4t}')'$ yang dibangkitkan sebanyak *n* observasi (individual) juga diasumsikan berdistribusi multivariat normal dengan vektor mean bernilai sama atau berbeda untuk setiap variabel, dan matriks varians kovarians yang juga di*set* bernilai definit positif guna menjamin non singularitas data bangkitan.

Dibawah asumsi ini, nilai MSE tanpa pemberian AO yang dicatat untuk *n*=100 dan *n*=200 data bangkitan ini dibandingkan dengan hasil simulasi dengan pemberian AO dan diberikan pada Tabel 5.1. Dari hasil perbandingan ini, terlihat bahwa MSE tanpa AO dari variabel $\boldsymbol{x}_{1t}'$ dan $\boldsymbol{x}_{2t}'$ cenderung lebih besar dari MSE dengan AO. Hal ini dapat dipahami karena berasal dari data bangkitan yang selalu berubah dalam setiap bangkitan data dengan metode LS.

5.1.3 Hasil Simulasi

Simulasi dengan penaksir LS diawali vektor mean dan matriks kovarians yang diberikan dalam membangkitkan data untuk *n*=100. Penambahan *outlier* (AO) dalam tahap simulasi dengan *input* parameter awal berupa matriks koefisien sebagai *input* dan *output*nya berupa MSE. Deskripsi model diawali dengan multivariat *time series plot* dan *matrix plot* (sebelum dan setelah) *outlier* ditambahkan pada model $\boldsymbol{z}_t$ untuk mengetahui sifat ke*robust*an penaksir model.

Hasil simulasi dari model VAR(1) berdasarkan jenis AO untuk 100 dan 200 observasi dengan matriks koefisien (diketahui) memberikan nilai MSE dan matriks kovarians residual tentatif dan diberikan pada Tabel 5.1.

Tabel.5.1 Hasil simulasi model VAR(1) berdasarkan jenis AO dengan $\mathbf{B}_{LS}^{(1)}$(diberikan)

Jenis AO	MSE dengan AO		MSE tanpa AO
	n=100	*n*=200	*n*=200
Contoh 1. Satu titik AO pada $\boldsymbol{x}_{t,1}$ untuk $t = 25$	$\begin{bmatrix} 0{,}838 \\ 13{,}838 \\ 4{,}063 \\ 62{,}305 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}867 \\ 11{,}874 \\ 4{,}167 \\ 66{,}587 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}878 \\ 13{,}180 \\ 4{,}448 \\ 68{,}090 \end{bmatrix}$
Contoh 2. Dua titik AO pada $\boldsymbol{x}_{t,1}$ dan $\boldsymbol{x}_{t,2}$ untuk $t = 25; 50$	$\begin{bmatrix} 0{,}827 \\ 12{,}857 \\ 4{,}519 \\ 57{,}555 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}801 \\ 12{,}922 \\ 4{,}013 \\ 64{,}731 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}914 \\ 15{,}640 \\ 4{,}864 \\ 71{,}474 \end{bmatrix}$

Contoh 1. *Input* $\mathbf{B}_{LS}$ dengan nilai Eigen $\lambda_k = (0{,}96;\ 0{,}42; 0{,}69;\ 0{,}69)'$ dan satu titik AO di $\boldsymbol{x}_{25,1}$. Dalam simulasi ini, misal dipilih vektor mean dan matriks varians-kovarians sebagai

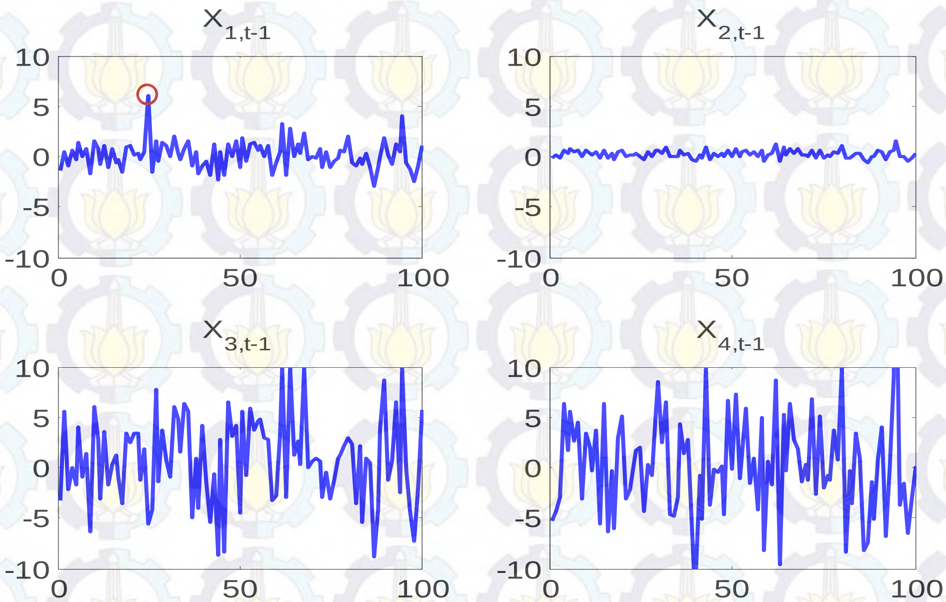
$$\boldsymbol{\mu} = [0{,}10 \quad 0{,}25 \quad 0{,}50 \quad 0{,}90] \text{ dan } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0{,}3105 & 0{,}1025 & 0{,}9879 & 0{,}7712 \\ 0{,}1025 & 0{,}0915 & 0{,}1960 & 0{,}3096 \\ 0{,}9879 & 0{,}1960 & 4{,}1821 & 0{,}9703 \\ 0{,}7712 & 0{,}3096 & 0{,}9703 & 4{,}6308 \end{bmatrix}.$$

Melalui penaksir LS, nilai MSE untuk $\boldsymbol{x}_{t,1}$ baik dengan adanya AO dan tanpa AO cenderung naik walaupun jumlah observasi dinaikan menjadi 200 (lihat Tabel 5.1). Selanjutnya, untuk *n*=100, Model VAR(1) di $\boldsymbol{x}_{t,1}$ pada saat $t = 25$ dengan $\omega_{AO} = (6)$ adalah:

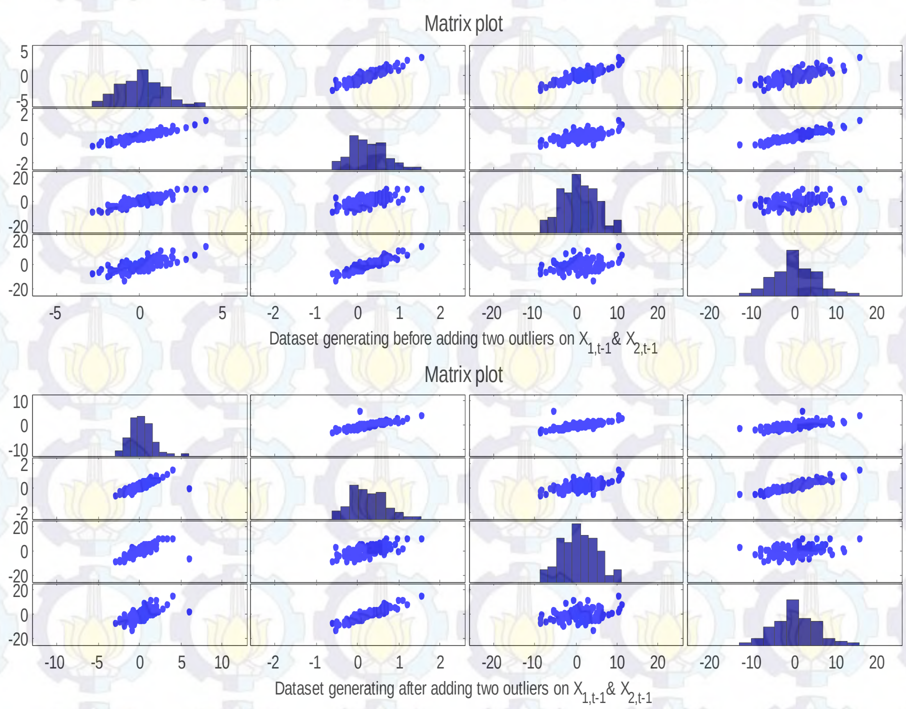
$$\boldsymbol{z}_t = \left(L\boldsymbol{x}_{kt}^{'} \otimes \mathbf{I}_p\right) vec\left(\mathbf{B}_{LS}^{(1)}\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_t + 6\mathbf{I}_t^{(T_1)},$$

dengan variansi $\sigma_{11}^2 = 0{,}838$, $\sigma_{22}^2 = 13{,}838$, $\sigma_{33}^2 = 4{,}063$ dan $\sigma_{44}^2 = 62{,}305$.

Deskripsi model dari Contoh 1 melalui penaksir LS diberikan melalui *time series plot* di $\boldsymbol{x}_{25,1}$ pada Gambar 5.1a dan matriks plot untuk $(\boldsymbol{x}_{1t}^{'}, \boldsymbol{x}_{2t}^{'}, \boldsymbol{x}_{3t}^{'}, \boldsymbol{x}_{4t}^{'})'$ pada Gambar 5.1b.



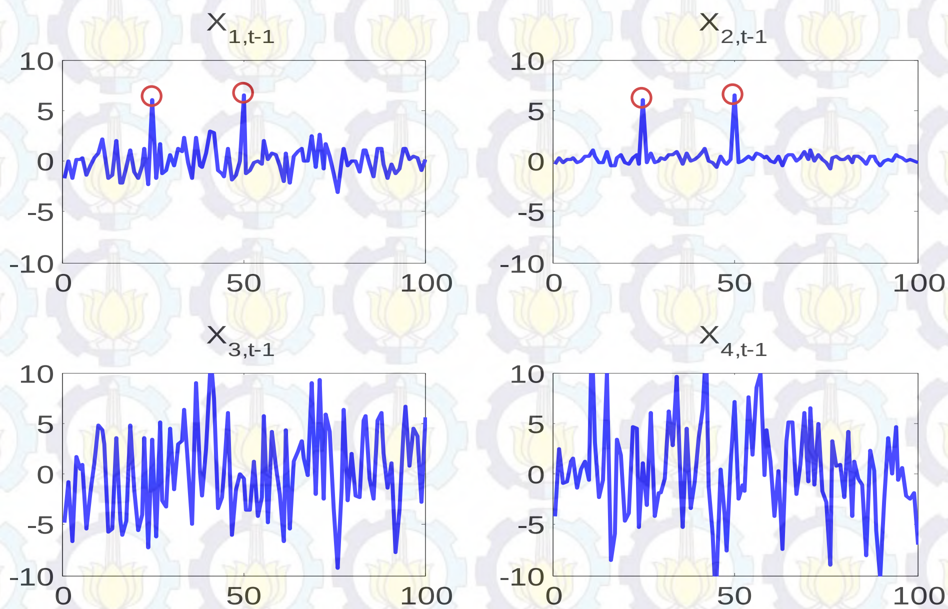
Gambar 5.1a *Time series plot* untuk n=100 dengan 1 titik AO



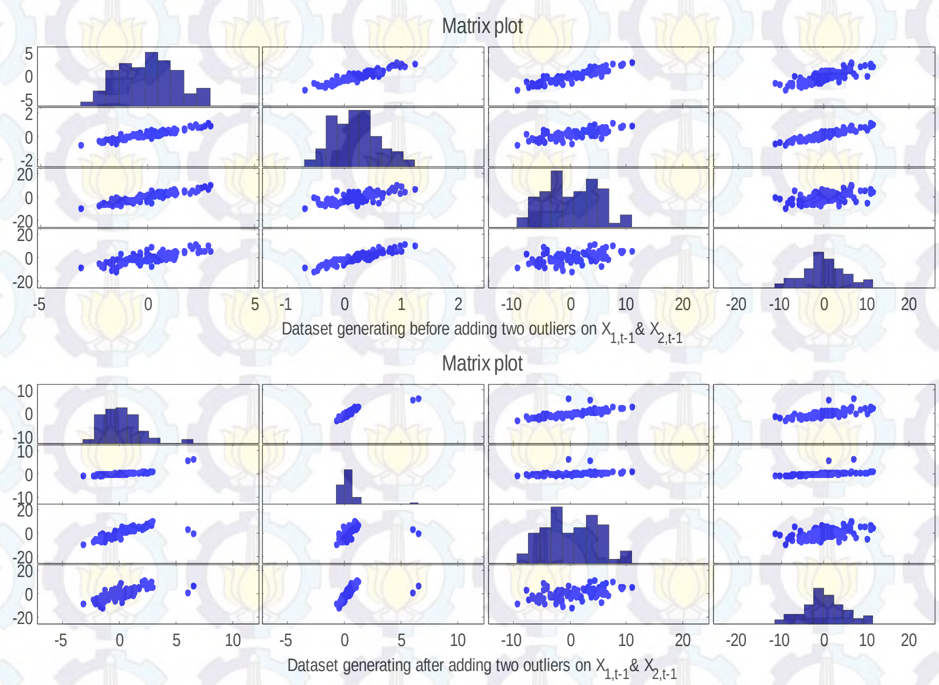
Gambar 5.1b Matriks plot untuk n=100 dengan 1 titik AO

Selanjutnya untuk kasus penambahan dua titik AO pada data bangkitan kembali dibahas guna mengetahui residual yang dihasilkan melalui penaksir LS dan diberikan pada Contoh 2 berikut.

Contoh 2. *Input* $\mathbf{B}_{LS}^{(1)}$ dan input vektor mean dan matriks kovarians yang sama pada Contoh 1, Nilai MSE dari hasil simulasi untuk 2 titik AO yaitu $\boldsymbol{x}_{t,1}$ dan $\boldsymbol{x}_{t,2}$ untuk $t = 25$ dan $t = 50$ dengan n=100 diberikan pada Tabel 5.1. Sementara deskripsi model berupa *time series plot* dan plot matriks dari $(\boldsymbol{x}_{1t}', \boldsymbol{x}_{2t}', \boldsymbol{x}_{3t}', \boldsymbol{x}_{4t}')'$ masing-masing diberikan pada Gambar 5.2a dan Gambar 5.2b.



Gambar 5.2a *Time series plot* data bangkitan untuk 2 titik AO



Gambar 5.2b Matriks plot untuk *n*=100 dengan 2 titik AO

Model VAR(1) untuk dua titik AO pada $\boldsymbol{x}_{t,1}$ dan $\boldsymbol{x}_{t,2}$ yaitu saat $t = 25$ dan $t = 50$ dengan $\omega_{AO} = (6; 6{,}5)$ masing-masing adalah:

$$\boldsymbol{z}_t = \left(L\boldsymbol{x}_{kt}^{'} \otimes \mathbf{I}_p\right) vec(\mathbf{B}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}_t + 6\mathbf{I}_t^{(T_1)} \text{ dan } \boldsymbol{z}_t = \left(L\boldsymbol{x}_{kt}^{'} \otimes \mathbf{I}_p\right) vec(\mathbf{B}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}_t + 6{,}5\mathbf{I}_t^{(T_2)},$$

dengan variansi $\sigma_{11}^2 = 0{,}827$, $\sigma_{22}^2 = 12{,}857$, $\sigma_{33}^2 = 4{,}519$ dan $\sigma_{44}^2 = 57{,}555$ untuk kedua kesamaan tersebut.

Contoh 3. Untuk *input* $\mathbf{B}_{LS}^{(1)}$ dengan vektor mean dan matriks kovarians (diberikan). Simulasi untuk 1 titik AO pada $t = 25$ dengan $\omega_{AO} = 25$ yang memberikan nilai MSE masing-masing variabel sebagai berikut: $\sigma_{11}^2 = 3{,}440$, $\sigma_{22}^2 = 139{,}482$, $\sigma_{33}^2 = 6{,}164$ dan $\sigma_{44}^2 = 141{,}868$.

$$\boldsymbol{\mu} = [10 \quad 12 \quad 10 \quad 15] \text{ dan } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3{,}8819 & 1{,}1872 & 1{,}0534 & 1{,}1184 \\ 1{,}1872 & 5{,}7334 & 0{,}8719 & 2{,}3020 \\ 1{,}0534 & 0{,}8719 & 0{,}7208 & 0{,}6347 \\ 1{,}1184 & 2{,}3020 & 0{,}6347 & 5{,}7310 \end{bmatrix}.$$

Contoh 3 ini merupakan pembanding terhadap dua contoh sebelumnya, dimana *input* data bangkitan berupa nilai vektor mean dan matriks kovarians digantikan dengan nilai yang lebih besar. Adapun hasil simulasi pada Contoh 3 ini diberikan terkait data yang digunakan dalam aplikasi melalui *input* vektor mean dan matriks kovarians yang berasal dari suatu data *count* multivariat normal untuk 1 dan 2 titik AO (n=100, n=200). Adapun hasil simulasi dan deskripsinya diletakan pada Lampiran B.2.

5.1.4 Interpretasi Hasil Simulasi Model VAR(1) Melalui *Addaptive Outlier* (AO)

Di bawah asumsi sifat depedensi saling lepas yang dimiliki model VAR (sistim tertutup), efek pada variabel respon $\boldsymbol{x}_t = (\boldsymbol{x}_{1t}^{'}, \boldsymbol{x}_{2t}^{'}, \boldsymbol{x}_{3t}^{'}, \boldsymbol{x}_{4t}^{'})^{'}$ dapat diukur dengan mensubtitusikan parameter *input* dari ketiga kasus diatas. Dimana efek dari variabel respon direpresentasikan secara tidak langsung melalui nilai MSE dan matriks kovarians residual.

Pada kasus kedua dengan *input* yang sama dengan n=200 menghasilkan nilai MSE yang relatif sama untuk n=100. Terlihat bahwa efek pemberian *outlier* aditif yang terbaca belum memberikan perbedaan yang signifikan terhadap sistim karena masih bersifat tentatif. Secara deskriptif hasil ploting *time series* dan matriks plot melalui Gambar 5.1a dan 5.1b untuk n=100 (untuk n=200 dapat dilihat pada Lampiran B.2). Hasil ini juga menunjukkan bahwa data hasil bangkitan dari model VAR baik dengan atau tanpa adanya AO dengan input parameter $\mathbf{B}_{LS}$ belum menjamin konvergensi dari MSE.

Fenomena yang terjadi dalam Contoh 1, 2, dan 3 adalah MSE yang dihitung secara tidak langsung masih bersifat tentatif karena selalu berubah dalam setiap data yang dibangkitkan. Hal ini mengisyaratkan juga bahwa model yang dibentuk, baik dengan atau tanpa AO akan memberikan hasil perhitungan yang berbeda-beda. Sehingga dalam penentuan model terbaik pada tahap aplikasi (bagian 5.3), salah satu cara atau metode yang dapat digunakan untuk mengatasi masalah tersebut adalah dengan cara merestriksi (restriksi nol) komponen matriks koefisien $\widehat{\boldsymbol{\Phi}}$ model pada (2.68). Analogi ini juga yang digunakan kemudian pada (4.8) melalui penaksir LS yaitu $\widehat{\mathbf{B}}$ dan GA sebagai $\widehat{\mathbf{B}}^{*}$.

Dilain pihak, salah satu aspek penting yang direkam dari hasil simulasi ini juga adalah data hasil bangkitan dibawah asumsi normal multivariat perlu dipastikan berasal dari suatu model yang stabil yang diisyaratkan pada (2.64). Hal ini dapat ditunjukkan melalui nilai Eigen dari *input* matriks $\mathbf{B}_{LS}$ yang kurang dari satu satuan (jari-jari lingkaran) sehingga memenuhi $det\left(\mathbf{I}_K - \mathbf{B}_1 z - \cdots - \mathbf{B}_p z^p\right) \neq 0$ untuk $|\mathbf{z}| \leq 1$. Akibatnya, model VAR(1) dengan AO dapat dijadikan acuan dalam proses penaksiran parameter model. Dalam hal ini, AO dapat diinterpertasi sebagai salah satu sumber *special cause* karena berasal dari suatu *unusual pattern* (*outlier*) dan berdampak pada situasi di luar pengontrolan. Dimana secara tentatif diperoleh bahwa penambahan jumlah observasi belum berdampak secara siginifikan terhadap penurunan nilai MSE. Meskipun demikian, pencarian nilai MSE minimum yang diasosiasikan dengan nilai *fitness* minimum pada GA dapat dioperasikan pada level tertentu guna mencapai nilai MSE minimum yang konvergen ke titik nol. Sehingga dapat dijadikan sebagai penaksir *robust* dalam proses evaluasi residual dan dapat dibandingkan dengan model VAR(1) melalui penaksir LS.

5.1.5 Hasil Evaluasi Model VAR(1) Berbasis Simulasi Melalui GA

Hasil evaluasi model VAR(1) berbasis simulasi melalui GA diawali pada proses data bangkitan tanpa adanya AO dan diberikan pada Tabel 5.2. Dalam simulasi yang dilakukan dengan jumlah generasi 500 dan 1000 ini, penentuan parameter peluang mutasi dan peluang pindah saling dilakukan berulang-ulang (*try and error*) untuk mendapatkan MSE terkecil.

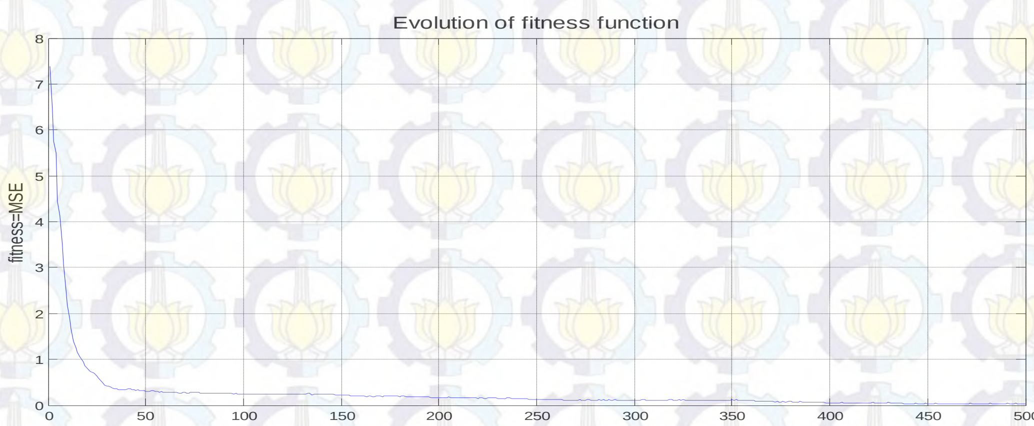
Fungsi obyektif dalam simulasi ini mengacu nilai MSE terkecil yang diberikan pada (4.11) dengan asumsi bahwa $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_3^{*} \cong \mathbf{0}$ yang sebelumnya tidak diketahui sehingga perlu diestimasi melalui GA. Berdasarkan hasil simulasi dengan nilai MSE pada Tabel 5.1, evaluasi terhadap kedua kasus kembali dilakukan melalui GA untuk *n*=100 dan *n*=200. Adapun estimasi dilakukan dengan alat bantu Matlab dengan tahapan sebagai berikut.

1) Membangkitan populasi;
2) Mengevaluasi populasi guna menghitung nilai *fitness*;
3) Menyalin kromosom terbaik (*ellitsm*) sementara;
4) Memilih kromosom dengan nilai *fitness* terbaik (MSE terkecil);
5) Melakukan pindah silang pada level antara 0,80 sampai dengan 0,95; dan
6) Melakukan mutasi pada level 0,0001 sampai dengan 0,0004 untuk mendapatkan individu terbaik.

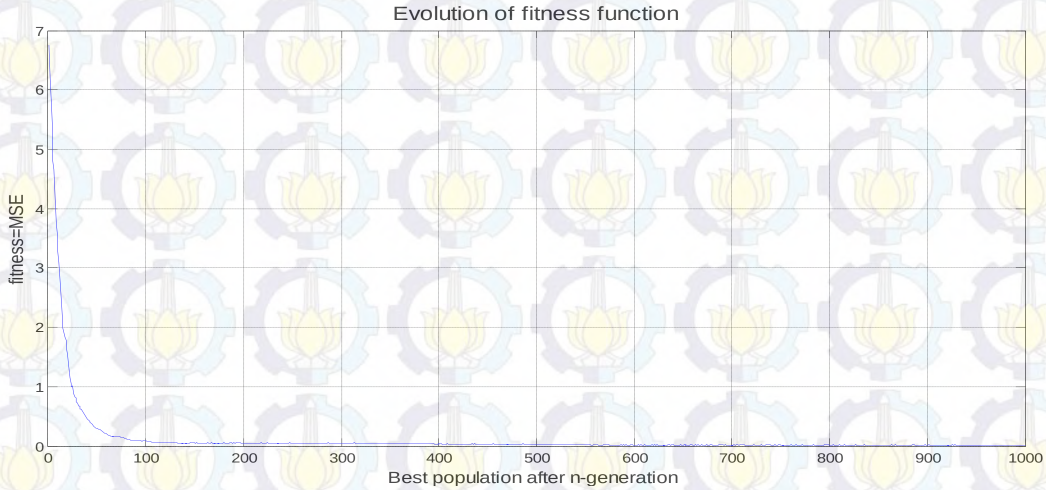
Tabel 5.2 Parameter hasil simulasi algoritma genetika tanpa AO

Asumsi awal	Kriteria	Parameter hasil simulasi Algoritma Genetika	Ukuran performansi model
a. Jumlah Generasi b. Jumlah Populasi c. Peluang Pindah Silang d. Peluang Mutasi	500 100 0,85 0,0001	- Beta(1) = 0,94098 - Beta(2) = 0,48685 - Beta(3) = 0,06788 - Beta(4) = -0,14078 - MSE = 0,02160	- Nilai AIC = 8,120 - Nilai SC = 191,698 - Waktu untuk proses perhitungan=131,859
a. Jumlah Generasi b. Jumlah Populasi c. Peluang Pindah Silang d. Peluang Mutasi	1000 200 0,85 0,0001	- Beta(1) = 0,92870 - Beta(2) = 0,31293 - Beta(3) = 0,01512 - Beta(4) = -0,03364 - MSE = 0,00607	- Nilai AIC = 10,243 - Nilai SC = 515,548 - Waktu untuk proses perhitungan =863,938

Hasil evaluasi model VAR(1) tanpa AO melalui GA dengan jumlah generasi 500 untuk populasi 100 dan jumlah generasi 1000 untuk populasi 200 tanpa AO diberikan masing-masing mencapai solusi global optimum dan diberikan melalui Gambar 5.3 (a-b).



Gambar 5.3a Konvergensi fungsi *fitness* dari 500 generasi tanpa AO



Gambar 5.3b Konvergensi fungsi *fitness* dari 1000 generasi tanpa AO

Selanjutnya, hasil evaluasi model VAR(1) diterapkan pada model AO (1 titik AO dan 2 titik AO) melalui GA dengan jumlah populasi diawali dengan 500 generasi untuk ukuran populasi 100 dan 1000 generasi untuk ukuran populasi 200. Hasil evaluasi ini diberikan melalui Tabel 5.3 dan Gambar 5.4.

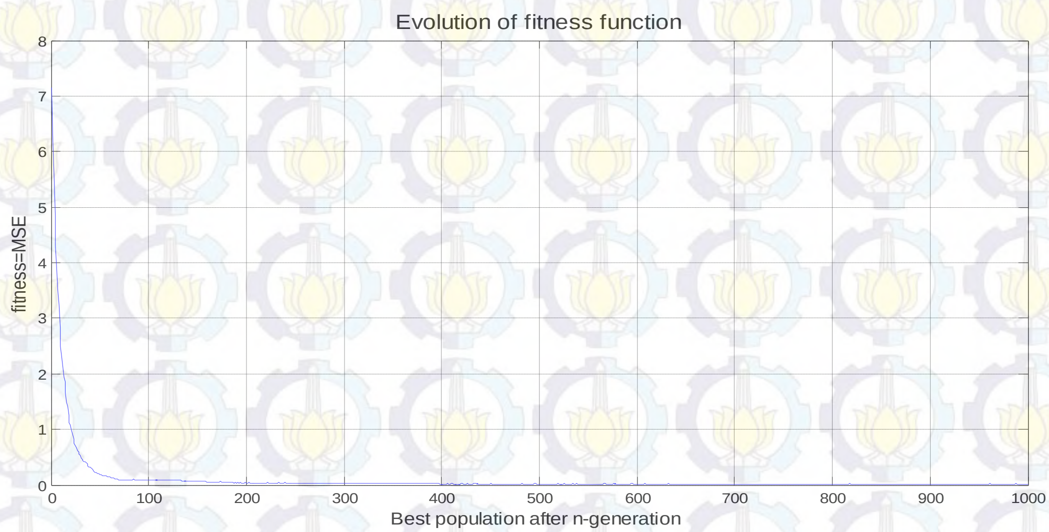
Tabel 5.3 Parameter hasil simulasi algoritma genetika dengan 1 titik AO :

Asumsi awal	Kriteria	Parameter hasil simulasi Algoritma Genetika	Ukuran performansi model
a. Jumlah Generasi b. Jumlah Populasi c. Peluang Pindah Silang d. Peluang Mutasi	500 100 0,85 0,0001	- Beta(1) = 0,95904 - Beta(2) = 0,06120 - Beta(3) = -0,00842 - Beta(4) = -0,02451 - MSE = 0,01596	- Nilai AIC = 8,423 - Nilai SC = 192,001 - Waktu untuk proses perhitungan =132,422
a. Jumlah Generasi b. Jumlah Populasi c. Peluang Pindah Silang d. Peluang Mutasi	1000 200 0,85 0,0001	- Beta(1) = 0,92818 - Beta(2) = 0,50240 - Beta(3) = 0,01703 - Beta(4) = -0,06763 - MSE = 0,00498	- Nilai AIC = 10,440 - Nilai SC = 515,746 - Waktu untuk proses perhitungan=489,563

Berdasarkan hasil simulasi pada Tabel 5.3, misal model VAR(1) terbaik yang dipilih berdasarkan kriteria n=100 (populasi moderat) dengan AIC=8,423 dan ditulis sebagai

$$\boldsymbol{z}_t = \left(L\boldsymbol{x}_{kt}' \otimes \mathbf{I}_p\right) vec(\mathbf{B}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}_t + 6\mathbf{I}_t^{(T_1)}.$$

Gambar 5.4a Konvergensi fungsi *fitness* dari 500 generasi dengan 1 titik AO



Gambar 5.4b Konvergensi fungsi *fitness* dari 1000 generasi dengan 1 titik AO

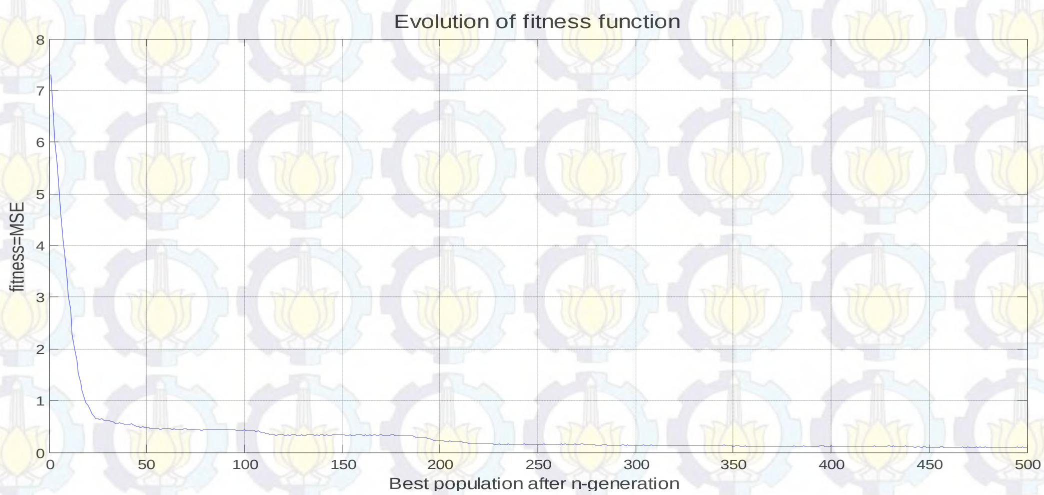
Berdasarkan hasil simulasi untuk 2 titik AO, model VAR(1) terbaik yang dipilih dengan kriteria *n*=200 (populasi besar) yaitu AIC =6,888 (terkecil) pada 2 titik AO. Sehingga jika model VAR(1) yang digunakan, dapat ditulis sebagai:

$$\boldsymbol{z}_t = \left(L\boldsymbol{x}_{kt}^{'} \otimes \mathbf{I}_p\right) vec(\mathbf{B}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}_t + 6\mathbf{I}_t^{(T_1)} \text{ dan } \boldsymbol{z}_t = \left(L\boldsymbol{x}_{kt}^{'} \otimes \mathbf{I}_p\right) vec(\mathbf{B}_1) + \boldsymbol{\varepsilon}_t + 6{,}5\mathbf{I}_t^{(T_2)}.$$

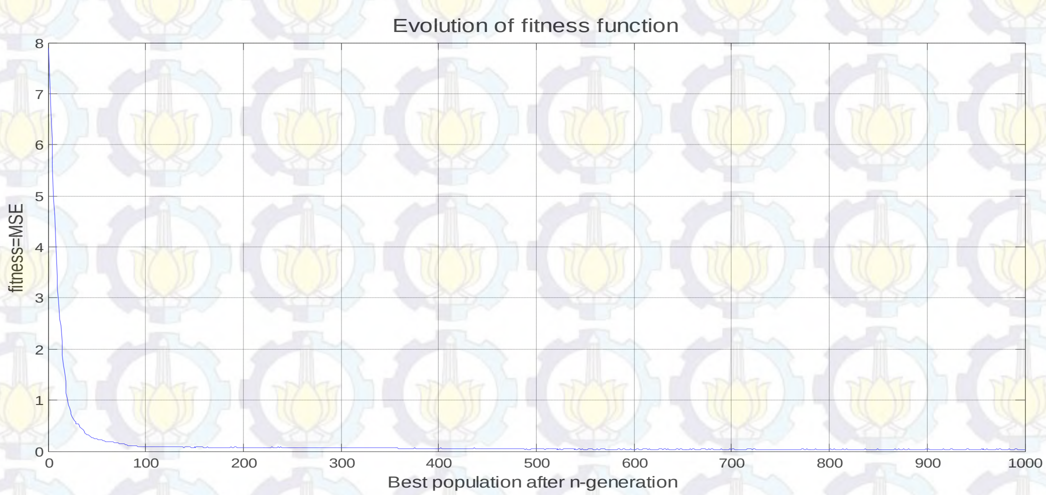
Evaluasi model VAR(1) di 2 titik AO melalui GA dengan jumlah generasi 500 dan jumlah populasinya adalah 100 dan 200. Hasil evaluasi kedua ketika melibatkan 2 titik AO diberikan melalui Tabel 5.4 dan Gambar 5.5 (a-b) berikut ini.

Tabel 5.4 Parameter hasil simulasi algoritma genetika dengan 2 titik AO :

Asumsi awal	Kriteria	Parameter hasil simulasi Algoritma Genetika	Ukuran performansi model
a. Jumlah Generasi b. Jumlah Populasi c. Peluang Pindah Silang d. Peluang Mutasi	500 100 0,85 0,0001	- Beta(1) = 0,85374 - Beta(2) = 0,07368 - Beta(3) = 0,04902 -Beta(4) = 0,03450 - MSE = 0,07407	- Nilai AIC = 6,888 - Nilai SC 190,466 - Waktu untuk proses perhitungan =134,250
a. Jumlah Generasi b. Jumlah Populasi c. Peluang Pindah Silang d. Peluang Mutasi	1000 200 0,85 0,00001	- Beta(1) = 0,92644 - Beta(2) = 0,08042 - Beta(3) = 0,01327 - Beta(4) = 0,00698 - MSE = 0,02705	- Nilai AIC = 8,748 - Nilai SC = 514,054 - Waktu untuk proses perhitungan=486,813



Gambar 5.5a Konvergensi fungsi *fitness* dari 500 generasi dengan 2 titik AO



Gambar 5.5b Konvergensi fungsi *fitness* dari 1000 generasi dengan 2 titik AO

5.2 Penentuan Batas Atas Kontrol dan Evaluasi Kinerja Diagram Kontrol

Penentuan batas atas kontrol untuk kasus data tak random yang direkomendasikan oleh Montgomery (2005) dan Mason, dkk (2003) digunakan pada fase I pengontrolan mengikuti distribusi Beta. Meskipun demikian, berdasarkan uraian yang telah diberikan pada bagian 4.1, studi pengembangan diagram kontrol MEWMA berbasis model yang telah diuraikan pada kajian ini mengacu pada batas atas kontrol dari distribusi Khi-kuadrat. Dimana penentuan batas atas kontrol MEWMA dan Hotelling T^2 mengacu pada ARL_0 dan nilai peluang *false alarm* (α).

Melalui simulasi yang dilakukan terhadap kinerja diagram kontrol dengan asumsi ARL_0=200, batas kontrol yang diberikan melalui nilai *upper control limit*/UCL dari kedua diagram kontrol ini ditetapkan berdasarkan nilai peluang *false alarm* yang berbeda berdasarkan jenis diagram kontrol. Secara umum, dari hasil evaluasi diagram kontrol T^2 Hotelling bekerja dengan baik pada batas atas kontrol yang lebih lebar dibandingkan terhadap diagram kontrol MEWMA. Adapun batas atas kontrol pada (2.14) yang digunakan dalam mengevaluasi diagram kontrol T^2 residual masing-masing memberikan nilai UCL Khi-kuadrat: 13,1978; 15,0303; 16,8119 dan 18,5476. Hasil evaluasi kinerja diagram kontrol Hotelling T^2 untuk residual ($T_{\boldsymbol{u}}^2$) aelanjutnya diestimasi menggunakan penaksir LS dan GA dan diuraikan pada bagian 5.2.1 berikut ini.

5.2.1 Evaluasi Kinerja Diagram Kontrol T^2 Hotelling Berbasis Residual

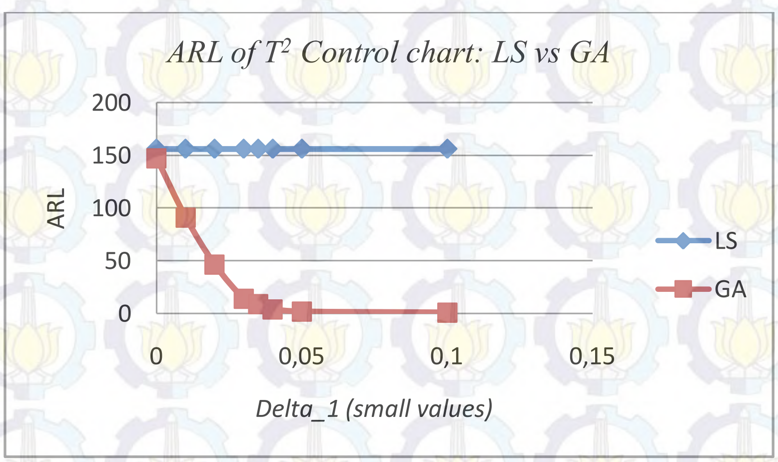
Dari hasil simulasi, diperoleh bahwa untuk *shift* mean jenis-1 ($\boldsymbol{\delta}_1$), panjang *run length* dari penaksir LS selalu bertambah mengikuti kenaikan UCL tetapi tidak memiliki pengaruh yang signifikan pada kenaikan-kenaikan *shift* kecil, dimana pada *shift* mean jenis ini bersifat *sustained* dengan nilai ARL konstan di 156,2 untuk setiap kenaikannya. Sementara GA memiliki *run length* yang lebih panjang pada kenaikan-kenaikan *shift* kecil, khususnya pada situasi normal (tanpa adanya *shift/outlier*).

Berdasarkan hasil evaluasi terhadap kinerja kedua diagram kontrol menggunakan penaksir *Least Squared* (LS) yang diberikan pada Tabel 5.5 terlihat bahwa diagram kontrol T^2 Hotelling masih dapat bekerja pada kenaikan *shift-shift* moderat dengan nilai delta antara 0 sampai dengan 0,5. Sementara diagram kontrol MEWMA hanya dapat dioperasikan pada *shift-shift* kecil ($0 \leq \boldsymbol{\delta}_1 \leq 0{,}05$). Kinerja diagram kontrol T^2 Hoteling dan MEWMA dievaluasi berdasarkan ARL pada *shift* mean jenis 1 dan 2 dan parameter pemulus r=0,05;0,1;0,2; dan 0,3 menunjukkan adanya efek yang signifikan terhadap kenaikan-kenaikan parameter tersebut.

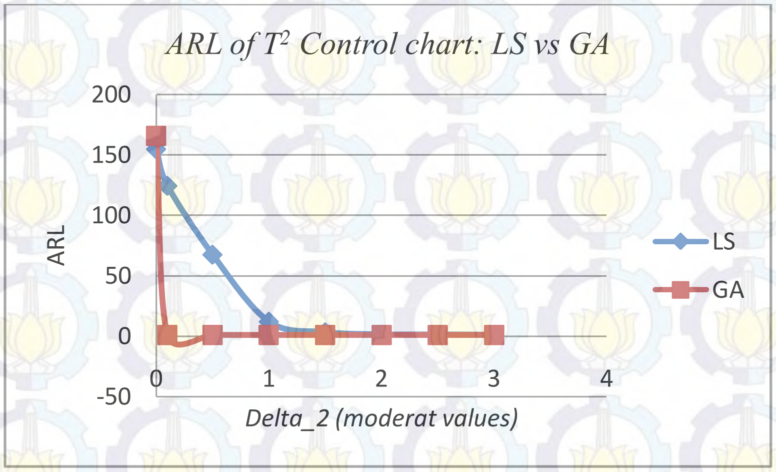
Hasil simulasi ARL dan kinerja diagram kontrol T^2 Hotelling yang diberikan profil ARL kedua penaksir dideskripsikan pada Tabel 5.5 dan Gambar 5.6 (a-b).

Tabel 5.5 Hasil simulasi ARL pada diagram kontrol $T_{\boldsymbol{u}}^2$

ARL *of* T^2 *using* α=0.005		
delta_1	LS	GA
0	156,2	147,3
0,01	156,2	91,3
0,02	156,2	46,5
0,03	156,2	14,3
0,035	156,2	9
0,04	156,2	4
0,05	156,2	1,9
0,1	156,2	1
delta_2	LS	GA
0	154,9	165,8
0,1	124,5	1
0,5	67,5	1
1	12	1
1,5	3,2	1
2	1,3	1
2,5	1,2	1
3	1	1
UCL	18,5476	18,5476



Gambar 5.6a Profil ARL dari diagram kontrol $T_{\boldsymbol{u}}^2$ pada $\boldsymbol{\delta}_1$



Gambar 5.6b Profil ARL dari diagram kontrol $T_{\boldsymbol{u}}^2$ pada $\boldsymbol{\delta}_2$

Dari proses simulasi yang dilakukan terhadap ARL_0=200, diperoleh bahwa untuk nilai *false alarm* α =0,005 diagram kontrol T^2 Hotelling memberikan batas atas kontrol sebesar 18,547. Melalui batas atas kontrol ini, kinerja diagram kontrol T^2 Hotelling melalui penaksir LS dan GA dapat dievaluasi berdasarkan sensitifitasnya dalam mendeteksi *outlier*. Dari Tabel 5.5, terlihat bahwa ketika nilai peluang *false alarm* ditetapkan melalui α = 0,005 dan ARL_0=200 dengan UCL=18,547; Diperoleh bahwa penurunan ARL dari GA lebih pendek dibandingkan terhadap ARL dari penaksir LS. Dalam hal ini, performansi diagram kontrol T^2 dengan UCL=18.547 lebih sensitif dibandingkan dengan UCL lainnya yang lebih kecil.

Dilain pihak, ketika GA diaplikasikan pada pada *shift* mean jenis 2 ($\boldsymbol{\delta}_2$ atau *shift* moderat), T^2 Hotelling untuk residual menjadi lebih sensitif dibanding dengan T^2 Hotelling melalui penaksir LS. Hal ini terlihat pada penurunan nilai ARL penaksir LS yang lebih landai, dibandingkan dengan ARL dari GA (lebih curam). Secara umum, berdasarkan hasil evaluasi terhadap diagram kontrol T^2 Hotelling dalam pengontrolan residual ini diperoleh bahwa:

i. Hasil numerik yang diberikan dalam proses evaluasi ini memenuhi Teorema 1, 2 dan 3 (Lampiran A.2.3) terkait efek non normalitas;
ii. Penaksir LS dan GA dapat dibandingkan dalam konstruksi diagram kontrol T^2 Hotelling berbasis residual ($T_{\boldsymbol{u}}^2$) dengan kelebihan dan kekurangannya masing-masing yang telah diuraikan diatas.

Demikian halnya dengan kinerja dari diagram kontrol MEWMA berbasis model yang dikembangkan berdasarkan penaksir yang berbeda, yaitu penaksir LS dan GA dapat dievaluasi juga sebelum diaplikasikan pada data riil.

5.2.2 Evaluasi Kinerja Diagram Kontrol MEWMA Berbasis Residual

Mengacu pada hasil evaluasi diagram kontrol MEWMA berbasis model melalui penaksir LS dan GA melalui simulasi (data bangkitan yang berasal dari distribusi normal multivariat). Terlihat bahwa diagram kontrol MEWMA memiliki kinerja yang lebih baik karena lebih sensistif dibandingkan diagram kontrol T^2 Hotelling untuk kedua penaksir yang digunakan. Adapun hasil evaluasi pada diagram kontrol MEWMA diberikan pada Tabel 5.6.

Tabel 5.6 Hasil simulasi ARL pada diagram kontrol MEWMA

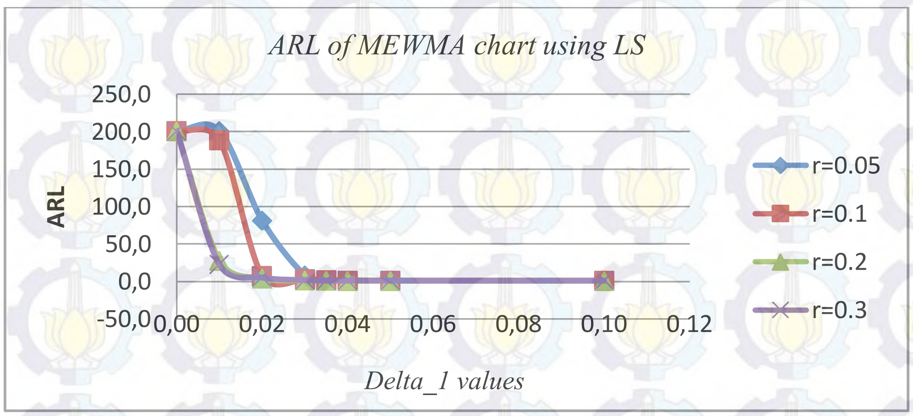
$\boldsymbol{\delta}_1$	*ARL profile of MEWMA using LS*			
	r=0.05	*r* =0.1	*r* =0.2	*r* =0.3
0,00	201,0	201,0	201,0	201,0
0,01	201,0	188,6	28,1	23,0
0,02	81,4	7,6	4,3	5,5
0,03	8,2	3,2	1,8	2,1
0,035	2,0	2,0	1,4	1,5
0,04	1,4	1,2	1,2	1,5
0,05	1,2	1,1	1,1	1,4
0,10	1,1	1,1	1,1	1,4
$\boldsymbol{\delta}_1$	*ARL profile of MEWMA using GA*			
	201,0	201,0	201,0	201,0
0,01	1,1	3,4	5,1	4,2
0,02	1,0	1,0	1,0	1,1
0,03	1,0	1,0	1,0	1,0
0,035	1,0	1,0	1,0	1,0
0,04	1,0	1,0	1,0	1,0
0,05	1,0	1,0	1,0	1,0
0,10	1,0	1,0	1,0	1,0
UCL	13,1978	15,0332	16,8119	18,5476

Terlihat bahwa ARL diagram kontrol MEWMA berbasis residual dengan penaksir LS memiliki penurunan yang lebih bervariasi berdasarkan *input* parameter *r* yang berbeda. Dimana untuk nilai *r* yang lebih kecil (*r*=0,05 dan *r*=0,1), penurunan ARL MEWMA terlihat lebih landai (lambat) pada setiap kenaikan-kenaikan *shift* jenis ini. Hal ini berbeda dengan nilai *r* moderat (*r*=0,2 dan *r*=0,3) dengan ARL yang lebih pendek dan mengalami penurunan yang lebih cepat dibandingkan pada nilai-nilai parameter $r \leq 0{,}2$.

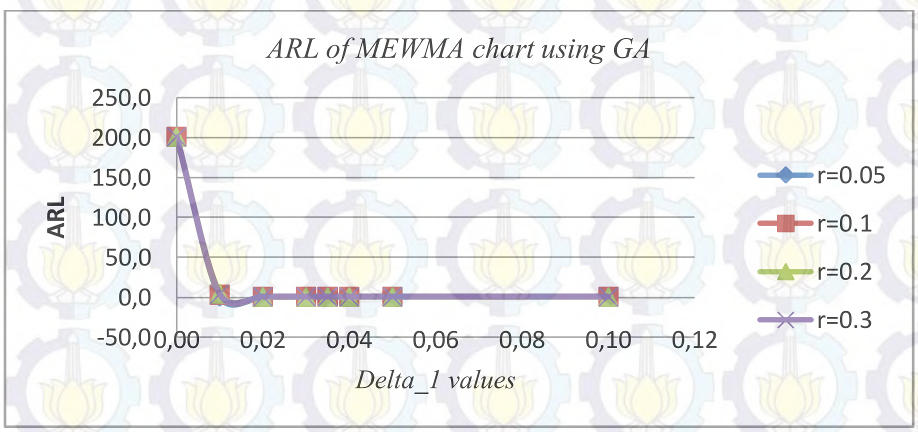
Diagram kontrol MEWMA sensitif pada kenaikan-kenaiikan *shift* kecil, namun seiring dengan kenaikan nilai parameter pemulus *r*, akibatkan berkurangnya sensitifitas MEWMA.

Sementara itu, dengan menggunakan *shift* mean jenis 2 saja (*shift* kecil), kinerja diagram kontrol MEWMA dengan penaksir LS dan GA secara empiris terlihat relatif sama karena keduanya memiliki panjang RL yang lebih panjang pada kenaikan-kenaikan *shift* jenis ini (δ_1) dengan nilai parameter *r* yang berbeda.

Hal lain yang menarik dalam proses evaluasi diagram kontrol MEWMA melalui GA adalah kinerja diagram kontrol yang menjadi lebih baik dalam proses pendeteksian *outlier*. Dimana untuk setiap nilai parameter *r*, diagram kontrol MEWMA menjadi lebih peka terhadap kenaikan-kenaikan *shift* kecil yang memiliki panjang ARL yang relatif sama untuk setiap batas atas kontrol yang digunakan. Profil ARL dari diagram kontrol MEWMA melalui penaksir LS dan GA diberikan melalui Gambar 5.7a dan Gambar 5.7b.



Gambar 5.7a Profil ARL dari diagram kontrol MEWMA melalui penaksir LS



Gambar 5.7b Profil ARL dari diagram kontrol MEWMA melalui GA

Berdasarkan hasil evaluasi kinerja pengontrolan melalui penaksir LS dan GA ini, penekanan dapat diberikan pada dua hal penting yaitu:

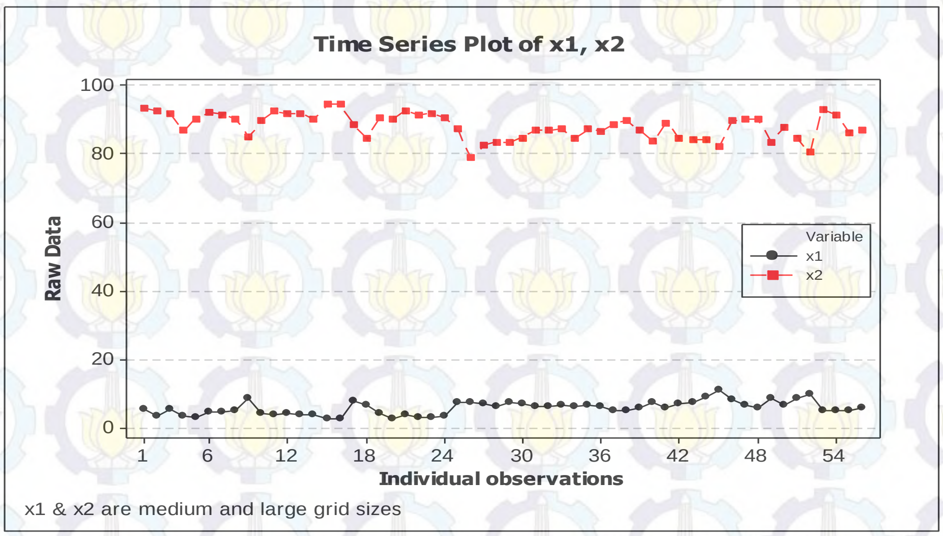
- Bagaimana mengevaluasi diagram kontrol MEWMA melalui penaksir LS dan GA berdasarkan konstruksi yang telah diberikan di BAB IV; dan
- Bagaimana mengaplikasikan pada data riil sebagai justifikasi numerik.

Data riil yang digunakan sebagai kasus dalam implementasi model pengembangan ini adalah data Holmes dan Mergen (1992) pada Montgomery (2005), dan data Woodmod pada Stefatos dan Hamza (2009).

5.3 Aplikasi pengontrolan pada data riil

5.3.1 Kasus 1. Aplikasi pada Produksi Pakaian (Data Holmes dan Mergen,1993)

Tahap identifikasi diawali melalui deskripsi plot *time series* dan plot matriks dari data Holmes dan Mergen (HM) asli (*raw data*) yang mendeskripsikan data produksi pakaian berdasarkan komposisi grit dimana x_1: komposisi 'grit' produksi pakaian berukuran medium; dan x_2: komposisi 'grit' produksi pakaian berukuran besar.



Gambar 5.8 *Time series* plot dari data HM (*raw data*)

Deskripsi terhadap perbedaan ukuran komposisi grit antara grit ukuran besar dan ukuran medium dan kecondongan dari kedua komposisi grit pada Gambar 5.8 dan statistik deskriptif, serta skema korelasi yang diberikan sebagai berikut:

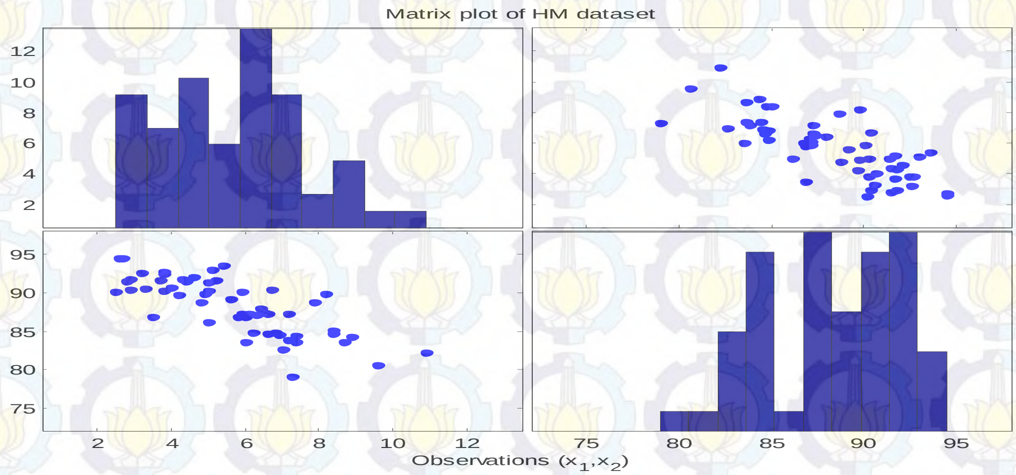
Tabel 5.7a Statistik deskriptif dari data HM asli

Variable	*N*	*N**	*Mean*	*SE Mean*	*StDev*	*Variance*	*CoefVar*	*Sum of Squares*
x_1	56	0	5,682	0,259	1,942	3,770	34,170	2015,420
x_2	56	0	88,22	0,492	3,678	13,529	4,170	436575,570

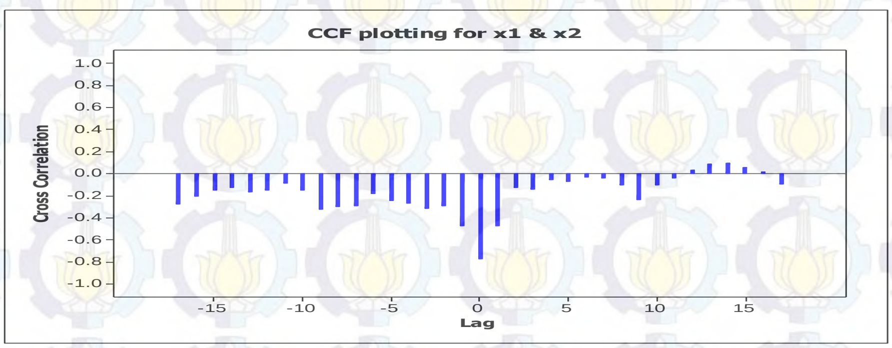
Tabel 5.7b Skema representasi korelasi dari data HM (data asli)

Schematic Representation of Correlations of HM dataset											
Name/Lag	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	+-	+-	+-	+-	.-	..	..	.-	+-	.-	..
x_2	-+	-+	..	..	..	..	..	..	..	..	..

*+ is > 2*std error, - is < -2*std error, . is between*



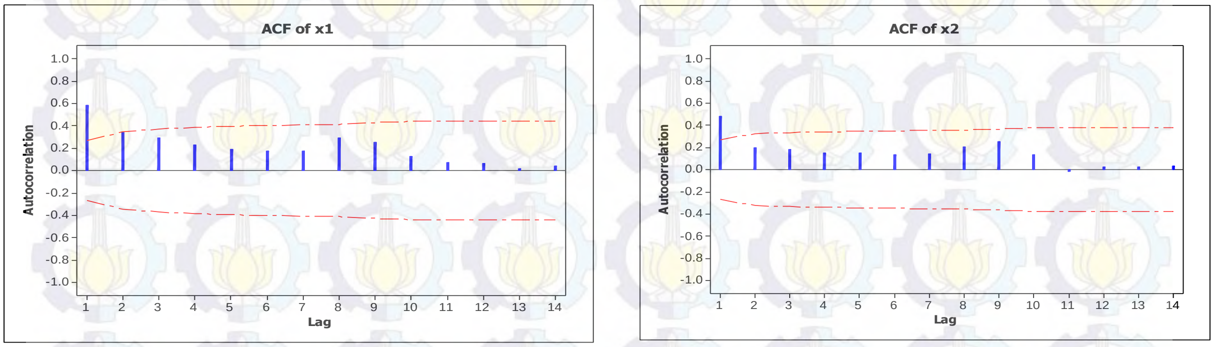
Gambar 5.9a *Matrix plot* dari data HM (*raw data*)



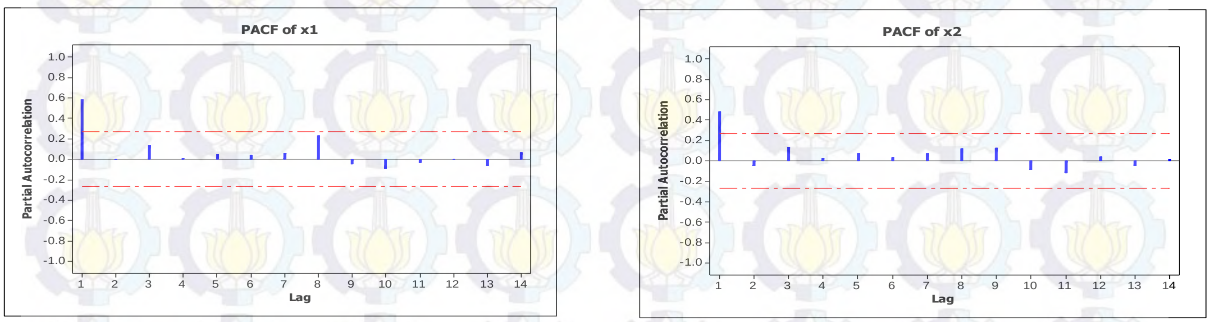
Gambar 5.9b Plot fungsi korelasi silang dari data HM (*raw* data)

Skema representasi korelasi dan autokorelasi data HM asli secara univariat yang diberikan melalui Tabel 5.7b dan Gambar 5.9b-5.10 (a-b). Ini menunjukkan bahwa secara umum kedua komponen produksi tidak stasioner terhadap vektor mean, dimana $\boldsymbol{x}_1$ yang memiliki kontribusi signifikan terhadap ketakstasioneran pada *lag* pertama. Dari hasil identifikasi terhadap ukuran pemusatan yang diberikan melalui Gambar 5.9a dan 5.10 (a-b) terlihat bahwa antara $\boldsymbol{x}_1$ dan x_2 saling berkorelasi negatif kecuali pada *lag* 13 sampai *lag* ke 16. Hal ini menunjukkan bahwa data HM bersifat tak stasioner terhadap ukuran pemusatan (vektor mean).

Secara deskriptif, kestasioneran dari data HM (*raw* data) terhadap ukuran pemusatan disini diidentifikasi melalui plot fungsi korelasi silang multivariat (MACCF), atau juga melalui ACF dan PACF univariat.



Gambar 5.10a ACF dari variabel produksi $\boldsymbol{x}_1$ dan $\boldsymbol{x}_2$

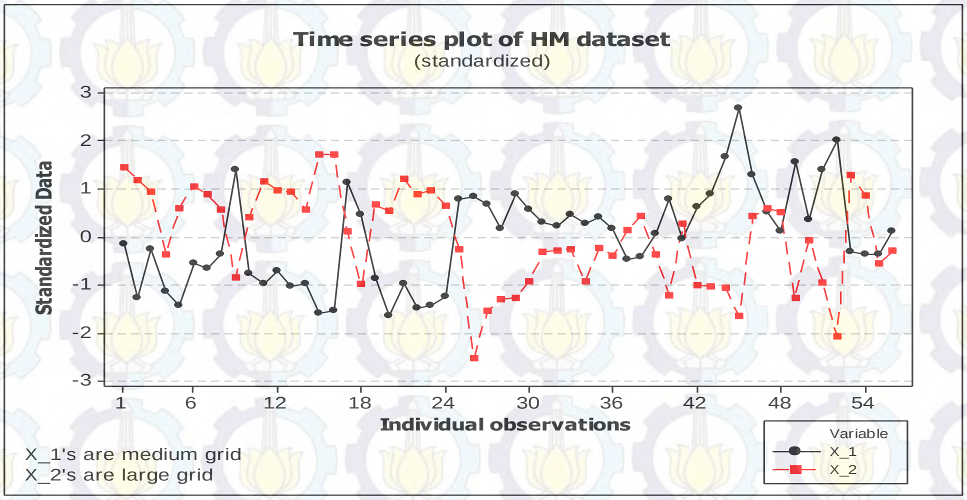


Gambar 5.10b PACF dari variabel produksi $\boldsymbol{x}_1$ dan $\boldsymbol{x}_2$

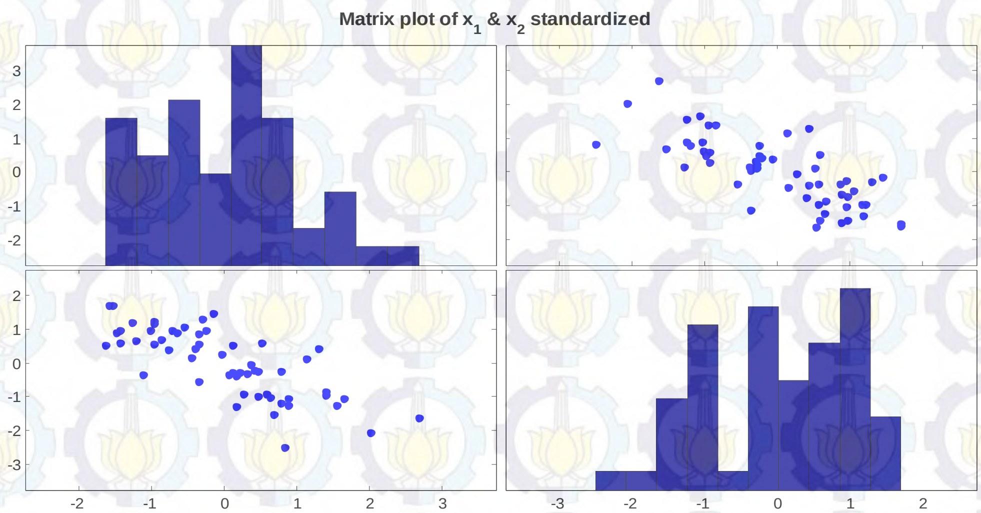
Terkait dengan identifikasi kestasioner terhadap ukuran dispersi (variansi) melalui plot Box-Cox (Lampiran B.3) terhadap masing-masing komponen produksi yang menunjukkan bahwa komponen produksi pakaian berukuran medium ($\boldsymbol{x}_1$) tidak stasioner. Sehingga diperlukan tahapan identifikasi lanjutan guna proses stasionerisasi sebelum estimasi parameter model dilakukan.

- **Tahap Identifikasi Lanjutan dan Estimasi Parameter**

Identifikasi lanjutan atau *cheking models* disini dimaksudkan untuk mengetahui struktur data *time series* guna memilih residual dari model VAR(p) yang sesuai berdasarkan kriteria yang digunakan. Dalam konteks pengontrolan kualitas, salah satu cara yang digunakan untuk mengetahui struktur data awal ini adalah melalui proses pembakuan. Adapun deskripsi dari data HM hasil pembakuan ini diberikan melalui plot *time series* pada Gambar 5.11 (a-b) berikut ini.

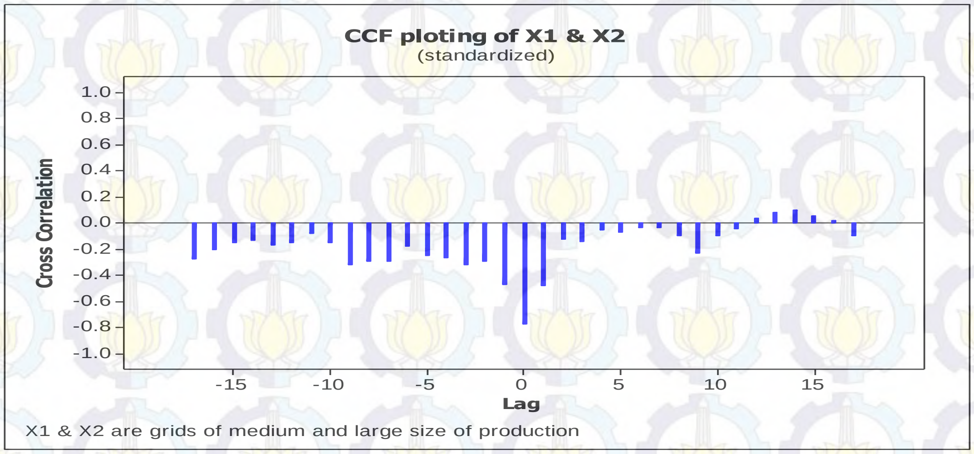


Gambar 5.11a *Time series* plot dari data HM hasil pembakuan



Gambar 5.11b *Matrix* plot dari data HM hasil pembakuan

Pada Gambar 5.11a di atas terlihat bahwa setelah titik sampel ke-25 dan 26, teridentifikasi bahwa dalam data HM hasil pembakuan dari kedua komponen produksi menunjukkan tren *shift* turun dan tren *shift* naik dalam proses mean. Selain adanya *shift* dalam proses mean, terlihat juga bahwa sebaran dari kedua komponen produksi ($\boldsymbol{x}_1$ dan $\boldsymbol{x}_2$) tidak berdistribusi secara Normal dengan tingkat kemencengan yang berbeda (Gambar 11b). Struktur korelasi silang antar kedua variabel pada Gambar 5.12 menunjukkan adanya kecenderungan bernilai negatif (kecuali pada *lag* ke-13 sampai *lag* ke 16).



Gambar 5.12 Plot fungsi korelasi silang dari data HM (baku)

Terkait dengan upaya penstasioneran data dalam kasus multivariat *time series* ini, maka dari beberapa cara yang dapat dikerjakan dalam tahap identifikasi seperti transformasi pembedaan atau dekomposisi. Meskipun demikian, dengan mempertimbangkan kajian analitik pada BAB sebelumnya, sehingga metode yang digunakan dalam proses stasionerisasi dibatasi dengan menerapkan restriksi nol yang dikenakan pada matriks koefisien regresi. Dalam Lutkepohl (2005), metode perestriksian sendiri sebenarnya tidak hanya berlaku pada matriks koefisien, tetapi juga dapat diterapkan pada matriks kovarians.

Dalam proses penstasioneran data HM yang dikerjakan melalui metode LS, pemeriksaan dilakukan baik terhadap model tanpa restriksi atau model dengan restriksi guna menguji parameter model sebelum residual ditetapkan dan diaplikasikan dalam pengontrolan. Perbandingan antara kedua model (model sebelum dan setelah restriksi) dari data hasil pembakuan ditabulasikan sebagai berikut:

Tabel 5.8a. Skema representasi korelasi model VAR(1) dari data HM (baku)

Information Criterion for Autoregressive Models (before & after restriction)										
Lag=0	*Lag=1*	Lag=2	Lag=3	Lag=4	Lag=5	Lag=6	Lag=7	Lag=8	Lag=9	Lag=10
-50,22	*-69,45*	-68,48	-63,73	-57,46	-50,52	-45,25	-41,78	-38,30	-36,82	-31,24

Tabel 5.8b. Skema representasi korelasi sebelum restriksi

Schematic Representation of Correlations											
Name/Lag	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	+-	+-	+-	+-	.-	..	..	.-	+-	.-	..
x_2	-+	-+	..	..	..	..	..	..	..	..	..
*+ is > 2*std error, - is < -2*std error, . is between*											

Tabel 5.8c. Skema representasi korelasi parsial sebelum restriksi

Schematic Representation of Partial Autocorrelations										
Name/Lag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{x}_1$	+.	..	..	..	..	..	..	..	..	..
$\boldsymbol{x}_2$	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
+ is > 2*std error, - is < -2*std error, . is between										

Tabel 5.9. Hasil estimasi parameter model VAR(1) sebelum restriksi

Model Parameter Estimates (before restriction)						
Equation	*Parameter*	*Estimate*	*Std Error*	*T ratio*	*Prob>|T|*	*Variable*
$\boldsymbol{x}_1$	AR1_1_1	0,545	0,174	3,13	0,003	$\boldsymbol{x}_1$(t-1)
	AR1_1_2	-0,052	0,174	-0,3	*0,766*	$\boldsymbol{x}_2$(t-1)
$\boldsymbol{x}_1$	AR1_2_1	-0,258	0,180	-1,43	0,158	$\boldsymbol{x}_1$(t-1)
	AR1_2_2	0,285	0,180	1,58	0,119	$\boldsymbol{x}_2$(t-1)

Tabel 5.10a. Hasil estimasi parameter model VAR(1) setelah restriksi

Model Parameter Estimates (after restriction)						
Equation	*Parameter*	*Estimate*	*Std Error*	*T ratio*	*Prob>|T|*	*Variable*
$\boldsymbol{x}_1$	AR1_1_1	0,585	0,111	5,26	0,0001	$\boldsymbol{x}_1$(t-1)
	AR1_1_2	0,000	0,000	.	.	$\boldsymbol{x}_2$(t-1)
$\boldsymbol{x}_1$	AR1_2_1	-0,287	0,151	-1.9	0,0626	$\boldsymbol{x}_1$(t-1)
	AR1_2_2	0,247	0,127	1.94	0,0572	$\boldsymbol{x}_2$(t-1)

Tabel 5.10b Hasil restriksi parameter AR(1,1,2)

Restriction Results				
Parameter	*Lagrange Multiplier*	*Std Error*	*T Ratio*	*Prob>|T|*
AR1_1_2	-1,720	5,737	-0,3	0,766

Hasil identifikasi menggunakan penaksir LS berupa representasi korelasi, autokorelasi parsial, matriks kofisien regresi dari model dengan restriksi diberikan melalui Tabel 5.11 (a-b) dan Tabel 5.12a. Sementara Tabel 5.12b dan 5.12c masing-masing adalah matriks kovarians dan statististik deskritif dari residual, berikut struktur korelasi residual yang disajikan pada Tabel 5.13.

Tabel 5.11a. Skema representasi korelasi model dengan restriksi

Schematic Representation of Correlations											
Nama/Lag	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{x}_1$	+-	+-	+-	+-	.-	..	..	.-	+-	.-	..
$\boldsymbol{x}_2$	-+	-+	..	..	..	..	..	..	..	..	..

Tabel 5.11b. Skema representasi autokorelasi model dengan restriksi

Schematic Representation of Partial Autocorrelations										
Nama/*Lag*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{x}_1$	+.	..	..	..	..	..	..	..	..	..
$\boldsymbol{x}_2$	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..

Tabel 5.12a. Hasil taksiran matriks koefisien regresi

The VARMAX Procedure			
Type of Model: VAR(1) *Estimation Method: Least Squares Estimation*			
AR Coefficient Estimates			
Lag	*Variabel*	$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$
1	$\boldsymbol{x}_1$	0,585	0
	$\boldsymbol{x}_2$	-0,287	0,247

Tabel 5.12b. Matriks kovarians residual

Residual Cross-Covariance Matrices			
Lag	*Variabel*	$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$
0	$\boldsymbol{x}_1$	0,657	-0,481
	$\boldsymbol{x}_2$	-0,481	0,700

Tabel 5.12c. Statistik deskriptif untuk residual

Variable	*Type*	*N*	*Mean*	*StdDev*	*Min*	*Max*
$\boldsymbol{x}_1$	*DEP*	56	5,36E-06	0,99998	-1,6388	2,6873
$\boldsymbol{x}_2$	*DEP*	56	1,79E-06	1	-2,5066	1,7075

Tabel 5.13. Skema representasi korelasi silang dari residual

Schematic Representation of Residual Cross Correlations													
Variabel/Lag	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\boldsymbol{x}_1$	+-	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
$\boldsymbol{x}_2$	-+	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..

Sementara hasil estimasi parameter model VAR(1) melalui GA, matriks koefisien autoregresif untuk residual yang diperoleh adalah

$$\widehat{\boldsymbol{B}}_{GA} = \begin{bmatrix} 0,9519 & -0,0481 \\ -0,0625 & 0,9375 \end{bmatrix},$$

dengan mean dan matriks kovarians residual dari model VAR(1)

$$\widehat{\bar{\boldsymbol{X}}}_{GA} = \begin{bmatrix} -0,004 & -0,003 \end{bmatrix}, \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{GA} = \begin{bmatrix} 0,015 & 0,013 \\ 0,013 & 0,011 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian, berdasarkan hasil estimasi parameter diatas, parameter residual dapat dihitung dan digunakan pada tahap evaluasi diagram kontrol MEWMA. Secara rinci, hasil evaluasi terhadap penentuan parameter melalui GA diberikan pada Lampiran B1.

- **Penentuan Batas Atas Kontrol**

Pada tahapan ini, hasil estimasi parameter model VAR (1) dari data HM untuk setiap nilai α yang bersesuaian dengan batas atas kontrol dapat dievaluasi untuk mengetahui kinerja kedua diagram kontrol secara numerik. Batas atas kontrol untuk statistik T^2 dan MEWMA untuk residual dari model VAR(1) pada data HM (p=2) ditentukan berdasarkan (2.14). Dimana pemilihanan nilai *false alarm* (α) dan ARL_0, nilai-nilai UCL dari $\chi^2_{\alpha,p}$ dapat disajikan melalui Tabel 5.14.

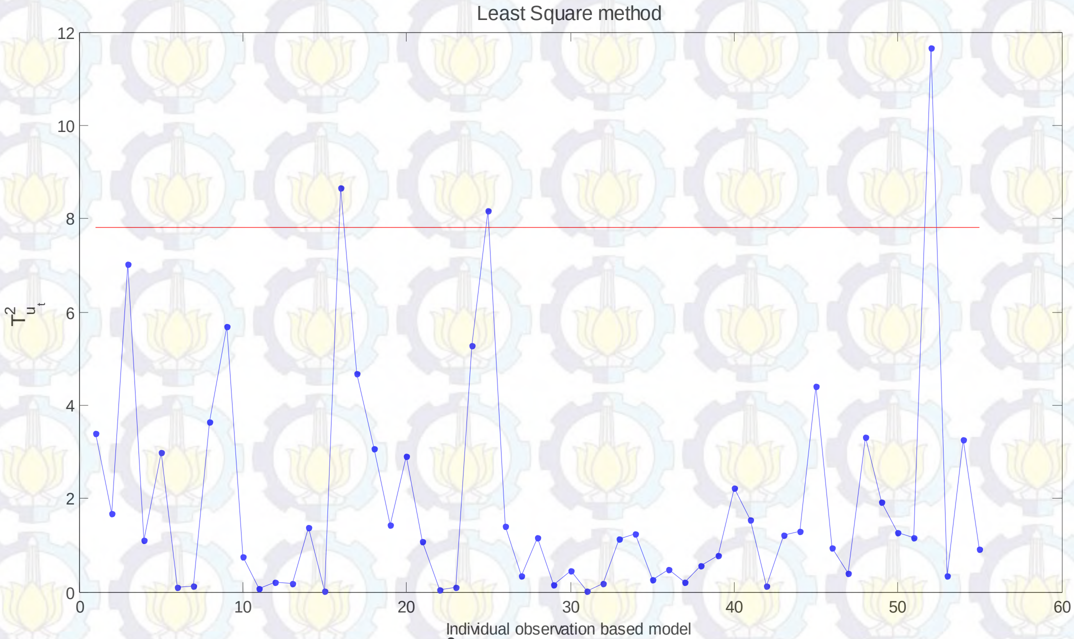
Tabel 5.14 Batas atas kontrol pada kasus data HM

α	0,1	0,05	0,04	0,02
UCL	4,605	5,991	6,438	7,824

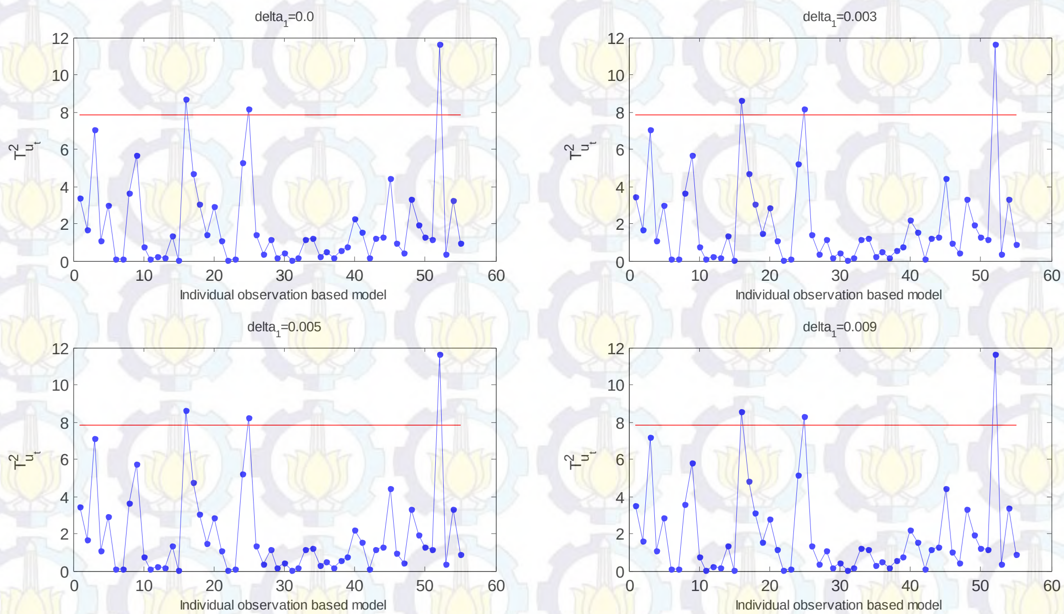
Terkait dengan proses evaluasi kinerja dalam aplikasi untuk kasus data HM dan kasus data Woodmod pada kontrol Hotelling T^2 dan MEWMA, keempat UCL yang diberikan pada Tabel 5.8 dapat diaplikasikan secara bergantian. Demikian halnya dengan metode penaksiran yang digunakan, hal ini dimaksudkan sebagai studi perbandingan untuk memonitor tingkat sensitivitas suatu diagram kontrol pada setiap nilai *false alarm* (α) dan ARL_0 yang diberikan. Secara numerik, diagram kontrol Hotelling T^2 dan MEWMA memiliki tingkat sensitivitas yang berbeda pada level kenaikan *shift* dalam vektor mean. Sehingga dalam simulasi ini, dua jenis *shift* yang diberikan pada Tabel 4.1 pada sub bagian 4.6 akan diimplementasikan pada kedua diagram kontrol ini melalui penaksir LS dan GA. Hasil perbandingan ini kemudian ditabulasikan dan disajikan pada proses evaluasi kinerja masing-masing diagram kontrol. Adapun evaluasi diagram kontrol T^2 Hotelling pada kasus data HM diuraikan sebagai berikut.

- **Tahap Evaluasi Kinerja Diagram Kontrol**

Residual dari model VAR(1) dari data HM diaplikasikan pada diagram kontrol Hotelling T^2 melalui penaksir LS dengan $\alpha = 0{,}02$ (diketahui) dan UCL=7,824

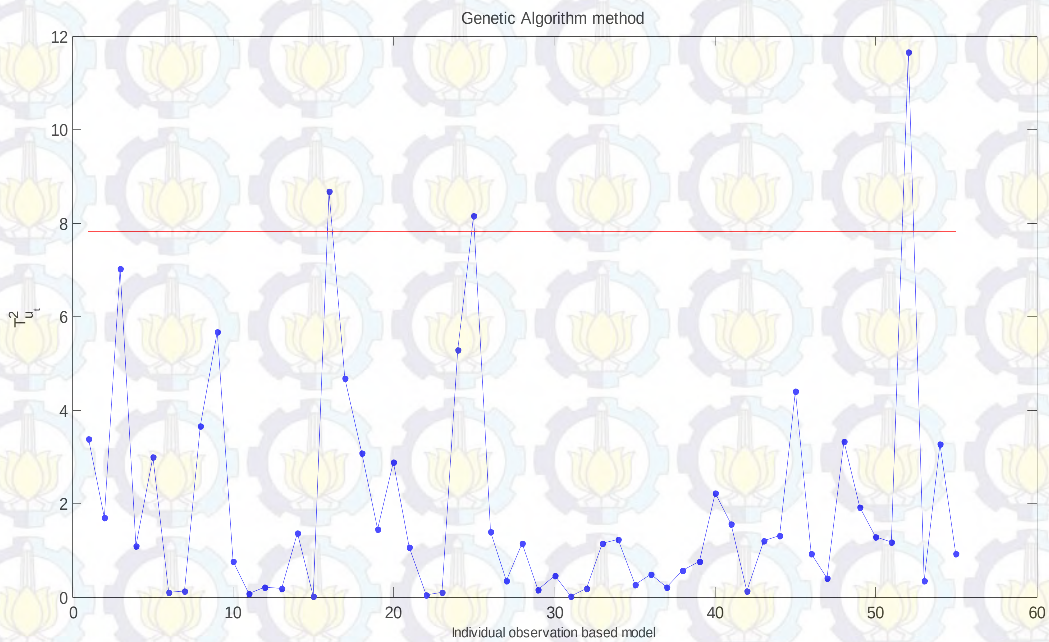


Gambar 5.13a Diagram kontrol T^2 Hotelling model VAR(1) dengan penaksir LS

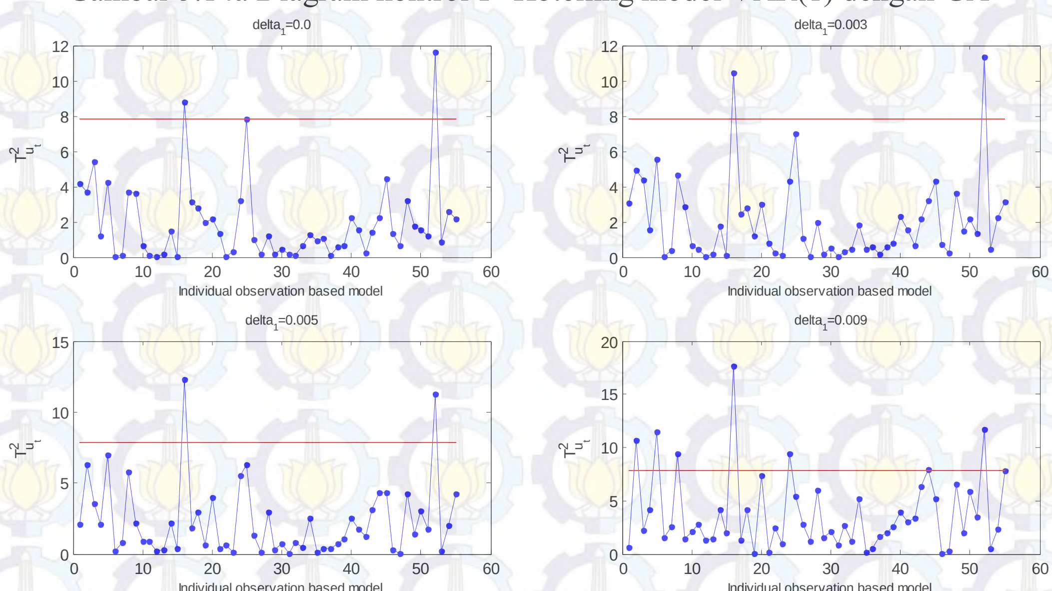


Gambar 5.13b Diagram kontrol T^2 Hotelling model VAR(1) dengan
$\delta_1 = 0{,}0;\ 0{,}03;\ 0{,}05;$ dan $0{,}009$

Melalui cara yang sama, residual dari model VAR(1) dari data HM diaplikasikan pada diagram kontrol Hotelling T^2 melalui GA dengan $\alpha = 0{,}02$ dan UCL=7,824 dideskripsikan pada Gambar 5.14 berikut ini.



Gambar 5.14a Diagram kontrol T^2 Hotelling model VAR(1) dengan GA



Gambar 5.14b Diagram kontrol T^2 Hotelling model VAR(1) dengan $\delta_1 = 0{,}0;\ 0{,}03;\ 0{,}05$ dan $0{,}009$

Berdasarkan hasil perbandingan diagram kontrol T^2 Hotelling dengan penaksir LS dan GA diperoleh bahwa GA dapat memperbaiki kinerja diagram kontrol T^2 Hotelling untuk model VAR(1) pada kenaikan-kenaikan *shift* kecil. Hal ini telah ditunjukkan pada Gambar 5.14b dan 5.14b dimana banyaknya titik yang terdeteksi sebagai *outlier* pada kenaikan-kenaikan *shift* kecil dengan $\alpha = 0{,}02$. Meskipun sensitifitas diagram kontrol T^2 Hotelling melalui GA menurun untuk pemilihan nilai $\alpha \leq 0{,}02$.

Dari perbandingan kinerja dengan UCL=7,824 (tanpa adanya *shift*), diagram kontrol T^2 Hotelling menggunakan GA dan penaksir LS memiliki kinerja yang relatif sama karena keduanya mendeteksi titik sampel ke-16, 25 dan ke-52 sebagai *outlier* (Gambar 5.13a dan Gambar 5.14a). Namun ketika *shift* $(\boldsymbol{\delta}_1)$ diberikan, diagram kontrol T^2 Hotelling dengan penaksir LS sensitif dalam mendeteksi *outlier* hanya pada batas atas kontrol kecil. Sementara pada jenis *shift* ini, diagram kontrol T^2 Hotelling melalui GA lebih sensitif pada level *shift* $\boldsymbol{\delta}_1 \geq 0{,}005$. Hal ini berbeda pada pemberian *shift* $(\boldsymbol{\delta}_2)$, dimana kedua penaksir memiliki kinerja yang relatif sama (sensisitivitasnya) ketika dioperasikan pada level $\boldsymbol{\delta}_2 \geq 0{,}1$. Perbandingan kinerja diagram kontrol T^2 Hotelling untuk *shift* mean jenis-1 dan *shift* mean jenis-2 dengan UCL terkecil dan UCL terbesar diberikan pada Tabel 5.15.

Tabel 5.15 Perbandingan kinerja diagram kontrol T^2

Kinerja diagram kontrol T^2 Hotelling dalam deteksi *outlier* pada kasus data HM				
Shift mean	$\alpha = 0{,}1$ (UCL=4,605)		$\alpha = 0{,}02$ (UCL=7,824)	
delta_1	LS	GA	LS	GA
0	7	4	3	3
0,001	7	5	3	2
0,002	7	6	3	2
0,003	7	7	3	2
0,004	7	7	3	2
0,005	7	9	3	2
0,009	7	16	3	8
0,01	7	18	3	9
delta_2				
0	7	4	3	3
0,1	7	55	3	55
0,5	23	55	10	55
1	52	55	46	55
1,5	55	55	55	55
2	55	55	55	55
2,5	55	55	55	55
3	55	55	55	55

Adapun hasil tentatif yang diperoleh dari kasus data HM pada *shift* mean jenis-1 dan *shift* mean jenis-2 (delta_1 dan delta_2) dapat diuraikan sebagai berikut:

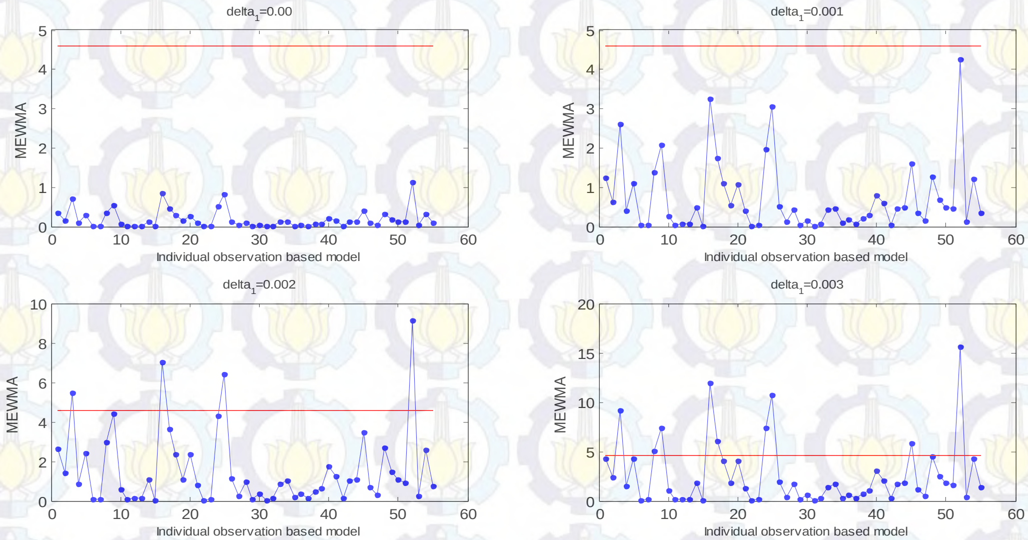
i. Untuk $\boldsymbol{\delta}_1$ dengan UCL=4,605 diagram kontrol T^2 Hotelling melalui GA lebih sensitif dari diagram kontrol T^2 Hotelling melalui penaksir LS dalam mendeteksi *outlier*, khususnya pada level $\boldsymbol{\delta}_1 \geq 0{,}005$. Sementara pada UCL=7,824 ($\alpha = 0{,}02$), diagram kontrol T^2 Hotelling melalui penaksir LS dan diagram kontrol T^2 Hotelling melalui GA memiliki kinerja yang relatif sama dalam mendeteksi *outlier* pada level $\boldsymbol{\delta}_1 < 0{,}009$. Dalam hal ini, untuk memberikan hasil pengontrolan optimum, diagram kontrol T^2 Hotelling melalui GA dapat dioperasikan pada interval $0{,}009 \geq \boldsymbol{\delta}_1 \geq 0{,}01$;

ii. Untuk $\boldsymbol{\delta}_2$ dengan UCL=7,28 yaitu pada nilai peluang *false alarm* $\alpha = 0{,}02$, baik GA bereakasi lebih cepat dalam mendeteksi *outlier*. Hal ini terlihat pada sensitifitas diagram kontrol T^2 Hotelling melalui penaksir LS lambat dalam merepon adanya *outlier* pada level $0{,}1 \geq \boldsymbol{\delta}_2 \geq 1$.

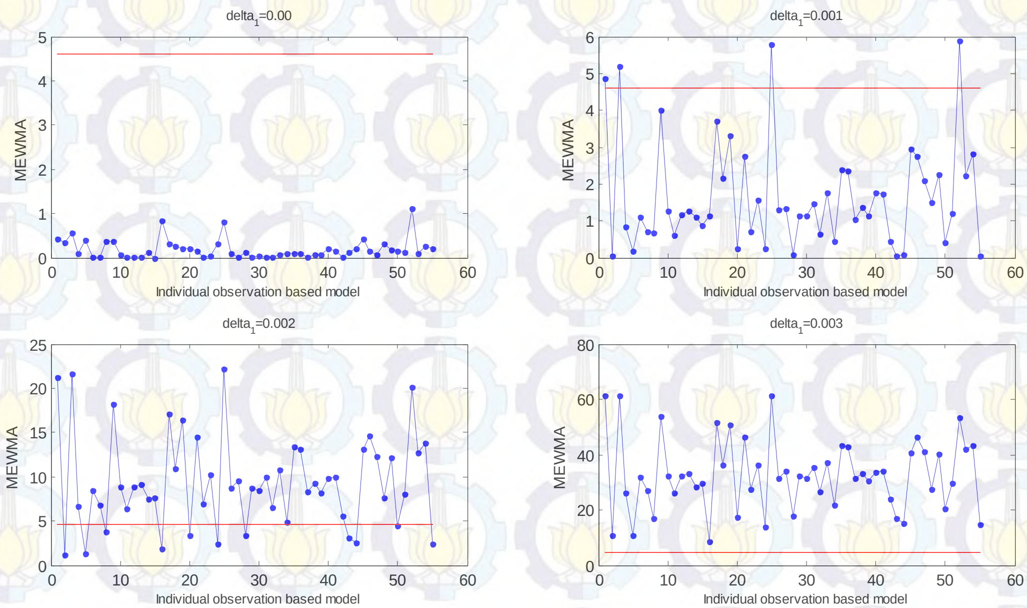
Jadi, dalam kasus ini diagram kontrol T^2 Hotelling melalui GA lebih unggul dibandingkan diagram kontrol T^2 Hotelling melalui penaksir LS pada kedua level *shift* dan batas atas kontrol. Dan melalui GA, kita juga dapat mendeteksi adanya kesalahan pendeteksian yang diberikan oleh diagram kontrol T^2 Hotelling.

Selanjutnya, terkait dengan hasil perbandingan kinerja diagram kontrol MEWMA melalui penaksir LS dan GA diperoleh bahwa diagram kontrol MEWMA dengan GA masih lebih unggul terhadap penaksir LS dalam pendeteksian *outlier* pada kenaikan-kenaikan *shift* kecil. Berdasarkan hasil evaluasi diagram kontrol MEWMA berbasis residual dari model VAR(1) pada kasus data HM hasil pembedaan pertama yang telah direstriksi, kinerja diagram kontrol MEWMA melalui penaksir LS dan GA relatif sensitif untuk setiap kenaikan shift dalam mean pada $0{,}05 \leq r \leq 0{,}2$. Namun pada UCL=7,824 dengan r=0,3 sensitifitas dari kedua penaksir akan cenderung berkurang. Meskipun demikian untuk nilai $\boldsymbol{\delta}_1$ yang lebih besar dari 0,002 diagram kontrol MEWMA melalui GA bereaksi lebih cepat dalam mendeteksi *outlier* dengan $0{,}05 \leq r \leq 0{,}3$ Sementara, diagram kontrol MEWMA dengan penaksir LS memiliki kinerja yang lebih baik pada level shift $\boldsymbol{\delta}_1 \geq 0{,}01$ dengan $r \geq 0{,}3$.

Hasil evaluasi diagram kontrol MEWMA berbasis residual dari model VAR(1) pada kasus data HM yang telah direstriksi, dan melalui penaksir LS dan GA kembali deskripsikan pada Gambar 5.15 dan 5.16 berikut ini.



Gambar 5.15 diagram kontrol MEWMA menggunakan penaksir LS dengan *r*=0,1 dan $\alpha = 0{,}05$



Gambar 5.16 Diagram kontrol MEWMA menggunakan GA dengan *r*=0,1 dan $\alpha = 0{,}05$

Berdasarkan aplikasi yang dikerjakan melalui kasus data HM ini, secara tentatif diperoleh bahwa konstruksi diagram kontrol MEWMA melalui GA lebih baik pada kenaikan-kenaikan *shift* kecil $(\boldsymbol{\delta}_1 < 0{,}003)$. Namun untuk kenaikan-kenaikan *shift* besar, diagram kontrol MEWMA melalui penaksir LS memiliki kinerja yang lebih baik. Sehingga berdasarkan kasus ini dapat disimpulkan bahwa diagram kontrol MEWMA melalui GA lebih baik dioperasikan pada *r*=0,1; 0,2 dan 0,3. Sementara itu, diagram kontrol MEWMA melalui penaksir LS dapat bekerja dengan optimal hanya pada $\boldsymbol{\delta}_1 \geq 0{,}01$ dengan $r \geq 0{,}3$.

Hasil perbandingan kinerja kedua diagram kontrol MEWMA dengan penaksir yang digunakan pada $\boldsymbol{\delta}_1$ ditabulasikan pada Tabel 5.16a.

Tabel 5.16a Perbandingan kinerja diagram kontrol MEWMA melalui penaksir LS dan GA pada data HM

Kinerja diagram kontrol MEWMA dalam deteksi *outlier* pada kasus data HM								
	Penaksir LS				GA			
($\boldsymbol{\delta}_1$)	*r*=0,05	*r*=0,1	*r*=0,2	*r*=0,3	*r*=0,05	*r*=0,1	*r*=0,2	*r*=0,3
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,001	0	1	5	5	3	4	5	5
0,002	4	8	12	12	21	44	19	13
0,003	9	15	16	15	46	55	37	22
0,004	15	16	19	16	55	55	46	37
0,005	18	20	24	17	55	55	50	44
0,009	27	28	28	18	55	55	55	53
0,01	29	30	30	19	55	55	55	55
$\boldsymbol{\alpha}$	0,1	0,05	0,04	0,02	0,1	0,05	0,04	0,02
$UCL_{Chi}{}^2$	4,61	5,99	6,44	7,82	4,61	5,99	6,44	7,82

Secara umum, parameter MEWMA dalam kasus ini diketengahkan pada Tabel 5.16b,

Tabel 5.16b Batas atas kontrol pada kasus data Woodmod dan data HM

$\boldsymbol{\delta_1}$	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,009	0,01
$\boldsymbol{\delta_2}$	0	0,1	0,5	1	1,5	2	2,5	3
parameter	*Woodmod case*				*HM case*			
$\boldsymbol{\alpha}$	0,2	0,1	0,053	0,04	0,02	0,1	0,05	0,04
UCL	7,29	9,236	10,94	11,64	4,605	5,992	6,438	7,82

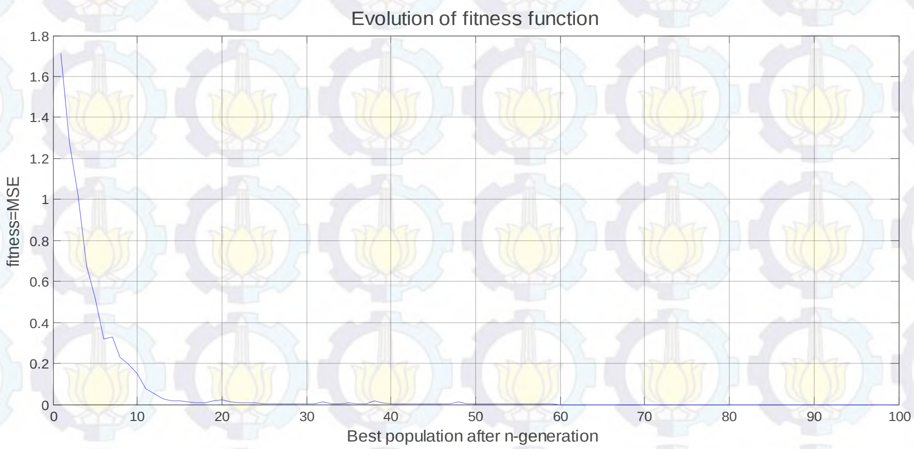
Dalam kasus data HM, nilai MSE terkecil adalah 0,014 dengan AIC=8,123 (terkecil) untuk iterasi maksimum yang digunakan sebanyak 500 generasi hingga mencapai konvergensi ke nol. Parameter uji GA dan hasil simulasi yang digunakan diberikan pada Tabel 5.17 dan 5.18.

Tabel 5.17 Parameter uji GA untuk kasus data HM

Komponen	Level
Ukuran populasi	56
Jumlah generasi	500
Peluang pindah silang, P_c	0,95
Peluang mutasi, P_m	0,0004

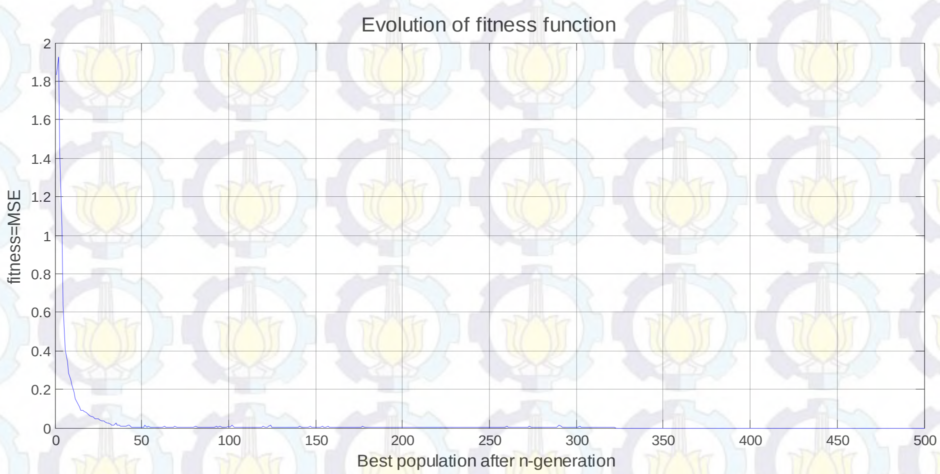
Tabel 5.18 Parameter hasil simulasi algoritma genetika pada kasus data HM

Asumsi awal	Kriteria	Parameter hasil simulasi algoritma genetika	Ukuran performansi model	Keterangan: Global optimum
a. Jumlah Generasi b. Jumlah Populasi c. Peluang Pindah Silang d. Peluang Mutasi	100 56 0,92 0,0004	- Beta(1) =0,93558604 - Beta(2) =-0,05647389 - MSE = 0,00206241	- Nilai AIC = 10,0664 - Nilai SC = 157,9964 - Waktu untuk proses perhitungan =8,453	Konvergensi terjadi pada generasi ke 59
a. Jumlah Generasi b. Jumlah Populasi c. Peluang Pindah Silang d. Peluang Mutasi	500 56 0,95 0,0004	- Beta(1) =0,93749991 - Beta(2) =-0,04784677 - MSE =0,00099537	- Nilai AIC = 10,7948 - Nilai SC = 158,7249 - Waktu untuk proses perhitungan = 44,984	Konvergensi terjadi pada generasi ke 322



Gambar 5.17a Konvergensi fungsi *fitness* setelah generasi ke 59

Berdasarkan jumlah generasi yang diberikan pada Tabel 5.18, kriteria yang digunakan (pada kolom kedua) terhadap asumsi parameter GA dapat dibandingkan terhadap ukuran performasi model yang mengacu pada AIC dan lamanya pemrosesan. Dengan demikian, Nilai MSE dari model pun dapat dijadikan ukuran performansi model.

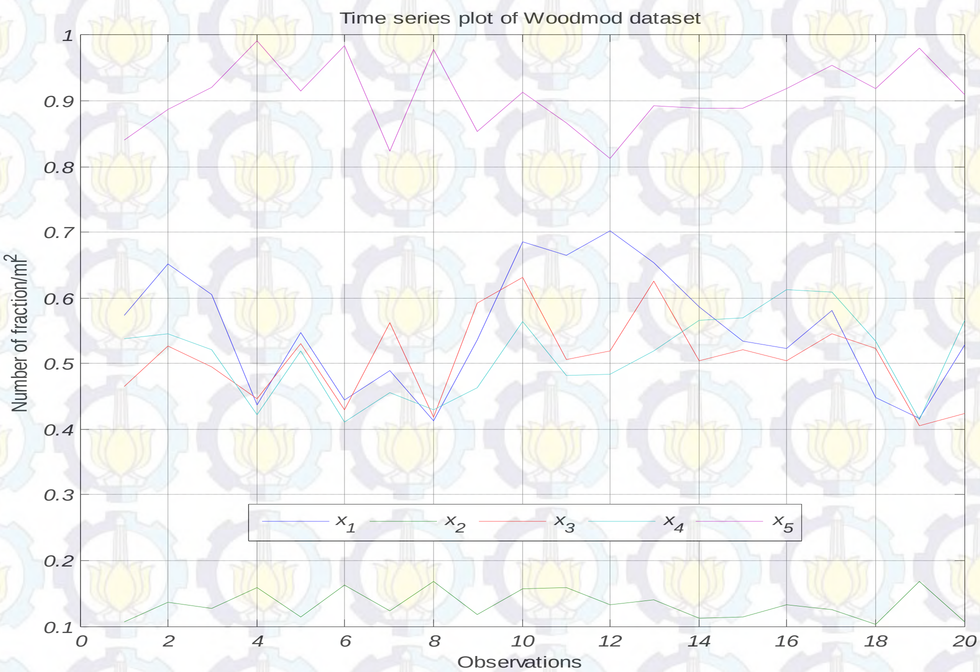


Gambar 5.17b Konvergensi fungsi *fitness* setelah generasi ke 322

Hasil konvergensi fungsi *fitness* yang diberikan pada Gambar 5.17b ini menunjukkan bahwa global optimum tercapai juga pada level parameter GA yang berbeda dan dapat digunakan sebagai pembanding dalam pemilihan residual dari model terbaik.

5.3.2 Kasus 2. Aplikasi pada Data Produksi Kayu (Woodmod *Dataset*)

Misal $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{x}_3', \boldsymbol{x}_4', \boldsymbol{x}_5')'$ terdiri dari lima variabel atau karakteristik produksi yang dideskripsikan melalui *time series plot* dan *matrix plot* pada Gambar 5.18(a-b).



Gambar 5.18a *Time series plot of Woodmod dataset* (*raw data*)

dimana

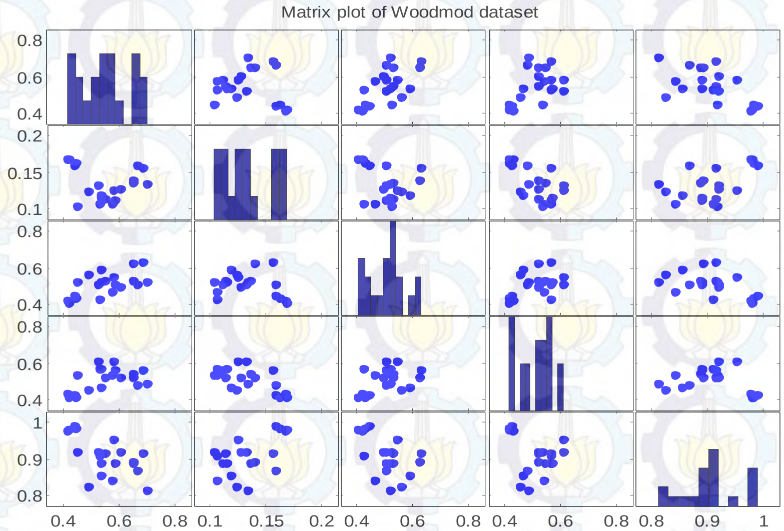
$\boldsymbol{x}_1$: *Number of fibers per square milliliter in Springwood*,

$\boldsymbol{x}_2$: *Number of fibers per square milliliter in Summerwood*,

$\boldsymbol{x}_3$: *Fraction of Springwood*,

$\boldsymbol{x}_4$: *Fraction of light absorption by Springwood*, *and*

$\boldsymbol{x}_5$: *Fraction of light absorption by Summerwood*.



Gambar 5.18b *Matrix plot of Woodmod dataset* (*raw data*)

Data Woodmod yang digunakan pada kasus kedua ini merupakan studi kasus yang digunakan juga pada Stefatos dan Hamza (2009) dalam kaitannya dengan proses pengontrolan kualitas, khususnya dalam pendeteksian *outlier*. Seperti halnya data HM yang memiliki *shift* dalam proses mean atau berasal dari suatu data tak random. Data Woodmod juga memiliki karakteristik produksi yang bersifat tak random, karena secara implisit memiliki efek negatif terhadap penentuan batas atas pengontrolan. Hal penting lain yang mendasari alasan yang melatarbelakangi pemilihan data ini adalah adanya kesalahan pendeteksian yang menjadi kajian utama pada Stefatos dan Hamza, (2009).

- **Tahap Identifikasi dan Estimasi Paramater Model**

Analogi dari kasus pertama, prosedur identifikasi pada kasus kedua diawali pada tiga tahapan identifikasi. Pertama, pemeriksaan nilai kriteria minimum Akaike terhadap *time order* model VAR(p) dari data hasil pembakuan. Kedua, pengujian terhadap hasil estimasi parameter guna memastikan kemungkinan restriksi terhadap hasil estimasi parameter model. Akhirnya pemeriksaan dan pengujian terhadap model VAR(p) residual yang bersesuaian dengan model terbaik sebelum residualnya ditetapkan dan diimplementasikan pada tahap pengontrolan.

Tabel 5.19 Kriteria AIC untuk model AR

Information Criterion for Autoregressive Models		
Lag=0	*Lag=1*	*Lag=2*
-51,388	-44,466	-23,111

Hasil identifikasi yang dikerjakan melalui alat bantu SAS dalam tahap identifikasi parameter model VAR(p) diberikan melalui kriteria AIC Woodmod baku pada Tabel 5.19 di atas menunjukkan bahwa pemilihan model VAR(1) masih memerlukan tahap identifikasi lanjutan (*cheking models*). Selain itu berdasarkan skema struktur korelasi yang diberikan pada Tabel 5.20a, variabel $\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$, dan $\boldsymbol{x}_5$ masih menunjukan adanya korelasi. Sehingga perlu dilakukan *cheking model* guna menjamin MSE residual yang minimum saat diaplikasikan pada diagram kontrol.

Struktur model VAR(1) dalam tahap estimasi parameter tanpa restriksi (*full model)* ini masih bersifat sementara. Dalam implementasinya menggunakan alat bantu SAS, hasil estimasi parameter dari *full model* ini kemudian dievaluasi pada setiap elemen matriks koefisien regresif yang memiliki nilai peluang lebih besar dari nilai mutlak statistik t. Jika nilai peluang dari elemen matriks koefisien regresif memiliki signifikansi terhadap kestabilan model, maka selanjutnya direstriksi nol. Proses ini dilakukan sampai semua elemen matriks koefisien regresif model dianggap telah stabil (stasioner), sehingga dapat ditetapkan sebagai model terbaik dan residual dari model dapat diaplikasikan pada diagram kontrol.

Tabel 5.20a Skema representasi korelasi dari data Woodmod baku

Schematic Representation of Correlations											
Name/Lag	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{x}_1$	+.++-	+....	.....	.....	.....	.....	-....	....+	.....	.....	.....
$\boldsymbol{x}_2$	.+.-+	....-	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\boldsymbol{x}_3$	+.+.-	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\boldsymbol{x}_4$	+-.+.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\boldsymbol{x}_5$	-+-.+	.-...	.....	.-.+.	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Tabel 5.20b Skema representasi autokorelasi parsial

Schematic Representation of Partial Autocorrelations		
Name/Lag	1	2
$\boldsymbol{x}_1$	.....	.....
$\boldsymbol{x}_2$	.....	.....
$\boldsymbol{x}_3$	.....	.....
$\boldsymbol{x}_4$	.....	.....
$\boldsymbol{x}_5$	.....	.....

Hasil estimasi parameter dari model tanpa restriksi (*full model*) dan model dengan restriksi diletakan pada Lampiran B.3. Adapun hasil estimasi parameter model setelah direstriksi berturut-turut terhadap elemen matriks koefisien AR(1-3-4) dan AR(1-5-4) diberikan melalui Tabel 5.21 (a-b) berikut:

Tabel 5.21a Hasil estimasi parameter model VAR(1) dengan restriksi

Model Parameter Estimates for Woodmod data set						
Equation	*Parameter*	*Estimate*	*standard Error*	*t Value*	*Pr>|t|*	*Variable*
$\boldsymbol{x}_1$	AR1_1_1	0,24617	0,33071	0,74	0,469	$\boldsymbol{x}_{1(t-1)}$
	AR1_1_2	0,71916	0,3279	2,19	0,0457	$\boldsymbol{x}_{2(t-1)}$
	AR1_1_3	-0,11982	0,26731	-0,45	0,6608	$\boldsymbol{x}_{3(t-1)}$
	AR1_1_4	0,17836	0,26328	0,68	0,5092	$\boldsymbol{x}_{4(t-1)}$
	AR1_1_5	-0,6267	0,33213	-1,89	0,0801	$\boldsymbol{x}_{5(t-1)}$
$\boldsymbol{x}_2$	AR1_2_1	-0,12576	0,36403	-0,35	0,7349	$\boldsymbol{x}_{1(t-1)}$
	AR1_2_2	-0,42662	0,36874	-1,16	0,2666	$\boldsymbol{x}_{2(t-1)}$
	AR1_2_3	0,42894	0,28034	1,53	0,1483	$\boldsymbol{x}_{3(t-1)}$
	AR1_2_4	-0,38477	0,32187	-1,2	0,2518	$\boldsymbol{x}_{4(t-1)}$
	AR1_2_5	-0,18138	0,36392	-0,5	0,6259	$\boldsymbol{x}_{5(t-1)}$
$\boldsymbol{x}_3$	AR1_3_1	0,15207	0,36586	0,42	0,684	$\boldsymbol{x}_{1(t-1)}$
	AR1_3_2	0,35767	0,32701	1,09	0,2925	$\boldsymbol{x}_{2(t-1)}$
	AR1_3_3	-0,14746	0,34928	-0,42	0,6793	$\boldsymbol{x}_{3(t-1)}$
	AR1_3_4	0	0			$\boldsymbol{x}_{4(t-1)}$
	AR1_3_5	-0,28489	0,37453	-0,76	0,4595	$\boldsymbol{x}_{5(t-1)}$
$\boldsymbol{x}_4$	AR1_4_1	-0,39817	0,43281	-0,92	0,3732	$\boldsymbol{x}_{1(t-1)}$
	AR1_4_2	0,62332	0,43725	1,43	0,1759	$\boldsymbol{x}_{2(t-1)}$
	AR1_4_3	-0,16269	0,33544	-0,49	0,6352	$\boldsymbol{x}_{3(t-1)}$
	AR1_4_4	0,81357	0,37809	2,15	0,0493	$\boldsymbol{x}_{4(t-1)}$
	AR1_4_5	-0,54486	0,43293	-1,26	0,2288	$\boldsymbol{x}_{5(t-1)}$
$\boldsymbol{x}_5$	AR1_5_1	-0,29178	0,27956	-1,04	0,3143	$\boldsymbol{x}_{1(t-1)}$
	AR1_5_2	-0,66183	0,24987	-2,65	0,0191	$\boldsymbol{x}_{2(t-1)}$
	AR1_5_3	0,24414	0,26688	0,91	0,3758	$\boldsymbol{x}_{3(t-1)}$
	AR1_5_4	0	0			$\boldsymbol{x}_{4(t-1)}$
	AR1_5_5	0,19019	0,28618	0,66	0,5171	$\boldsymbol{x}_{5(t-1)}$

Tabel 5.21b. Pengujian parameter setelah restriksi

Testing of the Restricted Parameters				
Parameter	*Estimate*	*standard Error*	*t Value*	Pr>|*t*|
AR1_3_4	0,044	2,595	0,020	0,000
AR1_5_4	-0,368	3,396	-0,110	0,000

Hasil estimasi terhadap matriks koefisien model VAR(1) melalui penaksir LS dan GA pada kasus data Woodmod diberikan pada Tabel 5.22.

Tabel 5.22. Hasil estimasi matriks koefisien model VAR(1) melalui penaksir LS dan GA

Matriks koefisien $\widehat{\mathbf{B}}_{LS}$					Matriks koefisien $\widehat{\mathbf{B}}_{GA}$				
0,246	0,719	-0,120	0,178	-0,627	0,748	0,436	-0,001	0,105	-0,580
-0,126	-0,427	0,429	-0,385	-0,181	-0,077	-0,817	0,719	0,098	-0,417
0,152	0,358	-0,147	0,000	-0,285	0,002	0,009	0,005	-0,113	-0,090
-0,398	0,623	-0,163	0,814	-0,545	-0,237	-0,733	0,502	0,461	0,000
-0,292	-0,662	0,244	0,000	0,190	0,313	0,002	0,001	0,383	-0,376

dengan

$$\widehat{\overline{\boldsymbol{X}}}_{LS} = [-5{,}55\text{E}-18 \quad 5{,}00\text{E}-06 \quad -1{,}11\text{E}-17 \quad 5{,}00\text{E}-06 \quad 3{,}82\text{E}-18],$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{LS} = \begin{pmatrix} 0{,}005 & 0{,}132 & -0{,}156 & -0{,}051 & 0{,}047 \\ 0{,}028 & -0{,}034 & 0{,}015 & 0{,}015 & 0{,}035 \\ 0{,}056 & 0{,}052 & -0{,}076 & -0{,}015 & -0{,}043 \\ -0{,}025 & 0{,}080 & -0{,}089 & -0{,}040 & 0{,}010 \\ 0{,}033 & -0{,}075 & 0{,}115 & 0{,}014 & -0{,}027 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{\overline{\boldsymbol{X}}}_{GA} = [0{,}005 \quad 0{,}107 \quad 0{,}000 \quad -0{,}062 \quad 0{,}047],$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{GA} = \begin{pmatrix} 0{,}704 & -0{,}206 & 0{,}435 & 0{,}077 & -0{,}331 \\ -0{,}206 & 0{,}455 & -0{,}078 & -0{,}277 & 0{,}249 \\ 0{,}435 & -0{,}078 & 0{,}672 & 0{,}313 & -0{,}120 \\ 0{,}077 & -0{,}277 & 0{,}313 & 0{,}744 & -0{,}099 \\ -0{,}331 & 0{,}2495 & -0{,}120 & -0{,}099 & 0{,}576 \end{pmatrix}$$

Adapun parameter pemulus dan pemilihan batas atas kontrol MEWMA pada data Woodmod yang disesuaikan dengan peluang *false alarm* dalam kasus ini diberikan pada Tabel 5.23.

Tabel 5.23. Batas Atas Kontrol dari kasus data Woodmod

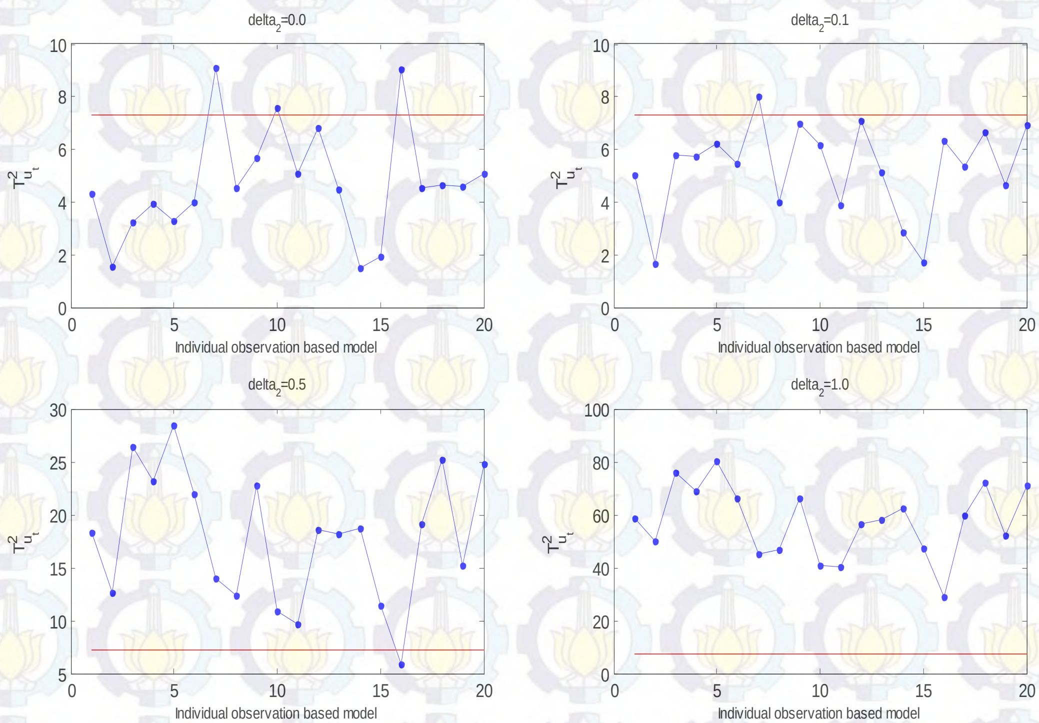
UCL of MEWMA for Woodmod case				
r	0,05	0,1	0, 2	0,3
UCL	7,289	9,236	10,939	11,644

- **Tahap Evaluasi Kinerja Diagram Kontrol T^2 dan MEWMA pada Kasus Data Woodmod**

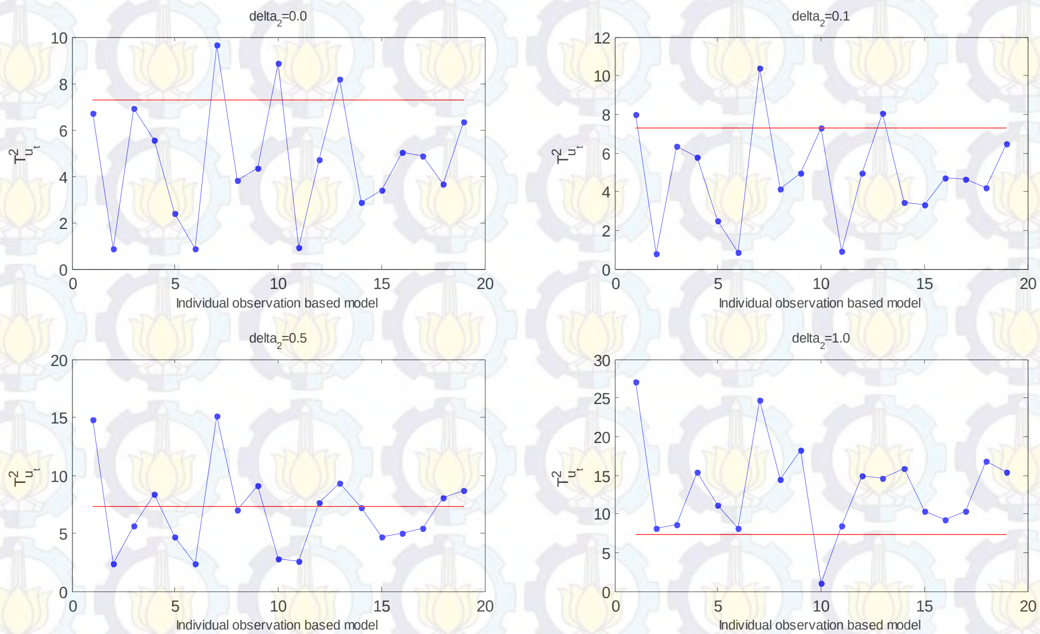
Tahap evaluasi kinerja diagram kontrol T^2 pada kasus data Woodmod dengan $\boldsymbol{\delta}_1$ menunjukkan bahwa diagram kontrol T^2 dengan UCL=11,6443 ($\alpha = 0{,}04$) melalui GA dapat memperbaiki kinerja diagram kontrol T^2 karena diagram kontrol T^2 dengan penaksir LS sudah tidak sensitif lagi terhadap *outlier*. Sementara untuk $\boldsymbol{\delta}_2$, diagram kontrol Hotelling T^2 untuk residual masih digunakan pada tahap evaluasi ini. Karena diagram kontrol Hotelling T^2 dengan GA masih memiliki performansi yang lebih baik dibandingkan penaksir LS yang efektif bekerja hanya pada kenaikan-kenaikan *shift* besar.

Sementara untuk batas kontrol atas yang lebih kecil (UCL=7,29) pun menunjukkan bahwa diagram kontrol T^2 dengan GA masih memiliki performansi yang lebih baik dari diagram kontrol T^2 dengan LS kenaikan-kenaikan *shift* besar.

Pengontrolan dengan diagram kontrol T^2 masing-masing melalui penaksir LS dan GA diberikan pada Gambar 5.19 (a-b).

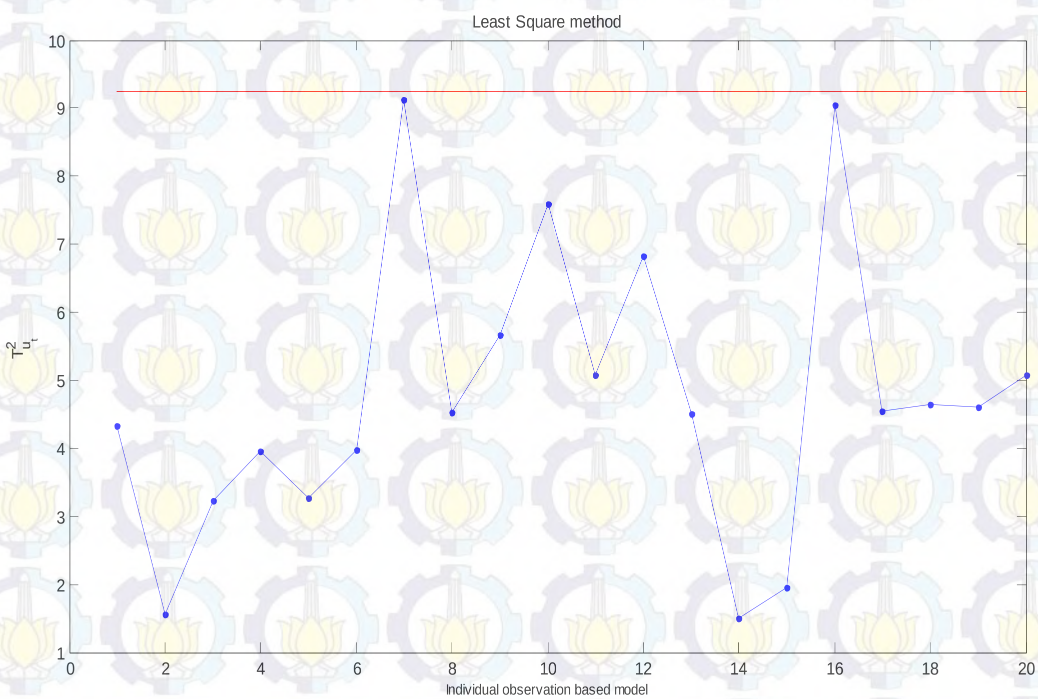


Gambar 5.19a T^2 *for Woodmod dataset case using LS with* α=0,2

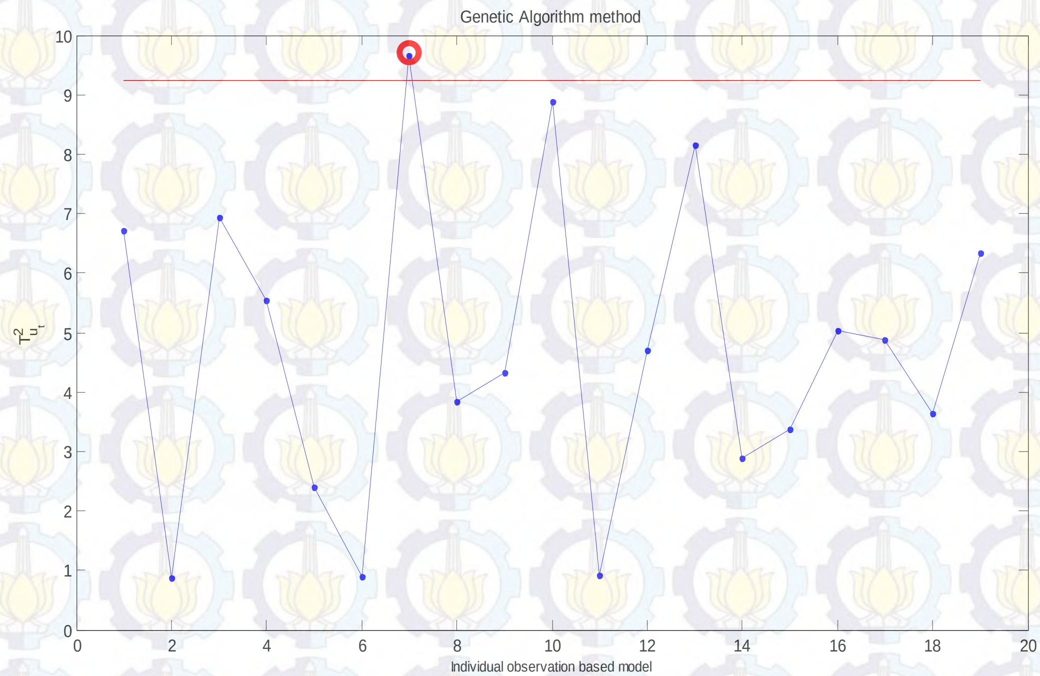


Gambar 5.19b T^2 *for Woodmod dataset case using GA with* α=0,2

Perbandingan lain yang menunjukan keunggulan dari GA terlihat pada nilai peluang *false alarm* senilai 0,1. Dimana pada level ini, penaksir LS tidak mendeteksi adanya *outlier*, sementara melalui GA, titik sampel ke tujuh dapat dideteksi sebagai *outlier*. Hasil ini dapat dibandingkan melalui Gambar 5.20a dan 5.20b berikut ini.



Gambar 5.20a T^2 *for Woodmod dataset case using LS* with α=0,1



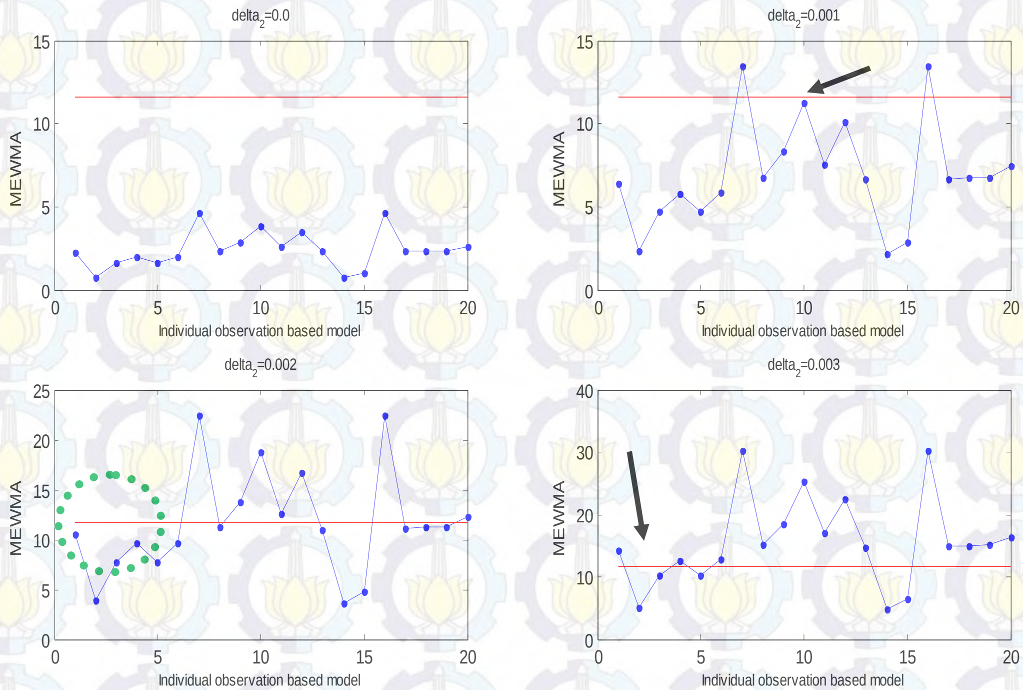
Gambar 5.20b T^2 *for Woodmod dataset case using GA with* α=0.1

Selanjutnya penjelasan terkait kinerja diagram kontrol MEWMA pada kasus data Woodmod yang diberikan pada Gambar 5.20a dan 5.20b dapat diuraikan kembali sebagai berikut:

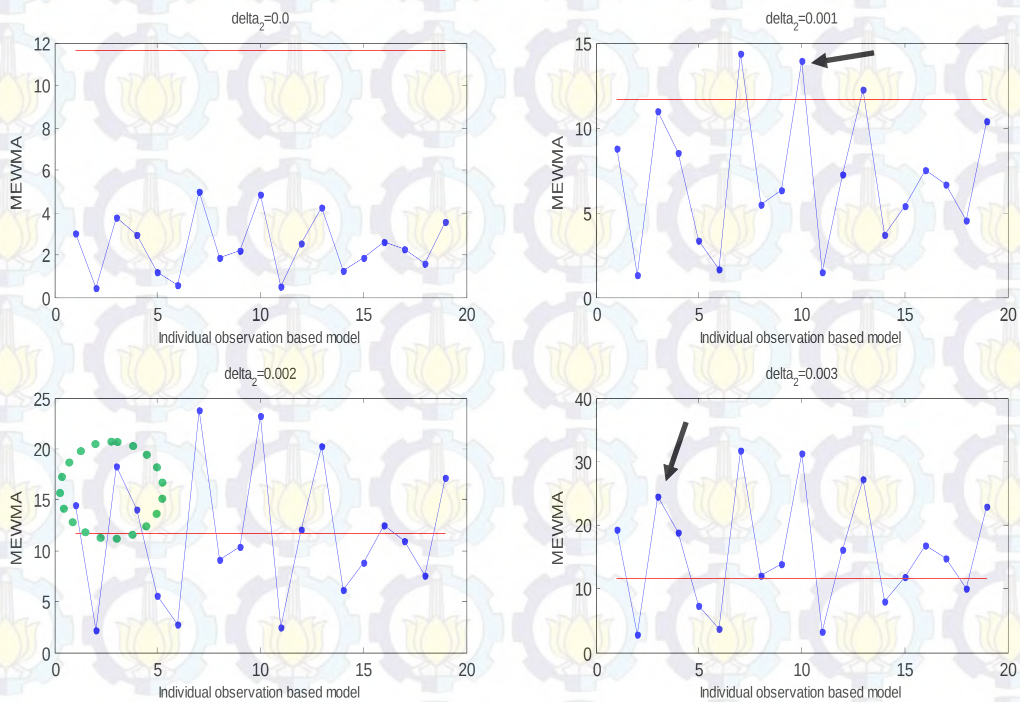
i. Kinerja diagram kontrol MEWMA dengan penaksir LS dapat bekerja secara efektif pada level $\boldsymbol{\delta}_1 \geq 0{,}003$;
ii. Kinerja diagram kontrol MEWMA dengan GA memiliki performansi yang jauh lebih baik dengan menggunakan *r*= 0,2 dan 0,3 pada level $\boldsymbol{\delta}_1 \geq 0{,}003$.

Dalam hal ini, baik penaksir LS atau GA masih dapat dibandingkan, pada level *shift* tertentu. Namun demikian, dalam kasus kedua yang telah dikerjakan melalui data Woodmod ini, pada level $r \geq 0{,}3$ dan pada kenaikan-kenaikan *shift* mean kecil pada level $\delta_1 \leq 0{,}003$. Diagram kontrol MEWMA dengan GA bereaksi lebih cepat dalam mendeteksi adanya *outlier* dengan RL yang lebih pendek dibandingkan diagram kontrol MEWMA dengan penaksir LS. Dilain pihak, diagram kontrol MEWMA dengan penaksir LS masih lebih unggul dalam pendeteksian *outlier* setelah $\boldsymbol{\delta}_1 > 0{,}003$ (dalam kasus ini).

Hasil perbandingannya diberikan melalui Gambar 5.21 (a-b) yang ditandai (*black arrow dan green cycle's*) berikut ini:



Gambar 5.21a *MEWMA for Woodmod dataset case using* LS (r=0,3)



Gambar 5.21b *MEWMA for Woodmod dataset case using GA* (r=0,3)

Adapun hasil perbandingan kinerja diagram kontrol MEWMA melalui penaksir LS dan GA dari data Woodmod diatas diberikan melalui Tabel 5.24 berikut ini.

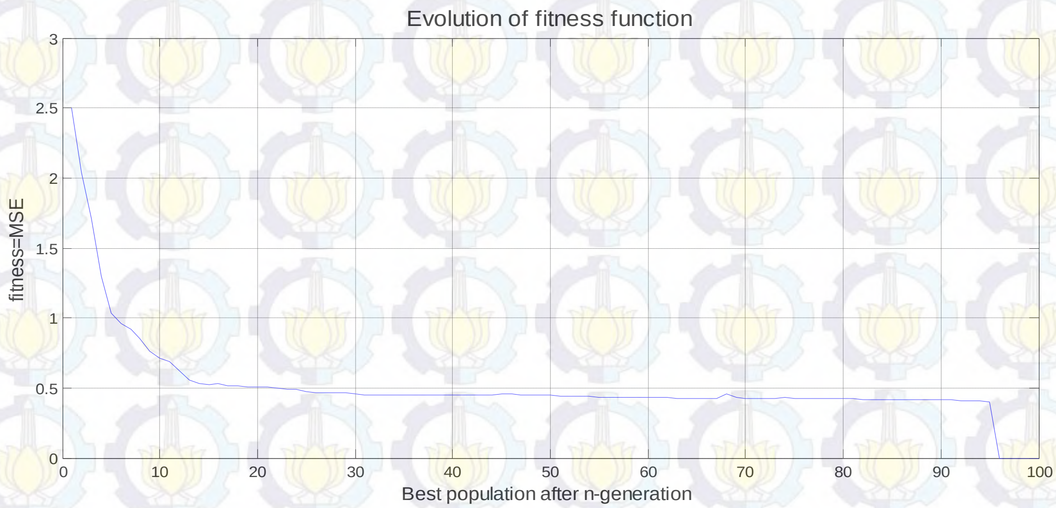
Tabel 5.24 Hasil perbandingan kinerja diagram kontrol MEWMA melalui penaksir LS dan GA pada data Woodmod

Kinerja diagram kontrol MEWMA dalam deteksi *outlier* pada kasus data Woodmod								
delta_1	Penaksir LS				GA			
	r=0,05	r=0,1	r=0,2	r=0,3	r=0,05	r=0,1	r=0,2	r=0,3
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,001	0	0	0	2	0	0	2	3
0,002	2	4	6	7	2	5	8	9
0,003	6	13	15	15	7	11	13	13
0,004	14	15	17	17	13	14	14	14
0,005	15	17	17	17	14	16	16	14
0,009	17	19	18	17	16	16	16	15
0,01	18	19	18	17	16	16	16	15
α	0,2	0,1	0,0526	0,04	0,2	0,1	0,0526	0,04
UCL_{Chi^2}	7,289	9,236	10,939	11,644	7,289	9,236	10,939	11,644

Dalam aplikasi pada kasus-2, nilai MSE terkecil adalah 0,05 dengan iterasi maksimum 500 dan mencapai konvergen secara global pada generasi ke 276. Adapun proses evolusi dari fungsi *fitness* (1/MSE) diberikan melalui Tabel 5.25 dan Gambar 5.22 (a-b).

Tabel 5.25 Parameter hasil simulasi algoritma genetika pada kasus data Woodmod

Asumsi awal	Kriteria	Parameter hasil simulasi Algoritma Genetika	Ukuran performansi model	Keterangan: Global optimum
a. Jumlah Generasi b. Jumlah Populasi c. Peluang Pindah Silang d. Peluang Mutasi	100 20 0,85 0,0002	- Beta(1) = 0,866959 - Beta(2) = 0,500305 - Beta(3) = -0,450362 - Beta(4) = 0,233441 - Beta(5) = -0,248188 - MSE = 0,4005487	- Nilai AIC = 1,41065 - Nilai SC = 0,55222 - Waktu untuk proses perhitungan = 43,563	Konvergensi terjadi pada generasi ke 95
a. Jumlah Generasi b. Jumlah Populasi c. Peluang Pindah Silang d. Peluang Mutasi	500 20 0,95 0,0003	- Beta(1) = 0,999727 -Beta(2) = -0,127144 - Beta(3) = 0,2546118 - Beta(4) = -0,256847 - Beta(5) = 0,164851 - MSE = 0,0577099	- Nilai AIC = 3,34806 - Nilai SC = 1,38519 - Waktu untuk proses perhitungan = 43,563	Konvergensi terjadi pada generasi ke 276



Gambar 5.22a Konvergensi fungsi *fitness* setelah generasi ke 95

Gambar 5.22b Konvergensi fungsi *fitness* setelah generasi ke 276

Dengan demikian, berdasarkan hasil aplikasi terhadap kasus data HM dan data Woodmod yang telah diberikan masing-masing melalui Tabel 5.18 dan Tabel 5.25. Jika model VAR(1) terbaik yang dipilih dengan kriteria generasi maksimum adalah 500, maka model VAR(1) terbaik dari kedua kasus ini dapat dituliskan masing-masing sebagai berikut:

- Kasus 1. Model VAR(1) dari data HM

  $\boldsymbol{z}_t = \left(L\boldsymbol{x}'_{kt} \otimes \mathbf{I}_p\right)(0{,}937;\ -0{,}047)' + \boldsymbol{\varepsilon}_t$

  dengan $\boldsymbol{x}_t$ berukuran (56×2) dan $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ berukuran (56×2).

- Kasus 2. Model VAR(1) data Woodmod

  $\boldsymbol{z}_t = \left(L\boldsymbol{x}'_{kt} \otimes \mathbf{I}_p\right)(0{,}999; -0{,}127;\ 0{,}255;\ -0{,}257;\ 0{,}165)' + \boldsymbol{\varepsilon}_t,$

  dengan $\boldsymbol{x}_t$ berukuran (20×5) dan $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ berukuran (20×5).

5.3.3 Interpretasi Hasil Evaluasi Pengontrolan

Berdasarkan evaluasi numerik terhadap kinerja diagram kontrol MEWMA berbasis model melalui penaksir LS selalu dapat dibandingkan terhadap diagram kontrol MEWMA berbasis residual melalui GA. Kedua penaksir ini bersifat komplementer dalam proses pengontrolan residual. Sehingga, baik kinerja diagram kontrol T^2 berbasis model untuk residual dan diagram kontrol MEWMA berbasis model untuk residual pun dapat diperbaiki guna meningkatkan kemampuan diagram kontrol dalam mendeteksi efek dari kenaikan-kenaikan *shift* kecil sampai pada level *shift* besar.

Kelemahan pada diagram kontrol T^2 berbasis residual dapat diperbaiki dengan mengaplikasikan GA pada proses konstruksinya terhadap kenaikan-kenaikan *shift* mean kecil sekalipun. Sementara itu, kinerja diagram kontrol MEWMA dengan GA dapat diperbaiki untuk nilai r=0,05 pada kasus yang berbeda (kasus1). Artinya bahwa secara umum proses aplikasi dengan menggunakan GA dalam pengontrolan residual (sub-bab 4.3) memberikan hasil yang signifikan dalam penentuan parameter optimum. Selain itu, implementasi GA juga bermanfaat dalam pencarian model terbaik. Hal ini jelas mengurangi kompleksitas perhitungan yang dikerjakan secara konvensional melalui tahap *cheking model*s melalui metode LS.

Terkait dengan dasar optimasi numerik dari GA yang telah dibahas secara analitik pada BAB IV, paling tidak terdapat dua hal yang dapat dikemukakan juga terkait dengan prinsip efisiensi dan efektifitas pengontrolan, yaitu: kompleksitas dan skalabilitas pengontrolan. Secara analitik, kompleksitas pengontrolan terletak pada penentuan parameter optimum MEWMA, khususnya pada proses rekonstruksi matrik kovarians dengan atau tanpa restriksi. Hal ini tidak terlepas dari skalabilitas pengukuran matriks kovarians yang harus selalu dipertahankan agar bernilai semi definit positif atau definit positif guna menjamin non singularitas model.

Dilain pihak, restriksi yang diberikan pada matriks kovarians pun tidak selalu menjamin kestabilan model, karena hasil estimasi matriks koefisien yang selalu berubah berdampak pada perubahan struktur data *time series* secara menyeluruh. Walaupun demikian, implementasi dari prosedur GA tidak hanya bermanfaat dalam mengatasi kendala dalam proses restriksi parameter model, tetapi juga dapat mengurangi kompleksitas pengontrolan, dan skalabilitas melalui pereduksian dimensi yang terkuantifikasi melalui parameter non sentralitas distribusi Khi-kuadrat.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB VI

SIMPULAN DAN SARAN

6.1 Simpulan

Berdasarkan pembahasan pada BAB IV dan BAB V, simpulan dan saran sebagai bagian akhir dari disertasi ini diberikan dalam dua bagian. Simpulan pertama terhadap hasil studi pengembangan diagram kontrol MEWMA pada data tak random terkait dengan kajian analitik dan metodologi penelitian (bagian 6.1.1). Simpulan kedua diberikan terhadap hasil studi evaluasi dan aplikasi diagram kontrol MEWMA secara numerik (bagian 6.1.2). Sementara saran terhadap hasil yang telah dicapai melalui penelitian ini diletakkan pada bagian akhir dari BAB ini.

6.1.1 Pengembangan Diagram Kontrol MEWMA Berbasis Model

Beberapa simpulan yang dapat ditarik dari studi pengembangan diagram kontrol MEWMA berbasis model untuk pengamatan tak random dapat diuraikan sebagai berikut:

i. Distribusi statistik MEWMA $Q \sim \chi^2_{n-m}$. Sebaliknya, jika tidak berlaku demikian, maka distribusi statistik MEWMA dapat diaproksimasi melalui $Q \sim \chi^2_{n-m}(\delta)$ dengan parameter non sentralitas δ;

ii. Dalam kasus normal multivariat, matriks simetriks **A** selalu dapat direduksi ke bentuk matriks orthogonal. Akibatnya, parameter pembobot **R** pada MEWMA selalu dapat direduksi ke bentuk orthogonal dan distribusi statistik MEWMA hanya bergantung pada dimensi proses parameter. Jadi, distribusi statistik MEWMA berbasis model dan MEWMA berbasis observasional sekalipun dapat diaproksimasi melalui suatu distribusi Khi-Kuadrat dengan parameter non sentralitas δ;

iii. Jika penaksir GA diadopsi pada penaksiran parameter model VAR(p) dalam menaksir matriks koefisien $\hat{\mathbf{\Phi}}_i$, maka efek non normalitas berupa variasi proses yang terjadi pada kedua diagram kontrol dapat direduksi ke bentuk normal multivariat standar untuk $i \to n$ ($n \leq N$). Akibatnya, baik diagram kontrol T^2 Hotelling atau MEWMA berbasis model selalu dapat dibandingkan berdasarkan skema monitoring yang digunakan.

6.1.2 Hasil Studi Evaluasi Diagram Kontrol MEWMA Berbasis Model dan Aplikasinya

Simpulan terkait hasil studi evaluasi empiris yang dicapai dalam kontruksi diagram kontrol MEWMA berbasis pemodelan dapat diuraikan sebagai berikut:

i. Diagram kontrol MEWMA sensitif pada kenaikan-kenaikan *shift* kecil, namun seiring dengan kenaikkan nilai parameter pemulus $\boldsymbol{r}$, akibatkan berkurangnya sensitifitas MEWMA;
ii. Kinerja diagram kontrol MEWMA melalui penaksir GA menjadi lebih sensitif dalam proses pendeteksian *outlier*. Dimana untuk setiap nilai parameter $\boldsymbol{r}$, diagram kontrol MEWMA menjadi lebih peka terhadap kenaikan-kenaikan *shift* kecil dan memiliki panjang ARL yang relatif sama untuk setiap batas atas kontrol;
iii. Ketika penaksir GA diaplikasikan pada *shift* mean jenis 2 (*shift* moderat atau $\boldsymbol{\delta}_2$) akibatkan diagram kontrol T^2 Hotelling untuk residual menjadi lebih sensitif dibandingkan dengan T^2 Hotelling melalui penaksir LS.

Secara umum, diagram kontrol MEWMA berbasis model sensitif terhadap shift shift kecil. Dalam hal ini, jika menggunakan penaksir LS, maka sensitivitas pengontrolannya semakin berkurang dalam merespon *outlier*. Sebaliknya, ketika penaksiran dilakukan melalui GA, maka sensitivitas diagram kontrol MEWMA akan stabil pada nilai parameter $r \approx 0{,}3$.

6.2 Saran

Penelitian dapat dilanjutkan pada pengembangan diagram kontrol multivariat untuk pengamatan berpola tertentu seperti siklis atau *trend shift* masih merupakan bagian menarik yang dapat dikaji melalui penaksir *robust* seperti *Minimum Covariance Determinant* (MCD) oleh Hubert, Rousseeuw, dan Verdonck, (2010). Demikian juga usulan dari Pan dan Chen (2011) melalui penaksir *Weighted Mean Square Successive Difference* (WMSSD).

Kajian dalam pengembangan statistik MEWMA memiliki kompleksitas dalam menentukan jaminan *invariant* suatu distribusi yang umumnya tidak diketahui. Salah satu metode yang bermanfaat untuk pengembangan lebih lanjut yang digunakan dalam Muirhead, (2005) adalah melalui transformasi Wishart pada teori grup *generalized*. Kelebihan dari metode ini adalah setiap estimator yang digunakan dapat dipandang sebagai grup non-singular dan hasil transformasi menjamin hasil estimasi yang bersifat maksimal invarian.

SIMPULAN

1. Pengembangan Diagram Kontrol MEWMA Berbasis Model

a. Distribusi statistik MEWMA $Q \sim \chi^2_{n-m}$. Sebaliknya, jika tidak berlaku demikian, maka distribusi statistik MEWMA dapat diaproksimasi melalui $Q \sim \chi^2_{n-m}(\delta)$ dengan parameter non sentralitas δ;

b. Dalam kasus normal multivariat, matriks simetriks **A** selalu dapat direduksi ke bentuk matriks orthogonal. Akibatnya, parameter pembobot **R** pada MEWMA selalu dapat direduksi ke bentuk orthogonal dan distribusi statistik MEWMA hanya bergantung pada dimensi proses parameter. Jadi, distribusi statistik MEWMA berbasis model dan MEWMA berbasis observasional sekalipun dapat diaproksimasi melalui suatu distribusi Khi-Kuadrat dengan parameter non sentralitas δ;

c. Jika penaksir GA diadopsi pada penaksiran parameter model VAR(p) dalam menaksir matriks koefisien $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_i$, maka efek non normalitas berupa variasi proses yang terjadi pada kedua diagram kontrol dapat direduksi ke bentuk normal multivariat standar untuk $i \to n$ $(n \leq N)$. Akibatnya, baik diagram kontrol T^2 Hotelling atau MEWMA berbasis model selalu dapat dibandingkan berdasarkan skema monitoring yang digunakan.

2. Hasil Studi Evaluasi Diagram Kontrol MEWMA Berbasis Model dan Aplikasinya

a. Diagram kontrol MEWMA sensitif pada kenaikan-kenaikan *shift* kecil, namun seiring dengan kenaikkan nilai parameter pemulus ***r***, akibatkan berkurangnya sensitifitas MEWMA;

b. Kinerja diagram kontrol MEWMA melalui penaksir GA menjadi lebih sensitif dalam proses pendeteksian *outlier*. Dimana untuk setiap nilai parameter ***r***, diagram kontrol MEWMA menjadi lebih peka terhadap kenaikan-kenaikan *shift* kecil dan memiliki panjang ARL yang relatif sama untuk setiap batas atas kontrol;

c. Ketika penaksir GA diaplikasikan pada *shift* mean jenis 2 (*shift* moderat atau $\boldsymbol{\delta}_2$) akibatkan diagram kontrol T^2 Hotelling untuk residual menjadi lebih sensitif dibandingkan dengan T^2 Hotelling melalui penaksir LS.

DAFTAR PUSTAKA

Anderson, T. W., (1984), An introduction to multivariate statistical analysis 5th *ed*., John Wiley & Sons, *Inc*.

Aparisi, F. dan Darcía-Díaz, J. C., (2004), *Optimization of univariate and multivariate exponentially weighted moving average control charts using genetic algorithms,* Journal of computer and operations research, *Vol*. 31 (92004) *pp*. 1437-1454

Box, G. E. P., Jenkins, G. M., dan Reinsel, G. C., (1994), Time series analysis-forecasting and control, 3th *ed*., Prentice-Hall International, *Inc*.

Brockwell, P. J. dan Davis, R. A., (1991), Time Series: Theory and methods, 2nd, Springer-Verlag, New York, *Inc*.

Budhi, S. W., (1995), Aljabar linier, *hal*.312-325, Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

Chang, W.Y. dan Richards, D. St. P., (2009), *Finite-sample inference with monotone incomplete multivariate normal data,* Int. Journal of Multivariate Analysis, *Vol*. 100 *pp*.1883-1899.

Cheng, H. P., dan Cheng, C. S., (2009), *Int. Control chart patern recognition using Wavelet analysis and Neural Network*, Journal of Quality, *Vol*.16 *No*. 5-311.

Fuentes, J.C., (2008), Statistical monitoring of a process with autocorrelated output and observable autocorelated measurement error, A Dissertation of Baylor University, UMI *No*.3310775, ProQuest LLC, U.S.

Gen, M. dan Cheng, R., (2000), Genetic algorithms and engineering optimization, John Wiley & Sons, *Inc*.

Gombay, E. dan Serban, D., (2009), *Monitoring parameter change in AR(p) time series models,* Journal of Multivariate Analysis *Vol*.100, *pp*.715-725.

Hochreiter R. dan krottendorfer. G., (2013), *Robust estimation of vector autoregressive (VAR) models using genetic algorithms*, LNCS, *pp*.223-233, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Horn, R. A. dan Johnson, C.A., (1985), Matrix analysis, Cambridge university press.

Hubert, M., Rousseeuw, P. J., Verdonck, T., (2010), *A deterministic algorithm for the MCD*, Technical Report, TR-10-01, http://wis.kuleuven.be/stat/.

Hubert, M., Rousseeuw, P. J. dan Van Aelst, S., (2008), *High breakdown robust multivariate methods*, *Vol*.23, *No*.1, *pp*. 92-119, Institute of Mathematical Statistics.

Huwang, L., (2010), *New EWMA control chats for monitoring process dispersion,* Journal of Computational Statistical and Data Analysis *Vol*.54 *pp*. 2328-2342.

Jarrett, E. J. dan Pan, X., (2007a), *The quality control chart for monitoring multivariate autocorrelated processes*, Journal of Computational Statistics & Data Analysis *Vol*.51, *pp*. 3862-3870.

Kollo, T. dan Von Rosen, D., (2005), Advanced multivariate statistics with matrices, Springer-Netherlands.

Lowry, C. A., Woodall, W. H., Champ, C. W., dan Ridgon, S. E., (1992), *A multivariate exponentially weigthed moving average control chart*, Technometrics, *Vol*.34, *pp*. 46-53.

Lucas, J. M. dan Saccucci, M. S., (1990), *Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and Enhancements,* Technometrics, *Vol*. 32, *No*.1.

Lu, C.W. dan Reynolds, M. R., (1999), *Control charts for monitoring the mean and variance of autocorrelated processes.* Journal of Quality Technology, *Vol*.23, *pp*. 259-274.

Lütkepohl, H., (2005), New introduction to multiple time series analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Mardia, K. V., Kent, J. T., dan Bibby, J. M., (1979), Multivariate Analysis, Academic Press, USA.

Maravelakis, P. E. dan Castagliola P., (2009), *An EWMA chart for monitoring the process standarddeviation when parameter are estimated,* Journal of Computational Statistics and Data Analysis, *Vol*.53, *pp*.2653-2664.

Mason, R. L., Chou,Y-M., Sullivan, J. A., Stoumbos, Z. G., Young, J. C., (2003), *Systematic patterns in* T^2 *charts,* Journal of Quality Technology *Vol*.35,1, *ABI/INFORM Global.*

Montgomery, D. C., (2005), Introduction to statistical quality control, 5e$^{ed.}$, Wiley International edition.

Muirhead, R. J., (2005), Aspect of multivariat statistical theory, John Wiley and Sons *Inc*.

Palit, A. K. dan Popovic, D., (2005), Computational intelegence in time series forecasting, Theory and Engineering Applications, Advances in industrial control series, Springer-Verlag, London

Pan, J. N., (2007), *A study of multivariate pre-control charts, Int*. journal of production Economics *Vol*.105, *pp*. 160-170.

Pan, J. N. dan Chen, S. C., (2011), *New robust estimator for detecting non-random pattern in multivariate control charts: a simulation approach*, Journal of Statistical Computation and Simulation, *Vol.*81, *No.*3, *pp.* 289-300.

Pan, X., (2005), *Notes on shift effects for T^2-type charts on multivariate ARMA residuals,* Journal of Computers and Industrial Engineering *Vol.*4, *p.p.* 381-392.

Pan, X. dan Jarrett, J., (2007), *Using vector autoregressive residual to monitor multivariate processes in presence of serial correlation, Int.* Journal of Production Economics, *Vol.*106 *pp.* 204-216.

Prabhu, S.S. dan Runger, G.C., (1997), *Designing a multivariate EWMA control chart,* Journal of Quality Technology, *Vol.*29, *pp.*8-15.

Reynolds, M.R.$_{JR}$ dan Cho, G.Y., (2006), *Multivariate control charts for monitoring the mean vector and covariance matrix,* Journal of Quality Technology, *Vol..*38, ABI/INFORM Global *p.*230.

Reynolds, M.R.$_{JR}$ dan Stoumbos, Z.G., (2008), *Combination of multivariate control charts for monitoring the mean vector and covariance matrix,* Journal of Quality Technology, *Vol.*40, ABI/INFORM Global *p.*381.

Roberts, S.W. (1959), *Control chart test based on geometric moving averages,* Technometrics, *Vol* 1, *No.*3

Robinson P.B. dan Ho T.Y., (1978), *Average run length of geometric moving average charts by numerical methods,* Technometrics, *Vol.* 20, No.1.

Rousseeuw, P. J. dan Leroy, A. M., (1987), Robust regression and outlier detection, John Wiley & Sons *Inc.*

Santoso, B. dan Willy, P., (2011), Metoda metaheuristik: Konsep dan Aplikasi, penerbit Guna Wijaya, Surabaya.

Swift, S. dan Liu, X., (2002), *Predicting glaucomatous visual filed detoration through short multivariate time series modeling*, Journal of Artificial Intelligence in Medicine, *Vol.*24, *p.*5-24

Schöne, A., Schmid, W., dan Konoth, S., (1999), *On the run length of the EWMA scheme: a monotonicity result for normal variabels,* Journal of statistical Planing and Inference, *Vol.* 79, *pp.* 289-297.

Srivastava, M.S. dan Fujikoshi, Y., (2006), *Multivariate analysis of variance with fewer observations than the dimension,* Journal of Multivariate Analysis, *Vol.*97, *pp.* 1927-1940.

Stefatos, G. dan Hamza, A.B., (2009), *Fault detection using robust multivariate control chart*, Journal of Expert Systems with Applications, *Vol*.36, *pp*. 5888-5894

Sun, B., (2000), *Statistical process monitoring for non-iid processes, A thesis of the university of Michigan*, UMI *No*. 9963904, Bell & Howell information and learning company, U.S.

Timm, N.H., (2002), Applied multivariate analysis, Springer-Verlag New York, *Inc*.

Vermat, M.B, van der Meulen, F.H., Does, R.J.M.M., (2008), *Asymptotic behavior of the variance of the EWMA statistics for autoregresive processes,* Journal of Statistics and Probability Letters, *Vol*.78, *pp*. 1673-1682.

Wieringa, J. E. (1999), Statistical processes control for serrialy correlated data, A thesis of Rijksuniversiteit Groningen, *ISBN* 90-72591-63-1, *pp*. 1-98, Ridderprint, Ridderkerk.

Wororomi, J.K., Mashuri, M., Irhamah, Arifin, A.Z., (2012), *Aplikasi algoritma MCD pada diagram kontrol MEWMA*, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVI, *ISBN No*.978-602-19590-2-2.

Wororomi, J.K., Mashuri, M., Irhamah, Arifin, A.Z., (2013), *Vector auto-regressive control chart and its application in industry*, Proceedings of the 3^{rd} Annual, Basic Science International Conference, *ISSN* 2338-0136 *Vol*.3.

Yu, W., (2007), Detection dan identification of mean shifts in multivariate autocorrelated processes: A comparative study, A thesis at Department of Decision Sciences, National University of Singapore.

BIODATA PENULIS

Nama	:	Jonathan Kiwasi Wororomi
NRP.	:	1309 301 005
Tempat & Tanggal Lahir	:	Manokwari, 07 November 1972
Instansi asal	:	Universitas Cenderawasih, Jayapura
Alamat Rumah	:	Jl. Pendidikan I/1, Abepura, Jayapura
Tgl. Masuk S3	:	6 Juni 2009
Tgl. Lulus Kualifikasi	:	11 November 2011

1. Riwayat Pendidikan :

- Magister Sains, Departemen Matematika, Institut Teknologi Bandung, Tahun 2006;
- Sarjana Sains, Jurusan Matematika, Universitas Sebelas Maret, Tahun 1997;
- SMA Negeri 01 Manokwari, Tahun 1991;
- SMP Negeri 01 Manokwari, Tahun 1988;
- SD Negeri 01 Manokwari, Tahun 1985.

2. Publikasi dan Seminar :

Publikasi ilmiah dan seminar yang telah dilaksanakan selama masa studi:

<u>Jurnal</u>

Applied Mathematical Sciences (AMS), Vol. 8, 2014, no. 70, 3491 – 3499, ISSN: 1314-7552 (*0nline*), http://dx.doi.org/10.12988/ams.2014.44298

Judul paper:

On monitoring shift in the mean processes with vector auto-regressive residual control charts of Individual observation

<u>Seminar</u>

- J.K Wororomi, M. Mashuri, Irhamah, Agus Z. Arifin, (2014), Pengembangan skema monitoring proses shift mean diagram kontrol Vektor Autoregressive residual pada observasi individual, Konferensi Nasional Matematika XVII FMIPA-ITS.
- J.K Wororomi, M. Mashuri, Irhamah, Agus Z. Arifin, (2013), *Vector Auto-regressive Control Chart and its Application in Industry, Proceedings of the 3rd Annual, Basic Science International Conference;*
- J.K Wororomi, M. Mashuri, Irhamah, Agus Z. Arifin, (2012), Aplikasi algoritma MCD pada diagram kontrol MEWMA, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVI UNPAD Bandung;
- J.K Wororomi (2009), Estimasi eksponen Hurst dalam *fractal time series* dan aplikasinya dalam estimasi cadangan dan prakiraan umur operasi suatu lapangan panasbumi *: A Review*, Prosiding Seminar Nasional Statistika IX, ITS.