THESIS SS14-2501

PARAMETER ESTIMATION AND HYPOTHESES TESTING ON GAMMA REGRESSION MODELS

(Study Case : Modeling of Water Pollution River in the City of Surabaya)

ALVI SAHRIN NASUTION

NRP. 1413 201 021

SUPERVISOR

Dr. PURHADI, M.Sc.

Dr. SUTIKNO, M.Si.

PROGRAM OF MAGISTER

DEPARTMENT OF STATISTIC

FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES

SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY

SURABAYA

2016

Halaman ini sengaja dikosongkan

TESIS SS14-2501

ESTIMASI PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS PADA MODEL REGRESI GAMMA

(Studi Kasus : Pemodelan Pencemaran Air Sungai di Surabaya)

ALVI SAHRIN NASUTION

NRP. 1413 201 021

DOSEN PEMBIMBING

Dr. PURHADI, M.Sc.

Dr. SUTIKNO, M.Si.

PROGRAM MAGISTER

JURUSAN STATISTIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA

2016

Halaman ini sengaja dikosongkan

ESTIMASI PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS PADA MODEL REGRESI GAMMA

Studi Kasus : Pemodelan Pencemaran Air Sungai di Kota Surabaya

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar

Magister Sains (M.Si)

di

Institut Teknologi Sepuluh November

Oleh:

ALVI SAHRIN NASUTION

NRP. 1314201021

Tanggal Ujian : 21 Januari 2016

Periode Wisuda : September 2016

Disetujui Oleh :

1. Dr. Purhadi, M.Sc (Pembimbing)
   NIP. 19620204 198701 1 001

2. Dr. Sutikno, M.Si. (Co-Pembimbing)
   NIP. 19710313 199702 1 001

3. Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si. (Penguji)
   NIP. 19681124 199412 1 001

4. Dr. Ismaini Zain, M.Si. (Penguji)
   NIP. 19600525 198803 2 001

Direktur Pascasarjana ITS

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc, Ph.D.

NIP. 19601202 198701 1 001

halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR ISI

		halaman
HALAMAN JUDUL		i
LEMBAR PENGESAHAN		v
ABSTRAK		vii
ABSTRACT		ix
KATA PENGANTAR		xi
DAFTAR ISI		xiii
DAFTAR TABEL		xv
DAFTAR GAMBAR		xvii
DAFTAR LAMPIRAN		xix
BAB 1	PENDAHULUAN	1
	1.1.Latar Belakang	1
	1.2.Permasalahan Penelitian	5
	1.3.Tujuan Penelitian	5
	1.4.Manfaat Penelitian	5
	1.5.Batasan Penelitian	6
BAB 2	TINJAUAN PUSTAKA	7
	2.1. Distribusi Gamma	7
	2.2. Regresi Gamma	8
	2.2.1 Model Regresi Gamma	9
	2.2.2 Estimasi Parameter Model Regresi Gamma	9
	2.3. Pengujian Distribusi	12
	2.4. Pengujian Multikolineritas	13
	2.5. Pencemaran Air	14
	2.6. Biochemical Oxygen Demand	16
	2.7 Faktor yang Mempengaruhi Pencemaran Sungai	19
BAB 3	METODE PENELITIAN	21

3.1. Sumber Data 22
3.2. Variabel Penelitian 23
3.3 Metode Analisis 24
3.4 Definisi Tahapan Analisis Data 28
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN 29
4.1 Estimasi Parameter Regresi Gamma 29
4.2 Uji Hipotesis Model Regresi Gamma 35
4.3 Aplikasi Regresi Gamma terhadap Faktor-faktor yang Mempengaruhi Tingginya Nilai BOD 40
4.3.1 Deskripsi Pencemaran Air Sungai di Surabaya 40
4.3.2 Pengujian Distribusi 43
4.3.3 Pengujian Multikolineritas 44
4.4 Pemodelan Regresi Gamma Estimasi MLE 45
4.5 Pengujian Hipotesis Model Regresi Gamma (MLE) 46
4.5.1 Pengujian Secara Serentak (MLE) 46
4.5.2 Pengujiaan Secara Parsial (MLE) 47
4.6 Pemodelan Regresi Gamma pada Pencemaran Sungai di Surabaya dengan Metode MLE 48
4.7 Pengujian Hipotesis Model Regresi Gamma (WLS) 49
4.7.1 Pengujian Secara Serentak (WLS) 49
4.7.2 Pengujiaan Secara Parsial (WLS) 50
4.8 Analisis Model Regresi Gamma menggunkanan metode Estimasi MLE dan WLS pada Pencemaran Sungai di Surabaya dengan Metode MLE 51
BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN 53
5.1 Kesimpulan 53
5.2 Saran 54
DAFTAR PUSTAKA 55
LAMPIRAN 59

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Titik Observasi Sungai Surabaya 22
Tabel 3.2 Variabel Penelitian 23
Tabel 3.3 Struktur Data 24
Tabel 4.1 Pembagian Kualitas Air Sungai di Surabaya 41
Tabel 4.2 Analisis Desktiptif Variabel 42
Tabel 4.3 Uji Distribusi Data Variabel Respon 43
Tabel 4.4 Nilai VIF Variabel Prediktor 44
Tabel 4.5 Estimasi Parameter Regresi Gamma dengan Estimasi MLE 45
Tabel 4.6 Hasil Pengujian Serentak Model Regresi Gamma dengan MLE 46
Tabel 4.7 Pengujian Parsial pada Model Regresi Gamma 47
Tabel 4.8 Estimasi Parameter Regresi Gamma dengan WLS 48
Tabel 4.9 Hasil Pengujian Serentak Model Regresi Gamma denganWLS 49
Tabel 4.10 Pengujian Parsial pada Model Regresi Gamma denganWLS 50
Tabel 4.11 Nilai AIC 52

Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Plot Distribusi Gamma 8
Gambar 3.1 Lokasi Pemantauan air sungai tahun 2013 21
Gambar 3.2 Diagram Alur Metode Analisis Data 28
Gambar 4.1 Pembagian Kualitas Air Sungai di Surabaya 42
Gambar 4.2 Histogram-Gamma Variabel BOD 44

Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Penelitian 59

Lampiran 2. Estimasi Parameter Regresi Gamma 63

Lampiran 3. Estimasi Parameter di bawah H_0 Regresi Gamma 74

Lampitan 4. Uji Distribusi pada data COD 76

Lampiran 5. Syntax Regresi Gamma dengan Program Matlab (MLE) 77

Lampiran 6. Syntax Regresi Gamma di bawah H_0 Program Matlab (MLE) 79

Lampiran 7. Syntax Uji Serentak Regresi Gamma Program Matlab (MLE) 80

Lampiran 8. Syntax Uji Parsial Regresi Gamma Program Matlab (MLE) 81

Lampiran 9. Syntax Regresi Gamma dengan Program Matlab (WLS) 83

Halaman ini sengaja dikosongkan

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya kepada penulis, serta sholawat kepada Nabi Muhammad SAW sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis dengan judul "Estimasi Parameter dan Pengujian Hipotesis pada Model Regresi Gamma (Studi Kasus Pemodelan Pencemaran Air Sungai di Kota Surabaya)".

Keberhasilan dalam penyelesaian Tesis ini tidak lepas dari bantuan, arahan, bimbingan, serta dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis tidak lupa menyampaikan ucapan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Allah SWT atas berkat dan rahmatnya penulis dapat menyelesaikan tesis ini.
2. Ibu dan Alm. Ayah tercinta, Sukria Lubis dan Alm. Fahruddin Nasution atas segala doa dan dukungan yang selalu diberikan selama ini.
3. Bapak Dr.Purhadi, M.Sc dan Bapak Dr. Sutikno, M.Si selaku selaku dosen pembimbing dan Co-pembimbing Tesis dan sekaligus dosen wali yang telah sabar memberikan pengarahan, saran, dan semangat kepada penulis untuk menyelesaikan Tesis ini.
4. Ibu Dr. Ismaini Zain, M.Si dan Bapak Dr. Bambang Widjanarko Otok, M.Si selaku dosen penguji dan telah banyak memberikan arahan dan masukan untuk penulisan tesis ini.
5. Pimpinan Dikti dan Universitas Graha Nusantara sebagai instansi memberikan beasiswa BPPDN yang telah mendukung penulis untuk menyelesaikan studi Magister di Statistika ITS.
6. Bapak Dr. Suhartono, M.Sc selaku Ketua Jurusan dan Ketua Program Studi Pasca Sarjana Statistika-FMIPA ITS Surabaya.
7. Ka Masna, Abang Zulfahri dan Agung yang telah mendoakan dan memberikan semangat motivasi untuk menyelesaikan tesis ini.

8. Teman-teman kos R6, Bu Rahma yang selalu memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis dan Thanks to Rismal, Amalya dan Ka Helga teman seperjuangan yang selalu memberikan semangat dan motivasi kepada penulis.
9. Teman- teman seperjuangan beasiswa 3T-Prasaintek 2013 dan BPPDN 2014 (Ka Joice, Ka Maya, Ka Ria, Nadya, Ingka, Endah, Bang Boby) terima kasih kebersamaannya selama 3 tahun ini.
10. Teman-teman dari PNR Sumatera Utara yang memberikan semangat dan motivasi kepada penulis.
11. Teman-teman Magister Statistika 2014, terima kasih untuk kebersamaannya menjalani perkuliahan dan berbagi ilmu selama ini.
12. Serta semua pihak yang turut berjasa dan tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penyusunan Tesis ini masih jauh dari kesempurnaan, kritik maupun saran yang sifatnya membangun sangat diharapkan sebagai masukan dalam penelitian selanjutnya. Semoga penelitian ini bermanfaat bagi pembaca.

Surabaya, 2 Februari 2016

Penulis

ESTIMASI PARAMETER DAN PENGUJIAN HIPOTESIS PADA MODEL REGRESI GAMMA

(Studi Kasus : Pemodelan Pencemaran Air Sungai di Kota Surabaya)

Nama mahasiswa : Alvi Sahrin Nasution

NRP : 1413 201 021

Pembimbing : Dr. Purhadi, M.Sc.

Co-Pembimbing : Dr. Sutikno, M.Si.

ABSTRAK

Analisis regresi merupakan metode statistik yang berguna untuk memodelkan hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor. Model regresi pada umumnya dibangun berdasarkan asumsi residualnya Normal, tapi secara empirik asumsi sering terlanggar. Dalam kasus pencemaran sungai Surabaya, tingginya nilai *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) di sungai Surabaya berdasarkan laporan Badan Lingkungan Hidup Surabaya Tahun 2013 membuat pola data mengikuti distribusi Gamma. Penelitian ini menentukan estimasi parameter dan pengujian hipotesis dari model regresi Gamma menggunakan Maximum Likelihood Estimation (MLE) dan Weighted Least Square (WLS). Estimator yang diperoleh pada model regresi Gamma ini adalah vektor g gradien dengan variabel k yaitu $g(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}}$. Karena hasil yang diperoleh tidak close form, maka untuk menentukan estimatornya harus menggunakan metode iterasi. Metode iterasi yang digunakan adalah metode iterasi Newton-Raphson sehingga memerlukan turunan pertama dan turunan kedua terhadap parameter untuk membentuk matriks Hessian. Sementara dalam pengujian hipotesis menggunakan Likelihood Ratio Test (LRT) digunakan adalah uji serentak dan uji parsial dengan uji statistik distribusi Chi-square. Pada pengujian hipotesis parsial metode MLE dan WLS menunjukkan variabel prediktor yang berpengaruh terhadap variabel respon kecepatan air sungai. Sedangkan untuk pemilihan model berdasarkan nilai AIC diperoleh adalah metode estimasi WLS.

Kata kunci: *Biochemical Oxygen Demand*, Regresi Gamma, *Maximum Likelihood Estimation, Weighted Least Square*, *Newton Raphson*.

halaman ini sengaja dikosongkan

PARAMETER ESTIMATION AND HYPOTHESES TESTING ON GAMMA REGRESSION MODELS

(Study Case : Modeling of Water Pollution River in the city of Surabaya)

Name	: Alvi Sahrin Nasution
Student ID	: 1314 201 021
Supervisor	: Dr. Purhadi, M.Sc.
Co-Supervisor	: Dr. Sutikno, M.Si.

ABSTRACT

Regression analysis is a statistical method that is useful to model the relationship between the response variable and the predictor variable. Regression models are built on the assumption residual Normal, but by empirical assumptions are often violated. In the case of river pollution Surabaya, the high value of Biochemical Oxygen Demand (BOD) in the river Surabaya based on the report of the Environment Agency in Surabaya in 2013 to make the data patterns following the Gamma distribution. This study determines the parameter estimation and hypothesis testing of Gamma regression model using Maximum Likelihood Estimation (MLE) and Weighted Least Square (WLS). Estimator obtained in Gamma regression model is the gradient vector g k variables, namely $g(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}}$. Due to the results obtained do not close the form, then to determine estimatornya should use iteration method. Iteration method used is the Newton-Raphson iteration method that requires the first derivative and the second derivative of the parameters to form the Hessian matrix. While in hypothesis testing provided by Likelihood Ratio Test (LRT) used simultaneously test and partial test with statistical test Chi-square distribution. In the partial hypothesis testing methods MLE and WLS show predictor variables that influence the response variable speed river water. As for the model selection is based on the value of AIC acquired WLS estimation method.

Keywords: *Biochemical Oxygen Demand, Gamma Regression, Maximum Likelihood, Weighted Least Square, Newton Raphson*.

halaman ini sengaja dikosongkan

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Fungsi Gamma pertama kali diperkenalkan oleh ahli matematika berkebangsaaan Swiss Leonhard Euler (1707-1783) yang bertujuan untuk mengeneralisasi faktorial pada bilangan non bulat. Tidak selamanya distribusi normal dapat digunakan untuk memecahkan masalah teknik dan sains contohnya dalam teori reliabilitas (keandalan) dan teori antrian, kurang tepat bila digunakan pendekatan dengan distribusi Normal, distribusi Gamma lebih tepat menjadi solusinya pada penelitian ini. Waktu tunggu variabel acak sampai saat penggunaan waktu sampai pada saat kegagalan komponen dalam suatu sistem yang sering dimodelkan dalam proses poisson (Walpole & Myers, 1995).

Analisis regresi adalah metode statistik yang berguna untuk memodelkan hubungan diantara variabel respon dan prediktor. Analisis regresi berguna untuk menelusuri pola hubungan yang modelnya bersifat tidak pasti, sehingga dalam penerapannya lebih bersifat eksploratif. Analisis terhadap distribusi data adalah bidang analisis yang paling penting dalam statistika, terbatasnya jumlah data dalam analisis dan pemodelan data statistika membuat asumsi kenormalan tidak tepat digunakan. Secara analitik asumsi non-normalitas sering dihadapi dan sulit untuk memilih representasi distribusi yang mampu mewakili bentuk standar yang tepat dan memenuhi kaidah yang diharuskan dalam analisis (Gujarati, 2004).

Model regresi pada umumnya dibangun berdasarkan asumsi mengikuti distribusi Normal, namun pada praktiknya secara empirik, asumsi ini tidak selalu tepat karena mungkin saja distribusi data bersifat asimetris dan bahkan bisa juga lebih tebal atau berekor lebih tipis dari distribusi normal. Ada beberapa distribusi data yang mampu menangkap pola asimetris dan ketebalan pada ekor salah satu datanya adalah distribusi Gamma. Analisis klasik terutama dengan inferensi statistiknya terhadap parameter model tidak akan memberikan hasil yang lebih baik, oleh sebab itu distribusi Gamma dirancang untuk mengatasi pola data yang asimetri karena distribusi ini didesain sebagai distribusi yang fleksibel dan

adaptif, dengan demikian pendekatan yang lebih efisien dan tidak memerlukan penormalan data dapat diperoleh (Williams, 1959).

Pada kasus pencemaran sungai Surabaya, salah satu indikator pencemaran adalah *Biochemical Oxygen Demand* (BOD). Peneliti menggunakan BOD sebagai variabel respon karena kandungan BOD di sungai Surabaya melebihi ambang batas yang sudah ditentukan oleh Badan Lingkungan Hidup kota Surabaya. Dan variabel prediktornya menggunakan lebar sungai, kedalaman sungai, kecepatan sungai dan debit sungai (Peraturan Daerah Kota Surabaya No.2 Tahun 2014).

Penelitian ini menggunakan data pencemaran sungai kota Surabaya tahun 2013. Indikator pencemarnya menggunakan *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) karena kadar *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) di sungai Surabaya tinggi. Penelitian ini diterapkan di kota Surabaya dikarenakan kota Surabaya dilalui banyak anak sungai dengan tingkat pencemaran dalam kategori yang cukup tinggi. Sudah tidak ada air sungai yang masuk kategori mutu air kelas 1 atau sebagai air baku air minum. Hanya ada 3 titik lokasi yang memenuhi baku mutu air minum yaitu saluran darmo di pompa air darmo, saluran kenari di pompa air kenari dan kali pegirian di jalan lintas undaan dan titik lokasi yang lainnya tidak sesuai dengan baku mutu air (Badan Lingkungan Hidup, 2013).

Pertambahan jumlah penduduk yang semakin meningkat dari tahun ke tahun dengan lahan luas yang tetap, akan mengakibatkan tekanan terhadap lingkungan semakin berat. Berbagai aktivitas manusia dalam memenuhi kebutuhan hidup yang berasal dari kegiatan industri, rumah tangga, dan pertanian juga akan menghasilkan limbah yang memberi sumbangan pada penurunan kualitas air sungai (Suriawiria, 2003).

Sungai sebagai sumber air, sangat penting fungsinya dalam pemenuhan kebutuhan masyarakat, sebagai sarana penunjang utama dalam meningkatkan pembangunan nasional dan transportasi yang relatif aman untuk menghubungkan wilayah satu dengan lainnya (Agustiningsih, 2012). Hal ini dapat mengakibatkan terjadinya pencemaran sungai, yang berdampak pada pengurangan manfaat sungai tersebut. Pencemaran air dapat terjadi akibat adanya unsur atau zat lain yang masuk ke dalam air, sehingga menyebabkan kualitas air menjadi turun (Salmin, 2005).

Permasalahan sungai perlu mendapat perhatian karena Kota Surabaya dilalui oleh aliran sungai Brantas yang sangat penting bagi kelangsungan hidup kota Surabaya. Sungai mempunyai berbagai fungsi yang sangat vital, yaitu sebagai penyedia bahan baku kebutuhan air minum, fungsi rekreasi, fungsi komunikasi, dan konservasi (ekosistem air sungai). Aliran air permukaan di Kota Surabaya dimulai dari Dam Mlirip (Kabupaten Mojokerto), kemudian melewati Sidoarjo, Gresik, akhirnya sampai di Jam Jagir Wonokromo (Surabaya). Di Dam Jagir, aliran air terpecah menjadi dua, yaitu Kalimas yang mengalir ke utara sampai pelabuhan dan Kali Wonokromo yang mengarah ke timur sampai Selat Madura (Badan Lingkungan Hidup Surabaya, 2010).

Salah satu cara untuk menilai seberapa besar pencemaran air melihat kandungan oksigen yang terlarut di dalam air. Pada umumnya air yang telah tercemar kandungan oksigennya sangat rendah. Hal ini dikarenakan oksigen yang terlarut di dalam air diserap oleh mikroorganisme untuk memecah bahan buangan organik sehingga menjadi bahan yang mudah menguap dan berbau busuk. *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) dan *Chemical Oxygen Demand* (COD) menunjukkan jumlah oksigen terlarut yang dbutuhkan oleh organisme hidup untuk menguraikan atau mengoksidasi bahan-bahan buangan di dalam air. BOD dan COD digunakan sebagai parameter pencemaran air dan baku mutu air limbah (Kristanto, 2002). Semakin besar angka BOD dan COD menunjukkan bahwa tingkat pengotoran air limbah semakin besar (Environmentl Protection Agency, 2006).

Terdapat keterkaitan antara distribusi gamma dengan kadar *Biochemical Oxygen Demand* (BOD), dikarenankan distribusi gamma berhubungan dengan *reliability* (keandalan) dan *failure* (kegagalan). Pada penelitian ini, defenisi dari failure (kegagalan) yaitu apabila kadar BOD di sungai telah melebihi ambang batas baku mutu air sungai untuk parameter BOD, atau dengan kata lain sungai yang diteliti tersebut sudah tercemar. Batas air yang hampir murni (air kelas I) untuk parameter BOD mempunyai nilai BOD 1 part per million (ppm), tetapi air yang nilai BOD nya 3 part per million (ppm) masih bisa dipakai tapi tidak layak dikonsumsi sedangkan air yang nilai BOD nya 5 part per million (ppm) atau lebih tidak layak lagi dipakai karena tingkat pencemarannya sudah tinggi. Oleh karena

itu air tersebut harus mengalami penanganan atau pengenceran yang tinggi sekali pada saat pembuangan ke badan air di sekitar seperti sungai dan laut.

Beberapa penelitian yang mengkaji tentang regresi Gamma. Akram (1986) meneliti tentang model regresi Gamma dengan menggunakan dua metode penaksiran yaitu *Maximum Likelihood Estimation* dan *Weighted Least Square*. Data yang digunakan pada penelitian ini berupa data simulasi. Dan diperoleh pada penelitian tersebut dengan menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* lebih tepat metode pengujiannya untuk nilai kecil dari bentuk parameternya tetapi untuk bentuk parameter yang lebih dari lima tidak memberikan ketepatan yang berbeda antara *Maximum Likelihood Estimation* dan *Weighted Least Square*. Perbedaan yang mendasar antara penelitian (Akram, 1986) dengan penelitian ini adalah terletak pada metode iterasi. Pada penelitian sebelumnya menggunakan metode iterasi Monte Carlo sedangkan pada penelitian ini akan dilakukan dengan metode Newton Raphson.

Schhutz, 2013 meneliti tentang *Generalized Gamma Distribution* (GGD) yaitu dalam kasus pengembangan pengklasifikasian tekstur gambar dan memodelkan koefisien dari panjang gelombang yang diperoleh dari algoritma untuk menghitung centroid dari beberapa parameter. Penelitian sebelumnya tentang parameter kualitas air (BOD, COD) telah banyak dilakukan Chang (2008) meneliti tentang spatial pattern kualitas air pada 118 titaktoik lokasi dicekungan sungai Han, Korea Selatan untuk 8 parameter pemeriksaan yaitu temperature, *PH, dissolved oxygen* (DO), *biochemical oxygen demand* (BOD), *chemical oxygen demand* (COD), *suspended sediment* (SS), total *phosphorus* (TP) dan *total nitrogen* (TN). Penelitian tersebut disimpulkan bahwa model regresi spasial menunjukkan hasil yang lebih baik apabila dibandingkan dengan model OLS dalam hal valiasi kualitas air. Faktor topografi dan faktor tanah menunjukkan variasi dalam PH, COD, BOD, dan SS.

Burr Johnson dan Kotz, 1970 meneliti tentang regresi Burr dalam penelitian kualitas air (COD) menggunakan estimasi parameter regresi Burr dengan metode Maximum Likelihood dan hasil penelitiannya menyatakan bahwa variabel prediktor yang berpengaruh terhadap COD adalah jumlah ammonia, jumlah nitrit, jumlah nitrat, dan jumlah phosfat, sedangkan variabel lebar sungai,

kedalaman sungai, kecepatan sungai dan debit air tidak berpengaruh secara signifikan terhadap variabel respon. Jenq, Yin-Chun, 1987 meneliti tentang estimasi menggunakan metode Weighted Least Square dengan menggunakan data simulasi.

1.2 Permasalahan Penelitian

Berdasarkan latar belakang penelitian, maka rumusan masalah penelitian ini adalah

1. Bagaimana bentuk penaksir parameter model Regresi Gamma?
2. Bagaimana bentuk statistik uji pada pengujian hipotesis model Regresi Gamma?
3. Faktor-faktor apa saja yang berpengaruh pada *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) di Sungai Surabaya.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah

1. Menentukan penaksir parameter model Regresi Gamma.
2. Menentukan statistik uji untuk pengujian parameter pada model Regresi Gamma.
3. Mendapatkan faktor-faktor yang berpengaruh pada *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) di sungai Surabaya berdasarkan model Regresi Gamma.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini adalah

1. Menerapkan metode statistik khusus model Regresi Gamma.
2. Mengetahui penggunaan model Regresi Gamma sesuai dengan data yang telah diperoleh yaitu mengetahui faktor-faktor yang berpengaruh pada Biochemical Oxygen Demand di Sungai Surabaya.
3. Sebagai masukan bagi pemerintah dalam menerapkan kebijakan dalam mengatasi pencemaran sungai di Kota Surabaya.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini difokuskan hanya terbatas pada pembahasan memperoleh penaksir parameter dan statistik uji dengan menggunakan metode estimasi maksimum likelihood dan metode estimasi weighted least square pada model Regresi Gamma.

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Gamma

Distribusi Gamma sering dipakai pada model probabilitas untuk waktu tunggu, distribusi ini aplikasinya ditemukan pada beberapa contoh kasus dalam kehidupan sehari-hari misalkan pemodelan curah hujan pada dua alat pengukur di dekatnya (Izawa, 1965), ketergantungan antara debit sungai tahunan dan curah hujan pada suatu lokasi (Clarke, 1980), data yang meneliti tentang angin topan Smith (1981), ketergantungan curah hujan dengan kemarau (Mathai & Moschopoulos, 1991).

Distribusi Gamma terbagi menjadi satu, dua dan tiga parameter. Fungsi kepadatan probabilitas (FKP) dari distribusi Gamma satu parameter adalah

$$f(y \mid \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y}; \alpha > 0;\ 0 < y < \infty \tag{2.1}$$

Bentuk dasar karakteristik distribusi Gamma dan Beta (McCullaght & Nelder, 1989) fungsi kepadatan probabilitas (FKP) dari distribusi Gamma dua parameter adalah

$$f(y \mid \alpha, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} \mathrm{y}^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\frac{y}{\theta}}\ ;\ \alpha, \theta > 0;\ 0 < \mathrm{y} < \infty \tag{2.2}$$

Fungsi kepadatan probabilitas (FKP) dari distribusi Gamma tiga parameter adalah

$$f(y \mid \alpha, \theta, \gamma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}} (\mathrm{y}\text{-}\gamma)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-(y-\gamma)/\theta}\ ;\ \alpha, \theta > 0;\ \gamma < \mathrm{y};\ \gamma < \mathrm{y} < \infty \tag{2.3}$$

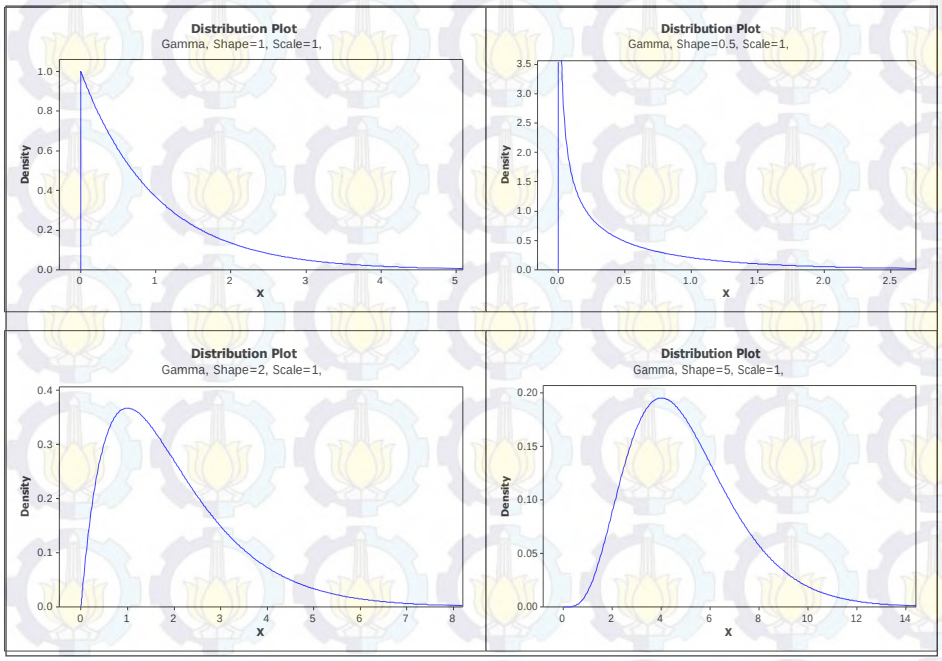
Dimana α merupakan parameter bentuk, θ merupakan parameter skala dan γ merupakan parameter lokasi. Terlepas dari adanya distribusi Gamma dengan tiga parameter, pada umumnya yang digunakan adalah distribusi Gamma dua parameter.

Teorema 2.1

Bila Y berdistribusi Gamma (α,θ) maka rataan dan variansi adalah

$\mu = E(Y) = \alpha\theta$ dan $\sigma^2 = \alpha\theta^2$

Untuk melihat plot dari distribusi Gamma dengan beberapa kondisi nilai α dan θ yang berbeda ditunjukkan pada gambar 2.1.



Gambar 2.1 Plot Distribusi Gamma dengan beberapa Kondisi nilai α dan θ

Gambar 2.1 menunjukkan bentuk dari distribusi Gamma untuk α = 0,5; 1,0; 2,0; dan 5,0 dengan μ = 1 dengan konstanta. Dari gambar ditunjukkan bahwa kepadatannya (densities) semua menceng ke positif.

2.2 Regresi Gamma

Regresi Gamma adalah salah satu regresi yang dapat menggambarkan hubungan antara variabel Y sebagai variabel respon berdistribusi Gamma dengan variabel X_1, X_2, …, X_k. sebagai variabel prediktor (McCullagh, 1983).

2.2.1 Model Regresi Gamma

Model regresi Gamma merupakan model regresi yang variabel respon Y berdistribusi Gamma dengan variabel x_1, x_2, … , x_k. hanya satu. Bentuk matriks dari variabel respon, variabel prediktor dan parameter regresi Gamma adalah

$$\mathbf{y}=\left[y_1,y_2,\cdots,y_k\right]^T_{(nx1)};\mathbf{x}=\left[x_1,x_2,\cdots,x_k\right]^T_{(nx1)};\boldsymbol{\beta}=\left[\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_k\right]^T_{(nx1)}$$

$\mu = E(Y) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k)$ dan berdasarkan Teorema 2.1 diperoleh

$\mu = \alpha\theta$, sehingga

$$\alpha\theta = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k)$$

$$\alpha\theta = \exp(\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})$$

$$\theta = \frac{\exp(\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}$$

Jika $\theta = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k)/\alpha = \exp(\boldsymbol{x^T\beta})/\alpha$

Maka fungsi kepadatan probabilitas dari model regresi Gamma adalah

$$f(y_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)^{\alpha}} y_i^{\alpha-1} \exp\left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)\right) \tag{2.4}$$

2.2.2 Estimasi Parameter Model Regresi Gamma

Estimasi parameter model regresi gamma menggunakan metode estimasi maksimum likelihood (MLE) dan estimasi weighted least square (WLS). Kedua metode ini akan digunakan dalam penelitian ini.

a. Estimasi Maksimum Likelihood

Fungsi *likelihood* dari n variabel acak $y_1, y_2, \ldots, y_n$ didefenisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel random. Fungsi kepadatan bersama $f_{y_1}, \ldots, f_{y_n}(y_1, \ldots, y_n; \theta)$ yang mempertimbangkan fungsi dari θ. Jika $y_1, \ldots, y_n$ adalah sampel random dari fungsi kepadatan $f(y;\theta)$, maka fungsi likelihoodnya adalah $f(y_1;\theta)f(y_2;\theta) \ldots f(y_n;\theta)$ (Mood, Grabill and Boes, 1986).

Estimasi parameter model regresi Gamma menggunakan *Maximum Likelihood Estimation (*MLE) yaitu dengan memaksimalkan fungsi *likelihood* (Casella & Berger, 2002). *Maximum Likelihood Estimation* digunakan apabila distribusi data diketahui. Berdasarkan persamaan (2.4) diperoleh fungsi *Likelihood* sebagai berikut :

$$L(\boldsymbol{\beta} \mid \alpha) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)^{\alpha}} y_i^{\alpha-1} \exp\left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right) \right) \right]$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^{n} \left(\frac{\exp \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}}{\alpha^{n}} \right)^{-\alpha} \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha-1} \exp \sum_{i=1}^{n} \left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right) \right) \right] \quad (2.5)$$

Dan fungsi logaritma natural *likelihood* pada persamaan (2.5) sebagai berikut :

$$\ln L(\alpha, \theta, \beta \mid y_1, y_2, \cdots, y_n) =$$

$$\ln \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^{n} \left(\frac{\exp \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}}{\alpha^{n}} \right)^{-\alpha} \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha-1} \exp \sum_{i=1}^{n} \left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right) \right) \right] \quad (2.6)$$

Parameter Regresi Gamma dapat diperoleh dengan mencari turunan parsial pertama dan kedua fungsi ln likelihood (2.6) terhadapa parameter β setelah mendapatkan penurunan pertama untuk setiap masing-masing parameter, lalu disamakan dengan nol dan dicari solusinya. Namun didapatkan hasil implisit untuk setiap parameternya dikarenakan masih terdapat parameter di dalam persamaan terbentuk. Untuk mengatasi hal tersebut maka digunakan iterasi Newton Raphson (Cameron & Triverdi, 2005).

b. Estimasi Weighted Least Square (WLS)

Estimasi Weighted Least Square (WLS) adalah mengestimasi suatu garis regresi dengan jalan meminimalkan jumlah dari kuadrat kesalahan setiap observasi terhadap garis tersebut dengan cara membagi persamaan regresi OLS biasa (Montgomery, 2012). Perbedaaan dari estimasi WLS dengan OLS terletak pada variansnya, yaitu cov(y) $\neq \sigma^2 I$ dengan model regresi linear sederhana (Rencher, 2008).

$$y = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \text{ , } E(y) = \mathbf{X}\beta \text{ , } cov(y) = \sigma^2 I$$

Dari persamamaan regresi linear, diperoleh estimasi parameter dari $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ dengan meminimumkan Jumlah Kuadrat Sisa (SSE) adalah sebagai berikut .

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad (2.7)$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} [\, y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik})]^2$$

Sedangkan untuk estimasi WLS perbedaannya dengan estimasi OLS adalah Jumlah Kuadrat Sisa (WSSE) ditambahkan bobot sehingga

$$WSSE = \sum_{i=1}^{n} w_i (y_i - \hat{y}_i)^2 \qquad (2.8)$$

$$WSSE = \sum_{i=1}^{n} w_i [\, y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik})]^2$$

Sebuah data pengamatan bila melibatkan informasi koordinat lokasi pengambilan data di samping data mengenai variabel-variabel yang sedang diamati maka termasuk dalam kategori data spasial. Analisis terhadap data spasial memerlukan perhatian lebih dibandingkan dengan analisis data non-spasial, khususnya ketika menggunakan regresi. Hal tersebut dikarenakan data spasial muncul karena kondisi data di lokasi yang satu dengan lokasi yang lain tidak sama, baik dari segi geografis, keadaan sosial budaya maupun hal-hal lain yang melatarbelakanginya.Oleh karena itu dalam analisis data spasial faktor geografis merupakan faktor penting dalam penentuan pembobot yang digunakan (LeSage, J.P. 1997).

Estimasi WLS adalah estimasi yang menghasilkan persamaan berikut (Akram, 1986).

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{w}} = (\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{Z} \qquad (2.9)$$

$$Z_i = ln\, Y_i + ln\, r_i + \psi(r_i), i = 1, \dots, k$$

$\widehat{\beta}_w$ = koefisien regresi w, tidak diketahui

$Z^T = (Z_1, \dots, Z_g)$

$D_w = \mathrm{diag}((\psi^{(1)}(r_1)), \dots, (\psi^{(g)}(r_g)))$

r_g = parameter bentuk dari distribusi Y_i

ψ = fungsi gamma

Estimasi WLS adalah fungsi linear dari variabel acak log gamma $\{Z_i\}$ dan karena momennya diketahui untuk semua nilai dari $\{r_i\}$, maka matriks kovariannya adalah

$$Cov(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{w}}) = V^{-1} \tag{2.10}$$

dengan :

$V = v_{jl}$

$$v_{jl} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{il} / \psi^{(1)} r_i$$

Dapat disimpulkan bahwa estimasi WLS untuk memperoleh **β** dari taksiran $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{w}}$ dengan berdistribusi multivariate normal dan rata-rata adalah μ sedangkan matriks kovarian adalah V^{-1}.

2.3 Pengujian Distribusi

Pengujian distribusi pada variabel respon menggunakan *Anderson Darling*. *Anderson Darling* merupakan salah satu metode statistik yang digunakan dalam pengujian kesesuaian distribusi. Menurut Stephen (1974), uji Anderson Darling digunakan sebagai uji kenormalan atau goodness of fit untuk peubah kuantitatif dan bisa digunakan untuk menguji kenormalan berbagai macam sebaran data, yaitu sebaran data normal, lognormal, gamma, weibul, dan sebaran logistic.Anderson Darling merupakan modifikasi dari Kolmogorov Smirnov Test (K-S Test), yaitu K-S Test yang telah terboboti. Kelebihan dari Anderson Darling

Test adalah uji lebih sensitive daripada K-S Test sehingga pada penelitian ini uji tersebut yang digunakan.

Adapun hipotesis yang digunakan yaitu:

H_0 : F(y) = F^o(y) (variabel respon sesuai dengan distribusi dugaan).

H_1 : F(y) = F^o(y) (variabel respon tidak sesuai dengan distribusi dugaan).

Statistik uji : (Shin, Jung, Jeong, & Heo, 2011)

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)(\ln F^0_{(y_i)} + \ln(1 - F^0_{(y+1-i)}))$$

Dimana :

$F(y) =$ Fungsi distributif kumulatif dari distribusi dugaan

$n =$ ukuran sampel

Kriteria penolakan : Tolak H_0 jika nilai $A^2_{hit} > A^2_{\alpha}$

2.4 Pengujian Multikolineritas

Salah satu syarat yang harus dipenuhi dalam regresi dengan beberapa variabel prediktor adalah tidak adanya korelasi antara satu variabel prediktor dengan variabel prediktor lainnya atau dengan kata lain tidak terjadi multikolineritas . Multikolineritas adalah kondisi terdapatnya hubungan linear atau korelasi yang tinggi antara masing-masing variabel prediktor dalam model regresi (Ghozali, Imam. 2005). Adanya korelasi dalam model regresi menyebabkan taksiran parameter regresi yang dihasilkan akan memiliki error yang sangat besar.

Korelasi adalah tingkat keeretan hubungan dua variabel atau lebih yang digambarkan oleh besarnya koefisien korelasi. Koefisien korelasi adalah koefisien yang menggambarkan tingkat keeratan hubungan antar dua variabel atau lebih. Besaran dari koefisien korelasi tidak menggambarkan hubungan sebab akibat

antar dua variabel atau lebih tetapi menggambarkan keterkaitan linear antar variabel (Mattjik & Sumertajaya, 2000). Selain itu adanya kasus multikolineritas dapat dilihat menurut melalui *Variance Inflation Factor* (VIF) (Gujarati 2004) dirumuskan sebagai berikut:

$$VIF = \frac{1}{1 - R_j^2} \tag{2.11}$$

$R_j^2 = SSR / SST$ adalah koefisien determinasi antara x_j dengan variabel prediktor lainnya, VIF_j yang lebih besar dari 10 menunjukkan adanya kolinieritas antar variabel prediktor. Solusi untuk mengatasi adanya kasus tersebut adalah dengan mengeluarkan variabel prediktor yang tidak signifikan dan meregresikan kembali variabel-variabel prediktor yang signifikan.

2.5 Pencemaran Air

Pengertian pencemaran air dijelaskan di dalam Peraturan Pemerintah yang merupakan lanjutan dari pengertian pencemaran lingkungan hidup yang dijelaskan dalam undang-undang. Pencemaran lingkungan hidup adalah masuk atau dimasukkannya makhluk hidup, zat, energi, dan atau komponen lain ke dalam lingkungan hidup oleh kegiatan manusia sehingga melampaui baku mutu lingkungan hidup yang telah ditetapkan (Undang-Undang Republik Indonesia No.32, 2009). Pencemaran air adalah masuknya atau dimasukkannya makhluk hidup. Zat, energi dan atau komponen lain ke dalam air oleh kegiatan manusia, sehingga kualias air turun sampai ke tingkat tertentu yang menyebabkan air tidak dapatt berfungsi sesuai dengan peruntukannya (Peraturan Pemerintah Republik Indonesia No.82, 2001).

Regulasi yang menjadi dasar pemanfaatan kualitas air permukaan adalah menurut PP No.82 Tahun 2001 dan Peraturan Daerah Kota Surabaya No.2 Tahun 2004 tentang Pengelolaan Kualitas Air dan Pengendalian Pencemaran Air. Apabila persyaratan kualitas air tidak memenuhi peruntukan tertentu, maka air tidak dapat digunakan dan tidak mempunyai manfaat.Menurut Peraturan Daerah Kota Surabaya No.2 (2004), klasifikasi mutu air ditetapkan ke dalam empat kelas yaitu :

a. Kelas 1, yaitu air peruntukannya dapat digunakan untuk air baku air minum, dan atau peruntukan lain yang mensyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.
b. Kelas 2, yaitu air yang peruntukannya dapat digunakan dalam sarana/prasarana rekresi air, pembudidayaan ikan air tawar dan air payau, peternakan, air untuk mengairi pertamanan, dan/ atau peruntukan lain yang mensyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.
c. Kelas 3, yaitu air yang peruntukannya dapat digunakan untuk pembudidayaan ikan air tawar dan air payau, peternakan, air untuk mengairi pertamanan, dan/ atau peruntukan lain yang mensyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.
d. Kelas 4, yaitu air yang peruntukan yang digunakan untuk mengairi pertamanan dan/ atau peruntukan lain yang mensyaratkan mutu air yang sama dengan kegunaan tersebut.

Baku mutu air adalah ukuran batas atau kadar makhluk hidup, zat, energi, atau komponen yang ada atau harus ada dan atau unsur pencemar yang ditenggang

keberadaannya di dalam air. Baku mutu air limbah adalah batas atau kadar unsur pencemar atau jumlah unsur pencemar yang ditenggang keberadaannya dalam air limbah yang akan dibuang atau dilepas ke dalam sumber air dari suatu usaha atau kegiatan (Peraturan Pemerintah Republik Indonesia No.82, 2001).

2.6 *Biochemical Oxygen Demand* (BOD)

Biochemical Oxygen Demand (BOD) adalah banyaknya oksigen yang dibutuhkan oleh mikroorganisme untuk menguraikan bahan-bahan organik (zat pencemar) yang terdapat di dalam air secara biokimia. Penguraian bahan organik diartikan bahwa bahan organik ini digunakan oleh organisme sebagai bahan makanan dan energinya diperoleh dari proses oksidasi (PESCOD, 1973).

Parameter BOD merupakan salah satu parameter yang dilakukan dalam pemantauan parameter air, khususnya pencemaran bahan organik yang tidak terurai. Penentuan BOD sangat penting untuk menelusuri aliran pencemaran dari tingkat hulu ke muara. Sesungguhnya penentuan BOD merupakan suatu proses *bioassay* yang menyangkut pengukuran banyaknya oksigen yang digunakan oleh organisme selama organisme tersebut menguraikan bahan organik, pada kondisi hampir sama dengan kondisi yang ada di alam (Sawyer & Mc Carty, 1978).

BOD dapat diterima bila jumlah oksigen yang akan dihabiskan dalam waktu lima hari oleh organism pengurai aerobic dalam suatu volume limbah pada suhu 20°C. Hasilnya dinyatakan dengan ppm. Jadi BOD sebesar 200 ppm berarti bahwa 200 mg oksigen akan dihabiskan oleh sampel limbah sebanyak 1 liter dalam waktu 5 hari pada suhu 20°C (Kristanto, 2002).

Uji BOD mempunyai beberapa kelemahan, diantaranya :

a. Dalam uji BOD ikut terhitung oksigen yang dikonsumsi oleh bahan-bahan organik atau bahan-bahan tereduksi lainnya, yang disebut juga *Intermediate Oxygen Demand.*
b. Uji BOD membutuhkan waktu yang cukup lama, yaitu lima hari.
c. Uji BOD yang dilakukan selama lima hari masih belum dapat menunjukkan nilai total BOD, melainkan ± 68% dari total BOD.
d. Uji BOD tergantung dari adanya senyawa penghambat di dalam air tersebut misalnya germisida seperti klorin yang dapat menghambat pertumbuhan mikroorganisme yang dibutuhkan untuk merombak bahan organik, sehingga hasil uji BOD kurang teliti (Kristanto, 2002).

Air yang hampir murni mempunyai nilai BOD kira-kira 1 ppm, dan air yang mempunyi nilai BOD 3 ppm masih dianggap cukup murni, tetapi kemurnian air diragukan jika nilai BOD nya mencapai 5 ppm atau lebih. Bahan buangan industri pengolahan pangan seperti industry pengalengan, industry susu, industry gula dan sebagainya mempunyai nilai BOD bervariasi, yaitu mulai 100 sampai 10.000 ppm, oleh karena itu harus mengalami penanganan atau pengenceran yang tinggi sekali pada saat pembuangan ke badan air disekitarnya seperti sungai atau laut, yaitu untuk mencegah penurunan konsentrasi oksigen terlarut dengan cepat di dalam badan air tempat pembuangan bahan-bahan tersebut (Srikandi, 1992).

BOD dan COD digunakan untuk memonitor kapasitas *self purification* badan air atau dengan kata lain sebagai parameter pencemaran air dan baku mutu air limbah. *Self purification* adalah pemulihan oleh prose alami baik secara total

ataupun sebagian kembali ke kondisi awal sungai dari bahan asing secara kualitas maupun kuantitas menyebabkan perubahan karakteristik fisik, kimia, dan biologi yang terukur dari sungai. Pemeriksaan BOD diperlukan untuk menentukan mendesain sistem-sistem pengolahan biokimia bagi air yang tercemar tersebut (Status Lingkungan Hidup Daerah Kota Surabaya, 2013.)

2.7 Faktor yang Mempengaruhi Sungai

Bozem adalah kolam besar tempat menampung air, baik yang berasal dari air hujan maupun aliran sungai agar tidak banjir (Peraturan Daerah Kota Surabaya No.2 Tahun 2014).

Berikut merupakan variabel karakteristik sungai yang dapat mempengaruhi parameter kualitas air dalam menentukan tingkat pencemaran.

1. Debit sungai

Debit adalah jumlah aliran air melewati suatu penampang (sungai/ saluran /mata air) per satuan waktu. Satuan debit dinyatakan dalam meter kubik per detik (m^3/detik). Debit sungai yang rendah menyebabkan bahan-bahan terlarut (yang mengandung zat anorganik) tidak terurai dengan sempurna. Penumpukan zat anorganik terlihat dengan tingginya konsentrasi BOD (Agustira, Lubis, & Jamilah, 2013). Konsentrasi BOD yang tinggi dengan debit sungai yang rendah menyebabkan oksigen masuk ke dalam air berkurang (Hendrasarie & Cahyarani, 2012).

2. Lebar dan kedalam sungai

Lebar dan kedalaman sungai berpengaruh pada karakteristik fisik, kimia, dan biologi sungai. Sungai yang lebar dan dangkal akan mendapatkan cahaya

matahari lebih banyak yang menyebabkan suhu air meningkat sehingga jumlah oksigen terlarut dalam air berkurang.

3. Kecepatan air

Menurut Arianto (2011) adanya kecepatan aliran air yang berbeda akan menghasilan perubahan konsentrasi parameter BOD yang berbeda, Arianto melakukan penelitian pada 4 lokasi dan hasilnya terdapat variasi perubahan konsentrasi BOD yang terjadi akibat pengaruh perbedaan kecepatan di setiap titik-titik sampling.

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 3

METODE PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Data dalam penelitian ini menggunakan data sekunder yang diperoleh dari Badan Lingkungan Hidup Kota Surabaya pada periode tahun 2013. Pada penelitian ini unit observasi yang digunakan adalah 30 titik lokasi air badan sungai, dengan unit yang diteliti adalah sungai, saluran air, dan bozem yang ada di Surabaya. Adapun cara pengambilan sampel dilakukan pada tiap pertemuan anak sungai, dimana data yang diambil di asumsikan saling bebas antara sungai yang satu dengan sungai yang lain dan homogen di satu titik sungai pertemuannya. Data tersebut adalah jumlah kadar BOD dan faktor-faktor yang mempengaruhi sungai yang terdapat pada 30 titik lokasi Sungai Kota Surabaya. Selain itu, penelitian ini juga memperhatikan letak astronomis dari masing-masing titik pengamatan yaitu letak lintang dan letak bujur sebagai faktor pembobot geografisnya.

Sumber : BLH Kota Surabaya

Gambar 3.1 Lokasi Pemantauan air sungai tahun 2013

Adapun lokasi dari 30 titik sungai di Surabaya yaitu sebagai berikut.

Tabel 3.1 Titik Observasi Sungai Surabaya

No	Sungai	Titik Observasi
1	Kali Surabaya	Air badan air kali Surabaya di Kedurus
2	Kali Surabaya	Air badan air kali Surabaya di jembatan Wonokromo
3	Kalimas	Air badan air Kalimas di jembatan Ngagel
4	Kalimas	Air badan air Kalimas di jembatan Keputraan Selatan
5	Kalimas	Air badan air Kalimas di jembatan Kebon Rojo
6	Kali Jeblokan	Air badan air Kali Jeblokan di Petojo
7	Kali Jeblokan	Air badan air Kali Jeblokan di Kedung Cowek
8	Kali Pegirian	Air badan air Kali Pegirian di Jl. Undaan
9	Kali Pegirian	Air badan air Kali Pegirian di Jl. Pegirian
10	Kali Banyu Urip	Air badan air Kali Banyu Urip di jembatan Balongsari Tama
11	Kali Greges	Air badan air Kali Greges di jembatan Jl. Dupak
12	Kalidami	Air badan air Kalidami di jembatan Kali Dami
13	Kalibokor	Air badan air Kalibokor di jembatan Pucang
14	Kali Wonorejo	Air badan air Kali Wonorejo di Jembatan Kedung Baruk
15	Kali Kepiting	Air badan air Kali Kepiting di Jl. Sutorejo
16	Kali Kebon Agung	Air badan air Kali Kebon Agung di Rungkut Industri
17	Kali Wonokromo	Air badan air Kali Wonokromo di jembatan Merr II
18	Saluran Dinoyo	Air badan air saluran Dinoyo di pompa air Dinoyo
19	Saluran Darmo	Air badan air saluran Darmo di pompa air Darmo Kali
20	Saluran Kenari	Air badan air saluran Kenari di pompa air Kenari
21	Bozem Kalidami	Air badan air Bozem Kali Dami
22	Bozem Wonorejo	Air badan air Bozem Wonorejo
23	Bozem Monokrembangan	Air badan air Bozem Monokrembangan
24	Bozem Kedurus	Air badan air Bozem Kedurus
25	Kali Makmur	Air badan air Kali Makmur di Lidah Kulon Jl. Bangkinang
26	Kali Banyu Urip	Air badan air Kali Banyu Urip di pompa air Gunungsari
27	Saluran Margomulyo	Air badan air saluran Margomulyo di Jl. Kalianak
28	Kali Krembangan	Air badan air Kali Krembangan di jembatan Jl Dumai Indstri
29	Saluran Tambak Wedi	Air badan air saluran Tambak Wedi di pompa air Tambak Wedi
30	Saluran Tambak Wedi	Air badan air saluran Tambak Wedi di Jl. Kenjeran (Makam WR. Supratman)

Sumber : BLH Kota Surabaya

3.2 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan pada penelitian ini terbagi menjadi variabel respon dan beberapa varibel prediktor. Variabel respon dan variabel prediktor disajikan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Variabel Penelitian

Variabel Respon		**Satuan**
Y	Biochemical Oxigen Demand (BOD)	mg/l
Variabel Prediktor		**Satuan**
X_1	Lebar sungai	Meter
X_2	Kedalaman sungai	Meter
X_3	Kecepatan sungai	m/detik
X_4	Debit sungai	m^3 detik

Defenisi operasional variabel :

1. Lebar dan kedalaman sungai

Lebar dan kedalaman sungai berpengaruh pada karakteristik fisik, kimia, dan biologi sungai. Sungai yang lebar dan dangkal akan mendapatkan cahaya matahari lebih banyak yang menyebabkan suhu air meningkat sehingga jumlah oksigen terlarut dalam air berkurang.

2. Debit sungai

Debit sungai yang rendah menyebabkan bahan-bahan terlarut (yang mengandung zat anorganik) tidak terurai dengan sempurna. Penumpukan zat anorganik terlihat dengan tingginya konsentrasi BOD (Agustira, 2012). Konsentrasi BOD yang tinggi dengan debit sungai yang rendah menyebabkan oksigen yang masuk ke dalam air berkurang (Hendrasarie & Cahyarani, 2012).

3. Kecepatan Air

Adanya kecepatan aliran air yang berbeda akan menghasilkan perubahan konsentrasi pada COD dan BOD yang berbeda. Arianto (2011) melakukan penelitan pada empat lokasi dan hasilnya terdapat variasi perubahan konsentrasi COD dan BOD yang terjadi akibat pengaruh perbedaan kecepatan di setiap titik-titik sampling. Struktur data berdasarkan variabel respon yaitu kadar BOD dengan empat variabel prediktor di Sungai Surabaya adalah sebagai berikut.

Tabel 3.3 Struktur Data

Titik lokasi	Respon	Prediktor			
(i)	y	x_1	x_2	x_3	x_4
1	y_1	$x_{1.1}$	$x_{2.1}$	$x_{3.1}$	$x_{4.1}$
2	y_2	$x_{1.2}$	$x_{2.2}$	$x_{3.2}$	$x_{4.2}$
3	y_3	$x_{1.3}$	$x_{2.3}$	$x_{3.3}$	$x_{4.3}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30	y_{30}	$x_{1.30}$	$x_{2.30}$	$x_{3.30}$	$x_{4.30}$

3.3 Metode Analisis Data

Dalam penelitian ini langkah-langkah yang dilakukan untuk memodelkan regresi gamma adalah sebagai berikut :

1. Memperoleh estimasi parameter untuk model regresi Gamma dengan metode MLE
   a. Menentukan model Gamma Regression

$$f(\alpha,\theta,|\,y_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)^{\alpha}} y_i^{\alpha-1} \exp\left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)\right)$$

   b. Membuat fungsi likelihood

$$L(\alpha,\theta,|\,y_1) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)^{\alpha}} y_i^{\alpha-1} \exp\left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{n}\left(\frac{\exp\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}}{\alpha^{n}}\right)^{-\alpha} \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha-1} \exp\sum_{i=1}^{n}\left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)\right)\right]$$

   c. Menetapkan logaritma natural dari fungsi likelihood

$$\ln L(\alpha,\theta,|\,y_1)$$

$$= \ln\left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{n}\left(\frac{\exp\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}}{\alpha^{n}}\right)^{-\alpha} \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha-1} \exp\sum_{i=1}^{n}\left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)\right)\right]$$

   d. Mencari turunan parsial pertama fungsi logaritma natural likelihood
   e. Mencari turunan parsial kedua fungsi logaritma natural likelihood

f. Menentukan estimasi parameter dengan menggunakan metode Iterasi Newton Raphson jika fungsi yang dihasilkan tidak close form (masih mengandung parameter lain dalam fungsi). Adapun langkah penyelesaian metode Iterasi Newton Raphson secara umum adalah

1. Tentukan fungsi regresi Gamma
2. Tentukan data yang sesuai untuk model fungsi regresi Gamma
3. Membentuk fungsi likelihood fungsi regresi Gamma
4. Membentuk fungsi logaritma natural likelihood fungsi regresi Gamma

$$\ln L(\Omega) = -n\ln\Gamma(\alpha) - \alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right) + \alpha(n\ln\alpha) + (n-1)\sum_{i=1}^{n}\ln y_I - \sum_{i=1}^{n} y_i / \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)/\alpha\right)$$

5. Menentukan taksiran awal parameter α dan θ yang diperoleh dengan metode Ordinary Least Square (OLS) yaitu

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & \cdots & x_{k3} \\ 1 & x_{14} & x_{24} & \cdots & x_{k4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \; ; \; \hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y \; ; \; \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$$

6. Membentuk vektor gradien **g** dengan k variabel parameter yang ditaksir.

$$g(\theta^{(m)}) = \left[\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right]^T$$

7. Menentukan matriks Hessian yang setiap elemennya terdiri dari turunan parsial kedua dari fungsi ln Likelihood Regresi Gamma

$$H(\hat{\beta}^{(m)}) = \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}^T}$$

8. Tentukan iterasi Newton –Raphson $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m)} - H^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m)})g(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m)})$
9. Stop iterasi ketika $\left\|\boldsymbol{\beta}^{(m)} - \boldsymbol{\beta}^{(m+1)}\right\| \le \varepsilon$ sehingga diperoleh suatu nilai yang konvergen, jika belum maka kembali ke step 5.

   Menurut Montgomery & Peck 1992, proses iterasi dengan menggunakan metode Newton Raphson sehingga didapatkan nilai $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m+1)}$ yang konvergen

yaitu sampai dengan sampai $\left\|\boldsymbol{\beta}^{(m)} - \boldsymbol{\beta}^{(m+1)}\right\| \leq \varepsilon$ dengan ε bilangan yang sangat kecil tetapi lebih dari 0.

10. Tentukan output dari proses iterasi estimasi parameter

Langkah-langkah pengujian hipotesis pada model Gamma Regression dengan metode MLRT adalah sebagai berikut.

a. Melakukan pengujian secara serentak terhadap model.

1) Menetapkan hipotesis

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$

H_1 : minimal ada satu $\beta_j \neq 0$; j = 1, 2,$\cdots, k$

2) Menentukan himpunan parameter di bawah populasi

$\Omega = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k, \alpha, \theta = (\beta, \alpha, \theta)$

3) Menentukan himpunan parameter dibawah H_0,

$\omega = (\beta_0, \alpha, \theta)$

4) Membentuk fungsi likelihood dibawah populasi (L(Ω)),

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f(y_{1i} \mid \Omega)$$

$$L(\Omega) = \underset{\Omega}{maks}\, L(\Omega)$$

5) Membentuk fungsi likelihood dibawah H_0 (L(ω)),

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f(y_{1i} \mid \omega)$$

$$L(\omega) = \underset{\omega}{maks}\, L(\omega)$$

6) Menentukan estimasi parameter dengan metode MLE dan Newton-Raphson untuk mendapatkan nilai estimasi parameter, sehingga diperoleh (Ω) dan (ω)

7) Mendefinisikan Ratio Likelihood

$$\Lambda = \left(\frac{L(\omega)}{L(\Omega)} \right)$$

8) Menentukan statistik uji pada pengujian dengan menggunakan metode Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT),

Statistik Uji : $G^2 = -2\ln\Lambda$

$=2(L(\Omega) - L(\omega))$ dengan $G^2 > \chi^2_{2p}$

Kriteria penolakan : Tolak H_0 jika $G^2 > \chi^2_{\alpha,2p}$

Apabila H_0 pada pengujian serentak ditolak, maka langkah yang harus dilakukan selanjutnya adalah melakukan pengujian parameter secara parsial. Hal ini dilakukan karena ingin mengetahui parameter yang memberikan pengaruh signifikan terhadap model.

b. Pengujian secara parsial, dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1) Hipotesis untuk menguji signifikan parameter β :

$H_0 : \beta_j = 0$

$H_1 : \beta_j \neq 0;\ j = 1, 2, \cdots, k$

2) Menentukan statistik uji pada pengujian dengan menggunakan metode Maximum Likelihood Ratio Test (MLRT),

Statisik uji :

$Z_{hit} = \dfrac{\beta_j}{SE(\beta_j)}$ dimana $SE(\beta_j) = \sqrt{\text{var}(\beta_j)}$

$\text{var}(\beta_j)$ merupakan elemen diagonal ke j+1 dari $-\mathbf{H}^{-1}(\beta)$

3) Menentukan daerah penolakan yaitu

Kriteria penolakan : Tolak H_0 jika $|Z_{hit}| > Z_{\alpha/2}$

2. Menentukan faktor yang berpengaruh terhadap kasus pencemaran kualitas air sungai di Surabaya menggunakan indikator BOD dengan mengaplikasikan model Regresi Gamma.

a. Melakukan analisis deskriptif variabel respon (y) dan variabel prediktor (x).

b. Melakukan pengujian kesesuaian distribusi Gamma terhadap data pada Y (BOD) dengan menggunakan uji Anderson-Darling.

c. Mengidentifikasi dan melakukan uji multikolineritas terhadap variabel independen menggunakan criteria VIF.

d. Mengaplikasikan model Gamma Regression pada pencemaran air sungai di Surabaya.

e. Melakukan pengujian signifikansi parameter pada model secara serentak dan parsial menggunakan MLRT.
f. Melakukan interpretasi model yang terbentuk.
g. Membuat kesimpulan model yang terbaik berdasarkan dari hasil nilai AIC pada setiap model untuk metode estimasi MLE dan WLS.

3.4 Definisi Tahapan Analisis Data

Gambar 3.2 Diagram Alur Metode Analisis Data

BAB 4
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab 4 membahas mengenai hasil dari penelitian yang telah dilakukan dalam menjawab rumusan masalah yaitu membahas mengenai proses estimasi parameter dan bentuk statistik uji pada Regresi Gamma dengan menggunakan metode Maximum Likelihood Estimation (MLE) dan Weighted Least Square (WLS). Pada penelitian ini, selain kajian teoritis juga menggunakan data real yaitu data pencemaran air sungai yang dilakukan oleh Badan Lingkungan Hidup kota Surabaya tahun 2013 untuk menentukan faktor-faktor yang mempengaruhi pencemaran air sungai tersebut.

4.1 Estimasi Parameter Regresion Gamma

Pada bagian ini membahas mengenai proses estimasi regresi Gamma dengan parameter skala θ merupakan fungsi dari variabel bebas atau kovariat, yakni $\theta = (\exp(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})))/\alpha$,dengan $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0\ \beta_1 \ldots \beta_p)^T$, dan $\boldsymbol{x} = (1, X_{1,} \ldots, X_i)^T$ serta diberikan fungsi kepadatan peluang bersama dari model regresi Gamma sebagai berikut.

$$f_{y_i}(y_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)^{\alpha}} y_i^{\alpha-1} \exp\left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)\right)$$

$$\text{untuk } y_i > 0 \text{ dengan } \theta = \frac{\exp(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha} \tag{4.1}$$

Langkah pertama yang dilakukan untuk mendapatkan estimasi parameter regresi Gamma adalah membentuk fungsi likelihood dari n sampel fungsi regresi Gamma. Bentuk fungsi likelihood dari regresi Gamma didefinisikan sebagai berikut.

$$L(\boldsymbol{\beta} \mid \alpha) = \prod_{i=1}^{n} f_{y_i}(y_i) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)^{\alpha}} y_i^{\alpha-1} \exp\left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)\right) \right]$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^n \left(\frac{\exp \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\beta}}{\alpha^n} \right)^{-\alpha} \left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha-1} \right) \exp \sum_{i=1}^{n} \left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right) \right) \right] \quad (4.2)$$

Langkah selanjutnya adalah membentuk fungsi logaritma natural likelihood dari persamaan (4.2) yaitu.

$$\ln L(\boldsymbol{\beta} \mid \alpha) = \ln \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^n \left(\frac{\exp \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\beta}}{\alpha^n} \right)^{-\alpha} \left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha-1} \right) \exp \sum_{i=1}^{n} \left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right) \right) \right]$$

$$= \ln \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^n \left(\frac{\exp \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\beta}}{\alpha^n} \right)^{-\alpha} \exp \sum_{i=1}^{n} \left(\ln y_i^{\alpha-1} - y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right) \right) \right]$$

$$= -n \ln \Gamma(\alpha) - \alpha \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{x}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\beta} \right) + \alpha (n \ln \alpha) + (n-1) \sum_{i=1}^{n} \ln y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i / \left(\exp \left(\mathbf{x}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{T}} \boldsymbol{\beta} \right) / \alpha \right)$$

Langkah selanjutnya adalah melakukan penaksiran parameter pada model regresi Gamma dengan cara mencari turunan pertama dari fungsi logaritma natural likelihood secara parsial terhadap masing-masing parameter yang diestimasi kemudian disamakan dengan nol. Adapun parameter yang diestimasi pada penelitian adalah (α, θ, **β**). Dalam hal ini estimasi yang diturunkan secara parsial adalah parameter **β** sedangkan parameter α dan θ nilainya diberikan dari hasil pengujian distribusi Gamma sehingga turunan pertama untuk masing-masing parameter adalah sebagai berikut.

Turunan parsial pertama terhadap **β**

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_0} = \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i \exp \left(\mathbf{x}_i^{T} \boldsymbol{\beta} \right)^{-1} - \alpha n$$

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_1} = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i}$$

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_2} = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i}$$

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_3} = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{3i} y_i \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{3i}$$

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_4} = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{4i} y_i \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{4i}$$

Secara umum dapat dituliskan persamaan dari hasil turunan pertama dari fungsi logaritma natural likelihood pada model regresi Gamma adalah

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_k} = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Berdasarkan hasil turunan parsial pertama dari fungsi logaritma natural likelihood pada model regresi Gamma terhadap masing-masing parameter yang akan diestimasi penurunan secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran 2. Dan menunjukkan bahwa turunan pertama fungsi ln likelihood terhadap masing-masing parameter menghasilkan bentuk tidak closed form, oleh karena itu tidak dapat dianalisis secara analitik, untuk mendapatkan hasil yang eksplisit sehingga harus diiterasikan dengan menggunakan metode numerik yaitu metode iterasi Newton–Raphson untuk mendapatkan estimasi parameter. Persamaan iterasi Newton Raphson dapat didefenisikan sebagai berikut.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m)} - H^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}) g(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}) \qquad (4.3)$$

$H^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m)})$ merupakan matriks Hessian yang nonsingular dengan elemen pembentuknya adalah turunan parsial kedua dari fungsi logaritma natural likelihood terhadap masing-masing parameter yang akan diestimasi. Sedangkan $g(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m)})$ merupakan vektor dengan elemen pembentuknya adalah turunan pertama dari fungsi logaritma natural likelihood terhadap masing-masing parameter diestimasi. Secara umum dapat dituliskan bentuknya seperti di bawah ini.

$$g(\beta^{(m)}) = \left[\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right]^T \tag{4.4}$$

Karena persamaan iterasi Newton-Raphson memerlukan matriks Hessian sehingga diperlukan elemen pembentuknya adalah turunan kedua dari fungsi logaritma natural likelihood terhadap masing-masing parameter. Dalam penelitian turunan parsial kedua dari fungsi logaritma natural likelihood dari model regresi Gamma terhadap masing-masing parameter yang akan diestimasi adalah sebagai berikut.

Mencari turunan parsial kedua

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_0 \partial \beta_0} = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_1^2} = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i}^2 y_i}{(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_2^2} = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{2i}^2 y_i}{(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_3^2} = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{3i}^2 y_i}{(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_4^2} = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{4i}^2 y_i}{(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i} y_i}{(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_2 \partial \beta_0} = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{2i} y_i}{(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_3 \partial \beta_0} = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{3i} y_i}{(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_4 \partial \beta_0} = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{4i} y_i}{(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i} y_i}{(\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_2\partial\beta_1} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{1i}x_{2i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_3\partial\beta_1} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{1i}x_{3i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_4\partial\beta_1} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{1i}x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_0\partial\beta_2} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{2i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_1\partial\beta_2} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{1i}x_{2i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_3\partial\beta_2} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{2i}x_{3i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_4\partial\beta_2} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{2i}x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_0\partial\beta_3} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{3i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_1\partial\beta_3} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{1i}x_{3i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_2\partial\beta_3} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{2i}x_{3i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_4\partial\beta_3} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{3i}x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_0\partial\beta_4} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_1\partial\beta_4} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{1i}x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_2\partial\beta_4} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{2i}x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_3\partial\beta_4} = -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{3i}x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

Untuk penurunan parsial kedua dari fungsi logaritma natural likelihood dari model regresi Gamma secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran 2. Secara

umum bentuk dari turunan parsial kedua dari fungsi logaritma natural likelihood model regresi Gamma adalah

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^T x_i y_i}{(\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))}$$

Dari hasil turunan parsial kedua dari fungsi logaritma natural likelihood dari model regresi gamma terhadap masing-masing parameter yang akan diestimasi dapat diperoleh $H(\hat{\beta}^{(m)})$. Secara umum dapat dituliskan bentuknya seperti di bawah ini.

$$H(\hat{\beta}^{(m)}) = \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T} = -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^T x_i y_i}{(\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))} \tag{4.5}$$

Langkah selanjutnya yaitu memulai proses iterasi Newton-Raphson sedemikian hingga diperoleh nilai estimasi parameter yang konvergen. Proses iterasi ini berhenti pada saat iterasi ke-m dengan kriteria $\left\| \boldsymbol{\beta}^{(m)} - \boldsymbol{\beta}^{(m+1)} \right\| \leq \varepsilon$, dimana ε adalah bilangan positif yang cukup kecil. Dari proses iterasi ini diperoleh nilai estimasi dari $\boldsymbol{\beta}$ adalah $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m+1)}$.

Berikut ini adalah algoritma dari metode Newton-Raphson

1. Tentukan fungsi regresi Gamma
2. Tentukan data yang sesuai untuk model fungsi regresi Gamma
3. Membentuk fungsi likelihood fungsi regresi Gamma
4. Membentuk fungsi logaritma natural likelihood fungsi regresi Gamma

$$\ln L(\Omega) = -n \ln \Gamma(\alpha) - \alpha \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \right) + \alpha (n \ln \alpha) + (n-1) \sum_{i=1}^{n} \ln y_I - \sum_{i=1}^{n} y_i / \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} \right) / \alpha \right)$$

5. Menentukan taksiran awal parameter α dan θ yang diperoleh dengan metode Ordinary Least Square (OLS) yaitu

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & \cdots & x_{k3} \\ 1 & x_{14} & x_{24} & \cdots & x_{k4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} ; \ \hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(X^T X \right)^{-1} X^T Y \ ; \ \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$$

6. Membentuk vektor gradien **g** dengan k variabel parameter yang ditaksir.

$$g(\theta^{(m)}) = \left[\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right]^T$$

7. Menentukan matriks Hessian yang setiap elemennya terdiri dari turunan parsial kedua dari fungsi ln Likelihood Regresi Gamma

$$H(\hat{\beta}^{(m)}) = \frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^T}$$

8. Tentukan iterasi Newton –Raphson $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m)} - H^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m)}) g(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(m)})$
9. Stop iterasi ketika $\left\| \boldsymbol{\beta}^{(m)} - \boldsymbol{\beta}^{(m+1)} \right\| \leq \varepsilon$ sehingga diperoleh suatu nilai yang konvergen, jika belum maka kembali ke step 5
10. Tentukan output dari proses iterasi estimasi parameter

4.2 Uji Hipotesis Model Regresi Gamma

Setelah mendapat estimasi parameter dari Regresi Gamma, maka proses selanjutnya yaitu menentukan bentuk statistik uji. Pada bagian ini akan dibahas mengenai pengujian hipotesis secara serentak. Jika pada pengujian hipotesis secara serentak mendapatkan kesimpulan menolak H_0 maka proses pengujian dilanjutkan pada pengujian hipotesis secara parsial. Langkah-langkah untuk pengujian hipotesis secara serentak adalah sebagai berikut.

Menentukan hipotesis awal yaitu

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \text{ paling sedikit ada satu } \beta_j \neq 0, \text{ dengan j = 1, 2,}\cdots\text{, k}$$

Setelah menentukan hipotesis langkah selanjutnya yaitu menentukan statistik uji dengan membandingkan nilai maksimum dari fungsi likelihood himpunan parameter dibawah populasi dengan nilai maksimum dari fungsi *likelihood* himpunan parameter dibawah H_0. Misalkan Ω adalah himpunan parameter dibawah populasi dimana $\Omega = \{\alpha, \theta, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$ maka fungsi likelihoodnya didefenisikan sebagai berikut.

$$L(\Omega) = \left(\prod_{i=1}^{n} f(y_i \mid \Omega) \right),$$

$$\text{dimana } f_{yi}(y_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right)^{\alpha}} y_i^{\alpha-1} \exp\left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right) \right)$$

dan misalkan pula ω himpunan dibawah H_0 dimana $\omega = \{\beta_0, \alpha, \theta\}$ dengan fungsi likelihood sebagai berikut.

$$L(\omega) = \left(\prod_{i=1}^{n} f(y_i \mid \omega) \right),$$

$$\text{dimana } f_{yi}(y_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0}} y_i^{\alpha-1} \exp\left(\frac{-y_i}{\theta} \right)$$

Setelah menentukan fungsi likelihood, selanjutnya adalah menentukan $L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} L(\Omega)$ dengan menentukan $\hat{\beta} = \{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_j\}$ dimaksimumkan fungsi ln likelihood di bawah ini. Langkah selanjutnya membentuk fungsi ln likelihood sehingga diperoleh :

$$\ln L(\boldsymbol{\beta} \mid \alpha) = \prod_{i=1}^{n} \ln \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right)^{\alpha}} y_i^{\alpha-1} \exp\left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right) \right) \right]$$

$$= \ln \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^{n} \left(\frac{\exp \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}}{\alpha^{n}} \right)^{-\alpha} \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha-1} \exp \sum_{i=1}^{n} \left(-y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right) \right) \right]$$

$$= \ln \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^{n} \left(\frac{\exp \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \right)}{\alpha^{n}} \right)^{-\alpha} \exp \sum_{i=1}^{n} \left(\ln y_i^{\alpha-1} - y_i \Big/ \left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha} \right) \right) \right]$$

$$= -n \ln \Gamma(\alpha) - \alpha \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \right) + \alpha (n \ln \alpha) + (n-1) \sum_{i=1}^{n} \ln y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \Big/ \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \right) / \alpha \right)$$

Sehingga diperoleh $L(\hat{\Omega}) = \max_{\Omega} L(\Omega)$ dengan masing-masing nilai parameter yang diperoleh dari iterasi Newton-Raphson.

Untuk $L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} L(\omega)$ dengan $\hat{\beta}_0, \hat{\alpha}, \hat{\theta}$ yang memaksimumkan fungsi ln *likelihood* yang adadi bawah ini.

$$L(\omega) = \left(\Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0}\right)^{-n} \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha_0 - 1} \exp \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-y_i}{\theta}\right)$$

$$\ln L(\omega) = \ln\left[\left(\Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0}\right)^{-n} \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha_0 - 1} \exp \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-y_i}{\theta}\right)\right]$$

$$= -n \ln \Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0} + (\alpha_0 - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln y_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-y_i}{\theta}\right)$$

Sehingga diperoleh $L(\hat{\omega}) = \max_{\omega} L(\omega)$ dengan masing-masing nilai parameter yang diperoleh dari iterasi Newton Raphson. Berikut dituliskan turunan parsial pertama untuk parameter dibawah H_0 yaitu parameter α_0, θ sama dengan 0 untuk memperoleh nilai setiap parameternya.

Turunan parsial pertama terhadap α_0 adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left[-n \ln \Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0} + (\alpha_0 - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln y_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-y_i}{\theta}\right)\right]$$

$$= -n \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \Gamma'(\alpha_0) - n \frac{1}{\theta^{\alpha_0}} \theta^{\alpha_0} \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln y_i + 0$$

$$= -n \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \Gamma'(\alpha_0) - n \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln y_i$$

Turunan parsial pertama terhadap θ adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-n \ln \Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0} + (\alpha_0 - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln y_i + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-y_i}{\theta}\right)\right]$$

$$= -n \frac{1}{\theta^{\alpha_0}} (\alpha_0 - 1)\theta^{\alpha_0 - 1} + 0 + \sum_{i=1}^{n} -y_i(-\theta^{-2})$$

$$= -n \frac{(\alpha_0 - 1)}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\theta^2}$$

Turunan parsial kedua terhadap α_0 adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \alpha_0^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left[\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \alpha_0}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left[-n\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\Gamma'(\alpha_0) - n\ln\theta + \sum_{i=1}^{n}\ln y_i\right]$$

$$= -n\frac{\Gamma''(\alpha_0)\Gamma(\alpha_0) - \Gamma'(\alpha_0)\Gamma'(\alpha_0)}{\Gamma^2(\alpha_0)} + 0 + 0$$

$$= -n\frac{\Gamma''(\alpha_0)\Gamma(\alpha_0) - \Gamma'(\alpha_0)\Gamma'(\alpha_0)}{\Gamma^2(\alpha_0)}$$

Turunan parsial kedua terhadap θ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \theta}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-n\frac{(\alpha_0 - 1)}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\theta^2}\right]$$

$$= -n(-1)\theta^{-2}(\alpha_0 - 1) + (-2\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\theta^3})$$

$$= -n\frac{1}{\theta^2}(\alpha_0 - 1) - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\theta^3}$$

Turunan parsial pertama α_0 terhadap θ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \theta \partial \alpha_0} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \alpha_0}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-n\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\Gamma'(\alpha_0) - n\ln\theta + \sum_{i=1}^{n}\ln y_i\right]$$

$$= 0 - n\frac{1}{\theta} + 0$$

$$= \frac{-n}{\theta}$$

Turunan parsial pertama θ terhadap α_0 adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \alpha_0 \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left[\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \theta}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-n\frac{(\alpha_0 - 1)}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\theta^2}\right]$$

$$= -n\frac{1}{\theta} + 0$$

$$= \frac{-n}{\theta}$$

Dari hasil penurunan parsial untuk turunan kedua dari fungsi logaritma natural likelihood model regresi Gamma diperoleh matriks $H(\omega^{(m)})$ sebagai berikut.

$$H(\omega^{(m)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \alpha_0^2} & \dfrac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \theta \partial \alpha_0} \\ \dfrac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \alpha_0 \partial \theta} & \dfrac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -n\dfrac{\Gamma''(\alpha_0)\Gamma(\alpha_0) - \Gamma'(\alpha_0)\Gamma'(\alpha_0)}{\Gamma^2(\alpha_0)} & \dfrac{-n}{\theta} \\ \dfrac{-n}{\theta} & -n\dfrac{1}{\theta^2}(\alpha_0 - 1) - 2\sum_{i=1}^{n}\dfrac{y_i}{\theta^3} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya memulai proses iterasi Newton-Raphson sedemikian hingga diperoleh nilai estimasi parameter di bawah H_0 yang konvergen. Proses iterasi ini berhenti pada saat iterasi ke m dengan kriteria $\left\|\omega^{(m)} - \omega^{(m-1)}\right\| \le \varepsilon$, dimana ε adalah bilangan positip yang cukup kecil. Dari proses iterasi ini diperoleh nilai estimasi dari $\hat{\omega}$ adalah $\hat{\omega} = \hat{\omega}^{(m-1)}$.

Tahap selanjutnya adalah menentukan statistik uji dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$G^2 = -2\ln\Lambda = -2\ln\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} = -2\ln\left(L(\hat{\Omega}) - L(\hat{\omega})\right) = 2\ln L(\hat{\Omega}) - 2\ln L(\hat{\omega})$$

$$G^2 = -2\begin{pmatrix} -n\ln\Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0} + (\alpha_0 - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln y_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{-y_i}{\theta}\right) - \\ -n\ln\Gamma(\alpha) - \alpha\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^T\beta\right) + \alpha(n\ln\alpha) \\ +(n-1)\sum_{i=1}^{n}\ln y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i / \left(\exp\left(x_i^T\beta\right)/\alpha\right) \end{pmatrix}$$

$$G^2 = \begin{pmatrix} 2\ln n\Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0} - 2(\alpha_0 - 1)\sum_{i=1}^{n}\ln y_i - 2\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{-y_i}{\theta}\right) + \\ -2n\ln\Gamma(\alpha) - 2\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^T\beta\right) + 2\alpha(n\ln\alpha) \\ +2(n-1)\sum_{i=1}^{n}\ln y_i - 2\sum_{i=1}^{n} y_i / \left(\exp\left(x_i^T\beta\right)/\alpha\right) \end{pmatrix}$$

dimana G^2 mengikuti distribusi chi-squarre sehingga dengan n yang cukup besar maka $G^2 \square \chi^2_{\alpha/2}$. Daerah penolakan dari hasil estimasi parameter yang diperoleh pada MLRT merupakan suatu nilai *lnlikelihood* di bawah populasi dan *lnlikelihood* di bawah H_0 yaitu menolak H_0 jika $G^2_{hitung} \square \chi^2_{\alpha/2}$.

Apabila H_0 pada pengujian serentak ditolak, maka langkah yang harus dilakukan selanjutnya adalah melakukan pengujian parameter secara parsial. Hal ini dilakukan untuk mengetahui parameter β yang memberikan pengaruh signifikan terhadap model. Langkah untuk melakukan pengujian ini adalah menetapkan hipotesis, dimana hipotesisnya sebagai berikut.

$$H_0 : \beta_j = 0$$
$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

Statistik uji yang digunakan adalah

$$Z = \frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)}$$

dengan Z ~ N(0,1), $SE(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\text{var}\left(\beta_j\right)}$ dan $\text{var}(\hat{\beta}_j)$ adalah elemen diagonal utama ke-(j+1) matriks Hessian $-\left[H(\hat{\beta})\right]^{-1}$, dengan j = 0, 1, 2, …, k. Kriteria penolakan H_0 apabila $\left|Z_{hitung}\right| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$

4.3 Aplikasi Regresi Gamma terhadap Faktor-Faktor Yang Mempengaruhi Tingginya Nilai BOD di Sungai Surabaya

Analisis model regresi Gamma pada penelitian ini diaplikasikan pada kasus pencemaran air sungai di Surabaya pada tahun 2013. Data yang diperoleh dari Badan Lingkungan Hidup (BLH) digunakan untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi pencemaran sungai di Surabaya berdasarkan kadar BOD. Berikut analisis yang dilakukan.

4.3.1 Deskripsi Pencemaran Air Sungai di Surabaya

Sebelum melakukan analisis faktor yang mempengaruhi pencemaran air sungai di Surabaya terlebih dahulu mendeskripsikan karakteristik dari data zat

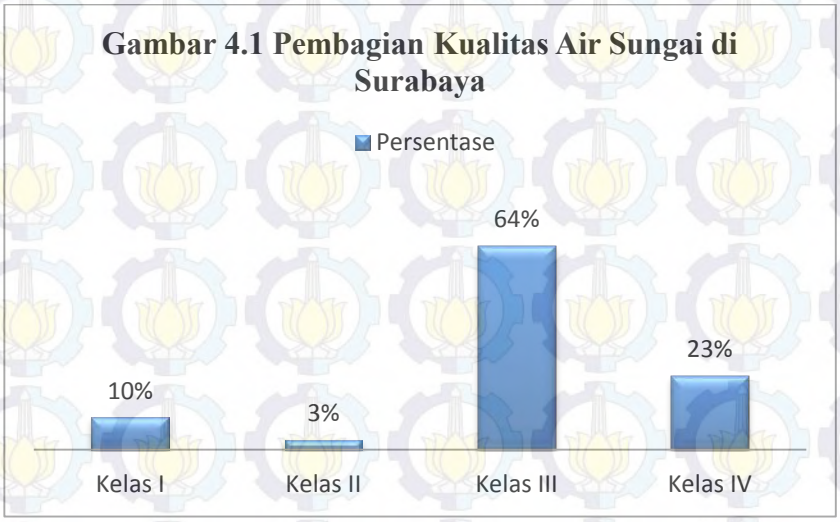
pencemar dari data BLH. Berdasarkan data BLH, kualitas sungai yang telah ditetapkan untuk sungai di Surabaya dibagi menjadi empat kelas sesuai dengan kegunaan air sungai tersebut. Pemerintah telah menetapkan bahwa air sungai yang memenuhi standart adalah air sungai yang mempunyai kualitas I dan memiliki nilai toleransi tertentu untuk kualitas air sungai kelas II. Berdasarkan pengelompokan kualitas air sungai tersebut, sebagian sungai di Surabaya mempunyai kualitas di bawah standart. Hal ini dapat ditunjukkan pada pada Gambar 4.1 bahwa sebesar 64% atau 19 lokasi sungai di Surabaya menempati kualitas air sungai kelas III. Selebihnya terdapat kualitas air sungai kelas IV sebesar 23% dengan 7 lokasi sungai, kualitas sungai kelas I sebesar 10% dengan 3 lokasi sungai dan kualitas sungai kelas II sebesar 3% dengan 1 lokasi sungai.

Berdasarkan data dari BLH, sungai di Surabaya yang dianggap memiliki kualitas kelas I adalah Kali Surabaya di Jembatan Wonokromo, Kalimas di Jembatan Ngagel, dan Kalimas di Jembatan Selatan. Dalam hal ini dapat dilihat bahwa kualitas sungai di Surabaya sangat minim akan air bersih yang sesuai dengan standart yang ditetapkan. Hal ini karena sebagian besar lokasi titik pengamatan sungai Surabaya berpotensi tercemar. Oleh sebab itu pencemaran sungai di Surabaya harus dapat dikendalikan dengan baik sehingga tidak member dampak buruk bagi kehidupan sekitarnya.

Tabel 4.1 Pembagian Kualitas Air Sungai di Surabaya

Kualitas Sungai	Jumlah Lokasi Pengamatan	Persentase
Kelas I	3	10
Kelas II	1	3
Kelas III	19	64
Kelas IV	7	23
Jumlah	30	100

Sumber Data: Badan Lingkungan Hidup Surabaya 2013



Pada penelitian ini variabel-variabel yang diteliti antara lain variabel respon Biochemical Oxygen Demand (BOD), sedangkan variabel prediktor yaitu x_1 adalah Lebar Sungai, x_2 adalah Kedalaman Sungai, x_3 adalah Kecepatan Sungai, dan x_4 adalah debit sungai. Sebelum dilakukan analisis dan pemodelan menggunakan analisis regresi klasik terlebih dahulu nilai variabel prediktor distandarisasi, hal ini disebabkan karena satuan dari masing-masing variabel yang tidak sama. Berikut hasil analisis deskriptif setiap variabel.

Tabel 4.2 Deskriptif Variabel Respond dan Prediktor

Variabel	Min.	Max.	Mean	Std. Deviation
BOD (mg/l)	2,03	23,42	8,70	4,49
Lebar Sungai (Meter)	4,00	65,00	15,57	14,23
Kedalaman Sungai (Meter)	0,05	6,00	1,63	1,32
Kecepatan Air Sungai (m/detik)	0,03	3,08	1,22	0,86
Debit Air Sungai (m^3 /detik)	0,02	1087,61	130,25	279,22

Tabel 4.2 menunjukkan bahwa jumlah *Biochemical Oxygen Demand* (BOD) paling banyak 23,42 mg/l dan paling sedikit 2,03 mg/l. Hal yang sangat penting diperhatikan adalah ketika nilai BOD yang sangat tinggi yang menjadi masalah dalam sungai. Dampak yang diakibatkan berupa rusaknya ekosistem sungai dan kualitas air yang menurun. Rata-rata dari jumlah Biochemical Oxygen Demand (BOD) di setiap sungai Surabaya adalah 8,7021. Hal ini menunjukkan rata-rata di setiap sungai Surabaya sudah mengalami pencemaran, karena nilai BOD yang jauh dari batas ambang yang telah ditentukan BLH. Untuk nilai std.

deviasi pada debit air sungai (m^3/detik) memiliki nilai yang sangat tinggi yaitu sebesar 279,22. Hal ini dapat diartikan bahwa persebaran debit air sungai di kota Surabaya sangat beragam pada setiap titik lokasi sungai. Kondisi ini dapat dilihat pada tabel 4.2 debit air sungai minimum sebesar 0,02 m^3/detik sedangkan debit sungai maksimum sebesar 1087,61. Oleh karena keragaman nilainya maka diperlukan data lokasi untuk mengidentifikasi karakteristik sungai dengan memperhatikan unsur lokasi dari setiap titik pengamatan sungai.

4.3.2 Pengujian Distribusi

Pengujian distribusi data digunakan untuk mengetahui distribusi yang sesuai (Law & Kelton, 2000). Pengujian distribusi data pada variabel respon dilakukan dengan menggunakan uji Anderson-Darling disajikan pada Tabel 4.3.

Adapun hipotesis yang digunakan yaitu:

H_0 : $F(y) = F^o(y)$ (variabel respon sesuai dengan distribusi dugaan).

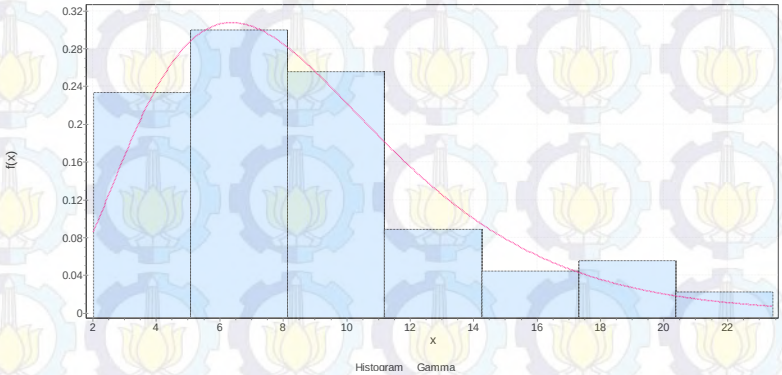
H_1 : $F(y) = F^o(y)$ (variabel respon tidak sesuai dengan distribusi dugaan).

Tabel 4.3 Uji Distribusi Data Variabel Respon (Y)

No	Distribution	Goodness of Fit Test		Rank
		Statistik Uji	p-value	
1	Normal	2,505	0,005	3
2	Exponential	11,411	0,003	6
3	Exponential (2P)	5,270	0,010	4
4	Weibull	1,299	0,010	2
5	Gamma	0,622	0,113	1
6	Smallest Extreme Value	6,010	0,010	5

Tabel 4.3 menunjukkan bahwa dari beberapa distribusi yang ada berdasarkan nilai AD bahwa data berdistribusi Gamma kurang dari taraf sig. 5%. Secara lengkap pengujian data variabel respon dapat dilihat pada bagian Lampiran 4. Dapat disimpulkan bahwa hasil analisis statistik uji Anderson-Darling pada masing-masing variabel respon memenuhi kriteria distribusi Gamma. Oleh sebab itu, data pada penelitian dapat digunakan pada model. Untuk pengujian BOD

selain dari nilai Goodness of Fit Test akan ditunjukkan juga histogram dari BOD berdistribusi Gamma seperti pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2 Histogram-Gamma Variabel BOD (Y)

Untuk menentukan estimator dari regresi Gamma diberikan nilai parameter α dan θ yang diperoleh dari hasil pengujian distribusi adalah $\hat{\alpha}$=3,7485 $\hat{\theta}$=2,3215.

4.3.3 Pengujian Multikolineritas

Dalam analisis regresi, kasus multikolineritas memiliki pengaruh besar terhadap hasil estimasi parameter. Oleh sebab itu, terlebih dahulu dilakukan pemeriksaan multikolineritas antar variabel prediktor, apakah terdapat korelasi atau tidak antar variabel prediktor. Uji multikolineritas dilakukan sebagai asumsi untuk penaksiran parameter awal sehingga sebelum melanjutkan analisis dengan menggunakan metode regresi Gamma maka akan dilakukan pemeriksaan multikolineritas.

Untuk mendeteksi adanya kasus multikolineritas digunakan nilai VIF. Apabila terdapat variabel prediktor dengan nilai VIF > 10, maka dapat disimpulkan bahwa terdapat kasus multikolineritas seperti pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4 Nilai VIF Variabel Prediktor

Variabel	VIF
x_1	1,981
x_2	2,327
x_3	3,044
x_4	2,960

Tabel 4.4 menunjukkan bahwa nilai VIF semua variabel prediktor kurang dari 10, sehingga tidak terdapat kasus multikolinieritas pada keempat variabel prediktor sehingga semua variabel dapat digunakan dalam pemodelan regresi Gamma.

4.4 Pemodelan Regresi Gamma pada Pencemaran Air Sungai di Surabaya dengan Estimasi MLE

Berdasarkan data Badan Lingkungan Hidup (BLH) tahun 2013 tentang Kualitas Air dan Sumber Pencemar Air di Sungai Surabaya, kadar BOD mengikuti persebaran distribusi Gamma. Estimasi parameter untuk regresi Gamma menghasilkan sifat global atau sama untuk masing-masing lokasi pengamatan. Pada penelitian ini ada 30 titik lokasi pengamatan. Faktor yang mempengaruhi antar lokasi pengamatan dianggap sama. Pemodelan regresi Gamma ini melibatkan variabel prediktor yaitu x_1, x_2, x_3 dan x_4.

Berdasarkan data penelitian ini maka diperoleh nilai estimasi untuk regresi Gamma dengan menggunakan program Matlab. Dalam hal ini syntax dari program matlabnya secara lengkap ada pada Lampiran 5. Berikut adalah hasil estimasi parameter model regresi Gamma pada program Matlab

Tabel 4.5 Estimasi Parameter Model Regresi Gamma dengan Estimasi MLE

Parameter	Estimasi	SE($\hat{\beta}$)
β_0	2,5210	0,1211
β_1	-0,0016	0,0052
β_2	-0,0907	0,0630
β_3	-0,1941	0,1159
β_4	0,0002	0,0003

Hasil estimasi pada Tabel 4.5 dengan nilai $\hat{\alpha}$=3.7485 dan $\hat{\theta}$ = 2.3215. Berdasarkan nilai estimasi parameter regresi Gamma dapat dilihat bahwa nilai parameter shape (α) lebih dari satu, hal ini menunjukkan bahwa peluang kadar BOD melewati ambang batas maksimum yang telah ditetapkan akan meningkat dari waktu ke waktu. Hal ini dapat dilihat dari plot PDF dari regresi Gamma bahwa semakin besar nilai dari parameter shape maka kurva akan semakin bergeser ke kanan.

4.5 Pengujian Hipotesis Model Regresi Gamma pada Pencemaran Air Sungai di Surabaya dengan Estimasi MLE

Berdasarkan estimasi parameter yang telah diperoleh maka perlu dilakukan pengujian untuk mengetahui apakah parameter tersebut berpengaruh signifikan terhadap model. Pada penelitian ini dilakukan pengujian signifikansi model regresi Gamma secara serentak dan secara parsial. Pengujian secara serentak terlebih dahulu dilakukan setelah diperoleh tolak H_0 maka akan dilanjutkan ke pengujian parsial.

4.5.1 Pengujian Serentak dengan Metode Estimasi MLE pada Model Regresi Gamma.

Pada pengujian serentak dilakukan pada keseluruhan parameter prediktor secara bersama-sama. Hal ini dilakukan untuk menguji apakah parameter pada variabel prediktor mempunyai pengaruh secara serentak terhadap model yang terbentuk. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut.

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

$H_1 :$ paling sedikit ada satu $\beta_j \neq 0,$ dengan j = 1, 2,3,4

Pengujian serentak pada model regresi Gamma secara lengkap disajikan pada lampiran 6, sedangkan hasilnya ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 4.6 Hasil Pengujian Serentak Model Regresi Gamma

	Nilai	**χ^2 tabel**
$\ln L(\hat{\Omega})$	-241,7186	
$\ln L(\hat{\omega})$	-9,0486 x 10^8	
$G^2 = -2\ln\Lambda = 2\ln L(\hat{\Omega}) - 2\ln L(\hat{\omega})$	1.8097 x 10^9	15,5073

Tabel 4.6 dengan taraf signifikan sebesar 5%, diperoleh bahwa nilai G^2 memiliki nilai lebih besar dari χ^2 tabel. Dapat dikatakan bahwa pada pengujian secara serentak menolak H_0. Berdasarkan hal tersebut maka dapat ditarik sebuah kesimpulan bahwa paling sedikit ada satu parameter mempunyai pengaruh secara serentak pada model regresi Gamma. Dengan demikian model regresi Gamma

layak digunakan pada pemodelan pencemaran air sungai di kota Surabaya dengan indikator BOD.

4.5.2 Pengujian Parsial dengan Metode Estimasi MLE pada Model Regresi Gamma.

Setelah dilakukan pengujian secara serentak dan diperoleh hasil bahwa paling sedikit ada satu parameter yang berpengaruh signifikan terhadap model, maka langkah selanjutnya dilakukan pengujian secara parsial. Pengujian ini digunakan untuk menentukan variabel prediktor (faktor) mana yang berpengaruh signifikan terhadap model. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0 \text{ , dengan } j = 1, 2, 3,4.$$

Dengan taraf signifikan 5% dan Z_{tabel} = 1,96, maka dapat diperoleh parameter yang signifikan pada model regresi Gamma. Secara lengkap pengujian parsial pada model regresi Gamma pada program Matlab pada lampiran 7. Dan untuk hasil dari pengujian parsial akan ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 4.7 Pengujian Parsial pada Model Regresi Gamma

Parameter	Estimasi	Zhitung	p-value	Kesimpulan
β_0	2,5210	20,8110	0	Tolak H_0
β_1	-0,0016	-0,3055	0,3800**	Gagal Tolak H_0
β_2	-0,0907	-1,4391	0,0751*	Tolak H_0
β_3	-0,1941	-1,6738	0,0471	Tolak H_0
β_4	0,0002	0,6641	0,2533*	Gagal Tolak H_0

Keterangan : * signifikan = 30% ; **)signifikan = 40%

Tabel 4.7 menunjukkan bahwa keempat variabel yang berpengaruh terhadap kadar Biochemical Oxygen Demand (BOD) di Kali Surabaya pada tingkat signifikansi 5% adalah Kecepatan Air (x_3). Untuk variabel Lebar Sungai (x_1) berpengaruh ketika tingkat signifikansinya sebesar 40%. Hal ini menandakan bahwa Lebar Sungai tidak begitu mempengaruhi kadar Biochemical Oxygen Demand. Dan variabel Kedalaman Sungai (x_2) signifikan pada 10% sedangkan untuk Debit Sungai (x_4) signifikan ketika tingkat signifikansinya 30%. Hal ini menunjukkan bahwa debit sungai itu kurang mempengaruhi kadar Biochemical

Oxygen Demand. Dengan demikian, variabel yang signifkan mempengaruhi faktor-faktor pencemaran sungai di Surabaya dengan indikator BOD adalah Kecepatan Air Sungai (x_3). Oleh sebab itu, salah satu kebijakan yang diambil untuk mengantisipasi pencemaran air di sungai kota Surabaya dengan melakukan pengorekan ke badan-badan sungai karena hal ini dapat mencegahnya pencemaran sungai dan sekaligus mengurangi pendangkalan bantaran kalinya.

4.6 Pemodelan Regresi Gamma pada Pencemaran Air Sungai di Surabaya dengan Estimasi WLS

Untuk metode yang kedua menggunakan metode estimasi WLS. Selanjutnya akan digunakan aplikasi faktor-faktor yang mempengaruhi tingginya nilai BOD di sungai Surabaya dengan menggunakan metode estimasi Weighted Least Square (WLS). Penerapan menggunakan WLS pada penelitian ini hanya sebatas membandingkan model yang diperoleh dengan menggunakan MLE dan WLS.

Tabel 4.8 Estimasi Parameter Model Regresi Gamma dengan estimasi WLS

Parameter	Estimasi	SE($\hat{\beta}$)
β_0	11,950	0,883
β_1	-0,011	0,007
β_2	-0,469	0,312
β_3	-2,118	0,591
β_4	0,002	0,001

Tabel 4.8 merupakan tabel perbandingan hasil estimasi dari WLS dengan menggunakan Program MATLAB. Untuk lebih jelasnya mengenai hasil pengujian secara parsial dari faktor-faktor yang berpengaruh terhadap BOD di sungai Surabaya pada tabel berikut di bawah ini.

Sebagaimana diketahui estimasi WLS digunakan apabila terjadinya pelanggaran asumsi pada estimasi OLS yaitu kemungkinan variansinya tidak sama (heteroskedastisitas), maka metode yang dapat digunakan untuk menduga koefisien regresi adalah metode Weighted Least Square (WLS). Penaksir β pada metode WLS diperoleh dengan mentransformasikan model regresi linear terlebih dahulu sehingga dapat memenuhi asumsi-asumsi pada OLS.

Namun, peneliti hanya menggunakan estimasi WLS ini sebagai pembanding model MLE pada penenelitian ini tanpa mempertimbangkan asumsi pada WLS. Dengan menggunakan bantuan software SPSS dan Minitab akan diperoleh model dari faktor-faktor yang mempengaruhi BOD di Sungai Surabaya dengan menggunakan estimasi WLS. Berdasarkan data penelitian ini maka diperoleh nilai estimasi untuk regresi Gamma pada tabel berikut.

4.7 Pengujian Hipotesis Model Regresi Gamma pada Pencemaran Air Sungai di Surabaya dengan Estimasi WLS

Berdasarkan estimasi parameter yang telah diperoleh maka perlu dilakukan pengujian untuk mengetahui apakah parameter tersebut berpengaruh signifikan terhadap model. Pada penelitian ini dilakukan pengujian signifikansi model regresi Gamma secara serentak dan secara parsial. Pengujian secara serentak terlebih dahulu dilakukan setelah diperoleh tolak H_0 maka akan dilanjutkan ke pengujian parsial.

4.7.1 Pengujian Serentak dengan Metode Estimasi WLS pada Model Regresi Gamma.

Pada pengujian serentak dilakukan pada keseluruhan parameter prediktor secara bersama-sama. Hal ini dilakukan untuk menguji apakah parameter pada variabel prediktor mempunyai pengaruh secara serentak terhadap model yang terbentuk. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut.

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

$H_1 :$ paling sedikit ada satu $\beta_j \neq 0,$ dengan j = 1, 2,3,4

Pengujian serentak pada model regresi Gamma dengan metode estimasi WLS secara lengkap disajikan pada Lampiran 8, sedangkan hasilnya ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 4.9 Hasil Pengujian Serentak dengan Metode Estimasi WLS

	Nilai	χ^2 tabel
$\ln H_1$	64,956	
$\ln H_0$	45,447	
G^2	38,999	15,5073

Tabel 4.9 dengan taraf signifikan sebesar 5%, diperoleh bahwa nilai G^2 memiliki nilai lebih besar dari $\chi^2_{\alpha/2}$ yaitu 38,999 > 15,5073. Dapat dikatakan bahwa pada pengujian secara serentak menolak H_0. Berdasarkan hal tersebut maka dapat ditarik sebuah kesimpulan bahwa paling sedikit ada satu parameter mempunyai pengaruh secara serentak pada model regresi Gamma. Dengan demikian model regresi Gamma layak digunakan pada pemodelan pencemaran air sungai di kota Surabaya dengan indikator BOD.

4.7.2 Pengujian Parsial dengan Metode Estimasi WLS pada Model Regresi Gamma.

Setelah dilakukan pengujian secara serentak dan diperoleh hasil bahwa paling sedikit ada satu parameter yang berpengaruh signifikan terhadap model, maka langkah selanjutnya dilakukan pengujian secara parsial. Pengujian ini digunakan untuk menentukan variabel prediktor (faktor) mana yang berpengaruh signifikan terhadap model. Hipotesis yang digunakan adalah sebagai berikut.

$$H_0 : \beta j = 0$$

$$H_1 : \beta j \neq 0 \text{ , dengan } j = 1,2,3,4$$

Dengan taraf signifikan 5% dan $Z_{\alpha/2}$ = 1,96 maka dapat diperoleh parameter yang signifikan pada model regresi Gamma. Secara lengkap pengujian parsial pada model regresi Gamma pada Lampiran 8. Dan untuk hasil dari pengujian parsial akan ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 4.10 Pengujian Parsial pada Model Regresi Gamma

Parameter	Estimasi	zhitung	p-value	Kesimpulan
β_0	11,950	13,535	0,0000	Tolak H_0
β_1	-0,0108	-1,590	0,1155*	Gagal Tolak H_0
β_2	-0,4691	-1,503	0,1365*	Gagal Tolak H_0
β_3	-2,1182	-3,582	0,0006	Tolak H_0
β_4	0,0019	1,332	0,1864**	Gagal Tolak H_0

Keterangan : * signifikan = 15% ; **signifikan =20%.

Tabel 4.11 pengujian pada Matlab menunjukkan bahwa keempat variabel yang berpengaruh terhadap kadar Biochemical Oxygen Demand (BOD) di Kali Surabaya pada tingkat signifikansi 5% adalah Kecepatan Air (x_3). Untuk Lebar

Sungai (x_1) dan Kedalaman Sungai (x_2) berpengaruh ketika tingkat signifikansinya sebesar 15%, sedangkan variabel Debit Air Sungai (x_4) berpengaruh ketika tingkat signifikansinya 20%. Hal ini menunjukkan bahwa debit sungai itu tidak cukup mempengaruhi kadar Biochemical Oxygen Demand.

4.8 Analisis Model Regresi Gamma menggunakan metode Estimasi MLE dan WLS pada Pencemaran Air Sungai di Kota Surabaya

Berdasarkan Tabel estimasi parameter model regresi Gamma pada Tabel 4.4 dapat diperoleh model yang dihasilkan dari pengolahan data menggunakan metode estimasi Maksimum Likelihood adalah sebagai berikut.

$$\hat{\theta} = \frac{\exp(2,5210 - 0,0016x_1 - 0,0907x_2 - 0,1942x_3 + 0,002x_4)}{3,7485}$$

Model diatas merupakan model dengan menggunakan semua variabel penelitian ke dalam model. Dalam hal ini variabel yang signifikan adalah x3 yaitu kecepatan air sungai. Sehingga pada model di atas menjelaskan bahwa setiap 1 m/detik kecepatan sungai akan melipatgandakan mempengaruhi nilai parameter θ sebesar exp(-0,1943/3,7485) = 0,95 g/l kadar BOD dengan asumsi bahwa kadar lain tidak dianggap konstan.

Berdasarkan Tabel estimasi parameter model regresi Gamma dengan menggunakan metode estimasi Weighted Least Square (WLS) pada Tabel 4.11 dapat diperoleh bahwa tidak semua variabel prediktor mempunyai pengaruh pada kadar BOD. Sehingga dari hasil penelitian yang dilakukan bahwa variabel x1, x2 dan x4 tidak signifikan pada 5%. Model yang dihasilkan dari pengolahan data secara keseluruhan dengan memasukkan semua variabel menggunkan program matlab sebagai berikut.

$$\hat{\theta} = \frac{\exp(11,95 - 0,0108x_1 - 0,4691x_2 - 2,1182x_3 + 0,0019x_4)}{3,7485}$$

Pada model diatas menjelaskan setiap perubahan 1 m/detik kecepatan sungai akan melipatkangandakan nilai parameter θ sebesar exp(-2,118/3,7485)= 0,57 g/l kadar BOD dengan asumsi kadar lain dianggap konstan.

Sebagai perbandingan antara model regresi Gamma menggunakan metode estimasi maksimum likelihood dan weighted least square akan diperlihatkan pada tabel 4.11 di bawah ini.

Tabel 4.11 Nilai AIC Model

Model	Nilai AIC
Maximum Likelihood Estimation	4,22
Weighted Least Square	0,68

Berdasarkan tabel 4.11 menunjukkan bahwa nilai AIC untuk metode estimasi Weighted Least Square (WLS) menghasilkan nilai AIC yang lebih kecil dibandingkan dengan metode estimasi Maximum Likelihood. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa metode estimasi *Weighted Least Square* yang dipilih untuk pemodelan pencemaran sungai di Surabaya dengan indikator *Biochemical Oxygen Demand* (BOD).

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari hasil analisis yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) untuk mengestimasi pada model regresi Gamma diperoleh persamaan yang tidak close form sehingga dilakukan iterasi Newton-Raphson untuk memperoleh nilai parameter
2. Pada pengujian hipotesis model regresi Gamma menggunakan metod*e Maximum Likelihood Ratio Test (*MLRT) dengan membandingkan nila*i Likelihood* dibawah populasi dengan nila*i Likelihood* dibawah H_0 dimana pengujian hipotesis tersebut dari atas dua bagian yaitu pengujian secara serentak dan pengujian secara parsial.
3. Dari hasil analisis faktor-faktor yang mempengaruhi tingginya nilai BOD di sungai Surabaya tahun 2013 variabel yang signifikan adalah x_3 yaitu kecepatan air sungai. Secara keseluruhan menghasilkan model untuk metode estimasi Maximum Likelihood adalah

$$\hat{\theta} = \frac{\exp(2,5210 - 0,0016x_1 - 0,0907x_2 - 0,1942x_3 + 0,002x_4)}{3,7485}$$

Sedangkan dengan menggunakan metode estimasi Weighted Least Square (WLS) diperoleh model sebagai berikut.

$$\hat{\theta} = \frac{\exp(11,95 - 0,0108x_1 - 0,4691x_2 - 2,1182x_3 + 0,0019x_4)}{3,7485}$$

Pemilihan model terbaik berdasarkan nilai AIC untuk metode estimasi Weighted Least Square (WLS) menghasilkan nilai AIC yang lebih kecil dibandingkan dengan metode estimasi Maximum Likelihood. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa metode estimasi *Weighted Least Square* yang

dipilih untuk pemodelan pencemaran sungai di Surabaya dengan indikator *Biochemical Oxygen Demand* (BOD).

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, permasalahan yang dikaji dapat dikembangkan untuk penelitian-penelitian berikutnya adalah menambahkan indikator lain untuk variabel respon seperti Chemical Oxygen Demand (COD) dan Dissolved Oxygen (DO). Selanjutnya karena stand. deviasi (Lihat tabel 4.2) pada variabel debit air sungai tinggi yang diakibatkan data observasi yang bervariasi pada setiap titik lokasi observasi sehingga dapat dapat ditambahi dengan penambahan efek spasial data observasi sehingga hasil yang diperoleh lebih tepat.

Lampiran 1. Data Penelitian

No	Tanggal pemeriksaan	Nomor Sungai	Perulangan	y	x_1	x_2	x_3	x_4
1	7/9/2013	1	1	6.92	15	1.5	1.42	10.65
2	7/8/2013	2	1	3.93	48.5	4.5	2.51	724.30
3	7/8/2013	3	1	3.82	30	1.7	2.45	98.92
4	7/8/2013	4	1	4.02	20	1.35	2.16	97.60
5	7/8/2013	5	1	3.52	18	2	2	122.91
6	7/10/2013	6	1	7.03	8	0.3	1	2.40
7	7/10/2013	7	1	7.08	7	0.25	0.03	0.05
8	7/8/2013	8	1	3.81	6.3	3.2	1.85	37.32
9	7/11/2013	9	1	9.75	6.3	0.4	1.21	3.05
10	7/11/2013	10	1	17.9	4	0.35	0.05	0.06
11	7/9/2013	11	1	8.16	19.7	0.75	0.83	11.92
12	7/10/2013	12	1	11.38	16	0.38	0.62	3.78
13	7/8/2013	13	1	4.51	9.5	0.05	0.06	0.02
14	7/10/2013	14	1	17.4	7.2	0.2	0.26	0.73
15	7/10/2013	15	1	16.41	8	0.81	0.76	4.94
16	7/8/2013	16	1	8.68	6.5	0.65	1	3.78
17	7/10/2013	17	1	4.12	30	4.2	3	693.00
18	7/8/2013	18	1	7.37	11	0.05	0.88	0.48
19	7/8/2013	19	1	8.39	9.8	0.5	1.31	6.42
20	7/8/2013	20	1	5.88	4.2	1.4	0.75	2.10
21	7/10/2013	21	1	13.92	18.5	1	0.04	1.01
22	7/10/2013	22	1	10.43	13	0.5	0.17	1.13
23	7/9/2013	23	1	8.38	45	3.8	1.35	231.36
24	7/9/2013	24	1	5.56	65	5	2.27	737.75
25	7/9/2013	25	1	5.21	20	6	2.78	1087.54
26	7/9/2013	26	1	6.92	5	2.80	1.680	5.68
27	7/9/2013	27	1	7.27	7.5	1.20	0.770	4.56

No	Tanggal pemeriksaan	Nomor sungai	Perulangan	y	x_1	x_2	x_3	x_4
28	7/11/2013	28	1	9.44	8	2.30	1.210	7.86
29	7/10/2013	29	1	10.54	6.5	1.20	0.230	2.12
30	7/10/2013	30	1	11.43	6.8	1.70	0.520	3.24
31	9/3/2013	1	2	6.51	15	1.52	1.610	10.67
32	9/4/2013	2	2	4.29	48.5	4.50	2.590	724.32
33	9/4/2013	3	2	6.12	20	3.20	2.530	98.94
34	9/3/2013	4	2	3.72	16	3.15	2.240	97.62
35	9/3/2013	5	2	5.02	12.6	3.00	2.080	122.94
36	9/4/2013	6	2	10.17	8	1.20	1.080	2.42
37	9/4/2013	7	2	9.77	7	1.00	0.110	0.08
38	9/3/2013	8	2	4.11	6.3	3.20	1.930	37.34
39	9/3/2013	9	2	12.45	6.3	1.40	1.290	3.07
40	9/5/2013	10	2	5.43	4	0.35	0.120	0.09
41	9/5/2013	11	2	19.53	19.7	0.75	0.910	11.94
42	9/4/2013	12	2	11.56	16	0.38	0.700	3.80
43	9/4/2013	13	2	4.98	9.5	1.25	0.130	0.05
44	9/4/2013	14	2	7.41	7.2	0.80	0.340	0.75
45	9/4/2013	15	2	10.82	8	0.81	0.840	4.96
46	9/4/2013	16	2	2.03	6.5	0.65	1.080	3.80
47	9/4/2013	17	2	2.73	30	4.20	3.080	693.02
48	9/4/2013	18	2	3.98	11	0.12	0.960	0.51
49	9/4/2013	19	2	4.11	9.8	0.50	1.390	6.45
50	9/4/2013	20	2	9.12	4.2	1.40	0.830	2.12
51	9/4/2013	21	2	10.82	18.5	1.00	0.120	1.04
52	9/4/2013	22	2	6.81	13	0.50	0.250	1.15
53	9/5/2013	23	2	10.37	45	0.76	1.430	231.39
54	9/4/2013	24	2	6.98	65	0.65	2.350	737.77
55	9/4/2013	25	2	8.37	20	2.25	2.860	1087.56
56	9/3/2013	26	2	9.76	5	2.80	1.750	5.70

No	Tanggal pemeriksaan	Nomor sungai	Perulangan	y	x_1	x_2	x_3	x_4
57	9/5/2013	27	2	2.81	7.5	1.20	0.840	4.59
58	9/5/2013	28	2	5.62	8	2.30	1.290	7.88
59	9/4/2013	29	2	9.07	6.5	1.20	0.310	2.15
60	9/4/2013	30	2	9.42	6.8	1.70	0.600	3.26
61	11/6/2013	1	3	6.42	15	1.59	1.500	10.73
62	11/6/2013	2	3	4.52	48.5	4.56	2.590	724.38
63	11/6/2013	3	3	4.22	20	3.26	2.530	99.00
64	11/6/2013	4	3	18.46	16	3.21	2.240	97.68
65	11/6/2013	5	3	4.62	12.6	3.06	2.080	122.99
66	11/4/2013	6	3	7.21	8	1.26	1.080	2.48
67	11/6/2013	7	3	6.81	7	1.06	0.110	0.13
68	11/6/2013	8	3	4.37	6.3	3.26	1.930	37.39
69	11/6/2013	9	3	10.61	6.3	1.46	1.290	3.13
70	11/6/2013	10	3	11.96	4	0.41	0.130	0.14
71	11/6/2013	11	3	18.09	19.7	0.81	0.910	12.00
72	11/4/2013	12	3	23.42	16	0.44	0.700	3.85
73	11/4/2013	13	3	6.86	9.5	1.31	0.140	0.10
74	11/4/2013	14	3	16.6	7.2	0.86	0.340	0.81
75	11/6/2013	15	3	11.34	8	0.87	0.840	5.02
76	11/4/2013	16	3	9.91	6.5	0.71	1.080	3.86
77	11/4/2013	17	3	7.02	30	4.26	3.080	693.08
78	11/6/2013	18	3	22.48	11	0.18	0.960	0.56
79	11/6/2013	19	3	6.98	9.8	0.56	1.390	6.50
80	11/6/2013	20	3	11.34	4.2	1.46	0.830	2.18
81	11/6/2013	21	3	9.69	18.5	1.06	0.120	1.09
82	11/4/2013	22	3	7.46	13	0.56	0.260	1.21
83	11/6/2013	23	3	8.01	45	0.82	1.440	231.44
84	11/6/2013	24	3	7.39	65	0.71	2.350	737.83
85	11/6/2013	25	3	10.57	20	2.31	2.860	1087.61

No	Tanggal pemeriksaan	Nomor sungai	Perulangan	y	x_1	x_2	x_3	x_4
86	11/6/2013	26	3	7.51	5	2.86	1.760	5.76
87	11/6/2013	27	3	6.88	7.5	1.26	0.850	4.64
88	11/6/2013	28	3	15.98	8	2.36	1.290	7.94
89	11/6/2013	29	3	8.69	6.5	1.26	0.320	2.20
90	11/6/2013	30	3	14.7	6.8	1.76	0.610	3.32

Keterangan :

y : *Biochemical Oxygen Demand* (BOD)

x_1 : Lebar sungai

x_2 : Kedalaman air sungai

x_3 : Kecepatan air sungai

x_4 : Debit air sungai

Lampiran 2. Estimasi Parameter Regresi Gamma

1. Mengambil n sampel random $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$f_{y_i}(y_i) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)^{\alpha}} y_i^{\alpha-1} \exp\left(-y_i/\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)\right)$$

untuk $y_i > 0$ dengan $\theta = \frac{\exp(\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}$

2. Membuat fungsi Likelihood

$$L(\boldsymbol{\beta} \mid \alpha) = \prod_{i=1}^{n} f_{y_i}(y_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)^{\alpha}} y_i^{\alpha-1} \exp\left(-y_i/\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{n}\left(\frac{\exp\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}}{\alpha^{n}}\right)^{-\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha-1}\right)\exp\sum_{i=1}^{n}\left(-y_i/\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)\right)\right]$$

3. Menetapkan logaritma natural dari fungsi likelihood

$$\ln L(\boldsymbol{\beta} \mid \alpha) = \ln\left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{n}\left(\frac{\exp\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}}{\alpha^{n}}\right)^{-\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha-1}\right)\exp\sum_{i=1}^{n}\left(-y_i/\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)\right)\right]$$

$$= \ln\left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{n}\left(\frac{\exp\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}}{\alpha^{n}}\right)^{-\alpha}\exp\sum_{i=1}^{n}\left(\ln y_i^{\alpha-1} - y_i/\left(\frac{\exp(\mathbf{x}_i^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta})}{\alpha}\right)\right)\right]$$

$$= -n\ln\Gamma(\alpha) - \alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{x}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}\right) + \alpha(n\ln\alpha) + (n-1)\sum_{i=1}^{n}\ln y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i / \left(\exp\left(\mathbf{x}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}\right)/\alpha\right)$$

4. Mencari turunan parsial pertama

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \beta_0}\left[-n\ln\Gamma(\alpha) - \alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{x}_i^{T}\boldsymbol{\beta}\right) + \alpha(n\ln\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i / \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^{T}\boldsymbol{\beta}\right)/\alpha\right)\right]$$

$$= 0 - \alpha \sum_{i=1}^{n} (1) + 0 + 0 - \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\frac{\exp\left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right)^{-1}}{\alpha} \right) (-1)$$

$$= -\alpha n + \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i \exp\left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right)^{-1}$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i \exp\left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right)^{-1} - \alpha n$$

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_1}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_1} \left[-n \ln \Gamma(\alpha) - \alpha \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right) + \alpha (n \ln \alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i / \left(\exp\left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right) / \alpha\right) \right]$$

$$= 0 - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + 0 + 0 - \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\exp\left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1} (-x_{1i})$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i} - \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\exp\left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1} (-x_{1i})$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \left(\exp\left(\mathbf{x}_\mathbf{i}{}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1}$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \left(\exp\left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i}$$

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left[-n \ln \Gamma(\alpha) - \alpha \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{x}_\mathbf{i}{}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}\right) + \alpha (n \ln \alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i / \left(\exp\left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right) / \alpha\right) \right]$$

$$= 0 - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + 0 + 0 - \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\frac{\left(\exp\left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1}}{\alpha} \right) (-x_{2i})$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i} - \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\exp\left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1} (-x_{2i})$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i} + \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i \left(\exp\left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1}$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i \left(\exp\left(\mathbf{x}_i{}^T \boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i}$$

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_3}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_3}\left[-n\ln\Gamma(\alpha) - \alpha\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^T\boldsymbol{\beta}\right) + \alpha(n\ln\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i / \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)/\alpha\right)\right]$$

$$= 0 - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i} + 0 + 0 - \sum_{i=1}^{n} y_i\left(\frac{\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1}}{\alpha}\right)(-x_{3i})$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i} - \alpha\sum_{i=1}^{n} y_i\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1}(-x_{3i})$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i} + \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1}$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}$$

$$\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_4}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_4}\left[-n\ln\Gamma(\alpha) - \alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right) + \alpha(n\ln\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i / \left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)/\alpha\right)\right]$$

$$= 0 - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i} + 0 + 0 - \sum_{i=1}^{n} y_i\left(\frac{\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1}}{\alpha}\right)(-x_{4i})$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i} - \alpha\sum_{i=1}^{n} y_i\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1}(-x_{4i})$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i} + \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}y_i\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1}$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}y_i\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right)\right)^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}$$

5. Mencari turunan parsial kedua

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_0 \partial \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \beta_0}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_0}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_0}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} y_i(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right))^{-1} - \alpha n\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} y_i(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right))^{-1}(-1) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}\right))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_1^{\,2}} = \frac{\partial}{\partial \beta_1}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_1}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_1}\left[\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i (\exp(\mathbf{x}_i^{\,T}\boldsymbol{\beta}))^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i}\right]$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i (\exp(\mathbf{x}_i^{\,T}\boldsymbol{\beta}))^{-1}(-x_{1i}) - 0$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 y_i (\exp(\mathbf{x}_i^{\,T}\boldsymbol{\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i}^2 y_i}{(\exp(\mathbf{x}_i^{\,T}\boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_2^{\,2}} = \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_2}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left[\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i (\exp(\mathbf{x}_i^{\,T}\boldsymbol{\beta}))^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i}\right]$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i (\exp(\mathbf{x}_i^{\,T}\boldsymbol{\beta}))^{-1}(-x_{2i}) - 0$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 y_i (\exp(\mathbf{x}_i^{\,T}\boldsymbol{\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{2i}^2 y_i}{(\exp(\mathbf{x}_i^{\,T}\boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_3^{\,2}} = \frac{\partial}{\partial \beta_3}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_3}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_3}\left[\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{3i} y_i (\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}))^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{3i}\right]$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{3i} y_i (\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}))^{-1}(-x_{3i}) - 0$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{3i}^2 y_i (\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{3i}^2 y_i}{(\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_4{}^2} = \frac{\partial}{\partial \beta_4}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_4}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_4}\left[\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{4i} y_i (\exp(\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}))^{-1} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{4i}\right]$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{4i} y_i (\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))^{-1} (-x_{4i}) - 0$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{4i}^2 y_i (\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{4i}^2 y_i}{(\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \beta_1}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_0}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_1}\left[\alpha \sum_{i=1}^{n} y_i (\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))^{-1} - \alpha n\right]$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i (\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))^{-1} (-x_{1i}) - 0$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i (\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i} y_i}{(\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial \beta_2 \partial \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial \beta_0}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left[\alpha \sum_{i=1}^{n} y_i (\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))^{-1} - \alpha n\right]$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i (\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))^{-1} (-x_{2i}) - 0$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_i (\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{2i} y_i}{(\exp(\mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{T} \boldsymbol{\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_3\partial\beta_0} = \frac{\partial}{\partial\beta_3}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_0}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_3}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha n\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-x_{3i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{3i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_4\partial\beta_0} = \frac{\partial}{\partial\beta_4}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_0}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_4}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha n\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-x_{4i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_0\partial\beta_1} = \frac{\partial}{\partial\beta_0}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_1}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_0}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-1) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_2\partial\beta_1} = \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_1}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-x_{2i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i}x_{2i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_3\partial\beta_1} = \frac{\partial}{\partial\beta_3}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_1}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_3}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-x_{3i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i}x_{3i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_4\partial\beta_1} = \frac{\partial}{\partial\beta_4}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_1}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_4}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-x_{4i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i}x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_0\partial\beta_2} = \frac{\partial}{\partial\beta_0}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_2}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_0}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-1) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{2i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_1\partial\beta_2} = \frac{\partial}{\partial\beta_1}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_2}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_1}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-x_{1i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i}x_{2i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_3\partial\beta_2} = \frac{\partial}{\partial\beta_3}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_2}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_3}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-x_{3i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{2i}x_{3i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_4\partial\beta_2} = \frac{\partial}{\partial\beta_4}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_2}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_4}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-x_{4i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}x_{2i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{2i}x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_0\partial\beta_3} = \frac{\partial}{\partial\beta_0}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_3}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_0}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-1) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{3i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_1\partial\beta_3} = \frac{\partial}{\partial\beta_1}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_3}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_0}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(x_{1i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i}x_{3i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_2\partial\beta_3} = \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_3}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(x_{2i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{2i}x_{3i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_4\partial\beta_3} = \frac{\partial}{\partial\beta_4}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_3}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_4}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(x_{4i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{3i}x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_0\partial\beta_4} = \frac{\partial}{\partial\beta_0}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_4}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_0}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-1) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_1\partial\beta_4} = \frac{\partial}{\partial\beta_1}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_4}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_1}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-x_{1i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i}x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_2\partial\beta_4} = \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_4}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_2}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-x_{2i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{2i}x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Omega)}{\partial\beta_3\partial\beta_4} = \frac{\partial}{\partial\beta_3}\left[\frac{\partial \ln L(\Omega)}{\partial\beta_4}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta_3}\left[\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1} - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}\right]$$

$$= \alpha\sum_{i=1}^{n} x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}(-x_{3i}) - 0$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} x_{3i}x_{4i}y_i(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))^{-1}$$

$$= -\alpha\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{3i}x_{4i}y_i}{(\exp(\mathbf{x_i^T\beta}))}$$

Lampiran 3. Estimasi Parameter di bawah H_0 Regresi Gamma

$$L(\omega) = \left(\Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0}\right)^{-n} \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha_0 - 1} \exp \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-y_i}{\theta}\right)$$

$$\ln L(\omega) = \ln\left[\left(\Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0}\right)^{-n} \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha_0 - 1} \exp \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-y_i}{\theta}\right)\right]$$

$$= -n \ln \Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0} + (\alpha_0 - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln y_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-y_i}{\theta}\right)$$

Turunan parsial pertama terhadap α_0 adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left[-n \ln \Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0} + (\alpha_0 - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln y_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-y_i}{\theta}\right)\right]$$

$$= -n \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \Gamma'(\alpha_0) - n \frac{1}{\theta^{\alpha_0}} \theta^{\alpha_0} \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln y_i + 0$$

$$= -n \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \Gamma'(\alpha_0) - n \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln y_i$$

Turunan parsial pertama terhadap θ adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-n \ln \Gamma(\alpha_0)\theta^{\alpha_0} + (\alpha_0 - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln y_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-y_i}{\theta}\right)\right]$$

$$= -n \frac{1}{\theta^{\alpha_0}} (\alpha_0 - 1)\theta^{\alpha_0 - 1} + 0 + \sum_{i=1}^{n} -y_i(-\theta^{-2})$$

$$= -n \frac{(\alpha_0 - 1)}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\theta^2}$$

Turunan parsial kedua terhadap α_0 adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \alpha_0^{\,2}} = \frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left[\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \alpha_0}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left[-n \frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} \Gamma'(\alpha_0) - n \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln y_i\right]$$

$$= -n \frac{\Gamma''(\alpha_0)\Gamma(\alpha_0) - \Gamma'(\alpha_0)\Gamma'(\alpha_0)}{\Gamma^2(\alpha_0)} + 0 + 0$$

$$= -n \frac{\Gamma''(\alpha_0)\Gamma(\alpha_0) - \Gamma'(\alpha_0)\Gamma'(\alpha_0)}{\Gamma^2(\alpha_0)}$$

Turunan parsial kedua terhadap θ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \theta}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-n\frac{(\alpha_0 - 1)}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\theta^2}\right]$$

$$= -n(-1)\theta^{-2}(\alpha_0 - 1) + (-2\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\theta^3})$$

$$= -n\frac{1}{\theta^2}(\alpha_0 - 1) - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\theta^3}$$

Turunan parsial pertama α_0 terhadap θ adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \theta \partial \alpha_0} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \alpha_0}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-n\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\Gamma'(\alpha_0) - n\ln\theta + \sum_{i=1}^{n}\ln y_i\right]$$

$$= 0 - n\frac{1}{\theta} + 0$$

$$= \frac{-n}{\theta}$$

Turunan parsial pertama θ terhadap α_0 adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 \ln L(\omega)}{\partial \alpha_0 \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left[\frac{\partial \ln L(\omega)}{\partial \theta}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta}\left[-n\frac{(\alpha_0 - 1)}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\theta^2}\right]$$

$$= -n\frac{1}{\theta} + 0$$

$$= \frac{-n}{\theta}$$

Lampitan 4. Uji Distribusi pada data COD

Distribution	AD	P	LRT P
Normal	2.505	<0.005	
Lognormal	0.422	0.315	
3-Parameter Lognormal	0.427	*	0.980
Exponential	11.411	<0.003	
2-Parameter Exponential	5.270	<0.010	0.000
Weibull	1.299	<0.010	
3-Parameter Weibull	0.607	0.120	0.002
Smallest Extreme Value	6.010	<0.010	
Gamma	0.622	0.113	
3-Parameter Gamma	0.447	*	0.102
Logistic	1.552	<0.005	
Loglogistic	0.462	0.209	
3-Parameter Loglogistic	0.482	*	0.683
Johnson Transformation	0.420	0.320	

ML Estimates of Distribution Parameters

Distribution	Location	Shape	Scale	Threshold
Normal*	8.70211		4.49465	
Lognormal*	2.03992		0.50361	
3-Parameter Lognormal	2.04443		0.49854	-0.03068
Exponential			8.70211	
2-Parameter Exponential			6.74707	1.95503
Weibull		2.07922	9.86983	
3-Parameter Weibull		1.58332	7.58541	1.90612
Smallest Extreme Value	11.15942		5.49124	
Gamma		4.20316	2.07037	
Logistic	8.16867		2.39140	
Loglogistic	2.04299		0.28787	
3-Parameter Loglogistic	1.95655		0.31548	0.59893
Johnson Transformation*	0.01613		1.00418	

Lampiran 5. Syntax Regresi Gamma dengan Program Matlab (MLE)

```
function reggamma(a,t,p,x,y,error);
%Fungsi Regresi Gamma, by:Alvi Sahrin Nasution

clc;
%%%%%%%%%%% Estimasi Parameter dan Pengujian Di Bawah Populasi
%%%%%%%%%%%%
alpha=a;
theta=t;
%Menghitung ukuran variabel x (row=banyak baris, col=banyak kolom)
[row col]=size(x);
n=row;

%membuat vektor satuan untuk b0 variabel x
satu=ones(row,1);

%menggabung vektor satuan dengan x
x=[satu x];

beta=[];

%menentukan taksiran awal parameter theta0 menggunakan OLS
m=1;

beta(:,m)=inv(x'*x)*(x'*y);
beta(1,1)=7; %agar iterasi dapat berjalan (hasil tidak 'inf')

errorrate=1; %hanya untuk inisiasi

gtheta=[];

%ea>error & et>error &
while errorrate>error
    %Turunan-turunan pertama untuk menghitung g(theta[m])
    %atau vektor gradien g
    beta_use=beta(:,m);

    iteration=m %menunjukkan ini iterasi ke sekian

    diff1.b0=(a*(y'*(1./exp(x*beta_use))))-(a*n);
    diff1.b1=(a*((x(:,2).*y)'*(1./exp(x*beta_use))))-
(a*sum(x(:,2)));
    diff1.b2=(a*((x(:,3).*y)'*(1./exp(x*beta_use))))-
(a*sum(x(:,3)));
    diff1.b3=(a*((x(:,4).*y)'*(1./exp(x*beta_use))))-
(a*sum(x(:,4)));
    diff1.b4=(a*((x(:,5).*y)'*(1./exp(x*beta_use))))-
(a*sum(x(:,5)));

    gtheta(:,m)=[diff1.b0 diff1.b1 diff1.b2 diff1.b3 diff1.b4]
```

Lampiran 5. Syntax Regresi Gamma dengan Program Matlab (lanjutan) (MLE)

```
    %Matriks Hessian 5x5
    hess55=[];

    diff2.b0=-a*(y'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b0b1=-a*((x(:,2).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b0b2=-a*((x(:,3).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b0b3=-a*((x(:,4).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b0b4=-a*((x(:,5).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    hess55(1,:)=[diff2.b0 diff2.b0b1 diff2.b0b2 diff2.b0b3
diff2.b0b4];

    diff2.b1=-a*((x(:,2).*x(:,2).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b1b0=-a*((x(:,2).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b1b2=-a*((x(:,2).*x(:,3).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b1b3=-a*((x(:,2).*x(:,4).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b1b4=-a*((x(:,2).*x(:,5).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    hess55(2,:)=[diff2.b1b0 diff2.b1 diff2.b1b2 diff2.b1b3
diff2.b1b4];

    diff2.b2=-a*((x(:,3).*x(:,3).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b2b0=-a*((x(:,3).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b2b1=-a*((x(:,3).*x(:,2).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b2b3=-a*((x(:,3).*x(:,4).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b2b4=-a*((x(:,3).*x(:,5).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    hess55(3,:)=[diff2.b2b0 diff2.b2b1 diff2.b2 diff2.b2b3
diff2.b2b4];

    diff2.b3=-a*((x(:,4).*x(:,4).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b3b0=-a*((x(:,4).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b3b1=-a*((x(:,4).*x(:,2).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b3b2=-a*((x(:,4).*x(:,3).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b3b4=-a*((x(:,4).*x(:,5).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    hess55(4,:)=[diff2.b3b0 diff2.b3b1 diff2.b3b2 diff2.b3
diff2.b3b4];

    diff2.b4=-a*((x(:,5).*x(:,5).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b4b0=-a*((x(:,5).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b4b1=-a*((x(:,5).*x(:,2).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b4b2=-a*((x(:,5).*x(:,3).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    diff2.b4b3=-a*((x(:,5).*x(:,4).*y)'*(1./exp(x*beta_use)));
    hess55(5,:)=[diff2.b4b0 diff2.b4b1 diff2.b4b2 diff2.b4b3
diff2.b4]

    beta(:,m+1)=beta(:,m)-(pinv(hess55)*gtheta(:,m))
    errorrate=norm(abs(beta(:,m+1)-beta(:,m)))

    m=m+1; %kalau iterasi berlanjut, m+1
end
```

Lampiran 6. Syntax Regresi Gamma di bawah H_0 dengan Program Matlab (MLE)

```
Pengujian Di Bawah H0
m0=1;
errorrate0=1; %hanya untuk inisiasi
w=[];
gtheta0=[];
a0=alpha;
t0=theta;
w(:,m0)=[a0 t0]';

while errorrate0>error
    %Turunan-turunan pertama untuk menghitung g(theta[m])
    %atau vektor gradien g
    iteration0=m0 %menunjukkan ini iterasi ke sekian

    diff1.gamma.a=gamma(a0)*psi(a0);
    diff2.gamma.a=(gamma(a0)*(psi(a0)^2)) + (gamma(a0)*psi(1,
a0));

    diff1.a0=(-n*(diff1.gamma.a)*(t0^a0))+((t0^a0)*log(t0)*((-
n*gamma(a0))+sum(log(y))));
    diff1.t0=(-n*gamma(a0)*a0*(t0^(a0-1)))+(n/t0);
    gtheta0(:,m0)=[diff1.a0 diff1.t0]

    diff2.a0=(-n*gamma(a0)*log(t0^a0)*log(t0))-
(2*n*diff1.gamma.a)-(n*diff2.gamma.a*(t0^a0));
    diff2.t0=(-n*((a0^2)-a0)*gamma(a0)*(t0^(a0-2)))-(n/(t0^2));
    diff2.a0t0=-n*(t0^(a0-
1))*((a0*diff1.gamma.a)+gamma(a0)+(a0*gamma(a0)*log(t0)));

    hess22=[diff2.a0 diff2.a0t0; diff2.a0t0 diff2.t0];

    w(:,m0+1)=w(:,m0)-(pinv(hess22)*gtheta0(:,m0))
    errorrate0=norm(abs(w(:,m0+1)-w(:,m0)))

    a0=w(1,m0+1);
    t0=w(2,m0+1);
    m0=m0+1; %kalau iterasi berlanjut, m0+1
end
```

Lampiran 7. Syntax Uji Serentak Regresi Gamma dengan Program Matlab (MLE)

```
Pengujian dan Hasil

a0=w(1,iteration0);
t0=w(2,iteration0);
ln_populasi=(-n*log(gamma(a)))-
(a*sum(x*beta(:,iteration)))+(a*(n*log(a)))+sum(log(y.^(a-1)))-
(a*sum(y./exp(x*beta(:,iteration))))

ln_h0       =(n*gamma(a0)*(t0^a0))+((a0-1)*sum(log(y)))+(t0*sum(-
y))
G2          =(2*ln_populasi)-(2*ln_h0);

prob.G2     =1-chi2cdf(G2,2*4);
chi2_tabel  =chi2inv(1-p,2*4);
```

Lampiran 8. Syntax Uji Parsial Regresi Gamma dengan Program Matlab

```
Pengujian parsial
pvalue=[];
SE=sqrt(diag(-(pinv(hess55))));
zhit=beta(:,iteration)./SE;
for i=1:5
    pvalue(i)=1-normcdf(abs(zhit(i)),0,1);
end
yfits=x*beta(:,iteration);

%%%%% Hiasan untuk tampilan
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf('*********************************************************
************************\n')
fprintf('          Output Estimasi Parameter Regresi Gamma di
Bawah Populasi              \n')
fprintf('*********************************************************
************************\n')
fprintf('\n')
fprintf('Banyak Iterasi di Bawah Populasi\n')
disp(iteration)
fprintf('Banyak Iterasi di Bawah H0\n')
disp(iteration0)
fprintf('---------------Nilai-Nilai Awalan-----------------\n')
fprintf('     Alpha     Theta     Error      Alpha
\n')
fprintf('      Awal      Awal    Tolerance    Pengujian
\n')
fprintf('-------------------------------------------------\n')
disp([alpha theta error p] )
fprintf('\n')
```

Lampiran 8. Syntax Uji Parsial Regresi Gamma dengan Program Matlab (lanjutan) (MLE)

```
fprintf('---------------Estimasi Optimum Parameter Regresi Gamma--
--------------\n')
fprintf('      Alpha     Theta      B0        B1        B2        B3
B4\n')
fprintf('-------------------------------------------------------------
--------------\n')
disp([a t beta(1,iteration) beta(2,iteration) beta(3,iteration)
beta(4,iteration) beta(5,iteration)])
fprintf('\n')
fprintf('-------Hasil Pengujian Serentak untuk Beta-------------
\n')
fprintf(' H0 : Semua parameter Beta tidak signifikan\n')
fprintf(' H1 : Minimal ada satu parameter Beta yang signifikan\n')
fprintf('\n')
fprintf(' ChiSq-Tabel   Ln.Populasi   Ln.H0      G2       pvalue\n')
fprintf('-------------------------------------------------------
\n')
disp([chi2_tabel ln_populasi ln_h0 G2 prob.G2])
fprintf('Kesimpulan :')
if G2 < chi2_tabel
    fprintf('Gagal Tolak H0, Semua parameter Beta tidak
signifikan\n')
else
    fprintf('Tolak H0, Minimal ada satu parameter Beta yang
signifikan\n')
end

fprintf('\n')
fprintf('\n')
fprintf('-------Hasil Pengujian Parsial untuk Beta---------------
\n')
fprintf(' H0 : Beta-j sama dengan nol (tidak signifikan)\n')
fprintf(' H1 : Beta-j tidak sama dengan nol (signifikan)\n')
fprintf('\n')
fprintf('      Beta      SE        zhitung     pvalue\n')
fprintf('-----------------------------------------------------------
\n')
disp([beta(:,iteration) SE zhit pvalue'])
fprintf('            Kesimpulan\n')
fprintf('----------------------------------\n')
for i=1:5
    if pvalue(i) > p
        fprintf('Gagal Tolak H0 (Tidak signifikan)\n')
    else
        fprintf('Tolak H0 (Signifikan)\n')
    end
end
fprintf('\n')
fprintf('Hasil Y Fits :\n')
disp([yfits])
```

Lampiran 8. Syntax Uji Parsial Regresi Gamma dengan Program Matlab (lanjutan)

```
fprintf('*************************************************************
************************\n')
fprintf('*************************************************************
************************\n')


end
```

Lampiran 9. Syntax Regresi Gamma dengan Program Matlab (WLS)

```
function wlsplus(p);
%Fungsi WLS, by:Alvi Sahrin Nasution


format shortG
clc;

dataalvi=xlsread('dataalvi.xlsx');
x1=dataalvi(:,2:5);
y=dataalvi(:,1);

%Menghitung ukuran variabel x (row=banyak baris, col=banyak kolom)
[row col]=size(x1);
n=row;
k=col;
%membuat vektor satuan untuk b0 variabel x
satu=ones(row,1);

%menggabung vektor satuan dengan x
x1=[satu x1];
x =[satu];

%menghitung nilai beta awal melalu OLS
b1=inv(x1'*x1)*(x1'*y);
b =inv(x'*x)*(x'*y);
%menghitung fits dan error dari OLS
fits1=x1*b1;
fits =x*b;
abs_res1=abs(y-fits1);
abs_res =abs(y-fits);

%menghasilkan pembobot
bb =inv(x'*x)*(x'*abs_res);
bb1=inv(x1'*x1)*(x1'*abs_res1);
w1=x1*bb1;
w =x*bb;
w1=1./(w1.^2);
w =1./(w.^2);

v_inv1=diag(w1);
v_inv =diag(w);
p_inv =diag(w.^0.5);
p_inv1=diag(w1.^0.5);
Q1=p_inv1*x1;
Q =p_inv*x;
yw1=p_inv1*y;
yw =p_inv*y;

%regresi terboboti
[bw1,se_bw1]=lscov(x1,y,w1);
[bw,se_bw]=lscov(x,y,w);
%beta          = inv(x1'*v_inv1*x1)*(x1'*v_inv1*y);
```

```
%pengujian serentak (ANOVA)
SSR=(bw1'*Q1'*yw1)-(n*(mean(yw1)^2));
dfR=k;
SSE=(yw1'*yw1)-(bw1'*Q1'*yw1);
dfE=n-k-1;
SST=(yw1'*yw1)-(n*(mean(yw1)^2));
dfT=n-1;
MSR=SSR/dfR;
MSE=SSE/dfE;
F=MSR/MSE;
Ftab=finv(p,dfR,dfE);
pval_F=1-fcdf(F,dfR,dfE);


%pengujian serentak menggunakan G2
ln_h1=(yw1-(Q1*bw1))'*p_inv1*(yw1-(Q1*bw1))
ln_h0=(yw-(Q*bw))'*p_inv*(yw-(Q*bw))
G2          =(2*ln_h1)-(2*ln_h0)
prob_G2     =1-chi2cdf(G2,2*4)
chi2_tabel =chi2inv(1-p,2*4)


%pengujian parsial
thit=bw1./se_bw1;
for i=1:5
    pvalue(i)=2*(1-tcdf(abs(thit(i)),n-k-1));
end

fprintf('-------------Hasil Pengujian Serentak untuk Beta---------
--------\n')
fprintf(' H0 : Semua parameter Beta tidak signifikan\n')
fprintf(' H1 : Minimal ada satu parameter Beta yang signifikan\n')
fprintf('\n')
fprintf('    Sum.Square            df      Mean.Square        F
pvalue\n')
fprintf('-------------------------------------------------------------
--------\n')
disp([SSR dfR MSR F pval_F])
disp([SSE dfE MSE])
disp([SST dfT])
fprintf('Kesimpulan :')
if pval_F > p
    fprintf('Gagal Tolak H0, Semua parameter Beta tidak
signifikan\n')
else
    fprintf('Tolak H0, Minimal ada satu parameter Beta yang
signifikan\n')
end

fprintf('\n')
fprintf('\n')
fprintf('------------Hasil Pengujian Parsial untuk Beta-----------
----\n')
fprintf(' H0 : Beta-j sama dengan nol (tidak signifikan)\n')
fprintf(' H1 : Beta-j tidak sama dengan nol (signifikan)\n')
fprintf('\n')
```

```
fprintf('          Beta            SE      thitung       pvalue\n')
fprintf('-------------------------------------------------------------
----\n')
disp([bw1 se_bw1 thit pvalue'])
fprintf('              Kesimpulan\n')
fprintf('-----------------------------------\n')
for i=1:5
    if pvalue(i) > p
        fprintf('Gagal Tolak H0 (Tidak signifikan)\n')
    else
        fprintf('Tolak H0 (Signifikan)\n')
    end
end
fprintf('\n')

fprintf('*********************************************************
************************\n')
fprintf('*********************************************************
************************\n')
```

Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR PUSTAKA

Agustiningsih, Dyah.(2012). Analisis Kualitas Air dan Strategi Pengendalian Pencemaran Air Sungai Blukar Kabupaten Kendel. *Jurnal Presipitasi*, 9(2).

Agustira, Riyanda. 2012. *Kajian Beberapa Karakteristik Kimia Air, Fisika Air Dan Debit Sungai Pada Aliran Limbah Pabrik Tapioka Kawasan Das Padang Dan Sekitarnya.* Program Studi Agroekoteknologi Fakultas Pertanian. Universitas Sumatera Utara. Medan.

Al-Abood, Akram. (1986). The Power of Approximate Test for the Regression Coefficients in a Gamma Regression Model. *IEEE Transaction on Reliability*, 35(2).

Azizah, R. &Agnes, A.R. (2005). Perbedaan Kadar BOD, COD, TSS, dan MPN Coliform pada Air Limbah, Sebelum dan Sesudah Pengolahan di RSUD Nganjuk. *Jurnal Kesehatan Lingkungan*, 2(1).

Badan Lingkungan Hidup. (2010). Laporan Status Lingkungan Hidup Daerah Kota Surabaya Tahun 2010: Badan Lingkungan Hidup.

Badan Lingkungan Hidup. (2013).Pemantauan Kualitas Air. Surabaya: Badan Lingkunga Hidup.

Cameron, A. C., & Trivedi, P.K. (1998). *Regression Analysis of Count Data. Cambridge*: Cambridge University Press.

Casella, G.. & Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference* (2 ed.): Duxbury.

Chang, H. (2008). *Spatial Analysis of Water Quality Trends in the Han River Basin*. South Korea. Elsevier (42).

Clarke, R.T. Bivariate gamma distribution for extending annual streamflow record from precipitation: Some large-sample results. *Water Resources Research*, 16 (1980), 863–870.

Czado, C. (2004). Gamma Regression. [terhubung berkala].

(http: //www.m4.ma.tum.de/courses/GLM/lec8.pdf.).

Draper, N & Smith, H. (1981). *Applied Regression Analysis Second edition.* New York : John Wiley & Son.

Environment Protection Agency EPA. *Effects of Biodisel Blends on Vehicle Emissions*. Milestone Report. New York.: Environment Protection Agency (EPA), 2006.

Fardiaz, Srikandi.(1992). *Polusi Air dan Udara*. Kanisius, Yogyakarta.

Ghozali, Imam.(2005). *Aplikasi Analisis Multivariate dengan program SPSS*. Badan Penerbit Universitas Diponegoro, Semarang

Gujarati.(2004).*Basic Econometrics, fourth* edition. The Mcgraw-Hill Companies.

Hendrasarie, N dan Cahyarani. 2009. *Kemampuan Self Purification Kali Surabaya Ditinjau Dari Parameter Organik Berdasarkan Model Matematis Kualitas Air*. Jurnal Ilmiah Teknik Lingkungan Vol 2 no 1. Universitas Pembangunan Nasional "Veteran" Jawa Timur

Hogg, Robert. V..McKean, Joseph. (2013). *Introduction Mathematical Statistics 7nd Edition*. New York: Pearson.

Izawa, T. Two or multi-dimensional gamma-type distribution and its application to rainfall data. *Papers in Meteorology and Geophysics*, **15** (1965), 167–200.

Jenq, Yin-Chun. (1987). High-Precision Sinusoidal Frequency Estimator Based on Weighted Least Square Method.. *IEEE Transaction on Reliability*, 36(1).

Johnson, B. & Kotz, S. (1970). *Distribution in Statistics Continuous Univariate Distribution-1*, Wiley, New York.

Kalla, S.L. Al-Saqabi, B.N. & Khajah, H.G. (2001). A Unified form of Gamma-Type Distribution. *Appl. Math. Comput*, 118: 175-187.

Khaulasari, H. (2013). *Model Mixed Geografically Weighted Regression Multivariate pada Pencemaran Kualitas Air COD dan BOD di Kali Surabaya*. (S1), Institut Teknologi Sepuluh November. Surabaya.

Kibble, W.F. (1941). A Two Gamma Type Distribution. *Sankhya*, 5: 137-150.

Kreyszig, Erwin. (1970). *Introductory Mathematical Statistics*. New York : John Wiley & Son.

Kristianto, P. (2002). *Ekologi Industri*. Penerbit ANDI. Yogyakarta.

LeSage, J.P. (1997), Regression Analysis of Spatial Data, *Journal Regoinal and Policy*, Vol. 27, No. 2, hal. 83-84.

Mathai A.M. and Moschopoulos P.G. On A Multivariate Gamma (1991). *Journal of Multivariate Analysis*, **Vol. 39, No 1**, pp. 135-153.

Mattjik, A. A. & Sumertajaya, I. M. 2000. *Perancangan Percobaan dengan Aplikasi SAS dan Minitab Jilid I*. Bogor: IPB Press.

McCullagh, P. & Nelder, J. A. (1989). *Generalized Linear Model 2nd Edition*. London: Chapman & Hall.

Montgomery, D.C. & Runger, G.C. (2003). *Applied Statistics and Probability for Engineer*, 3rd ed.. John Wiley & Son, Inc.

Nadarajah, Saralees. & Kotz, Samual. (2006). Bivariate Gamma Distribution, Sum and Ratio. *Buletin Brazilian Mathematical Society*, 37(2).

Pescod, M.B. (1973). *Investigation of Rational Effluen and Stream Standard for Tropical Countries*. London: AIT.

Salmin. (2005). Oksigen Terlarut (DO) dan Kebutuhan Oksigen Biologi (BOD) Sebagai Salah Satu Indikator Untuk Menentukan Kualitas Perairan. *Oseana*, Volume XXX, Nomor 3, 2005: 21-26.

Sawyer, C.N. & P.L. McCarty. (1978). *Chemistry for Sanitary Eingineers*,3th Ed.McGrow-Hill Book Company, Tokyo.

Schhutz, Aurelien. & Lionel, Bombrun. (2013). Centroid-Based Texture Classification Using The Generalized Gamma Distribution. *HAL*, 00878744.

Sebah, Pascal., dan Gourdon, Xavier. (2002). Introduction to the Gamma Function.

Shin, H., Jung, Y., Jeong, C., & Heo, J.H.. (2011). Assessment of Modified Anderson-Darling Test Statistics for the Generalized Extreme Value and Generalized Logistic Distribution. *Stoch Environ Res Risk Asses, Springer-Verlag*. Doi: 10.10007/s00477-011-0463-y.

Stacy. E. (1962). A Generallization of The Gamma Distribution. *Annals of Mathematical Statistics*, 33: 1187-1192.

Spiegel, R. Murray. (2009). *Mathematical Handbook of Formulas and Tables 3nd*. New York : McGrawHill.

Suriawiria, U. (2003). *Mikrobiologi Air dan Dasar-Dasar Pengolahan Buangan Secara Biologis*. PT. Alumni. Bandung.

Wardana, W.A. (2004). *Dampak Pencemaran Lingkungan*. Yogyakarta: Andi

Walpole, E. Ronald.(2012). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists 6th Edition*. Boston: Pearson.

Williams, E. J., (1959). *Regression Analysis*, John Wiley & Sons, New York.

halaman ini sengaja dikosongkan

BIOGRAFI PENULIS

Penulis bernama Alvi Sahrin Nasution atau yang akrab disapa "Alvi" dilahirkan di Kota Padangsidempuan pada tanggal 20 Agustus 1990. Merupakan anak ketiga dari 3 bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal antara lain SDN 142427 Padangsidempuan, SMPN 5 Padangsidempuan, SMAN 3 Padangsidempuan. Setelah menyelesaikan pendidikan di bangku SMA, penulis melanjutkan pendidikan di bangku perkuliahan dan diterima di jurusan Matematika angkatan 2008 di Universitas Sumatera Utara. Setelah itu pada tahun 2013 penulis mengikuti program beasiswa 3T-PRASAINSTEK dan diterima di jurusan Matematika Institut Sepuluh November mengikuti perkuliahan setahun, kemudian melanjutkan pendidikan pascasarjana beasiswa BPPDN jurusan statistika angkatan 2014 di Institut Teknologi Sepuluh November. Pembaca yang ingin memberikan saran, kritik, serta pertanyaan untuk penulisan Tesis ini dapat dikirim melalui *email*: alvi14@mhs.statistika.its.ac.id