TESIS SS09-2304

MODEL REGRESI NONPARAMETRIK MULTIRESPON SPLINE TRUNCATED UNTUK DATA LONGITUDINAL

DITA AMELIA
NRP 1312 201 910

DOSEN PEMBIMBING
Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2014

THESIS SS09-2304

NONPARAMETRIC REGRESSION MODEL OF MULTIRESPON SPLINE TRUNCATED FOR LONGITUDINAL DATA

DITA AMELIA
NRP 1312 201 910

SUPERVISOR
Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si

PROGRAM OF MAGISTER
DEPARTMENT OF STATISTICS
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
INSTITUTE OF TECHNOLOGY SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2014

MODEL REGRESI NONPARAMETRIK MULTIRESPON SPLINE TRUNCATED UNTUK DATA LONGITUDINAL

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:
DITA AMELIA
NRP. 1312 201 910

Tanggal Ujian : 22 Juli 2014
Periode Wisuda : September 2014

Disetujui Oleh :

1. Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si. (Pembimbing)
   NIP. 19650603 198903 1 003
2. Dr. Vita Ratnasari, S.Si, M.Si. (Penguji)
   NIP. 19700910 199702 2 001
3. Dr. Ir. Setiawan, MS. (Penguji)
   NIP. 196010301987011 001

Direktur Program Pasca Sarjana ITS,

Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.
NIP. 19640405 199002 1 001

MODEL REGRESI NONPARAMETRIK MULTIRESPON *SPLINE TRUNCATED* UNTUK DATA LONGITUDINAL

Nama Mahasiswa : Dita Amelia
NRP : 1312 201 910
Pembimbing : Prof. Dr. Drs I Nyoman Budiantara, M.Si

ABSTRAK

Model regresi nonparametrik dan semiparametrik yang banyak digunakan dalam dasawarsa terakhir adalah regresi spline. Spline merupakan model yang mempunyai interpretasi statistik dan interpretasi visual yang sangat khusus dan sangat baik. Dalam kehidupan sehari-hari, untuk mendapatkan kesimpulan yang menyeluruh dan utuh terhadap suatu permasalahan maka seringkali harus melibatkan dua atau lebih variabel respon atau yang biasa disebut multirespon. Dalam analisis regresi, data yang seringkali digunakan adalah data *cross section*. Namun analisis regresi juga dapat diterapkan pada data longitudinal. Pada penerapannya dalam bidang sosial, studi data longitudinal juga digunakan dengan melibatkan subyek penelitian berupa wilayah. Beberapa permasalah sosial yang banyak dibahas belakangan ini adalah mengenai pertumbuhan penduduk Indonesia yang terus mengalami peningkatan. Melalui berbagai program Keluarga Berencana diharapkan dapat menekan laju pertumbuhan penduduk agar pertumbuhan penduduk tetap seimbang. Oleh karena itu, dilakukan analisis lebih lanjut untuk memperkirakan keberhasilan KB melalui indikator persentase CPR dan persentase *unmetneed* dengan variabel prediktor indeks kedalaman kemiskinan, persentase KK dengan pendidikan SLTP ke bawah, persentase wanita berumur 10 tahun ke atas dengan usia perkawinan pertama 18 tahun ke bawah, persentase wanita berumur 10 tahun ke atas yang pernah kawin dengan anak lahir hidup kurang atau sama dengan dua. Estimator model didapatkan dengan metode WLS dan menghasilkan $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{y}$. Pada tahapan aplikasi model digunakan data longitudinal dengan unit analisis 33 provinsi di Indonesia pada Tahun 2008 hingga 2012 yang terbagi dalam kelompok Jawa Bali, Luar Jawa Bali I, dan Luar Jawa Bali II. Dari ketiga kelompok tersebut didapatkan hasil bahwa knot optimum yang digunakan yaitu sebanyak tiga buah knot dengan nilai GCV 4,06 x 10^{-26} pada kelompok Jawa Bali, kelompok Luar Jawa Bali I 2,98 x 10^{-27}, dan 1,18 x 10^{-27} untuk kelompok Luar Jawa Bali II. Masing-masing variabel memberikan pengaruh yang berbeda pada setiap subyek.

Kata Kunci: *Spline, Multirespon, Data Longitudinal, KB, GCV*

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

NONPARAMETRIC REGRESSION MODEL OF MULTIRESPONE SPLINE TRUNCATED FOR LONGITUDINAL DATA

By : Dita Amelia
Student Identity Number : 1312 201 910
Supervisor : Prof. Dr. Drs I Nyoman Budiantara, M.Si

ABSTRACT

Nonparametric and semiparametric regression models are widely used in the last decade is spline regression. Spline is a model that has good statistical interpretation and visual interpretation. In everyday life, to get a comprehensive conclusion that often must involve two or more response variables or called multirespon. In regression analysis, the data that is often used is cross section data. However, regression analysis can also be applied to longitudinal data. In its application in social case, the study also used longitudinal data with region as subjects. Social problems are widely discussed lately is increase of Indonesia's population. Family planning program is expected to reduce the population growth rate in order to stay balanced. Therefore, further analysis to estimate success of family planning through CPR and unmetneed with predictor variables are poverty gap index, percentage of households education under junior high school, percentage of women at first marriage under 18 years old, percentage of women with children ever born under two child. Estimator models obtained with WLS method and produce $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{y}$. In the application, used 33 provinces in Indonesia on 2008 and 2012 as unit analysis were divided into groups of Jawa Bali, Luar Jawa Bali I and Luar Jawa Bali II. From three groups showed that, three knots are optimum knots with GCV 4,06 x 10^{-26} for Jawa Bali, Luar Jawa Bali I is 2,98 x 10^{-27} and 1,18 x 10-^{27} for Luar Jawa Bali II. Each of these variables have different effects on each subject.

Keywords: Spline, Multirespon, Longitudinal Data, Family Planning, GCV

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

KATA PENGANTAR

Puja dan puji syukur tak henti-hentinya penulis panjatkan atas kehadirat Allah SWT karena atas segala limpahan rahmat, hidayah, juga inayah-Nya serta segala petunjuk dan kemudahan-Nya Alhamdulillah penulis dapat menyelesaikan laporan tesis dengan judul "**Model Regresi Nonparametrik Multirespon Spline Truncated untuk Data Longitudinal**".

Selesainya laporan Tesis ini tak lepas dari peranan berbagai pihak. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada:

1. Kedua orang tua yang sangat saya cintai dan hormati, Bapak Haryono dan Ibu Atik Widayati, terima kasih atas segala doa dan dukungan yang tiada henti. Serta kepercayaan penuh yang Bapak dan Ibu berikan. Semoga selalu bisa membahagiakan Bapak dan Ibu. Serta adik-adik tersayang, Robby Kurniawan dan Syafri Bachtiar, semoga keberkahan dan kesuksesan senantiasa menyertai kita.
2. Pihak Pasca Sarjana ITS yang telah memberikan kesempatan pada saya untuk melanjutkan studi melalui program beasiswa Fasttrack ITS.
3. Bapak Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah memberikan banyak masukan serta dengan sabar menuntun saya dalam menyelesaikan Tesis ini.
4. Ibu Dr. Vita Ratnasari, S.Si, M.Si dan Bapak Dr. Ir. Setiawan, MS selaku dosen penguji yang telah memberikan banyak saran, kritik, serta masukan demi kesempurnaan Tesis ini.
5. Bapak Dr. Muhammad Mashuri, M.T, selaku ketua Jurusan Statistika FMIPA ITS sekaligus dosen wali saya, terimakasih banyak atas segala nasehat yang Bapak berikan.
6. Bapak Dr. Suhartono, M.Sc selaku kaprodi pasca sarjana Jurusan Statistika-ITS.
7. Bapak dan Ibu dosen pengajar Jurusan Statistika ITS, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan.

8. Ibu Dian, Ibu Nyigit, dan Bapak Romi dari Badan Koordinasi Keluarga Berencana Nasional (BKKBN) Provinsi Jawa Timur.
9. Segenap pihak Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Jawa Timur.
10. Bapak Drs. Gunawan, M.M dan Ibu Lusi, S.H serta segenap rekan di Sekretariat Balitbang Kemdikbud atas pengertian yang telah diberikan kepada saya.
11. Oka dan Romi, dua orang pecinta komputasi yang membantu saya menyelesaikan logika program untuk Tesis ini.
12. Achmad Choiruddin, rekan yang telah meyakinkan saya untuk mengambil kesempatan melanjutkan studi melalui beasiswa Fasttrack ITS.
13. Partner saya menyelesaikan Tesis di Perpustakaan ITS lantai 5 sekaligus partner jogging, Gilang Maulana Abdi.
14. Rekan-rekan fasttrack angkatan saya, Arum, Liya, Imam, Nashih, Iis, Elvira, Wahyu, Mike, Dian, Dinarta, dan Dimas.
15. Teman-teman pasca sarjana Statistika lainnya, semoga komunikasi yang baik tetap terjalin.
16. Geng Akur yang selalu mendukung saya, Camon, Windhy, Fendia, dan Billy.
17. Geng kosan 25 S, syukur Alhamdulillah tinggal bersama orang-orang baik seperti kalian. Semangat untuk Tesis dan Skripsi nya teman-teman.
18. Serta semua pihak yang tidak dapat saya sebutkan satu-persatu.

Besar harapan penulis agar Tesis ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa Tesis ini belum sempurna, oleh karena itu saran dan kritik yang membangun sangat penulis harapkan.

Surabaya, Juni 2014

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
LEMBAR PENGESAHAN iii
ABSTRAK v
ABSTRACT vii
KATA PENGANTAR ix
DAFTAR ISI xi
DAFTAR GAMBAR xiii
DAFTAR TABEL xv
DAFTAR LAMPIRAN xvii
DAFTAR NOTASI xix

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Perumusan Masalah 6
1.3 Tujuan Penelitian 6
1.4 Manfaat Penelitian 6
1.5 Batasan Masalah 6

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 9
2.1 Analisis Regresi 9
2.2 Regresi Parametrik 10
2.3 Regresi Nonparametrik 11
2.4 Spline dalam Regresi Nonparametrik 12
2.5 Data Longitudinal 13
2.6 Regresi Nonparametrik *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal 15
2.7 Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal 18
2.8 Pemilihan Titik Knot Optimal 19
2.9 Keberhasilan KB 19

BAB III METODE PENELITIAN 21
3.1 Langkah Analisis untuk Mendapatkan Estimator Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated untuk* Data Longitudinal 21
3.2 Aplikasi Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal pada Studi Kasus Keberhasilan KB di Indonesia 24

3.2.1 Sumber Data dan Variabel Penelitian 24
3.2.2 Struktur Data 31
3.2.3 Model Regresi Nonparametrik Birespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal 33
3.2.4 Langkah Analisis 33

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN 37
4.1 Estimasi Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal 37
4.2 Sifat-sifat Estimator Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal..... .57
4.3 Aplikasi Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal 59
4.3.1 Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal Kelompok Jawa Bali 66
4.3.2 Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal Kelompok Luar Jawa Bali I 70
4.3.3 Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal Kelompok Luar Jawa Bali II 75
4.4 Pembahasan Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal pada Data Keberhasilan KB 80

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN 89
5.1 Kesimpulan ..... .89
5.2 Saran 90

DAFTAR PUSTAKA 91

LAMPIRAN 97

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Bagan Alur Estimasi *Spline Truncated* Multirespon pada Data Longitudinal 34

Gambar 3.2 Bagan Alur Aplikasi Model *Spline Truncated* Multirespon pada Data Longitudinal 35

Gambar 4.1 Persentase CPR Indonesia Tahun 2008-2012 60

Gambar 4.2 Persentase *Unmet Need* Indonesia Tahun 2008-2012 60

Gambar 4.3 Indeks Kedalaman Kemiskinan Indonesia Tahun 2008-2012 61

Gambar 4.4 Persentase KK dengan Pendidikan SLTP ke Bawah Tahun 2008-2012 61

Gambar 4.5 Persentase Wanita Berumur 10 Tahun ke Atas dengan Usia Perkawinan Pertama 18 Tahun ke Bawah pada Tahun 2008-2012 62

Gambar 4.6 Persentase Wanita Berumur 10 Tahun ke Atas yang Pernah Kawin dengan Anak Lahir Hidup Kurang atau Sama dengan dua pada Tahun 2008-2012 62

Gambar 4.7 Pembagian Kelompok Provinsi Berdasarkan BKKBN 64

Gambar 4.8 *Scatter Plot* antara Variabel Respon dengan Masing-masing Variabel Prediktor pada Kelompok Jawa Bali 64

Gambar 4.9 *Scatter Plot* antara Variabel Respon dengan Masing-masing Variabel Prediktor pada Kelompok Luar Jawa Bali I 65

Gambar 4.10 *Scatter Plot* antara Variabel Respon dengan Masing-masing Variabel Prediktor pada Kelompok Luar Jawa Bali II 65

Gambar 4.11 Pengaruh x_1 Terhadap Respon di Kelompok Jawa Bali 86

Gambar 4.12 Pengaruh x_2 Terhadap Respon di Kelompok Jawa Bali 86

Gambar 4.13 Pengaruh x_3 Terhadap Respon di Kelompok Jawa Bali 87

Gambar 4.14 Pengaruh x_4 Terhadap Respon di Kelompok Jawa Bali 87

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Struktur Data Longitudinal Multirespon 14
Tabel 3.1 Variabel Penelitian 24
Tabel 3.2(a) Kelompok Provinsi Jawa Bali Berdasarkan BKKBN 31
Tabel 3.2(b) Kelompok Provinsi Luar Jawa Bali I dan II Berdasarkan BKKBN 31
Tabel 3.3 Struktur Data Penelitian untuk Kelompok Jawa Bali 32
Tabel 4.1 Statistika Deskriptif dari Variabel Penelitian 63
Tabel 4.2 Ringkasan GCV Terkecil untuk 1 Knot Kelompok Jawa Bali 67
Tabel 4.3 Ringkasan GCV Terkecil untuk 2 Knot Kelompok Jawa Bali 67
Tabel 4.4 Ringkasan GCV Terkecil untuk 3 Knot Kelompok Jawa Bali 68
Tabel 4.5 Estimasi Parameter untuk Provinsi DKI Jakarta 69
Tabel 4.6 Ringkasan GCV Terkecil untuk 1 Knot Kelompok Luar Jawa Bali I 70
Tabel 4.7 Ringkasan GCV Terkecil untuk 2 Knot Kelompok Luar Jawa Bali I 71
Tabel 4.8 Ringkasan GCV Terkecil untuk 3 Knot Kelompok Luar Jawa Bali I 72
Tabel 4.9 Estimasi Parameter untuk Provinsi Aceh 74
Tabel 4.10 Ringkasan GCV Terkecil untuk 1 Knot Kelompok Luar Jawa Bali II 75
Tabel 4.11 Ringkasan GCV Terkecil untuk 2 Knot Kelompok Luar Jawa Bali II 76
Tabel 4.12 Ringkasan GCV Terkecil untuk 3 Knot Kelompok Luar Jawa Bali II 77
Tabel 4.13 Estimasi Parameter untuk Provinsi Riau 79
Tabel 4.14 Kombinasi Nilai Variabel untuk Provinsi DKI Jakarta 82

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Keberhasilan KB dan Faktor-faktor yang Diduga Mempengaruhinya Tahun 2008-2012 untuk Kelompok Jawa Bali 97

Lampiran 2. Data Keberhasilan KB dan Faktor-faktor yang Diduga Mempengaruhinya Tahun 2008-2012 untuk Kelompok Luar Jawa Bali I 98

Lampiran 3. Data Keberhasilan KB dan Faktor-faktor yang Diduga Mempengaruhinya Tahun 2008-2012 untuk Kelompok Luar Jawa Bali II 100

Lampiran 4. Program GCV 1 Knot dengan *Software* R 102

Lampiran 5. Program GCV 2 Knot dengan *Software* R 104

Lampiran 6. Program GCV 3 Knot dengan *Software* R 107

Lampiran 7. Program Estimasi Parameter dengan 1 Knot 110

Lampiran 8. Program Estimasi Parameter dengan 2 Knot 112

Lampiran 9. Program Estimasi Parameter dengan 3 Knot 115

Lampiran 10. Langkah-langkah Penggunaan Program 118

Lampiran 11. Estimasi Parameter Kelompok Jawa Bali 121

Lampiran 12. Estimasi Parameter Kelompok Luar Jawa Bali I 124

Lampiran 13. Estimasi Parameter Kelompok Luar Jawa Bali II 129

Lampiran 14. Pengaruh Variabel Prediktor di Kelompok Jawa Bali 134

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR NOTASI

l	: Banyaknya variabel respon
p	: Banyaknya variabel prediktor
m	: Banyaknya subyek
n	: Banyaknya pengamatan dalam setiap subyek
y_{kji}	: Respon ke-k pada subyek ke-j pengamatan ke-i dengan $k = 1,2,\ldots,l$, $j = 1,2,\ldots,m$, dan $i = 1,2,\ldots,n$
x_{skji}	: Prediktor ke-s pada respon ke-k subyek ke-j dan pengamatan ke-i dengan $s = 1,2,\ldots,p$, $k = 1,2,\ldots,l$, $j = 1,2,\ldots,m$, dan $i = 1,2,\ldots,n$
K	: Knot
Q	: Derajat polinomial fungsi spline
R	: Banyaknya knot
$\mathbf{y}$	: Vektor respon
$\mathbf{A}$	: Matriks orde, segmentasi, dan parameter per prediktor
$\boldsymbol{\varepsilon}$	: Matriks error
$\mathbf{B}$	: Matriks orde dan segmentasi per prediktor
$\boldsymbol{\gamma}$	: Vektor parameter per prediktor
α	: Parameter untuk orde
δ	: Parameter untuk segmentasi
$\mathbf{V}$	: Matrik pembobot
$\mathbf{M}$	: Matriks orde dan segmentasi per respon per subyek
$\boldsymbol{\theta}$	: Vektor parameter
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	: Vektor estimasi parameter

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam beberapa kasus penelitian, sering diinginkan untuk mengetahui pola hubungan fungsional antara satu variabel atau lebih. Metode yang sering kali digunakan adalah analisis regresi. Analisis regresi merupakan sebuah analisa statistika yang digunakan untuk mengetahui pola hubungan antara satu atau lebih variabel. Variabel yang termuat dalam analisis regresi terdiri atas variabel respon dan variabel prediktor. Untuk dapat memodelkan satu atau lebih variabel, pertama yang mestinya dilakukan adalah menyelidiki apakah variabel-variabel tersebut secara rasional berkorelasi atau tidak. Apabila secara rasional berkorelasi, maka dapat dilakukan pemodelan statistika dengan menggunakan analisis regresi (Budiantara, 2009).

Terdapat tiga jenis regresi yang dikembangkan oleh para peneliti yaitu regresi parametrik, regresi nonparametrik, dan regresi semiparametrik. Regresi parametrik yaitu regresi dimana bentuk pola kurva regresinya diketahui sedangkan regresi nonparametrik bentuk pola kurva regresinya tidak diketahui. Sementara itu, apabila sebagian bentuk pola kurva regresinya diketahui dan sebagian lagi tidak diketahui maka analisis regresi yang digunakan adalah regresi semiparametrik. Umumnya dalam analisis regresi, sebelum melakukan pemodelan menggunakan salah satu dari ketiga jenis regresi, didahului dengan memeriksa *scatter plot* antara masing-masing variabel prediktor dengan variabel respon. Apabila *scatter plot* menunjukkan kecenderungan data mengikuti pola linear, kuadratik, kubik, atau polinomial maka digunakan model regresi parametrik. Namun apabila *scatter plot* antara variabel prediktor dan variabel respon tidak menunjukkan kecenderungan data mengikuti suatu pola tertentu maka yang digunakan adalah model regresi nonparametrik. Beberapa model regresi nonparametrik yang banyak digunakan antara lain spline, polinomial lokal, deret orthogonal, deret fourier, wavelets, MARS, dan lain sebagainya. Beberapa penelitian dengan pendekatan semiparametrik dan nonparametrik diantaranya

dilakukan oleh Kadiri, Carrol, Wand (2010) dengan pendekatan regresi semiparametrik marginal longitudinal. Cox dan O'Sullivan (1996) dengan *generalized nonparametric regression*. Chamidah, Budiantara, Zain (2012) menggunakan pemodelan berbasis polinomial lokal untuk memodelkan grafik pertumbuhan pada anak, dengan studi kasus yang sama, Chamidah dan Saifudin (2013) melakukan penelitian dengan pendekatan kernel *smoothing*.

Model regresi nonparametrik dan semiparametrik yang banyak digunakan dalam dasawarsa terakhir adalah regresi spline. Spline merupakan model yang mempunyai interpretasi statistik dan interpretasi visual yang sangat khusus dan sangat baik. Model spline diperoleh dari optimasi *Penalized Least Square* (PLS) dan memiliki fleksibilitas yang tinggi. Selain itu, spline mampu menangani data/fungsi yang mulus (*smooth*). Spline juga memiliki kemampuan yang sangat baik untuk menangani data yang perilakunya berubah-ubah pada sub-sub interval tertentu. Metode regresi nonparametrik spline banyak digunakan oleh beberapa peneliti diantaranya Tripena (2011), Lin, Wang, Welsh, Carrol (2004) dengan menggunakan pendekatan *smoothing spline*. Pendekatan *smoothing spline* juga dilakukan oleh Oehlert (1992), Guo (2002), Eubank, dkk (2004). Gao dan Shi (1997) dengan *m-type smoothing spline*.

Pada penelitian-penelitian tersebut, variabel respon yang digunakan adalah tunggal atau hanya melibatkan satu variabel respon. Dalam banyak kasus, untuk mendapatkan kesimpulan yang menyeluruh dan utuh terhadap suatu permasalahan maka seringkali harus melibatkan dua atau lebih variabel respon atau yang biasa disebut dengan birespon ataupun multirespon. Adapun beberapa penelitian menggunakan pendekatan birespon ataupun multirespon diantaranya Lestari, Budiantara, Sunaryo, dan Mashuri (2010) dengan pendekatan regresi nonparametrik spline, sementara Wang, Guo, dan Brown (2000) menggunakan pendekatan *smoothing spline* data bivariat untuk studi kasus dalam bidang kesehatan.

Dalam analisis regresi, data yang digunakan adalah data *cross section*. Namun analisis regresi juga dapat diterapkan pada data longitudinal atau yang biasa disebut data panel. Data longitudinal merupakan gabungan antara data *cross section* dengan data *time series* (Gujarati, 2003). Dinamakan data longitudinal

seimbang (*balanced panel data*) apabila masing-masing unit *cross section* memiliki jumlah pengamatan *time series* yang sama. Namun apabila apabila masing-masing unit *cross section* memiliki jumlah pengamatan *time series* yang tidak sama disebut data longitudinal tidak seimbang (*unbalanced panel data*). Terdapat beberapa keuntungan dalam penggunaan data longitudinal diantaranya mengurangi koliniearitas antar variabel sehingga dapat menghasilkan estimasi yang efisien (Hsiao, 2003). Hal ini juga diperkuat oleh Wu dan Zhang (2006) yang mengatakan bahwa dengan menggunakan studi data longitudinal dapat mengetahui perubahan individu, dibutuhkan subyek yang tidak terlalu banyak karena pengamatannya berulang, dan estimasinya lebih efisien karena dilakukan setiap pengamatan. Beberapa studi dengan data longitudinal dilakukan oleh Yao, Muller, Wang (2004) dengan regresi linear. Liang dan Zeger (1986) menggunakan *generalized linear models* (GLM), Menictas dan Wand (2013) dengan menggunakan metode bayesian. Sementara itu, Fan dan Zhang (2002) menggunakan metode lokal polinomial *smoothing*.

Studi longitudinal dengan pendekatan regresi nonparametrik juga telah dikembangkan oleh beberapa peneliti diantaranya Durban, Harezlak, Wand, dan Carrol (2004) dengan pendekatan spline. Ibrahim dan Suliadi (2008) dengan *gee-smoothing spline*. Liang dan Xiao (2006) menggunakan *penalized splines* dengan studi kasus AIDS. Sedangkan Laome (2009) menggunakan pendekatan model regresi semiparametrik spline untuk data longitudinal pada kasus kadar CD4 penderita HIV. Sebagai pengembangan studi data longitudinal dengan pendekatan nonparametrik dengan melibatkan lebih dari satu variabel respon, Prahutama (2013) melakukan pemodelan regresi nonparametrik polinomial lokal birespon pada data longitudinal. Dari penelitian-penelitian sebelumnya, data longitudinal yang digunakan adalah data dengan subyek penelitian berupa individu/perorangan. Dalam penerapannya dalam bidang sosial, studi data longitudinal juga digunakan dengan melibatkan subyek penelitian berbasis area atau wilayah. Penelitian menggunakan data longitudinal dengan subyek penelitian adalah wilayah dilakukan oleh Melliana (2013) mengenai faktor-faktor yang mempengaruhi indeks pembangunan manusia di kabupaten/kota di provinsi Jawa

Timur dengan subyek penelitian adalah sebanyak 38 kabupaten/kota di provinsi Jawa Timur.

Beberapa permasalah sosial yang banyak dibahas belakangan ini adalah mengenai pertumbuhan penduduk Indonesia yang terus mengalami peningkatan dari tahun ke tahun. Berdasarkan hasil sensus penduduk Tahun 2000 diketahui bahwa penduduk Indonesia sebanyak 205.132.458 jiwa. Hasil sensus penduduk Tahun 2010 menunjukkan adanya peningkatan jumlah penduduk dengan total jumlah penduduk Indonesia sebanyak 237.641.326 jiwa dengan laju pertumbuhan penduduk per tahunnya yaitu 1,49 (BPS, 2013). Dalam mengatasi permasalahan tersebut, Badan Koordinasi Keluarga Berencana Nasional (BKKBN) mempunyai peranan yang sangat penting. Melalui berbagai program Keluarga Berencana diharapkan dapat mengurangi laju pertumbuhan penduduk agar pertumbuhan penduduk tetap seimbang. Salah satu program utama dari BKKBN yaitu berkenaan dengan pemakaian alat kontrasepsi atau program KB.

Di dalam Renstra BKKBN Tahun 2010-2014 dijelaskan mengenai sasaran yang sangat penting yaitu sasaran dalam program KB pada RPJM (Rencana Pembangunan Jangka Menengah) Tahun 2010-2014 dimana diharapkan laju pertumbuhan penduduk turun rata-rata 1,1% per tahun, rata-rata kelahiran total (TFR) 2,1 per perempuan, NRR=1, *unmet need* 5%, KB pria 3,5%, rata-rata penggunaan kontrasepsi (CPR) cara modern 65%, kehamilan tidak diinginkan 15%, usia kawin pertama menjadi 21 tahun dan menurunnya kelahiran usia remaja 30 per 1.000 wanita usia 15-19 tahun (BKKBN, 2010). Oleh karena itu, keberhasilan program KB merupakan hal yang sangat penting dan menarik untuk dianalisis. Yulikah (2011) menuliskan indikator keberhasilan program KB bisa dilihat dari rata-rata penggunaan kontrasepsi (CPR) dan *unmet need*.

Berdasarkan *Preliminary Report* (2012) yang menjelaskan mengenai penggunaan KB pada wanita menikah berusia 15-46 tahun berdasarkan karakteristiknya diketahui bahwa 62% dari wanita menikah usia 15-49 tahun di Indonesia menggunakan metode KB. Kebanyakan wanita memilih menggunakan metode kontrasepsi modern yaitu sebanyak 58%. Metode KB yang paling populer adalah KB suntik yaitu 32% dan KB pil sebanyak 14%. Selain pada wanita, KB juga diterapkan pada pria. Program yang mendorong partisipasi pria untuk ber-KB

telah dilakukan selama beberapa tahun, namun penggunaan metode kontrasepsi ini masih rendah. Penggunaan metode kontrasepsi juga bervariasi menurut tingkat pendidikan. Suntik KB merupakan metode yang paling populer pada semua kategori pendidikan wanita. IUD, kondom, dan sterilisasi wanita lebih banyak digunakan oleh wanita berstatus kawin dengan tingkat pendidikan lebih tinggi. *Unmet need* menggambarkan persentase wanita usia subur yang tidak menggunakan alat/cara kontrasepsi namun menginginkan penundaan kehamilan (penjarangan sampai dengan 24 bulan) atau berhenti sama sekali (pembatasan). Menurut SDKI 2012, kebutuhan pelayanan KB yang tidak terpenuhi (*unmet need*) pada wanita berstatus kawin umur 15-49 tahun adalah 11,4 persen dengan 5 persen untuk penundaan kelahiran, dan 6,9 persen untuk membatasi kelahiran (BKKBN, 2013). Selama selang antara Tahun 2008 hingga 2012 ada beberapa program yang dilakukan oleh BKKBN dalam upaya meningkatkan persentase CPR dan menurunkan persentase *unmet need* . Persentase CPR pada selang waktu Tahun 2008 hingga 2012 memang mengalami tren naik namun kenaikan tersebut tidak terlalu signifikan yaitu hanya 1,47 persen. Sementara untuk *unmeet need* mengalami tren turun hingga mencapai penurunan sebesar 1,9 persen pada Tahun 2012. Persentase CPR tinggi dan persentase *unmet need* rendah inilah yang menjadi acuan untuk mengukur keberhasilan program Keluarga Berencana (KB).

Data yang digunakan merupakan data pada Tahun 2008 hingga 2012 dengan mengacu pada RPJM Tahun 2010-2014 sehingga diambillah selang tahun sebelum terbentuknya RPJM. RPJM 2010-2014 merupakan tahapan ke-2 dari RPJP (Rencana Pembangunan Jangka Panjang) Tahun 2005-2025 yang ditujukan untuk lebih memantapkan kembali Indonesia di segala bidang dengan menekankan upaya peningkatan kualitas sumber daya manusia yang melibatkan berbagai bidang pembangunan termasuk pembangunan kependudukan dan keluarga berencana. Pada Tahun 2008 juga merupakan tahun dimana dilaksanakannya DAK (Dana Alokasi Khusus) BKKBN untuk pertama kalinya. Oleh karena itu, perlu dilakukan analisis lebih lanjut untuk memperkirakan keberhasilan KB melalui indikator-indikator yang ada berdasarkan faktor-faktor yang diduga berpengaruh dimana pendekatan ini menggunakan data longitudinal dengan pendekatan regresi nonparametrik *spline truncated*.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menetukan estimasi model regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal dan sifat-sifatnya?
2. Bagaimana aplikasi regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal pada kasus keberhasilan KB di Indonesia?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji estimasi model regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal dan sifat-sifatnya
2. Mengaplikasikan regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal pada studi kasus keberhasilan KB di Indonesia

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut :

1. Menambah wawasan keilmuan dan pengetahuan mengenai model regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal dan sifat-sifatnya.
2. Menambah pemahaman aplikasi model regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal dalam studi kasus keberhasilan KB di Indonesia.

1.5 Batasan Masalah

Berdasarkan tujuan permasalahan yang telah diuraikan sebelumnya, maka batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Estimasi model regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* menggunakan metode *Weighted Least Square* (WLS)
2. Pemilihan titik knot optimal menggunakan metode *Generalized Cross Validation* (GCV)
3. *Package* program menggunakan pendekatan spline linear

4. *Package* program menggunakan knot sebanyak 1, 2, dan 3 knot
5. *Package* program pada estimasi dibatasi dengan jumlah pengamatan dalam setiap subyek adalah sama
6. *Package* program dibatasi dengan segmentasi yang sama untuk setiap variabel respon
7. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data Tahun 2008 hingga Tahun 2012

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Tinjauan pustaka mendukung penyelesaian permasalahan dalam penelitian ini. Terdapat beberapa hal yang akan dibahas pada bab ini, yaitu mengenai analisis regresi, regresi parametrik, regresi nonparametrik, spline dalam regresi nonparametrik, data longitudinal, estimator spline untuk data longitudinal, regresi nonparametrik *spline truncated* untuk data longitudinal, regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal, pemilihan titik knot optimal, koefisien determinasi, dan penjelasan mengenai keberhasilan KB.

2.1 Analisis Regresi

Istilah regresi pertama kali diperkenalkan oleh Francis Galton yang mengaitkan antara tinggi badan anak dengan tinggi badan orang tua. Analisis regresi mengalami perkembangan pesat dan banyak digunakan dalam penelitian. Analisis regresi berkaitan dengan studi ketergantungan antara satu variabel yaitu variabel respon atau variabel dependen dengan satu atau lebih variabel lain yaitu variabel penjelas atau independen dengan maksud untuk mengestimasi atau memprediksi (Gujarati, 2003). Bentuk paling dasar dari regresi adalah regresi linear. Berdasarkan prinsip parsimoni, apabila terdapat dua model yang mampu menjelaskan nilai variabilitas yang hampir sama maka tugas dari seorang statistisi adalah untuk memilih model yang lebih sederhana diantara dua model tersebut. Berdasarkan hal tersebut, banyak analisis yang pada akhirnya memilih menggunakan regresi linear. Tidak hanya mudah dipahami, regresi linear juga mudah untuk dilakukan (Claussen, 2012).

Diberikan data berpasangan $(x_i, y_i), i = 1,2,\ldots,n$ maka model regresi linear yang terbentuk adalah

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \qquad (2.1)$$

Berdasarkan model (2.1), pada suatu titik x_i tertentu, estimasi nilai yang diharapkan untuk pengamatan $\hat{y}_i$ yang baru atau prediksi dari $\hat{y}_i$ pada titik x_i diberikan oleh

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i \tag{2.2}$$

dimana b_0 dan b_1 merupakan estimasi dari parameter β_0 dan β_1. Estimasi parameter biasanya dilakukan dengan metode *Ordinary Least Square* (Green dan Silverman, 1994). Metode OLS dilakukan dengan meminimumkan *sum of squared* residual $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$, setelah diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}$ maka diperoleh estimator

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} \tag{2.3}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$

2.2 Regresi Parametrik

Dalam analisis regresi, hal yang menjadi perhatian adalah fungsi dari kurva regresi. *Scatterplot* merupakan alat bantu yang bisa menjelaskan apakah suatu kurva regresi bentuk polanya diketahui atau tidak diketahui. *Scatterplot* akan membantu untuk memberikan informasi apakah suatu fungsi dari kurva regresi mengikuti pola linear, kuadratik, polinomial, atau bahkan tidak mengikuti suatu pola tertentu. Dimisalkan $(x_i, y_i), i = 1,2,\ldots,n$ dimana antara x_i dan y_i dihubungkan oleh model regresi berikut

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \; i = 1,2,\ldots,n \tag{2.4}$$

Model regresi parametrik mengasumsikan bahwa bentuk f diketahui. Dalam hal ini diasumsikan bahwa terdapat sebuah vektor yang berisi sekumpulan parameter $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)^T$ dengan fungsi $f(.;\beta)$ yang diketahui sehingga $f(.) = f(.;\beta)$. Regresi parametrik dapat pula memiliki parameter linear ataupun nonlinear (Eubank, 1999). Model regresi parametrik dengan semua parameternya linear yaitu apabila fungsi dari $x_1, x_2, \ldots, x_p$ adalah

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j \qquad (2.5)$$

Model (2.5) adalah model regresi parametrik linear. Bentuk pola kurva regresi yang diketahui inilah merupakan ciri dari regresi parametrik dimana terdapat asumsi yang sangat kaku dan kuat apakah itu mengikuti pola linear, kuadratik, polinomial derajat p, eksponen, dan pola-pola lainnya (Budiantara, 2009).

2.3 Regresi Nonparametrik

Regresi nonparametrik merupakan teknik yang dapat mengatasi kesulitan dalam teknik regresi parametrik dimana bentuk fungsi dari kurva regresi f harus diketahui (Eubank, 1999). Menurut Hardle (1994), pendekatan regresi nonparametrik untuk mengestimasi kurva regresi memiliki beberapa tujuan utama. Diantaranya yaitu menyediakan metode yang dapat digunakan dalam berbagai kondisi untuk mengeksplorasi hubungan antara dua variabel. Memberikan prediksi pengamatan yang belum dapat dibuat tanpa adanya referensi untuk model parametrik tertentu.

Dalam model regresi nonparametrik bentuk kurva regresi diasumsikan tidak diketahui. Kurva regresi hanya diasumsikan halus (*smooth*) dalam arti termuat di dalam suatu ruang fungsi tertentu. Berbeda dengan regresi parametrik yang tanpa disadari cenderung ada unsur pemaksaan dari peneliti dan tanpa disadari pula peneliti ikut campur tangan dalam menentukan bentuk estimasi dari kurva regresi, maka dalam regresi nonparametrik hal ini tidak terjadi (Budiantara, 2009).

Diberikan data (x_i, y_i) dengan hubungan antara x_i dan y_i diasumsikan mengikuti model regresi nonparamterik : $y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, i = 1,2,\ldots,n$ dengan $f(x_i)$ merupakan kurva regresi yang diasumsikan licin (*smooth*) dalam arti merupakan anggota ruang fungsi tertentu (*sobolev order dua*), khususnya $f \in W_2^m[a,b]$ dengan

$$W_2^m[a,b] = \left\{ f : \int_a^b \left[f^{(m)}(x) \right]^2 dx < \infty \right\} \qquad (2.6)$$

untuk suatu m bilangan bulat positif (Budiantara, 2001). Estimasi untuk kurva regresi nonparametrik f diperoleh dari optimasi *Weighted Penalized Least Square* atau WPLS (Budiantara dan Purnomo, 2011) :

$$\underset{f \in W_2^m[a,b]}{Min} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i) \right)^2 + \lambda \int_a^b \left(f^{(m)}(x) \right)^2 dx \right\} \tag{2.7}$$

Beberapa model regresi nonparametrik yang banyak digunakan diantaranya Spline, Kernel, Deret Fourier, Polinomial Lokal, dan MARS.

2.4 Spline dalam Regresi Nonparametrik

Spline truncated mempunyai fungsi yang didefinisikan sebagai berikut

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x^{j-1} + \sum_{j=1}^{k} \delta_j \left(x - K_j \right)_+^{m-1} \tag{2.8}$$

f merupakan fungsi spline orde m dengan knot $K_1, \ldots, K_k$. Diberikan sebuah $\lambda = \{K_1, \ldots, K_k\}$, sehingga f dapat diestimasi dengan mengistimasi koefisien pada persamaan (2.8). Salah satu metode yang dapat digunakan adalah metode *least squares*.

$t_j(x) = x^{j-1}$, $j = 1, \ldots, m$,

$t_{m+j}(x) = \left(x - K_j \right)_+^{m-1}$, $j = 1, \ldots, k$,

dan

$\beta = \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \delta_1, \ldots, \delta_k \right)^T$

Least squares estimator spline, f diberikan oleh

$$f_\lambda = \sum_{j=1}^{m+k} b_{\lambda j} t_j, \tag{2.9}$$

dimana $b_\lambda = \left(b_{\lambda 1}, \ldots, b_{\lambda(m+k)} \right)^T$ adalah estimator dari β yang diperoleh dengan meminimumkan *sum of squares* residual. Jika $\mathbf{y}$ adalah vektor variabel respon dan $\mathbf{X}_\lambda$ mempunyai rank $m + k$, sehingga dapat dituliskan,

$$\mathbf{b}_\lambda = \left(\mathbf{X}_\lambda^{\mathrm{T}} \mathbf{X}_\lambda \right)^{-1} \mathbf{X}_\lambda^{\mathrm{T}} \mathbf{y} \tag{2.10}$$

dimana $\mathbf{X}_\lambda = \left\{ t_j(x_i) \right\}_{i=1,n,\, j=1,m+k}$

Berdasarkan persamaan (2.9) dan (2.10), f_λ adalah estimator linear dari f. Sedangkan λ adalah titik-titik knot. Pemilihan λ ini bergantung kepada dua hal yaitu banyaknya dan letak titik knot pada fungsi spline. Apabila banyaknya knot K meningkat maka akan menghasilkan estimator yang semakin fleksibel karena penempatan knot di sebuah area akan membuat estimator beradaptasi secara lebih dengan data di area tersebut. Ketika hanya beberapa knot yang digunakan, maka estimator cenderung halus namun cenderung mirip seperti polinomial orde m (Eubank, 1999).

Eubank (1999) memberikan beberapa aturan dalam menentukan lokasi knot berdasarkan pertimbangan-pertimbangan yaitu:

1. Untuk spline linear ($m = 2$), letakkan knot pada titik dimana data menunjukkan perubahan pola perilaku atau perubahan pada *slope*
2. Untuk spline kuadratik ($m = 3$), letakkan knot dekat lokal maksimum, minimum, atau *infiection points* pada data
3. Untuk spline kubik ($m = 4$), susun knot sehingga dekat dengan *infiection points* pada data dan tidak melebihi titik ekstrim (maksimum atau minimum) dan satu *infiection points* terjadi di antara dua titik knot

2.5 Data Longitudinal

Dalam analisis regresi, data yang banyak digunakan adalah data *cross section*. Data *cross section* mengacu pada data yang dikumpulkan dengan mengamati sejumlah subyek seperti individu ataupun wilayah pada titik waktu yang sama, dengan kata lain tanpa memperhatikan perbedaan waktu. Selain data *cross section* ada pula data longitudinal atau data panel. Data longitudinal merupakan data *cross section* yang memperhatikan adanya perbedaan waktu. Data tersebut akan mengikuti perubahan suatu subyek dari waktu ke waktu. Penggunaan data longitudinal telah banyak dilakukan dalam beberapa dekade terakhir. Hal ini dikarenakan data longitudinal memiliki beberapa aplikasi praktis dalam berbagai bidang seperti kedokteran, ekologi, epidemiologi, kesehatan, dan lai-lain. Dalam data longitudinal, pengamatan terhadap individu atau subyek penelitian dilakukan selama periode waktu tertentu agar supaya didapatkan

pemahaman yang lebih baik dalam hal menganalisis hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor (Kadiri, Mustafa, dan Finch, 2010). Sedangkan Diggle (2002) mendefinisikan karakter dari suatu studi longitudinal yaitu bahwa suatu subyek individu diukur berulang kali dalam kurun waktu tertentu. Studi longitudinal merupakan kebalikan dari studi data *cross section* dimana pengukuran untuk setiap subyek atau individu dilakukan dalam waktu tunggal tidak berulang. Data longitudinal dapat dikumpulkan baik secara prospektif yaitu yaitu subyek mengikuti waktu yang bergerak maju ataupun retrospektif yaitu dengan mengekstraksi beberapa pengukuran setiap subyek di masa lalu.

Apabila dilihat berdasarkan pendekatan regresi, regresi nonparametrik diketahui lebih adaptif terhadap data dan tidak memerlukan asumsi yang kaku atau ketat dibandingkan dengan pendekatan regresi parametrik, sehingga regresi nonparametrik merupakan alternatif yang baik untuk menangani data longitudinal (Wang, 2003). Penggunaan data longitudinal memberikan beberapa keunggulan diantaranya mengurangi kolinearitas antar variabel sehingga dapat menghasilkan estimasi yang efisien.

Tabel 2.1 Struktur Data Longitudinal Multirespon

Subyek ke- j	Pengamatan ke- i $(i=1,2,\ldots,n)$	Variabel Prediktor ke- s $(s=1,2,\ldots,p)$			Variabel Respon ke- k $(k=1,2,\ldots,l)$		
		x_1	…	x_p	y_1	…	y_l
Subyek ke-1	1	x_{111}		x_{p11}	y_{111}		y_{l11}
	2	x_{112}		x_{p12}	y_{112}		y_{l12}
	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮
	n	x_{11n}	…	x_{p1n}	y_{11n}	…	y_{l1n}
Subyek ke- 2	1	x_{121}		x_{p21}	y_{121}		y_{l21}
	2	x_{122}		x_{p22}	y_{122}		y_{l22}
	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮
	n	x_{12n}	…	x_{p2n}	y_{12n}	…	y_{l2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Subyek ke- m	1	x_{1m1}		x_{pm1}	y_{1m1}		y_{lm1}
	2	x_{1m2}		x_{pm2}	y_{1m2}		y_{lm2}
	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮
	n	x_{1mn}	…	x_{pmn}	y_{1mn}	…	y_{lmn}

Data longitudinal memperbolehkan peneliti untuk menganalisis sejumlah pertanyaan yang tidak dapat dipecahkan hanya dengan menggunakan data *cross section* atau data *time series* (Hsiao, 2003). Dalam perkembangannya, penggunaan data longitudinal tidak hanya difokuskan untuk mencari hubungan antara satu variabel respon dengan beberapa variabel prediktor, namun berkembang untuk menyelidiki hubungan dengan lebih dari satu variabel respon atau yang biasa disebut multirespon. Weiss (2005) berpendapat bahwa pada data longitudinal apabila terdapat lebih dari satu respon, maka terdapat korelasi dari setiap respon pada subyek yang sama. Bentuk struktur data longitudinal multirespon sebagaimana yang tercantum dalam Tabel 2.

2.6 Regresi Nonparametrik *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal

Takezawa (2006) menjelaskan bahwa dalam *spline truncated* digunakan *truncated power basis* dengan knot $K=(K_1,K_2,\dots K_K)$ adalah $\left\{1,x,x^2,\dots,x^Q,(x-K_1)_+^Q,\dots,(x-K_K)_+^Q\right\}$ dimana $q=1,2,\dots,Q$ menunjukkan derajat polinomial dari *truncated power basis*, untuk $q=1,2,3$ berturut-turut merupakan *truncated power basis* linear, kuadratik, dan kubik.

Pada data longitudinal apabila terdapat $j=1,2,\dots,m$ subyek dan $i=1,2,\dots,n$ pengamatan dalam setiap subyek dengan satu variabel prediktor x maka fungsi spline dapat didefinisikan sebagai fungsi f merupakan polinomial derajat Q dengan R knot. Model regresi nonparametrik *spline truncated* yang dirumuskan sebagai berikut (Sriliana, 2012).

$$y_{ji}=f(x_{ji})+\varepsilon_{ji},\quad j=1,2,\dots m,\quad i=1,2,\dots n \tag{2.11}$$

dimana

$$f(x_{ji})=\sum_{q=0}^{Q}\alpha_{jq}x_{ji}^{q}+\sum_{r=1}^{R}\delta_{jr}(x_{ji}-K_{jr})_+^Q \tag{2.12}$$

$$(x_{ji}-K_{jr})_+^Q=\begin{cases}(x_{ji}-K_{jr})^Q & ,x_{ji}\geq K_{jr}\\ 0 & ,x_{ji}<K_{jr}\end{cases} \tag{2.13}$$

Persamaan (2.11) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yang dapat dikonstruksi dari vektor dan matriks berikut :

$$\mathbf{y} = \mathbf{XB} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

(2.14)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y_1} \\ \mathbf{y_2} \\ \vdots \\ \mathbf{y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X_1(K_1)} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X_2(K_2)} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X_m(K_m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B_1} \\ \mathbf{B_2} \\ \vdots \\ \mathbf{B_m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_1} \\ \boldsymbol{\varepsilon_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon_m} \end{bmatrix}$$

dengan vektor respon :

$$\mathbf{y_1} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{y_2} = \begin{pmatrix} y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \end{pmatrix}^T$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{y_m} = \begin{pmatrix} y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix}^T$$

matriks basis *spline truncated* :

$$\mathbf{X_1(K_1)} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{11}^2 & \cdots & x_{11}^Q & (x_{11}-K_{11})_+^Q & (x_{11}-K_{12})_+^Q & \cdots & (x_{11}-K_{1R})_+^Q \\ 1 & x_{12} & x_{12}^2 & \cdots & x_{12}^Q & (x_{12}-K_{11})_+^Q & (x_{12}-K_{12})_+^Q & \cdots & (x_{12}-K_{1R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{1n}^2 & \cdots & x_{1n}^{Q2} & (x_{1n}-K_{11})_+^Q & (x_{1n}-K_{12})_+^Q & \cdots & (x_{1n}-K_{1R})_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X_2(K_2)} = \begin{bmatrix} 1 & x_{21} & x_{21}^2 & \cdots & x_{21}^Q & (x_{21}-K_{21})_+^Q & (x_{21}-K_{22})_+^Q & \cdots & (x_{21}-K_{2R})_+^Q \\ 1 & x_{22} & x_{22}^2 & \cdots & x_{22}^Q & (x_{22}-K_{21})_+^Q & (x_{22}-K_{22})_+^Q & \cdots & (x_{22}-K_{2R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{2n} & x_{2n}^2 & \cdots & x_{2n}^{Q2} & (x_{2n}-K_{21})_+^Q & (x_{2n}-K_{22})_+^Q & \cdots & (x_{2n}-K_{2R})_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{X_m(K_m)} = \begin{bmatrix} 1 & x_{m1} & x_{m1}^2 & \cdots & x_{m1}^Q & (x_{m1}-K_{m1})_+^Q & (x_{m1}-K_{m2})_+^Q & \cdots & (x_{m1}-K_{mR})_+^Q \\ 1 & x_{m2} & x_{m2}^2 & \cdots & x_{m2}^Q & (x_{m2}-K_{m1})_+^Q & (x_{m2}-K_{m2})_+^Q & \cdots & (x_{m2}-K_{mR})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{mn} & x_{mn}^2 & \cdots & x_{mn}^{Q2} & (x_{mn}-K_{m1})_+^Q & (x_{mn}-K_{m2})_+^Q & \cdots & (x_{mn}-K_{mR})_+^Q \end{bmatrix}$$

dengan vektor parameter

$$\mathbf{B_1} = \left(\alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \dots \quad \alpha_{1Q} \quad \delta_{11} \quad \delta_{12} \quad \dots \quad \delta_{1R}\right)^T$$

$$\mathbf{B}_2 = \left(\alpha_{20} \quad \alpha_{21} \quad \alpha_{22} \quad \dots \quad \alpha_{2Q} \quad \delta_{21} \quad \delta_{22} \quad \dots \quad \delta_{2R}\right)^T$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{B_m} = \left(\alpha_{m0} \quad \alpha_{m1} \quad \alpha_{m2} \quad \dots \quad \alpha_{mQ} \quad \delta_{m1} \quad \delta_{m2} \quad \dots \quad \delta_{mR}\right)^T$$

dan vektor error,

$$\boldsymbol{\varepsilon_1} = \left(\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{12} \quad \dots \quad \varepsilon_{1n}\right)^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_2} = \left(\varepsilon_{21} \quad \varepsilon_{22} \quad \dots \quad \varepsilon_{2n}\right)^T$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_m} = \left(\varepsilon_{m1} \quad \varepsilon_{m2} \quad \dots \quad \varepsilon_{mn}\right)^T$$

Dengan menggunakan pembobot $\mathbf{V}$,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{V_m} \end{bmatrix}$$

estimasi dari $\mathbf{B}$ pada persamaan (2.14) dapat diperoleh dengan meminimumkan fungsi WLS sehingga didapatkan :

$$\hat{\mathbf{B}} = \left(\mathbf{X(K)}^{\mathbf{T}}\mathbf{VX(K)}\right)^{-1}\mathbf{X(K)}^{\mathbf{T}}\mathbf{Vy} \qquad (2.15)$$

Berdasarkan estimasi $\mathbf{B}$ pada persamaan (2.15), maka didapatkan persamaan berikut :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{X(K)}\hat{\mathbf{B}} \\ &= \mathbf{X(K)}\left(\mathbf{X(K)}^{\mathbf{T}}\mathbf{VX(K)}\right)^{-1}\mathbf{X(K)}^{\mathbf{T}}\mathbf{Vy} \\ &= \mathbf{A(h)y} \end{aligned} \qquad (2.16)$$

dengan,

$$\mathbf{A(h)} = \mathbf{X(K)}\left(\mathbf{X(K)}^{\mathrm{T}}\mathbf{VX(K)}\right)^{-1}\mathbf{X(K)}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}$$

2.7 Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal

Dalam permasalahan nyata, seringkali peneliti dihadapkan pada dua atau lebih variabel dependen yang diamati dari beberapa variabel independen. Model regresi nonparamerik multirespon merupakan metode yang tepat untuk memodelkan fungsi dari variabel-variabel tersebut (Lestari, Budiantara, dan Sunaryo, 2010). Pada subbab 2.6 telah dibahas mengenai model regresi nonparametrik *spline truncated* untuk data longitudinal yang hanya melibatkan satu variabel respon dan satu variabel prediktor. Pendekatan dengan model yang sama juga dapat dilakukan untuk data multirespon yaitu yang melibatkan lebih dari satu variabel respon dan lebih dari satu variabel prediktor. Diberikan data longitudinal berpasangan multirespon $(y_1, y_2, \ldots, y_l, x_1, x_2, \ldots, x_p)$ dengan l buah variabel respon dan p buah variabel prediktor. Model regresi nonparametrik multirespon untuk data longitudinal dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$y_{1ji} = f(x_{11ji}) + f(x_{21ji}) + \ldots + f(x_{p1ji}) + \varepsilon_{1ji}$$
$$y_{2ji} = f(x_{12ji}) + f(x_{22ji}) + \ldots + f(x_{p2ji}) + \varepsilon_{2ji}$$
$$\vdots$$
$$y_{lji} = f(x_{1lji}) + f(x_{2lji}) + \ldots + f(x_{plji}) + \varepsilon_{lji}$$

dimana $j = 1,2,\ldots,m$; $i = 1,2,\ldots,n$.

dimana $f(x)$ diasumsikan bentuk pola kurva regresinya tidak diketahui sehingga didekati dengan fungsi *spline truncated* berikut

$$f(x_{skji}) = \sum_{q=0}^{Q} \alpha_{kjsq} x_{skji}^{q} + \sum_{r=1}^{R} \delta_{kjsr} (x_{skji} - K_{kjsr})_{+}^{Q} \qquad (2.17)$$

dimana $(x_{skji} - K_{kjsr})_{+}^{Q} = \begin{cases} (x_{skji} - K_{kjsr})^{Q} & , x_{skji} \geq K_{kjsr} \\ 0 & , x_{skji} < K_{kjsr} \end{cases}$

dimana kurva regresi $f(x)$ merupakan polinomial derajat Q dengan R knot, $s = 1,2,\ldots,p$ dan K_{kjsr} adalah titik knot.

2.8 Pemilihan Titik Knot Optimal

Spline merupakan potongan polinomial yang memuat titik-titik knot. Titik-titik knot merupakan titik perpaduan bersama dimana terjadi perubahan pola perilaku fungsi. Oleh karena itu letak dan banyaknya titik knot merupakan hal penting dalam pemodelan regresi nonparametrik dengan pendekatan *spline truncated*. Wahba (1990) mengungkapkan bahwa salah satu metode yang digunakan untuk menentukan knot yang optimal adalah dengan metode *Generalized Cross Validation* (GCV). Metode GCV merupakan pengembangan dari metode *Cross Validation* (CV) dimana perbedaannya terletak pada faktor-faktor yang membagi residual. Pada metode GCV faktor merupakan nilai rata-rata dari faktor-faktor tersebut. Nilai GCV kemudian diperoleh dengan menjumlahkan residual-residual kuadrat yang telah terkoreksi dengan kuadrat dari faktor-faktor ini (Fitriyani, 2014). Fungsi GCV untuk model regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* data longitudinal diberikan sebagai berikut :

$$GCV(h) = \frac{MSE(h)}{\left[\frac{1}{lmn} trace(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{h}))\right]^2} \tag{2.18}$$

dengan $MSE(h) = \frac{1}{lmn}\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{kji} - \hat{y}_{kji}\right)^2$, dan $\mathbf{A}(\mathbf{h})$ diperoleh dari hubungan $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(\mathbf{h})\mathbf{y}$. Nilai knot optimal diberikan oleh nilai GCV terkecil.

2.9 Keberhasilan KB

Indikator keberhasilan program KB bisa dilihat dari rata-rata penggunaan kontrasepsi (CPR) dan *unmet need* (Yulikah, 2011). Pernyataan ini juga diperkuat oleh Muhoza, Rutayisire, dan Umubyeyi (2013) yang mengukur mengenai kesuksesan Keluarga Berencana (*Family Planning*) di Rwanda yang berbasis pendekatan multivariate dimana dikatakan bahwa indikator dari keberhasilan *family planning* diantaranya adalah persentase CPR (*Contraceptive Prevalence Rate*) dan persentase *unmet need*. Penelitian ini menggunakan beberapa variabel

prediktor yang dikelompokkan dalam beberapa faktor yaitu info atau pengetahuan mengenai KB meliputi kunjungan dari petugas, informasi dari pusat kesehatan masyarakat, atau keterlibatan media. Adapula faktor sosial ekonomi yang meliputi pendidikan, kekayaan, agama, daerah tempat tinggal, dan asuransi. Faktor selanjutnya yaitu karakteristik demografi yang terdiri dari usia, jumlah anak yang masih hidup, dan pengalaman mortalitas. Sementara itu, faktor yang terakhir yaitu peran serta suami.

Unmet need didefinisikan sebagai kelompok pasangan usia subur yang sebenarnya sudah tidak ingin mempunyai anak lagi atau ingin menjarangkan kehamilannya sampai dengan 24 bulan namun tidak menggunakan alat kontrasepsi. Dengan kata lain, wanita dikatakan *unmet need* apabila wanita tersebut tidak menggunakan metode KB padahal tidak ingin anak lagi atau ingin menunda untuk mempunyai anak lagi (Juliaan, 2009). Yulikah (2011) melakukan penelitian dengan variabel respon *unmetneed* dan variabel bebasnya adalah rasio bidan per 100.000 penduduk, rasio PLKB per 100 desa, rasio klinik per 10.000 PUS, pembiayaan KB, sedangkan variabel luar adalah PDRB perkapita dan tingkat kemiskinan. Bedasarkan penelitian yang dilakukan oleh Handrina (2011) yang melakukan penelitian di Kota Bukittinggi menghasilkan kesimpulan *unmet need* disebabkan oleh dua alasan yaitu sumber daya manusia yang masih rendah dengan pola pikir yang tradisional dilatarbelakangi oleh faktor keagamaan dan kultur budaya sehingga kesalahan dalam menentukan pilihan pemakaian alat kontrasepsi dapat menimbulkan efek samping terutama gangguan kesehatan bagi perempuan/istri. Kedua, adanya larangan dari suami. Penelitian lainnya yang menganalisis hubungan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap *unmet need* dilakukan oleh Duapadang, Ismail, Subirman (2013).

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Langkah Analisis untuk Mendapatkan Estimator Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal

Untuk mencapai tujuan tersebut, adapun tahapan-tahapannya adalah sebagai berikut.

1. Membuat model regresi nonparametrik multirespon data longitudinal sebagai berikut :

$$y_{1ji} = f\left(x_{11ji}\right) + f\left(x_{21ji}\right) + \ldots + f\left(x_{p1ji}\right) + \varepsilon_{1ji}$$
$$y_{2ji} = f\left(x_{12ji}\right) + f\left(x_{22ji}\right) + \ldots + f\left(x_{p2ji}\right) + \varepsilon_{2ji}$$
$$\vdots$$
$$y_{lji} = f\left(x_{1lji}\right) + f\left(x_{2lji}\right) + \ldots + f\left(x_{plji}\right) + \varepsilon_{lji}$$

dimana $j = 1,2,\ldots,m$; $i = 1,2,\ldots,n$

2. Menyajikan persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$\mathbf{y} = \mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{y}_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \mathbf{y}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{f}_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \mathbf{f}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \cdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_l \end{bmatrix}$$

dengan

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ \vdots \\ y_{11n} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ \vdots \\ y_{12n} \\ \vdots \\ y_{1m1} \\ y_{1m2} \\ \vdots \\ y_{1mn} \end{bmatrix}; \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} y_{211} \\ y_{212} \\ \vdots \\ y_{21n} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ \vdots \\ y_{22n} \\ \vdots \\ y_{2m1} \\ y_{2m2} \\ \vdots \\ y_{2mn} \end{bmatrix}; \cdots; \mathbf{y}_l = \begin{bmatrix} y_{l11} \\ y_{l12} \\ \vdots \\ y_{l1n} \\ y_{l21} \\ y_{l22} \\ \vdots \\ y_{l2n} \\ \vdots \\ y_{lm1} \\ y_{lm2} \\ \vdots \\ y_{lmn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} f(x_{1111}) + f(x_{2111}) + \ldots + f(x_{p111}) \\ f(x_{1112}) + f(x_{2112}) + \ldots + f(x_{p112}) \\ \vdots \\ f(x_{111n}) + f(x_{211n}) + \ldots + f(x_{p11n}) \\ f(x_{1121}) + f(x_{2121}) + \ldots + f(x_{p121}) \\ f(x_{1122}) + f(x_{2122}) + \ldots + f(x_{p122}) \\ \vdots \\ f(x_{112n}) + f(x_{212n}) + \ldots + f(x_{p12n}) \\ \vdots \\ f(x_{11m1}) + f(x_{21m1}) + \ldots + f(x_{p1m1}) \\ f(x_{11m2}) + f(x_{21m2}) + \ldots + f(x_{p1m2}) \\ \vdots \\ f(x_{11mn}) + f(x_{21mn}) + \ldots + f(x_{p1mn}) \end{bmatrix}; \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} f(x_{1211}) + f(x_{2211}) + \ldots + f(x_{p211}) \\ f(x_{1212}) + f(x_{2212}) + \ldots + f(x_{p212}) \\ \vdots \\ f(x_{121n}) + f(x_{221n}) + \ldots + f(x_{p21n}) \\ f(x_{1221}) + f(x_{2221}) + \ldots + f(x_{p221}) \\ f(x_{1222}) + f(x_{2222}) + \ldots + f(x_{p222}) \\ \vdots \\ f(x_{122n}) + f(x_{222n}) + \ldots + f(x_{p22n}) \\ \vdots \\ f(x_{12m1}) + f(x_{22m1}) + \ldots + f(x_{p2m1}) \\ f(x_{12m2}) + f(x_{22m2}) + \ldots + f(x_{p2m2}) \\ \vdots \\ f(x_{12mn}) + f(x_{22mn}) + \ldots + f(x_{p2mn}) \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$\mathbf{f}_l = \begin{bmatrix} f(x_{1l11}) + f(x_{2l11}) + \ldots + f(x_{pl11}) \\ f(x_{1l12}) + f(x_{2l12}) + \ldots + f(x_{pl12}) \\ \vdots \\ f(x_{1l1n}) + f(x_{2l1n}) + \ldots + f(x_{pl1n}) \\ f(x_{1l21}) + f(x_{2l21}) + \ldots + f(x_{pl21}) \\ f(x_{1l22}) + f(x_{2l22}) + \ldots + f(x_{pl22}) \\ \vdots \\ f(x_{1l2n}) + f(x_{2l2n}) + \ldots + f(x_{pl2n}) \\ \vdots \\ f(x_{1lm1}) + f(x_{2lm1}) + \ldots + f(x_{plm1}) \\ f(x_{1lm2}) + f(x_{2lm2}) + \ldots + f(x_{plm2}) \\ \vdots \\ f(x_{1lmn}) + f(x_{2lmn}) + \ldots + f(x_{plmn}) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \vdots \\ \varepsilon_{11n} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \vdots \\ \varepsilon_{12n} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1m1} \\ \varepsilon_{1m2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1mn} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \vdots \\ \varepsilon_{21n} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \\ \vdots \\ \varepsilon_{22n} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2m1} \\ \varepsilon_{2m2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2mn} \end{bmatrix}; \ldots; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_l = \begin{bmatrix} \varepsilon_{l11} \\ \varepsilon_{l12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{l1n} \\ \varepsilon_{l21} \\ \varepsilon_{l22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{l2n} \\ \vdots \\ \varepsilon_{lm1} \\ \varepsilon_{lm2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{lmn} \end{bmatrix}$$

3. Mendekati $f(x)$ dengan fungsi *spline truncated* polinomial derajat Q dengan R knot

$$f(x_{skji}) = \sum_{q=0}^{Q} \alpha_{kjsq} x_{skji}^{q} + \sum_{r=1}^{R} \delta_{kjsr} (x_{skji} - K_{kjsr})_{+}^{Q}$$

dimana

$$(x_{skji} - K_{kjsr})_{+}^{Q} = \begin{cases} (x_{skji} - K_{kjsr})^{Q} & , x_{skji} \geq K_{kjsr} \\ 0 & , x_{skji} < K_{kjsr} \end{cases}$$

4. Menentukan matrik pembobot yang akan digunakan yaitu matriks varians covarians $(\mathbf{V})$
5. Membentuk model regresi menjadi $\mathbf{y} = \mathbf{X\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$
6. Mendapatkan estimator dengan meminimumkan fungsi WLS $(\mathbf{y} - \mathbf{X\theta})^{T} \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X\theta})$
7. Menyelidiki sifat-sifat estimator

3.2 Aplikasi Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal pada Studi Kasus Keberhasilan KB di Indonesia

3.2.1 Sumber Data dan Variabel Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang didapatkan dari Badan Koordinasi Keluarga Berencana Nasional (BKKBN) dan Badan Pusat Statistik (BPS). Data yang diambil merupakan data yang berkaitan dengan keberhasilan program KB yang dilihat berdasarkan persentase CPR (*Contaceptive Prevalence Rate*) dan persentase *unmet need*.

Tabel 3.1 Variabel Penelitian

Variabel	Keterangan	Tipe Variabel	Sumber
Respon	Persentase CPR (y_1)	Kontinu	BKKBN
	Persentase *Unmet Need* (y_2)	Kontinu	BKKBN
Prediktor	Indeks Kedalaman Kemiskinan (x_1)	Kontinu	Susenas BPS
	Persentase KK dengan Pendidikan SLTP ke Bawah (x_2)	Kontinu	BKKN
	Persentase Wanita Berumur 10 Tahun ke Atas dengan Usia Perkawinan Pertama 18 Tahun ke Bawah (x_3)	Kontinu	Susenas BPS
	Persentase Wanita Berumur 10 Tahun ke Atas yang pernah Kawin dengan Anak Lahir Hidup Kurang atau Sama dengan Dua (x_4)	Kontinu	Susenas BPS

Berikut adalah penjelasan lebih rinci mengenai variabel-variabel penelitian di atas :

a) Persentase CPR (y_1)

CPR (*Contraceptive Prevalence Rate*) atau Angka Prevalensi Pemakaian Kontrasepsi adalah angka yang menunjukkan berapa banyaknya PUS yang sedang memakai kontrasepsi pada saat pencacahan dibandingkan dengan seluruh PUS. PUS atau Pasangan Usia Subur sendiri merupakan pasangan suami istri yang istrinya berumur antara 15 sampai dengan 49 tahun atau pasangan suami-istri yang istrinya berumur kurang dari 15 tahun dan sudah haid atau istri berumur lebih dari 50 tahun, tetapi masih haid atau datang bulan (BKKBN, 2013).

Informasi tentang besarnya CPR sangat bermanfaat untuk menetapkan kebijakan pengendalian kependudukan, serta penyediaan pelayanan KB baik dalam bentuk mempersiapkan pelayanan kontrasepsi seperti sterilisasi, pemasangan IUD, persiapan alat dan obat kontrasepsi, serta pelayanan konseling untuk menampung kebutuhan dan menanggapi keluhan pemakaian kontrasepsi.

Persentase PUS yang sedang memakai cara KB (CPR) dihitung dengan cara membagi jumlah PUS yang sedang memakai cara KB dengan jumlah PUS, kemudian dikalikan dengan konstanta k (100).

$$\text{CPR} = \frac{\text{Jumlah PUS yang sedang memakai suatu cara KB}}{\text{Jumlah PUS}} \text{ x } 100\%$$

Data mengenai persentase CPR ini didapatkan dari BKKBN yang termuat dalam publikasi Profil Hasil Pendataan Keluarga Tahun 2008 hingga 2012. Pendataan Keluarga tersebut merupakan kegiatan pengumpulan data primer tentang data Demografi, data Keluarga Berencana, data tahapan Keluarga Sejahtera dan data individu yang dilakukan oleh masyarakat bersama pemerintah (Pemda dan BKKBN) secara serentak pada waktu yang telah ditentukan (bulan Juli sampai September setiap tahun) melalui kunjungan ke keluarga dari rumah ke rumah. Secara umum, tiap tahunnya pendataan telah memenuhi target sasaran. Pada tahun 2012, jumlah rumah

tangga yang berhasil didata sebanyak 99,31 persen dari total rumah tangga yang ada. Sementara untuk keluarga, keluarga yang berhasil didata sebanyak 99,13 persen dari total keluarga yang ada.

b) Persentase *Unmet Need* (y_2)

Unmet need atau Kebutuhan Pelayanan KB yang Tidak Terpenuhi menggambarkan persentase PUS yang tidak menggunakan alat/cara kontrasepsi namun menginginkan penundaan kehamilan (penjarangan sampai 24 bulan) atau berhenti sama sekali (pembatasan). Persentase *unmet need* dapat diperoleh dengan perhitungan berikut

$$\text{Persentase unmet need} = \frac{\sum \text{PUS}\left(\text{tak KB}\right)_{\text{iat + tial}}}{\sum \text{PUS}\,15\text{ - }49\text{ tahun}} \text{ x } 100\%$$

dimana $\sum \text{PUS}\left(\text{tak KB}\right)_{\text{iat + tial}}$ merupakan jumlah PUS yang ingin anak tunda (iat) atau tidak ingin anak lagi (tial) dan tidak menggunakan alat kontrasepsi. Pasangan usia subur bukan peserta KB "Ingin Anak Ditunda" adalah pasanan usia subur yang sedang tidak menggunakan salah satu alat/cara kontrasepsi dan menginginkan kelahiran anak ditunda dengan batas waktu dua tahun lebih. Pasangan usia subur bukan peserta KB "Tidak Ingin Anak Lagi" adalah pasangan usia subur yang sedang tidak menggunakan salah satu alat/cara kontrasepsi dan tidak ingin anak lagi (BKKBN, 2013). Data mengenai persentase *unmet need* ini juga didapatkan dari BKKBN yang termuat dalam publikasi Profil Hasil Pendataan Keluarga Tahun 2008 hingga 2012.

c) Indeks Kedalaman Kemiskinan (x_1)

Indeks kedalaman kemiskinan (*Poverty Gap Index*-P1) merupakan ukuran rata-rata kesenjangan pengeluaran masing-masing penduduk miskin terhadap garis kemiskinan. Nilai agregat dari *poverty gap index* menunjukkan biaya mengentaskan kemiskinan dengan membuat target

transfer yang sempurna terhadap penduduk miskin dalam hal tidak adanya biaya transaksi dan faktor penghambat. Semakin kecil nilai *poverty gap index*, semakin besar potensi ekonomi untuk dana pengentasan kemiskinan berdasarkan identifikasi karakteristik penduduk miskin dan juga untuk target sasaran bantuan dan program. Rumus dari *poverty gap index* adalah sebagai berikut

$$P_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{q}\left[\frac{z - y_i}{z}\right]$$

P_1 = *Poverty Gap Index* atau Indeks Kedalaman Kemiskinan

z = Garis Kemiskinan

y_i = Rata-rata pengeluaran per kapita sebulan penduduk yang berada di bawah garis kemiskinan ($i = 1,2,\ldots,q$), $y_i < z$

q = Banyaknya penduduk yang berada di bawah garis kemiskinan

n = Jumlah Penduduk

Indeks Kedalaman Kemiskinan mewakili pengaruh dari faktor ekonomi terhadap persentase CPR dan *unmet need*. Berdasarkan penelitian Yulikah (2011), faktor kemiskinan yang ditunjukkan oleh tingkat kemiskinan merupakan variabel yang bermakna bagi persentase *unmet need*. Tingkat kemiskinan memiliki nilai korelasi positif yang menunjukkan hubungan yang substansial terhadap persentase *unmet need*. Semakin besar tingkat kemiskinan, semakin besar persentase *unmet need*. Yulikah (2011) juga menambahkan bahwa kemiskinan terbukti mempunyai dampak yang sangat luas terhadap berbagai macam aspek kehidupan, tidak terkecuali pada pencapaian program KB. Keluarga miskin cenderung memiliki jumlah anak yang lebih besar dari pada mereka yang lebih mampu. Salah satu kegiatan yang dilaksanakan berkenaan dengan fenomena tersebut adalah penyediaan pelayanan keluarga berencana/KB gratis bagi masyarakat yang berasal dari kalangan keluarga pra sejahtera/Pra S dan keluarga sejahtera 1/KS-1. Kegiatan pelayanan KB gratis bagi masyarakat miskin terutama kelompok Pra S dan

KS-I merupakan salah satu upaya untuk meningkatkan angka kesertaan ber-KB dan menurunkan *unmet need* KB.

Data mengenai Indeks Kedalaman Kemiskinan didapatkan dari BPS bersumber pada data Susenas (Survey Sosial Ekonomi Nasional) Tahun 2008 hingga 2012 yang termuat dalam publikasi Statistik Penduduk dan Kemiskinan.

d) Persentase KK dengan Pendidikan SLTP ke Bawah (x_2)

Kepala keluarga adalah laki-laki atau perempuan yang berstatus kawin , atau janda/duda yang mengepalai suatu keluarga yang anggotanya terdiri dari istri/suaminya dan atau anak-anaknya. Kepala Keluarga memegang peranan penting dalam pengambilan keputusan termasuk dalam hal penggunaan kontrasepsi. Tingkat pendidikan akan meningkatkan kontrol terhadap alat kontrasepsi dan pengendalian fertilitas. Pendidikan memfasilitasi perolehan informasi tentang keluarga berencana, meningkatkan komunikasi suami istri, dan akan meningkatkan pendapatan yang memudahkan pasangan untuk menjangkau alat kontrasepsi. Kelompok PUS dengan tingkat pendidikan tinggi umumnya ingin mempunyai jumlah anak yang lebih sedikit dengan menggunakan alat kontrasepsi (Buletin Kespro, 2013). KK dengan pendidikan rendah biasanya tinggal di daerah pedesaan dan memiliki pengetahuan yang rendah tentang metode kontrasepsi. Pengetahuan inilah yang nantinya menjadi faktor dominan yang akan membentuk tindakan seseorang untuk menggunakan metode kontrasepsi (RAN KB, 2013). Kurangnya pengetahuan tentang KB akan mengurangi minat seseorang untuk menggunakan alat kontrasepsi.

Data mengenai persentase KK dengan pendidikan SLTP ke bawah juga didapatkan dari BKKBN yang termuat dalam publikasi Profil Hasil Pendataan Keluarga Tahun 2008 hingga 2012.

e) Persentase Wanita Berumur 10 T ahun ke Atas dengan Usia Perkawinan Pertama 18 Tahun ke Bawah (x_3)

Umur perkawinan pertama seorang wanita mempengaruhi resiko melahirkan. Semakin rendah umur perkawinan pertama, semakin tinggi resiko yang dihadapi selama masa kehamilan/melahirkan, baik keselamatan ibu maupun anaknya. Hal ini karena pada umumnya wanita muda memiliki rahim yang belum cukup matang untuk proses berkembangnya janin, dan belum memiliki mental yang kuat untuk menghadapi masa kehamilan/melahirkan. Disisi lain, semakin tinggi umur perkawinan pertama dari umur yang dianjurkan dalam program KB, juga semakin tinggi resiko yang dihadapi dalam masa kehamilan/melahirkan.

Dalam masyarakat Indonesia, hubungan antara laki-laki dan perempuan dipandang harus melalui lembaga perkawinan yang sah menurut norma agama dan menurut Undang-Undang Perkawinan tahun 1974. Selain itu, karena usia perkawinan juga dipengaruhi oleh adat istiadat dan anggapan masyarakat tentang usia berapa sebaiknya perempuan menikah, maka usia kawin pertama dapat menjadi indikator dimulainya seorang perempuan berpeluang untuk hamil dan melahirkan. Hasil analisis menunjukkan bahwa secara statistik usia kawin memiliki efek signifikan terhadap penggunaan KB. Semakin tinggi usia kawin responden, yang dalam hal ini perempuan, semakin tidak menggunakan alat KB. Perempuan dengan usia kawin pertama pada usia muda mempunyai masa risiko terjadinya kehamilan lebih lama daripada perempuan dengan usia kawin pertamanya lebih tua. Lama risiko terhadap kehamilan yang panjang ini memungkinkan lebih tingginya penggunaan metode kontrasepsi pada perempuan yang usia kawinnya lebih muda (Buletin Kespro, 2013).

Data mengenai persentase wanita berumur 10 tahun ke atas dengan usia perkawinan pertama 18 tahun ke bawah didapatkan dari BPS yang bersumber pada data Susenas (Survey Sosial Ekonomi Nasional) Tahun

2008 hingga 2012 yang termuat dalam publikasi Statistik Kesejahteraan Rakyat atau *Welfare Statistics*.

f) Persentase Wanita Berumur 10 Tahun ke Atas yang pernah Kawin dengan Anak Lahir Hidup Kurang atau Sama dengan Dua (x_4)

Konsep Anak Lahir Hidup berbeda dengan indikator Angka Kelahiran (jumlah kelahiran, CBR, ASFR dan TFR), indikator Anak Lahir Hidup atau juga sering disebut dengan *Children Ever Born*. Dikatakan lahir hidup dimana menunjukkan tanda-tanda kehidupan pada waktu dilahirkan walaupun mungkin hanya beberapa saat saja seperti jantung berdenyut, bernafas, dan menangis. Anak yang pada waktu lahir tidak menunjukkan tanda-tanda kehidupan disebut anak lahir mati (BPS, 2013).

Indikator Anak Lahir Hidup ini diperoleh dari informasi atas pertanyaan 'Berapa jumlah anak yang telah Ibu lahirkan selama ini?'. Jawabannya mencerminkan semua anak yang telah lahir, dari sejak menikah pertama kali sampai saat wawancara (bukan hanya anak yang lahir pada saat ini atau tahun ini). Jadi rata rata jumlah anak lahir hidup menurut umur mencerminkan perjalanan fertilitas ibu sampai pada umur yang bersangkutan. Oleh karena itu polanya akan menunjukkan bahwa secara rata-rata Ibu yang masih muda mempunyai anak yang lebih sedikit dibanding dengan Ibu yang lebih tua umurnya.

Pada perempuan yang berusia 45-49 tahun, rata-rata Anak Lahir Hidup dapat disebut sebagai paritas lengkap (*completed family size*), yaitu jumlah anak yang sudah tidak bertambah lagi. Kelompok dengan jumlah Anak Lahir Hidup lebih sedikit umumnya karena keinginan untuk membatasi kelahiran dengan memakai sebuah metode kontrasepsi tertentu (Buletin Kespro, 2013).

Data mengenai persentase wanita berumur 10 tahun ke atas yang pernah kawin dengan anak lahir hidup kurang atau sama dengan dua didapatkan dari BPS yang bersumber pada data Susenas (Survey Sosial

Ekonomi Nasional) Tahun 2008 hingga 2012 yang termuat dalam publikasi Statistik Kesejahteraan Rakyat atau *Welfare Statistics*.

Ruang lingkup penelitian dibatasi pada 33 provinsi di Indonesia Tahun 2008-2012.

Tabel 3.2(a) Kelompok Provinsi Jawa Bali Berdasarkan BKKBN

Kelompok	No.	Provinsi
Jawa Bali	1	DKI Jakarta
	2	Jawa Barat
	3	Jawa Tengah
	4	DI Yogyakarta
	5	Jawa Timur
	6	Bali
	7	Banten

Tabel 3.2(b) Kelompok Provinsi Luar Jawa Bali I dan II Berdasarkan BKKBN

Kelompok	No.	Provinsi	Kelompok	No.	Provinsi
Luar Jawa Bali I	1	Aceh	Luar Jawa Bali II	1	Riau
	2	Sumatera Utara		2	Jambi
	3	Sumatera Barat		3	Bengkulu
	4	Sumatera Selatan		4	NTT
	5	Lampung		5	Kalimantan Tengah
	6	NTB		6	Kalimantan Timur
	7	Kalimantan Barat		7	Sulawesi Tengah
	8	Kalimantan Selatan		8	Sulawesi Tenggara
	9	Sulawesi Utara		9	Maluku
	10	Sulawesi Selatan		10	Papua
	11	Bangka Belitung		11	Maluku Utara
	12	Gorontalo		12	Papua Barat
	13	Sulawesi Barat		13	Kepulauan Riau

Berdasarkan pengelompokan yang dilakukan oleh BKKBN, data provinsi dikelompokkan menjadi tiga kelompok yaitu Jawa Bali, Luar Jawa Bali I, dan Luar Jawa Bali II.

3.2.2 Struktur Data

Struktur data longitudinal yang digunakan dalam penelitian disajikan pada Tabel 3.3 dimana subyek terdiri dari tujuh provinsi untuk kelompok Jawa Bali, 13 provinsi untuk kelompok Luar Jawa Bali I dan II.

Tabel 3.3 Struktur Data Penelitian untuk Kelompok Jawa Bali

Subyek	Tahun	Variabel Respon 1 (y_1)	Variabel Respon 2 (y_2)	Variabel Prediktor (x_1)	Variabel Prediktor (…)	Variabel Prediktor (x_4)
DKI Jakarta	2008	y_{111}	y_{211}	x_{111}	x_{211}	x_{411}
	2009	y_{112}	y_{212}	x_{112}	…	x_{412}
	…	…	…	…	…	…
	2012	y_{115}	y_{215}	x_{115}	…	x_{415}
Jawa Barat	2008	y_{121}	y_{221}	x_{121}	…	x_{421}
	2009	y_{122}	y_{222}	x_{122}	…	x_{422}
	…	…	…	…	…	…
	2012	y_{125}	y_{225}	x_{125}	…	x_{425}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Banten	2008	y_{171}	y_{271}	x_{171}	…	x_{471}
	2009	y_{172}	y_{272}	x_{172}	…	x_{472}
	…	…	…	…	…	…
	2012	y_{175}	y_{275}	x_{175}	…	x_{475}

dimana :

y_{1ji} = respon ke-1 pada provinsi ke- j , pengamatan ke- k ;

$j = 1,2,\ldots,7$ dan $k = 1,2,3,4,5$

y_{2ji} = respon ke- 2 pada provinsi ke- j , pengamatan ke- k ;

x_{1ji} = variabel prediktor ke-1 pada provinsi ke- j , pengamatan ke- k ;

x_{2ji} = variabel prediktor ke- 2 pada provinsi ke- j , pengamatan ke- k ;

x_{3ji} = variabel prediktor ke-3 pada provinsi ke- j , pengamatan ke- k ;

x_{4ji} = variabel prediktor ke- 4 pada provinsi ke- j , pengamatan ke- k ;

3.2.3 Model Regresi Nonparametrik Birespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal

Pada aplikasi model terhadap data keberhasilan KB hanya melibatkan dua buah variabel respon yaitu persentase CPR (y_1) dan persentase *unmet need* (y_2) sehingga model menjadi model regresi nonparametrik birespon *spline truncated* untuk data longitudinal. Adapun model yang terbentuk yaitu :

$$y_{1ji} = f\left(x_{11ji}\right) + f\left(x_{21ji}\right) + f\left(x_{31ji}\right) + f\left(x_{41ji}\right) + \varepsilon_{1ji}$$

$$y_{2ji} = f\left(x_{12ji}\right) + f\left(x_{22ji}\right) + f\left(x_{32ji}\right) + f\left(x_{42ji}\right) + \varepsilon_{2ji}$$

dimana $j = 1,2,\ldots,m;\ i = 1,2,\ldots,5$

dimana $f(x)$ juga didekati dengan fungsi *spline truncated*

$$f\left(x_{skji}\right) = \sum_{q=0}^{Q} \alpha_{kjsq} x_{skji}^{q} + \sum_{r=1}^{R} \delta_{kjsr} \left(x_{skji} - K_{kjsr}\right)_{+}^{Q}$$

dimana $\left(x_{skji} - K_{kjsr}\right)_{+}^{Q} = \begin{cases} \left(x_{skji} - K_{kjsr}\right)^{Q} & , x_{skji} \geq K_{kjsr} \\ 0 & , x_{skji} < K_{kjsr} \end{cases}$

yang nantinya akan membentuk persamaan dalam bentuk matrik yaitu $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

3.2.4 Langkah Analisis

Adapun langkah-langkah untuk mengaplikasikan model regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal pada studi kasus keberhasilan KB adalah sebagai berikut.

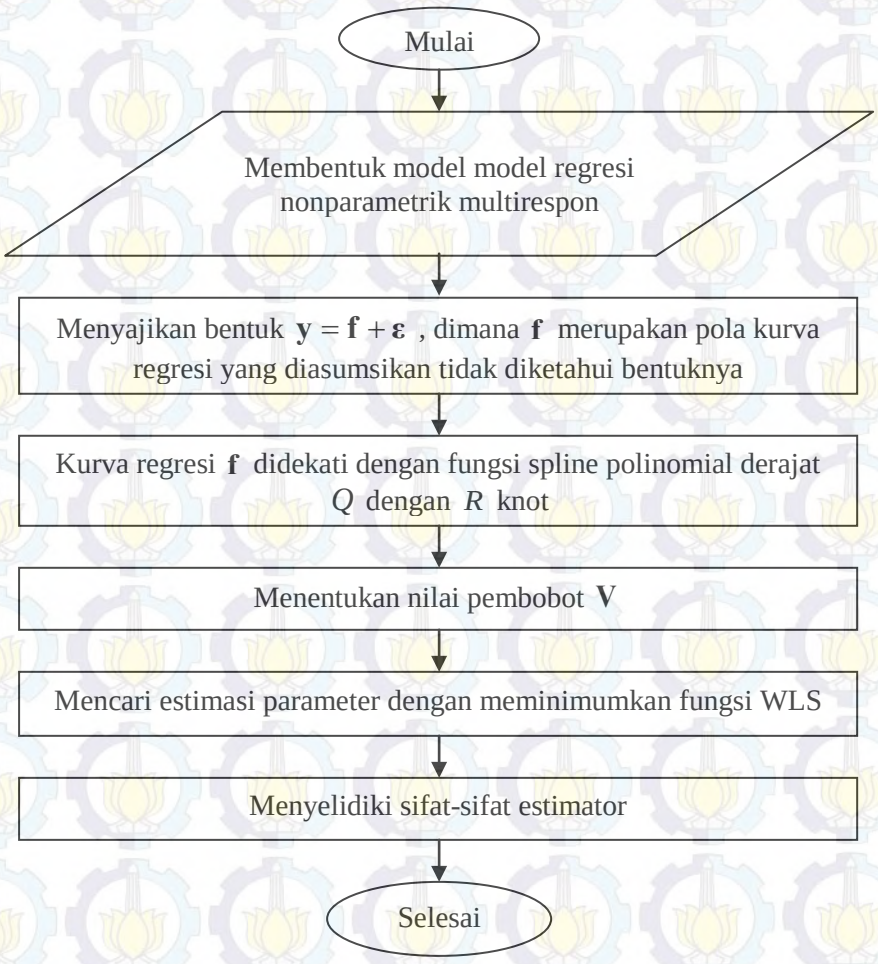
1. Membuat *scatterplot* antara masing-masing variabel respon dengan masing-masing variabel prediktor, yaitu $\left(y_{1ji}, x_{1ji}, x_{2ji}, x_{3ji}, x_{4ji}\right)$ dan $\left(y_{2ji}, x_{1ji}, x_{2ji}, x_{3ji}, x_{4ji}\right)$
2. Menentukan pembobot yang akan digunakan dalam pemodelan $(\mathbf{V})$
3. Membentuk model $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}$
4. Menentukan matriks $\mathbf{A}(\mathbf{h})$ yang memenuhi $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(\mathbf{h})\mathbf{y}$
5. Melakukan pemodelan dengan pendekatan regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal

6. Memilih titik knot optimal dengan metode GCV. Titik knot optimal ditentukan berdasarkan nilai GCV terkecil.

$$GCV(h) = \frac{MSE(h)}{\left[\frac{1}{lmn} trace(\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{h}))\right]^2} \quad , \; MSE(h) = \frac{1}{lmn}\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{kji} - \hat{y}_{kji}\right)^2$$

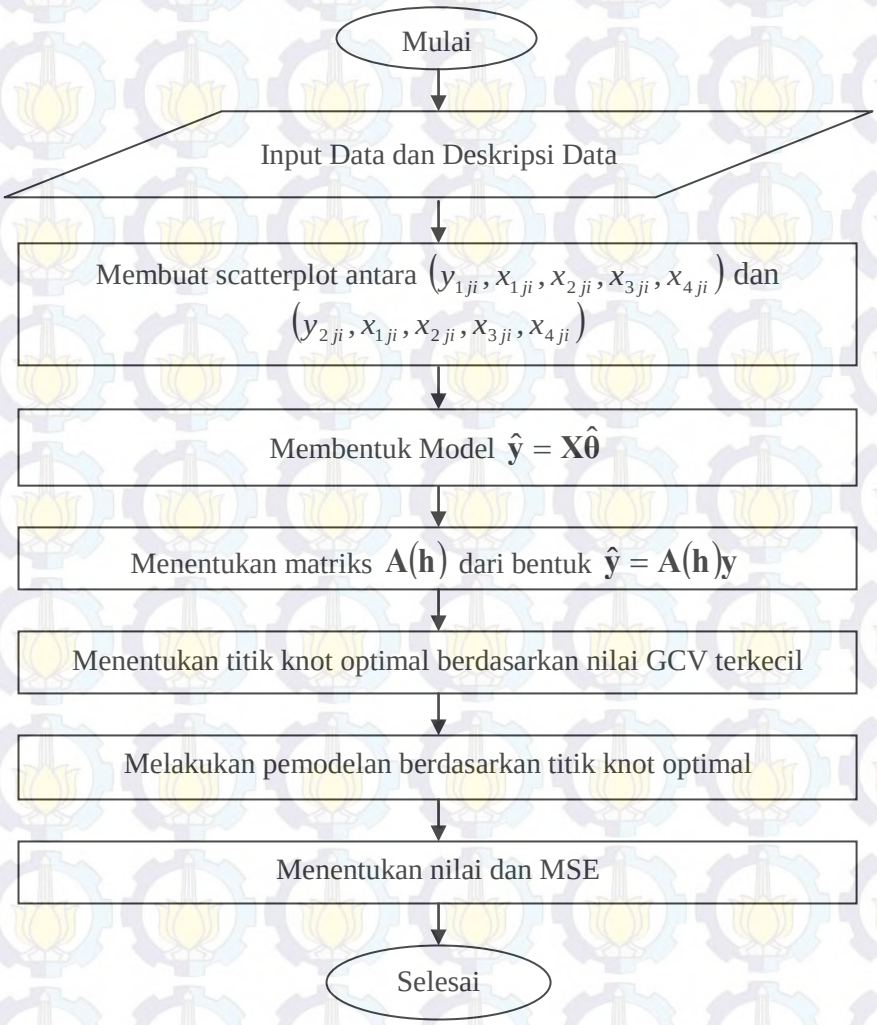
7. Menghitung nilai MSE untuk penentuan model terbaik
8. Mendapatkan model CPR dan *unmet need* untuk setiap provinsi.

Untuk lebih memudahkan dalam memahami langkah-langkah penelitian dapat dilihat alur dan bagan penelitian pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2.



Gambar 3.1 Bagan Alur Estimasi *Spline Truncated* Multirespon pada Data Longitudinal

Gambar 3.1 merupakan alur dan bagan penelitian dengan tujuan mengkaji estimasi model regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal dan sifat-sifatnya. Sementara itu, Gambar 3.2 merupakan alur dan bagan penelitian untuk pengaplikasian model regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal pada studi kasus keberhasilan KB.



Gambar 3.2 Bagan Alur Aplikasi Model *Spline Truncated* Multirespon pada Data Longitudinal

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada Bab 4 akan dijabarkan mengenai langkah-langkah untuk mendapatkan estimasi parameter dari model regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* untuk data longitudinal. Dimana estimasi parameter tersebut dilakukan dengan menggunakan metode WLS (*Weighted Least Square*) sementara untuk pemilihan knot optimal menggunakan metode GCV (*Generalized Cross Validation*). Setelah didapatkan estimasi parameter maka selanjutnya adalah mengaplikasikan model regresi nonparametrik multirespon *spline truncated* tersebut ke dalam studi kasus keberhasilan KB di Indonesia.

4.1 Estimasi Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal

Diberikan data longitudinal berpasangan multirespon dengan l buah variabel respon dan p buah variabel prediktor $(y_1, y_2, \ldots, y_l, x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Model regresi nonparametrik multirespon untuk data longitudinal dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} y_{1ji} &= f(x_{11ji}) + f(x_{21ji}) + \ldots + f(x_{p1ji}) + \varepsilon_{1ji} \\ y_{2ji} &= f(x_{12ji}) + f(x_{22ji}) + \ldots + f(x_{p2ji}) + \varepsilon_{2ji} \\ &\vdots \\ y_{lji} &= f(x_{1lji}) + f(x_{2lji}) + \ldots + f(x_{plji}) + \varepsilon_{lji} \end{aligned} \tag{4.1}$$

dimana $j = 1,2,\ldots,m$; $i = 1,2,\ldots,n$.

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{y}_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \mathbf{y}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{f}_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \mathbf{f}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \cdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_l \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

dengan vektor respon yaitu

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ \vdots \\ y_{11n} \\ y_{121} \\ y_{122} \\ \vdots \\ y_{12n} \\ \vdots \\ y_{1m1} \\ y_{1m2} \\ \vdots \\ y_{1mn} \end{bmatrix}; \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} y_{211} \\ y_{212} \\ \vdots \\ y_{21n} \\ y_{221} \\ y_{222} \\ \vdots \\ y_{22n} \\ \vdots \\ y_{2m1} \\ y_{2m2} \\ \vdots \\ y_{2mn} \end{bmatrix}; \cdots; \mathbf{y}_l = \begin{bmatrix} y_{l11} \\ y_{l12} \\ \vdots \\ y_{l1n} \\ y_{l21} \\ y_{l22} \\ \vdots \\ y_{l2n} \\ \vdots \\ y_{lm1} \\ y_{lm2} \\ \vdots \\ y_{lmn} \end{bmatrix}$$

dan matriks dari fungsi spline sebagai berikut

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} f(x_{1111}) + f(x_{2111}) + \ldots + f(x_{p111}) \\ f(x_{1112}) + f(x_{2112}) + \ldots + f(x_{p112}) \\ \vdots \\ f(x_{111n}) + f(x_{211n}) + \ldots + f(x_{p11n}) \\ f(x_{1121}) + f(x_{2121}) + \ldots + f(x_{p121}) \\ f(x_{1122}) + f(x_{2122}) + \ldots + f(x_{p122}) \\ \vdots \\ f(x_{112n}) + f(x_{212n}) + \ldots + f(x_{p12n}) \\ \vdots \\ f(x_{11m1}) + f(x_{21m1}) + \ldots + f(x_{p1m1}) \\ f(x_{11m2}) + f(x_{21m2}) + \ldots + f(x_{p1m2}) \\ \vdots \\ f(x_{11mn}) + f(x_{21mn}) + \ldots + f(x_{p1mn}) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} f(x_{1211}) + f(x_{2211}) + \ldots + f(x_{p211}) \\ f(x_{1212}) + f(x_{2212}) + \ldots + f(x_{p212}) \\ \vdots \\ f(x_{121n}) + f(x_{221n}) + \ldots + f(x_{p21n}) \\ f(x_{1221}) + f(x_{2221}) + \ldots + f(x_{p221}) \\ f(x_{1222}) + f(x_{2222}) + \ldots + f(x_{p222}) \\ \vdots \\ f(x_{122n}) + f(x_{222n}) + \ldots + f(x_{p22n}) \\ \vdots \\ f(x_{12m1}) + f(x_{22m1}) + \ldots + f(x_{p2m1}) \\ f(x_{12m2}) + f(x_{22m2}) + \ldots + f(x_{p2m2}) \\ \vdots \\ f(x_{12mn}) + f(x_{22mn}) + \ldots + f(x_{p2mn}) \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$\mathbf{f}_l = \begin{bmatrix} f(x_{1l11}) + f(x_{2l11}) + \ldots + f(x_{pl11}) \\ f(x_{1l12}) + f(x_{2l12}) + \ldots + f(x_{pl12}) \\ \vdots \\ f(x_{1l1n}) + f(x_{2l1n}) + \ldots + f(x_{pl1n}) \\ f(x_{1l21}) + f(x_{2l21}) + \ldots + f(x_{pl21}) \\ f(x_{1l22}) + f(x_{2l22}) + \ldots + f(x_{pl22}) \\ \vdots \\ f(x_{1l2n}) + f(x_{2l2n}) + \ldots + f(x_{pl2n}) \\ \vdots \\ f(x_{1lm1}) + f(x_{2lm1}) + \ldots + f(x_{plm1}) \\ f(x_{1lm2}) + f(x_{2lm2}) + \ldots + f(x_{plm2}) \\ \vdots \\ f(x_{1lmn}) + f(x_{2lmn}) + \ldots + f(x_{plmn}) \end{bmatrix}$$

serta vektor error sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \vdots \\ \varepsilon_{11n} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \vdots \\ \varepsilon_{12n} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1m1} \\ \varepsilon_{1m2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1mn} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \vdots \\ \varepsilon_{21n} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \\ \vdots \\ \varepsilon_{22n} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2m1} \\ \varepsilon_{2m2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2mn} \end{bmatrix}; \cdots; \boldsymbol{\varepsilon}_l = \begin{bmatrix} \varepsilon_{l11} \\ \varepsilon_{l12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{l1n} \\ \varepsilon_{l21} \\ \varepsilon_{l22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{l2n} \\ \vdots \\ \varepsilon_{lm1} \\ \varepsilon_{lm2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{lmn} \end{bmatrix}$$

dimana $f(x)$ diasumsikan bentuk pola kurva regresinya tidak diketahui sehingga didekati dengan fungsi spline truncated seperti pada persamaan (4.3).

$$f(x_{skji}) = \sum_{q=0}^{Q} \alpha_{kjsq} x_{skji}^{q} + \sum_{r=1}^{R} \delta_{kjsr} (x_{skji} - K_{kjsr})_{+}^{Q} \tag{4.3}$$

dimana $(x_{skji} - K_{kjsr})_{+}^{Q} = \begin{cases} (x_{skji} - K_{kjsr})^{Q} & , x_{skji} \geq K_{kjsr} \\ 0 & , x_{skji} < K_{kjsr} \end{cases}$

dimana kurva regresi $f(x)$ merupakan polinomial derajat Q dengan R knot, $s = 1,2,\ldots,p$ merupakan banyaknya variabel respon dan K_{kjsr} adalah titik knot. Apabila persamaan (4.3) disubstitusikan ke persamaan (4.1) maka model untuk setiap respon ke-k, subyek ke-j, dan pengamatan ke-i dapat ditulis seperti pada rincian di bawah ini dengan $k = 1,2,\ldots,l$, $j = 1,2,\ldots,m$, dan $i = 1,2,\ldots,n$.

respon ke-1, subyek ke-1, dan pengamatan ke-1 $(k=1,\ j=1, i=1)$

$$
\begin{aligned}
y_{111} &= f(x_{1111}) + f(x_{2111}) + \ldots + f(x_{p111}) + \varepsilon_{111} \\
&= \left\{ \sum_{q=0}^{Q} \alpha_{111q} x_{1111}^{q} + \sum_{r=1}^{R} \delta_{111r} (x_{1111} - K_{111r})_{+}^{Q} \right\} + \left\{ \sum_{q=0}^{Q} \alpha_{112q} x_{2111}^{q} + \sum_{r=1}^{R} \delta_{112r} (x_{2111} - K_{112r})_{+}^{Q} \right\} \\
&\quad + \cdots + \left\{ \sum_{q=0}^{Q} \alpha_{11pq} x_{p111}^{q} + \sum_{r=1}^{R} \delta_{11pr} (x_{p111} - K_{11pr})_{+}^{Q} \right\} + \varepsilon_{111} \\
&= \{ \alpha_{1110} + \alpha_{1111} x_{1111} + \alpha_{1112} x_{1111}^{2} + \ldots + \alpha_{111Q} x_{1111}^{Q} + \delta_{1111} (x_{1111} - K_{1111})_{+}^{Q} \\
&\quad + \ldots + \delta_{111R} (x_{1111} - K_{111R})_{+}^{Q} \} + \{ \alpha_{1120} + \alpha_{1121} x_{2111} + \alpha_{1122} x_{2111}^{2} + \ldots + \alpha_{112Q} x_{2111}^{Q} \\
&\quad + \delta_{1121} (x_{2111} - K_{1121})_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{112R} (x_{2111} - K_{112R})_{+}^{Q} \} + \ldots + \{ \alpha_{11p0} + \alpha_{11p1} x_{p111} + \alpha_{11p2} x_{p111}^{2} \\
&\quad + \ldots + \alpha_{11pQ} x_{p111}^{Q} + \delta_{11p1} (x_{p111} - K_{11p1})_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{11pR} (x_{p111} - K_{11pR})_{+}^{Q} \} + \varepsilon_{111}
\end{aligned}
$$

respon ke-1, subyek ke-1, dan pengamatan ke-2 $(k=1,\ j=1, i=2)$

$$
\begin{aligned}
y_{112} &= \{ \alpha_{1110} + \alpha_{1111} x_{1112} + \alpha_{1112} x_{1112}^{2} + \ldots + \alpha_{111Q} x_{1112}^{Q} + \delta_{1111} (x_{1112} - K_{1111})_{+}^{Q} \\
&\quad + \ldots + \delta_{111R} (x_{1112} - K_{111R})_{+}^{Q} \} + \{ \alpha_{1120} + \alpha_{1121} x_{2112} + \alpha_{1122} x_{2112}^{2} + \ldots + \alpha_{112Q} x_{2112}^{Q} \\
&\quad + \delta_{1121} (x_{2112} - K_{1121})_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{112R} (x_{2112} - K_{112R})_{+}^{Q} \} + \ldots + \{ \alpha_{11p0} + \alpha_{11p1} x_{p112} + \alpha_{11p2} x_{p112}^{2} \\
&\quad + \ldots + \alpha_{11pQ} x_{p112}^{Q} + \delta_{11p1} (x_{p112} - K_{11p1})_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{11pR} (x_{p112} - K_{11pR})_{+}^{Q} \} + \varepsilon_{112}
\end{aligned}
$$

$\vdots$

respon ke-1, subyek ke-1, dan pengamatan ke-n $(k=1,\ j=1, i=n)$

$$
\begin{aligned}
y_{11n} &= \{ \alpha_{1110} + \alpha_{1111} x_{111n} + \alpha_{1112} x_{111n}^{2} + \ldots + \alpha_{111Q} x_{111n}^{Q} + \delta_{1111} (x_{111n} - K_{1111})_{+}^{Q} \\
&\quad + \ldots + \delta_{111R} (x_{111n} - K_{111R})_{+}^{Q} \} + \{ \alpha_{1120} + \alpha_{1121} x_{211n} + \alpha_{1122} x_{211n}^{2} + \ldots + \alpha_{112Q} x_{211n}^{Q} \\
&\quad + \delta_{1121} (x_{211n} - K_{1121})_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{112R} (x_{211n} - K_{112R})_{+}^{Q} \} + \ldots + \{ \alpha_{11p0} + \alpha_{11p1} x_{p11n} + \alpha_{11p2} x_{p11n}^{2} \\
&\quad + \ldots + \alpha_{11pQ} x_{p11n}^{Q} + \delta_{11p1} (x_{p11n} - K_{11p1})_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{11pR} (x_{p11n} - K_{11pR})_{+}^{Q} \} + \varepsilon_{11n}
\end{aligned}
$$

Setelah menuliskan rincian model untuk respon pertama pada subyek pertama untuk pengamatan ke-1 hingga ke-n , maka selanjutnya adalah model untuk respon pertama pada subyek kedua. Adapun model yang dimaksud yaitu :

respon ke-1, subyek ke-2, dan pengamatan ke-1 $(k=1, j=2, i=1)$

$$y_{121} = \{\alpha_{1210} + \alpha_{1211}x_{1121} + \alpha_{1212}x_{1121}^2 + \ldots + \alpha_{121Q}x_{1121}^Q + \delta_{1211}(x_{1121} - K_{1211})_+^Q + \ldots + \delta_{121R}(x_{1121} - K_{121R})_+^Q\} + \{\alpha_{1220} + \alpha_{1221}x_{2121} + \alpha_{1222}x_{2121}^2 + \ldots + \alpha_{122Q}x_{2121}^Q + \delta_{1221}(x_{2121} - K_{1221})_+^Q + \ldots + \delta_{122R}(x_{2121} - K_{122R})_+^Q\} + \ldots + \{\alpha_{12p0} + \alpha_{12p1}x_{p121} + \alpha_{12p2}x_{p121}^2 + \ldots + \alpha_{12pQ}x_{p121}^Q + \delta_{12p1}(x_{p121} - K_{12p1})_+^Q + \ldots + \delta_{12pR}(x_{p121} - K_{12pR})_+^Q\} + \varepsilon_{121}$$

$\vdots$

respon ke-1, subyek ke-2, dan pengamatan ke-n $(k=1, j=2, i=n)$

$$y_{12n} = \{\alpha_{1210} + \alpha_{1211}x_{112n} + \alpha_{1212}x_{112n}^2 + \ldots + \alpha_{121Q}x_{112n}^Q + \delta_{1211}(x_{112n} - K_{1211})_+^Q + \ldots + \delta_{121R}(x_{112n} - K_{121R})_+^Q\} + \{\alpha_{1220} + \alpha_{1221}x_{212n} + \alpha_{1222}x_{212n}^2 + \ldots + \alpha_{122Q}x_{212n}^Q + \delta_{1221}(x_{212n} - K_{1221})_+^Q + \ldots + \delta_{122R}(x_{212n} - K_{122R})_+^Q\} + \ldots + \{\alpha_{12p0} + \alpha_{12p1}x_{p12n} + \alpha_{12p2}x_{p12n}^2 + \ldots + \alpha_{12pQ}x_{p12n}^Q + \delta_{12p1}(x_{p12n} - K_{12p1})_+^Q + \ldots + \delta_{12pR}(x_{p12n} - K_{12pR})_+^Q\} + \varepsilon_{12n}$$

Model untuk respon pertama pada subyek kedua juga melibatkan sebanyak n pengamatan sebagaimana yang dijabarkan. Subyek akan terus berjalan hingga nantinya masuk ke rincian model pada respon pertama, subyek ke-m untuk pengamatan ke-1 sampai ke-n .

$\vdots$

respon ke-1, subyek ke-m, dan pengamatan ke-n $(k=1, j=m, i=n)$

$$y_{1mn} = \{\alpha_{1m10} + \alpha_{1m11}x_{11mn} + \alpha_{1m12}x_{11mn}^2 + \ldots + \alpha_{1m1Q}x_{11mn}^Q + \delta_{1m11}(x_{11mn} - K_{1m11})_+^Q + \ldots + \delta_{1m1R}(x_{11mn} - K_{1m1R})_+^Q\} + \{\alpha_{1m20} + \alpha_{1m21}x_{21mn} + \alpha_{1m22}x_{21mn}^2 + \ldots + \alpha_{1m2Q}x_{21mn}^Q + \delta_{1m21}(x_{21mn} - K_{1m21})_+^Q + \ldots + \delta_{1m2R}(x_{21mn} - K_{1m2R})_+^Q\} + \ldots + \{\alpha_{1mp0} + \alpha_{1mp1}x_{p1mn} + \alpha_{1mp2}x_{p1mn}^2 + \ldots + \alpha_{1mpQ}x_{p1mn}^Q + \delta_{1mp1}(x_{p1mn} - K_{1mp1})_+^Q + \ldots + \delta_{1mpR}(x_{p1mn} - K_{1mpR})_+^Q\} + \varepsilon_{1mn}$$

Sama seperti pada model untuk respon pertama, model respon kedua akan berjalan untuk subyek ke-1 hingga ke-m .

respon ke-2, subyek ke-1, dan pengamatan ke-1 $(k=2, j=1, i=1)$

$$y_{211} = \{\alpha_{2110} + \alpha_{2111}x_{1211} + \alpha_{2112}x_{1211}^2 + \ldots + \alpha_{211Q}x_{1211}^Q + \delta_{2111}(x_{1211} - K_{2111})_+^Q + \ldots + \delta_{211R}(x_{1211} - K_{211R})_+^Q\} + \{\alpha_{2120} + \alpha_{2121}x_{2211} + \alpha_{2122}x_{2211}^2 + \ldots + \alpha_{212Q}x_{2211}^Q + \delta_{2121}(x_{2211} - K_{2121})_+^Q + \ldots + \delta_{212R}(x_{2211} - K_{212R})_+^Q\} + \ldots + \{\alpha_{21p0} + \alpha_{21p1}x_{p211} + \alpha_{21p2}x_{p211}^2 + \ldots + \alpha_{21pQ}x_{p211}^Q + \delta_{21p1}(x_{p211} - K_{21p1})_+^Q + \ldots + \delta_{21pR}(x_{p211} - K_{21pR})_+^Q\} + \varepsilon_{211}$$

respon ke-2, subyek ke-1, dan pengamatan ke-2 $(k=2, j=1, i=2)$

$$y_{212} = \{\alpha_{2110} + \alpha_{2111}x_{1212} + \alpha_{2112}x_{1212}^2 + \ldots + \alpha_{211Q}x_{1212}^Q + \delta_{2111}(x_{1212} - K_{2111})_+^Q + \ldots + \delta_{211R}(x_{1212} - K_{211R})_+^Q\} + \{\alpha_{2120} + \alpha_{2121}x_{2212} + \alpha_{2122}x_{2212}^2 + \ldots + \alpha_{212Q}x_{2212}^Q + \delta_{2121}(x_{2212} - K_{2121})_+^Q + \ldots + \delta_{212R}(x_{2212} - K_{212R})_+^Q\} + \ldots + \{\alpha_{21p0} + \alpha_{21p1}x_{p212} + \alpha_{21p2}x_{p212}^2 + \ldots + \alpha_{21pQ}x_{p212}^Q + \delta_{21p1}(x_{p212} - K_{21p1})_+^Q + \ldots + \delta_{21pR}(x_{p212} - K_{21pR})_+^Q\} + \varepsilon_{212}$$

$\vdots$

respon ke-2, subyek ke-1, dan pengamatan ke-n $(k=2, j=1, i=n)$

$$y_{21n} = \{\alpha_{2110} + \alpha_{2111}x_{121n} + \alpha_{2112}x_{121n}^2 + \ldots + \alpha_{211Q}x_{121n}^Q + \delta_{2111}(x_{121n} - K_{2111})_+^Q + \ldots + \delta_{211R}(x_{121n} - K_{211R})_+^Q\} + \{\alpha_{2120} + \alpha_{2121}x_{221n} + \alpha_{2122}x_{221n}^2 + \ldots + \alpha_{212Q}x_{221n}^Q + \delta_{2121}(x_{221n} - K_{2121})_+^Q + \ldots + \delta_{212R}(x_{221n} - K_{212R})_+^Q\} + \ldots + \{\alpha_{21p0} + \alpha_{21p1}x_{p21n} + \alpha_{21p2}x_{p21n}^2 + \ldots + \alpha_{21pQ}x_{p21n}^Q + \delta_{21p1}(x_{p21n} - K_{21p1})_+^Q + \ldots + \delta_{21pR}(x_{p21n} - K_{21pR})_+^Q\} + \varepsilon_{21n}$$

Setelah selesai keseluruhan rincian model pada subyek pertama, selanjutnya masuk untuk rincian model respon kedua untuk subyek kedua dan seterusnya hingga subyek ke-m dengan setiap subyek terdiri dari n pengamatan.

respon ke-2, subyek ke-2, dan pengamatan ke-1 $(k=2, j=2, i=1)$

$$y_{221} = \{\alpha_{2210} + \alpha_{2211}x_{1221} + \alpha_{2212}x_{1221}^2 + \ldots + \alpha_{221Q}x_{1221}^Q + \delta_{2211}(x_{1221} - K_{2211})_+^Q + \ldots + \delta_{221R}(x_{1221} - K_{221R})_+^Q\} + \{\alpha_{2220} + \alpha_{2221}x_{2221} + \alpha_{2222}x_{2221}^2 + \ldots + \alpha_{222Q}x_{2221}^Q + \delta_{2221}(x_{2221} - K_{2221})_+^Q + \ldots + \delta_{222R}(x_{2221} - K_{222R})_+^Q\} + \ldots + \{\alpha_{22p0} + \alpha_{22p1}x_{p221} + \alpha_{22p2}x_{p221}^2 + \ldots + \alpha_{22pQ}x_{p221}^Q + \delta_{22p1}(x_{p221} - K_{22p1})_+^Q + \ldots + \delta_{22pR}(x_{p221} - K_{22pR})_+^Q\} + \varepsilon_{221}$$

$\vdots$

respon ke-2, subyek ke-2, dan pengamatan ke-n $(k=2, j=2, i=n)$

$$y_{22n} = \{\alpha_{2210} + \alpha_{2211}x_{122n} + \alpha_{2212}x_{122n}^2 + \ldots + \alpha_{221Q}x_{122n}^Q + \delta_{2211}(x_{122n} - K_{2211})_+^Q + \ldots + \delta_{221R}(x_{122n} - K_{221R})_+^Q\} + \{\alpha_{2220} + \alpha_{2221}x_{222n} + \alpha_{2222}x_{222n}^2 + \ldots + \alpha_{222Q}x_{222n}^Q + \delta_{2221}(x_{222n} - K_{2221})_+^Q + \ldots + \delta_{222R}(x_{222n} - K_{222R})_+^Q\} + \ldots + \{\alpha_{22p0} + \alpha_{22p1}x_{p22n} + \alpha_{22p2}x_{p22n}^2 + \ldots + \alpha_{22pQ}x_{p22n}^Q + \delta_{22p1}(x_{p22n} - K_{22p1})_+^Q + \ldots + \delta_{22pR}(x_{p22n} - K_{22pR})_+^Q\} + \varepsilon_{22n}$$

$\vdots$

respon ke-2, subyek ke-m, dan pengamatan ke-n $(k=2,\ j=m, i=n)$

$$\begin{aligned} y_{2mn} = &\left\{\alpha_{2m10}+\alpha_{2m11}x_{12mn}+\alpha_{2m12}x_{12mn}^{2}+\ldots+\alpha_{2m1Q}x_{12mn}^{Q}+\delta_{2m11}\left(x_{12mn}-K_{2m11}\right)_{+}^{Q}\right. \\ &\left.+\ldots+\delta_{2m1R}\left(x_{12mn}-K_{2m1R}\right)_{+}^{Q}\right\}+\left\{\alpha_{2m20}+\alpha_{2m21}x_{22mn}+\alpha_{2m22}x_{22mn}^{2}+\ldots+\alpha_{2m2Q}x_{22mn}^{Q}\right. \\ &\left.+\delta_{2m21}\left(x_{22mn}-K_{2m21}\right)_{+}^{Q}+\ldots+\delta_{2m2R}\left(x_{22mn}-K_{2m2R}\right)_{+}^{Q}\right\}+\ldots+\left\{\alpha_{2mp0}+\alpha_{2mp1}x_{p2mn}+\alpha_{2mp2}x_{p2mn}^{2}\right. \\ &\left.+\ldots+\alpha_{2mpQ}x_{p2mn}^{Q}+\delta_{2mp1}\left(x_{p2mn}-K_{2mp1}\right)_{+}^{Q}+\ldots+\delta_{2mpR}\left(x_{p2mn}-K_{2mpR}\right)_{+}^{Q}\right\}+\varepsilon_{2mn} \end{aligned}$$

$\vdots$

Model untuk respon pertama dan kedua. Respon akan berjalan untuk respon ke-1 hingga respon ke-m. Model terakhir yang terbentuk yaitu model untuk respon ke-l dengan subyek ke-m dan pada pengamatan ke-n. Model yang dimaksud yaitu sebagai berikut.

respon ke-l, subyek ke-m, dan pengamatan ke-n $(k=l,\ j=m, i=n)$

$$\begin{aligned} y_{lmn} = &\left\{\alpha_{lm10}+\alpha_{lm11}x_{1lmn}+\alpha_{lm12}x_{1lmn}^{2}+\ldots+\alpha_{lm1Q}x_{1lmn}^{Q}+\delta_{lm11}\left(x_{1lmn}-K_{lm11}\right)_{+}^{Q}\right. \\ &\left.+\ldots+\delta_{lm1R}\left(x_{1lmn}-K_{lm1R}\right)_{+}^{Q}\right\}+\left\{\alpha_{lm20}+\alpha_{lm21}x_{2lmn}+\alpha_{lm22}x_{2lmn}^{2}+\ldots+\alpha_{lm2Q}x_{2lmn}^{Q}\right. \\ &\left.+\delta_{lm21}\left(x_{2lmn}-K_{lm21}\right)_{+}^{Q}+\ldots+\delta_{lm2R}\left(x_{2lmn}-K_{lm2R}\right)_{+}^{Q}\right\}+\ldots+\left\{\alpha_{lmp0}+\alpha_{lmp1}x_{plmn}+\alpha_{lmp2}x_{plmn}^{2}\right. \\ &\left.+\ldots+\alpha_{lmpQ}x_{plmn}^{Q}+\delta_{lmp1}\left(x_{plmn}-K_{lmp1}\right)_{+}^{Q}+\ldots+\delta_{lmpR}\left(x_{plmn}-K_{lmpR}\right)_{+}^{Q}\right\}+\varepsilon_{lmn} \end{aligned}$$

Untuk memudahkan tahap estimasi parameter, maka persamaan (4.2) akan dituliskan kembali namun dengan memisahkan matriks berdasarkan variabel prediktornya yang dalam hal ini disebut matriks $\mathbf{A}$ dimana matriks $\mathbf{A}$ berjalan dari 1 hingga p karena ada sebanyak p variabel prediktor yang digunakan. Matriks $\mathbf{A_p}$ memuat semua persamaan yang mengandung variabel prediktor ke-p untuk semua subyek di respon ke-1 hingga ke-l.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} + \ldots + \mathbf{A_p} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.4}$$

dengan $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{y}_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \mathbf{y}_l \end{bmatrix}$;

Di dalam matriks $\mathbf{A}$, fungsi kurva regresi telah diganti dengan fungsi spline sebagaimana rincian model sebelumnya. $\mathbf{A}_1$ Adalah matriks yang memuat semua variabel prediktor ke-1 untuk setiap pengamatan di semua subyek pada respon ke-1 hingga ke-l.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix}
\alpha_{1110} + \alpha_{1111}x_{1111} + \ldots + \alpha_{111Q}x_{1111}^{Q} + \delta_{1111}\left(x_{1111} - K_{1111}\right)_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{111R}\left(x_{1111} - K_{111R}\right)_{+}^{Q} \\
\alpha_{1110} + \alpha_{1111}x_{1112} + \ldots + \alpha_{111Q}x_{1112}^{Q} + \delta_{1111}\left(x_{1112} - K_{1111}\right)_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{111R}\left(x_{1112} - K_{111R}\right)_{+}^{Q} \\
\vdots \\
\alpha_{1110} + \alpha_{1111}x_{111n} + \ldots + \alpha_{111Q}x_{111n}^{Q} + \delta_{1111}\left(x_{111n} - K_{1111}\right)_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{111R}\left(x_{111n} - K_{111R}\right)_{+}^{Q} \\
\vdots \\
\alpha_{1m10} + \alpha_{1m11}x_{11mn} + \ldots + \alpha_{1m1Q}x_{11mn}^{Q} + \delta_{1m11}\left(x_{11mn} - K_{1m11}\right)_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{1m1R}\left(x_{11mn} - K_{1m1R}\right)_{+}^{Q} \\
\cdots\cdots\cdots

Dan seterusnya hingga matriks $\mathbf{A_p}$ yang memuat semua variabel prediktor ke- p untuk setiap pengamatan di semua subyek pada respon ke-1 hingga ke-l.

$$\mathbf{A_p} = \begin{bmatrix}
\vdots \\
\alpha_{11p0} + \alpha_{11p1}x_{p111} + \ldots + \alpha_{11pQ}x_{p111}^{Q} + \delta_{11p1}\left(x_{p111} - K_{11p1}\right)_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{11pR}\left(x_{p111} - K_{11pR}\right)_{+}^{Q} \\
\alpha_{11p0} + \alpha_{11p1}x_{p112} + \ldots + \alpha_{11pQ}x_{p112}^{Q} + \delta_{11p1}\left(x_{p112} - K_{11p1}\right)_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{11pR}\left(x_{p112} - K_{11pR}\right)_{+}^{Q} \\
\vdots \\
\alpha_{11p0} + \alpha_{11p1}x_{p11n} + \ldots + \alpha_{11pQ}x_{p11n}^{Q} + \delta_{11p1}\left(x_{p11n} - K_{11p1}\right)_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{11pR}\left(x_{p11n} - K_{11pR}\right)_{+}^{Q} \\
\vdots \\
\alpha_{1mp0} + \alpha_{1mp1}x_{p1mn} + \ldots + \alpha_{1mpQ}x_{p1mn}^{Q} + \delta_{1mp1}\left(x_{p1mn} - K_{1mp1}\right)_{+}^{Q} + \ldots + \delta_{1mpR}\left(x_{p1mn} - K_{1mpR}\right)_{+}^{Q} \\
\ldots\ldots\ldots

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_1\boldsymbol{\gamma}_1 + \mathbf{B}_2\boldsymbol{\gamma}_2 + \ldots + \mathbf{B}_p\boldsymbol{\gamma}_p \tag{4.5}$$

dengan $\mathbf{B}_1$ dan $\boldsymbol{\gamma}_1$ didefinisikan sebagai berikut

$$\mathbf{B}_1 = \left[\mathbf{diag}\left(\mathbf{B}_{111}, \mathbf{B}_{112}, \ldots, \mathbf{B}_{11m}, \mathbf{B}_{121}, \mathbf{B}_{122}, \ldots, \mathbf{B}_{12m}, \ldots, \mathbf{B}_{1lm}\right)\right]$$

Dimana matriks yang mengisi diagonal tersebut merupakan rincian untuk setiap respon dan setiap subyek. Sebagai contoh, $\mathbf{B}_{111}$ merupakan matriks yang berisi orde dan segmentasi untuk variabel prediktor ke-1 pada respon ke-1 dan subyek ke-1. Begitu seterusnya hingga $\mathbf{B}_{1lm}$ merupakan matriks yang berisi orde dan segmentasi untuk variabel prediktor ke-1 pada respon ke-l dan subyek ke-m.

$$\mathbf{B}_{111} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1111} & x_{1111}^2 & \cdots & x_{1111}^Q & (x_{1111} - K_{1111})_+^Q & \cdots & (x_{1111} - K_{111R})_+^Q \\ 1 & x_{1112} & x_{1112}^2 & \cdots & x_{1112}^Q & (x_{1112} - K_{1111})_+^Q & \cdots & (x_{1112} - K_{111R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{111n} & x_{111n}^2 & \cdots & x_{111n}^Q & (x_{111n} - K_{1111})_+^Q & \cdots & (x_{111n} - K_{111R})_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{112} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1121} & x_{1121}^2 & \cdots & x_{1121}^Q & (x_{1121} - K_{1211})_+^Q & \cdots & (x_{1121} - K_{121R})_+^Q \\ 1 & x_{1122} & x_{1122}^2 & \cdots & x_{1122}^Q & (x_{1122} - K_{1211})_+^Q & \cdots & (x_{1122} - K_{121R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{112n} & x_{112n}^2 & \cdots & x_{112n}^Q & (x_{112n} - K_{1211})_+^Q & \cdots & (x_{112n} - K_{121R})_+^Q \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$\mathbf{B}_{11m} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11m1} & x_{11m1}^2 & \cdots & x_{11m1}^Q & (x_{11m1} - K_{1m11})_+^Q & \cdots & (x_{11m1} - K_{1m1R})_+^Q \\ 1 & x_{11m2} & x_{11m2}^2 & \cdots & x_{11m2}^Q & (x_{11m2} - K_{1m11})_+^Q & \cdots & (x_{11m2} - K_{1m1R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{11mn} & x_{11mn}^2 & \cdots & x_{11mn}^Q & (x_{11mn} - K_{1m11})_+^Q & \cdots & (x_{11mn} - K_{1m1R})_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{121} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1211} & x_{1211}^2 & \cdots & x_{1211}^Q & (x_{1211} - K_{2111})_+^Q & \cdots & (x_{1211} - K_{211R})_+^Q \\ 1 & x_{1212} & x_{1212}^2 & \cdots & x_{1212}^Q & (x_{1212} - K_{2111})_+^Q & \cdots & (x_{1212} - K_{211R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{121n} & x_{121n}^2 & \cdots & x_{121n}^Q & (x_{121n} - K_{2111})_+^Q & \cdots & (x_{121n} - K_{211R})_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{122} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1221} & x_{1221}^2 & \cdots & x_{1221}^Q & (x_{1221} - K_{2211})_+^Q & \cdots & (x_{1221} - K_{221R})_+^Q \\ 1 & x_{1222} & x_{1222}^2 & \cdots & x_{1222}^Q & (x_{1222} - K_{2211})_+^Q & \cdots & (x_{1222} - K_{221R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{122n} & x_{122n}^2 & \cdots & x_{122n}^Q & (x_{122n} - K_{2211})_+^Q & \cdots & (x_{122n} - K_{221R})_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{B}_{12m} = \begin{bmatrix} 1 & x_{12m1} & x_{12m1}^2 & \cdots & x_{12m1}^Q & (x_{12m1} - K_{2m11})_+^Q & \cdots & (x_{12m1} - K_{2m1R})_+^Q \\ 1 & x_{12m2} & x_{12m2}^2 & \cdots & x_{12m2}^Q & (x_{12m2} - K_{2m11})_+^Q & \cdots & (x_{12m2} - K_{2m1R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{12mn} & x_{12mn}^2 & \cdots & x_{12mn}^Q & (x_{12mn} - K_{2m11})_+^Q & \cdots & (x_{12mn} - K_{2m1R})_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{B}_{1lm} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1lm1} & x_{1lm1}^2 & \cdots & x_{1lm1}^Q & (x_{1lm1} - K_{lm11})_+^Q & \cdots & (x_{1lm1} - K_{lm1R})_+^Q \\ 1 & x_{1lm2} & x_{1lm2}^2 & \cdots & x_{1lm2}^Q & (x_{1lm2} - K_{lm11})_+^Q & \cdots & (x_{1lm2} - K_{lm1R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1lmn} & x_{1lmn}^2 & \cdots & x_{1lmn}^Q & (x_{1lmn} - K_{lm11})_+^Q & \cdots & (x_{1lmn} - K_{lm1R})_+^Q \end{bmatrix}$$

Dengan vektor parameter yang bersesuaian yaitu sebagai berikut

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{111} \\ \gamma_{112} \\ \vdots \\ \gamma_{11m} \\ \cdots\cdots \\ \gamma_{121} \\ \gamma_{122} \\ \vdots \\ \gamma_{12m} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \gamma_{1lm} \end{bmatrix}$$

dimana :

$$\boldsymbol{\gamma}_{111}=\begin{bmatrix}\alpha_{1110}\\ \alpha_{1111}\\ \alpha_{1112}\\ \vdots\\ \alpha_{111Q}\\ \delta_{1111}\\ \vdots\\ \delta_{111R}\end{bmatrix};\boldsymbol{\gamma}_{112}=\begin{bmatrix}\alpha_{1210}\\ \alpha_{1211}\\ \alpha_{1212}\\ \vdots\\ \alpha_{121Q}\\ \delta_{1211}\\ \vdots\\ \delta_{121R}\end{bmatrix};\cdots;\boldsymbol{\gamma}_{11m}=\begin{bmatrix}\alpha_{1m10}\\ \alpha_{1m11}\\ \alpha_{1m12}\\ \vdots\\ \alpha_{1m1Q}\\ \delta_{1m11}\\ \vdots\\ \delta_{1m1R}\end{bmatrix};\boldsymbol{\gamma}_{121}=\begin{bmatrix}\alpha_{2110}\\ \alpha_{2111}\\ \alpha_{2112}\\ \vdots\\ \alpha_{211Q}\\ \delta_{2111}\\ \vdots\\ \delta_{211R}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{122}=\begin{bmatrix}\alpha_{2210}\\ \alpha_{2211}\\ \alpha_{2212}\\ \vdots\\ \alpha_{221Q}\\ \delta_{2211}\\ \vdots\\ \delta_{221R}\end{bmatrix};\cdots;\boldsymbol{\gamma}_{12m}=\begin{bmatrix}\alpha_{2m10}\\ \alpha_{2m11}\\ \alpha_{2m12}\\ \vdots\\ \alpha_{2m1Q}\\ \delta_{2m11}\\ \vdots\\ \delta_{2m1R}\end{bmatrix};\cdots;\boldsymbol{\gamma}_{1lm}=\begin{bmatrix}\alpha_{lm10}\\ \alpha_{lm11}\\ \alpha_{lm12}\\ \vdots\\ \alpha_{lm1Q}\\ \delta_{lm11}\\ \vdots\\ \delta_{lm1R}\end{bmatrix}$$

Selanjutnya adalah mendefinisikan $\mathbf{B}_2$ dan $\boldsymbol{\gamma}_2$ yaitu bagian matriks yang memuat orde, bagian segmentasi, dan parameter yang bersesuaian dengan variabel prediktor ke-2.

$$\mathbf{B}_2=\left[\mathbf{diag}\left(\mathbf{B}_{211},\mathbf{B}_{212},\ldots,\mathbf{B}_{21m},\mathbf{B}_{221},\mathbf{B}_{222},\ldots,\mathbf{B}_{22m},\ldots,\mathbf{B}_{2lm}\right)\right]$$

$$\mathbf{B}_{211}=\begin{bmatrix}1 & x_{2111} & x_{2111}^2 & \cdots & x_{2111}^Q & \left(x_{2111}-K_{1121}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{2111}-K_{112R}\right)_+^Q\\ 1 & x_{2112} & x_{2112}^2 & \cdots & x_{2112}^Q & \left(x_{2112}-K_{1121}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{2112}-K_{112R}\right)_+^Q\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_{211n} & x_{211n}^2 & \cdots & x_{211n}^Q & \left(x_{211n}-K_{1121}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{211n}-K_{112R}\right)_+^Q\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{212}=\begin{bmatrix}1 & x_{2121} & x_{2121}^2 & \cdots & x_{2121}^Q & \left(x_{2121}-K_{1221}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{2121}-K_{122R}\right)_+^Q\\ 1 & x_{2122} & x_{2122}^2 & \cdots & x_{2122}^Q & \left(x_{2122}-K_{1221}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{2122}-K_{122R}\right)_+^Q\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_{212n} & x_{212n}^2 & \cdots & x_{212n}^Q & \left(x_{212n}-K_{1221}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{212n}-K_{122R}\right)_+^Q\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{B}_{21\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{21m1} & x_{21m1}^2 & \cdots & x_{21m1}^Q & (x_{21m1} - K_{1m21})_+^Q & \cdots & (x_{21m1} - K_{1m2R})_+^Q \\ 1 & x_{21m2} & x_{21m2}^2 & \cdots & x_{21m2}^Q & (x_{21m2} - K_{1m21})_+^Q & \cdots & (x_{21m2} - K_{1m2R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{21mn} & x_{21mn}^2 & \cdots & x_{21mn}^Q & (x_{21mn} - K_{1m21})_+^Q & \cdots & (x_{21mn} - K_{1m2R})_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{221} = \begin{bmatrix} 1 & x_{2211} & x_{2211}^2 & \cdots & x_{2211}^Q & (x_{2211} - K_{2121})_+^Q & \cdots & (x_{2211} - K_{212R})_+^Q \\ 1 & x_{2212} & x_{2212}^2 & \cdots & x_{2212}^Q & (x_{2212} - K_{2121})_+^Q & \cdots & (x_{2212} - K_{212R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{221n} & x_{221n}^2 & \cdots & x_{221n}^Q & (x_{221n} - K_{2121})_+^Q & \cdots & (x_{221n} - K_{212R})_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{222} = \begin{bmatrix} 1 & x_{2221} & x_{2221}^2 & \cdots & x_{2221}^Q & (x_{2221} - K_{2221})_+^Q & \cdots & (x_{2221} - K_{222R})_+^Q \\ 1 & x_{2222} & x_{2222}^2 & \cdots & x_{2222}^Q & (x_{2222} - K_{2221})_+^Q & \cdots & (x_{2222} - K_{222R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{222n} & x_{222n}^2 & \cdots & x_{222n}^Q & (x_{222n} - K_{2221})_+^Q & \cdots & (x_{222n} - K_{222R})_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{B}_{22\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{22m1} & x_{22m1}^2 & \cdots & x_{22m1}^Q & (x_{22m1} - K_{2m21})_+^Q & \cdots & (x_{22m1} - K_{2m2R})_+^Q \\ 1 & x_{22m2} & x_{22m2}^2 & \cdots & x_{22m2}^Q & (x_{22m2} - K_{2m21})_+^Q & \cdots & (x_{22m2} - K_{2m2R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{22mn} & x_{22mn}^2 & \cdots & x_{22mn}^Q & (x_{22mn} - K_{2m21})_+^Q & \cdots & (x_{22mn} - K_{2m2R})_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{B}_{2l\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{2lm1} & x_{2lm1}^2 & \cdots & x_{2lm1}^Q & (x_{2lm1} - K_{lm21})_+^Q & \cdots & (x_{2lm1} - K_{lm2R})_+^Q \\ 1 & x_{2lm2} & x_{2lm2}^2 & \cdots & x_{2lm2}^Q & (x_{2lm2} - K_{lm21})_+^Q & \cdots & (x_{2lm2} - K_{lm2R})_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{2lmn} & x_{2lmn}^2 & \cdots & x_{2lmn}^Q & (x_{2lmn} - K_{lm21})_+^Q & \cdots & (x_{2lmn} - K_{lm2R})_+^Q \end{bmatrix}$$

Dengan vektor parameter yang bersesuaian yaitu :

$$\boldsymbol{\gamma}_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{211} \\ \gamma_{212} \\ \vdots \\ \gamma_{21m} \\ \cdots\cdots \\ \gamma_{221} \\ \gamma_{222} \\ \vdots \\ \gamma_{22m} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \gamma_{2lm} \end{bmatrix} \text{ dimana } \boldsymbol{\gamma}_{211} = \begin{bmatrix} \alpha_{1120} \\ \alpha_{1121} \\ \alpha_{1122} \\ \vdots \\ \alpha_{112Q} \\ \delta_{1121} \\ \vdots \\ \delta_{112R} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\gamma}_{212} = \begin{bmatrix} \alpha_{1220} \\ \alpha_{1221} \\ \alpha_{1222} \\ \vdots \\ \alpha_{122Q} \\ \delta_{1221} \\ \vdots \\ \delta_{122R} \end{bmatrix}; \cdots; \boldsymbol{\gamma}_{21m} = \begin{bmatrix} \alpha_{1m20} \\ \alpha_{1m21} \\ \alpha_{1m22} \\ \vdots \\ \alpha_{1m2Q} \\ \delta_{1m21} \\ \vdots \\ \delta_{1m2R} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{221} = \begin{bmatrix} \alpha_{2120} \\ \alpha_{2121} \\ \alpha_{2122} \\ \vdots \\ \alpha_{212Q} \\ \delta_{2121} \\ \vdots \\ \delta_{212R} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\gamma}_{222} = \begin{bmatrix} \alpha_{2220} \\ \alpha_{2221} \\ \alpha_{2222} \\ \vdots \\ \alpha_{222Q} \\ \delta_{2221} \\ \vdots \\ \delta_{222R} \end{bmatrix}; \cdots; \boldsymbol{\gamma}_{22m} = \begin{bmatrix} \alpha_{2m20} \\ \alpha_{2m21} \\ \alpha_{2m22} \\ \vdots \\ \alpha_{2m2Q} \\ \delta_{2m21} \\ \vdots \\ \delta_{2m2R} \end{bmatrix}; \cdots; \boldsymbol{\gamma}_{2lm} = \begin{bmatrix} \alpha_{lm20} \\ \alpha_{lm21} \\ \alpha_{lm22} \\ \vdots \\ \alpha_{lm2Q} \\ \delta_{lm21} \\ \vdots \\ \delta_{lm2R} \end{bmatrix}$$

dan seterusnya hingga $\mathbf{B}_p$ dan $\boldsymbol{\gamma}_p$ yang memuat variabel prediktor ke- *p* didefinisikan sebagai berikut

$$\mathbf{B}_p = \left[\mathbf{diag}\left(\mathbf{B}_{p11}, \mathbf{B}_{p12}, \ldots, \mathbf{B}_{p1m}, \mathbf{B}_{p21}, \mathbf{B}_{p22}, \ldots, \mathbf{B}_{p2m}, \ldots, \mathbf{B}_{p/m}\right)\right]$$

$$\mathbf{B}_{p11} = \begin{bmatrix} 1 & x_{p111} & x_{p111}^2 & \cdots & x_{p111}^Q & \left(x_{p111} - K_{11p1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p111} - K_{11pR}\right)_+^Q \\ 1 & x_{p112} & x_{p112}^2 & \cdots & x_{p112}^Q & \left(x_{p112} - K_{11p1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p112} - K_{11pR}\right)_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{p11n} & x_{p11n}^2 & \cdots & x_{p11n}^Q & \left(x_{p11n} - K_{11p1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p11n} - K_{11pR}\right)_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B_{p12}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{p121} & x_{p121}^2 & \cdots & x_{p121}^Q & \left(x_{p121}-K_{12p1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p121}-K_{12pR}\right)_+^Q \\ 1 & x_{p122} & x_{p122}^2 & \cdots & x_{p122}^Q & \left(x_{p122}-K_{12p1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p122}-K_{12pR}\right)_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{p12n} & x_{p12n}^2 & \cdots & x_{p12n}^Q & \left(x_{p12n}-K_{12p1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p12n}-K_{12pR}\right)_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{B_{p1m}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{p1m1} & x_{p1m1}^2 & \cdots & x_{p1m1}^Q & \left(x_{p1m1}-K_{1mp1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p1m1}-K_{1mpR}\right)_+^Q \\ 1 & x_{p1m2} & x_{p1m2}^2 & \cdots & x_{p1m2}^Q & \left(x_{p1m2}-K_{1mp1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p1m2}-K_{1mpR}\right)_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{p1mn} & x_{p1mn}^2 & \cdots & x_{p1mn}^Q & \left(x_{p1mn}-K_{1mp1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p1mn}-K_{1mpR}\right)_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B_{p21}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{p211} & x_{p211}^2 & \cdots & x_{p211}^Q & \left(x_{p211}-K_{21p1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p211}-K_{21pR}\right)_+^Q \\ 1 & x_{p212} & x_{p212}^2 & \cdots & x_{p212}^Q & \left(x_{p212}-K_{21p1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p212}-K_{21pR}\right)_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{p21n} & x_{p21n}^2 & \cdots & x_{p21n}^Q & \left(x_{p21n}-K_{21p1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p21n}-K_{21pR}\right)_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B_{p22}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{p221} & x_{p221}^2 & \cdots & x_{p221}^Q & \left(x_{p221}-K_{22p1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p221}-K_{22pR}\right)_+^Q \\ 1 & x_{p222} & x_{p222}^2 & \cdots & x_{p222}^Q & \left(x_{p222}-K_{22p1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p222}-K_{22pR}\right)_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{p22n} & x_{p22n}^2 & \cdots & x_{p22n}^Q & \left(x_{p22n}-K_{22p1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p22n}-K_{22pR}\right)_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{B_{p2m}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{p2m1} & x_{p2m1}^2 & \cdots & x_{p2m1}^Q & \left(x_{p2m1}-K_{2mp1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p2m1}-K_{2mpR}\right)_+^Q \\ 1 & x_{p2m2} & x_{p2m2}^2 & \cdots & x_{p2m2}^Q & \left(x_{p2m2}-K_{2mp1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p2m2}-K_{2mpR}\right)_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{p2mn} & x_{p2mn}^2 & \cdots & x_{p2mn}^Q & \left(x_{p2mn}-K_{2mp1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{p2mn}-K_{2mpR}\right)_+^Q \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{plm}} = \begin{bmatrix} 1 & x_{plm1} & x_{plm1}^2 & \cdots & x_{plm1}^Q & \left(x_{plm1} - K_{lmp1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{plm1} - K_{lmpR}\right)_+^Q \\ 1 & x_{plm2} & x_{plm2}^2 & \cdots & x_{plm2}^Q & \left(x_{plm2} - K_{lmp1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{plm2} - K_{lmpR}\right)_+^Q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{plmn} & x_{plmn}^2 & \cdots & x_{plmn}^Q & \left(x_{plmn} - K_{lmp1}\right)_+^Q & \cdots & \left(x_{plmn} - K_{lmpR}\right)_+^Q \end{bmatrix}$$

Dengan vektor parameter yang bersesuaian yaitu :

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p11}} \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p12}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p1m}} \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p21}} \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p22}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p2m}} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{plm}} \end{bmatrix} \text{ dimana } \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p11}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11p0} \\ \alpha_{11p1} \\ \alpha_{11p2} \\ \vdots \\ \alpha_{11pQ} \\ \delta_{11p1} \\ \vdots \\ \delta_{11pR} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p12}} = \begin{bmatrix} \alpha_{12p0} \\ \alpha_{12p1} \\ \alpha_{12p2} \\ \vdots \\ \alpha_{12pQ} \\ \delta_{12p1} \\ \vdots \\ \delta_{12pR} \end{bmatrix}; \cdots; \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p1m}} = \begin{bmatrix} \alpha_{1mp0} \\ \alpha_{1mp1} \\ \alpha_{1mp2} \\ \vdots \\ \alpha_{1mpQ} \\ \delta_{1mp1} \\ \vdots \\ \delta_{1mpR} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p21}} = \begin{bmatrix} \alpha_{21p0} \\ \alpha_{21p1} \\ \alpha_{21p2} \\ \vdots \\ \alpha_{21pQ} \\ \delta_{21p1} \\ \vdots \\ \delta_{21pR} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p22}} = \begin{bmatrix} \alpha_{22p0} \\ \alpha_{22p1} \\ \alpha_{22p2} \\ \vdots \\ \alpha_{22pQ} \\ \delta_{22p1} \\ \vdots \\ \delta_{22pR} \end{bmatrix}; \cdots; \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{p2m}} = \begin{bmatrix} \alpha_{2mp0} \\ \alpha_{2mp1} \\ \alpha_{2mp2} \\ \vdots \\ \alpha_{2mpQ} \\ \delta_{2mp1} \\ \vdots \\ \delta_{2mpR} \end{bmatrix}; \cdots; \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{plm}} = \begin{bmatrix} \alpha_{lmp0} \\ \alpha_{lmp1} \\ \alpha_{lmp2} \\ \vdots \\ \alpha_{lmpQ} \\ \delta_{lmp1} \\ \vdots \\ \delta_{lmpR} \end{bmatrix}$$

Estimasi $\hat{\mathbf{y}}$ diberikan oleh :

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{B}_1\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1 + \mathbf{B}_2\hat{\boldsymbol{\gamma}}_2 + \ldots + \mathbf{B}_{\mathbf{p}}\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{p}} \qquad (4.6)$$

Untuk memperoleh estimator $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_1, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_2, \ldots, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{p}}$ digunakan metode *Weighted Least Square* (WLS) dengan menggunakan matrik $\mathbf{V}$ sebagai matriks pembobot dimana matriks $\mathbf{V}$ merupakan matriks varians covarians yang diketahui.

Pada studi data longitudinal multirespon, terdapat korelasi dalam subyek serta korelasi dari setiap respon pada subyek yang sama. Berdasarkan Wu dan Zhang (2006) matriks pembobot didefinisikan sebagai $\mathbf{V} = \mathbf{diag}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_m)$ dimana matriks pembobot dispesifikasikan oleh peneliti. Terdapat tiga metode untuk menentukan matriks pembobot, yaitu :

1. Metode 1, $\mathbf{V_j} = N^{-1}\mathbf{I}_{m_j}$, dimana masing-masing pengamatan diperlakukan sama, dimana $N = m\ x\ n$
2. Metode 2, $\mathbf{V_j} = (nm_j)^{-1}\mathbf{I}_{m_j}$, dimana masing-masing pengamatan di dalam subyek yang sama diperlakukan sama, sesuai dengan banyaknya amatan dalam setiap subyek
3. Metode 3, $\mathbf{V_j} = \mathbf{W_j^{-1}}\ \mathbf{W_j} = \mathrm{cov}(y_j)$

Untuk menentukan estimator dari regresi *spline truncated*, metode 1 dan metode 2 dapat dipilih sebagai spesifikasi matriks pembobot. Tetapi untuk estimator *generalized smoothing spline*, lebih direkomendasikan untuk menggunakan metode 3. Adapun struktur matriks pembobot untuk data longitudinal multirespon dengan menggunakan metode 3 yaitu :

$$\mathbf{V} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc|c|ccccc}
\sigma_{111} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{121} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_{1l1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \sigma_{112} & 0 & & 0 & 0 & \sigma_{122} & 0 & & 0 & & 0 & \sigma_{1l2} & 0 & & 0 \\
0 & 0 & \sigma_{113} & \ddots & 0 & 0 & 0 & \sigma_{123} & \ddots & 0 & & 0 & 0 & \sigma_{1l3} & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{11m} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{12m} & & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{1lm} \\
\hline
\sigma_{211} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{221} & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \sigma_{2l1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \sigma_{212} & 0 & & 0 & 0 & \sigma_{222} & 0 & & 0 & & 0 & \sigma_{2l2} & 0 & & 0 \\
0 & 0 & \sigma_{213} & \ddots & 0 & 0 & 0 & \sigma_{223} & \ddots & 0 & & 0 & 0 & \sigma_{2l3} & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{21m} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{22m} & & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{2lm} \\
\hline
 & & \vdots & & & & & \vdots & & & & & & \vdots & & \\
\hline
\sigma_{l11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{l21} & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \sigma_{ll1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \sigma_{l12} & 0 & & 0 & 0 & \sigma_{l22} & 0 & & 0 & & 0 & \sigma_{ll2} & 0 & & 0 \\
0 & 0 & \sigma_{l13} & \ddots & 0 & 0 & 0 & \sigma_{l23} & \ddots & 0 & & 0 & 0 & \sigma_{ll3} & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{l1m} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{l2m} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{llm}
\end{array}\right]$$

dimana,

$$\boldsymbol{\sigma}_{111}=\begin{bmatrix}\sigma_{11111} & \sigma_{11112} & \sigma_{11113} & \cdots & \sigma_{1111n}\\ \sigma_{11121} & \sigma_{11122} & \sigma_{11123} & & \sigma_{1112n}\\ \sigma_{11131} & \sigma_{11132} & \sigma_{11133} & \ddots & \sigma_{1113n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_{111n1} & \sigma_{111n2} & \sigma_{111n3} & \cdots & \sigma_{111nn}\end{bmatrix},\boldsymbol{\sigma}_{112}=\begin{bmatrix}\sigma_{11211} & \sigma_{11212} & \sigma_{11213} & \cdots & \sigma_{1121n}\\ \sigma_{11221} & \sigma_{11222} & \sigma_{11223} & & \sigma_{1122n}\\ \sigma_{11231} & \sigma_{11232} & \sigma_{11233} & \ddots & \sigma_{1123n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_{112n1} & \sigma_{112n2} & \sigma_{112n3} & \cdots & \sigma_{112nn}\end{bmatrix}$$

$$,\ \cdots,\boldsymbol{\sigma}_{ll\mathbf{m}}=\begin{bmatrix}\sigma_{ll\mathbf{m}11} & \sigma_{ll\mathbf{m}12} & \sigma_{ll\mathbf{m}13} & \cdots & \sigma_{ll\mathbf{m}1n}\\ \sigma_{ll\mathbf{m}21} & \sigma_{ll\mathbf{m}22} & \sigma_{ll\mathbf{m}23} & & \sigma_{ll\mathbf{m}2n}\\ \sigma_{ll\mathbf{m}31} & \sigma_{ll\mathbf{m}32} & \sigma_{ll\mathbf{m}33} & \ddots & \sigma_{ll\mathbf{m}3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_{ll\mathbf{m}n1} & \sigma_{ll\mathbf{m}n2} & \sigma_{ll\mathbf{m}n3} & \cdots & \sigma_{ll\mathbf{m}nn}\end{bmatrix}$$

Estimasi $\hat{\mathbf{y}}$ adalah,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}\left(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\ldots,\hat{\gamma}_p\right)&=\left(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}\right)^T\mathbf{V}\left(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}\right)\\&=\left(\mathbf{y}-\left(\mathbf{B}_1\gamma_1+\mathbf{B}_2\gamma_2+\ldots+\mathbf{B}_p\gamma_p\right)\right)^T\mathbf{V}\left(\mathbf{y}-\left(\mathbf{B}_1\gamma_1+\mathbf{B}_2\gamma_2+\ldots+\mathbf{B}_p\gamma_p\right)\right)\\&=\left(\mathbf{y}^T\mathbf{V}-\left(\gamma_1^T\mathbf{B}_1^T+\gamma_2^T\mathbf{B}_2^T+\cdots+\gamma_p^T\mathbf{B}_p^T\right)\mathbf{V}\right)\left(\mathbf{y}-\left(\mathbf{B}_1\gamma_1+\mathbf{B}_2\gamma_2+\ldots+\mathbf{B}_p\gamma_p\right)\right)\\&=\mathbf{y}^T\mathbf{V}\mathbf{y}-\mathbf{y}^T\mathbf{V}\left(\mathbf{B}_1\gamma_1+\mathbf{B}_2\gamma_2+\ldots+\mathbf{B}_p\gamma_p\right)-\left(\gamma_1^T\mathbf{B}_1^T+\gamma_2^T\mathbf{B}_2^T+\cdots+\gamma_p^T\mathbf{B}_p^T\right)\mathbf{V}\mathbf{y}\\&\quad+\left(\gamma_1^T\mathbf{B}_1^T+\gamma_2^T\mathbf{B}_2^T+\cdots+\gamma_p^T\mathbf{B}_p^T\right)\mathbf{V}\left(\mathbf{B}_1\gamma_1+\mathbf{B}_2\gamma_2+\ldots+\mathbf{B}_p\gamma_p\right)\\&=\mathbf{y}^T\mathbf{V}\mathbf{y}-2\left(\gamma_1^T\mathbf{B}_1^T+\gamma_2^T\mathbf{B}_2^T+\cdots+\gamma_p^T\mathbf{B}_p^T\right)\mathbf{V}\mathbf{y}\\&\quad+\left(\gamma_1^T\mathbf{B}_1^T+\gamma_2^T\mathbf{B}_2^T+\cdots+\gamma_p^T\mathbf{B}_p^T\right)\mathbf{V}\left(\mathbf{B}_1\gamma_1+\mathbf{B}_2\gamma_2+\ldots+\mathbf{B}_p\gamma_p\right)\\&=\mathbf{y}^T\mathbf{V}\mathbf{y}-2\left(\mathbf{B}_1\gamma_1+\mathbf{B}_2\gamma_2+\ldots+\mathbf{B}_p\gamma_p\right)^T\mathbf{V}\mathbf{y}\\&\quad+\left(\mathbf{B}_1\gamma_1+\mathbf{B}_2\gamma_2+\ldots+\mathbf{B}_p\gamma_p\right)^T\mathbf{V}\left(\mathbf{B}_1\gamma_1+\mathbf{B}_2\gamma_2+\ldots+\mathbf{B}_p\gamma_p\right)\end{aligned}$$

Misal $\mathbf{B}_1\gamma_1+\mathbf{B}_2\gamma_2+\ldots+\mathbf{B}_p\gamma_p=\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}$ maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}\left(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\ldots,\hat{\gamma}_p\right)&=\mathbf{y}^T\mathbf{V}\mathbf{y}-2\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}\right)^T\mathbf{V}\mathbf{y}+\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}\right)^T\mathbf{V}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}\right)\\&=\mathbf{y}^T\mathbf{V}\mathbf{y}-2\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{y}+\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan estimasi $\boldsymbol{\theta}$ dilakukan dengan meminimumkan fungsi WLS sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\mathbf{y}^T\mathbf{V}\mathbf{y}-2\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{y}+\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{X}\boldsymbol{\theta}\right)}{\partial\boldsymbol{\theta}}&=\mathbf{0}\\-2\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{y}+2\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}&=\mathbf{0}\\\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}&=\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{y}\\\hat{\boldsymbol{\theta}}&=\left(\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{y}\end{aligned}$$

sehingga

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=\left(\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{y} \qquad (4.7)$$

Didefinisikan $\mathbf{X}$ adalah

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{diag}\left(\mathbf{M}_{11}, \mathbf{M}_{12}, \ldots, \mathbf{M}_{1m}, \mathbf{M}_{21}, \mathbf{M}_{22}, \ldots, \mathbf{M}_{2m}, \ldots, \mathbf{M}_{lm}\right)\right]$$

Dengan rincian setiap matriks $\mathbf{M}$ memuat semua variabel prediktor dari variabel prediktor ke-1 hingga ke-p untuk setiap subyek dan setiap responnya. Berikut adalah rincian dari masing-masing matriks $\mathbf{M}$.

$$\mathbf{M}_{11} = \left[\mathbf{B}_{111} \quad \mathbf{B}_{211} \quad \mathbf{B}_{311} \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{p11}\right]$$

$$\mathbf{M}_{12} = \left[\mathbf{B}_{112} \quad \mathbf{B}_{212} \quad \mathbf{B}_{312} \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{p12}\right]$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{M}_{1m} = \left[\mathbf{B}_{11m} \quad \mathbf{B}_{21m} \quad \mathbf{B}_{31m} \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{p1m}\right]$$

$$\mathbf{M}_{21} = \left[\mathbf{B}_{121} \quad \mathbf{B}_{221} \quad \mathbf{B}_{321} \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{p21}\right]$$

$$\mathbf{M}_{22} = \left[\mathbf{B}_{122} \quad \mathbf{B}_{222} \quad \mathbf{B}_{322} \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{p22}\right]$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{M}_{2m} = \left[\mathbf{B}_{12m} \quad \mathbf{B}_{22m} \quad \mathbf{B}_{32m} \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{p2m}\right]$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{M}_{lm} = \left[\mathbf{B}_{1lm} \quad \mathbf{B}_{2lm} \quad \mathbf{B}_{3lm} \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{plm}\right]$$

Matriks $\mathbf{M}$ terdiri matriks $\mathbf{B}$ dapat dilihat pada rincian persamaan (4.5). Sedangkan nilai vektor parameter didefinisikan sebagai $\boldsymbol{\theta}$ dengan rincian sebagai berikut.

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_{11} \\ \boldsymbol{\theta}_{12} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{1m} \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{\theta}_{21} \\ \boldsymbol{\theta}_{22} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{2m} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{\theta}_{lm} \end{bmatrix} \quad \text{dengan: } \boldsymbol{\theta}_{11} = \begin{bmatrix} \gamma_{111} \\ \gamma_{211} \\ \gamma_{311} \\ \vdots \\ \gamma_{p11} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\theta}_{12} = \begin{bmatrix} \gamma_{112} \\ \gamma_{212} \\ \gamma_{312} \\ \vdots \\ \gamma_{p12} \end{bmatrix}; \cdots\cdots; \boldsymbol{\theta}_{1m} = \begin{bmatrix} \gamma_{11m} \\ \gamma_{21m} \\ \gamma_{31m} \\ \vdots \\ \gamma_{p1m} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{21}=\begin{bmatrix}\gamma_{121}\\ \gamma_{221}\\ \gamma_{321}\\ \vdots\\ \gamma_{p21}\end{bmatrix};\boldsymbol{\theta}_{22}=\begin{bmatrix}\gamma_{122}\\ \gamma_{222}\\ \gamma_{322}\\ \vdots\\ \gamma_{p22}\end{bmatrix};\cdots\cdots;\boldsymbol{\theta}_{2m}=\begin{bmatrix}\gamma_{12m}\\ \gamma_{22m}\\ \gamma_{32m}\\ \vdots\\ \gamma_{p2m}\end{bmatrix};\cdots\cdots;\boldsymbol{\theta}_{lm}=\begin{bmatrix}\gamma_{1lm}\\ \gamma_{2lm}\\ \gamma_{3lm}\\ \vdots\\ \gamma_{plm}\end{bmatrix}$$

Vektor parameter terkelompokkan berdasarkan setiap subyek dan setiap respon. Vektor parameter $\boldsymbol{\theta}$ terdiri dari vektor parameter $\boldsymbol{\gamma}$ yang dapat dilihat pada rincian persamaan (4.5).

Sehingga persamaan (4.6) dapat ditulis :

$$\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{4.8}$$

Apabila persamaan (4.7) disubstitusikan ke persamaan (4.8) maka didapatkan $\hat{\mathbf{y}}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{y}}&=\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ \hat{\mathbf{y}}&=\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{y}\\ &=\mathbf{A}(\mathbf{h})\mathbf{y}\end{aligned} \tag{4.9}$$

dimana $\mathbf{A}(\mathbf{h})\mathbf{y}=\mathbf{X}\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}$

Setelah diperoleh estimasi parameter model regresi nonparametrik spline truncated multirespon untuk data longitudinal maka langkah selanjutnya adalah menentukan nilai GCV dari masing-masing knot yang terbentuk.

$$GCV(h)=\frac{MSE(h)}{\left[\frac{1}{lmn}trace\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}(\mathbf{h})\right)\right]^2} \tag{4.10}$$

dimana $MSE(h)=\frac{1}{lmn}\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{kji}-\hat{y}_{kji}\right)^2$

Nilai GCV terkecil akan memberikan titik-titik knot yang optimal.

4.2 Sifat-sifat Estimator Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal

Pada persamaan (4.8) didapatkan $\mathbf{y} = \mathbf{X\theta}$, apabila dituliskan $\mathbf{z}(c_1, c_2, \ldots, c_l) = \mathbf{X\theta}$ maka diperoleh persamaan $\mathbf{y} = \mathbf{z}(c_1, c_2, \ldots, c_l) + \boldsymbol{\varepsilon}$ dimana :

$c_1 = \mathbf{f_1} = (f(x_{11}), f(x_{21}), \ldots, f(x_{p1}))$

$c_2 = \mathbf{f_2} = (f(x_{12}), f(x_{22}), \ldots, f(x_{p2}))$

$\vdots$

$c_l = \mathbf{f}_l = (f(x_{1l}), f(x_{2l}), \ldots, f(x_{pl}))$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}}(c_1, c_2, \ldots, c_l) &= \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{y} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{h})\mathbf{y}\end{aligned} \tag{4.11}$$

Berdasarkan persamaan (4.11) terlihat bahwa estimator *spline truncated* multirespon merupakan estimator yang linear. Langkah selanjutnya adalah mencari nilai ekspektasi estimator $\hat{\mathbf{z}}(c_1, c_2, \ldots, c_l)$ untuk melihat bias atau tidaknya estimator tersebut.

$$E(\hat{\mathbf{z}}(c_1, c_2, \ldots, c_l)) = E\begin{bmatrix}\hat{z}(c_1)\\ \hat{z}(c_2)\\ \vdots \\ \hat{z}(c_l)\end{bmatrix} = E[\mathbf{A}(\mathbf{h})\mathbf{y}] = E\left[\mathbf{A}(\mathbf{h})\begin{bmatrix}\mathbf{y_1}\\ \mathbf{y_2}\\ \vdots \\ \mathbf{y}_l\end{bmatrix}\right] = \mathbf{A}(\mathbf{h})\begin{bmatrix}E(\mathbf{y_1})\\ E(\mathbf{y_2})\\ \vdots \\ E(\mathbf{y}_l)\end{bmatrix} \tag{4.12}$$

dimana $E(y_1) = E(z(c_1) + \varepsilon_1) = z(c_1)$, sehingga persamaan (4.12) dapat ditulis sebagai berikut :

$$E(\hat{\mathbf{z}}(c_1, c_2, \ldots, c_l)) = \mathbf{A}(\mathbf{h})\begin{bmatrix}z(c_1)\\ z(c_2)\\ \vdots \\ z(c_l)\end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Berdasarkan persamaan (4.12) diketahui bahwa estimator $\hat{\mathbf{z}}(c_1, c_2, \ldots, c_l)$ bersifat bias karena $E(\hat{\mathbf{z}}(c_1, c_2, \ldots, c_l)) \neq \begin{bmatrix}z(c_1)\\ z(c_2)\\ \vdots \\ z(c_l)\end{bmatrix}$.

Apabila error model nonparametrik multirespon *spline truncated* diasumsikan berdistribusi normal $N(0,\sigma^2 I)$ maka MGF dari $\mathbf{y}$ yaitu :

$$
\begin{aligned}
M_y(\phi) &= M_{\hat{\mathbf{z}}(c_1,c_2,\ldots,c_l)+\varepsilon}(\phi) \\
&= \exp\{\phi^T \mathbf{X\theta}\} M_{\varepsilon}(\phi) \\
&= \exp\{\phi^T \mathbf{X\theta}\} M_{\varepsilon}(\phi) \\
&= \exp\{\phi^T \mathbf{X\theta}\} \exp\{\phi^T (0) + \frac{1}{2}\phi^T \sigma^2 \mathbf{I}\phi\} \\
&= \exp\{\phi^T \mathbf{X\theta} + \frac{1}{2}\phi^T \sigma^2 \mathbf{I}\phi\} \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Persamaan (4.14) menunjukan MGF dari distribusi Normal dengan mean $\mathbf{X\theta}$ dan variansi $\sigma^2\mathbf{I}$. Selanjutnya yaitu mencari distribusi dari estimator $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Jika diketahui bahwa $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X^T V X})^{-1}\mathbf{X^T V y}$ maka

$$
\begin{aligned}
M_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\phi) &= M_{(\mathbf{X^T V X})^{-1}\mathbf{X^T V y}}(\phi) \\
&= M_{\mathbf{y}}(\mathbf{X^T V X})^{-1}\mathbf{X^T V}(\phi) \\
&= \exp\left\{\left((\mathbf{X^T V X})^{-1}\mathbf{X^T V}\phi\right)^T \mathbf{X\theta} + \frac{1}{2}\left((\mathbf{X^T V X})^{-1}\mathbf{X^T V}\phi\right)^T \sigma^2\mathbf{I}(\mathbf{X^T V X})^{-1}\mathbf{X^T V}\phi\right\} \\
&= \exp\left\{(\mathbf{X^T V}\phi)^T\left((\mathbf{X^T V X})^{-1}\right)^T \mathbf{X\theta} + \frac{1}{2}(\mathbf{X^T V}\phi)^T\left((\mathbf{X^T V X})^{-1}\right)^T \sigma^2\mathbf{I}(\mathbf{X^T V X})^{-1}\mathbf{X^T V}\phi\right\} \\
&= \exp\left\{\phi^T\mathbf{V X}(\mathbf{X^T V X})^{-1}\mathbf{X\theta} + \frac{1}{2}(\phi^T\mathbf{V X})(\mathbf{X^T V X})^{-1}\sigma^2\mathbf{I}(\mathbf{X^T V X})^{-1}\mathbf{X^T V}\phi\right\} \\
&= \exp\left\{\phi^T\left[\mathbf{V X}(\mathbf{X^T V X})^{-1}\mathbf{X\theta}\right] + \frac{1}{2}\phi^T\left[(\mathbf{V X})(\mathbf{X^T V X})^{-2}\mathbf{X^T V}\sigma^2\right]\phi\right\}
\end{aligned}
$$

Jadi $M_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\phi)$ merupakan MGF dari distribusi Normal dengan dengan mean $\mathbf{VX}(\mathbf{X^T V X})^{-1}\mathbf{X\theta}$ dan varians $\mathbf{VX}(\mathbf{X^T V X})^{-2}\mathbf{X^T V}\sigma^2$. Selanjutnya akan dicari distribusi dari estimator $\hat{\mathbf{z}}(c_1,c_2,\ldots,c_l)$. Jika diketahui bahwa $\hat{\mathbf{z}}(c_1,c_2,\ldots,c_l) = \mathbf{A(h)y}$ maka MGF dari $\hat{\mathbf{z}}(c_1,c_2,\ldots,c_l)$ diberikan oleh:

$$
\begin{aligned}
M_{\hat{\mathbf{z}}(c_1,c_2,\ldots,c_l)}(\phi) &= M_{\mathbf{A(h)y}}(\phi) \\
&= M_{\mathbf{y}}(\mathbf{A(h)}\phi)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (4.14) didapat MGF dari **y** adalah $\exp\{\phi^T \mathbf{X\theta} + \frac{1}{2}\phi^T \sigma^2 \mathbf{I}\phi\}$, sehingga

$$M_{\hat{\mathbf{z}}(c_1,c_2,\ldots,c_l)}(\phi) = \exp\left\{(\mathbf{A(h)}\phi)^T \mathbf{X\theta} + \frac{1}{2}(\mathbf{A(h)}\phi)^T \sigma^2 (\mathbf{A(h)}\phi)\right\}$$
$$= \exp\left\{\phi^T \mathbf{A(h)}^T \mathbf{X\theta} + \frac{1}{2}\phi^T \mathbf{A(h)}^T \sigma^2 (\mathbf{A(h)}\phi)\right\} \quad (4.15)$$
$$= \exp\left\{\phi^T \left[\mathbf{A(h)}^T \mathbf{X\theta}\right] + \frac{1}{2}\phi^T \sigma^2 \left[\mathbf{A(h)}^T \mathbf{A(h)}\right]\phi\right\}$$

Berdasarkan persamaan (4.15) $M_{\hat{\mathbf{z}}(c_1,c_2,\ldots,c_l)}(\phi)$ merupakan MGF dari distribusi normal dengan mean $\mathbf{A(h)}^T \mathbf{X\theta}$ dan variansi $\sigma^2 \mathbf{A(h)}^T \mathbf{A(h)}$.

Dimana $\mathbf{A(h)} = \mathbf{X}(\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X^T V}$ sehingga didapatkan nilai mean dan varians sebagai berikut :

$$Mean = \mathbf{A(h)}^T \mathbf{X\theta}$$
$$= \left(\mathbf{X}(\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X^T V}\right)^T \mathbf{X\theta}$$
$$= (\mathbf{X^T V})^T (\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X\theta}$$

$$Varians = \sigma^2 \mathbf{A(h)}^T \mathbf{A(h)}$$
$$= \sigma^2 \left(\mathbf{X}(\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X^T V}\right)^T \left(\mathbf{X}(\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X^T V}\right)$$
$$= \sigma^2 (\mathbf{X^T V})^T (\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X}(\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X^T V}$$
$$= \sigma^2 \mathbf{V X}(\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X}(\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X^T V}$$
$$= \mathbf{V X}(\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X}(\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X^T V} \sigma^2$$

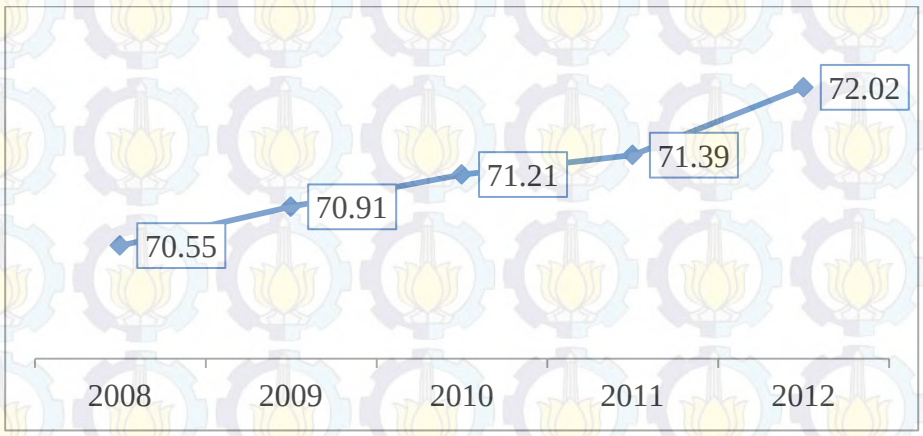
Sehingga didapat

$$\hat{\mathbf{z}}(c_1, c_2, \ldots, c_l) \sim N_n\left((\mathbf{X^T V})^T (\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X\theta}, \mathbf{V X}(\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{X}(\mathbf{X^T V X})^{-1} \mathbf{X^T V} \sigma^2\right).$$

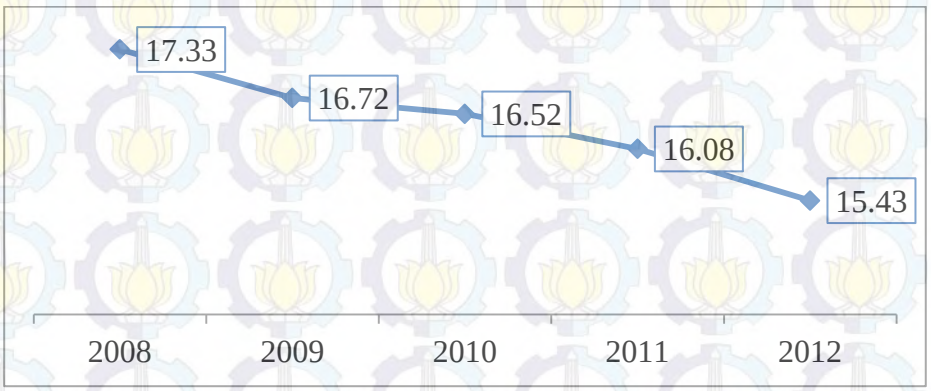
4.3 Aplikasi Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal

Model regresi nonparametrik *spline truncated* untuk data longitudinal diaplikasikan pada data keberhasilan KB di Indonesia. Data yang digunakan dalam penelitian ini melibatkan dua buah variabel respon dengan empat buah variabel prediktor. Adapun variabel respon yang dimaksud yaitu persentase

contraceptive prevalence rate atau CPR (y_1) dan persentase *unmet need* (y_2) dengan variabel prediktor indeks kedalaman kemiskinan (x_1), persentase KK dengan pendidikan SLTP ke bawah (x_2), persentase wanita berumur 10 tahun ke atas dengan usia perkawinan pertama 18 tahun ke bawah (x_3), dan persentase wanita berumur 10 tahun ke atas yang pernah kawin dengan anak lahir hidup kurang atau sama dengan dua (x_4). Berikut adalah perkembangan masing-masing variabel selama selang waktu antara Tahun 2008 hingga 2012. Berdasarkan Gambar 4.1 diketahui bahwa persentase CPR di Indonesia dari tahun ke tahun mengalami peningkatan namun tidak terlalu besar. Hal ini menunjukkan bahwa partisipasi dari PUS sudah cukup besar dalam hal penggunaan kontrasepsi.



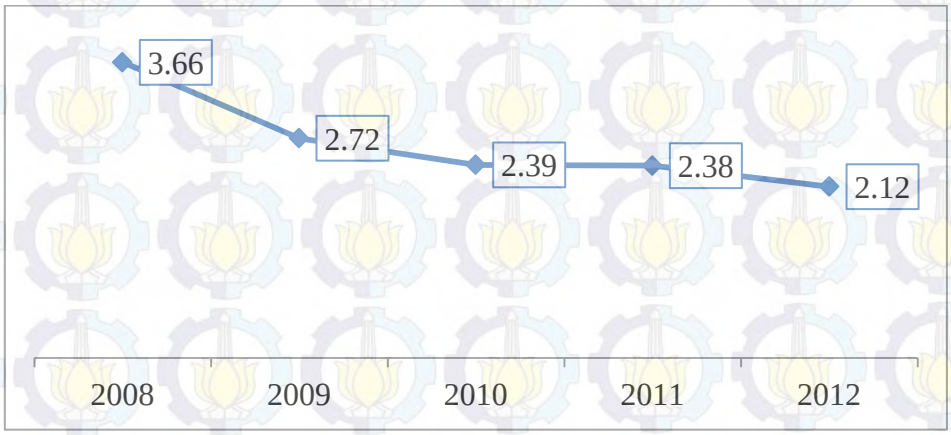
Gambar 4.1 Persentase CPR Indonesia Tahun 2008-2012



Gambar 4.2 Persentase *Unmet Need* Indonesia Tahun 2008-2012

Pada Gambar 4.2, diketahui bahwa persentase *unmet need* berkurang dari tahun ke tahun sebagaimana yang diharapkan oleh BKKBN. Turunnya angka

unmet need menunjukkan bahwa para pasangan usia subur yang tidak menggunakan alat/cara kontrasepsi namun menginginkan penundaan kehamilan atau pembatasan kehamilan telah berkurang. Berkurangnya persentase *unmet need* ini juga tidak menunjukkan nilai yang besar.

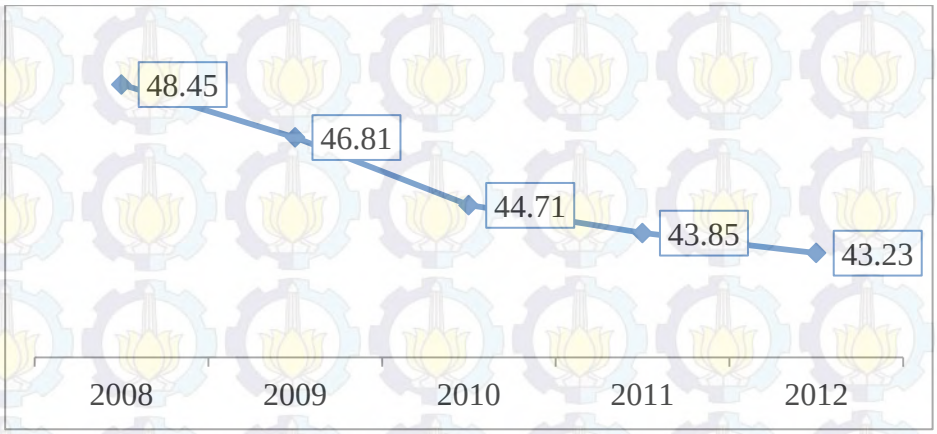


Gambar 4.3 Indeks Kedalaman Kemiskinan Indonesia Tahun 2008-2012

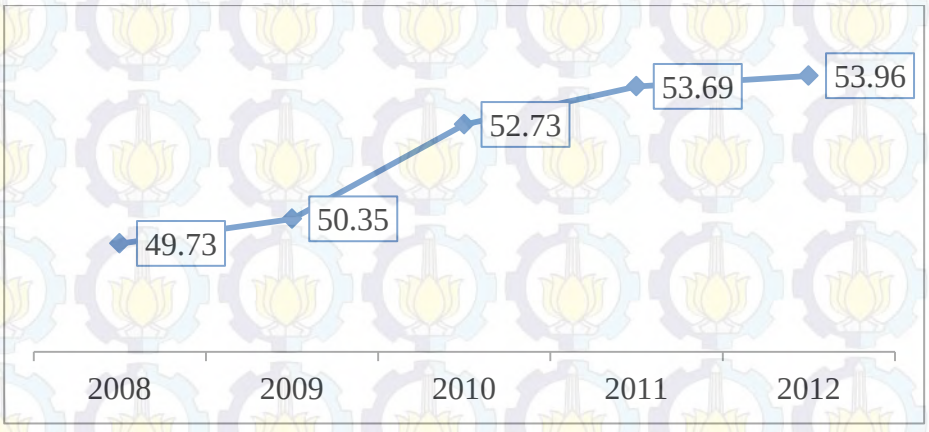
Gambar 4.3 menunjukkan Indeks Kedalaman Kemiskinan Indonesia yang mana dari tahun ke tahun mengalami penurunan namun tidak terlalu besar. Indeks kedalaman kemiskinan pada Tahun 2008 berkisar di angka 3,66 namun pada Tahun 2012, indeks kedalaman kemiskinan telah turun ke angka 2,12. Berkurangnya indeks kedalaman kemiskinan ini merupakan dampak dari perekonomian Indonesia yang membaik jika dilihat dari angka pertumbuhan ekonomi.

Gambar 4.4 Persentase KK dengan Pendidikan SLTP ke Bawah Tahun 2008-2012

Gambar 4.4 merupakan persentase kepala keluarga dengan pendidikan kurang dari atau sama dengan SLTP. Gambar 4.4 menunjukka bahwa pada Tahun 2008 hingga Tahun 2011, persentase KK dengan pendidikan SLTP ke bawah mengalami tren turun dari kisaran angka 71,57% menjadi 65,19%. Namun pada Tahun 2012 mengalami kenaikan kembali ke angka 67,91%. Sebagai salah satu faktor yang dianggap penting, oleh Karena itulah pendidikan dimasukkan sebagai salah satu variabel dalam penelitian ini.



Gambar 4.5 Persentase Wanita Berumur 10 Tahun ke Atas dengan Usia Perkawinan Pertama 18 Tahun ke Bawah pada Tahun 2008-2012



Gambar 4.6 Persentase Wanita Berumur 10 Tahun ke Atas yang Pernah Kawin dengan Anak Lahir Hidup Kurang atau Sama dengan Dua pada Tahun 2008-2012

Gambar 4.5 menggambarkan mengenai usia perkawinan pertama pada wanita. Usia perkawinan pertama ini dianggap penting karena berhubungan dengan resiko selama masa kehamilan ataupun pada saat melahirkan. Usia

perkawinan yang terlalu dini terlalu beresiko dikarenakan rahim yang belum cukup matang untuk proses berkembangnya janin dan juga mental yang belum cukup kuat untuk menghadapi masa kehamilan atau melahirkan. Dari gambar dapat dilihat bahwa persentase dengan usia perkawinan pertama 18 tahun ke bawah mengalami penurunan setiap tahunnya dari 48,45% pada Tahun 2008 menjadi 43,23% pada Tahun 2012. Meskipun mengalami tren turun namun angka ini adalah angka yang besar dan cukup berbahaya karena sebenarnya sesuai dengan harapan BKKBN, usia perkawinan pertama untuk wanita di atas 18 tahun.

Gambar 4.6 menunjukkan persentase wanita kawin dengan anak lahir hidup kurang atau sama dengan dua pada Tahun 2008 hingga 2012 mengalami peningkatan. Pada Tahun 2012, terdapat 53,96% wanita berumur 10 tahun ke atas yang pernah kawin dengan anak lahir hidup kurang atau sama dengan dua. Anak yang lahir hidup merupakan salah satu indikator dari fertilitas ibu yang sehat dan baik. Fertilitas yang baik ini merupakan salah satu hal yang dianggap berpengaruh apakah seseorang menggunakan kontrasepsi untuk mengatur kehamilannya sehingga setiap kehamilan dilalui dalam keadaan atau masa fertilitas yang baik.

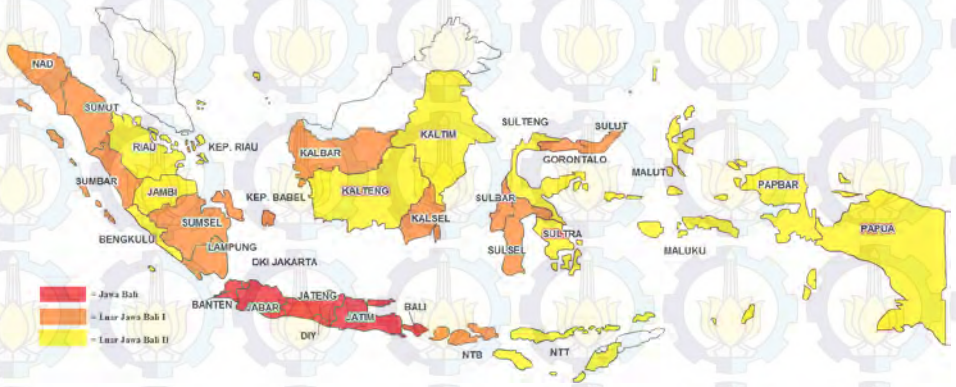
Tabel 4.1 Statistika Deskriptif dari Variabel Penelitian

Variabel	Rata-rata	Max	Min	Provinsi dengan Nilai Tertinggi	Provinsi dengan Nilai Terendah
y1	68.23	88	24.34	Kepulauan Riau	Papua
y2	18.22	54.77	3.88	Papua	Bali
x1	2.65	11.16	0.39	Papua	Bali
x2	66.62	80.32	35.13	Gorontalo	DKI Jakarta
x3	38.97	60.19	19.26	Jawa Barat	NTT
x4	49.56	64.85	35.36	Kepulauan Riau	Sumatera Utara

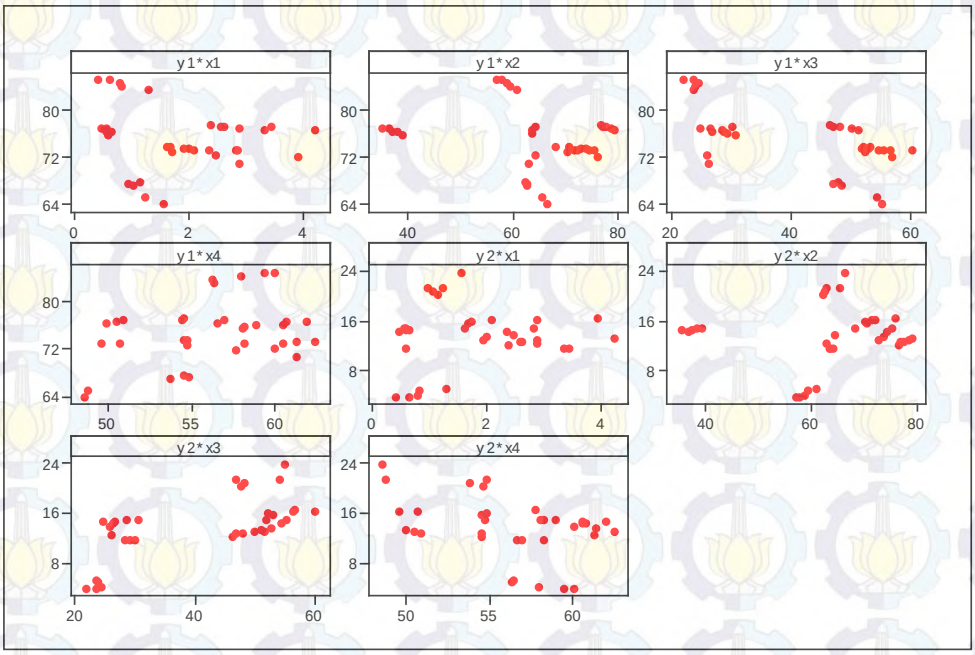
Secara rata-rata, selama Tahun 2008 hingga 2012, persentase CPR Indonesia yaitu sebesar 68,23% dengan persentase *unmet need* sebesar 18,22%. Sedangkan dari faktor-faktor yang diduga mempengaruhi dua angka tersebut yakni dari faktor ekonomi dengan melihat rata-rata indeks kedalaman kemiskinan sebesar 2,6, dari

faktor pendidikan yaitu masih ada 66,62% kepala keluarga dengan pendidikan SLTP ke bawah, dari faktor usia perkawinan yaitu terdapat 38,97% wanita dengan usia perkawinan pertama yang masih dini yakni 18 tahun ke bawah. Serta secara rata-rata, ada 49,56% wanita yang pernah kawin dengan anak lahir hidup kurang atau sama dengan dua.

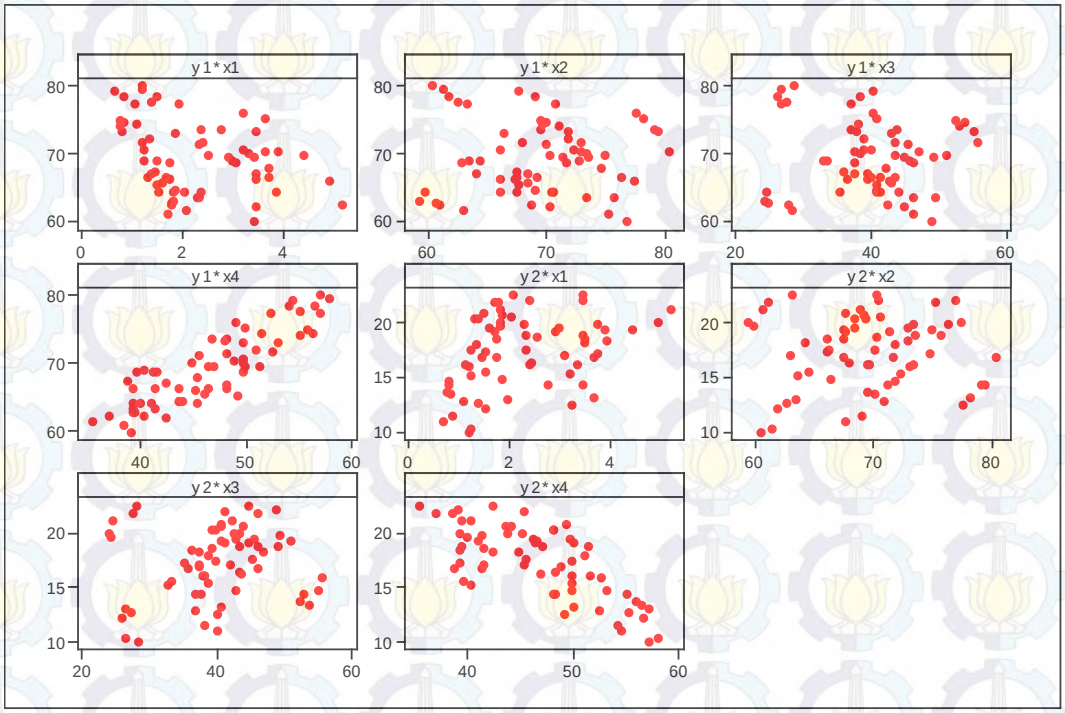
Dalam penelitian ini, unit pengamatan yaitu 33 provinsi di Indonesia yang dikelompokkan ke dalam tiga kelompok wilayah berdasarkan pengelompokan yang dilakukan oleh BKKBN (Badan Koordinasi Keluarga Berencana Nasional) yaitu kelompok Jawa Bali, kelompok Luar Jawa Bali I, dan kelompok Luar Jawa Bali II.



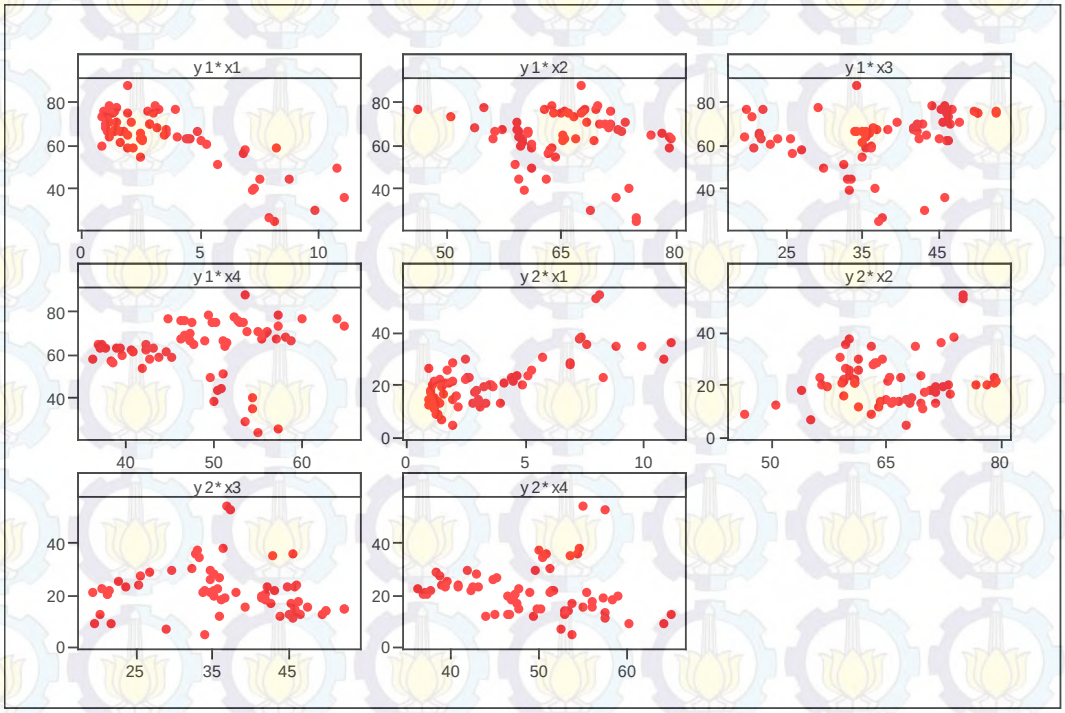
Gambar 4.7 Pembagian Kelompok Provinsi Berdasarkan BKKBN



Gambar 4.8 *Scatter Plot* antara Variabel Respon dengan Masing-masing Variabel Prediktor pada Kelompok Jawa Bali



Gambar 4.9 *Scatter Plot* antara Variabel Respon dengan Masing-masing Variabel Prediktor pada Kelompok Luar Jawa Bali I



Gambar 4.10 *Scatter Plot* antara Variabel Respon dengan Masing-masing Variabel Prediktor pada Kelompok Luar Jawa Bali II

Untuk memberikan gambaran atau informasi awal terkait dengan hubungan antara variabel respon dengan masing-masing variabel prediktor maka dibuatlah *scatter plot. Scatter plot* ini akan memberikan informasi mengenai pola bentuk kurva regresi yang akan digunakan dalam pemodelan. Berikut ini merupakan *scatter plot* antara variabel respon dengan variabel prediktor untuk masing-masing kelompok sebagaimana yang tercantum dalam Gambar 4.8 hingga 4.10.

Berdasarkan Gambar 4.8 hingga Gambar 4.10 diketahui bahwa plot data menyebar dan tidak membentuk suatu pola tertentu sehingga pendekatan regresi nonparametrik merupakan pendekatan yang dapat ditawarkan.

Pada penelitian ini digunakan regresi nonparametrik birespon karena melibatkan dua variabel respon dengan pendekatan *spline truncated* untuk data longitudinal. Penentuan knot optimal menggunakan metode GCV dengan jumlah knot sebanyak satu, dua, dan tiga buah titik knot. Kriteria kebaikan model yang digunakan adalah MSE. Dalam penelitian ini masih terdapat kekurangan yaitu keterbatasan dalam mengestimasi matriks pembobot $\mathbf{V_j} = \mathbf{W_j^{-1}}$ dimana $\mathbf{W_j} = \text{cov}(y_j)$. Sehingga dalam aplikasi model matriks pembobot yang digunakan mengacu pada Wu dan Zhang (2006) dimana matriks pembobot yang digunakan adalah banyaknya pengamatan dalam setiap subyek. Matriks pembobot $\mathbf{V}$ didefinisikan sebagai

$$\mathbf{V} = \left[diag\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} \right) \right]$$

Analisis dilakukan untuk masing-masing kelompok dengan tujuan untuk memodelkan setiap subyek dalam kelompok tersebut. Berikut adalah hasil pemodelan pada masing-masing kelompok.

4.3.1 Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal pada Kelompok Jawa Bali

Dalam pendekatan model regresi nonparametrik *spline truncated*, dikenal adanya titik yang disebut dengan titik knot yaitu titik perpaduan bersama dimana terjadi perubahan pola perilaku pada fungsi. Di dalam sebuah plot antara variabel respon dengan variabel prediktor dapat dibuat beberapa potongan atau segmen yang didasarkan pada titik knot. Letak titik knot dan banyaknya knot merupakan

hal yang sangat penting. Metode GCV digunakan untuk menentukan letak titik knot optimal dalam setiap variabel. Banyaknya knot yang digunakan beragam yaitu sebanyak satu titik knot untuk setiap variabel, dua knot, dan juga tiga knot. Berikut adalah titik-titik knot, nilai GCV untuk setiap variabel pada setiap subyek dengan menggunakan pembobot $\mathbf{V}$.

Tabel 4.2 Ringkasan GCV Terkecil untuk 1 Knot Kelompok Jawa Bali

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
DKI Jakarta	0,632653	38,81327	30,20612	61,82041	$1{,}11 \times 10^{-24}$
Jawa Barat	2,828571	72,1202	59,86102	54,58653	
Jawa Tengah	4,174082	79,05837	51,01918	54,37143	
DI Yogyakarta	3,342041	64,19878	29,72898	61,12735	
Jawa Timur	3,877143	75,99918	56,58102	62,26694	
Bali	1,253265	60,61163	24,34857	59,91612	
Banten	1,52551	66,19816	54,93	54,5849	

Tabel 4.3 Ringkasan GCV Terkecil untuk 2 Knot Kelompok Jawa Bali

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
DKI Jakarta	0,467347	35,28673	24,94388	58,22959	$2{,}18 \times 10^{-25}$
	0,515102	36,30551	26,46408	59,26694	
Jawa Barat	1,671429	68,2998	52,45898	49,78347	
	2,005714	69,40347	54,59735	51,17102	
Jawa Tengah	2,465918	76,77163	46,50082	50,12857	
	2,959388	77,43224	47,80612	51,35429	
DI Yogyakarta	0,687959	62,82122	25,88102	56,79265	
	1,454694	63,21918	26,99265	58,0449	
Jawa Timur	2,012857	72,83082	51,87898	57,92306	
	2,551429	73,74612	53,23735	59,17796	
Bali	0,426735	57,04837	21,84143	56,45388	
	0,66551	58,07776	22,56571	57,45408	
Banten	0,97449	62,33184	47,28	48,8451	
	1,133673	63,44878	49,49	50,50327	

Tabel 4.4 Ringkasan GCV Terkecil untuk 3 Knot Kelompok Jawa Bali

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
DKI Jakarta	0,463673	35,20837	24,82694	58,1498	4,06 x 10^{-26}
	0,507755	36,14878	26,2302	59,10735	
	0,595918	38,02959	29,03673	61,02245	
Jawa Barat	1,645714	68,2149	52,29449	49,67673	
	1,954286	69,23367	54,26837	50,95755	
	2,571429	71,27122	58,21612	53,51918	
Jawa Tengah	2,427959	76,72082	46,40041	50,03429	
	2,883469	77,33061	47,60531	51,16571	
	3,79449	78,5502	50,0151	53,42857	
DI Yogyakarta	0,62898	62,79061	25,79551	56,69633	
	1,336735	63,15796	26,82163	57,85224	
	2,752245	63,89265	28,87388	60,16408	
Jawa Timur	1,971429	72,76041	51,77449	57,82653	
	2,468571	73,60531	53,02837	58,9849	
	3,462857	75,2951	55,53612	61,30163	
Bali	0,408367	56,96918	21,78571	56,37694	
	0,628776	57,91939	22,45429	57,3002	
	1,069592	59,8198	23,79143	59,14673	
Banten	0,962245	62,24592	47,11	48,71755	
	1,109184	63,27694	49,15	50,24816	
	1,403061	65,33898	53,23	53,30939	

Tabel 4.2 hingga Tabel 4.4 menunjukkan titik-titik knot yang terbentuk untuk setiap nilai GCV terkecil. Hasil tersebut diperoleh dari *running* program yang terdapat pada lampiran 4 hingga lampiran 6. Setiap *running* program akan menghasilkan banyak alternatif titik knot dengan berbagai nilai GCV. *Running* program pada lampiran 4 akan menghasilkan 48 alternatif titik knot dengan masing-masing nilai GCV dan diketahui bahwa GCV terkecil yaitu 1,11 x 10^{-24}. Nilai GCV terkecil inilah yang menghasilkan titik-titik knot optimum sebagaimana pada Tabel 4.2. Sedangkan *Running* program pada lampiran 5 akan menghasilkan 1128 alternatif titik knot dengan masing-masing variabel mempunyai dua buah titik knot. Dari hasil tersebut diketahui bahwa GCV terkecil untuk dua titik knot yaitu 2,18 x 10^{-25}. Untuk *running* program pada lampiran 6 akan menghasilkan 17296 alternatif kombinasi titik knot dengan masing-masing variabel mempunyai tiga buah titik knot. Nilai GCV terkecil yang dihasilkan untuk tiga titik knot yaitu 4,06 x 10^{-26}. Setelah mengetahui nilai GCV dari masing-

masing titik knot maka selanjutnya adalah kembali memilih nilai GCV terkecil diantara satu, dua, dan tiga knot. GCV terkecil ditunjukkan oleh GCV 3 knot dengan nilai 4,06 x 10^{-26} sehingga titik-titik knot yang akan digunakan dalam pemodelan adalah titik-titik knot yang tertera pada Tabel 4.4 dimana masing-masing variabel untuk setiap subyek memiliki tiga buah titik knot.

Langkah selanjutnya adalah dengan menggunakan titik knot optimal dilakukan pemodelan untuk mendapatkan estimasi parameter model. Estimasi parameter model didapatkan dengan melakukan *running* program yang terdapat pada lampiran 9. Hasil dari program tersebut yaitu seluruh estimasi parameter untuk membentuk model bagi masing-masing subyek. Kelompok Jawa Bali terdiri dari tujuh buah provinsi atau tujuh buah subyek sehingga akan dihasilkan seluruh estimasi parameter untuk ketujuh provinsi. Sebagai contoh berikut adalah estimasi parameter yang dihasilkan untuk model Provinsi DKI Jakarta.

Tabel 4.5 Estimasi Parameter untuk Provinsi DKI Jakarta

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{110}	0,01735	α_{210}	0,00225
α_{1111}	-0,17193	α_{2111}	0,10295
α_{1121}	0,20193	α_{2121}	0,19326
α_{1131}	0,55656	α_{2131}	-0,1098
α_{1141}	0,91709	α_{2141}	0,1675
δ_{1111}	-0,17666	δ_{2111}	0,09899
δ_{1121}	-0,41271	δ_{2121}	0,13063
δ_{1131}	0,12007	δ_{2131}	-0,1408
δ_{1141}	-0,10026	δ_{2141}	0,02232
δ_{1112}	-0,13768	δ_{2112}	0,0639
δ_{1122}	-0,47596	δ_{2122}	0,32888
δ_{1132}	0,02568	δ_{2132}	0,15503
δ_{1142}	-0,1687	δ_{2142}	-0,0913
δ_{1113}	-0,04576	δ_{2113}	0,01811
δ_{1123}	-0,10223	δ_{2123}	-0,167
δ_{1133}	-0,15254	δ_{2133}	-0,2492
δ_{1143}	-0,0478	δ_{2143}	0,20402

Model yang terbentuk untuk Provinsi DKI Jakarta yaitu :

$$\hat{y}_{11i} = 0{,}01735 - 0{,}17193\, x_{11i} - 0{,}17666(x_{11i} - 0{,}463673)_+ + \\ - 0{,}13768(x_{11i} - 0{,}507755)_+ - 0{,}04576(x_{11i} - 0{,}595918)_+ \\ + 0{,}20193\, x_{21i} - 0{,}41271(x_{21i} - 35{,}20837)_+ - 0{,}47596(x_{21i} - 36{,}14878)_+ + \\ - 0{,}10223(x_{21i} - 38{,}02959)_+ + 0{,}55656\, x_{31i} + 0{,}12007(x_{31i} - 24{,}82694)_+ \\ + 0{,}02568(x_{31i} - 26{,}2302)_+ - 0{,}15254(x_{31i} - 29{,}03673)_+ + 0{,}91709\, x_{41i} + \\ - 0{,}10026(x_{41i} - 58{,}1498)_+ - 0{,}1687(x_{41i} - 59{,}10735)_+ + \\ - 0{,}0478(x_{41i} - 61{,}02245)_+$$

$$\hat{y}_{21i} = 0{,}00225 + 0{,}10295\, x_{11i} + 0{,}09899(x_{11i} - 0{,}463673)_+ \\ + 0{,}0639(x_{11i} - 0{,}507755)_+ + 0{,}01811(x_{11i} - 0{,}595918)_+ \\ + 0{,}19326\, x_{21i} + 0{,}13063(x_{21i} - 35{,}20837)_+ + 0{,}32888(x_{21i} - 36{,}14878)_+ + \\ - 0{,}167(x_{21i} - 38{,}02959)_+ - 0{,}1098\, x_{31i} - 0{,}1408(x_{31i} - 24{,}82694)_+ \\ + 0{,}15503(x_{31i} - 26{,}2302)_+ - 0{,}2492(x_{31i} - 29{,}03673)_+ + 0{,}1675\, x_{41i} \\ + 0{,}02232(x_{41i} - 58{,}1498)_+ - 0{,}0913(x_{41i} - 59{,}10735)_+ \\ + 0{,}20402(x_{41i} - 61{,}02245)_+$$

Model tersebut merupakan model terbaik dengan nilai GCV sebesar 4,06 x 10^{-26} dan nilai MSE sebesar 2,494269 x 10^{-20}. Model untuk provinsi lain pada kelompok Jawa Bali juga dapat dituliskan dengan memperhatikan nilai estimasi parameter dan titik-titik knot untuk masing-masing provinsi tersebut.

4.3.2 Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal pada Kelompok Luar Jawa Bali I

Berikut adalah titik-titik knot, nilai GCV untuk setiap variabel pada setiap subyek dengan menggunakan pembobot $\mathbf{V}$ pada kelompok Luar Jawa Bali I.

Tabel 4.6 Ringkasan GCV Terkecil untuk 1 Knot Kelompok Luar Jawa Bali I

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Aceh	3,888163	65,1049	39,19939	41,11592	3,13 x 10^{-25}
Sumatera Utara	1,892449	60,70694	25,58796	37,11265	
Sumatera Barat	1,43	65,02551	34,14939	39,35265	

Lanjutan Tabel 4.6 Ringkasan GCV Terkecil untuk 1 Knot Kelompok Luar Jawa Bali I

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Sumatera Selatan	2,652653	68,89143	44,43755	46,78163	$3{,}13 \times 10^{-25}$
Lampung	3,266735	72,06694	46,44531	48,35388	
NTB	3,878571	74,21367	40,15571	46,05306	
Kalimantan Barat	1,682041	67,76286	40,05939	47,03939	
Kalimantan Selatan	0,930612	70,81939	53,7598	54,07959	
Sulawesi Utara	1,474694	61,49939	26,83347	56,28796	
Sulawesi Selatan	2,315102	68,7149	42,36143	43,91653	
Bangka Belitung	0,923673	69,20857	38,14082	52,38163	
Gorontalo	3,11898	78,64857	38,29959	48,81388	
Sulawesi Barat	2,380816	73,64633	47,41102	39,58224	

Tabel 4.7 Ringkasan GCV Terkecil untuk 2 Knot Kelompok Luar Jawa Bali I

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Aceh	3,113061	62,91184	37,38102	40,33347	$1{,}11 \times 10^{-26}$
	4,83551	67,78531	41,42184	42,07224	
Sumatera Utara	1,785918	59,3551	24,02673	35,45224	
	2,022653	62,35918	27,49612	39,14204	
Sumatera Barat	1,25	63,57082	32,87102	38,77224	
	1,65	66,80347	35,71184	40,06204	
Sumatera Selatan	1,892245	66,47429	42,92408	44,97061	
	3,582041	71,84571	46,28735	48,9951	
Lampung	2,568776	70,3551	43,66449	46,5502	
	4,119796	74,15918	49,84408	50,55837	
NTB	3,235714	72,34388	38,22714	43,8049	
	4,664286	76,49898	42,51286	48,80082	
Kalimantan Barat	1,263265	66,16857	39,32102	45,40102	
	2,193878	69,71143	40,96184	49,04184	
Kalimantan Selatan	0,76898	69,54102	52,61367	52,68735	
	1,128163	72,38184	55,16061	55,78122	
Sulawesi Utara	1,19551	60,40102	25,97755	55,26673	
	1,815918	62,84184	27,87959	57,53612	
Sulawesi Selatan	1,628163	67,60184	40,84429	42,43245	
	3,154694	70,07531	44,21571	45,73041	

Lanjutan Tabel 4.7 Ringkasan GCV Terkecil untuk 2 Knot Kelompok Luar Jawa Bali I

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Bangka Belitung	0,673878	67,66571	36,96531	51,11061	$1{,}11 \times 10^{-26}$
	1,22898	71,09429	39,57755	53,9351	
Gorontalo	2,788367	77,64571	36,90735	48,0902	
	3,523061	79,87429	40,00122	49,69837	
Sulawesi Barat	1,745306	71,73612	46,12163	38,50959	
	3,157551	75,98102	48,98694	40,89327	

Tabel 4.8 Ringkasan GCV Terkecil untuk 3 Knot Kelompok Luar Jawa Bali I

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Aceh	3,156122	63,03367	37,48204	40,37694	$2{,}98 \times 10^{-27}$
	3,242245	63,27735	37,68408	40,46388	
	4,103469	65,71408	39,70449	41,33327	
Sumatera Utara	1,791837	59,4302	24,11347	35,54449	
	1,803673	59,58041	24,28694	35,72898	
	1,922041	61,08245	26,02163	37,57388	
Sumatera Barat	1,26	63,65163	32,94204	38,80449	
	1,28	63,81327	33,08408	38,86898	
	1,48	65,42959	34,50449	39,51388	
Sumatera Selatan	1,93449	66,60857	43,00816	45,07122	
	2,01898	66,87714	43,17633	45,27245	
	2,863878	69,56286	44,85796	47,28469	
Lampung	2,607551	70,4502	43,81898	46,65041	
	2,685102	70,64041	44,12796	46,85082	
	3,460612	72,54245	47,21776	48,8549	
NTB	3,271429	72,44776	38,33429	43,9298	
	3,342857	72,65551	38,54857	44,17959	
	4,057143	74,73306	40,69143	46,67755	
Kalimantan Barat	1,286531	66,25714	39,36204	45,49204	
	1,333061	66,43429	39,44408	45,67408	
	1,798367	68,20571	40,26449	47,49449	
Kalimantan Selatan	0,777959	69,61204	52,67735	52,76469	
	0,795918	69,75408	52,80469	52,91939	
	0,97551	71,17449	54,07816	54,46633	
Sulawesi Utara	1,21102	60,46204	26,0251	55,32347	
	1,242041	60,58408	26,1202	55,43694	
	1,552245	61,80449	27,07122	56,57163	
Sulawesi Selatan	1,666327	67,66367	40,92857	42,5149	
	1,742653	67,78735	41,09714	42,6798	
	2,505918	69,02408	42,78286	44,32878	

Lanjutan Tabel 4.8 Ringkasan GCV Terkecil untuk 3 Knot Kelompok Luar Jawa Bali I

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Bangka Belitung	0,687755	67,75143	37,03061	51,18122	2,98 x 10^{-27}
	0,71551	67,92286	37,16122	51,32245	
	0,993061	69,63714	38,46735	52,73469	
Gorontalo	2,806735	77,70143	36,98469	48,13041	
	2,843469	77,81286	37,13939	48,21082	
	3,210816	78,92714	38,68633	49,0149	
Sulawesi Barat	1,780612	71,84224	46,19327	38,56918	
	1,851224	72,05449	46,33653	38,68837	
	2,557347	74,17694	47,76918	39,8802	

Sama halnya pada pembahasan kelompok Jawa Bali, dalam analisis kelompok Luar Jawa Bali I dihasilkan output knot yang terangkum pada Tabel 4.6 hingga Tabel 4.8, Tabel 4.6 hingga Tabel 4.8 menunjukkan titik-titik knot yang terbentuk untuk setiap nilai GCV terkecil masing-masing dengan satu knot, dua knot, dan tiga knot untuk setiap variabel pada setiap subyek. *Running* program pada lampiran 4 menghasilkan 48 alternatif titik knot dan diketahui bahwa GCV terkecil yaitu 3,13 x 10^{-25}. Nilai GCV terkecil ini menghasilkan titik-titik knot optimum seperti yang tertera pada Tabel 4.6. *Running* program pada lampiran 5 menghasilkan 1128 alternatif titik knot dengan GCV terkecil untuk dua titik knot yaitu 1,11 x 10^{-26}. Sedangkan *running* program pada lampiran 6 menghasilkan 17296 alternatif kombinasi titik knot dengan masing-masing variabel mempunyai tiga buah titik knot. Nilai GCV terkecil yang dihasilkan yaitu 2,98 x 10^{-27}. Dari ketiga nilai GCV yang telah disebutkan, nilai GCV terkecil ditunjukkan oleh GCV 3 knot dengan nilai GCV 2,98 x 10^{-27} sehingga titik-titik knot yang akan digunakan dalam pemodelan adalah titik-titik knot yang tertera pada Tabel 4.8 dimana masing-masing variabel untuk setiap subyek memiliki tiga buah titik knot.

Langkah selanjutnya adalah dengan menggunakan titik knot optimal dilakukan pemodelan untuk mendapatkan estimasi parameter model. Estimasi parameter model didapatkan dengan melakukan *running* program yang terdapat pada lampiran 9 seperti yang dilakukan pada pembahasan kelompok Jawa Bali. Kelompok Luar Jawa Bali I terdiri dari 13 buah provinsi sehingga akan dihasilkan seluruh estimasi parameter untuk seluruh provinsi dimana setiap provinsi terdiri

dari dua model yaitu model untuk respon pertama dan model untuk respon kedua. Sebagai contoh berikut adalah estimasi parameter yang dihasilkan untuk model Provinsi Aceh.

Tabel 4.9 Estimasi Parameter untuk Provinsi Aceh

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{110}	0,02148	α_{210}	0,00045
α_{1111}	-0,07867	α_{2111}	0,33805
α_{1121}	0,4701	α_{2121}	0,18277
α_{1131}	0,57632	α_{2131}	0,03111
α_{1141}	0,45088	α_{2141}	0,07654
δ_{1111}	-0,10304	δ_{2111}	0,32401
δ_{1121}	-0,76108	δ_{2121}	0,11849
δ_{1131}	-0,25296	δ_{2131}	0,00551
δ_{1141}	-0,39979	δ_{2141}	0,08784
δ_{1112}	-0,06147	δ_{2112}	0,31136
δ_{1122}	-0,64345	δ_{2122}	0,08271
δ_{1132}	-0,27134	δ_{2132}	-0,0061
δ_{1142}	-0,38497	δ_{2142}	0,11744
δ_{1113}	0,20653	δ_{2113}	0,36701
δ_{1123}	-0,41607	δ_{2123}	-0,1272
δ_{1133}	-0,24907	δ_{2133}	0,04602
δ_{1143}	-0,49828	δ_{2143}	0,12301

Model yang terbentuk untuk Provinsi Aceh yaitu :

$$\begin{aligned}\hat{y}_{11i} &= 0{,}02148 - 0{,}07867\ x_{11i} - 0{,}10304(x_{11i} - 3{,}156122)_+ + \\ &\quad - 0{,}06147(x_{11i} - 3{,}242245)_+ + 0{,}20653(x_{11i} - 4{,}103469)_+ \\ &\quad + 0{,}4701\ x_{21i} - 0{,}76108(x_{21i} - 63{,}03367)_+ - 0{,}64345(x_{21i} - 63{,}27735)_+ + \\ &\quad - 0{,}41607(x_{21i} - 65{,}71408)_+ + 0{,}57632\ x_{31i} - 0{,}25296(x_{31i} - 37{,}48204)_+ + \\ &\quad - 0{,}27134(x_{31i} - 37{,}68408)_+ - 0{,}24907(x_{31i} - 39{,}70449)_+ + 0{,}45088\ x_{41i} + \\ &\quad - 0{,}39979(x_{41i} - 40{,}37694)_+ - 0{,}38497(x_{41i} - 40{,}46388)_+ + \\ &\quad - 0{,}49828(x_{41i} - 41{,}33327)_+\end{aligned}$$

$$\hat{y}_{21i} = 0{,}00045 + 0{,}33805\ x_{11i} + 0{,}32401(x_{11i} - 3{,}156122)_+ + 0{,}31136(x_{11i} - 3{,}242245)_+ + 0{,}36701(x_{11i} - 4{,}103469)_+ + 0{,}18277\ x_{21i} + 0{,}11849(x_{21i} - 63{,}03367)_+ + 0{,}08271(x_{21i} - 63{,}27735)_+ + - 0{,}1272(x_{21i} - 65{,}71408)_+ + 0{,}03111\ x_{31i} + 0{,}00551(x_{31i} - 37{,}48204)_+ + - 0{,}0061(x_{31i} - 37{,}68408)_+ + 0{,}04602(x_{31i} - 39{,}70449)_+ + 0{,}07654\ x_{41i} + 0{,}08784(x_{41i} - 40{,}37694)_+ + 0{,}11744(x_{41i} - 40{,}46388)_+ + 0{,}12301(x_{41i} - 41{,}33327)_+$$

Model tersebut merupakan model terbaik dengan nilai GCV sebesar 2,98 x 10^{-27} dan nilai MSE sebesar 2,175618 x 10^{-20}. Model untuk provinsi lain pada kelompok Luar Jawa Bali I juga dapat dituliskan dengan memperhatikan nilai estimasi parameter dan titik-titik knot untuk masing-masing provinsi tersebut.

4.3.3 Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal pada Kelompok Luar Jawa Bali II

Berikut adalah titik-titik knot, nilai GCV untuk setiap variabel pada setiap subyek dengan menggunakan pembobot $\mathbf{V}$ pada kelompok Luar Jawa Bali II.

Tabel 4.10 Ringkasan GCV Terkecil untuk 1 Knot Kelompok Luar Jawa Bali II

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Riau	1,932041	60,21163	34,91612	50,01878	1,75 x 10^{-25}
Jambi	1,526122	68,58939	51,33939	51,91408	
Bengkulu	3,487959	67,26245	45,57694	47,59612	
NTT	6,408776	78,29694	20,50898	37,11551	
Kalimantan Tengah	1,26449	70,79327	46,8902	55,96531	
Kalimantan Timur	1,626735	57,10633	37,7651	57,31429	
Sulawesi Tengah	4,075102	71,80571	42,21245	46,94673	
Sulawesi Tenggara	3,836327	67,73592	44,7349	42,16327	
Maluku	5,916735	60,62122	25,0898	39,00408	
Papua	9,682653	72,58245	42,20163	55,83653	
Maluku Utara	1,841837	62,50755	35,58367	43,88816	

Lanjutan Tabel 4.10 Ringkasan GCV Terkecil untuk 1 Knot Kelompok Luar Jawa Bali II

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Papua Barat	8,844694	61,45633	31,91796	50,52347	$1{,}75 \times 10^{-25}$
Kepulauan Riau	1,47449	59,36143	28,38082	60,02633	

Tabel 4.11 Ringkasan GCV Terkecil untuk 2 Knot Kelompok Luar Jawa Bali II

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Riau	1,210204	59,41816	33,83061	47,91388	$6{,}23 \times 10^{-27}$
	1,98551	60,27041	34,99653	50,17469	
Jambi	0,980612	64,56694	49,74694	49,93041	
	1,566531	68,88735	51,45735	52,06102	
Bengkulu	2,859796	64,18224	44,09469	45,16061	
	3,53449	67,49061	45,68673	47,77653	
NTT	3,763878	76,81469	19,3849	36,32755	
	6,604694	78,40673	20,59224	37,17388	
Kalimantan Tengah	0,972449	67,04633	45,71102	53,92653	
	1,286122	71,07082	46,97755	56,11633	
Kalimantan Timur	1,053673	54,03163	35,55551	55,23143	
	1,669184	57,33408	37,92878	57,46857	
Sulawesi Tengah	2,94551	70,10857	41,56224	46,37367	
	4,158776	71,93143	42,26061	46,98918	
Sulawesi Tenggara	2,111633	65,39959	42,62449	40,84633	
	3,964082	67,90898	44,89122	42,26082	
Maluku	4,533673	56,51612	22,75898	38,37041	
	6,019184	60,92531	25,26245	39,05102	
Papua	7,583265	69,23224	37,08816	53,74265	
	9,838163	72,83061	42,58041	55,99163	
Maluku Utara	0,949184	59,91776	34,87837	42,08082	
	1,907959	62,69939	35,63592	44,02204	
Papua Barat	6,023469	59,19163	29,9398	49,64735	
	9,053673	61,62408	32,06449	50,58837	
Kepulauan Riau	0,912449	47,59714	20,42408	53,17163	
	1,516122	60,23286	28,9702	60,53408	

Tabel 4.12 Ringkasan GCV Terkecil untuk 3 Knot Kelompok Luar Jawa Bali II

Provinsi	Knot				GCV
	x_1	x_2	x_3	x_4	
Riau	1,156735	59,35939	33,7502	47,75796	$1{,}18 \times 10^{-27}$
	1,637959	59,88837	34,47388	49,16122	
	1,878571	60,15286	34,83571	49,86286	
Jambi	0,940204	64,26898	49,62898	49,78347	
	1,303878	66,95061	50,69061	51,10592	
	1,485714	68,29143	51,22143	51,76714	
Bengkulu	2,813265	63,95408	43,9849	44,9802	
	3,232041	66,00755	44,97306	46,60388	
	3,441429	67,03429	45,46714	47,41571	
NTT	3,567959	76,7049	19,30163	36,26918	
	5,331224	77,69306	20,05102	36,79449	
	6,212857	78,18714	20,42571	37,05714	
Kalimantan Tengah	0,950816	66,76878	45,62367	53,77551	
	1,14551	69,26673	46,4098	55,13469	
	1,242857	70,51571	46,80286	55,81429	
Kalimantan Timur	1,011224	53,80388	35,39184	55,07714	
	1,393265	55,85367	36,8649	56,46571	
	1,584286	56,87857	37,60143	57,16	
Sulawesi Tengah	2,861837	69,98286	41,51408	46,33122	
	3,614898	71,11429	41,94755	46,71327	
	3,991429	71,68	42,16429	46,90429	
Sulawesi Tenggara	1,983878	65,22653	42,46816	40,74878	
	3,133673	66,78408	43,8751	41,62673	
	3,708571	67,56286	44,57857	42,06571	
Maluku	4,431224	56,21204	22,58633	38,32347	
	5,353265	58,94878	24,1402	38,74592	
	5,814286	60,31714	24,91714	38,95714	
Papua	7,427755	68,98408	36,70939	53,58755	
	8,827347	71,21755	40,11837	54,98347	
	9,527143	72,33429	41,82286	55,68143	
Maluku Utara	0,883061	59,72592	34,82612	41,94694	
	1,478163	61,45245	35,29633	43,15184	
	1,775714	62,31571	35,53143	43,75429	
Papua Barat	5,81449	59,02388	29,79327	49,58245	
	7,695306	60,53367	31,11204	50,16653	
	8,635714	61,28857	31,77143	50,45857	
Kepulauan Riau	0,870816	46,72571	19,83469	52,66388	
	1,24551	54,56857	25,13918	57,23367	
	1,432857	58,49	27,79143	59,51857	

Sama halnya pada pembahasan sebelumnya pada kelompok Jawa Bali dan Luar Jawa Bali I, dalam analisis kelompok Luar Jawa Bali II dihasilkan output knot yang terangkum pada Tabel 4.10 hingga Tabel 4.12 yang menunjukkan titik-titik knot yang terbentuk untuk setiap nilai GCV terkecil dimana masing-masing tabel membentuk satu knot, dua knot, dan tiga knot untuk setiap variabel pada setiap subyeknya. Sama seperti sebelumnya, *running* program pada lampiran 4 menghasilkan 48 alternatif titik knot.

Running program pada lampiran 5 menghasilkan 1128 alternatif titik knot. Sedangkan *running* program pada lampiran 6 menghasilkan 17296 alternatif kombinasi titik knot. Untuk satu titik knot diketahui bahwa GCV terkecil yaitu $1{,}75 \times 10^{-25}$ yang menghasilkan titik-titik knot optimum seperti yang tertera pada Tabel 4.10. Untuk dua titik knot diketahui bahwa GCV terkecil yaitu $6{,}23 \times 10^{-27}$ yang menghasilkan titik-titik knot optimum seperti yang tertera pada Tabel 4.11. Sedangkan untuk tiga titik knot diketahui bahwa GCV terkecil yaitu $1{,}18 \times 10^{-27}$ yang menghasilkan titik-titik knot optimum seperti yang tertera pada Tabel 4.12.

Dari ketiga nilai GCV tersebut, nilai GCV terkecil ditunjukkan oleh GCV tiga knot dengan nilai GCV $1{,}18 \times 10^{-27}$ sehingga titik-titik knot yang akan digunakan dalam pemodelan adalah titik-titik knot yang tertera pada Tabel 4.12 dimana masing-masing variabel untuk masing-masing subyek memiliki tiga buah titik knot.

Estimasi parameter model didapatkan dengan memasukkan nilai knot pada Tabel 4.12 dengan menggunakan program yang ada pada lampiran 9. Sebagaimana yang dilakukan pada pembahasan kelompok Luar Jawa Bali I, kelompok Luar Jawa Bali II juga akan dihasilkan model untuk 13 buah provinsi dimana setiap provinsi terdiri dari dua model yaitu model untuk respon pertama dan model untuk respon kedua. Sebagai contoh berikut adalah estimasi parameter yang dihasilkan untuk model Provinsi Riau.

Tabel 4.13 Estimasi Parameter untuk Provinsi Riau

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{110}	0,023847	α_{210}	0,013824
α_{1111}	0,379625	α_{2111}	0,376417
α_{1121}	0,788175	α_{2121}	0,094392
α_{1131}	-0,04356	α_{2131}	0,280429
α_{1141}	0,455732	α_{2141}	0,148045
δ_{1111}	0,306719	δ_{2111}	0,33262
δ_{1121}	-0,61232	δ_{2121}	-0,70937
δ_{1131}	-0,88617	δ_{2131}	-0,2173
δ_{1141}	-0,66181	δ_{2141}	-0,47785
δ_{1112}	0,105165	δ_{2112}	0,25848
δ_{1122}	-0,35365	δ_{2122}	-0,41384
δ_{1132}	-0,86774	δ_{2132}	-0,26592
δ_{1142}	-0,26308	δ_{2142}	0,059786
δ_{1113}	0,153826	δ_{2113}	0,247149
δ_{1123}	-0,22432	δ_{2123}	-0,26608
δ_{1133}	-0,38623	δ_{2133}	-0,00722
δ_{1143}	0,03586	δ_{2143}	0,201914

Model yang terbentuk untuk Provinsi Riau yaitu :

$$\begin{aligned}\hat{y}_{11i} &= 0{,}023847 + 0{,}379625\ x_{11i} + 0{,}306719(x_{11i} - 1{,}156735)_+ \\ &\quad + 0{,}105165(x_{11i} - 1{,}637959)_+ + 0{,}153826(x_{11i} - 1{,}878571)_+ \\ &\quad + 0{,}788175\ x_{21i} - 0{,}61232(x_{21i} - 59{,}35939)_+ - 0{,}35365(x_{21i} - 59{,}88837)_+ + \\ &\quad - 0{,}22432(x_{21i} - 60{,}15286)_+ - 0{,}04356\ x_{31i} - 0{,}88617(x_{31i} - 33{,}7502)_+ + \\ &\quad - 0{,}86774(x_{31i} - 34{,}47388)_+ - 0{,}38623(x_{31i} - 34{,}83571)_+ + 0{,}455732\ x_{41i} + \\ &\quad - 0{,}66181(x_{41i} - 47{,}75796)_+ - 0{,}26308(x_{41i} - 49{,}16122)_+ \\ &\quad + 0{,}03586(x_{41i} - 49{,}86286)_+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{21i} &= 0{,}013824 + 0{,}376417\ x_{11i} + 0{,}33262(x_{11i} - 1{,}156735)_+ \\ &\quad + 0{,}25848(x_{11i} - 1{,}637959)_+ + 0{,}247149(x_{11i} - 1{,}878571)_+ \\ &\quad + 0{,}094392\ x_{21i} - 0{,}70937(x_{21i} - 59{,}35939)_+ - 0{,}41384(x_{21i} - 59{,}88837)_+ + \\ &\quad - 0{,}26608(x_{21i} - 60{,}15286)_+ + 0{,}280429\ x_{31i} - 0{,}2173(x_{31i} - 33{,}7502)_+ + \\ &\quad - 0{,}26592(x_{31i} - 34{,}47388)_+ - 0{,}00722(x_{31i} - 34{,}83571)_+ + 0{,}148045\ x_{41i} + \\ &\quad - 0{,}47785(x_{41i} - 47{,}75796)_+ + 0{,}059786(x_{41i} - 49{,}16122)_+ \\ &\quad + 0{,}201914(x_{41i} - 49{,}86286)_+\end{aligned}$$

Model tersebut merupakan model terbaik dengan nilai GCV sebesar 1,18 x 10^{-27} dan nilai MSE sebesar 8,605989 x 10^{-21}. Model untuk provinsi lain pada kelompok Luar Jawa Bali II juga dapat dituliskan dengan memperhatikan nilai estimasi parameter dan titik-titik knot untuk masing-masing provinsi tersebut.

4.4 Pembahasan Model Regresi Nonparametrik Multirespon *Spline Truncated* untuk Data Longitudinal pada Data Keberhasilan KB

Manfaat dari model yang dihasilkan adalah untuk memprediksi persentase CPR dan persentase *unmet need* dari setiap provinsi di Indonesia. Contoh model yang terbentuk untuk Provinsi DKI Jakarta yaitu,

$$\begin{aligned}\hat{y}_{11i} &= 0{,}01735 - 0{,}17193\, x_{11i} - 0{,}17666\left(x_{11i} - 0{,}463673\right)_+ + \\ &\quad - 0{,}13768\left(x_{11i} - 0{,}507755\right)_+ - 0{,}04576\left(x_{11i} - 0{,}595918\right)_+ \\ &\quad + 0{,}20193\, x_{21i} - 0{,}41271\left(x_{21i} - 35{,}20837\right)_+ - 0{,}47596\left(x_{21i} - 36{,}14878\right)_+ + \\ &\quad - 0{,}10223\left(x_{21i} - 38{,}02959\right)_+ + 0{,}55656\, x_{31i} + 0{,}12007\left(x_{31i} - 24{,}82694\right)_+ \\ &\quad + 0{,}02568\left(x_{31i} - 26{,}2302\right)_+ - 0{,}15254\left(x_{31i} - 29{,}03673\right)_+ + 0{,}91709\, x_{41i} + \\ &\quad - 0{,}10026\left(x_{41i} - 58{,}1498\right)_+ - 0{,}1687\left(x_{41i} - 59{,}10735\right)_+ + \\ &\quad - 0{,}0478\left(x_{41i} - 61{,}02245\right)_+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{21i} &= 0{,}00225 + 0{,}10295\, x_{11i} + 0{,}09899\left(x_{11i} - 0{,}463673\right)_+ \\ &\quad + 0{,}0639\left(x_{11i} - 0{,}507755\right)_+ + 0{,}01811\left(x_{11i} - 0{,}595918\right)_+ \\ &\quad + 0{,}19326\, x_{21i} + 0{,}13063\left(x_{21i} - 35{,}20837\right)_+ + 0{,}32888\left(x_{21i} - 36{,}14878\right)_+ + \\ &\quad - 0{,}167\left(x_{21i} - 38{,}02959\right)_+ - 0{,}1098\, x_{31i} - 0{,}1408\left(x_{31i} - 24{,}82694\right)_+ \\ &\quad + 0{,}15503\left(x_{31i} - 26{,}2302\right)_+ - 0{,}2492\left(x_{31i} - 29{,}03673\right)_+ + 0{,}1675\, x_{41i} \\ &\quad + 0{,}02232\left(x_{41i} - 58{,}1498\right)_+ - 0{,}0913\left(x_{41i} - 59{,}10735\right)_+ \\ &\quad + 0{,}20402\left(x_{41i} - 61{,}02245\right)_+\end{aligned}$$

Dengan segmented yang terbentuk untuk setiap variabel prediktornya, yaitu Variabel indeks kedalaman kemiskinan $\left(x_{11}\right)$

$$\hat{y}_{11} = \begin{cases} 0{,}01735 - 0{,}17193 x_{11} & ; \quad x_{11} < 0{,}463673 \\ 0{,}09925 - 0{,}34859 x_{11} & ; \quad 0{,}463673 \le x_{11} < 0{,}507755 \\ 0{,}16916 - 0{,}48627 x_{11} & ; \quad 0{,}507755 \le x_{11} < 0{,}595918 \\ 0{,}19643 - 0{,}53203 x_{11} & ; \quad x_{11} \ge 0{,}595918 \end{cases}$$

$$\hat{y}_{21} = \begin{cases} 0{,}00225 + 0{,}10295x_{11} & ; \quad x_{11} < 0{,}463673 \\ -0{,}04365 + 0{,}20194x_{11} & ; \quad 0{,}463673 \le x_{11} < 0{,}507755 \\ -0{,}07609 + 0{,}26584x_{11} & ; \quad 0{,}507755 \le x_{11} < 0{,}595918 \\ -0{,}08688 + 0{,}28395x_{11} & ; \quad x_{11} \ge 0{,}595918 \end{cases}$$

Variabel persentase KK dengan pendidikan SLTP ke bawah (x_{21})

$$\hat{y}_{11} = \begin{cases} 0{,}01735 + 0{,}20193x_{21} & ; \quad x_{21} < 35{,}20837 \\ 14{,}54815 - 0{,}21078x_{21} & ; \quad 35{,}20837 \le x_{21} < 36{,}14878 \\ 31{,}75352 - 0{,}68674x_{21} & ; \quad 36{,}14878 \le x_{21} < 38{,}02959 \\ 35{,}64126 - 0{,}78897x_{21} & ; \quad x_{21} \ge 38{,}02959 \end{cases}$$

$$\hat{y}_{21} = \begin{cases} 0{,}00225 + 0{,}19326x_{21} & ; \quad x_{21} < 35{,}20837 \\ -4{,}59702 + 0{,}32389x_{21} & ; \quad 35{,}20837 \le x_{21} < 36{,}14878 \\ -16{,}48365 + 0{,}65177x_{21} & ; \quad 36{,}14878 \le x_{21} < 38{,}02959 \\ -10{,}13469 + 0{,}48417x_{21} & ; \quad x_{21} \ge 38{,}02959 \end{cases}$$

Variabel persentase wanita berumur 10 tahun ke atas dengan usia perkawinan pertama 18 tahun ke bawah (x_{31})

$$\hat{y}_{11} = \begin{cases} 0{,}01735 + 0{,}55656x_{31} & ; \quad x_{31} < 24{,}82694 \\ -2{,}96362 + 0{,}67663x_{31} & ; \quad 24{,}82694 \le x_{31} < 26{,}2302 \\ -3{,}63721 + 0{,}70231x_{31} & ; \quad 26{,}2302 \le x_{31} < 29{,}03673 \\ 0{,}79205 + 0{,}54977x_{31} & ; \quad x_{31} \ge 29{,}03673 \end{cases}$$

$$\hat{y}_{21} = \begin{cases} 0{,}00225 - 0{,}1098x_{31} & ; \quad x_{31} < 24{,}82694 \\ 3{,}49785 - 0{,}2506x_{31} & ; \quad 24{,}82694 \le x_{31} < 26{,}2302 \\ -0{,}56862 - 0{,}09557x_{31} & ; \quad 26{,}2302 \le x_{31} < 29{,}03673 \\ 6{,}6673 - 0{,}34477x_{31} & ; \quad x_{31} \ge 29{,}03673 \end{cases}$$

Variabel persentase wanita berumur 10 tahun ke atas yang pernah kawin dengan anak lahir hidup kurang atau sama dengan dua (x_{41})

$$\hat{y}_{11} = \begin{cases} 0{,}01735 + 0{,}91709x_{41} & ; \quad x_{41} < 58{,}1498 \\ 5{,}84745 + 0{,}81683x_{41} & ; \quad 58{,}1498 \le x_{41} < 59{,}10735 \\ 15{,}81886 + 0{,}64813x_{41} & ; \quad 59{,}10735 \le x_{41} < 61{,}02245 \\ 18{,}73573 + 0{,}60033x_{41} & ; \quad x_{41} \ge 61{,}02245 \end{cases}$$

$$\hat{y}_{21} = \begin{cases} 0{,}00225 + 0{,}1675x_{41} & ; \quad x_{41} < 58{,}1498 \\ -1{,}29565 + 0{,}18982x_{41} & ; \quad 58{,}1498 \le x_{41} < 59{,}10735 \\ 4{,}10085 + 0{,}09852x_{41} & ; \quad 59{,}10735 \le x_{41} < 61{,}02245 \\ -8{,}34895 + 0{,}30254x_{41} & ; \quad x_{41} \ge 61{,}02245 \end{cases}$$

Dengan mengambil contoh nilai untuk setiap variabel di setiap segmen, maka akan didapatkan beberapa macam kombinasi variabel yang menghasilkan persentase CPR dan *unmet need* yang berbeda-beda. Berikut adalah beberapa kombinasi yang dihasilkan.

Tabel 4.14 Kombinasi Nilai Variabel untuk Provinsi DKI Jakarta

x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{41}	y_{11}	y_{21}
0.41	34.8	30.5	57.2	76.97426	12.50054
0.41	34.8	30.5	58.5	78.13136	12.72611
0.41	34.8	30.5	60.1	79.27083	12.93919
0.41	34.8	30.5	62.4	80.69568	13.44683
0.48	34.8	30.5	62.4	80.68076	13.45566
0.53	34.8	22.4	57.2	71.8631	13.91173
0.53	39.1	22.4	57.2	69.6112	16.04295
0.62	34.8	28.1	60.1	77.72822	13.57791
0.62	34.8	28.1	62.4	79.15307	14.08555
0.62	39.1	30.5	62.4	78.3635	15.62276

Kombinasi terbaik yaitu yang menghasilkan persentase CPR yang tinggi dan persentase *unmet need* rendah. Baris ketiga merupakan kombinasi terbaik dimana apabila dibandingkan dengan data selama tahun 2008 hingga 2012, bisa terjadi peningkatan CPR sekitar 3% serta penurunan *unmet need* sekitar 2%. Begitu pula persentase CPR dan *unmet need* di provinsi lainnya dapat diprediksi dengan memperhatikan model yang terbentuk di provinsi tersebut.

Selain untuk prediksi, pendekatan *spline truncated* juga dapat digunakan untuk interpretasi. Interpretasi model dari variabel-variabel prediktor dilakukan untuk mengetahui pengaruh dari masing-masing variabel prediktor tersebut terhadap masing-masing variabel respon. Untuk lebih mempermudah interpretasi model, maka penjabaran akan dilakukan untuk masing-masing segmen atau

potongan yang terbentuk. Berikut adalah contoh interpretasi dari model yang terbentuk di Provinsi DKI Jakarta.

Interpretasi model terhadap variabel indeks kedalaman kemiskinan (x_{11}) dengan asumsi variabel lain konstan adalah sebagai berikut :

$$\hat{y}_{11} = \begin{cases} 0{,}01735 - 0{,}17193x_{11} & ; \quad x_{11} < 0{,}463673 \\ 0{,}09925 - 0{,}34859x_{11} & ; \quad 0{,}463673 \le x_{11} < 0{,}507755 \\ 0{,}16916 - 0{,}48627x_{11} & ; \quad 0{,}507755 \le x_{11} < 0{,}595918 \\ 0{,}19643 - 0{,}53203x_{11} & ; \quad x_{11} \ge 0{,}595918 \end{cases}$$

$$\hat{y}_{21} = \begin{cases} 0{,}00225 + 0{,}10295x_{11} & ; \quad x_{11} < 0{,}463673 \\ -0{,}04365 + 0{,}20194x_{11} & ; \quad 0{,}463673 \le x_{11} < 0{,}507755 \\ -0{,}07609 + 0{,}26584x_{11} & ; \quad 0{,}507755 \le x_{11} < 0{,}595918 \\ -0{,}08688 + 0{,}28395x_{11} & ; \quad x_{11} \ge 0{,}595918 \end{cases}$$

Dari model di atas diketahui bahwa saat indeks kedalaman kemiskinan kurang dari 0,46 maka setiap kenaikan 1 angka indeks kedalaman kemiskinan cenderung menurunkan persentase CPR sebesar 0,17% dan meningkatkan persentase *unmet need* sebesar 0,10%. Saat indeks kedalaman kemiskinan terletak antara 0,46 hingga 0,51 maka setiap kenaikan 1 angka indeks kedalaman kemiskinan cenderung menurunkan persentase CPR sebesar 0,35% dan meningkatkan persentase *unmet need* sebesar 0,20%. Saat indeks kedalaman kemiskinan terletak antara 0,51 hingga 0,59 maka setiap kenaikan 1 indeks kedalaman kemiskinan cenderung menurunkan persentase CPR sebesar 0,49% dan meningkatkan persentase *unmet need* sebesar 0,27%. Sementara itu, saat indeks kedalaman kemiskinan lebih dari 0,59 maka setiap kenaikan 1 angka indeks kedalaman kemiskinan cenderung menurunkan persentase CPR sebesar 0,53% dan meningkatkan persentase *unmet need* sebesar 0,28%. Dalam hal ini diketahui bahwa kemiskinan memberikan dampak bagi keberhasilan KB. Semakin besar indeks kemiskinan maka kemungkinan untuk berpartisipasi dalam program KB juga kecil sehingga dapat mengurangi persentase CPR dan menambah persentase *unmet need* dimana hal ini sesuai dengan pendapat pada penelitian sebelumnya.

Interpretasi model terhadap variabel persentase KK dengan pendidikan SLTP ke bawah (x_{21}) dengan asumsi variabel lain konstan adalah :

$$\hat{y}_{11} = \begin{cases} 0{,}01735 + 0{,}20193x_{21} & ; \quad x_{21} < 35{,}20837 \\ 14{,}54815 - 0{,}21078x_{21} & ; \quad 35{,}20837 \le x_{21} < 36{,}14878 \\ 31{,}75352 - 0{,}68674x_{21} & ; \quad 36{,}14878 \le x_{21} < 38{,}02959 \\ 35{,}64126 - 0{,}78897x_{21} & ; \quad x_{21} \ge 38{,}02959 \end{cases}$$

$$\hat{y}_{21} = \begin{cases} 0{,}00225 + 0{,}19326x_{21} & ; \quad x_{21} < 35{,}20837 \\ -4{,}59702 + 0{,}32389x_{21} & ; \quad 35{,}20837 \le x_{21} < 36{,}14878 \\ -16{,}48365 + 0{,}65177x_{21} & ; \quad 36{,}14878 \le x_{21} < 38{,}02959 \\ -10{,}13469 + 0{,}48417x_{21} & ; \quad x_{21} \ge 38{,}02959 \end{cases}$$

Interpretasi variabel persentase KK dengan pendidikan SLTP ke bawah (x_{21}) dengan asumsi variabel lain konstan. Dari model di atas diketahui bahwa saat persentase persentase KK dengan pendidikan SLTP ke bawah kurang dari 35,2% maka setiap kenaikan 1% KK dengan pendidikan SLTP ke bawah cenderung meningkatkan persentase CPR sebesar 0,2% dan meningkatkan persentase *unmet need* sebesar 0,19%. Saat persentase persentase KK dengan pendidikan SLTP ke bawah terletak antara 35,2% hingga 36,1% maka setiap kenaikan 1% KK dengan pendidikan SLTP ke bawah cenderung menurunkan persentase CPR sebesar 0,21% dan meningkatkan persentase *unmet need* sebesar 0,32%. Saat persentase KK dengan pendidikan SLTP ke bawah terletak antara 36,1% hingga 38,03% maka setiap kenaikan 1% KK dengan pendidikan SLTP ke bawah cenderung menurunkan persentase CPR sebesar 0,69% dan meningkatkan persentase *unmet need* sebesar 0,65%. Sementara itu, saat persentase persentase KK dengan pendidikan SLTP ke bawah lebih dari 38,03% maka setiap kenaikan 1% KK dengan pendidikan SLTP ke bawah cenderung menurunkan persentase CPR sebesar 0,79% dan meningkatkan persentase *unmet need* sebesar 0,48%. Dalam hal ini diketahui bahwa pendidikan memberikan dampak yang penting bagi keberhasilan KB. Semakin banyak KK dengan pendidikan rendah maka kemungkinan mendapatkan pengetahuan tentang KB juga sedikit sehingga pasangan usia subur tersebut tidak terlalu menghiraukan penggunaan KB sehingga hal ini yang semakin mengurangi persentase CPR dan semakin menambah persentase *unmet need*.

Segmentasi model terhadap variabel persentase wanita berumur 10 tahun ke atas dengan usia perkawinan pertama 18 tahun ke bawah (x_{31}) dengan asumsi variabel lain konstan adalah sebagai berikut :

$$\hat{y}_{11} = \begin{cases} 0{,}01735 + 0{,}55656x_{31} & ; \quad x_{31} < 24{,}82694 \\ -2{,}96362 + 0{,}67663x_{31} & ; \quad 24{,}82694 \le x_{31} < 26{,}2302 \\ -3{,}63721 + 0{,}70231x_{31} & ; \quad 26{,}2302 \le x_{31} < 29{,}03673 \\ 0{,}79205 + 0{,}54977x_{31} & ; \quad x_{31} \ge 29{,}03673 \end{cases}$$

$$\hat{y}_{21} = \begin{cases} 0{,}00225 - 0{,}1098x_{31} & ; \quad x_{31} < 24{,}82694 \\ 3{,}49785 - 0{,}2506x_{31} & ; \quad 24{,}82694 \le x_{31} < 26{,}2302 \\ -0{,}56862 - 0{,}09557x_{31} & ; \quad 26{,}2302 \le x_{31} < 29{,}03673 \\ 6{,}6673 - 0{,}34477x_{31} & ; \quad x_{31} \ge 29{,}03673 \end{cases}$$

Segmentasi model terhadap variabel persentase wanita berumur 10 tahun ke atas yang pernah kawin dengan anak lahir hidup kurang atau sama dengan dua (x_{41}) dengan asumsi variabel lain konstan adalah sebagai berikut :

$$\hat{y}_{11} = \begin{cases} 0{,}01735 + 0{,}91709x_{41} & ; \quad x_{41} < 58{,}1498 \\ 5{,}84745 + 0{,}81683x_{41} & ; \quad 58{,}1498 \le x_{41} < 59{,}10735 \\ 15{,}81886 + 0{,}64813x_{41} & ; \quad 59{,}10735 \le x_{41} < 61{,}02245 \\ 18{,}73573 + 0{,}60033x_{41} & ; \quad x_{41} \ge 61{,}02245 \end{cases}$$

$$\hat{y}_{21} = \begin{cases} 0{,}00225 + 0{,}1675x_{41} & ; \quad x_{41} < 58{,}1498 \\ -1{,}29565 + 0{,}18982x_{41} & ; \quad 58{,}1498 \le x_{41} < 59{,}10735 \\ 4{,}10085 + 0{,}09852x_{41} & ; \quad 59{,}10735 \le x_{41} < 61{,}02245 \\ -8{,}34895 + 0{,}30254x_{41} & ; \quad x_{41} \ge 61{,}02245 \end{cases}$$

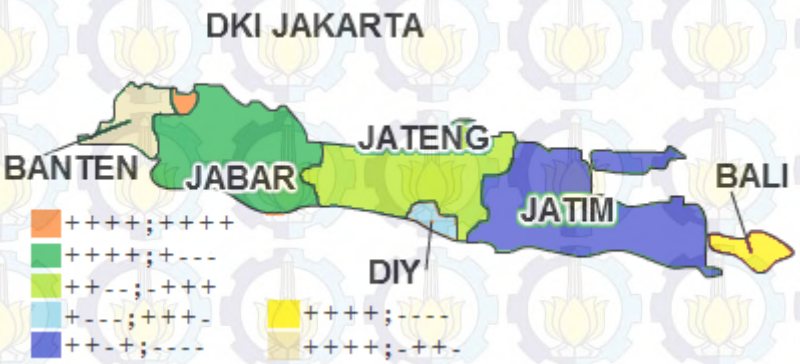
Dari model segmentasi yang telah dibentuk diketahui bahwa masing-masing variabel prediktor memiliki pengaruh yang berbeda-beda terhadap masing-masing variabel respon. Dalam analisis dengan menggunakan data longitudinal ini, dapat menjelaskan pengaruh yang lebih spesifik di setiap subyek. Efek yang ditimbulkan bisa saja sama namun juga bisa berbeda karena karakteristik subyek yang dalam hal ini adalah provinsi berbeda-beda. Berikut adalah gambaran mengenai pengaruh masing-masing variabel di setiap provinsi dalam kelompok Jawa Bali.

Gambar 4.11 Pengaruh x_1 Terhadap Respon di Kelompok Jawa Bali

Gambar 4.11 menjelaskan mengenai pengaruh variabel indeks kedalaman kemiskinan (x_1) terhadap persentase CPR dan *unmet need* untuk setiap subyek di kelompok Jawa Bali. Berdasarkan interpretasi model yang telah dibahas sebelumnya, terbentuk empat segmentasi model untuk tiap variabel respon. Area berwarna *orange* menjelaskan bahwa untuk Provinsi DKI Jakarta, Jawa Barat, Jawa Tengah, dan Jawa Timur memiliki kesamaan dimana variabel indeks kedalaman kemiskinan (x_1) di model segmen satu hingga segmen empat memberikan efek negatif atau cenderung menurunkan persentase CPR dan memberikan efek positif atau cenderung menaikkan persentase *unmet need* apabila terjadi kenaikan variabel indeks kedalaman kemiskinan (x_1). Sementara untuk provinsi lainnya memberikan efek yang berbeda-beda di tiap segmennya untuk tiap respon. Berikut adalah gambaran dari variabel prediktor lainnya.

Gambar 4.12 Pengaruh x_2 Terhadap Respon di Kelompok Jawa Bali

Gambar 4.13 Pengaruh x_3 Terhadap Respon di Kelompok Jawa Bali



Gambar 4.14 Pengaruh x_4 Terhadap Respon di Kelompok Jawa Bali

Dari Gambar 4.11 hingga Gambar 4.14 terlihat bahwa masing-masing variabel prediktor memberikan kecenderungan pengaruh yang berbeda-beda untuk setiap variabel respon di tiap provinsi. Hal ini menunjukkan bahwa setiap provinsi memiliki karakteristik yang berbeda-beda. Studi data longitudinal dapat menangkap permasalahan tersebut dan menyajikannya dalam model yang lebih spesifik untuk setiap subyek atau setiap provinsi.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya adalah sebagai berikut :

1. Diberikan data longitudinal berpasangan multirespon dengan l buah variabel respon dan p buah variabel prediktor $(y_1, y_2, \ldots, y_l, x_1, x_2, \ldots, x_p)$.
   Model regresi nonparametrik multirespon untuk data longitudinal dapat dinyatakan sebagai berikut.

   $$y_{1ji} = f(x_{11ji}) + f(x_{21ji}) + \ldots + f(x_{p1ji}) + \varepsilon_{1ji}$$
   $$y_{2ji} = f(x_{12ji}) + f(x_{22ji}) + \ldots + f(x_{p2ji}) + \varepsilon_{2ji}$$
   $$\vdots$$
   $$y_{lji} = f(x_{1lji}) + f(x_{2lji}) + \ldots + f(x_{plji}) + \varepsilon_{lji}$$

   dimana $j = 1,2,\ldots,m$; $i = 1,2,\ldots,n$.

   $f(x)$ diasumsikan bentuk pola kurva regresinya tidak diketahui sehingga didekati dengan fungsi spline truncated

   $$f(x_{skji}) = \sum_{q=0}^{Q} \alpha_{kjsq} x_{skji}^{q} + \sum_{r=1}^{R} \delta_{kjsr} (x_{skji} - K_{kjsr})_{+}^{Q}$$

   Jika model dibentuk ke dalam matriks

   $$\mathbf{y} = \mathbf{X\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

   Estimator model regresi nonparametrik multirespon *spline* truncated untuk data longitudinal diperoleh dengan pendekatan WLS sehingga didapatkan :

   $$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{y}$$

2. Sifat dari estimator model regresi nonparametrik multirespon *spline* truncated untuk data longitudinal adalah linier, bias, dan berdistribusi normal.
3. Aplikasi model terhadap data keberhasilan KB dilakukan dalam tiga kelompok bahasan yaitu kelompok Jawa Bali, Luar Jawa Bali I, dan Luar Jawa Bali II dengan knot optimum yang digunakan sebanyak tiga knot.

Berikut adalah rangkuman nilai GCV dan MSE dari hasil pemodelan terbaik untuk masing-masing kelompok

Kelompok	GCV	MSE
Jawa Bali	$4{,}06 \times 10^{-26}$	$2{,}494269 \times 10^{-20}$
Luar Jawa Bali I	$2{,}98 \times 10^{-27}$	$2{,}175618 \times 10^{-20}$
Luar Jawa Bali II	$1{,}18 \times 10^{-27}$	$8{,}605989 \times 10^{-21}$

5.2 Saran

Berikut adalah saran yang dapat disampaikan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan utamanya untuk kelanjutan penelitian yang akan datang.

1. Aplikasi model masih menggunakan matriks pembobot yang diketahui. Untuk selanjutnya dapat dilakukan estimasi untuk menentukan matriks pembobot $\mathbf{V_j} = \mathbf{W_j^{-1}}\ \mathbf{W_j} = \mathrm{cov}(y_j)$ yang sesuai dengan kasus atau permasalahan.
2. Program yang dibuat terbatas pada jumlah pengamatan yang sama untuk setiap subyek sehingga bisa dikembangkan untuk jumlah pengamatan yang berbeda.
3. Pemilihan knot optimal adalah sama untuk masing-masing respon sehingga bisa dikembangkan program lebih lanjut agar knot optimal yang terpilih di setiap respon tidak selalu sama.
4. Program dapat dikembangkan menjadi lebih dari tiga titik knot dan juga kombinasi knot sehingga dimungkinkan tiap variabel memiliki jumlah knot yang berbeda-beda.
5. Dalam studi data longitudinal sebaiknya menggunakan jumlah pengamatan yang cukup banyak dengan subyek yang tidak terlalu banyak agar program dapat dijalankan dengan sempurna.
6. Dalam hal aplikasi model, perlu digali lebih lanjut variabel-variabel lain yang berpengaruh terhadap keberhasilan KB di Indonesia.

DAFTAR PUSTAKA

Badan Koordinasi Keluarga Berencana Nasional. (2010), *Rencana Strategis BKKBN Tahun 2010-2014*, BKKBN, Jakarta.

Badan Koordinasi Keluarga Berencana Nasional. (2013), *Profil Kependudukan dan Pembangunan di Indonesia Tahun 2013*, BKKBN, Jakarta.

Badan Koordinasi Keluarga Berencana Nasional. (2013), *Profil Hasil Pendataan Keluarga Tahun 2012*, BKKBN, Jakarta.

Badan Pusat Statistik. (2013), *Statistik Indonesia Statistical Yearbook of Indonesia 2013*, Badan Pusat Statistik, Jakarta.

Badan Pusat Statistik. (2013), *Statistik Kesejahteraan Rakyat Welfare Statistics 2012*, Badan Pusat Statistik, Jakarta.

Budiantara, I.N. (2001), "Aplikasi Spline Estimator Terbobot", *Jurnal Teknik Industri*, Vol. 3, No. 2, hal. 57-62.

Budiantara, I.N. (2009), *Spline dalam Regresi Nonparametrik dan Semiparametrik, Sebuah Pemodelan Statistika Masa Kini dan Masa mendatang*, Pidato Pengukuhan Guru Besar, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Budiantara, I.N. dan Purnomo, J.D.T. (2011), "Infants' Weight Growth Model in Surabaya (Indonesia) by Using Weighted Spline Regression", *International Journal of Basic & Applied Sciences IJBAS-IJENS*, Vol. 11, No. 2, hal. 119-123.

Buletin Kespro-Kesehatan Reproduksi. (2013), *Situasi Keluarga Berencana di Indonesia*, Kementerian Kesehatan RI, Jakarta.

Chamidah, N., Budiantara, I.N., dan Zain, I. (2012), "Designing of Child Growth Chart Based on Multi-Response Local Polynomial Modeling", *Journal of Mathematics and Statistics*, Vol. 8, No. 3, hal 342-347.

Chamidah, N. dan Saifudin, T. (2013), "Estimation of Children Growth Curve Based on Kernel Smoothing in Multi-Response Nonparametric Regression", *Applied Mathematical Sciences*. Vol. 7, No. 37, hal 1839-1847.

Claussen, P.E.C. (2012), *Regression : When a Nonparametric Approach is Most Fitting*, Master of Science in Statistics, University of Texas, Austin.

Cox, D.D. dan O'Sullivan, F. (1996), "Penalized Likelihood-type Estimators for Generalized Nonparametric Regression", *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 56, No. 10, hal 185-206.

Diggle, P.J., Heagerty, P.J., Liang, K.Y., dan Zeger, S.L. (2002), *Analysis of Longitudinal Data*, Oxford University Press Inc., New York.

Duapadang, D.T., Ismail, A.B., dan Subirman. (2013), *Faktor-faktor yang Berhubungan dengan Unmet Need KB pada Pasangan Usia Subur (PUS) di Wilayah Kerja Puskesmas Temindung Tahun 2013*, Universitas Mulawarman, Samarinda.

Durban, M., Harezlak, J., Wand, M.P., dan Carrol, R.J. (2004), "Simple Fitting of Subject-Specific Curves for Longitudinal Data", *Statistics in Medicine*, hal. 1-24.

Eubank, R.L. (1999), *Nonparametric Regression and Spline Smoothing*, Marcel Dekker, Inc., New York.

Eubank, R.L., Huang, C., Maldonado, Y.M., Wang, N., Wang, S., dan Buchanan, R.J. (2004), "Smoothing Spline Estimation in Varying-Coefficient Models", *Royal Statistical Society*, Vol. 66, No. 3, hal 653-667.

Fan, J. dan Zhang, J.T. (2002), "Two-step Estimation of Functional Linear Models With Applications to Longitudinal Data", *Royal Statistical Society*, Vol. 62, No. 2, hal 303-322.

Fitriyani, N. (2014), *Metode Cross Validation dan Generalized Cross Validation dalam Regresi Nonparametrik Spline (Studi Kasus Data Fertilitas di Jawa Timur)*, Tesis Program Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Gao, J. dan Shi, P. (1997), "M-Type Smoothing Splines in Nonparametric and Semiparametric Regression Model", *Statistica Sinica*, Vol. 7, hal 1155-1169.

Green, P.J. dan Silverman, B.W. (1994), *Nonparametric Regression and Generalized Linear Models*, Chapman & Hall, London.

Gujarati, D. N. (2003), *Basic Econometric*, 4th edition, McGraw-Hill Companies, Inc., New York.

Guo, W. (2002), "Functional Mixed Effects Models", *Biometrics*, Vol. 58, hal 121-128.

Handrina, E. (2011), *Faktor Penyebab Unmet Need Suatu Studi di Kelurahan Kayu Bubu Kecamatan Guguk Panjang Kota Bukittinggi*, Tesis Program Magister, Universitas Andalas, Padang.

Hardle, W. (1994), *Applied Nonparametric Regression*, Humboldt-University of Berlin, Berlin.

Hsiao, C. (2003), *Analysis of Panel Data*, Cambridge University Press, New York.

Ibrahim, N.A. dan Suliadi. (2008), "Analyzing Longitudinal Data using Gee-Smoothing Spline", *Proceedings of The 8th WSEAS International Conference on Applied Computer and Applied Computational Science*, hal 26-33.

Juliaan, F. (2009), *Unmet Need dan Kebutuhan Pelayanan KB di Indonesia*, Puslitbang KB dan Kesehatan Reproduksi, Badan Koordinasi Keluarga Berencana Nasional, Jakarta.

Kadiri, M., Carrol, R.J., dan Wand, M.P. (2010), "Marginal Longitudinal Semiparametric Regression via Penalized Splines", *Statistics and Probability Letters*, Vol. 80, hal 1242-1252.

Kadiri, M., Mustafa, B., dan Fich, C. (2010), *Marginal Longitudinal Curves Estimated via Bayesian Penalized Splines*, Graduate University of Ballarat, Ballarat.

Laome, L. (2009), "Model Regresi Semiparametrik Spline untuk Data Longitudinal pada Kasus Kadar CD4 Penderita HIV", *Paradigma*, Vol. 13, No. 2, hal 189-194.

Lestari, B., Budiantara, I.N., Sunaryo, S., dan Mashuri, M. (2010), "Spline Estimator in Multi-Response Nonparametric Regression Model with Unequal Correlation of Errors", *Journal of Mathematics and Statistics*, Vol. 6, No. 3, hal 327-332.

Liang, H. dan Xiao, Y. (2006), "Penalized Splines for Longitudinal Data With An Application in AIDS Studies", *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, Vol. 5, No. 1, hal 130-139.

Liang, K.Y. dan Zeger, S.L. (1986), "Longitudinal Data Analysis Using Generalized Linear Models", *Biometrika*, Vol. 73, No. 1, hal 13-22.

Lin, X., Wang, N., Welsh, A.H., dan Carrol, R.J. (2004), "Equivalent Kernel of Smoothing Splines in Nonparametric Regression for Clustered/Longitudinal Data", *Biometrika*, Vol. 91, No. 1, hal 177-193.

Melliana, A. (2013), *Analisis Statistika Faktor yang Mempengaruhi Indeks Pembangunan Manusia di Kabupaten/Kota Provinsi Jawa Timur dengan Menggunakan Regresi Panel*, Tugas Akhir Program Sarjana, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Menictas, M. dan Wand, M.P. (2013), *Variational Inference for Marginal Longitudinal Semiparametric Regression*, University of Technology Sydney, Sydney.

Muhoza, D.N., Rutayisire, P.C., dan Umubyeyi, A. (2013), *Measuring the Success of Family Planning Initiatives in Rwanda : A Multivariate Decomposition Analysis*, DHS Working Paper, ICF International Calverton, Maryland.

Oehlert, G.W. (1992), "Relaxed Boundary Smoothing Splines", *The Annals of Statistics*, Vol. 20, No. 1, hal 146-160.

Prahutama, A. (2013), *Model Regresi Nonparametrik Polinomial Lokal Birespon pada Data Longitudinal*, Tesis Program Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Preliminary Report. (2012), *Indonesia Demographic and Health Survey 2012*, Measure DHS, ICF International Calverton, Maryland.

RAN KB. (2013), *Rencana Aksi Nasional Pelayanan Keluarga Berencana 2014-2015*, Kementerian Kesehatan RI, Jakarta.

Sriliana, I. (2012), *Regresi Spline Truncated dalam Model Linear Parsial untuk Data Longitudinal*, Tesis Program Magister, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Takezawa, K. (2006), *Introduction to Nonparametric Regression*, John Wiley & Sons, New Jersey.

Tripena, A. (2011), "Penentuan Model Regresi Spline Terbaik", *Prosiding Seminar Nasional Statistika Universitas Diponegoro,* hal 92-102.

Wahba, G. (1990), *Spline Models for Observation Data*, University of Winsconsin at Madison, Pensylvania.

Wang, J.L. (2003), *Nonparametric Regression Analysis of Longitudinal Data*, Departmen of Statistics, University of California, Davis.

Wang, Y., Guo, W., dan Brown, M.B. (2000), "Spline Smoothing for Bivariate Data With Applications to Association Between Hormones", *Statistica Sinica*, Vol. 10, hal 377-397.

Weiss, R. (2005), *Bivariate Longitudinal Data*, Springer Text in Statistics, New York.

Wu, H. dan Zhang, J.T. (2006), *Nonparametric Regression Method for Longitudinal Data Analysis*, John Wiley & Sons, New Jersey.

Yao, F., Muller, H.G., dan Wang, J.L. (2004), *Functional Linear Regression Analysis for Longitudinal Data*, University of California, Davis.

Yulikah, I. (2011), *Hubungan Penyediaan Sumber Daya Pelayanan KB dengan Unmet Need di Indonesia*, Tesis Program Magister Universitas Gadjah Mada, Yogjakarta.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Keberhasilan KB dan Faktor-faktor yang Diduga Mempengaruhinya Tahun 2008-2012 untuk Kelompok Jawa Bali

No.	Provinsi	Tahun	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	x_4
1	DKI Jakarta	2008	75.53	14.77	0.58	38.97	30.44	58.07
		2009	76.07	14.9	0.54	37.9	28.67	58.94
		2010	76.29	14.69	0.64	36.97	26.62	60.55
		2011	76.78	14.25	0.46	36.3	26.37	60.74
		2012	76.67	14.55	0.56	35.13	24.71	61.98
2	Jawa Barat	2008	72.91	16.18	2.88	72.29	60.19	49.57
		2009	73.05	16.1	2.09	71.42	56.66	50.69
		2010	73.48	15.62	1.68	70.47	53.2	54.55
		2011	72.79	15.86	1.72	70.25	52.26	54.8
		2012	73.71	14.97	1.62	68.13	52.13	54.75
3	Jawa Tengah	2008	76.5	13.29	4.25	79.16	51.22	49.94
		2009	76.72	12.99	2.89	78.45	49.99	50.49
		2010	76.99	12.78	2.62	77.74	47.96	50.89
		2011	76.92	12.6	2.58	76.98	47.01	54.5
		2012	77.31	12.25	2.39	76.67	46.3	54.56
4	DI Yogyakarta	2008	77.11	11.52	3.46	64.05	29.9	56.96
		2009	76.47	11.64	3.35	63.4	28.18	56.6
		2010	75.84	11.55	0.57	63.53	29.17	58.23
		2011	72.08	13.69	2.48	64.26	25.71	60.07
		2012	70.71	12.41	2.89	62.76	26.15	61.32
5	Jawa Timur	2008	71.84	16.56	3.96	76.14	56.79	57.73
		2009	72.89	14.89	2.83	75.25	55.31	58.2
		2010	73.05	14.19	2.36	74.54	54.65	60.58
		2011	73.37	13.41	2	73.72	52.89	61.38
		2012	73.44	12.91	1.93	72.69	51.67	62.46
6	Bali	2008	83.34	5.12	1.29	60.77	23.46	56.39
		2009	83.97	4.74	0.82	59.28	23.78	56.3
		2010	84.53	4.13	0.79	58.68	24.46	57.98
		2011	84.93	3.9	0.62	57.78	23.37	59.43
		2012	85.05	3.88	0.39	56.89	21.73	60.07
7	Banten	2008	63.98	23.78	1.55	66.37	55.27	48.59
		2009	65	21.38	1.23	65.52	54.22	48.74
		2010	66.99	20.87	1.04	62.59	48.45	53.78
		2011	67.57	20.17	1.15	62.16	47.8	54.57
		2012	67.36	21.41	0.95	62.73	46.94	54.84

Lampiran 2. D ata Keberhasilan KB dan Faktor-faktor yang Diduga Mempengaruhinya Tahun 2008-2012 untuk Kelompok Luar Jawa Bali I

No.	Provinsi	Tahun	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	x_4
1	Nangroe Aceh Darussalam	2008	62.12	21.23	5.18	68.76	42.23	40.29
		2009	64.15	19.28	3.88	67.45	40.78	40.95
		2010	66.15	18.58	3.48	66.03	39.35	41.43
		2011	67.03	18.2	3.48	64.06	37.28	42.42
		2012	68.6	17.08	3.07	62.79	37.3	41.47
2	Sumatera Utara	2008	61.29	22.49	2.07	62.96	28.19	35.36
		2009	62.11	21.8	1.78	60.97	27.69	36.97
		2010	62.61	21.11	1.79	60.59	24.48	39.47
		2011	64.15	19.6	1.8	59.67	24.15	39.88
		2012	62.84	19.95	1.82	59.28	23.94	39.2
3	Sumatera Barat	2008	66.16	18.44	1.73	67.34	36.28	39.18
		2009	64.06	17.34	1.52	66.02	35.33	39.28
		2010	67.27	16.79	1.45	67.45	35.83	38.74
		2011	68.76	15.54	1.5	64.41	33.29	39.53
		2012	68.95	15.17	1.24	63.49	32.8	40.32
4	Sumatera Selatan	2008	70.09	18.26	3.92	72.92	46.96	44.87
		2009	71.24	17.53	2.32	69.96	45.32	45.55
		2010	73.49	16.21	2.38	69.44	43.63	46.86
		2011	71.51	16.39	2.41	67.9	43.37	48.25
		2012	73.01	14.77	1.85	66.34	42.84	49.8
5	Lampung	2008	69.63	19.3	4.43	74.92	51.08	46.45
		2009	69.44	18.77	3.45	73.48	49.18	47.04
		2010	68.79	19.5	2.99	72.8	45.68	49.73
		2011	69.49	19.21	2.91	71.32	44.83	49.95
		2012	69.55	18.72	2.53	70.26	43.51	51.36
6	Nusa Tenggara Barat	2008	65.92	19.99	4.95	77.33	42.53	45.19
		2009	66.26	19.93	3.72	76.33	43.37	43.68
		2010	67.86	17.11	3.74	74.66	41.94	45.33
		2011	69.96	16.09	3.33	73.34	38.12	49.8
		2012	70.55	15.34	3.2	72.24	38.84	49.79
7	Kalimantan Barat	2008	64.23	22.06	2.38	70.42	41.29	45.31
		2009	66.38	20.38	1.29	69.19	39.78	48.12
		2010	66.91	20.37	1.38	68.39	39.28	48.13
		2011	65.28	20.82	1.47	67.61	40.58	49.26
		2012	70.59	17.44	1.24	66.08	39.85	49.77
8	Kalimantan Selatan	2008	71.62	15.92	1.2	72.95	55.67	52.61
		2009	73.1	14.7	0.8	71.78	55.2	53.14
		2010	74.01	14.3	0.77	71.07	53.08	55.12
		2011	74.48	13.4	0.83	70.02	53.71	56.4
		2012	74.89	13.64	0.76	69.47	52.55	55.86

Lanjutan Lampiran 2. Data Keberhasilan KB dan Faktor-faktor yang Diduga Mempengaruhinya Tahun 2008-2012 untuk Kelompok Luar Jawa Bali I

No.	Provinsi	Tahun	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	x_4
9	Sulawesi Utara	2008	77.39	12.98	1.94	63.33	26.45	57.12
		2009	77.66	12.71	1.38	62.54	27.22	55.21
		2010	78.36	12.15	1.5	61.71	25.93	56.62
		2011	79.42	10.37	1.21	61.28	26.58	57.99
		2012	80.07	10.04	1.18	60.34	28.26	57.17
10	Sulawesi Selatan	2008	62	22.52	3.46	70.19	44.89	42.35
		2009	64.29	20.59	2.03	70.57	44.06	43.66
		2010	64.46	20.67	1.85	69.05	40.76	44.02
		2011	65.53	19.51	1.59	68.33	42.81	46.12
		2012	66.24	19.16	1.68	67.54	41.13	46.39
11	Bangka Belitung	2008	72.09	17.94	1.34	71.78	38.89	51.04
		2009	74.3	16.11	1.1	69.63	37.95	51.59
		2010	77.36	12.87	1.06	70.76	36.9	52.46
		2011	78.39	11.5	0.84	68.95	38.12	54.18
		2012	79.27	10.94	0.66	67.58	40.1	54.5
12	Gorontalo	2008	70.28	16.9	3.67	80.32	37.39	48.87
		2009	73.28	14.32	3.46	79.4	37.68	48.05
		2010	73.49	14.31	2.77	79.05	36.83	48.24
		2011	75.12	13.11	3.67	78.17	40.62	50.02
		2012	75.94	12.47	3.21	77.59	40.25	49.11
13	Sulawesi Barat	2008	59.89	22.1	3.44	76.83	48.94	39.01
		2009	60.78	21.82	1.71	75.16	46.09	38.45
		2010	63.33	18.81	2.32	75.72	46.05	39.34
		2011	63.33	19.86	2.28	73.36	49.56	41.37
		2012	68.59	16.83	1.74	71.63	46.25	41.27

Lampiran 3. Data Keberhasilan KB dan Faktor-faktor yang Diduga Mempengaruhinya Tahun 2008-2012 untuk Kelompok Luar Jawa Bali II

No.	Provinsi	Tahun	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	x_4
1	Riau	2008	65.19	22.23	2.44	60.77	35.68	47.68
		2009	66.4	21.17	1.57	60.73	34.66	48.89
		2010	66.66	21.02	1.76	60.68	33.71	51.08
		2011	65.96	21.99	1.36	59.33	34.15	51.5
		2012	64.15	21.72	1.13	59.33	35.2	51.3
2	Jambi	2008	74.81	14.34	1.91	67.58	52.46	49.71
		2009	75.56	14.57	0.92	67.81	52.39	50.22
		2010	75.41	14.12	1.21	65.94	50.03	52.93
		2011	75.38	13.93	1.29	64.12	49.97	53.31
		2012	76.22	12.86	1.37	71.42	49.57	52.81
3	Bengkulu	2008	77.16	12.8	3.93	69.43	46.62	44.89
		2009	76.46	12.88	3.26	68.04	45.1	46.31
		2010	76.12	12.85	2.79	65.48	45.88	46.67
		2011	75.42	14.37	2.97	64.92	45.94	47.55
		2012	78.36	11.9	3.05	63.84	43.93	49.31
4	Nusa Tenggara Timur	2008	58.44	22.64	8.27	79.19	20.34	36.24
		2009	62.93	21.74	4.47	79.34	21.3	37.67
		2010	63.49	20.94	4.04	79.11	19.26	36.98
		2011	65.32	20.15	3.53	78.19	21.23	37.18
		2012	64.85	20.48	3.47	76.65	21.04	36.84
5	Kalimantan Tengah	2008	70.73	16.71	1.47	73.43	45.58	53.7
		2009	69.97	17.42	0.94	71.39	46.45	55.94
		2010	70.83	15.29	1.14	68.32	47.72	56.04
		2011	78.79	11.16	1.09	69.81	45.78	57.31
		2012	73.57	13.6	1.08	66.63	46.23	57.4
6	Kalimantan Timur	2008	71.11	15.75	2.03	59.27	39.32	55
		2009	67.56	20.92	1.41	59.12	38.17	55.42
		2010	67.3	19.15	1.39	57.2	36.6	57.18
		2011	66.66	19.87	1.07	56.33	35.31	58.78
		2012	67.96	18.23	0.99	53.69	36.34	58.23
7	Sulawesi Tengah	2008	66.74	20.16	4.87	73	42.12	47.25
		2009	67.56	19.37	3.57	72.44	41.59	46.31
		2010	68.39	19.1	3.19	71.31	41.49	46.93
		2011	69.44	18.26	2.87	70.71	42.14	46.7
		2012	69.98	17.11	2.82	69.92	42.67	47.35
8	Sulawesi Tenggara	2008	61.64	23.78	5.05	69.38	46.22	40.84
		2009	62.09	23.12	2.56	65.32	45.9	40.7
		2010	62.53	22.89	2.52	65.39	45.09	42.36
		2011	63.33	23.19	2.49	66.88	42.39	43.09
		2012	64.89	21.84	1.92	65.14	43.35	42.3

Lanjutan Lampiran 3. Data Keberhasilan KB dan Faktor-faktor yang Diduga Mempengaruhinya Tahun 2008-2012 untuk Kelompok Luar Jawa Bali II

No.	Provinsi	Tahun	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3	x_4
9	Maluku	2008	57.63	28.63	6.89	63.51	26.73	38.3
		2009	55.99	27.61	6.84	63.24	25.5	38.59
		2010	60.17	25.74	5.27	61.19	22.5	39.45
		2011	63.07	23.68	4.6	60.04	25.39	38.94
		2012	63	23.25	4.38	56.06	23.67	39.29
10	Papua	2008	34.9	36.28	11.16	72.25	45.8	54.37
		2009	29.39	35.27	9.89	68.86	42.94	53.51
		2010	24.34	54.77	8.14	74.94	37.03	54.95
		2011	25.38	53.24	7.93	74.94	37.37	57.31
		2012	39.93	38.28	7.35	73.79	36.52	54.42
11	Maluku Utara	2008	54.16	29.68	2.47	64.33	34.8	41.88
		2009	58.28	28.29	1.93	63.7	35.34	42.75
		2010	61.41	26.11	1.63	59.99	34.8	44.64
		2011	58.84	11.81	2.14	61.16	36.08	43.83
		2012	59.13	26.75	0.85	59.63	35.94	45.16
12	Papua Barat	2008	49.33	29.71	10.83	61.23	29.72	49.55
		2009	43.99	34.87	8.83	63.05	33.31	50.42
		2010	38.8	37.76	7.24	60.12	33.04	49.98
		2011	44.13	35.84	7.57	59.53	32.8	50.78
		2012	50.98	30.45	5.71	58.94	32.32	51.14
13	Kepulauan Riau	2008	88	4.56	1.87	67.64	33.98	53.57
		2009	77.78	7.01	1.44	54.86	29.05	52.41
		2010	76.9	8.73	1.31	62.9	21.71	60.17
		2011	76.52	9.14	1.17	46.29	19.54	64.03
		2012	73.34	12.31	0.85	50.47	20.27	64.85

y_1 : Persentase CPR

y_2 : Persentase *Unmet Need*

x_1 : Indeks Kedalaman Kemiskinan

x_2 : Persentase KK dengan pendidikan <= SLTP

x_3 : Persentase Wanita Berumur 10 Tahun ke Atas dengan Usia Perkawinan Pertama <= 18 Tahun

x_4 : Persentase Wanita Berumur 10 Tahun ke Atas yang Pernah Kawin dengan <= 2 Anak Lahir Hidup

Lampiran 4. Program GCV 1 Knot dengan *Software* R

```
GCV1=function(data,p,l,m,n)
{
 data=as.matrix(data)
 nk= 50
 y=matrix(NA, ncol=1, nrow=n*m*l)
    a=1
    b=n*m
    for (k in 1:l)
    {
    y[a:b,1]=data[,k]
    a=a+n*m
    b=b+n*m
    }
 varx = data[,(l+1):(l+p)]
 knot=matrix(ncol=p*m,nrow=nk)
 data2=matrix(ncol=p*m,nrow=n)
aa =1
for (s in (1:p))
{
 for (j in (1:m))
 {
     bb = varx[(j*n-(n-1)):(j*n),s]
    a=seq(min(bb),max(bb),length.out=50)
    knot[,aa]=a
    data2[,aa]=bb
    aa = aa+1
  }
 }

knot=knot[2:(nk-1),]
a1=nrow(knot)
F=matrix(0,nrow=n*m*l,ncol=n*m*l)
diag(F)=1
V=matrix(0,nrow=n*m*l,ncol=n*m*l)
diag(V)=1/n
GCV=rep(NA,a1)
Rsq=rep(NA,a1)
data1=matrix(ncol=p*m,nrow=n)
for (i in 1:a1)
{
  for (j in 1:(p*m))
  {
    for (k in 1:n)
    {
    if (data2[k,j]>knot[i,j]) data1[k,j]=data2[k,j]-knot[i,j] else data1[k,j]=0
    }
  }
```

Lanjutan Lampiran 4. Program GCV 1 Knot dengan *Software* R

```
mx=matrix(0,ncol=(2*p+1)*m*l,nrow=n*m*l)
a=n
b=1
c=1
for (k in 1:l)
{
for (j in 1:m)
{
for (s in 0:(2*p))
{
if (s<1) mx[c:a,b+s]=1 else if (s<p+1) mx[c:a,b+s]=data2 [1:n,j+(s-1)*m] else
mx[c:a,b+s]=data1[1:n,j+(s-p-1)*m]
}
a=a+n
b=b+(2*p+1)
c=c+n
}
}
C=pinv(t(mx)%*%V%*%mx)
B=C%*%(t(mx)%*%V%*%y)
yhat=mx%*%B
SSE=0
SSR=0
   for (r in 1:(n*m*l))
   {
     sum=(y[r,]-yhat[r,])^2
     sum1=(yhat[r,]-mean(y))^2
     SSE=SSE+sum
     SSR=SSR+sum1
   }
Rsq[i]=(SSR/(SSE+SSR))*100
MSE=SSE/n*m*l
A=mx%*%C%*%t(mx)
A1=(F-A)
A2=(sum(diag(A1))/n*m*l)^2
GCV[i]=MSE/A2
}
GCV=as.matrix(GCV)
Rsq=as.matrix(Rsq)

s1=min(GCV)
cat("HASIL GCV terkecil dengan Spline linear 1 knot","\n")
cat(" GCV =",s1,"\n")

write.csv(GCV,file="e:/output GCV 1 knot.csv")
write.csv(Rsq,file="e:/output Rsq 1 knot.csv")
write.csv(knot,file="e:/output 1 knot.csv")
}
```

Lampiran 5. Program GCV 2 Knot dengan *Software* R

```
GCV2=function(data,p,l,m,n)
{
 data=as.matrix(data)
 nk= 50
 y=matrix(NA, ncol=1, nrow=n*m*l)
    a=1
    b=n*m
    for (k in 1:l)
    {
    y[a:b,1]=data[,k]
    a=a+n*m
    b=b+n*m
    }
 varx = data[,(l+1):(l+p)]
 knot=matrix(ncol=p*m,nrow=nk)
 data2=matrix(ncol=p*m,nrow=n)
aa =1
for (s in (1:p))
{
 for (j in (1:m))
 {
     bb = varx[(j*n-(n-1)):(j*n),s]
    a=seq(min(bb),max(bb),length.out=50)
    knot[,aa]=a
    data2[,aa]=bb
    aa = aa+1
  }
 }

knot=knot[2:(nk-1),]
a1=nrow(knot)
mm=ncol(data2)
z=(a1*(a1-1)/2)
knot2=cbind(rep(NA,(z+1)))
for (i in (1:mm))
{
knot1=rbind(rep(NA,2))
       for ( j in 1:(a1-1))
       {
              for (k in (j+1):a1)
              {
              xx=cbind(knot[j,i],knot[k,i])
              knot1=rbind(knot1,xx)
              }
       }
knot2=cbind(knot2,knot1)
}
knot2=knot2[2:(z+1),2:(2*mm+1)]
```

Lanjutan Lampiran 5. Program GCV 2 Knot dengan *Software* R

```
a3=length(knot2[,1])
F=matrix(0,nrow=n*m*l,ncol=n*m*l)
diag(F)=1
V=matrix(0,nrow=n*m*l,ncol=n*m*l)
diag(V)=1/n
GCV=rep(NA,a3)
Rsq=rep(NA,a3)


data1=matrix(ncol=2*p*m,nrow=n)
for (i in 1:a3)
{
  for (j in 1:(2*p*m))
        {
        if (mod(j,2)==1) b=floor(j/2)+1 else b=j/2
        for (k in 1:n)
        {
        if (data2[k,b]>knot2[i,j]) data1[k,j]=data2[k,b]-knot2[i,j] else data1[k,j]=0
        }
        }

data11=matrix(ncol=2*p*m,nrow=n)
q=1
for (t in 1:(2*p*m))
{
if (t<p*m+1) data11[1:n,q]=data1[,2*t-1] else data11[1:n,q]=data1[,2*(t-p*m)]
q=q+1
}

mx=matrix(0,ncol=(3*p+1)*m*l,nrow=n*m*l)
a=n
b=1
c=1
for (k in 1:l)
{
for (j in 1:m)
{
for (s in 0:(3*p))
{
if (s<1) mx[c:a,b+s]=1 else if (s<p+1) mx[c:a,b+s]=data2[1:n,j+(s-1)*m] else
mx[c:a,b+s]=data11[1:n,j+((s-1)*m)-(m*p)]
}
a=a+n
b=b+(3*p+1)
c=c+n
}
}
```

Lanjutan Lampiran 5. Program GCV 2 Knot dengan *Software* R

```
C=pinv(t(mx)%*%V%*%mx)
B=C%*%(t(mx)%*%V%*%y)
yhat=mx%*%B
SSE=0
SSR=0
   for (r in 1:(n*m*l))
   {
    sum=(y[r,]-yhat[r,])^2
    sum1=(yhat[r,]-mean(y))^2
    SSE=SSE+sum
    SSR=SSR+sum1
   }
Rsq[i]=(SSR/(SSE+SSR))*100
MSE=SSE/n*m*l
A=mx%*%C%*%t(mx)
A1=(F-A)
A2=(sum(diag(A1))/n*m*l)^2
GCV[i]=MSE/A2
}
GCV=as.matrix(GCV)
Rsq=as.matrix(Rsq)

s1=min(GCV)
cat("HASIL GCV terkecil dengan Spline linear 2 knot","\n")
cat(" GCV =",s1,"\n")

write.csv(GCV,file="e:/output GCV 2 knot.csv")
write.csv(Rsq,file="e:/output Rsq 2 knot.csv")
write.csv(knot2,file="e:/output 2 knot.csv")
}
```

Lampiran 6. Program GCV 3 Knot dengan *Software* R

```
GCV3=function(data,p,l,m,n)
{
 data=as.matrix(data)
 nk= 50
 y=matrix(NA, ncol=1, nrow=n*m*l)
    a=1
    b=n*m
    for (k in 1:l)
    {
    y[a:b,1]=data[,k]
    a=a+n*m
    b=b+n*m
    }
 varx = data[,(l+1):(l+p)]
 knot=matrix(ncol=p*m,nrow=nk)
 data2=matrix(ncol=p*m,nrow=n)
aa =1
for (s in (1:p))
{
 for (j in (1:m))
  {
     bb = varx[(j*n-(n-1)):(j*n),s]
    a=seq(min(bb),max(bb),length.out=50)
    knot[,aa]=a
    data2[,aa]=bb
    aa = aa+1
   }
  }

knot=knot[2:(nk-1),]
a1=nrow(knot)
mm=ncol(data2)
z=(a1*(a1-1)*(a1-2)/6)
knot2=cbind(rep(NA,(z+1)))
for (i in (1:mm))
{
knot1=rbind(rep(NA,3))
        for ( j in 1:(a1-2))
        {
        for (k in (j+1):(a1-1))
         {
         for (g in (k+1):a1)
         {
        xx=cbind(knot[j,i],knot[k,i],knot[g,i])
        knot1=rbind(knot1,xx)
         }
         }
        }
```

Lanjutan Lampiran 6. Program GCV 3 Knot dengan *Software* R

```
knot2=cbind(knot2,knot1)
}
knot2=knot2[2:(z+1),2:(3*mm+1)]

a3=length(knot2[,1])
F=matrix(0,nrow=n*m*l,ncol=n*m*l)
diag(F)=1
V=matrix(0,nrow=n*m*l,ncol=n*m*l)
diag(V)=1/n
GCV=rep(NA,a3)
Rsq=rep(NA,a3)

data1=matrix(ncol=3*p*m,nrow=n)
for (i in 1:a3)
 {
  for (j in 1:(3*p*m))
       {
       b=ceiling(j/3)
       for (k in 1:n)
       {
       if (data2[k,b]>knot2[i,j]) data1[k,j]=data2[k,b]-knot2[i,j] else data1[k,j]=0
       }
      }

data11=matrix(ncol=3*p*m,nrow=n)
q=1
for (t in 1:(3*p*m))
{
if (t<p*m+1) data11[1:n,q]=data1[,3*t-2] else if (t<2*p*m+1)
data11[1:n,q]=data1[,3*(t-p*m)-1] else data11[1:n,q]=data1[,3*(t-2*p*m)]
q=q+1
}

mx=matrix(0,ncol=(4*p+1)*m*l,nrow=n*m*l)
a=n
b=1
c=1
for (k in 1:l)
{
for (j in 1:m)
{
for (s in 0:(4*p))
{
if (s<1) mx[c:a,b+s]=1 else if (s<p+1) mx[c:a,b+s]=data2[1:n,j+(s-1)*m] else
mx[c:a,b+s]=data11[1:n,j+((s-1)*m)-(m*p)]
}
```

Lanjutan Lampiran 6. Program GCV 3 Knot dengan *Software* R

```
a=a+n
b=b+(4*p+1)
c=c+n
}
}

C=pinv(t(mx)%*%V%*%mx)
B=C%*%(t(mx)%*%V%*%y)
yhat=mx%*%B
SSE=0
SSR=0
   for (r in 1:(n*m*l))
   {
    sum=(y[r,]-yhat[r,])^2
    sum1=(yhat[r,]-mean(y))^2
    SSE=SSE+sum
    SSR=SSR+sum1
   }
Rsq[i]=(SSR/(SSE+SSR))*100
MSE=SSE/n*m*l
A=mx%*%C%*%t(mx)
A1=(F-A)
A2=(sum(diag(A1))/n*m*l)^2
GCV[i]=MSE/A2
}
GCV=as.matrix(GCV)
Rsq=as.matrix(Rsq)

s1=min(GCV)
cat("HASIL GCV terkecil dengan Spline linear 1 knot","\n")
cat(" GCV =",s1,"\n")

write.csv(GCV,file="e:/output GCV 3 knot.csv")
write.csv(Rsq,file="e:/output Rsq 3 knot.csv")
write.csv(knot2,file="e:/output 3 knot.csv")
}
```

Lampiran 7. Program Estimasi Parameter dengan 1 Knot

```
PARGCV1=function(data,p,l,m,n,bar)
{
 data=as.matrix(data)
 nk= 50
 y=matrix(NA, ncol=1, nrow=n*m*l)
    a=1
    b=n*m
    for (k in 1:l)
    {
    y[a:b,1]=data[,k]
    a=a+n*m
    b=b+n*m
    }
 varx = data[,(l+1):(l+p)]
 knot=matrix(ncol=p*m,nrow=nk)
 data2=matrix(ncol=p*m,nrow=n)
aa =1
for (s in (1:p))
{
 for (j in (1:m))
 {
     bb = varx[(j*n-(n-1)):(j*n),s]
    a=seq(min(bb),max(bb),length.out=50)
    knot[,aa]=a
    data2[,aa]=bb
    aa = aa+1
  }
 }

knot=knot[2:(nk-1),]
a1=nrow(knot)
F=matrix(0,nrow=n*m*l,ncol=n*m*l)
diag(F)=1
V=matrix(0,nrow=n*m*l,ncol=n*m*l)
diag(V)=1/n
GCV=rep(NA,a1)
Rsq=rep(NA,a1)
data1=matrix(ncol=p*m,nrow=n)
i=bar
   for (j in 1:(p*m))
   {
    for (k in 1:n)
    {
    if (data2[k,j]>knot[i,j]) data1[k,j]=data2[k,j]-knot[i,j] else data1[k,j]=0
    }
   }
mx=matrix(0,ncol=(2*p+1)*m*l,nrow=n*m*l)
```

Lanjutan Lampiran 7. Program Estimasi Parameter dengan 1 Knot

```
a=n
b=1
c=1
for (k in 1:l)
{
for (j in 1:m)
{
for (s in 0:(2*p))
{
if (s<1) mx[c:a,b+s]=1 else if (s<p+1) mx[c:a,b+s]=data2 [1:n,j+(s-1)*m] else
mx[c:a,b+s]=data1[1:n,j+(s-p-1)*m]
}
a=a+n
b=b+(2*p+1)
c=c+n
}
}
C=pinv(t(mx)%*%V%*%mx)
B=C%*%(t(mx)%*%V%*%y)
yhat=mx%*%B
SSE=0
SSR=0
   for (r in 1:(n*m*l))
   {
    sum=(y[r,]-yhat[r,])^2
    sum1=(yhat[r,]-mean(y))^2
    SSE=SSE+sum
    SSR=SSR+sum1
   }
Rsq=(SSR/(SSE+SSR))*100
MSE=SSE/n*m*l
A=mx%*%C%*%t(mx)
A1=(F-A)
A2=(sum(diag(A1))/n*m*l)^2
GCV=MSE/A2
cat("Knot Optimal=","\n")
print (knot[bar,])
cat("Estimasi Parameter dengan Knot Optimal=","\n")
print (B)
cat("MSE=","\n")
print (MSE)
cat("GCV dari Knot Optimal=","\n")
print (GCV)
write.csv(B,file="e:/output parameter 1 knot.csv")
}
```

Lampiran 8. Program Estimasi Parameter dengan 2 Knot

```
PARGCV2=function(data,p,l,m,n,bar)
{
 data=as.matrix(data)
 nk= 50
 y=matrix(NA, ncol=1, nrow=n*m*l)
    a=1
    b=n*m
    for (k in 1:l)
    {
    y[a:b,1]=data[,k]
    a=a+n*m
    b=b+n*m
    }
 varx = data[,(l+1):(l+p)]
 knot=matrix(ncol=p*m,nrow=nk)
 data2=matrix(ncol=p*m,nrow=n)
aa =1
for (s in (1:p))
{
 for (j in (1:m))
 {
     bb = varx[(j*n-(n-1)):(j*n),s]
    a=seq(min(bb),max(bb),length.out=50)
    knot[,aa]=a
    data2[,aa]=bb
    aa = aa+1
  }
 }

knot=knot[2:(nk-1),]
a1=nrow(knot)
mm=ncol(data2)
z=(a1*(a1-1)/2)
knot2=cbind(rep(NA,(z+1)))
for (i in (1:mm))
{
knot1=rbind(rep(NA,2))
       for ( j in 1:(a1-1))
       {
                for (k in (j+1):a1)
                {
                xx=cbind(knot[j,i],knot[k,i])
                knot1=rbind(knot1,xx)
                }
       }
knot2=cbind(knot2,knot1)
}
knot2=knot2[2:(z+1),2:(2*mm+1)]
```

Lanjutan Lampiran 8. Program Estimasi Parameter dengan 2 Knot

```
a3=length(knot2[,1])
F=matrix(0,nrow=n*m*l,ncol=n*m*l)
diag(F)=1
V=matrix(0,nrow=n*m*l,ncol=n*m*l)
diag(V)=1/n
GCV=rep(NA,a3)
Rsq=rep(NA,a3)

data1=matrix(ncol=2*p*m,nrow=n)
i=bar
  for (j in 1:(2*p*m))
        {
        if (mod(j,2)==1) b=floor(j/2)+1 else b=j/2
        for (k in 1:n)
        {
        if (data2[k,b]>knot2[i,j]) data1[k,j]=data2[k,b]-knot2[i,j] else data1[k,j]=0
        }
        }

data11=matrix(ncol=2*p*m,nrow=n)
q=1
for (t in 1:(2*p*m))
{
if (t<p*m+1) data11[1:n,q]=data1[,2*t-1] else data11[1:n,q]=data1[,2*(t-p*m)]
q=q+1
}

mx=matrix(0,ncol=(3*p+1)*m*l,nrow=n*m*l)
a=n
b=1
c=1
for (k in 1:l)
{
for (j in 1:m)
{
for (s in 0:(3*p))
{
if (s<1) mx[c:a,b+s]=1 else if (s<p+1) mx[c:a,b+s]=data2[1:n,j+(s-1)*m] else
mx[c:a,b+s]=data11[1:n,j+((s-1)*m)-(m*p)]
}
a=a+n
b=b+(3*p+1)
c=c+n
}
}
```

Lanjutan Lampiran 8. Program Estimasi Parameter dengan 2 Knot

```
C=pinv(t(mx)%*%V%*%mx)
B=C%*%(t(mx)%*%V%*%y)
yhat=mx%*%B
SSE=0
SSR=0
   for (r in 1:(n*m*l))
   {
    sum=(y[r,]-yhat[r,])^2
    sum1=(yhat[r,]-mean(y))^2
    SSE=SSE+sum
    SSR=SSR+sum1
   }
Rsq=(SSR/(SSE+SSR))*100
MSE=SSE/n*m*l
A=mx%*%C%*%t(mx)
A1=(F-A)
A2=(sum(diag(A1))/n*m*l)^2
GCV=MSE/A2
cat("Knot Optimal=","\n")
print (knot2[bar,])
cat("Estimasi Parameter dengan Knot Optimal=","\n")
print (B)
cat("MSE=","\n")
print (MSE)
cat("GCV dari Knot Optimal=","\n")
print (GCV)
write.csv(B,file="e:/output parameter 2 knot.csv")
}
```

Lampiran 9. Program Estimasi Parameter dengan 3 Knot

```
PARGCV3=function(data,p,l,m,n,bar)
{
 data=as.matrix(data)
 nk= 50
 y=matrix(NA, ncol=1, nrow=n*m*l)
    a=1
    b=n*m
    for (k in 1:l)
    {
    y[a:b,1]=data[,k]
    a=a+n*m
    b=b+n*m
    }
 varx = data[,(l+1):(l+p)]
 knot=matrix(ncol=p*m,nrow=nk)
 data2=matrix(ncol=p*m,nrow=n)
aa =1
for (s in (1:p))
{
 for (j in (1:m))
 {
     bb = varx[(j*n-(n-1)):(j*n),s]
    a=seq(min(bb),max(bb),length.out=50)
    knot[,aa]=a
    data2[,aa]=bb
    aa = aa+1
  }
 }

knot=knot[2:(nk-1),]
a1=nrow(knot)
mm=ncol(data2)
z=(a1*(a1-1)*(a1-2)/6)
knot2=cbind(rep(NA,(z+1)))
for (i in (1:mm))
{
knot1=rbind(rep(NA,3))
          for ( j in 1:(a1-2))
          {
          for (k in (j+1):(a1-1))
           {
           for (g in (k+1):a1)
           {
          xx=cbind(knot[j,i],knot[k,i],knot[g,i])
          knot1=rbind(knot1,xx)
           }
           }
          }
```

Lanjutan Lampiran 9. Program Estimasi Parameter dengan 3 Knot

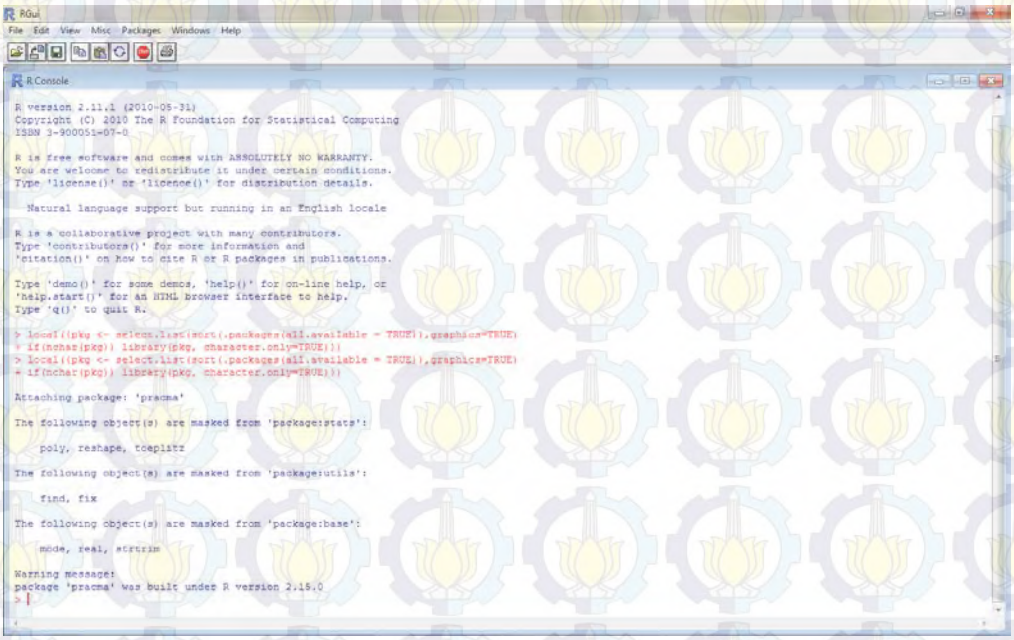
```
knot2=cbind(knot2,knot1)
}
knot2=knot2[2:(z+1),2:(3*mm+1)]

a3=length(knot2[,1])
F=matrix(0,nrow=n*m*l,ncol=n*m*l)
diag(F)=1
V=matrix(0,nrow=n*m*l,ncol=n*m*l)
diag(V)=1/n
GCV=rep(NA,a3)
Rsq=rep(NA,a3)

data1=matrix(ncol=3*p*m,nrow=n)
i=bar
  for (j in 1:(3*p*m))
        {
        b=ceiling(j/3)
        for (k in 1:n)
        {
        if (data2[k,b]>knot2[i,j]) data1[k,j]=data2[k,b]-knot2[i,j] else data1[k,j]=0
        }
    }

data11=matrix(ncol=3*p*m,nrow=n)
q=1
for (t in 1:(3*p*m))
{
if (t<p*m+1) data11[1:n,q]=data1[,3*t-2] else if (t<2*p*m+1)
data11[1:n,q]=data1[,3*(t-p*m)-1] else data11[1:n,q]=data1[,3*(t-2*p*m)]
q=q+1
}

mx=matrix(0,ncol=(4*p+1)*m*l,nrow=n*m*l)
a=n
b=1
c=1
for (k in 1:l)
{
for (j in 1:m)
{
for (s in 0:(4*p))
{
if (s<1) mx[c:a,b+s]=1 else if (s<p+1) mx[c:a,b+s]=data2[1:n,j+(s-1)*m] else
mx[c:a,b+s]=data11[1:n,j+((s-1)*m)-(m*p)]
}
```

Lanjutan Lampiran 9. Program Estimasi Parameter dengan 3 Knot

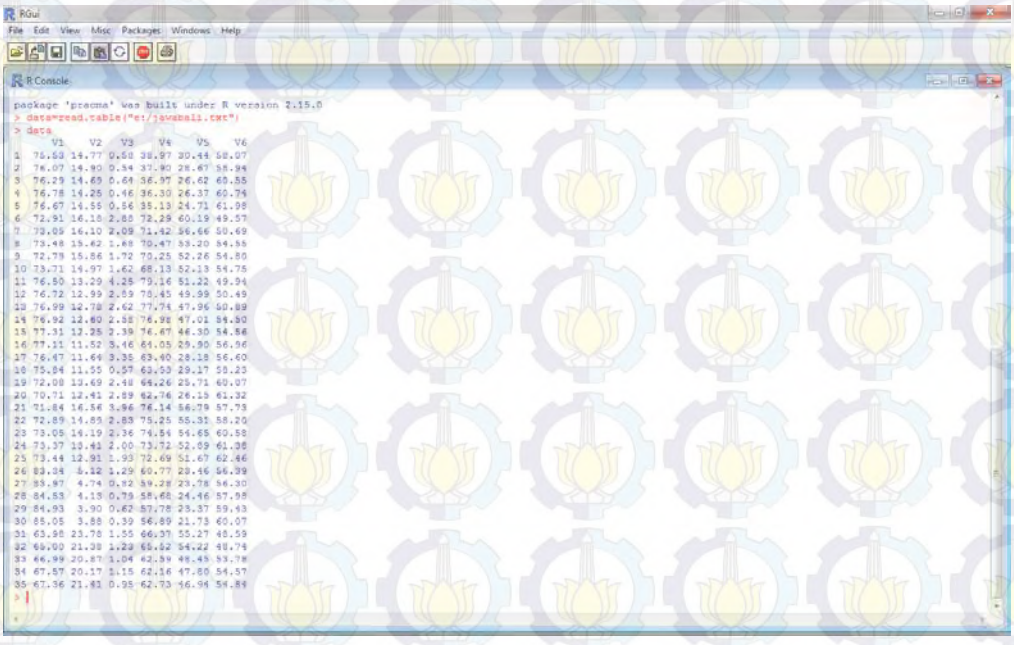
```
a=a+n
b=b+(4*p+1)
c=c+n
}
}

C=pinv(t(mx)%*%V%*%mx)
B=C%*%(t(mx)%*%V%*%y)
yhat=mx%*%B
SSE=0
SSR=0
  for (r in 1:(n*m*l))
  {
    sum=(y[r,]-yhat[r,])^2
    sum1=(yhat[r,]-mean(y))^2
    SSE=SSE+sum
    SSR=SSR+sum1
  }
Rsq=(SSR/(SSE+SSR))*100
MSE=SSE/n*m*l
A=mx%*%C%*%t(mx)
A1=(F-A)
A2=(sum(diag(A1))/n*m*l)^2
GCV=MSE/A2
cat("Knot Optimal=","\n")
print (knot2[bar,])
cat("Estimasi Parameter dengan Knot Optimal=","\n")
print (B)
cat("MSE=","\n")
print (MSE)
cat("GCV dari Knot Optimal=","\n")
print (GCV)
write.csv(B,file="e:/output parameter 3 knot.csv")
}
```

Lampiran 10. Langkah-langkah Penggunaan Program

1. Simpan data dalam format .txt. Susunan data dimulai dari variabel respon pertama, kedua, dan seterusnya, kemudian diikuti dengan variabel prediktor pertama, kedua, dan seterusnya
2. Aktifkan jendela program R
3. Aktifkan package : MASS dan pracma dengan cara klik Packages → Load Package → Pilih Package MASS dan pracma

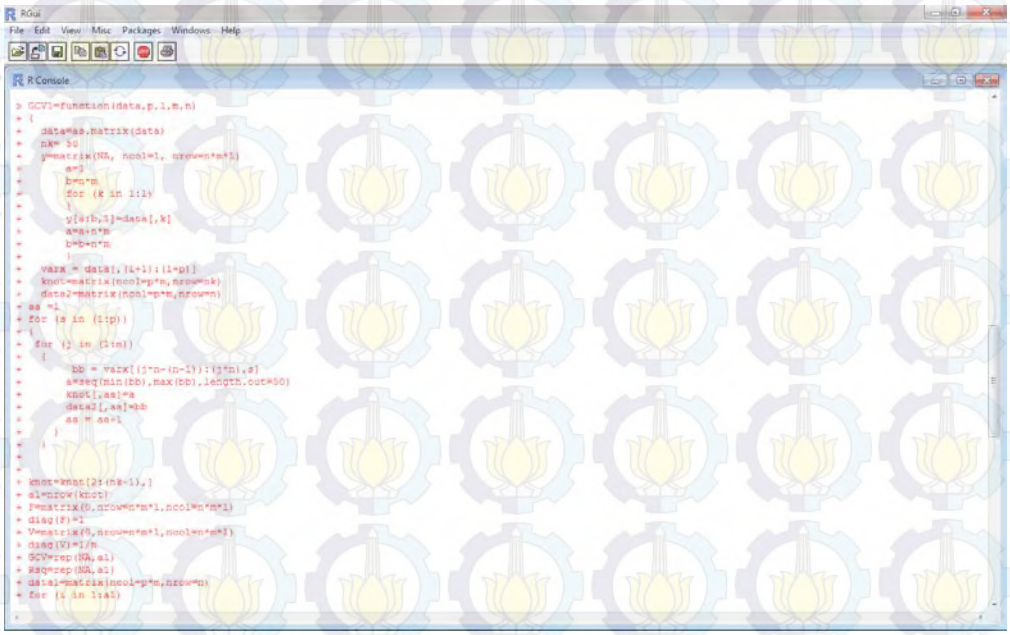


4. Panggil data dengan mengetikkan direktori penyimpanan dan nama file yang telah tersimpan dalam format .txt.



Contoh: data=read.table("e:/ jawabali.txt") yang berarti bahwa memanggil file di direktori "e:/" dengan nama file "jawabali.txt" dan disimpan di R Console dengan naman "data"

5. *Copy* dan *paste* program yang akan dijalankan ke dalam R Console

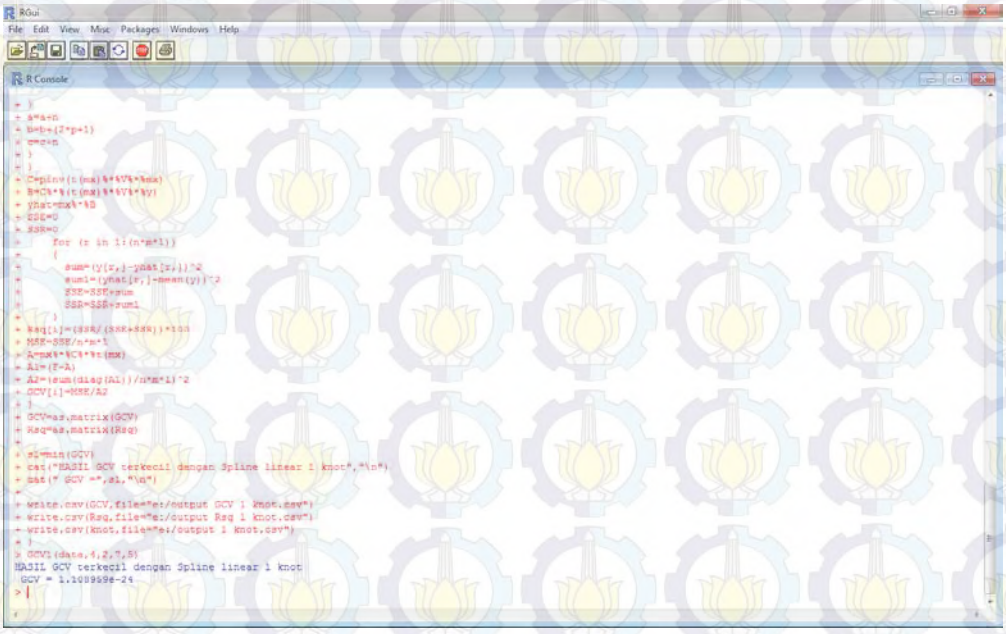


6. Panggil fungsi dengan memasukkan nilai-nilai yang menjadi kriteria fungsi tersebut :
   a. Program GCV knot membutuhkan kriteria : data,p,l,m,n
   b. Program estimasi parameter membutuhkan kriteria : data,p,l,m,n,bar

Keterangan :
data = nama tempat penyimpanan data pada R Console
p = banyaknya variabel prediktor
l = banyaknya variabel respon
m = banyaknya subyek
n = banyaknya ulangan pada setiap subyek
bar = nomor baris letak GCV terkecil

Contoh : GCV1(data,4,2,7,5) yang berarti menjalankan program pemilihan knot dari variabel yang tersimpan dengan nama "data" dimana terdiri dari 4 variabel prediktor, 2 variabel respon, 7 subjek, dengan 5 kali ulangan untuk masing-masing subyek.

7. Klik *Enter* dan tunggu hingga *running* program selesai. Hasil *running* program akan tersimpan di direktori e:/ pada komputer dan GCV terkecil muncul di R Console



Lampiran 11. Estimasi Parameter Kelompok Jawa Bali

Estimasi Parameter untuk Provinsi DKI Jakarta

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{110}	0,01735	α_{210}	0,00225
α_{1111}	-0,17193	α_{2111}	0,10295
α_{1121}	0,20193	α_{2121}	0,19326
α_{1131}	0,55656	α_{2131}	-0,1098
α_{1141}	0,91709	α_{2141}	0,1675
δ_{1111}	-0,17666	δ_{2111}	0,09899
δ_{1121}	-0,41271	δ_{2121}	0,13063
δ_{1131}	0,12007	δ_{2131}	-0,1408
δ_{1141}	-0,10026	δ_{2141}	0,02232
δ_{1112}	-0,13768	δ_{2112}	0,0639
δ_{1122}	-0,47596	δ_{2122}	0,32888
δ_{1132}	0,02568	δ_{2132}	0,15503
δ_{1142}	-0,1687	δ_{2142}	-0,0913
δ_{1113}	-0,04576	δ_{2113}	0,01811
δ_{1123}	-0,10223	δ_{2123}	-0,167
δ_{1133}	-0,15254	δ_{2133}	-0,2492
δ_{1143}	-0,0478	δ_{2143}	0,20402

Estimasi Parameter untuk Provinsi Jawa Barat

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{120}	0,00906	α_{220}	0,00317
α_{1211}	-0,14179	α_{2211}	0,08012
α_{1221}	0,10175	α_{2221}	0,32108
α_{1231}	0,72182	α_{2231}	-0,1265
α_{1241}	0,5367	α_{2241}	0,0116
δ_{1211}	-0,14952	δ_{2211}	0,073
δ_{1221}	-0,49271	δ_{2221}	0,09847
δ_{1231}	0,25603	δ_{2231}	-0,2791
δ_{1241}	0,07561	δ_{2241}	-0,145
δ_{1212}	-0,08603	δ_{2212}	0,01806
δ_{1222}	-0,21762	δ_{2222}	0,01984
δ_{1232}	-0,45195	δ_{2232}	0,22923
δ_{1242}	-0,04988	δ_{2242}	-0,1181
δ_{1213}	-0,0316	δ_{2213}	0,00264
δ_{1223}	-0,09472	δ_{2223}	0,01983
δ_{1233}	-0,20214	δ_{2233}	0,0169
δ_{1243}	-0,16998	δ_{2243}	0,08689

Estimasi Parameter untuk Provinsi Jawa Tengah

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{130}	0,01536	α_{230}	-0,0016
α_{1311}	-0,2055	α_{2311}	0,11066
α_{1321}	0,81682	α_{2321}	0,02632
α_{1331}	-0,15433	α_{2331}	0,22233
α_{1341}	0,44713	α_{2341}	-0,0107
δ_{1311}	-0,16624	δ_{2311}	0,07996
δ_{1321}	-0,2594	δ_{2321}	0,1031
δ_{1331}	-0,66467	δ_{2331}	0,20527
δ_{1341}	-0,31577	δ_{2341}	0,06852
δ_{1312}	0,08518	δ_{2312}	-0,0162

Estimasi Parameter untuk Provinsi DI Yogyakarta

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{140}	0,01724	α_{240}	-0,0007
α_{1411}	0,00457	α_{2411}	0,00598
α_{1421}	0,78144	α_{2421}	0,24675
α_{1431}	0,56717	α_{2431}	-0,204
α_{1441}	0,19398	α_{2441}	0,03564
δ_{1411}	-0,00218	δ_{2411}	0,00383
δ_{1421}	-0,30233	δ_{2421}	0,28592
δ_{1431}	0,10709	δ_{2431}	-0,169
δ_{1441}	-0,73982	δ_{2441}	0,06471
δ_{1412}	0,03482	δ_{2412}	-0,0266

Lanjutan Lampiran 11. Estimasi Parameter Kelompok Jawa Bali

Lanjutan Estimasi Parameter untuk Provinsi Jawa Tengah

δ_{1322}	0,22024	δ_{2322}	-0,1266
δ_{1332}	0,48906	δ_{2332}	-0,339
δ_{1342}	-0,20059	δ_{2342}	-0,0024
δ_{1313}	0,02813	δ_{2313}	-0,0051
δ_{1323}	0,03766	δ_{2323}	-0,0068
δ_{1333}	0,07441	δ_{2333}	-0,0135
δ_{1343}	0,01768	δ_{2343}	-0,0379

Lanjutan Estimasi Parameter untuk Provinsi DI Yogyakarta

δ_{1422}	-0,32183	δ_{2422}	0,24074
δ_{1432}	-0,1183	δ_{2432}	-0,0425
δ_{1442}	-0,49489	δ_{2442}	0,006
δ_{1413}	0,06009	δ_{2413}	-0,032
δ_{1423}	-0,11169	δ_{2423}	0,08484
δ_{1433}	-0,27908	δ_{2433}	0,05277
δ_{1443}	-0,04143	δ_{2443}	-0,143

Estimasi Parameter untuk Provinsi Jawa Timur

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{150}	0,01091	α_{250}	0,00053
α_{1511}	-0,08673	α_{2511}	0,16403
α_{1521}	0,57684	α_{2521}	0,12957
α_{1531}	0,17192	α_{2531}	0,10038
α_{1541}	0,38714	α_{2541}	-0,0308
δ_{1511}	-0,0986	δ_{2511}	0,16195
δ_{1521}	-0,20049	δ_{2521}	0,089
δ_{1531}	-0,36857	δ_{2531}	0,07017
δ_{1541}	-0,26188	δ_{2541}	-0,0448
δ_{1512}	-0,11757	δ_{2512}	0,20606
δ_{1522}	-0,01328	δ_{2522}	0,06763
δ_{1532}	-0,12007	δ_{2532}	0,06025
δ_{1542}	-0,13727	δ_{2542}	0,03962
δ_{1513}	-0,0938	δ_{2513}	0,0866
δ_{1523}	-0,15942	δ_{2523}	0,14718
δ_{1533}	-0,23659	δ_{2533}	0,21842
δ_{1543}	0,2527	δ_{2543}	-0,0163

Estimasi Parameter untuk Provinsi Bali

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{160}	0,02055	α_{260}	0,00169
α_{1611}	-0,19129	α_{2611}	-0,0004
α_{1621}	0,66601	α_{2621}	0,1358
α_{1631}	0,20181	α_{2631}	-0,0416
α_{1641}	0,74376	α_{2641}	-0,0393
δ_{1611}	-0,19362	δ_{2611}	-0,001
δ_{1621}	-0,47846	δ_{2621}	0,03993
δ_{1631}	-0,22746	δ_{2631}	-0,0782
δ_{1641}	-0,37217	δ_{2641}	-0,127
δ_{1612}	-0,13034	δ_{2612}	-0,0005
δ_{1622}	-0,26174	δ_{2622}	0,04324
δ_{1632}	-0,02078	δ_{2632}	-0,0767
δ_{1642}	-0,22038	δ_{2642}	-0,0419
δ_{1613}	-0,08206	δ_{2613}	-0,0007
δ_{1623}	-0,35375	δ_{2623}	-0,0031
δ_{1633}	0,04262	δ_{2633}	-0,07
δ_{1643}	0,14786	δ_{2643}	0,00606

Lanjutan Lampiran 11. Estimasi Parameter Kelompok Jawa Bali

Estimasi Parameter untuk Provinsi Banten

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{170}	0,01232	α_{270}	-0,0064
α_{1711}	-0,01925	α_{2711}	-0,0409
α_{1721}	0,19412	α_{2721}	0,75473
α_{1731}	0,5131	α_{2731}	-0,5061
α_{1741}	0,56585	α_{2741}	-0,0655
δ_{1711}	-0,03439	δ_{2711}	-0,0253
δ_{1721}	-0,48648	δ_{2721}	0,95782
δ_{1731}	-0,11295	δ_{2731}	-0,0751
δ_{1741}	-0,11155	δ_{2741}	0,37944
δ_{1712}	-0,13539	δ_{2712}	0,2104
δ_{1722}	-0,20216	δ_{2722}	0,2671
δ_{1732}	0,06918	δ_{2732}	-0,312
δ_{1742}	0,06523	δ_{2742}	-0,0083
δ_{1713}	-0,08873	δ_{2713}	0,15445
δ_{1723}	-0,48819	δ_{2723}	0,84288
δ_{1733}	-0,49675	δ_{2733}	0,82721
δ_{1743}	0,45212	δ_{2743}	-0,8436

Lampiran 12. Estimasi Parameter Kelompok Luar Jawa Bali I

Estimasi Parameter untuk Provinsi Aceh

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{110}	0,02148	α_{210}	0,00045
α_{1111}	-0,07867	α_{2111}	0,33805
α_{1121}	0,4701	α_{2121}	0,18277
α_{1131}	0,57632	α_{2131}	0,03111
α_{1141}	0,45088	α_{2141}	0,07654
δ_{1111}	-0,10304	δ_{2111}	0,32401
δ_{1121}	-0,76108	δ_{2121}	0,11849
δ_{1131}	-0,25296	δ_{2131}	0,00551
δ_{1141}	-0,39979	δ_{2141}	0,08784
δ_{1112}	-0,06147	δ_{2112}	0,31136
δ_{1122}	-0,64345	δ_{2122}	0,08271
δ_{1132}	-0,27134	δ_{2132}	-0,0061
δ_{1142}	-0,38497	δ_{2142}	0,11744
δ_{1113}	0,20653	δ_{2113}	0,36701
δ_{1123}	-0,41607	δ_{2123}	-0,1272
δ_{1133}	-0,24907	δ_{2133}	0,04602
δ_{1143}	-0,49828	δ_{2143}	0,12301

Estimasi Parameter untuk Provinsi Sumatera Utara

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{120}	0,01696	α_{220}	0,00029
α_{1211}	0,19987	α_{2211}	-0,1401
α_{1221}	0,36875	α_{2221}	0,38211
α_{1231}	0,57091	α_{2231}	-0,0829
α_{1241}	0,6175	α_{2241}	0,03838
δ_{1211}	0,16058	δ_{2211}	-0,1332
δ_{1221}	-0,71173	δ_{2221}	0,42897
δ_{1231}	0,07832	δ_{2231}	-0,0159
δ_{1241}	0,11568	δ_{2241}	-0,0572
δ_{1212}	0,13814	δ_{2212}	-0,1161
δ_{1222}	-0,78662	δ_{2222}	0,49302
δ_{1232}	0,35497	δ_{2232}	-0,2216
δ_{1242}	0,21369	δ_{2242}	-0,1424
δ_{1213}	0,08111	δ_{2213}	-0,0684
δ_{1223}	1,02929	δ_{2223}	-0,8674
δ_{1233}	0,5322	δ_{2233}	-0,3882
δ_{1243}	0,95615	δ_{2243}	-0,7732

Estimasi Parameter untuk Provinsi Sumatera Barat

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{130}	0,01455	α_{230}	-0,0019
α_{1311}	0,61912	α_{2311}	0,5901
α_{1321}	1,23791	α_{2321}	-0,1435
α_{1331}	-1,17049	α_{2331}	0,40855
α_{1341}	0,68804	α_{2341}	0,2475
δ_{1311}	0,59612	δ_{2311}	0,58171
δ_{1321}	0,27404	δ_{2321}	-0,1071
δ_{1331}	-1,68294	δ_{2331}	0,3957
δ_{1341}	0,11865	δ_{2341}	0,22191
δ_{1312}	0,59117	δ_{2312}	0,57089

Estimasi Parameter untuk Provinsi Sumatera Selatan

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{140}	0,0106	α_{240}	0,00181
α_{1411}	-1,31677	α_{2411}	0,60153
α_{1421}	0,89743	α_{2421}	0,02556
α_{1431}	-0,51415	α_{2431}	0,48748
α_{1441}	0,68392	α_{2441}	-0,1129
δ_{1411}	-1,16225	δ_{2411}	0,50639
δ_{1421}	0,74745	δ_{2421}	-0,3862
δ_{1431}	-0,62186	δ_{2431}	0,22728
δ_{1441}	0,19053	δ_{2441}	-0,1993
δ_{1412}	-0,98812	δ_{2412}	0,41459

Lanjutan Lampiran 12. Estimasi Parameter Kelompok Luar Jawa Bali I

Lanjutan Estimasi Parameter untuk Provinsi Sumatera Barat

δ_{1322}	0,23403	δ_{2322}	-0,1945
δ_{1332}	-1,7181	δ_{2332}	0,3189
δ_{1342}	0,11296	δ_{2342}	0,1208
δ_{1313}	0,53945	δ_{2313}	0,41567
δ_{1323}	2,24991	δ_{2323}	-0,2268
δ_{1333}	0,80811	δ_{2333}	0,55333
δ_{1343}	-0,14963	δ_{2343}	-0,4241

Lanjutan Estimasi Parameter untuk Provinsi Sumatera Selatan

δ_{1422}	1,30097	δ_{2422}	-0,678
δ_{1432}	-0,27528	δ_{2432}	0,04458
δ_{1442}	0,17296	δ_{2442}	-0,2045
δ_{1413}	-0,08102	δ_{2413}	-0,0255
δ_{1423}	-0,31734	δ_{2423}	-0,0309
δ_{1433}	-0,23084	δ_{2433}	0,00764
δ_{1443}	0,86789	δ_{2443}	-0,5694

Estimasi Parameter untuk Provinsi Lampung

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{150}	0,01205	α_{250}	0,00133
α_{1511}	0,11595	α_{2511}	0,20378
α_{1521}	0,36699	α_{2521}	0,23877
α_{1531}	0,4999	α_{2531}	0,0161
α_{1541}	0,44299	α_{2541}	0,02408
δ_{1511}	0,07677	δ_{2511}	0,17466
δ_{1521}	-0,50115	δ_{2521}	0,08196
δ_{1531}	-0,05911	δ_{2531}	-0,1445
δ_{1541}	-0,10552	δ_{2541}	-0,0024
δ_{1512}	0,0681	δ_{2512}	0,14891
δ_{1522}	-0,52243	δ_{2522}	0,01882
δ_{1532}	-0,09369	δ_{2532}	-0,2471
δ_{1542}	-0,09417	δ_{2542}	0,03298
δ_{1513}	0,06659	δ_{2513}	0,17258
δ_{1523}	-0,00479	δ_{2523}	0,07599
δ_{1533}	0,19221	δ_{2533}	-0,0103
δ_{1543}	-0,04827	δ_{2543}	-0,2584

Estimasi Parameter untuk Provinsi Nusa Tenggara Barat

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{160}	0,0105	α_{260}	-0,0003
α_{1611}	-0,07187	α_{2611}	-0,1547
α_{1621}	0,33001	α_{2621}	0,30168
α_{1631}	0,47238	α_{2631}	-0,0226
α_{1641}	0,55473	α_{2641}	-0,129
δ_{1611}	-0,09288	δ_{2611}	-0,1605
δ_{1621}	-0,39211	δ_{2621}	0,30586
δ_{1631}	0,03049	δ_{2631}	0,03388
δ_{1641}	0,08525	δ_{2641}	-0,0224
δ_{1612}	-0,08262	δ_{2612}	-0,1647
δ_{1622}	-0,35544	δ_{2622}	0,28588
δ_{1632}	-0,01101	δ_{2632}	0,07763
δ_{1642}	0,07458	δ_{2642}	0,06971
δ_{1613}	-0,06338	δ_{2613}	-0,0846
δ_{1623}	-0,23582	δ_{2623}	0,34207
δ_{1633}	-0,0797	δ_{2633}	0,33635
δ_{1643}	0,01025	δ_{2643}	0,33591

Lanjutan Lampiran 12. Estimasi Parameter Kelompok Luar Jawa Bali I

Estimasi Parameter untuk Provinsi Kalimantan Barat

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{170}	0,04214	α_{270}	-0,0117
α_{1711}	-0,17347	α_{2711}	0,24372
α_{1721}	0,28088	α_{2721}	0,4008
α_{1731}	0,41388	α_{2731}	-0,0177
α_{1741}	0,84982	α_{2741}	-0,1967
δ_{1711}	-0,04368	δ_{2711}	0,15384
δ_{1721}	-1,81054	δ_{2721}	0,77401
δ_{1731}	-1,38073	δ_{2731}	0,57217
δ_{1741}	-0,90891	δ_{2741}	0,25775
δ_{1712}	0,20195	δ_{2712}	-0,0141
δ_{1722}	-1,11752	δ_{2722}	0,37678
δ_{1732}	-1,5202	δ_{2732}	0,70406
δ_{1742}	-0,75841	δ_{2742}	0,18393
δ_{1713}	0,50539	δ_{2713}	-0,2426
δ_{1723}	3,07222	δ_{2723}	-2,0826
δ_{1733}	-0,56031	δ_{2733}	0,37349
δ_{1743}	0,74668	δ_{2743}	-0,5543

Estimasi Parameter untuk Provinsi Kalimantan Selatan

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{180}	0,01509	α_{280}	0,0035
α_{1811}	-0,11162	α_{2811}	0,13945
α_{1821}	0,35204	α_{2821}	0,24491
α_{1831}	0,38938	α_{2831}	-0,0557
α_{1841}	0,57252	α_{2841}	-0,00004
δ_{1811}	-0,11463	δ_{2811}	0,14353
δ_{1821}	-0,60889	δ_{2821}	0,06687
δ_{1831}	-0,32529	δ_{2831}	-0,1812
δ_{1841}	-0,26032	δ_{2841}	-0,1237
δ_{1812}	-0,10938	δ_{2812}	0,14842
δ_{1822}	-0,5217	δ_{2822}	0,13187
δ_{1832}	-0,24712	δ_{2832}	-0,1229
δ_{1842}	-0,29941	δ_{2842}	-0,0634
δ_{1813}	-0,05333	δ_{2813}	0,08838
δ_{1823}	-0,1895	δ_{2823}	0,45637
δ_{1833}	0,05224	δ_{2833}	0,17713
δ_{1843}	-0,18138	δ_{2843}	0,00872

Estimasi Parameter untuk Provinsi Sumatera Utara

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{190}	0,01506	α_{290}	0,00218
α_{1911}	-0,11224	α_{2911}	0,19916
α_{1921}	0,47986	α_{2921}	0,26813
α_{1931}	0,3852	α_{2931}	-0,1269
α_{1941}	0,71154	α_{2941}	-0,025
δ_{1911}	-0,12944	δ_{2911}	0,19999
δ_{1921}	-0,42664	δ_{2921}	0,15164
δ_{1931}	0,01186	δ_{2931}	-0,1493
δ_{1941}	-0,11773	δ_{2941}	-0,1705
δ_{1912}	-0,12841	δ_{2912}	0,1899

Estimasi Parameter untuk Provinsi Sulawesi Selatan

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
$\alpha_{1(10)0}$	0,00812	$\alpha_{2(10)0}$	0,00552
$\alpha_{1(10)11}$	-0,04159	$\alpha_{2(10)11}$	0,21935
$\alpha_{1(10)21}$	0,50311	$\alpha_{2(10)21}$	0,25396
$\alpha_{1(10)31}$	0,08876	$\alpha_{2(10)31}$	0,15286
$\alpha_{1(10)41}$	0,57823	$\alpha_{2(10)41}$	-0,0549
$\delta_{1(10)11}$	-0,09715	$\delta_{2(10)11}$	0,22935
$\delta_{1(10)21}$	0,02278	$\delta_{2(10)21}$	-0,1535
$\delta_{1(10)31}$	-0,28283	$\delta_{2(10)31}$	-0,0353
$\delta_{1(10)41}$	0,21607	$\delta_{2(10)41}$	-0,2592
$\delta_{1(10)12}$	-0,10473	$\delta_{2(10)12}$	0,2308

Lanjutan Lampiran 12. Estimasi Parameter Kelompok Luar Jawa Bali I

Lanjutan Estimasi Parameter untuk Provinsi Sumatera Utara

δ_{1922}	-0,42443	δ_{2922}	0,16682
δ_{1932}	0,02901	δ_{2932}	-0,1152
δ_{1942}	-0,11553	δ_{2942}	-0,1954
δ_{1913}	-0,10199	δ_{2913}	0,07043
δ_{1923}	-0,37595	δ_{2923}	0,11702
δ_{1933}	0,04458	δ_{2933}	0,11815
δ_{1943}	-0,0936	δ_{2943}	-0,4448

Lanjutan Estimasi Parameter untuk Provinsi Sulawesi Selatan

$\delta_{1(10)22}$	0,09098	$\delta_{2(10)22}$	-0,1884
$\delta_{1(10)32}$	-0,32339	$\delta_{2(10)32}$	0,0015
$\delta_{1(10)42}$	0,19786	$\delta_{2(10)42}$	-0,2299
$\delta_{1(10)13}$	-0,09762	$\delta_{2(10)13}$	0,175
$\delta_{1(10)23}$	0,39086	$\delta_{2(10)23}$	-0,3625
$\delta_{1(10)33}$	0,1959	$\delta_{2(10)33}$	-0,0876
$\delta_{1(10)43}$	0,16727	$\delta_{2(10)43}$	-0,1193

Estimasi Parameter untuk Provinsi Bangka Belitung

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
$\alpha_{1(11)0}$	0,01614	$\alpha_{2(11)0}$	-0,00002
$\alpha_{1(11)11}$	-0,32929	$\alpha_{2(11)11}$	0,27108
$\alpha_{1(11)21}$	0,32003	$\alpha_{2(11)21}$	0,36721
$\alpha_{1(11)31}$	-0,42886	$\alpha_{2(11)31}$	0,75396
$\alpha_{1(11)41}$	1,37899	$\alpha_{2(11)41}$	-0,7599
$\delta_{1(11)11}$	-0,30199	$\delta_{2(11)11}$	0,24249
$\delta_{1(11)21}$	-0,53611	$\delta_{2(11)21}$	0,19193
$\delta_{1(11)31}$	-0,70641	$\delta_{2(11)31}$	0,50461
$\delta_{1(11)41}$	0,39747	$\delta_{2(11)41}$	-0,6571
$\delta_{1(11)12}$	-0,26403	$\delta_{2(11)12}$	0,21389
$\delta_{1(11)22}$	-0,30166	$\delta_{2(11)22}$	0,01527
$\delta_{1(11)32}$	-0,38848	$\delta_{2(11)32}$	0,25451
$\delta_{1(11)42}$	0,23963	$\delta_{2(11)42}$	-0,5554
$\delta_{1(11)13}$	-0,2519	$\delta_{2(11)13}$	0,18211
$\delta_{1(11)23}$	0,39094	$\delta_{2(11)23}$	-0,6059
$\delta_{1(11)33}$	1,79367	$\delta_{2(11)33}$	-1,3779
$\delta_{1(11)43}$	-1,02706	$\delta_{2(11)43}$	0,58159

Estimasi Parameter untuk Provinsi Gorontalo

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
$\alpha_{1(12)0}$	0,01666	$\alpha_{2(12)0}$	-0,00353
$\alpha_{1(12)11}$	-0,05793	$\alpha_{2(12)11}$	-0,10302
$\alpha_{1(12)21}$	0,64575	$\alpha_{2(12)21}$	0,05393
$\alpha_{1(12)31}$	0,63212	$\alpha_{2(12)31}$	-0,22519
$\alpha_{1(12)41}$	0,03117	$\alpha_{2(12)41}$	0,35847
$\delta_{1(12)11}$	-0,09879	$\delta_{2(12)11}$	-0,0929
$\delta_{1(12)21}$	-0,72311	$\delta_{2(12)21}$	0,41225
$\delta_{1(12)31}$	0,04079	$\delta_{2(12)31}$	-0,09376
$\delta_{1(12)41}$	-0,66307	$\delta_{2(12)41}$	0,42779
$\delta_{1(12)12}$	-0,0935	$\delta_{2(12)12}$	-0,09255
$\delta_{1(12)22}$	-0,79927	$\delta_{2(12)22}$	0,49677
$\delta_{1(12)32}$	0,06308	$\delta_{2(12)32}$	-0,0923
$\delta_{1(12)42}$	-0,55676	$\delta_{2(12)42}$	0,32755
$\delta_{1(12)13}$	-0,04112	$\delta_{2(12)13}$	-0,08846
$\delta_{1(12)23}$	-1,18157	$\delta_{2(12)23}$	0,8997
$\delta_{1(12)33}$	-0,07403	$\delta_{2(12)33}$	0,0511
$\delta_{1(12)43}$	0,44007	$\delta_{2(12)43}$	-0,51524

Lanjutan Lampiran 12. Estimasi Parameter Kelompok Luar Jawa Bali I

Estimasi Parameter untuk Provinsi Sulawesi Barat

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
$\alpha_{1(13)0}$	0,01217	$\alpha_{2(13)0}$	0,01013
$\alpha_{1(13)11}$	0,45331	$\alpha_{2(13)11}$	-0,343
$\alpha_{1(13)21}$	0,2649	$\alpha_{2(13)21}$	0,21567
$\alpha_{1(13)31}$	-0,06134	$\alpha_{2(13)31}$	0,84656
$\alpha_{1(13)41}$	1,17246	$\alpha_{2(13)41}$	-0,77598
$\delta_{1(13)11}$	0,41035	$\delta_{2(13)11}$	-0,27288
$\delta_{1(13)21}$	-0,48011	$\delta_{2(13)21}$	-0,46432
$\delta_{1(13)31}$	-0,66176	$\delta_{2(13)31}$	0,28129
$\delta_{1(13)41}$	0,62543	$\delta_{2(13)41}$	-1,03334
$\delta_{1(13)12}$	0,40645	$\delta_{2(13)12}$	-0,17867
$\delta_{1(13)22}$	-0,35347	$\delta_{2(13)22}$	-0,41865
$\delta_{1(13)32}$	-0,67519	$\delta_{2(13)32}$	0,24678
$\delta_{1(13)42}$	0,5463	$\delta_{2(13)42}$	-0,90118
$\delta_{1(13)13}$	0,28512	$\delta_{2(13)13}$	0,34456
$\delta_{1(13)23}$	0,52867	$\delta_{2(13)23}$	-0,15698
$\delta_{1(13)33}$	-0,46412	$\delta_{2(13)33}$	0,02953
$\delta_{1(13)43}$	0,14542	$\delta_{2(13)43}$	-0,04253

Lampiran 13. Estimasi Parameter Kelompok Luar Jawa Bali II

Estimasi Parameter untuk Provinsi Riau

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{110}	0,02385	α_{210}	0,01382
α_{1111}	0,37963	α_{2111}	0,37642
α_{1121}	0,78818	α_{2121}	0,09439
α_{1131}	-0,0436	α_{2131}	0,28043
α_{1141}	0,45573	α_{2141}	0,14805
δ_{1111}	0,30672	δ_{2111}	0,33262
δ_{1121}	-0,6123	δ_{2121}	-0,7094
δ_{1131}	-0,8862	δ_{2131}	-0,2173
δ_{1141}	-0,6618	δ_{2141}	-0,4778
δ_{1112}	0,10517	δ_{2112}	0,25848
δ_{1122}	-0,3537	δ_{2122}	-0,4138
δ_{1132}	-0,8677	δ_{2132}	-0,2659
δ_{1142}	-0,2631	δ_{2142}	0,05979
δ_{1113}	0,15383	δ_{2113}	0,24715
δ_{1123}	-0,2243	δ_{2123}	-0,2661
δ_{1133}	-0,3862	δ_{2133}	-0,0072
δ_{1143}	0,03586	δ_{2143}	0,20191

Estimasi Parameter untuk Provinsi Jambi

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{120}	0,00889	α_{220}	0,00141
α_{1211}	-0,1675	α_{2211}	-0,107
α_{1221}	0,32313	α_{2221}	0,09217
α_{1231}	0,51519	α_{2231}	0,11242
α_{1241}	0,53894	α_{2241}	0,05363
δ_{1211}	-0,1712	δ_{2211}	-0,1065
δ_{1221}	-0,2126	δ_{2221}	-0,0212
δ_{1231}	0,07458	δ_{2231}	0,03893
δ_{1241}	0,08263	δ_{2241}	-0,0232
δ_{1212}	-0,1134	δ_{2212}	-0,0564
δ_{1222}	0,119	δ_{2222}	-0,2251
δ_{1232}	0,06026	δ_{2232}	0,00325
δ_{1242}	0,02706	δ_{2242}	-0,0581
δ_{1213}	-0,0798	δ_{2213}	-0,0369
δ_{1223}	0,02703	δ_{2223}	-0,1749
δ_{1233}	0,03732	δ_{2233}	0,00033
δ_{1243}	0,04975	δ_{2243}	-0,0554

Estimasi Parameter untuk Provinsi Bengkulu

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{130}	0,02725	α_{230}	-0,0169
α_{1311}	-0,215	α_{2311}	0,30463
α_{1321}	0,96867	α_{2321}	-0,4372
α_{1331}	0,11085	α_{2331}	0,38695
α_{1341}	0,25932	α_{2341}	0,39881
δ_{1311}	-0,2027	δ_{2311}	0,25962
δ_{1321}	-0,6168	δ_{2321}	0,49427
δ_{1331}	-1,012	δ_{2331}	1,05903
δ_{1341}	-0,8965	δ_{2341}	1,09597
δ_{1312}	0,4953	δ_{2312}	-0,4615

Estimasi Parameter untuk Provinsi Nusa Tenggara Timur

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{140}	0,01113	α_{240}	0,0079
α_{1411}	-0,6073	α_{2411}	0,3276
α_{1421}	0,71838	α_{2421}	0,04742
α_{1431}	0,22448	α_{2431}	0,08172
α_{1441}	0,19646	α_{2441}	0,38421
δ_{1411}	-0,6457	δ_{2411}	0,32633
δ_{1421}	-0,1596	δ_{2421}	-0,5129
δ_{1431}	0,01046	δ_{2431}	-0,0702
δ_{1441}	-0,2073	δ_{2441}	0,09602
δ_{1412}	0,00449	δ_{2412}	-0,1693

Lanjutan Lampiran 13. Estimasi Parameter Kelompok Luar Jawa Bali II

Lanjutan Estimasi Parameter untuk Provinsi Bengkulu

δ_{1322}	-0,574	δ_{2322}	0,59606
δ_{1332}	0,32175	δ_{2332}	-0,2438
δ_{1342}	-0,1511	δ_{2342}	0,39509
δ_{1313}	0,37771	δ_{2313}	-0,3526
δ_{1323}	0,25882	δ_{2323}	-0,2118
δ_{1333}	0,40698	δ_{2333}	-0,3415
δ_{1343}	2,02215	δ_{2343}	-1,9233

Lanjutan Estimasi Parameter untuk Provinsi Nusa Tenggara Timur

δ_{1422}	-0,6017	δ_{2422}	0,2994
δ_{1432}	0,01809	δ_{2432}	-0,0665
δ_{1442}	-0,2124	δ_{2442}	0,0616
δ_{1413}	0,00314	δ_{2413}	-0,1185
δ_{1423}	-0,8228	δ_{2423}	0,70557
δ_{1433}	0,02203	δ_{2433}	-0,0695
δ_{1443}	-0,308	δ_{2443}	0,22561

Estimasi Parameter untuk Provinsi Kalimantan Tengah

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{150}	0,01261	α_{250}	-0,0018
α_{1511}	1,4121	α_{2511}	-0,9987
α_{1521}	1,45636	α_{2521}	-0,5916
α_{1531}	-0,9777	α_{2531}	0,91042
α_{1541}	0,24595	α_{2541}	0,27659
δ_{1511}	1,34608	δ_{2511}	-0,9584
δ_{1521}	0,38194	δ_{2521}	-0,2976
δ_{1531}	-1,4888	δ_{2531}	0,94558
δ_{1541}	-0,3212	δ_{2541}	0,29322
δ_{1512}	0,47741	δ_{2512}	-0,335
δ_{1522}	-2,446	δ_{2522}	1,82226
δ_{1532}	1,71696	δ_{2532}	-1,3291
δ_{1542}	1,6614	δ_{2542}	-1,1076
δ_{1513}	0,33419	δ_{2513}	-0,2345
δ_{1523}	-0,08	δ_{2523}	0,11294
δ_{1533}	1,34247	δ_{2533}	-1,0309
δ_{1543}	2,65268	δ_{2543}	-1,808

Estimasi Parameter untuk Provinsi Kalimantan Timur

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{160}	0,00771	α_{260}	0,00963
α_{1611}	0,52419	α_{2611}	-1,1303
α_{1621}	0,16933	α_{2621}	0,33104
α_{1631}	0,78977	α_{2631}	-0,245
α_{1641}	0,49531	α_{2641}	0,20754
δ_{1611}	0,51551	δ_{2611}	-1,1303
δ_{1621}	-0,2505	δ_{2621}	-0,1348
δ_{1631}	0,50981	δ_{2631}	-0,585
δ_{1641}	0,12966	δ_{2641}	-0,444
δ_{1612}	0,47084	δ_{2612}	-0,9586
δ_{1622}	-0,3512	δ_{2622}	0,78877
δ_{1632}	0,47108	δ_{2632}	-0,6893
δ_{1642}	0,05209	δ_{2642}	-0,1017
δ_{1613}	0,34228	δ_{2613}	-0,6994
δ_{1623}	-0,448	δ_{2623}	1,25695
δ_{1633}	0,70362	δ_{2633}	-1,3187
δ_{1643}	-0,1725	δ_{2643}	0,48495

Lanjutan Lampiran 13. Estimasi Parameter Kelompok Luar Jawa Bali II

Estimasi Parameter untuk Provinsi Sulawesi Tengah

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{170}	0,01133	α_{270}	0,00104
α_{1711}	-0,3044	α_{2711}	0,22176
α_{1721}	0,32873	α_{2721}	0,33748
α_{1731}	0,75762	α_{2731}	-0,2707
α_{1741}	0,32913	α_{2741}	0,11201
δ_{1711}	-0,3423	δ_{2711}	0,1931
δ_{1721}	-0,4724	δ_{2721}	0,22619
δ_{1731}	0,27592	δ_{2731}	-0,3024
δ_{1741}	-0,1975	δ_{2741}	0,05137
δ_{1712}	-0,087	δ_{2712}	0,28156
δ_{1722}	-0,3261	δ_{2722}	-0,2655
δ_{1732}	0,03987	δ_{2732}	-0,3077
δ_{1742}	-0,2217	δ_{2742}	-0,1675
δ_{1713}	-0,0609	δ_{2713}	0,19709
δ_{1723}	-0,1509	δ_{2723}	-0,1519
δ_{1733}	-0,0658	δ_{2733}	-0,3105
δ_{1743}	-0,094	δ_{2743}	-0,1839

Estimasi Parameter untuk Provinsi Sulawesi Tenggara

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{180}	0,02175	α_{280}	-0,0004
α_{1811}	-0,434	α_{2811}	0,07077
α_{1821}	0,5587	α_{2821}	0,29589
α_{1831}	0,36062	α_{2831}	0,03694
α_{1841}	0,36953	α_{2841}	0,01037
δ_{1811}	-0,3727	δ_{2811}	0,02556
δ_{1821}	-0,7186	δ_{2821}	0,25766
δ_{1831}	-0,6275	δ_{2831}	0,09097
δ_{1841}	-0,5296	δ_{2841}	0,04276
δ_{1812}	0,36203	δ_{2812}	-0,2722
δ_{1822}	0,41143	δ_{2822}	-0,3217
δ_{1832}	-0,9581	δ_{2832}	0,40488
δ_{1842}	-0,6299	δ_{2842}	0,24427
δ_{1813}	0,25342	δ_{2813}	-0,1906
δ_{1823}	0,34329	δ_{2823}	-0,2581
δ_{1833}	-0,4025	δ_{2833}	0,24467
δ_{1843}	-0,6714	δ_{2843}	0,33854

Estimasi Parameter untuk Provinsi Maluku

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
α_{190}	0,01839	α_{290}	0,00807
α_{1911}	-0,475	α_{2911}	0,25702
α_{1921}	0,46833	α_{2921}	0,22346
α_{1931}	0,28408	α_{2931}	-0,1281
α_{1941}	0,80904	α_{2941}	0,32267
δ_{1911}	-0,5545	δ_{2911}	0,23251
δ_{1921}	-0,5598	δ_{2921}	-0,1968
δ_{1931}	-0,09	δ_{2931}	-0,2812
δ_{1941}	0,12918	δ_{2941}	0,03283
δ_{1912}	-0,5611	δ_{2912}	0,04185

Estimasi Parameter untuk Provinsi Papua

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
$\alpha_{1(10)0}$	0,01862	$\alpha_{2(10)0}$	-0,0149
$\alpha_{1(10)11}$	-3,8142	$\alpha_{2(10)11}$	3,3984
$\alpha_{1(10)21}$	1,6721	$\alpha_{2(10)21}$	-0,5385
$\alpha_{1(10)31}$	-1,3209	$\alpha_{2(10)31}$	0,98991
$\alpha_{1(10)41}$	0,19769	$\alpha_{2(10)41}$	-0,0797
$\delta_{1(10)11}$	-3,4852	$\delta_{2(10)11}$	3,09345
$\delta_{1(10)21}$	0,16962	$\delta_{2(10)21}$	0,66088
$\delta_{1(10)31}$	-0,8663	$\delta_{2(10)31}$	0,52453
$\delta_{1(10)41}$	-0,9364	$\delta_{2(10)41}$	0,82594
$\delta_{1(10)12}$	1,15172	$\delta_{2(10)12}$	-0,9919

Lanjutan Lampiran 13. Estimasi Parameter Kelompok Luar Jawa Bali II

Lanjutan Estimasi Parameter untuk Provinsi Maluku

δ_{1922}	-0,5045	δ_{2922}	0,38214
δ_{1932}	0,64502	δ_{2932}	0,33405
δ_{1942}	0,34197	δ_{2942}	0,25056
δ_{1913}	-0,3705	δ_{2913}	0,04173
δ_{1923}	-0,5008	δ_{2923}	0,51937
δ_{1933}	1,03344	δ_{2933}	0,7607
δ_{1943}	0,24929	δ_{2943}	0,23949

Lanjutan Estimasi Parameter untuk Provinsi Papua

$\delta_{1(10)22}$	-3,7904	$\delta_{2(10)22}$	3,78263
$\delta_{1(10)32}$	2,39587	$\delta_{2(10)32}$	-2,0933
$\delta_{1(10)42}$	0,57525	$\delta_{2(10)42}$	-0,7046
$\delta_{1(10)13}$	1,47463	$\delta_{2(10)13}$	-1,2212
$\delta_{1(10)23}$	-5,6614	$\delta_{2(10)23}$	5,25456
$\delta_{1(10)33}$	3,18239	$\delta_{2(10)33}$	-2,6518
$\delta_{1(10)43}$	0,40268	$\delta_{2(10)43}$	-0,4932

Estimasi Parameter untuk Provinsi Maluku Utara

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
$\alpha_{1(11)0}$	0,00205	$\alpha_{2(11)0}$	0,00712
$\alpha_{1(11)11}$	-0,1786	$\alpha_{2(11)11}$	-2,3956
$\alpha_{1(11)21}$	0,44112	$\alpha_{2(11)21}$	0,75829
$\alpha_{1(11)31}$	-0,3533	$\alpha_{2(11)31}$	-1,9732
$\alpha_{1(11)41}$	1,10472	$\alpha_{2(11)41}$	1,06231
$\delta_{1(11)11}$	-0,2449	$\delta_{2(11)11}$	-2,3413
$\delta_{1(11)21}$	0,13126	$\delta_{2(11)21}$	0,50871
$\delta_{1(11)31}$	-0,4675	$\delta_{2(11)31}$	-2,1869
$\delta_{1(11)41}$	0,80007	$\delta_{2(11)41}$	0,81971
$\delta_{1(11)12}$	-1,408	$\delta_{2(11)12}$	-1,2563
$\delta_{1(11)22}$	-0,9128	$\delta_{2(11)22}$	3,31352
$\delta_{1(11)32}$	-1,237	$\delta_{2(11)32}$	-1,5748
$\delta_{1(11)42}$	-1,6198	$\delta_{2(11)42}$	1,98107
$\delta_{1(11)13}$	-1,752	$\delta_{2(11)13}$	-0,6449
$\delta_{1(11)23}$	-1,3522	$\delta_{2(11)23}$	2,24323
$\delta_{1(11)33}$	-0,8993	$\delta_{2(11)33}$	-1,1916
$\delta_{1(11)43}$	-1,3144	$\delta_{2(11)43}$	2,72371

Estimasi Parameter untuk Provinsi Papua Barat

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
$\alpha_{1(12)0}$	-0,0004	$\alpha_{2(12)0}$	0,00789
$\alpha_{1(12)11}$	-0,6621	$\alpha_{2(12)11}$	0,84945
$\alpha_{1(12)21}$	-0,1077	$\alpha_{2(12)21}$	0,14178
$\alpha_{1(12)31}$	-1,277	$\alpha_{2(12)31}$	1,22594
$\alpha_{1(12)41}$	1,99519	$\alpha_{2(12)41}$	-0,4648
$\delta_{1(12)11}$	-0,5214	$\delta_{2(12)11}$	0,69074
$\delta_{1(12)21}$	0,0253	$\delta_{2(12)21}$	-0,4146
$\delta_{1(12)31}$	-1,2579	$\delta_{2(12)31}$	0,98114
$\delta_{1(12)41}$	2,01716	$\delta_{2(12)41}$	-0,8604
$\delta_{1(12)12}$	0,95517	$\delta_{2(12)12}$	-0,8365
$\delta_{1(12)22}$	1,42396	$\delta_{2(12)22}$	-1,0291
$\delta_{1(12)32}$	-1,111	$\delta_{2(12)32}$	0,79658
$\delta_{1(12)42}$	1,64711	$\delta_{2(12)42}$	-0,7618
$\delta_{1(12)13}$	0,34751	$\delta_{2(12)13}$	-0,3621
$\delta_{1(12)23}$	0,94267	$\delta_{2(12)23}$	-0,656
$\delta_{1(12)33}$	-1,0376	$\delta_{2(12)33}$	0,7043
$\delta_{1(12)43}$	1,01907	$\delta_{2(12)43}$	-0,5347

Lanjutan Lampiran 13. Estimasi Parameter Kelompok Luar Jawa Bali II

Estimasi Parameter untuk Provinsi Kepulauan Riau

Parameter untuk Respon Pertama		Parameter untuk Respon Kedua	
$\alpha_{1(13)0}$	0,03074	$\alpha_{2(13)0}$	-0,0079
$\alpha_{1(13)11}$	0,2597	$\alpha_{2(13)11}$	-0,1304
$\alpha_{1(13)21}$	0,19763	$\alpha_{2(13)21}$	0,17014
$\alpha_{1(13)31}$	0,52314	$\alpha_{2(13)31}$	-0,0072
$\alpha_{1(13)41}$	1,09347	$\alpha_{2(13)41}$	-0,1027
$\delta_{1(13)11}$	0,21984	$\delta_{2(13)11}$	-0,1163
$\delta_{1(13)21}$	-0,983	$\delta_{2(13)21}$	0,40601
$\delta_{1(13)31}$	0,08639	$\delta_{2(13)31}$	0,05882
$\delta_{1(13)41}$	-0,5283	$\delta_{2(13)41}$	0,31965
$\delta_{1(13)12}$	0,01708	$\delta_{2(13)12}$	-0,0064
$\delta_{1(13)22}$	0,80415	$\delta_{2(13)22}$	-0,5433
$\delta_{1(13)32}$	0,17635	$\delta_{2(13)32}$	-0,0267
$\delta_{1(13)42}$	-0,6269	$\delta_{2(13)42}$	0,38951
$\delta_{1(13)13}$	0,01069	$\delta_{2(13)13}$	-0,0041
$\delta_{1(13)23}$	0,48223	$\delta_{2(13)23}$	-0,3116
$\delta_{1(13)33}$	0,1391	$\delta_{2(13)33}$	-0,041
$\delta_{1(13)43}$	-0,6651	$\delta_{2(13)43}$	0,42004

Lampiran 14. Pengaruh Variabel Prediktor di Kelompok Jawa Bali

Provinsi	Knot	Segmen			
	x_1	I	II	III	IV
DKI Jakarta	0,463673	−	−	−	−
	0,507755	+	+	+	+
	0,595918				
Jawa Barat	1,645714	−	−	−	−
	1,954286	+	+	+	+
	2,571429				
Jawa Tengah	2,427959	−	−	−	−
	2,883469	+	+	+	+
	3,79449				
DI Yogyakarta	0,62898	+	+	+	+
	1,336735	+	+	−	−
	2,752245				
Jawa Timur	1,971429	−	−	−	−
	2,468571	+	+	+	+
	3,462857				
Bali	0,408367	−	−	−	−
	0,628776	−	−	−	−
	1,069592				
Banten	0,962245	−	−	−	−
	1,109184	−	−	+	+
	1,403061				

Provinsi	Knot	Segmen			
	x_2	I	II	III	IV
DKI Jakarta	35,20837	+	−	−	−
	36,14878	+	+	+	+
	38,02959				
Jawa Barat	68,2149	+	−	−	−
	69,23367	+	+	+	+
	71,27122				
Jawa Tengah	76,72082	+	+	+	+
	77,33061	+	+	+	−
	78,5502				
DI Yogyakarta	62,79061	+	+	+	+
	63,15796	+	+	+	+
	63,89265				
Jawa Timur	72,76041	+	+	+	+
	73,60531	+	+	+	+
	75,2951				
Bali	56,96918	+	+	−	−
	57,91939	+	+	+	+
	59,8198				
Banten	62,24592	+	−	−	−
	63,27694	+	+	+	+
	65,33898				

Lanjutan Lampiran 14. Pengaruh Variabel di Kelompok Jawa Bali

Provinsi	Knot	Segmen			
	x_3	I	II	III	IV
DKI Jakarta	24,82694	+	+	+	+
	26,2302				
	29,03673	−	−	−	−
Jawa Barat	52,29449	+	+	+	+
	54,26837				
	58,21612	−	−	−	−
Jawa Tengah	46,40041	−	−	−	−
	47,60531				
	50,0151	+	+	+	+
DI Yogyakarta	25,79551	+	+	+	+
	26,82163				
	28,87388	−	−	−	−
Jawa Timur	51,77449	+			
	53,02837		−	−	−
	55,53612	+	+	+	+
Bali	21,78571	+			
	22,45429		−	−	−
	23,79143	−	−	−	−
Banten	47,11	+	+	+	
	49,15				−
	53,23	−	−	−	−

Provinsi	Knot	Segmen			
	x_4	I	II	III	IV
DKI Jakarta	58,1498	+	+	+	+
	59,10735				
	61,02245	+	+	+	+
Jawa Barat	49,67673	+	+	+	+
	50,95755				
	53,51918	+	−	−	−
Jawa Tengah	50,03429	+	+		
	51,16571			−	−
	53,42857	−	+	+	+
DI Yogyakarta	56,69633	+			
	57,85224		−	−	−
	60,16408	+	+	+	−
Jawa Timur	57,82653	+	+		+
	58,9849			−	
	61,30163	−	−	−	−
Bali	56,37694	+	+	+	+
	57,3002				
	59,14673	−	−	−	−
Banten	48,71755	+	+	+	+
	50,24816				
	53,30939	−	+	+	−

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BIODATA PENULIS

Penulis dengan nama lengkap Dita Amelia lahir di Kec. Besuki Kabupaten Situbondo tanggal 02 Februari 1991 dari pasangan suami istri, Haryono dan Atik Widayati. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu di SD Negeri 1 Besuki, SMP Negeri 1 Banyuglugur, SMA Negeri 1 Situbondo, dan Jurusan Statistika FMIPA ITS angkatan 2009. Kemudian penulis melanjutkan studi untuk program magister di jurusan yang sama setelah diterima melalui program Beasiswa *Fasttrack* ITS pada Tahun 2012. Penulis diterima dengan NRP 1213201910. Selama menempuh masa perkuliahan, penulis berperan aktif dalam organisasi dan juga kegiatan pengembangan diri. Penulis pernah menjabat sebagai Kepala Departemen Keilmiahan HIMASTA-ITS Tahun 2011/2012, staff Departemen PSDM BEM FMIPA-ITS Tahun 2010/2011, dan staff Departemen Keilmiahan HIMASTA-ITS Tahun 2010/2011. Penulis juga aktif dalam kegiatan karya tulis salah satunya dengan mengikuti KATULISTIWA (Kompetisi Karya Tulis Mahasiswa Tingkat Nasional) ke-5 sebagai juara III, dan PKM (Program Kreativitas Mahasiswa) dari DIKTI. Beberapa pencapaian dari penulis antara lain Best 25 Delegates International Conference ICMSS (Indonesian Capital Market Student Studies) yang diadakan oleh Fakultas Ekonomi - Universitas Indonesia, 20 mahasiswa terpilih dalam program Danamon Young Leader Award 2012, peserta program Indonesia Leadership Camp-Indonesia Leadership Development Program yang diadakan oleh Universitas Indonesia pada Tahun 2012, dan program XL Future Leader The Scholarship Tahun 2012. Penulis juga mengikuti beberapa *conference* diantaranya sebagai *attending author* dalam CISAK (Conference of Indonesian Student Association in Korea) 2013 yang dilaksanakan di KAIST (Korean Advanced Institute of Technology) Daejeon, Korea Selatan. Saat ini penulis bekerja di Sekretariat Badan Penelitian dan Pengembangan (Balitbang) Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan. Penulis dapat dihubungi melalui ditaamelia91@gmail.com.