



ITS
Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember

TUGAS AKHIR -TE 141599

**DESAIN KONTROLER PID DAN *FUZZY* TAKAGI-SUGENO
UNTUK KONTROL *TRACKING* PADA SISTEM PENDULUM
KERETA**

Aditya Bayu Erwindu
NRP 2214 105 064

Dosen Pembimbing
Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.

JURUSAN TEKNIK ELEKTRO
Fakultas Teknologi Industri
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017



FINAL PROJECT -TE 141599

***PID AND FUZZY TAKAGI-SUGENO CONTROLLER DESIGN
FOR TRACKING CONTROL OF PENDULUM-CART
SYSTEM***

Aditya Bayu Erwindu
NRP 2214 105 064

Supervisor
Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.

***ELECTRICAL ENGINEERING DEPARTMENT
Faculty of Industrial Technology
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017***

PERNYATAAN KEASLIAN TUGAS AKHIR

Dengan ini saya menyatakan bahwa isi sebagian maupun keseluruhan Tugas Akhir saya dengan judul “**Desain Kontroler PID dan Fuzzy Takagi-Sugeno untuk Kontrol Tracking pada Sistem Pendulum Kereta**” adalah benar benar hasil karya intelektual mandiri, diselesaikan tanpa menggunakan bahan-bahan yang tidak diijinkan dan bukan merupakan karya pihak lain yang saya akui sebagai karya sendiri.

Semua referensi yang dikutip maupun dirujuk telah ditulis secara lengkap pada daftar pustaka. Apabila ternyata pernyataan ini tidak benar, saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Surabaya, 05 Januari 2017

Aditya Bayu Erwindu
2214105064

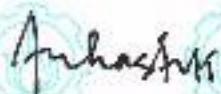
DESAIN KONTROLER PID DAN FUZZY TAKAGI-SUGENO UNTUK KONTROL TRACKING PADA SISTEM PENDULUM KERETA

TUGAS AKHIR

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Teknik
Pada
Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan
Jurusan Teknik Elektro
Fakultas Teknologi Industri
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Menyetujui :

Dosen Pembimbing,



Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.

NIP: 196808121994032001



DESAIN KONTROLER PID DAN FUZZY TAKAGI-SUGENO UNTUK KONTROL TRACKING PADA SISTEM PENDULUM KERETA

Nama : Aditya Bayu Erwindu
NRP : 2214 105 064
Pembimbing : Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.
NIP : 1968 08 12 1994 03 2001

ABSTRAK

Sistem pendulum kereta memiliki karakteristik yang tidak stabil dan nonlinear. Tugas Akhir ini membahas kontrol *tracking* dari sistem pendulum kereta dengan menggunakan struktur kontrol yang konvensional, yaitu kontroler PID. Permasalahan yang akan diselesaikan dalam desain struktur kontrol *tracking* ini adalah bagaimana membuat posisi kereta dapat mengikuti sinyal referensi yang diberikan dengan tetap mempertahankan batang pendulum pada posisi equilibriumnya yaitu pada sudut nol radian. Model nonlinear dari sistem pendulum kereta direpresentasikan dengan menggunakan model *fuzzy* Takagi-Sugeno. Berdasarkan model tersebut, aturan kontroler disusun menggunakan konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC) berbasis teknik kontrol optimal. Hasil simulasi menunjukkan bahwa posisi kereta dapat mengikuti sinyal referensi yang diberikan. Respon sistem dengan kontroler PID yang diberi masukan sinyal referensi step memberikan performansi *tracking* terbaik, dengan *Integral Absolute Error* (IAE) terkecil diantara sinyal referensi lain, sebesar 0,1302.

Kata Kunci : Sistem Pendulum Kereta, PID, Kontrol Optimal, *Fuzzy* Takagi-Sugeno, *Tracking*

PID AND FUZZY TAKAGI-SUGENO CONTROLLER DESIGN FOR TRACKING CONTROL OF PENDULUM-CART SYSTEM

Name : Aditya Bayu Erwindu
Register Number : 2214 105 064
Supervisor : Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.
ID Number : 1968 08 12 1994 03 2001

ABSTRACT

The Pendulum-Cart system has an unstable and non-linear characteristic. This final project is mainly talk about the using of an conventional PID controller on the Pendulum-cart system for it's tracking control. The tracking problem that could be solved by this system is how to make the cart of the Pendulum-Cart System follows the reference signal given with still can hold the position of the pendulum on its equilibrium point. The non linear model of Pendulum-Cart system is represented by a Takagi-Sugeno fuzzy model. The stabilizing controller is designed using the concept of Parallel Distributed Compensation (PDC) with an Optimal Control technique-based. The simulation results show that the reference signal given could be followed by the response of the Cart's Position. The PID tracking controller system response using the step signal reference gives the best tracking performance of the system, It gives 0.1302 of Integral Absolute Error (IAE) value which is the smallest among the other references.

Keywords: *Pendulum-Cart System, PID Controller, Optimal Control, Takagi-Sugeno Fuzzy model, Tracking Control*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbilalamin, Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke-hadirat Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan tepat waktu. Tugas Akhir ini disusun untuk memenuhi syarat menyelesaikan pendidikan Strata-1 pada bidang studi Teknik Sistem Pengaturan, Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember dengan judul:

DESAIN KONTROLER PID DAN FUZZY TAKAGI-SUGENO UNTUK KONTROL TRACKING PADA SISTEM PENDULUM KERETA

Dalam pengerjaan Tugas Akhir ini penulis mendapat banyak sekali bantuan serta dukungan dari berbagai pihak. Dengan segala hormat, penulis mengucapkan terima kasih kepada: Papa dan Mama penulis yang senantiasa memberi dukungan baik spiritual maupun material yang tak ternilai harganya; Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T., selaku dosen pembimbing yang telah dengan sabar membimbing penulis dengan segala kekurangan yang dimiliki penulis dalam penyelesaian Tugas Akhir ini; Teman-teman seangkatan kelas Lintas Jalur Sistem Pengaturan serta semua pihak yang memberikan dukungan penuh kepada penulis dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.

“Tak ada gading yang tak retak”, penulis menyadari bahwa setiap karya, baik itu berupa karya tulis hingga karya seni sekalipun pasti memiliki kekurangan, begitu pula dengan pengerjaan Tugas Akhir ini yang masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis memohon maaf yang sebesar-besarnya atas segala kekurangan yang ada di dalam buku Tugas Akhir ini. Akhir kata, semoga dengan terselesaikannya Tugas Akhir ini dapat memberikan manfaat positif bagi semua pihak, terutama bagi kemajuan dan perkembangan teknologi di negeri tercinta kita, Indonesia.

Surabaya, 05 Januari 2017

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN TUGAS AKHIR	iii
HALAMAN PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xvii
DAFTAR TABEL.....	xix
BAB 1 PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan Penelitian	2
1.5 Metodologi	2
1.6 Sistematika Penulisan	3
1.7 Relevansi	4
BAB 2 TEORI PENUNJANG	5
2.1 Tinjauan Pustaka	5
2.2 Sistem Pendulum Kereta.....	6
2.2.1 Model Fisik Sistem Pendulum Kereta.....	8
2.2.2 Model Matematis Sistem Pendulum Kereta.....	9
2.3 Linearisasi	10
2.4 Teori Logika <i>Fuzzy</i>	13
2.4.1 Himpunan <i>Fuzzy</i>	13
2.4.2 Fungsi Keanggotaan.....	13
2.4.2.1 Fungsi Keanggotaan Segitiga.....	14
2.4.2.2 Fungsi Keanggotaan Trapesium.....	14
2.4.2.3 Fungsi Keanggotaan Gaussian	14
2.4.2.4 Fungsi Keanggotaan <i>Generalized Belt</i>	15
2.4.3 Operasi Himpunan Fuzzy.....	16
2.4.4 Sistem Inferensi Fuzzy.....	18
2.5 Model <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno.....	19
2.6 Kontroler PID.....	22
2.6.1 Kontroler Proporsional (P)	22

2.6.2 Kontroler Integral (I)	23
2.6.3 Kontroler Derivative (D)	25
2.6.4 Kontroler PID.....	26
2.7 Sistem Kontrol <i>Tracking</i>	27
2.7.1 <i>Linear Quadratic Regulator (LQR)</i>	28
BAB 3 PERANCANGAN SISTEM	33
3.1 Linearisasi Model Pendulum.....	33
3.2 Permodelan <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno	35
3.3 Desain <i>Fuzzy-LQR</i>	37
3.3.1 Pemilihan Matriks Pembobot Q dan R	38
3.3.2 Penentuan gain <i>feedback</i>	39
3.4 Penentuan Parameter PID / <i>Tuning</i> PID	40
3.5 Diagram Blok Sistem Pegaturan	41
3.6 Perancangan Simulasi	41
BAB 4 HASIL DAN ANALISA.....	45
4.1 Hasil Simulasi	45
4.1.1 Hasil Simulasi dengan Variasi Nilai Awal Sudut Pendulum	46
4.1.1.1 Simulasi Menggunakan Sinyal Step	46
4.1.1.2 Simulasi Menggunakan Sinyal Sinus	49
4.1.1.3 Simulasi Menggunakan Sinyal <i>Square-wave</i>	52
4.1.2 Hasil Simulasi dengan Variasi Nilai Awal Posisi Kereta.....	54
4.1.2.1 Simulasi Menggunakan Sinyal Step	55
4.1.2.2 Simulasi Menggunakan Sinyal Sinus	57
4.1.2.3 Simulasi Menggunakan Sinyal <i>Square-wave</i>	60
4.2 Perbandingan Respon Hasil Simulasi	62
4.2.1 Simulasi Menggunakan Sinyal Step	63
4.2.2 Simulasi Menggunakan Sinyal Sinus	65
BAB 5 PENUTUP.....	67
5.1 Kesimpulan	67
5.2 Saran	67
DAFTAR PUSTAKA	69
LAMPIRAN A.....	71

LAMPIRAN B	80
RIWAYAT HIDUP	89

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Sistem Pendulum Kereta Secara Keseluruhan.....	7
Gambar 2.2	Gaya – gaya pada Sistem Pendulum Kereta	7
Gambar 2.3	Linearisasi $y = f(x)$ pada Sekitar x^*	11
Gambar 2.4	Himpunan Fuzzy dan Derajat Keanggotaanya.....	13
Gambar 2.5	Fungsi Keanggotaan Segitiga $\{a, b, c\} = \{7, 15, 20\}$	15
Gambar 2.6	Fungsi Keanggotaan Trapesium	15
Gambar 2.7	Fungsi Keanggotaan <i>Gaussian</i>	16
Gambar 2.8	Fungsi Keanggotaan <i>Generalized Bell</i>	16
Gambar 2.9	Himpunan <i>Fuzzy</i> A dan B	17
Gambar 2.10	Operasi pada Himpunan <i>Fuzzy Min</i>	17
Gambar 2.11	Operasi pada Himpunan <i>Fuzzy Max</i>	18
Gambar 2.12	Kontroler <i>Fuzzy</i>	18
Gambar 2.13	Konsep <i>Parallel Distributed Compensation</i> (PDC).....	20
Gambar 2.14	Kontroler Proporsional	23
Gambar 2.15	Kontroler Integral	24
Gambar 2.16	Kontroler Derivative	25
Gambar 2.17	Kontroler PID	26
Gambar 2.18	Struktur Sistem Servo <i>type 1</i>	27
Gambar 3.1	Fungsi Keanggotaan M_1, M_2 dan M_3	37
Gambar 3.2	Susunan Closed Loop Sinyal referensi, Gain proporsional, dan system pendulum kereta.....	40
Gambar 3.3	Penentuan Periode Critical.....	40
Gambar 3.4	Struktur Sistem <i>tracking</i> PID.....	41
Gambar 3.5	Diagram Simulink Sistem Kntrol pada Simulasi	42
Gambar 3.6	Diagram Simulink Sistem Kontrol Pemanding pada Simulasi	43
Gambar 4.1	Posisi Kereta dengan Sinyal Referensi Step	48
Gambar 4.2	Posisi Pendulum dengan Sinyal Referensi Step.....	48
Gambar 4.3	Sinyal Kontrol dengan Sinyal Referensi Step.....	49
Gambar 4.4	Posisi Kereta dengan Sinyal Referensi Sinus	50
Gambar 4.5	Posisi Pendulum dengan Sinyal Referensi Sinus	51
Gambar 4.6	Sinyal Kontrol dengan Sinyal Referensi Sinus	52
Gambar 4.7	Posisi Kereta dengan Sinyal Referensi <i>Square Wave</i> .53	53
Gambar 4.8	Sudut Pendulum dengan Sinyal Referensi <i>Square Wave</i>	53
Gambar 4.9	Sinyal Kontrol dengan Sinyal Referensi <i>Square Wave</i>	54
Gambar 4.10	Respon Posisi Kereta dengan Sinyal Referensi Step Variasi.	55

Gambar 4.11	Respon Sudut Pendulum dengan Sinyal Referensi Step Variasi	56
Gambar 4.12	Sinyal Kontrol Referensi Step Variasi.....	57
Gambar 4.13	Respon Posisi Kereta Sinya Referensi Sinus Variasi ...	58
Gambar 4.14	Respon Sudut Pendulum Sinyal Referensi Sinus Variasi	59
Gambar 4.15	Sinyal Kontrol Referensi Sinus Variasi.....	59
Gambar 4.16	Respon Posisi Kereta Sinyal Referensi Square-Wave (Variasi).....	60
Gambar 4.17	Respon Sudut Pendulum Sinyal Referensi Square-Wave (Variasi).....	61
Gambar 4.18	Sinyal Kontrol Referensi <i>Square-Wave</i> (Variasi).....	62
Gambar 4.19	Perbandingan sistem dengan Sinyal Referensi Step	63
Gambar 4.20	Perbandingan Respon x2 Sinyal Referensi Step	64
Gambar 4.21	Perbandingan Sistem dengan Sinyal Referensi Sinus ..	65
Gambar 4.22	Perbandingan Respon x2 Sinyal Referensi Sinus	66

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Parameter – parameter Sistem Pendulum Kereta	8
Tabel 3.1 Ziegler Nichols tuning rule.....	41
Tabel 4.1 Nilai <i>Overshoot</i> dan <i>Undershoot</i> untuk Respon Sistem dengan Referensi Sinyal Step	49
Tabel 4.2 Nilai <i>Overshoot</i> dan <i>Undershoot</i> untuk Respon Sistem dengan Referensi Sinyal Sinus	52
Tabel 4.3 Nilai <i>Overshoot</i> dan <i>Undershoot</i> untuk Respon Sistem dengan Referensi Sinyal <i>Square-wave</i>	54
Tabel 4.4 Nilai <i>Overshoot</i> dan <i>Undershoot</i> untuk Respon Sistem dengan Referensi Sinyal Step Variasi.....	57
Tabel 4.5 Nilai <i>Overshoot</i> dan <i>Undershoot</i> untuk Respon Sistem dengan Referensi Sinyal Sinus Variasi	60
Tabel 4.6 Nilai <i>Overshoot</i> dan <i>Undershoot</i> untuk Respon Sistem dengan Referensi Sinyal <i>Square-Wave</i> Variasi	62
Tabel 4.7 Perbandingan Nilai <i>Overshoot</i> dan <i>Undershoot</i> dengan Sinyal Referensi Step	65
Tabel 4.8 Perbandingan Nilai <i>Overshoot</i> dan <i>Undershoot</i> dengan Sinyal Referensi Sinus ..	67

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seiring dengan semakin berkembangnya teknologi, maka semakin banyak pula sistem-sistem yang memiliki karakteristik *non-linear*. Dibutuhkan teknik kontrol yang tepat agar sistem-sistem *non-linear* dapat memberikan respon yang baik. Sistem pendulum kereta adalah salah satu contoh sistem *non-linear* dan tidak stabil, sehingga untuk mengontrolnya diperlukan teknik kontrol yang tidak mudah jika dibandingkan dengan teknik kontrol pada sistem yang *linear* dan stabil. Dinamika antara pendulum, kereta dan gaya gesek yang bekerja antara kereta dan rel menyebabkan sistem pendulum kereta memiliki karakteristik *non-linear* yang tinggi. Selain itu, panjang rel dan sinyal kontrol yang dapat diterapkan juga terbatas.

Ada tiga masalah kontrol pada sistem pendulum kereta, yaitu *swing-up*, stabilisasi, dan *tracking*. *Swing-up* adalah proses pengayunan batang pendulum dari posisi menggantung ke posisi terbalik. Stabilisasi adalah usaha yang dilakukan untuk menjaga posisi batang pendulum tetap dalam posisi terbalik serta menjaga pergerakan kereta sekecil mungkin. Adapun *tracking* adalah usaha yang dilakukan untuk memaksa kereta bergerak mengikuti sinyal referensi yang diberikan dengan tetap mempertahankan batang pendulum tetap dalam posisi terbaliknya.

Pada Tugas Akhir ini akan dirancang sebuah kontroler PID klasik dan permodelan stabilisasi *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) yang dirancang untuk dapat mengatasi masalah *tracking* pada sistem pendulum kereta.

1.2 Perumusan Masalah

Bahasan permasalahan ini merupakan referensi dalam merancang sistem kontrol yang dapat membuat kereta mampu bergerak mengikuti sinyal referensi yang diberikan dengan tetap mempertahankan batang pendulum dalam posisi terbalik. Oleh karena itu, diperlukan suatu kontroler yang dapat mengupayakan agar batang pendulum dapat mempertahankan posisi terbaliknya di sudut 0 rad, dan menjamin kestabilan sistem dengan mengikuti sinyal referensi yang ditentukan. Penentuan nilai *gain* pada kontroler merupakan salah satu *point* penting dalam mengaplikasikan teknik kontrol, karena nilai dari *gain*

memberikan pengaruh besar terhadap hasil respon dari sistem yang dikontrol.

1.3 Batasan Masalah

Suatu proses penelitian dapat dikatakan berkualitas ketika penelitian tersebut dapat memaparkan ruang lingkup penelitian dengan jelas, fokus, dan spesifik. Pada Tugas Akhir ini terdapat batasan-batasan masalah diantaranya meliputi:

1. Jenis Sistem Pendulum Kereta yang akan di simulasikan merupakan sistem pendulum kereta dengan jenis “*Digital Pendulum Mechanical Unit 33-200*” dari *Feedback Instrument Ltd*
2. Struktur kontrol *tracking* menggunakan kontroler PID dengan model *fuzzy* T-S sebagai pelaku proses stabilisasi.
3. Sinyal Referensi yang digunakan adalah sinyal step, sinus, dan *square-wave*.
4. Kontrol *tracking* diberikan untuk posisi kereta dengan spesifikasi sinyal referensi yang sudah ditentukan.
5. Hasil simulasi akan di bandingkan dengan sistem kontroler *fuzzy*-integral sebagai pembanding performansi *tracking*.

1.4 Tujuan Penelitian

Memperoleh sebuah sistem kontrol dengan menggunakan kontroler PID dan struktur *fuzzy* T-S sehingga sistem pendulum kereta dapat bergerak mengikuti sinyal referensi yang diberikan dengan tetap mempertahankan batang pendulum dalam posisi terbaliknya yaitu pada sudut nol radian.

1.5 Metodologi

Metodologi yang digunakan dalam penelitian Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Studi literatur
Dilakukan dengan mencari informasi/data dan bahan pembahasan mengenai sistem pendulum kereta sebagai *plant* yang akan dikontrol, dan desain struktur kontrol

- fuzzy* T-S, serta kontroler PID sebagai kontroler yang akan digunakan.
2. Konsultasi
Dalam suatu penelitian terdapat masalah-masalah yang perlu didapatkan solusi agar permasalahan tersebut dapat teratasi. Pada proses perancangan dan pembuatannya diperlukan konsultasi dalam berbagi ilmu tentang penelitian yang dikerjakan. Konsultasi ini dapat dilakukan dengan dosen pembimbing, teman-teman, atau narasumber lainnya yang terkait.
 3. Perancangan Sistem
Membuat dan menganalisa terkait penelitian yang dikerjakan, mulai dari pemodelan *plant*, perancangan kontroler, simulasi dan implementasi.
 4. Simulasi
Pemodelan sistem dan algoritma kontrol disimulasikan pada perangkat lunak *MATLAB*, untuk kemudahan dalam menganalisa dalam perancangan dan pembuatan dari sistem.

1.6 Sistematika Penulisan

Pembahasan Tugas akhir ini akan dibagi menjadi lima bab dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan, metodologi, sistematika penulisan, dan relevansi.

BAB II : TEORI PENUNJANG

Bab ini berisi tentang tinjauan pustaka, konsep dasar dari sistem pendulum kereta, teknik linearisasi pada model matematika nonlinear *plant*, teori mengenai kontroler PID, teori *fuzzy*, sistem kontrol *tracking* yang meliputi pemodelan *fuzzy* T-S, dan teknik LQR (*Linear Quadratic Regulator*).

BAB III : PERANCANGAN SISTEM

Bab ini menjelaskan perancangan sistem *tracking* yang dilakukan, meliputi linearisasi plant, penentuan kontroler PID serta LQR yang disusun berdasarkan model *fuzzy* T-S.

BAB IV : HASIL DAN ANALISA

Bab ini berisi tentang pembahasan hasil dan analisa dari simulasi yang sudah dilakukan.

BAB V : PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran dari hasil keseluruhan proses perancangan, pembuatan, dan pengujian dari sistem kontrol *tracking* menggunakan kontroler PID dan model *fuzzy* T-S untuk sistem pendulum kereta.

1.7 Relevansi

Dengan diselesaikannya penelitian Tugas Akhir ini, diharapkan dapat memberikan kontribusi pada penelitian dalam mengembangkan strategi dan struktur kontrol untuk *plant non-linear* dari sistem pendulum kereta dengan struktur kontrol *tracking* menggunakan kontroler PID dan struktur model *fuzzy* T-S.

BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 Pendahuluan

Sistem pendulum kereta merupakan salah satu sistem non-*linear* dan tidak stabil sehingga untuk mengontrolnya dibutuhkan teknik kontrol yang tidak mudah jika dibandingkan dengan sistem yang memiliki karakteristik *linear* dan stabil. Sistem ini terdiri atas sepasang batang pendulum yang terpasang menggantung pada kereta. Sedangkan kereta bebas bergerak pada arah horizontal pada *track* sehingga batang tersebut hanya dapat bergerak secara bebas pada area vertikal. Sistem kontrol dibutuhkan untuk menstabilkan dan membuat batang pendulum pada sistem pendulum kereta tetap pada posisi equilibriumnya yaitu pada sudut nol radian.

Terdapat tiga buah permasalahan kontrol yang dapat di aplikasikan pada sistem pendulum kereta, yaitu proses *swing-up*, proses stabilisasi batang pendulum, dan *tracking*. *Swing-up* merupakan kondisi saat sistem pendulum kereta mengayunkan batang pendulum dari posisi awal yang menggantung hingga ke posisi terbalik. Selanjutnya sistem pendulum kereta harus dapat mempertahankan kondisi batang pendulum agar tetap terbalik, kondisi ini masuk dalam permasalahan kontrol stabilisasi. Sedangkan untuk *tracking*, kereta pada sistem pendulum kereta di kontrol agar dapat mengikuti sinyal referensi yang diberikan dengan tetap mempertahankan batang pendulum pada posisi terbalik.

Permasalahan yang akan diselesaikan adalah proses *tracking* kereta terhadap sinyal referensi yang diberikan. Sebelumnya telah dilakukan berbagai macam penelitian dengan metode-metode yang dapat diaplikasikan untuk proses *tracking* pada sistem pendulum kereta, contohnya pada [1] digunakan metode *fuzzy* optimal dan *Linear Quadratic Tracking* (LQT) untuk membuat proses *tracking* pada sistem pendulum kereta. Pada [2] digunakan metode FTC berbasis model *fuzzy* T-S dan kompensator. Kedua contoh diatas menggunakan aturan kontroler disusun berdasarkan dengan konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC). Pada [9] digunakan kontroler PID ganda yang digunakan untuk mentrack posisi dan kecepatan dari sudut dan kereta pendulum.

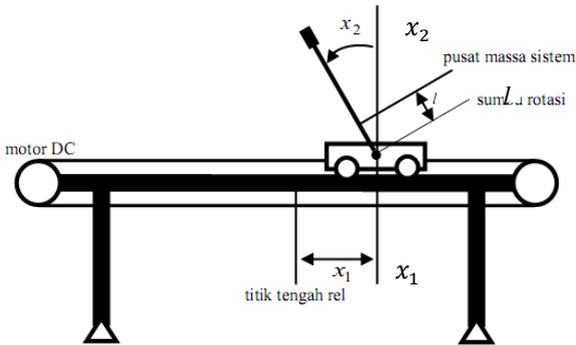
Pada tugas akhir ini dipilih kontroler PID konvensional sebagai kontroler yang digunakan untuk *tracking* sistem pendulum kereta. Model non-*linear* dari sistem pendulum kereta akan dilinearisasikan dan

dimodelkan dengan menggunakan model *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) yang digunakan sebagai kontrol stabilisasi pada sistem pendulum kereta. Masing-masing ruang state yang berbeda pada model *fuzzy* T-S tersebut dinyatakan dalam model *linear*. Hasil dari desain kontroler akan diuji melalui simulasi dengan menggunakan tiga jenis sinyal referensi, step, sinus dan *square-wave*. Hasil dari simulasi akan dibandingkan dengan respon dari sistem hanya menggunakan kontroler *fuzzy*-integral yang disusun berdasarkan struktur servo-1 untuk dapat diketahui perbandingan performansi *tracking* diantara keduanya.

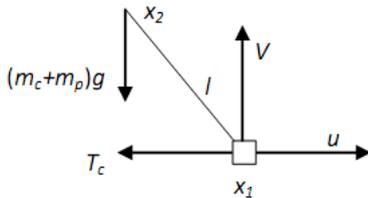
2. 2 Sistem Pendulum Kereta [3]

Kontrol dari sistem pendulum kereta merupakan sebuah masalah kontrol yang klasik karena dinamika dari pendulum yang *non-linear* dan tidak stabil. Oleh karena itu, sistem pendulum kereta sering digunakan sebagai percobaan untuk berbagai teori kontrol. Biasanya masalah kontrol pendulum adalah bagaimana meggerakkan kereta pendulum ke posisi yang diinginkan dan dapat dilakukan secepat mungkin, dengan osilasi yang kecil juga tanpa membiarkan sudut dan kecepatan pendulum menjadi terlalu besar. Setelah posisi yang diinginkan dapat tercapai, sistem sebaiknya dapat menjaga agar batang pendulum dapat stabil pada posisi yang diinginkan meskipun diberi gangguan.

Sistem pendulum kereta yang digunakan merupakan modul percobaan dari *Feedback Instrumentation*© yang digunakan untuk mendemonstrasikan pengendalian sistem *Single Input Multiple Output* (SIMO). Gaya yang diberikan pada kereta merupakan masukan sinyal referensi, sedangkan posisi kereta, posisi sudut pendulum, kecepatan kereta, dan kecepatan sudut pendulum merupakan keluarannya. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 2.1. Pada Gambar 2.1 tersebut dapat dilihat bahwa sistem pendulum kereta terdiri atas sebuah kereta yang dapat bergerak pada suatu trek pada sumbu horizontal dan sepasang batang pendulum yang menempel pada kereta dan dapat berputar pada porosnya dari bawah ke atas. Motor DC menggerakkan kereta pada sistem pendulum kereta yang dihubungkan dengan menggunakan *belt*. Sensor posisi mendeteksi posisi kereta pada trek melalui *positional encoder* dan *limit switch*. *Limit switch* digunakan sebagai penahan kereta supaya tidak keluar dari lintasan. *Angle encoder* memantau posisi sudut dari batang pendulum.



Gambar 2.1 Sistem Pendulum Kereta Secara Keseluruhan [3]



Gambar 2.2 Gaya – gaya pada Sistem Pendulum Kereta [3]

Pada Gambar 2.2 dapat dilihat gaya-gaya yang bekerja pada sistem pendulum kereta. Gaya-gaya yang bekerja pada bidang horizontal adalah gaya kontrol yang bekerja secara paralel dengan arah lintasan kereta (u) dan gaya gesek kereta terhadap rel (T_c). Massa keseluruhan sistem adalah m . Massa dari kereta adalah m_c dan massa dari pendulum adalah m_p . Gaya-gaya yang bekerja pada bidang vertikal adalah gaya normal V dan gaya berat sistem, yaitu $(m_c + m_p)g$.

Positional Encoder merupakan sensor posisi yang menggunakan sensor inframerah untuk membaca putaran cakram yang terpasang pada sumbu motor DC. Pemancar dan penerima inframerah dapat melewati lubang pada saat cakram berputar. Beberapa lubang yang saling berpotongan mengakibatkan pembacaan yang berbeda di setiap putaran cakram, sehingga arah perpindahan dapat dilakukan.

Penerapan algoritma pada sistem pendulum kereta dilakukan dengan menggunakan komputer serta *Matlab*[®] sebagai *host program*. Komputer dan sistem pendulum kereta terhubung melalui modul “*Digital Pendulum*

Kontroller 33-201” sebagai kontroler antarmuka, serta *board* akuisisi data (DAQ) sebagai I/O pada komputer. Pengendalian sistem pendulum kereta pada komputer menggunakan program *Matlab*® yang selanjutnya akan dijalankan secara *online* menggunakan bantuan modul *Real Time Workshop - Real Time Windows Target* pada *Matlab*®.

Sinyal kontrol dari komputer akan keluar melalui *Digital to Analog Converter* (DAC) yang terdapat di *board* DAQ. *Power amplifier* yang terhubung dengan *port output* DAQ, akan menerima sinyal kontrol dan menggerakkan motor DC. Sensor akan membaca sinyal respon motor DC kemudian diteruskan menuju *encoder*. Sinyal dari *encoder* akan diteruskan menuju komputer melalui ADC pada *board* DAQ.

2.2.1 Model Fisik Sistem Pendulum Kereta [3]

Sistem pendulum kereta terdiri dari dua bagian utama yaitu kereta dan pendulum. Kereta dapat bergerak bebas hanya dalam bidang horizontal dan pendulum dapat berotasi pada sumbu vertikal yang bertumpu pada sumbu pusat di sisi dari kereta. Parameter-parameter yang bekerja pada sistem pendulum kereta dapat dilihat pada Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Parameter-parameter sistem pendulum kereta [3]

Parameter	Simbol	Nilai
Masa kereta [kg]	m_c	1,12
Massa beban pendulum [kg]	m_{pw}	0,095
Massa batang pendulum [kg]	m_{ps}	0,025
Panjang rel [m]	R_l	1
Panjang batang pendulum [m]	l_p	0,402
Jarak pusat massa batang ke sumbu putar [m]	l_{po}	0,146
Panjang beban [m]	l_c	0,041
Jarak pusat massa beban ke sumbu putar [m]	l_{co}	0,347
Jari-jari beban pendulum [m]	r_c	0,02
Jari-jari batang pendulum [m]	r_p	0,006
Gaya gesek statis [N]	F_s	2,5316
Gaya gesek dinamis (<i>Coulomb</i>) [N]	F_c	2,2813
Gaya kontrol maksimal [N]	u_{max}	17,5
Gaya kontrol minimal [N]	DZ_u	1,3792
Kecepatan minimal kereta [m/det]	DZ_{cv}	0,008
Kecepatan ayun minimal pendulum [rad/det]	DZ_{pv}	0,034
Gaya gesek pendulum [kg.m ² /det]	f_p	0,0001

Momen inersia pendulum [kg.m ²]	J_p	0,0139
Momen inersia sistem [kg.m ²]	J	0,0136
Jarak sumbu rotasi ke pusat massa sistem [m]	l	0,0168
Kec. kereta awal zona 5 gaya gesek [m/det]	x_c	0,3955
Gaya gesek saat kecepatan kereta x_c [N]	Y_c	2,3815
Tegangan kontrol maksimal [V]	V_m	2,5

2.2.2 Model Matematis Sistem Pendulum Kereta [3]

Untuk menurunkan model matematis dari sistem pendulum kereta, sebelumnya harus diketahui cara pengukuran dan gaya-gaya yang bekerja pada sistem pendulum kereta (lihat Gambar 2.1 dan Gambar 2,2). Sistem pendulum kereta memiliki empat buah state, yaitu x_1 , x_2 , x_3 , dan x_4 . Dimana x_1 adalah posisi kereta (jarak terhadap pusat lintasan), x_2 adalah sudut batang pendulum terhadap sumbu vertikal yang diukur berlawanan dengan arah jarum jam ($x_2 = 0$ menyatakan batang pendulum berada pada posisi terbalik), x_3 adalah kecepatan kereta dan x_4 adalah kecepatan sudut batang pendulum. T_c menyatakan gaya gesek yang terjadi pada kereta. D_p adalah momen gesek (*moment of friction*) pada pergerakan sudut pendulum, proporsional terhadap percepatan sudutnya, $D_p = f_p x_4$.

Koordinat horizontal pusat massa adalah $x_1 - l \sin x_2$, sedangkan koordinat vertikal pusat massa adalah $l \cos x_2$. Berdasarkan hukum kedua dari Newton, persamaan gerak dapat ditulis menjadi:

$$u - T_c = (m_c + m_p)(\dot{x}_1 - l \sin x_2)'' \quad (2.1)$$

$$V - (m_c + m_p)g = (m_c + m_p)(l \cos x_2)'' \quad (2.2)$$

$$(u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - D_p = Jx_2'' \quad (2.3)$$

Persamaan (2.1) dan (2.2) menyatakan gerak translasi dari pusat massa sistem, sedangkan persamaan (2.3) menyatakan gerak rotasi sistem secara keseluruhan terhadap pusat massa sistem. Model matematika dalam bentuk persamaan *state* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \quad (2.4)$$

dengan:

$$a = l^2 + \frac{J}{m_c + m_p}$$

$$\mu = (m_c + m_p)l$$

Penurunan persamaan (2.4), momen inersia J , dan gaya gesek T_c secara rinci dapat dilihat pada Lampiran A.1.

2.3 Linearisasi [4]

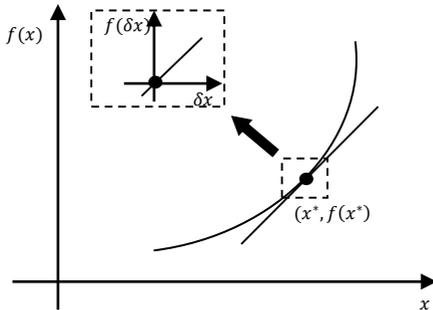
Berdasarkan linearitasnya, sistem dibagi menjadi sistem *linear* dan sistem *non-linear*. Sistem dikatakan *linear* apabila jika diberikan suatu masukan tunggal dengan bobot tertentu maka sistem akan memberikan keluaran tunggal dengan bobot yang sama (superposisi). Sedangkan pada sistem *non-linear*, apabila diberikan suatu masukan tunggal dengan bobot tertentu maka sistem akan memberikan keluaran tunggal dengan bobot yang tidak menentu.

Pada perhitungan matematis biasa, sistem dengan model yang *linear* lebih mudah untuk dianalisa daripada sistem dengan model yang *non-linear*. Namun pada kenyataannya, sistem yang berada di sekitar kita kebanyakan merupakan sistem yang *non-linear*. Oleh karena itu maka dikembangkan metode linearisasi.

Teori linearisasi digunakan untuk melinearkan persamaan-persamaan (model) *non-linear* pada suatu sistem. Linearisasi model menghasilkan matriks konstanta yang berkesinambungan dengan sistem kontrol *linear* di setiap daerah / titik kerjanya. Hal tersebut sangat mempermudah dalam proses pengontrolan. Sebuah sistem *non-linear* dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.5)$$

Dimana $y = f(x)$ adalah kurva yang ditunjukkan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Linearisasi $y=f(x)$ pada Sekitar x^* [1]

Garis singgung pada titik x^* merepresentasikan pendekatan *linear* $f(x)$ disekitar titik x^* . Hasil linearisaasi dari sistem dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\delta y = f(\delta x) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \delta x \quad (2.6)$$

Dengan

$$\delta x = x - x^* \text{ dan } \delta y = f(x) - f(x^*)$$

Titik kerja x^* disebut sebagai titik pusat dari hasil linearisasi. Jika titik kerja sistem berada pada *origin*, dan sistem dilinearisasi pada titik kerjanya, maka $f(x^*) = 0$, sehingga Persamaan (2.6) menjadi:

$$f(x) = \dot{x} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} x \quad (2.7)$$

Pada sistem non-*linear* lup terbuka terdapat *state* sejumlah n , maka linearisasi sistem pada titik kerja $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ menjadi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$x_1 = x_1^*$
 \vdots
 $x_n = x_n^*$

atau dapat ditulis dalam bentuk:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2.8}$$

dengan:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$x_1 = x_1^*$
 \vdots
 $x_n = x_n^*$

Matriks A merupakan matriks Jacobi dari $f(x)$. Sistem *non-linear* dapat didekati menjadi sistem *linear* berdasarkan hasil linearisasi di sekitar titik kerjanya dan dapat direpresentasikan dalam persamaan berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x}, u) \tag{2.9}$$

Apabila jumlah *state* dalam sistem adalah n , maka linearisasi sistem pada titik kerja $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, u^*]$ adalah sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{2.10}$$

dengan

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T \tag{2.11}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_1=x_1^*}$$

dan $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_n(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^* \\ u=u^*}}$

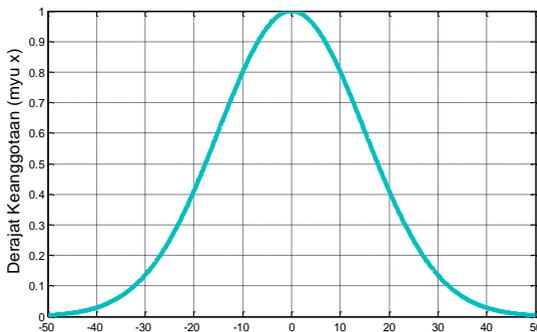
2.4 Teori Logika Fuzzy [4]

Pada sub-bab ini akan dijelaskan beberapa teori dasar mengenai logika *fuzzy* yang nantinya akan digunakan dalam perancangan sistem kontrol pada bab tiga. Teori tersebut meliputi himpunan *fuzzy*, fungsi keanggotaan, operasi himpunan *fuzzy*, dan sistem inferensi *fuzzy*.

2.4.1 Himpunan Fuzzy

Teori logika *fuzzy* merupakan pernyataan sebuah nilai diantara nol dan satu secara bersamaan namun besar nilai tersebut tergantung pada derajat keanggotaannya. Himpunan *fuzzy* (*fuzzy set*) merupakan pengelompokan objek berdasarkan variabel bahasa (linguistik) yang dinyatakan dalam fungsi keanggotaan.

Masing-masing elemen mempunyai derajat keanggotaan untuk menjadi anggota himpunan. Fungsi keanggotaan dari suatu himpunan *fuzzy* dalam semesta pembicaraan (*universe of discourse*) U tersebut bernilai antara 0,0-1,0 seperti pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Himpunan Fuzzy dan Derajat Keanggotaannya

2.4.2 Fungsi Keanggotaan

Fungsi keanggotaan memiliki beberapa bentuk, antara lain: bentuk fungsi segitiga, trapesium, Gaussian, *Generalized Bell*, dan bentuk lainnya yang dapat menentukan fungsi keanggotaan dalam suatu himpunan *fuzzy*. Setiap titik pada semesta pembicaraan dapat dipetakan menjadi bobot derajat keanggotaan antara 0 dan 1 dan fungsi keanggotaan mendefinisikan bagaimana setiap titiknya. Jika A merupakan himpunan *fuzzy*, μ_A adalah fungsi keanggotaan (*membership function*) dan X adalah

semesta, maka fungsi keanggotaan dalam suatu himpunan *fuzzy* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A = \{x, \mu_A(x) \mid x \in X\} \quad (2.12)$$

2.4.2.1 Fungsi Keanggotaan Segitiga

Tiga parameter skalar $\{a, b, c\}$ menentukan fungsi keanggotaan segitiga dengan $a < b < c$. Fungsi keanggotaan segitiga ditunjukkan pada Gambar 2.5. Secara matematis, derajat keanggotaan untuk fungsi keanggotaan segitiga ditentukan dengan Persamaan (2.13).

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x > c \end{cases} \quad (2.13)$$

2.4.2.2 Fungsi Keanggotaan Trapesium

Persamaan fungsi keanggotaan trapesium dengan empat parameter skalar $\{a, b, c, d\}$ dengan $a < b < c < d$. Fungsi keanggotaan trapesium ditunjukkan pada Gambar 2.5. Derajat keanggotaannya dituliskan sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & x > d \end{cases} \quad (2.14)$$

2.4.2.3 Fungsi Keanggotaan Gaussian

Dua parameter $\{c, \sigma\}$ menentukan fungsi keanggotaan *Gaussian* dan derajat keanggotaannya ditentukan sebagai berikut:

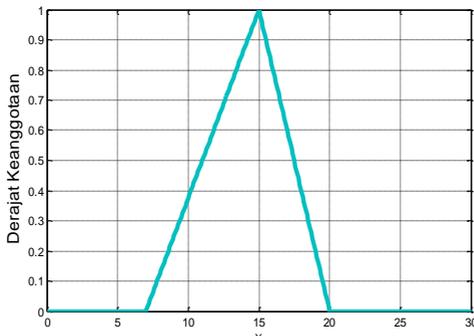
$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-c}{\sigma} \right)^2} \quad (2.15)$$

dengan c merepresentasikan pusat fungsi keanggotaan dan σ (standar deviasi) mendefinisikan lebar fungsi keanggotaan. Berikut fungsi keanggotaan *Gaussian* yang ditunjukkan pada Gambar 2.7.

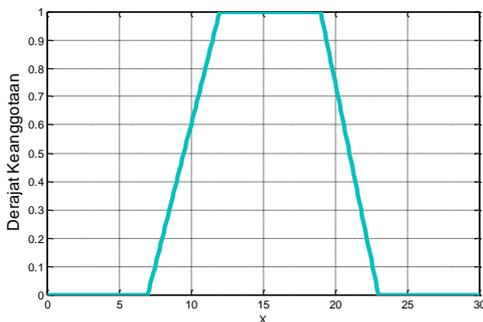
2.4.2.4 Fungsi Keanggotaan Generalized Bell

Fungsi keanggotaan *Generalized Bell* seperti pada Gambar 2.8 ditentukan oleh tiga parameter $\{a, b, c\}$, dan derajat keanggotaannya ditentukan oleh Persamaan (2.16).

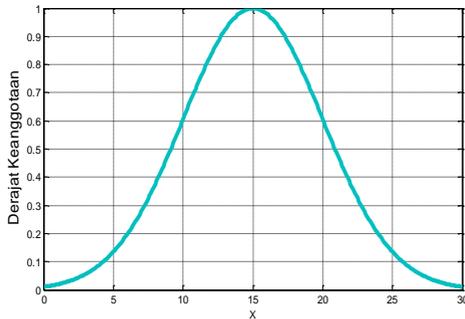
$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}} \quad (2.16)$$



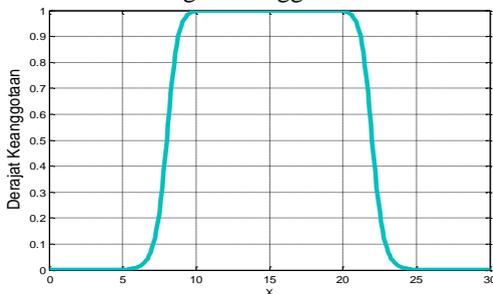
Gambar 2.5 Fungsi Keanggotaan Segitiga dengan $\{a, b, c\} = \{7, 15, 20\}$



Gambar 2.6 Fungsi Keanggotaan Trapesium dengan $\{a, b, c, d\} = \{7, 12, 19, 23\}$



Gambar 2.7 Fungsi Keanggotaan *Gaussian* dengan $\{c, \sigma\} = \{15, 5\}$



Gambar 2.8 Fungsi Keanggotaan *Generalized Bell* dengan $\{a, b, c\} = \{7, 9, 15\}$

2.4.3 Operasi Himpunan *Fuzzy*

Operasi himpunan *fuzzy* dilakukan dengan mengoperasikan fungsi keanggotaan satu dengan lainnya. Operasi ini dilakukan dalam proses interferensi *fuzzy*. Macam – macam operator *fuzzy* antara lain adalah operator *min* (minimum), *max* (maximum), dan *product*. Pada Gambar 2.9 terdapat himpunan *fuzzy* A dan B yang akan dilakukan operasi himpunan *fuzzy*. Dari Gambar 2.9 adalah dua himpunan *fuzzy* dalam semesta pembicaraan X dengan fungsi keanggotaan μ_A dan μ_B untuk $x \in X$, maka operasi himpunan *fuzzy* didefinisikan sebagai berikut:

1. Union (*OR*)

Union (gabungan) dari himpunan *fuzzy* A dan B dengan fungsi keanggotaan $\mu_A(x)$ dan $\mu_B(x)$ adalah $\mu_{A \cup B}(x)$.

2. Interseksi (*AND*)

Interseksi himpunan *fuzzy* A dan B adalah himpunan *fuzzy* yang fungsi keanggotaannya diberikan sebagai operasi *minimum*

(2.17) dan operasi *Algebraic product* (2.18) dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in X \quad (2.17)$$

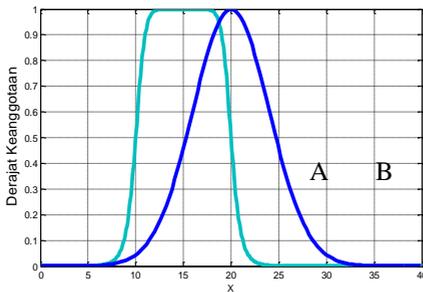
$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), x \in X \quad (2.18)$$

3. Komplemen (*NOT*)

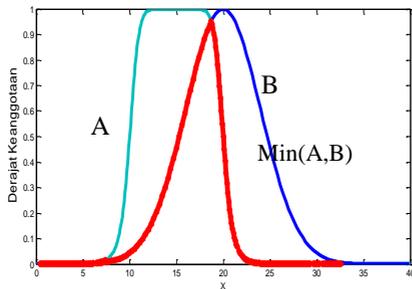
Komplemen dari suatu himpunan *fuzzy* B dengan fungsi keanggotaan $\mu_B(x)$ pada persamaan (2.19) berikut:

$$\mu_{B'}(x) = 1 - \mu_B(x) \text{ untuk } x \in X \quad (2.19)$$

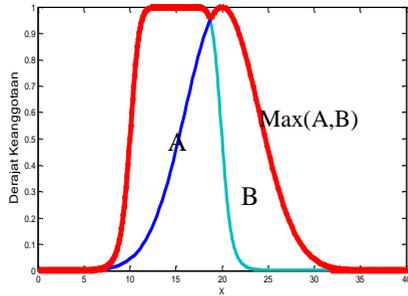
Hasil operasi himpunan *fuzzy* dari himpunan A dan B pada Gambar 2.9 diperlihatkan pada Gambar 2.10.



Gambar 2.9 Himpunan *Fuzzy* A dan B

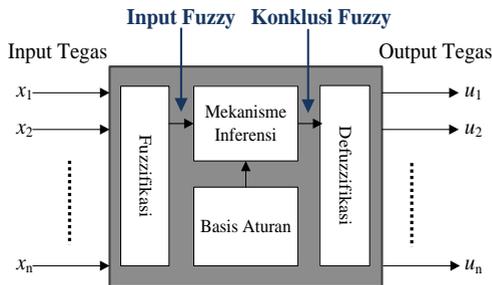


Gambar 2.10 Operasi pada Himpunan *Fuzzy* *Min*



Gambar 2.11 Operasi pada Himpunan *Fuzzy Max*

2.4.4 Sistem Inferensi *Fuzzy*



Gambar 2.12 Kontroler *Fuzzy* [1]

Sistem logika Inferensi *fuzzy* mempunyai kemiripan dengan penalaran manusia seperti pengetahuan yang meliputi penalaran *fuzzy*. Penalaran *fuzzy* tersebut dinyatakan sebagai aturan dalam bentuk pernyataan ***If-Then*** dinyatakan dengan

If premis ***Then*** konsekuen
If x_1 is A and x_2 is B ***Then*** $u = C$

Dimana x_1 , x_2 dan u adalah variabel *fuzzy*. A , B , dan C adalah fungsi keanggotaan *fuzzy*. ***AND*** adalah logika penghubung (operator). Fakta merupakan masukan *fuzzy* yang akan dicari inferensinya dengan menggunakan aturan *fuzzy*. Dalam hal ini konklusi adalah hasil inferensi yang sesuai yang diperoleh berdasarkan fakta *fuzzy* dan basis pengetahuan

fuzzy. Aturan–aturan *fuzzy* yang telah disusun dari masing–masing konsekuen yang bersesuaian digunakan dalam mekanisme inferensi *fuzzy*. Secara umum struktur dasar sistem inferensi *fuzzy* terdiri dari empat elemen utama, yaitu:

1. Basis aturan, yang berisi sejumlah aturan *fuzzy* (**If-Then**) yang memetakan nilai input *fuzzy* menjadi nilai keluaran *fuzzy*.
2. Mekanisme inferensi, berisi tentang prosedur untuk melakukan inferensi.
3. Fuzzifikasi, untuk menentukan derajat keanggotaan dari setiap variabel input tegas.
4. Defuzzifikasi, memetakan hasil inferensi *fuzzy* menjadi output tegas.

Proses inferensi untuk menentukan keputusan dalam suatu sistem (kontroler) *fuzzy* adalah sebagai berikut:

1. Fuzzifikasi input
Fuzzifikasi masing-masing input tegas pada fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* sehingga didapat derajat keanggotaanya.
2. Aplikasi operator *fuzzy*
Penerapan operator *fuzzy* (seperti **AND**, **OR**) pada masing-masing bagian premis dari aturan *fuzzy*.
3. Aplikasi implikasi
Proses mendapatkan konsekuen dari aturan (**If-Then**) berdasarkan derajat keanggotaan premis.
4. Agregasi
Proses penggabungan semua hasil implikasi *fuzzy* dari setiap aturan (**If-Then**) menjadi sebuah *fuzzy* set tunggal.
5. Defuzzifikasi
Perhitungan konklusi *fuzzy* sehingga didapat output tegas.

Metode defuzzifikasi yang sering digunakan diantaranya adalah *center of gravity*, dan *center (weighted) average*. Metode defuzzifikasi dengan *center of gravity* dapat diterapkan pada fungsi keanggotaan yang simetris. Sistem inferensi *fuzzy* dapat dibangun dengan dua metode, yaitu metode Mamdani dan metode Sugeno. Dalam mekanisme inferensi, perbedaan sistem inferensi *fuzzy* tipe Mamdani dan Sugeno terletak pada jenis fungsi keanggotaan yang digunakan pada bagian konsekuen.

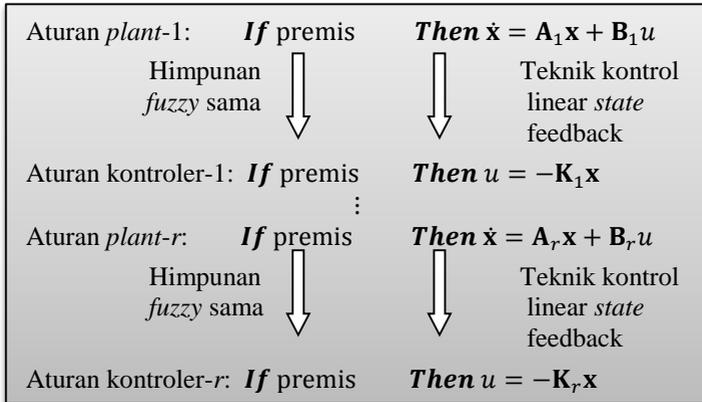
2.5 Model *Fuzzy* Takagi-Sugeno [5]

Model *fuzzy* Takagi-Sugeno dapat menggambarkan hubungan *linear* antara *input-output* dari sistem yang *non-linear* dan dinyatakan dengan

aturan **If-Then**. Penggunaan model *fuzzy* T-S bertujuan untuk menyatakan dinamika lokal tiap aturan *fuzzy* dengan model *linear*. Model sistem secara keseluruhan diperoleh dari linearitas.

Model *fuzzy* T-S yang digunakan adalah berbasis pada konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC). Dalam konsep PDC, tiap aturan kontroler yang dirancang berdasarkan aturan model *linear* yang bersesuaian.

Deskripsi konsep PDC ditunjukkan pada Gambar 2.13. Variabel premis yang digunakan dalam aturan **If-Then** merupakan variabel-variabel sistem yang terukur. Fungsi keanggotaan dari himpunan *fuzzy* yang digunakan harus sesuai dengan dinamika sistem yang dikontrol.



Gambar 2.13 Konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC)

Aturan *plant* dalam model *fuzzy* T-S dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

aturan *plant* ke-*i*:

$$\begin{aligned}
 &\text{If } z_1(t) \text{ adalah } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_j(t) \text{ adalah } M_{ij} \\
 &\text{Then } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i u(t) \\
 &\quad \quad \quad y(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) \\
 &\quad i = 1, 2, \dots, r \quad \quad j = 1, 2, \dots, p
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

dengan r sebagai jumlah aturan *fuzzy*, dan p adalah jumlah himpunan *fuzzy* dalam satu aturan, dan M_{ij} sebagai himpunan *fuzzy*, dengan vektor *state* $\mathbf{x}(t) \in R^n$, vektor kontrol masukan $u(t) \in R^m$, dan vektor keluaran sistem $y(t) \in R^q$, sedangkan $z(t) \in R^j$ merupakan variabel pada bagian premis yang dapat berupa fungsi dari variabel *state*, dan gangguan eksternal. Setelah defuzzifikasi, maka model *fuzzy* T-S secara keseluruhan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) [A_i \mathbf{x}(t) + B_i u(t)] \quad (2.21)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) [C_i \mathbf{x}(t)] \quad (2.22)$$

dengan

$$w_i(z(t)) = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))}; \mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)) \quad (2.23)$$

Pembobot $w_i(z(t))$ dan derajat keanggotaan $\mu_i(z(t))$ memiliki sifat sebagai berikut :

$$w_i(z(t)) \geq 0; \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) = 1 \quad (2.24)$$

$$\mu_i(z(t)) \geq 0; \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) > 0 \quad (2.25)$$

Kontroler *state feedback* dapat disusun dengan konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC) seperti pada Gambar 2.12. Dalam konsep PDC, tiap aturan kontroler dirancang berdasarkan aturan model *plant linear* yang bersesuaian dengan himpunan *fuzzy* yang sama. Untuk setiap aturan, dapat digunakan teknik kontrol *linear*. Hasil keseluruhan kontroler *fuzzy* yang merupakan *non-linear* secara umum menjadi perpaduan dari hasil setiap kontroler *linear*. Dari aturan *plant* yang ada, dapat disusun aturan kontroler *fuzzy* dengan konsep PDC sebagai berikut:

aturan kontroler ke- i :

$$\begin{aligned} & \text{If } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and ... and } z_j(t) \text{ is } M_{ij} \\ & \text{Then } u(t) = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}(t) \\ & \quad i=1,2,\dots,r \quad j=1,2,\dots,p \end{aligned} \quad (2.26)$$

Secara keseluruhan, keluaran dari kontroler *fuzzy* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r w_i(z(t)) [-\mathbf{K}_i \mathbf{x}(t)] \quad (2.27)$$

Maka, model *fuzzy* T-S dapat dituliskan menjadi sistem lup tertutup sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(z(t)) w_j(z(t)) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}(t)] \quad (2.28)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(z(t)) w_j(z(t)) [(\mathbf{C}_i - \mathbf{D}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}(t)] \quad (2.29)$$

Dengan mengacu pada Persamaan (2.24) dan (2.25), maka model (2.28) dan (2.29) dapat disederhanakan menjadi:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}(t) \quad (2.28)$$

$$y(t) = (\mathbf{C}_i - \mathbf{D}_i \mathbf{K}_j) \mathbf{x}(t) \quad (2.29)$$

$$i=1,2,\dots,r \quad j=1,2,\dots,p$$

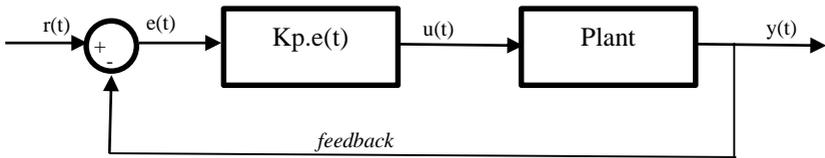
2.6 Kontroler PID [4]

Kontroler PID merupakan kontroler yang memanfaatkan umpan balik untuk memperbaiki kinerja sistem atau proses. Kontroler ini menghitung nilai kesalahan (*error*) yang merupakan perbedaan antara nilai acuan (*setpoint*) dan keluaran yang terukur oleh sensor. Cara Kontroler PID dalam meminimalisasi nilai kesalahan adalah dengan mengatur sinyal kontrol masukan yang diberikan ke dalam sistem. Berikut ini akan dijelaskan karakteristik dari elemen penyusun kontroler PID, yaitu proporsional, Integral, dan Derivatif.

2.6.1 Kontroler Proporsional (P)

Kontroler Proporsional menghasilkan sinyal keluaran yang sebanding atau proporsional dengan besarnya sinyal kesalahan (selisih antara besaran yang diinginkan dengan harga aktualnya). Secara lebih sederhana dapat dikatakan, bahwa keluaran kontroler proporsional merupakan perkalian antara konstanta proporsional dengan masukannya.

Gambar 2.14 menunjukkan diagram blok yang menggambarkan hubungan antara besaran *setpoint*, besaran aktual dengan keluaran kontroler proporsional.



Gambar 2.14 Kontroler Proporsional

Kontroler proporsional seperti pada gambar 2.14 dapat ditulis dalam persamaan *Laplace* sebagai berikut:

$$U(s) = K_p \cdot E(s) \quad (2.30)$$

Penggunaan kontroler proporsional menghasilkan beberapa karakteristik di bawah ini:

1. Jika nilai K_p kecil maka kontroler proporsional hanya mampu melakukan koreksi kesalahan yang kecil, sehingga akan menghasilkan respons yang lambat.
2. Jika nilai K_p dinaikkan, respon sistem menunjukkan semakin cepat mencapai keadaan tunaknya (*steady state*).
3. Namun jika nilai K_p diperbesar sehingga mencapai harga yang berlebihan akan mengakibatkan sistem bekerja tidak stabil, atau respon akan berosilasi.

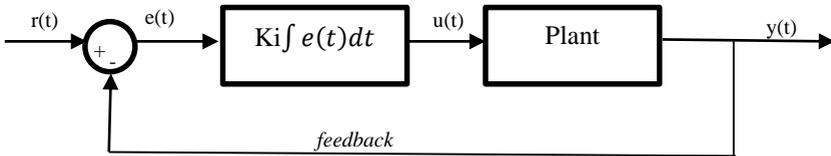
2.6.2 Kontroler Integral (I)

Kontroler Integral berfungsi menghasilkan respon sistem yang memiliki *error steady state* nol. Jika sebuah *plant* tidak memiliki unsur integrator ($\frac{1}{s}$), kontroler proporsional tidak akan mampu menjamin keluaran sistem dengan kesalahan keadaan *steady state* nya nol. Karena

itu dengan adanya kontroler integral, respon sistem dapat diperbaiki, yaitu mempunyai kesalahan keadaan *steady state* nya nol.

Kontroler integral memiliki karakteristik seperti halnya sebuah integral. Keluaran kontroler sangat dipengaruhi oleh perubahan yang sebanding dengan nilai sinyal kesalahan. Keluaran kontroler ini merupakan penjumlahan yang terus menerus dari perubahan masukannya. Jika sinyal kesalahan tidak memiliki perubahan, keluaran akan menjaga keadaan seperti sebelum terjadinya perubahan masukan.

Gambar 2.15 menunjukkan diagram blok yang menggambarkan hubungan antara besaran *setpoint*, besaran aktual dengan keluaran kontroler integral.



Gambar 2.15 Kontroler Integral

Kontroler Integral seperti pada Gambar 2.15 dapat dituliskan dalam bentuk *Laplace* sebagai berikut:

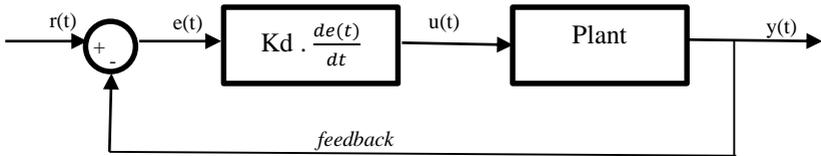
$$U(s) = \frac{K_i}{s} E(s) \quad (2.31)$$

Penggunaan kontroler integral menghasilkan beberapa karakteristik berikut ini:

1. Keluaran kontroler membutuhkan selang waktu tertentu sehingga kontroler integral cenderung memperlambat respon.
2. Ketika sinyal kesalahan bernilai nol, keluaran akan bertahan pada nilai sebenarnya.
3. Jika sinyal kesalahan tidak bernilai nol, keluaran akan menunjukkan kenaikan atau penurunan yang dipengaruhi oleh besarnya sinyal kesalahan dan nilai K_i .
4. Kontroler integral K_i yang bernilai besar akan mempercepat hilangnya *offset*. Tetapi semakin besar nilai konstanta K_i akan mengakibatkan peningkatan osilasi dari sinyal keluaran kontroler.

2.6.3 Kontroler Derivatif (D)

Keluaran kontroler diferensial memiliki sifat seperti halnya suatu operasi derivatif. Perubahan yang mendadak pada masukan kontroler akan mengakibatkan perubahan yang sangat besar dan cepat pada keluaran. Gambar 2.16 menunjukkan diagram blok yang menggambarkan hubungan antara besaran *setpoint*, besaran aktual dengan kontroler diferensial.



Gambar 2.16 Kontroler Derivatif / Diferensial

Kontroler derivatif seperti pada Gambar 2.16 dapat dituliskan dalam bentuk *Laplace* sebagai berikut :

$$U(s) = K_{d,s} \cdot E(s) \quad (2.32)$$

Penggunaan kontroler derivatif seperti pada Gambar 2.16 menghasilkan beberapa karakteristik berikut ini :

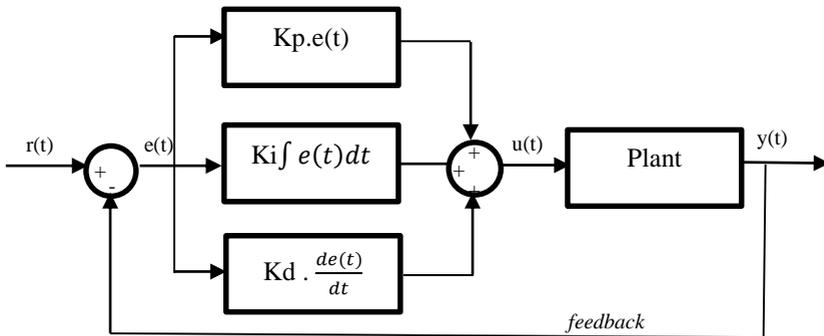
1. Kontroler ini tidak dapat menghasilkan keluaran bila tidak ada perubahan pada masukannya (berupa sinyal kesalahan).
2. Jika sinyal kesalahan berubah terhadap waktu, maka keluaran yang dihasilkan kontroler tergantung pada nilai K_d dan laju perubahan sinyal kesalahan.
3. Kontroler diferensial memiliki karakter untuk mendahului sehingga kontroler ini dapat menghasilkan koreksi yang signifikan sebelum pembangkit kesalahan menjadi sangat besar. Jadi kontroler differensial dapat mengantisipasi pembangkit kesalahan, memberikan aksi yang bersifat korektif, dan cenderung meningkatkan stabilitas sistem.

Berdasarkan karakteristik kontroler tersebut, kontroler differensial umumnya dipakai untuk mempercepat respon awal suatu sistem, tetapi tidak memperkecil kesalahan pada keadaan *steady state* nya. Kerja kontroler diferensial hanyalah efektif pada lingkup yang sempit, yaitu

pada periode peralihan. Oleh sebab itu, kontroler diferensial tidak pernah digunakan tanpa ada kontroler lain pada sebuah sistem.

2.6.4 Kontroler Proporsional+Integral+Derivatif (PID)

Kontroler PID ini menggabungkan ketiga elemen kontroler (proporsional, integral, derivatif) secara paralel, sehingga kelebihan dan kekurangan dari masing-masing kontroler dapat saling melengkapi dan menutupi. Elemen-elemen kontroler P, I, dan D masing-masing bertujuan untuk mempercepat/memperlambat reaksi suatu sistem dan mengurangi/menghilangkan *error*. Gambar 2.17 menunjukkan diagram blok kontroler PID.



Gambar 2.17 Kontroler PID

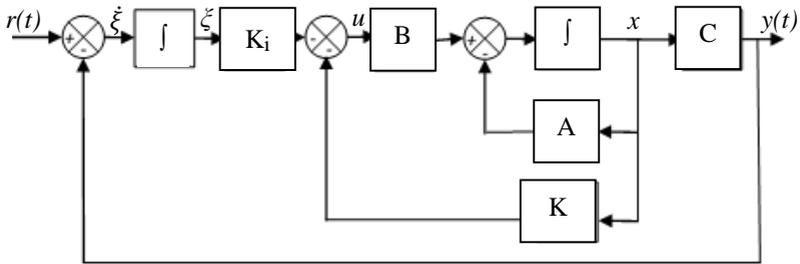
Dari diagram blok kontroler PID pada Gambar 2.17 dapat dituliskan dalam persamaan *Laplace* sebagai berikut :

$$U(s) = K_p \cdot E(s) + \frac{K_i}{s} E(s) + K_d s \cdot E(s) \quad (2.32)$$

Dari persamaan (2.32) dapat diketahui bahwa pemilihan konstanta K_p , K_i , K_d akan mempengaruhi dominasi dari sifat-sifat elemen kontroler. Sehingga diperlukan metode dalam menentukan parameter dari PID (*tuning parameter*). Ada beberapa metode untuk menentukan parameter tersebut, antara lain Ziegler-Nichols, *cut and try method*, dan *pole placement*. Pada tugas akhir kali ini digunakan metode Ziegler-Nichols untuk penentuan parameter PID.

2.7 Sistem Kontrol *Tracking* [4]

Sistem kontrol *tracking* dirancang agar kereta dapat dipaksa bergerak mengikuti sinyal referensi yang dimasukkan sembari tetap mempertahankan batang pendulum pada posisi terbalik. Sistem yang dirancang dibuat berdasarkan model sistem servo *type 1* dimana kontroler integral akan digantikan dengan kontroler PID yang lebih lengkap karena memiliki nilai Proporsional dan Derivatif. Aturan kontroler untuk stabilisasi batang pendulum di rancang dengan menggunakan gain feedback hasil proses *Linear Quadratic Regulator* (LQR) yang disusun dengan menggunakan model *fuzzy T-S*.



Gambar 2.18 Struktur Sistem Servo *type 1* [4]

Dimana K_i adalah *gain* integral, K adalah *gain feedback*, A dan B adalah matriks hasil linearisasi dari *plant* dan C adalah matriks state keluaran dari *plant*. Dari Gambar 2.18 didapat beberapa persamaan sebagai berikut:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad (2.33)$$

$$y = \mathbf{C}x \quad (2.34)$$

$$u = -\mathbf{K}x + \mathbf{K}_i \xi \quad (2.35)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - \mathbf{C}x \quad (2.36)$$

Maka dapat dibuat sebuah sistem perluasan / *augmented system* yang dituliskan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\dot{\hat{x}} = \bar{\mathbf{A}}\hat{x} + \bar{\mathbf{B}}u \quad (2.37)$$

Dengan

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

Sinyal kontrol dari sistem dituliskan dengan persamaan :

$$u = -\mathbf{K}x + \mathbf{K}_i \zeta \quad (2.38)$$

Atau dapat juga dituliskan sebagai berikut :

$$u = -\bar{\mathbf{K}}x \quad (2.39)$$

Dengan

$$\bar{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad \vdots \quad -\mathbf{K}_i]$$

2.7.1 *Linear Quadratic Regulator (LQR)* [6]

Kontrol optimal merupakan salah satu metode kontrol modern. *Linear Quadratic Regulator* bertujuan untuk membuat semua *state* sistem dari nilai sembarang menjadi sama dengan 0. Metode ini digunakan untuk proses stabilisasi pada Tugas Akhir ini. Untuk mendapatkan respon yang optimal maka perlu dicari nilai *gain* \mathbf{K} . Pada dasarnya, kontrol optimal memberikan solusi untuk menentukan nilai sinyal kontrol $u(t)$ sehingga indeks performansi dapat dioptimasi. Indeks performansi adalah kuantitatif performansi dari suatu sistem, penekanan diberikan pada spesifikasi sistem yang diprioritaskan, misalnya *error* dan sinyal kontrol. Indeks performansi dari sistem untuk waktu tak berhingga dapat dilihat pada persamaan berikut:

$$J = \int_0^{\infty} (\bar{x}^T \mathbf{Q} \bar{x} + u^T \mathbf{R} u) dt \quad (2.40)$$

dimana matriks \mathbf{Q} adalah matriks simetris semi-definit positif yang merupakan matriks pembobot *augmented state* dengan dimensi sebesar banyaknya *state* sistem, matriks \mathbf{R} adalah matriks simetris definit positif yang merupakan matriks pembobot masukan kontrol dengan dimensi sebesar banyaknya masukan sistem, \bar{x} adalah vektor *state*, dan u adalah vektor masukan.

Apabila diketahui sebuah persamaan *plant* seperti pada Persamaan (2.10) dengan

$$u = -\bar{\mathbf{K}}x \quad (2.41)$$

dimana $\bar{\mathbf{K}}$ merupakan matriks *gain state feedback* dan $u(t)$ tidak memiliki batasan (*unconstrained*). Untuk meminimalkan indeks performansi dengan waktu tidak terbatas dari Persamaan (2.37). Maka dari Persamaan (2.10) dan (2.40) didapat

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}})\bar{\mathbf{x}} \quad (2.42)$$

Asumsikan bahwa $\mathbf{A} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}$ adalah stabil, atau *eigenvalue* dari $\mathbf{A} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}$ memiliki nilai negatif. Substitusi Persamaan (2.41) kedalam Persamaan (2.40) didapatkan:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{x}}) dt \\ &= \int_0^{\infty} \bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{Q} + \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}) \bar{\mathbf{x}} dt \end{aligned} \quad (2.43)$$

Asumsikan bahwa

$$\bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{Q} + \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}) \bar{\mathbf{x}} = -\frac{dy}{dt} (\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}) \quad (2.44)$$

Dengan matriks \mathbf{P} adalah matrik semi definit positif atau matriks *real* simetriks. Maka dari Persamaan (2.42) dan (2.44) didapat:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{Q} + \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}) \bar{\mathbf{x}} &= -\dot{\bar{\mathbf{x}}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \dot{\bar{\mathbf{x}}} \\ &= \bar{\mathbf{x}}^T [(\mathbf{A} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}})] \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Membandingkan dari kedua sisi dari Persamaan (2.45) didapat

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}) = -(\mathbf{Q} + \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}) \quad (2.46)$$

Jika matriks $\mathbf{A} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}$ stabil, maka akan ada matriks \mathbf{P} definit positif yang sesuai dengan Persamaan (2.46)

Indeks performansi dapat dievaluasi dengan cara berikut:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{Q} + \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}) \bar{\mathbf{x}} dt = -\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}} \Big|_0^{\infty} \\ &= \bar{\mathbf{x}}^T (\infty) \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}} (\infty) + \bar{\mathbf{x}}^T (0) \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}} (0) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Karena semua *eigenvalue* $\mathbf{A} - \overline{\mathbf{B}\mathbf{K}}$ diasumsikan memiliki nilai *real* negatif maka nilai $\bar{x}(\infty) \rightarrow 0$. Maka kita dapatkan:

$$\mathbf{J} = \bar{x}^T(0) \mathbf{P} \bar{x}(0) \quad (2.48)$$

Maka nilai indeks performansi didapatkan dari nilai kondisi awal *state* atau $x(0)$ dan matriks \mathbf{P} . Matriks \mathbf{R} diasumsikan sebagai matriks semi definit positif atau matriks simetris *real*. Maka matriks \mathbf{R} dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^T \mathbf{T} \quad (2.49)$$

Dimana \mathbf{T} merupakan matriks *nonsingular*. Maka Persamaan (2.46) dapat ditulis sebagai berikut:

$$(\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T \overline{\mathbf{K}^T}) \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \overline{\mathbf{B}\mathbf{K}}) + \mathbf{Q} + \overline{\mathbf{K}^T} \mathbf{T}^T \mathbf{T} \overline{\mathbf{K}} = 0 \quad (2.50)$$

Atau bisa ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^T + [\mathbf{T} \overline{\mathbf{K}} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}]^T [\mathbf{T} \overline{\mathbf{K}} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \\ - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Untuk meminimalkan indeks performansi J terhadap $\overline{\mathbf{K}}$ maka perlu meminimalkan dari persamaan berikut:

$$\bar{x}^T [\mathbf{T} \overline{\mathbf{K}} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}]^T [\mathbf{T} \overline{\mathbf{K}} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \bar{x} \quad (2.52)$$

Karena Persamaan (2.48) adalah non negatif, nilai minimum didapat ketika persamaan itu bernilai 0 atau ketika

$$\mathbf{T} \overline{\mathbf{K}} = (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$$

Maka

$$\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (2.53)$$

Persamaan (2.53) menghasilkan matriks *gain* $\bar{\mathbf{K}}$ optimal. Maka kontrol optimal dimana indeks performansinya sesuai Persamaan (2.50) adalah linear dan dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{u}(t) = -\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (2.54)$$

Untuk mendapatkan nilai $\bar{\mathbf{K}}$, maka harus mencari nilai matriks P terlebih dahulu. Matriks P adalah matriks simetris semi-definit positif yang didapatkan dari penyederhanaan Persamaan (2.51) atau disebut *Algebraic Riccati Equation* (ARE) berikut ini:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (2.55)$$

Setelah matriks P didapat maka nilai $\bar{\mathbf{K}}$ dapat dicari melalui Persamaan (2.53). Nilai dari *gain* $\bar{\mathbf{K}}$ dapat dipisahkan seperti pada Persamaan (2.39).

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB III PERANCANGAN SISTEM

Pada bab ini akan dibahas mengenai perancangan dari keseluruhan sistem dalam tugas akhir ini. Perancangan sistem yang pertama dilakukan adalah melakukan linearisasi terhadap model matematika *plant* sistem pendulum kereta. Linearisasi model matematika sistem pendulum kereta dijelaskan dengan melakukan linearisasi di beberapa titik kerja. Sistem kontrol stabilisasi dirancang dengan menggunakan proses *LQR* yang dibuat berdasarkan model-model *linear* lokal telah diperoleh. Masing-masing model menggunakan pendekatan model *fuzzy* T-S dengan konsep PDC. Sistem kontrol *tracking* yang digunakan ialah dengan menggunakan kontroler PID. Metode *tuning* yang digunakan untuk memperoleh parameter PID ialah dengan menggunakan metode Ziegler-Nichols. Blok diagram *Simulink MATLAB* untuk simulasi pada sistem pendulum kereta akan ditunjukkan di akhir bab ini.

3.1 Linearisasi Model Pendulum

Linearisasi model sistem pendulum dilakukan di tiga titik kerja. Titik kerja linearisasi model pendulum ini diambil dari besar sudut pendulum yang terjadi, pada Tugas Akhir ini titik-titik linearisasi diambil pada sudut 0; 17,2 dan 28,6 derajat atau 0; 0,3 dan 0.5 radian.

Supaya teori kontrol linear dapat digunakan dalam desain kontroler, maka persamaan (2,4) harus dilinearisasi pada titik kerja yang diinginkan. Dalam melakukan prosedur linearisasi lokal pada sistem pendulum kereta, maka harus diketahui dulu titik equilibriumnya. Sehingga model matematika non-*linear* sistem pendulum kereta yang ditunjukkan pada persamaan (2.5). Model linear sistem pendulum kereta pada titik kerja $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ dan u^* adalah

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.1}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_4} \end{bmatrix}_{x=x^*} ; B = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial h_2(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial h_3(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial h_4(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{x=x^*}$$

Masing-masing elemen matriks **A** dan **B** dapat dilihat pada Lampiran A.1. Pada penurunan persamaan yang ada di Lampiran A.1 tersebut, dapat dilihat bahwa nilai x_1 tidak berpengaruh. Sehingga linearisasi divariasikan pada nilai x_2 saja, yaitu pada $x_2^*=0$ rad, $x_2^*=\pm 0,3$ rad dan $x_2^*=\pm 0,5$ rad.

Untuk titik kerja pertama:

$$\mathbf{x}^* = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad \text{dan} \quad u^* = 0$$

sehingga diperoleh:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{B}_1u \quad (3.2)$$

dengan

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2524 & 0 & -0,001 \\ 0 & 15,0319 & 0 & -0,0074 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8272 \\ 1,2370 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Untuk titik kerja kedua:

$$\mathbf{x}^* = [0 \quad \pm 0,3 \quad 0 \quad 0]^T \quad \text{dan} \quad u^* = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{B}_2u \quad (3.4)$$

dengan

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2069 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 14,2737 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8254 \\ 1,1791 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Untuk titik kerja ketiga:

$$\mathbf{x}^* = [0 \quad \pm 0,5 \quad 0 \quad 0]^T \quad \text{dan} \quad u^* = 0$$

diperoleh

$$\dot{x}=\mathbf{A}_3x+\mathbf{B}_3u \quad (3.6)$$

dengan

$$\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,1334 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 12,9686 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8224 \\ 1,0792 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Matriks keluaran dan matriks transmisi langsung untuk titik kerja tersebut ada pada *state* pertama yaitu posisi kereta dan dapat dituliskan:

$$\mathbf{C}_1=\mathbf{C}_2=\mathbf{C}_3=[I \ 0 \ 0 \ 0] \quad (3.8)$$

Persamaan (3.2) hingga (3.8) merupakan model linear dari sistem pendulum kereta di sekitar titik kerja $x_2^*=0$ rad, $x_2^*=\pm 0,3$ rad dan $x_2^*=\pm 0,5$ rad.

3.2 Pemodelan *Fuzzy Takagi-Sugeno*

Dari hasil linearisasi sistem pendulum kereta, dapat disusun model *fuzzy* T-S. Dengan melinearisasi pada tiga titik kerja, yaitu $x_2^*=0$ rad, $x_2^*=\pm 0,3$ rad dan $x_2^*=\pm 0,5$ rad, maka model *fuzzy* T-S yang digunakan memiliki tiga aturan dengan satu variabel premis, yaitu sudut pendulum. Dengan menggunakan model linear pada (3.3),(3.5), dan (3.7), maka model *fuzzy* T-S dapat dibentuk dengan aturan sebagai berikut:

Aturan *plant* ke-1:

If $x_2 = M_1$ (sekitar 0 rad)

Then $\dot{x}(t)=\mathbf{A}_1x(t)+\mathbf{B}_1u(t)$

$y(t)=\mathbf{C}_1x(t)$ (3.9)

Aturan *plant* ke-2:

If $x_2 = M_2$ (sekitar $\pm 0,3$ rad)

Then $\dot{x}(t)=\mathbf{A}_2x(t)+\mathbf{B}_2u(t)$

$y(t)=\mathbf{C}_2x(t)$ (3.10)

Aturan *plant* ke-3:

If $x_2 = M_3$ (sekitar $\pm 0,5$ rad)

Then $\dot{x}(t)=\mathbf{A}_3x(t)+\mathbf{B}_3u(t)$

$y(t)=\mathbf{C}_3x(t)$ (3.11)

Dengan menggunakan konsep PDC, dapat disusun aturan kontroler *Fuzzy* yang berseuaian dengan aturan *plant* menjadi sebagai berikut:

Aturan kontroler ke-1:
 If $x_2 = M_1$ (sekitar 0 rad)
 Then $u_1 = -\bar{K}_1 x(t)$ (3.12)

Aturan kontroler ke-2:
 If $x_2 = M_2$ (sekitar $\pm 0,3$ rad)
 Then $u_2 = -\bar{K}_2 x(t)$ (3.13)

Aturan kontroler ke-3:
 If $x_2 = M_3$ (sekitar $\pm 0,5$ rad)
 Then $u_3 = -\bar{K}_3 x(t)$ (3.14)

Fungsi keanggotaan yang dipilih untuk digunakan adalah fungsi keanggotaan segitiga dan trapesium. M_1 dan M_2 adalah fungsi keanggotaan segitiga dengan parameter fungsi keanggotaan segitiga $\{a;b;c\} = \{-0,3;0;0,3\}$ dan $\{0;0,3;0,5\}$, sedangkan M_3 adalah fungsi keanggotaan trapesium dengan parameter fungsi keanggotaan trapesium $\{a;b;c;d\} = \{0,3;0,5;2;1,57\}$.

Dalam Tugas Akhir ini digunakan inferensi *fuzzy* dengan penghubung *AND* dan metode defuzifikasi yang digunakan adalah rerata berbobot. Bentuk model *fuzzy* T-S secara keseluruhan sebagai berikut:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^3 w_i(x_2) [\mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)]$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^3 w_i(x_2) C_i x(t) \quad (3.15)$$

Keluaran dari kontroler *fuzzy* dituliskan sebagai berikut:

$$u(t) = \sum_{i=1}^3 w_i(x_2) [-\bar{K}_i x(t)] \quad (3.16)$$

dengan

$$w_i(x_2(t)) = \frac{\mu_i(x_2(t))}{\sum_{i=1}^3 \mu_i(x_2(t))}; \mu_i(x_2) = M_i(x_2(t))$$

Substitusi Persamaan (3.12) ke (3.13) akan menghasilkan:

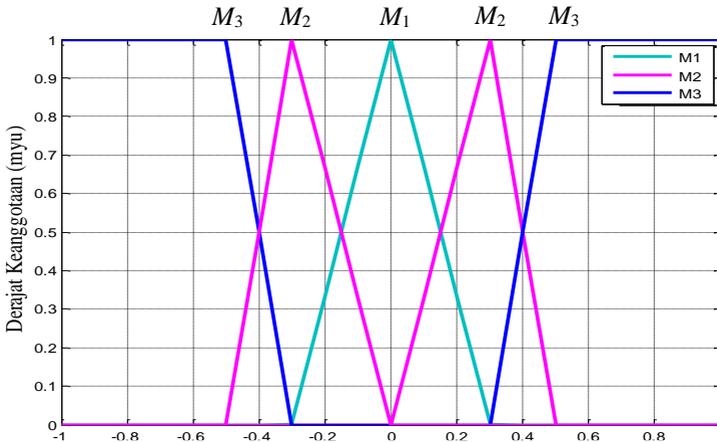
$$\dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i(x_2(t)) w_j(x_2(t)) [(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \bar{\mathbf{K}}_j) \bar{x}(t)]$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^3 w_i(x_2(t)) [C_i x(t)] \quad (3.17)$$

Sinyal kontrol yang dihasilkan dari model *Fuzzy T-S* dapat dituliskan menjadi sebagai berikut:

$$u(t) = M_1(x_2(t)) [-\bar{\mathbf{K}}_1 x(t)] + M_2(x_2(t)) [-\bar{\mathbf{K}}_2 x(t)] + M_3(x_2(t)) [-\bar{\mathbf{K}}_3 x(t)] \quad (3.18)$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^3 M_i(x_2) [-\bar{\mathbf{K}}_i x(t)] \quad (3.19)$$



Gambar 3.1 Fungsi Keanggotaan M_1 , M_2 dan M_3

3.3 Desain *Fuzzy-LQR*

Blok *fuzzy-LQR* yang terdapat di dalam sistem digunakan untuk proses stabilisasi agar sudut dari batang pendulum dapat tetap berada di

titik equilibriumnya. Proses yang ada di dalam blok ini merupakan proses pencarian *gain feedback* **K** dengan menggunakan fungsi *LQR* yang dicari berdasarkan tiga titik kerja berbeda yang telah ditentukan sebelumnya. Ketiga *gain feedback* **K** hasil perhitungan tersebut kemudian disusun dengan menggunakan model *fuzzy* T-S yang telah dibahas pada sub-bab sebelumnya.

3.3.1 Pemilihan Matriks Pembobot Q dan R

Sesuai dengan representasi persamaan *state* sistem yang telah diperoleh sebelumnya, matriks pembobot dipilih berbeda untuk setiap model linear. Pada tugas akhir ini, matriks **Q** dan **R** ditentukan dengan cara *trial and error* dengan syarat matriks merupakan matriks simetris semi definit positif untuk **Q** dan matriks simetris definit positif untuk **R**. Matriks pembobot yang dipilih adalah sebagai berikut :

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1510 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1510 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45660 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_1 = 0,5;$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 4250 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4212 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 65660 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_2 = 1;$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 4410 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4410 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6660 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_3 = 1; \tag{3.20}$$

Penentuan nilai matriks pembobot ini walaupun dilakukan dengan *trial and error* terdapat ketentuan-ketentuan yang perlu diperhatikan,

yaitu nilai *eigenvalue* dicari yang mendekati nilai -1, sinyal kontrol yang tidak melebihi 200 N.

3.3.2 Penentuan Gain Feedback K

Sesuai dengan persamaan (2.37) matriks perluasan / *augmented* dari sistem adalah sebagai berikut :

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \quad (3.21)$$

Dengan

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix};$$

Dimana matriks **A**, **B**, dan **C** masing-masing ialah matriks hasil linearisasi dari plant sistem pendulum kereta (3.3) sampai (3.8). Setelah mendapatkan matriks augmented sistem kita dapat menghitung besar gain **K** dengan menggunakan fungsi LQR pada Matlab dengan syntax `lqr` (Lampiran B) kemudian didapat:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_1 &= [-314,9854 \quad 524,6791 \quad -159,1634 \quad 136,1691 \quad 301,1920] \\ \bar{\mathbf{K}}_2 &= [-297,6378 \quad 428,2788 \quad -164,5275 \quad 137,3378 \quad 256,2421] \\ \bar{\mathbf{K}}_3 &= [-317,8990 \quad 422,9367 \quad -232,9390 \quad 204,7068 \quad 213,6820] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Gain **K** yang diperoleh dari proses dapat dipilah-pilah karena sistem mengalami perluasan (*augmented system*). Sesuai dengan persamaan (2.42), *Gain K feedback* yang dipakai dalam sistem adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= [-314,9854 \quad 524,6791 \quad -159,1634 \quad 136,1691] \\ \mathbf{K}_2 &= [-297,6378 \quad 428,2788 \quad -164,5275 \quad 137,3378] \\ \mathbf{K}_3 &= [-317,8990 \quad 422,9367 \quad -232,9390 \quad 204,7068] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sedangkan *gain* pada *vector* ke-5 matriks **K** adalah *gain* integral yang dijadikan sebagai nilai gain kontroler *fuzzy*-integral yang akan dijadikan sebagai sistem pembanding adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{K}_{i1} = [301,1920]$$

$$K_{i2} = [256,2421]$$

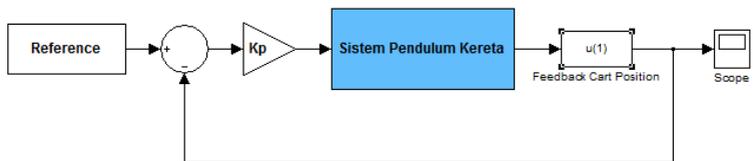
$$K_{i3} = [213,6820] \quad (3.24)$$

3.4 Penentuan Parameter PID / *Tuning* PID

Penentuan parameter / *tuning* kontroler PID dilakukan dengan menggunakan metode Ziegler-Nichols. Metode Ziegler-Nichols dibagi menjadi dua metode, yakni metode penentuan *open-loop* (biasanya digunakan untuk *plant* dengan orde satu) dan metode dengan penentuan *closed-loop*. Pada tugas akhir kali ini digunakan metode Ziegler Nichols dengan penentuan *closed-loop*.

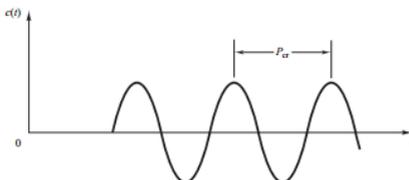
Tuning parameter PID dijelaskan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Susun Sinyal referensi / kondisi awal, Kontroler PID, dan plant secara closed loop dengan menghilangkan nilai dari K_i dan K_d pada PID dan menyisakan Gain Proporsional saja.



Gambar 3.2 Susunan *closed-loop* sinyal referensi, Gain Proporsional dan Sistem Pendulum Kereta

2. Tentukan nilai *Gain Ultimate / Critical* (K_{cr}) dengan merubah nilai K_p dari 0 hingga *value* dimana keluaran daripada sistem membentuk sebuah sinyal dengan osilasi yang tetap. *Value* tersebut akan menjadi nilai *Gain Critical* (K_{cr}) sedangkan periode dari Osilasi sinyal yang dihasilkan menjadi nilai dari *Periode Critical* (P_{cr}).



Gambar 3.3 Penentuan Periode *Critical* (P_{cr}) [3]

3. Penentuan parameter PID dilakukan dengan melihat perhitungan pada tabel berikut :

Tabel 3.1 Ziegler Nichols *Tuning Rule* [4]

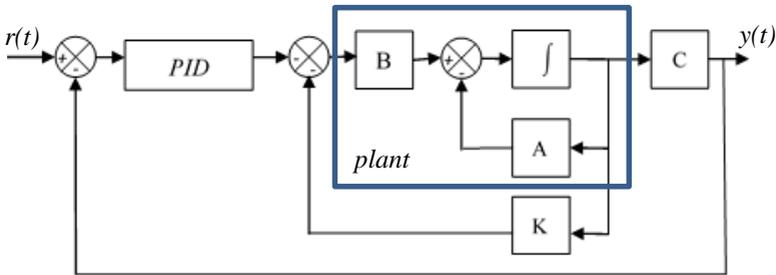
Tipe Kontroler	K_p	T_i	T_d
P	$0,5 K_{cr}$	<i>infinite</i>	0
PI	$0,45 K_{cr}$	$0,833 P_{cr}$	0
PID	$0,6 K_{cr}$	$0,5 P_{cr}$	$0,125 P_{cr}$

Pada Tugas akhir kali ini digunakan K_{cr} sebesar 140 dengan nilai P_{cr} didapat sebesar 0.591. Sesuai dengan tabel (3.1) dapat di dapat parameter dari PID sebagai berikut

$$K_p = 84 \qquad T_i = 0,2955 \qquad T_d = 0,073875 \qquad (3.25)$$

3.5 Diagram Blok Sistem Pengaturan

Struktur sistem *tracking* PID disusun dengan struktur sistem pengaturan seperti yang dilihat pada Gambar 3.4. Sinyal referensi yang diberikan akan masuk ke kontroler PID yang berfungsi sebagai kontroler *tracking* kemudian sinyal kontrol keluaran dari kontroler PID masuk ke *plant* Sistem Pendulum Kereta yang telah dilakukan proses stabilisasi batang pendulum dengan menggunakan gain *feedback* dari *LQR*. Keluaran dari sistem *plant* akan di feedback kan untuk dijadikan masukan dengan sinyal referensi untuk menjadi sinyal error kontroler PID. Diagram dari blok PID dapat dilihat pada Lampiran B.



Gambar 3.4 Struktur Sistem *tracking* PID

3.6 Perancangan Simulasi

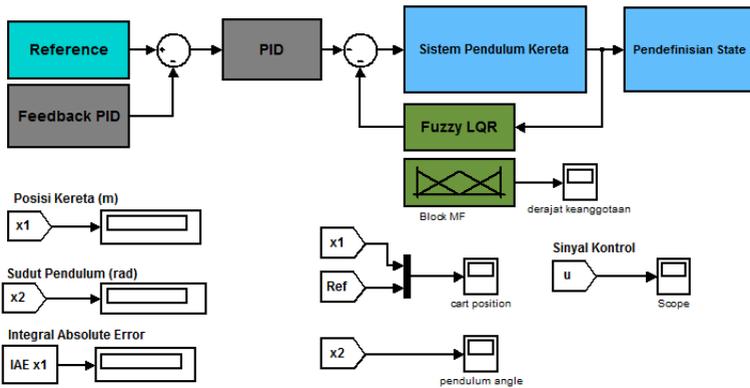
Diagram Simulink untuk simulasi dapat dilihat pada Gambar 3.6 dan Gambar 3.7. Diagram simulasi memiliki blok “*Reference*” yang berisi

sinyal-sinyal referensi yang dibentuk dari blok *Signal Generator* dan blok *Step* yang ada di *Simulink library*. Blok ini menghasilkan sinyal referensi ($r(t)$) yang akan diikuti oleh kereta.

Sistem pendulum kereta dibentuk oleh sebuah blok “Sistem Pendulum Kereta” berisikan model matematika nonlinear dari sistem pendulum kereta. Blok ini memiliki satu masukan $u(t)$ dengan empat keluaran *state* $\mathbf{x}(t)$. *State plant* akan masuk ke dalam blok *Fuzzy LQR*. Blok ini memproses sinyal keluaran dari plant dan memberinya *gain feedback*, lalu kembali masuk sebagai masukan pada plant dengan tambahan masukan dari PID sebagai *error* untuk menghasilkan sinyal kontrol. Pembagian *state* dari keluaran *plant* ada di dalam blok “pendefinisian *state*” dimana *state* yang dikontrol merupakan \mathbf{x}_1 yaitu posisi kereta. Keluaran *state* \mathbf{x}_1 di *feedback* kembali ke awal sebagai masukan blok PID bersama dengan sinyal referensi. Pada sistem pembandingan, kontroler diganti dengan kkontroler integral.

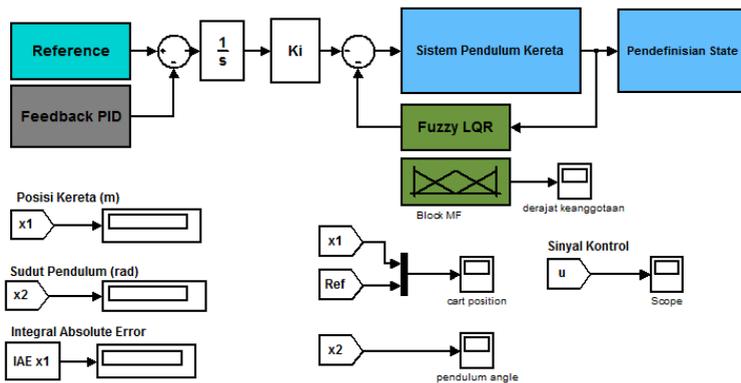
Isi dari setiap blok yang terdapat pada Gambar 3.5 dan 3.6 dapat dilihat pada Lampiran B.1

Simulasi
 Desain Kontroler PID dan Fuzzy Takagi Sugeno untuk Kontrol Tracking pada Sistem Pendulum Kereta
 Aditya Bayu Erwindu / 2214105064



Gambar 3.5 Diagram Simulink Sistem Kontrol pada Simulasi

Simulasi
 Sistem Kontrol Tracking Fuzzy-Integral sebagai Pembanding
 Aditya Bayu Erwindu / 2214105064



Gambar 3.6 Diagram Simulink Sistem Kontrol Pembanding pada Simulasi

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB IV HASIL DAN ANALISA

Pada Bab ini akan dijelaskan hasil simulasi dari rancangan kontrol *tracking PID* dengan stabilisasi model *fuzzy T-S* pada sistem pendulum kereta. Simulasi menggunakan perangkat lunak *Simulink MATLAB R2012*. Sistem pendulum kereta yang dijadikan sebagai *role model* simulasi ialah *Digital Pendulum Mechanical Unit 33-200* dari *Feedback Instrument Ltd*.

Simulasi dilakukan dengan tiga bentuk sinyal referensi, yaitu sinyal referensi step, sinus dan sinyal referensi *square-wave*. Hasil respon Sistem pendulum kereta dari kontroler PID hasil penelitian nantinya akan dibandingkan dengan hasil respon dari sistem pendulum kereta dengan kontroler *fuzzy-Integral* untuk melihat perbedaan dan perbandingan dari performansi *tracking* kedua sistem tersebut. Pada simulasi perbandingan respon digunakan sinyal referensi berupa step dan sinus.

4.1 Hasil Simulasi

Setelah proses perancangan sistem dan kontroler, selanjutnya dilakukan proses simulasi dan implementasi. Simulasi sistem kontrol menggunakan perangkat lunak *Simulink MATLAB R2012*. Pada pengujian secara simulasi ini akan dianalisa hasil respon posisi kereta, posisi pendulum, dan sinyal control. Model gaya gesek pada simulasi diabaikan karena nilai nya sangat kecil dan mendekati nol. Ditentukan kondisi awal dari posisi pendulum sebesar 0,2 rad dan 0,3 rad. Kondisi awal tersebut terletak pada blok integrator yang ada pada blok sistem pendulum kereta. Sinyal referensi yang diberikan adalah sinyal step, sinus, dan *square-wave*. Setelah melakukan percobaan dalam mencari nilai matriks pembobot **Q** dan **R**, maka didapatkan:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1510 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1510 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45660 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_1 = 0,5;$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 4250 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4212 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 65660 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_2 = 1;$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 4410 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4410 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6660 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_3 = 1;$$

(4.1)

Setelah melakukan *tuning* dengan metode Ziegler-Nichols, didapatkan parameter kontroler PID sebagai berikut:

$$\mathbf{K}_p = 84 \quad \mathbf{T}_i = 0.2955 \quad \mathbf{T}_d = 0.073875 \quad (4.2)$$

4.1.1 Hasil Simulasi dengan Variasi Nilai Awal Sudut Pendulum

Simulasi dilakukan dengan menerapkan kondisi awal yang berbeda-beda pada sudut awal pendulum. Performansi kontrol *tracking* dikatakan baik apabila respon dari posisi kereta dapat mengikuti sinyal referensi dan mampu mempertahankan sudut posisi pendulum di equilibriumnya (0 rad). Respon posisi pendulum membutuhkan waktu dalam mencapai sudut 0 rad, semakin cepat dalam mencapai sudut 0 rad dan tidak memiliki undershoot lebih dari $\pm 17\%$ dari kondisi awal maka respon sudut pendulum dikatakan baik. Nilai parameter PID dan sinyal kontrol sangat mempengaruhi terhadap hasil dari respon posisi kereta dan posisi pendulum. Berdasarkan dari percobaan, nilai gain \mathbf{K} pada *state* untuk kontrol *tracking* nilai nya tidak boleh melebihi 1000, dengan nilai maksimal dari sinyal kontrol 200 N.

4.1.1.1 Simulasi Menggunakan Sinyal Step

Sinyal step yang digunakan pada simulasi dapat ditemukan pada *library source* pada *Simulink*. Nilai kondisi awal yang disimulasikan yaitu 0,2 dan 0,3. Analisa yang dilakukan meliputi posisi kereta, posisi pendulum, dan sinyal kontrol. Hasil respon posisi kereta menggunakan sinyal referensi sinyal step dapat dilihat pada Gambar 4.1.

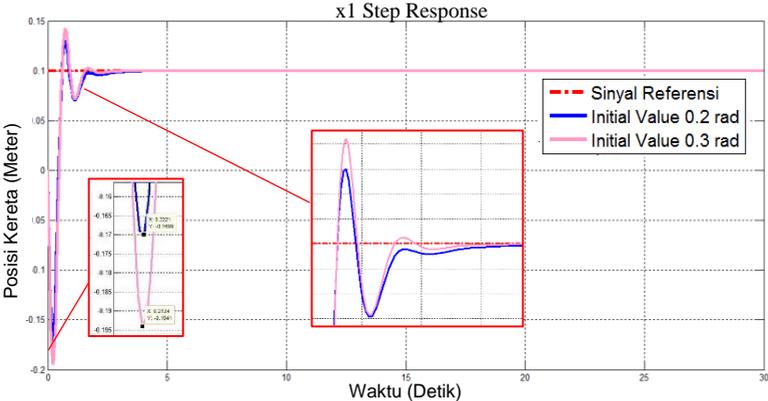
Gambar 4.1 menunjukkan respon posisi kereta dalam satuan meter dengan membandingkan respon posisi kereta yang memiliki kondisi awal berbeda terhadap sinyal referensi dengan amplitudo 0,1 m dan frekuensi 0,1 Hz . Dalam menentukan karakteristik dari spesifikasi respon posisi kereta, posisi pendulum, dan sinyal kontrol bergantung pada kondisi awal dimana respon tersebut dimulai. Pada kondisi awal 0,2 respon posisi kereta memiliki nilai *undershoot* -0,1699 meter, dan waktu yang dibutuhkan posisi kereta mampu mengikuti sinyal referensi sebesar 5 detik. Nilai *undershoot* respon posisi kereta pada kondisi awal 0,3 lebih besar yaitu -0,1941 meter dengan waktu posisi kereta dapat mengikuti sinyal referensi setelah 5 detik.

Perubahan kondisi awal yang berbeda membuat hasil respon pada posisi pendulum terlihat jelas. Pada Gambar 4.2 respon posisi pendulum dinyatakan dalam satuan radian. Pada kondisi awal 0,2, Gambar 4.2 menunjukkan respon posisi pendulum mengalami *undershoot* sebesar -0,1093 rad dan waktu untuk posisi pendulum dapat mencapai sudut 0 rad setelah 3 detik. Spesifikasi respon berbeda ditunjukkan pada saat kondisi mula 0,3. *Undershoot* lebih kecil dihasilkan yaitu -0,0951 rad dan waktu yang dibutuhkan untuk posisi pendulum dalam mencapai sudut 0 rad sama dengan pada saat kondisi mula 0,2 yaitu 3 detik.

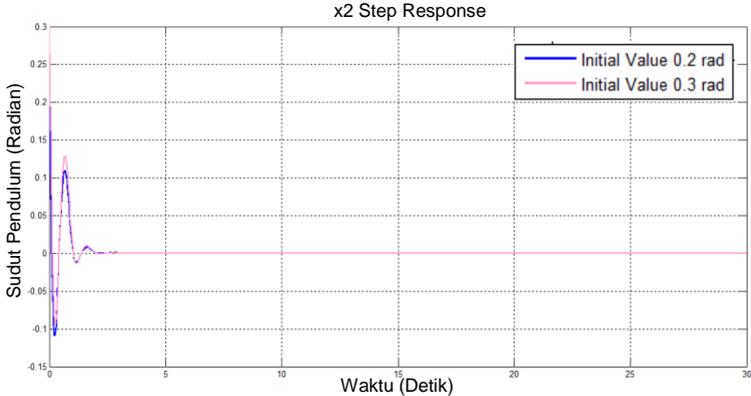
Pada Sub-bab 4.1 dijelaskan bahwa dalam percobaan terdapat salah satu spesifikasi yang mempengaruhi respon dari posisi kereta dan posisi pendulum yaitu sinyal kontrol, perubahan dari kondisi awal ini membuat perubahan nilai terhadap sinyal kontrol. Pada Gambar 4.3 ditunjukkan respon dari sinyal kontrol dengan berbagai kondisi awal. Sinyal kontrol dinyatakan dalam satuan Newton (N). Sinyal kontrol dikatakan baik dan dapat diaplikasikan saat memiliki nilai *undershoot* tidak lebih dari 200 N. Pada kondisi mula 0,2 sinyal kontrol untuk sistem pendulum kereta memiliki *undershoot* sebesar -162 N. dan nilai *undershoot* lebih kecil didapatkan pada saat kondisi mula 0,3 yaitu, -160 N.

Performansi *tracking* pada struktur kontrol hasil desain ini dapat dilihat bagaimana posisi kereta dapat mengikuti sinyal referensi dengan nilai *error* sekecil mungkin, pada pengujian dengan sinyal referensi step ini, performansi *tracking* didapatkan pada daerah *steady state* dari selisih sinyal referensi dengan hasil *absolute* respon *output* posisi kereta (*Integral Absolute Error*). Nilai IAE pada pengujian sinyal referensi step ini sebesar 0,1633. Nilai IAE pada pengujian secara simulasi ini akan dibandingkan dengan nilai IAE pada pengujian secara implementasi

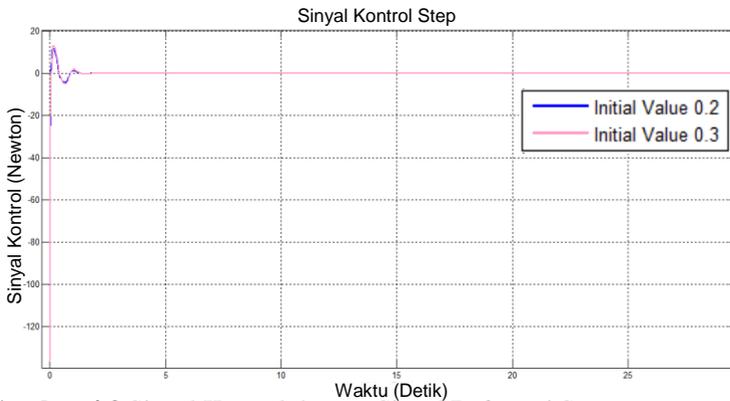
tujuannya untuk mengetahui perbedaan pengujian secara simulasi dan implementasi.



Gambar 4.1 Posisi Kereta dengan Sinyal Referensi Step



Gambar 4.2 Posisi Pendulum dengan Sinyal Referensi Step



Gambar 4.3 Sinyal Kontrol dengan Sinyal Referensi Step

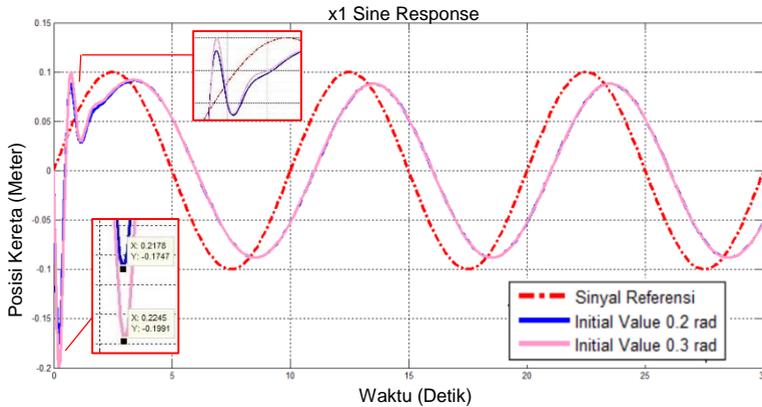
Tabel 4.1 Nilai *Overshoot* dan *Undershoot* untuk Respon Sistem dengan Referensi Sinyal Step

Kondisi Awal Sudut (Rad)	<i>Overshoot</i>		
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)	Sinyal Kontrol (N)
0,2	0,1328	0,1233	16,29
0,3	0,1443	0,132	16,892
Kondisi Awal Sudut (Rad)	<i>Undershoot</i>		
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)	Sinyal Kontrol (N)
0,2	-0,1699	-0,1093	-136,9
0,3	-0,1941	-0,0951	-136,9

4.1.1.2 Simulasi Menggunakan Sinyal Sinus

Sama dengan langkah-langkah ada simulasi sebelumnya, simulasi kali ini juga menggunakan Signal Generator sebagai sinyal referensi untuk mendapatkan sinyal berupa sinusoidal. Sinyal Referensi sinus ini memiliki Amplitudo sebesar 0,1 dan Frekuensi sebesar 0,62831853.

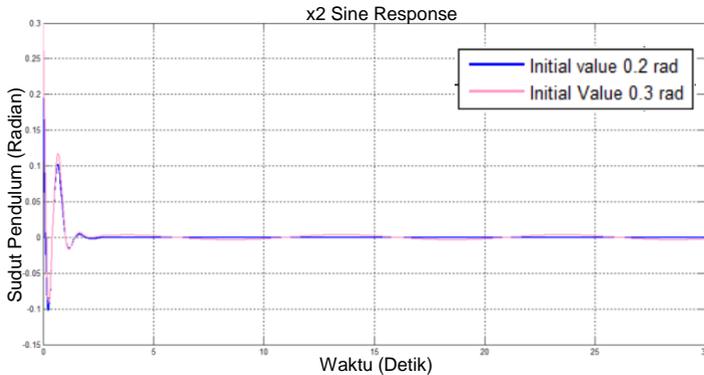
Kondisi awal pendulum tetap digunakan nilai yang sama yakni 0,2 rad dan 0,3 rad. Hasil simulasi respon posisi kereta terhadap sinyal referensi sinus dapat dilihat pada Gambar 4.4 di bawah ini:



Gambar 4.4 Posisi Kereta dengan Sinyal Referensi Sinus

Dapat kita lihat pada Gambar 4.4, pada kondisi awal 0,2 radian posisi kereta mengalami *undershoot* sebesar -0,1747 meter sedangkan pada kondisi awal 0,3 radian mengalami *undershoot* sebesar -0,1991. Pada simulasi dengan referensi sinus ini respon posisi kereta tidak dapat sepenuhnya mengikuti sinyal referensi, terdapat beda *amplitude* yang mengakibatkan besarnya jarak tempuh antara sinyal referensi dengan gerakan aktual dari posisi kereta. Beda *amplitude* tersebut adalah sebesar 0,012 meter. Selain beda *amplitude* terlihat juga bahwa terdapat perbedaan waktu respon antara sinyal referensi sinus dengan sinyal respon dari posisi kereta. Respon posisi kereta bergerak lebih lambat dari pada pergerakan dari sinyal referensi. Perbedaan waktunya dapat dilihat pada Gambar4.5 adalah sebesar 1,011 detik. Hal ini dikarenakan adanya perbedaan fase frekuensi antara kontroler PID dengan frekuensi sinyal referensi sinus. Hal ini dapat dihindari jika ditambahkan suatu model referensi ataupun kompensator ke dalam sistem.

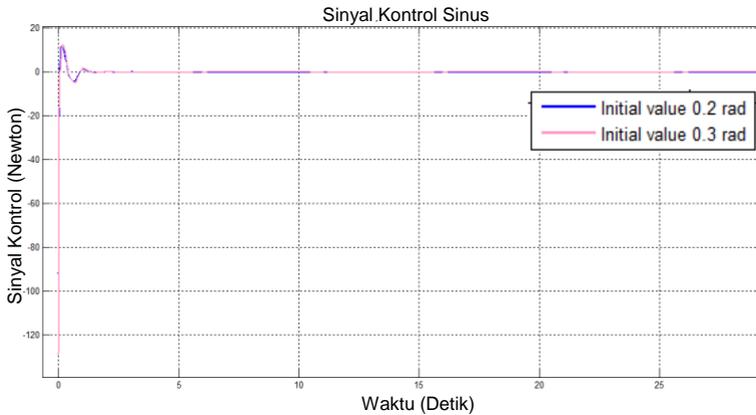
Meskipun posisi kereta tidak dapat melaksanakan tugasnya dalam melakukan *tracking* terhadap sinyal referensi, namun state yang lain, yaitu sudut pendulum tetap dapat melaksanakan tugasnya dalam mempertahankan batang pendulum pada posisi equilibriumnya. Hasil simulasi perbandingan respon posisi sudut pendulum dengan kondisi awal 0,2 radian dan 0,3 radian dapat dilihat pada Gambar 4.5 berikut:



Gambar 4.5 Sudut Pendulum dengan Sinyal Referensi Sinus

Posisi pendulum pada Gambar 4.5 menunjukkan perubahan kondisi awal yang berbeda-beda membuat perbedaan hasil respon pada posisi pendulum. Pada kondisi awal 0,2, menghasilkan *undershoot* sebesar -0,1018 rad dan waktu posisi pendulum dapat mencapai sekitar sudut 0 rad setelah 3 detik. Saat kondisi mula 0,3 rad, *undershoot* lebih kecil dihasilkan yaitu -0,0901 rad dengan waktu posisi pendulum dapat mencapai sudut sekitar 0 rad sebesar 3 detik.

Respon sinyal kontrol dengan nilai awal sudut 0,2 radian dan 0,3 radian terhadap sinyal referensi sinus dapat dilihat pada Gambar 4.6 di bawah. Pada kondisi mula 0,2 rad sinyal kontrol untuk sistem pendulum kereta memiliki *undershoot* sebesar -85 N. dan nilai *undershoot* lebih kecil didapatkan pada saat kondisi mula 0,3 yaitu, -128,9 N.



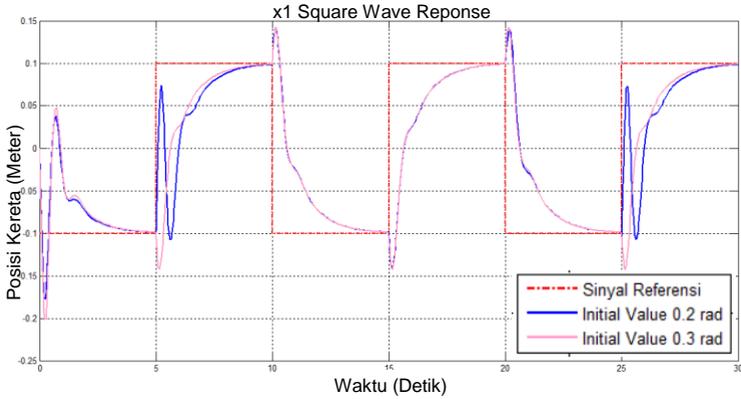
Gambar 4.6 Sinyal Kontrol dengan Sinyal Referensi Sinus

Tabel 4.2 Nilai *Overshoot* dan *Undershoot* untuk Respon Sistem dengan Referensi Sinyal Sinus

Kondisi Awal Sudut (Rad)	<i>Overshoot</i>		
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)	Sinyal Kontrol (N)
0,2	0,0684	0,1011	16,25
0,3	0,0988	0,1214	17,02
Kondisi Awal Sudut (Rad)	<i>Undershoot</i>		
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)	Sinyal Kontrol (N)
0,2	-0,1747	-0,1018	-92,14
0,3	-0,1991	-0,0907	-128,9

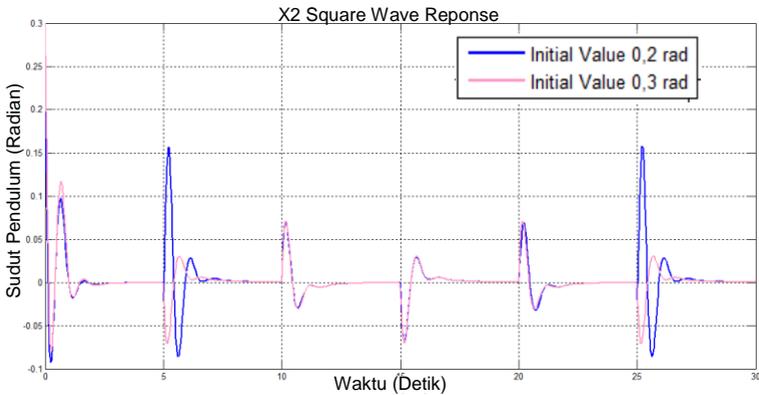
4.1.1.3 Simulasi Menggunakan Sinyal Square-Wave

Nilai kondisi awal yang disimulasikan masih tetap sama, yaitu 0,2 radian dan 0,3 radian. Sinyal *square-wave* merupakan sinyal dalam bentuk pulsa. Ini berbeda dengan sinyal step, karena kondisi sinyal step selalu pada bagian positif pada respon grafiknya. Dalam sinyal *square-wave* terdapat *range* dan amplitudo yang membuat grafik sinyalnya pada posisi positif dan negatif. Hasil respon posisi kereta menggunakan sinyal referensi sinyal *square-wave* dapat dilihat pada Gambar 4.7



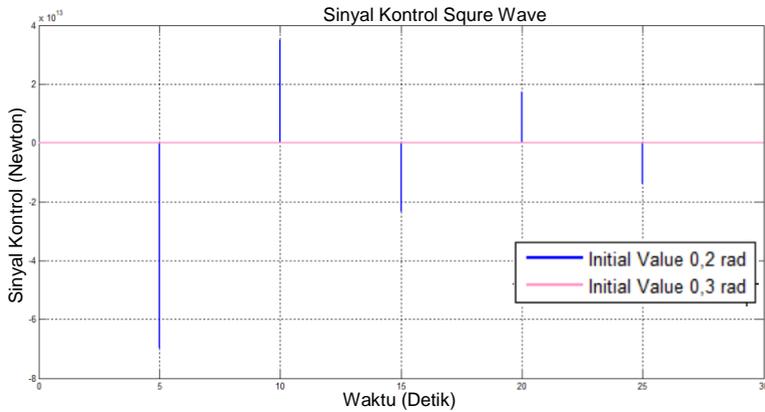
Gambar 4.7 Posisi Kereta dengan Sinyal Referensi *Square Wave*

Respon posisi kereta yang ditunjukkan membandingkan respon posisi kereta pada kondisi awal berbeda terhadap sinyal referensi. Pada kondisi awal 0,2 respon posisi kereta memiliki nilai *undershoot* -0,1777 meter. Kondisi awal 0,3 memiliki spesifikasi *undershoot* -0,1994 meter.



Gambar 4.8 Sudut Pendulum dengan Sinyal Referensi *Square Wave*

Respon posisi pendulum yang ditunjukkan pada Gambar 4.8 dengan kondisi awal 0,2 mengalami *undershoot* sebesar -0,0922 rad. Spesifikasi respon berbeda ditunjukkan saat kondisi mula 0,3 menghasilkan *undershoot* lebih besar yaitu -0,07901 rad.



Gambar 4.9 Sinyal Kontrol dengan Sinyal Referensi *Square Wave*

Dapat kita lihat dan bandingkan bahwa simulasi dengan menggunakan sinyal square wave mendapatkan hasil yang paling tidak baik diantara kedua sinyal lainnya, dengan nilai *Integral Absolute Error* (IAE) sebesar 1,232.

Tabel 4.3 Nilai *Overshoot* dan *Undershoot* untuk Respon Sistem dengan Referensi Sinyal *Square-wave*

Kondisi Awal Sudut (Rad)	<i>Overshoot</i>		
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)	Sinyal Kontrol (N)
0,2	0,024	0,09	$3,5 \times 10^{13}$
0,3	0,0411	0,12	$3,75 \times 10^{13}$
Kondisi Awal Sudut (Rad)	<i>Undershoot</i>		
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)	Sinyal Kontrol (N)
0,2	-0,1777	-0,08	$-6,83 \times 10^{13}$
0,3	-0,2023	-0,06	$-6,83 \times 10^{13}$

4.1.2 Hasil Simulasi dengan Variasi Nilai Awal Posisi Kereta

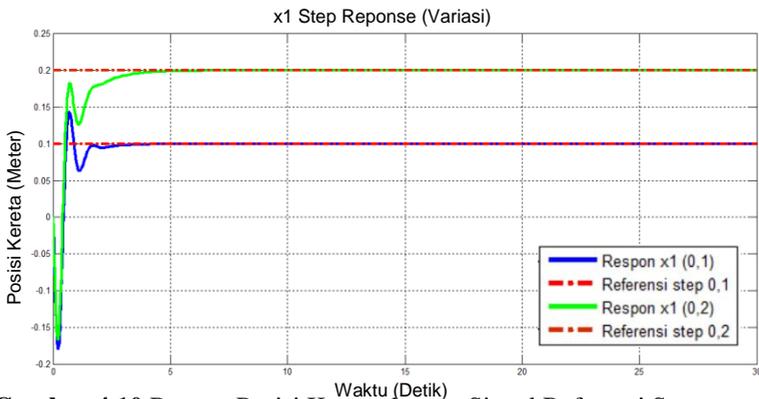
Setelah sebelumnya diberikan kondisi awal berupa sudut awal batang pendulum sebesar 0,2 rad dan 3,0 rad, pada sub bab ini simulasi Kontrol *tracking* PID dengan *fuzzy* T-S akan dilakukan dengan pemberian kondisi awal yang lain, yakni posisi kereta karena control *tracking* sendiri terjadi

dan memiliki referensi terhadap *state* posisi kereta. Dengan mengubah nilai awal posisi kereta, kita dapat tahu apakah respon struktur kontrol *tracking* yang telah dibuat mempunyai karakteristik respon *output* yang sama atau tidak terhadap perubahan nilai referensi pada posisi kereta yang diberikan.

Nilai referensi posisi kereta yang akan diberikan yaitu, 0,1 dan 0,2. Sudut awal batang pendulum di atur dengan nilai yang sama yaitu pada posisi 0,1 rad. Untuk sinyal referensi yang diujikan masih sama seperti sebelumnya yaitu sinyal step, sinus, dan *square-wave*.

4.1.2.1 Simulasi menggunakan Sinyal Step

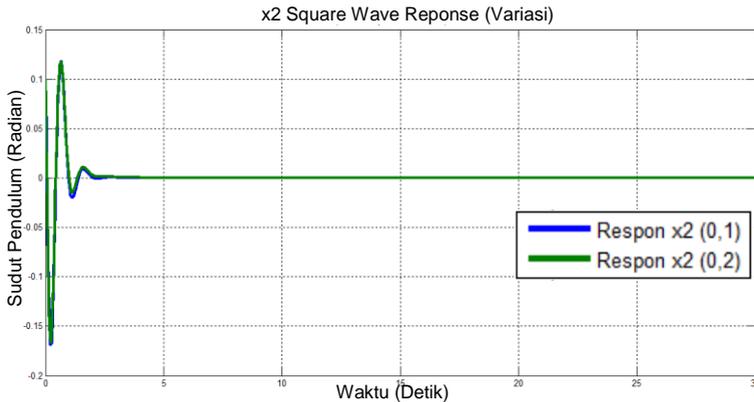
Simulasi dilakukan dengan memberi masukan sinyal referensi berupa sinyal step dengan memberikan nilai *final value* atau posisi awal dari kereta sebesar 0,1 dan 0,2 (pada sinyal referensi step) dengan initial condition pada sudut pendulum sebesar 0,1 rad. Hasil respon dari posisi kereta dapat dilihat pada gambar 4.10.



Gambar 4.10 Respon Posisi Kereta dengan Sinyal Referensi Step (Variasi)

Pada gambar dapat dilihat bahwa respon dari posisi kereta sama sama dapat men-*track* sesuai sinyal referensi variasi yang diberikan. Kedua respon menunjukkan bahwa keduanya mulai dapat mengikuti sinyal referensi mulai detik ke- 4,5. Pada respon dengan sinyal referensi 0,1 terdapat undershoot sebesar -0,1796. Pada sinyal referensi 0,2 nampak undershoot yang terlihat semakin sedikit yaitu -0,1664. Simulasi

dilanjutkan dengan melihat respon dari sudut pendulum. Dapat dilihat pada Gambar 4.11 berikut.

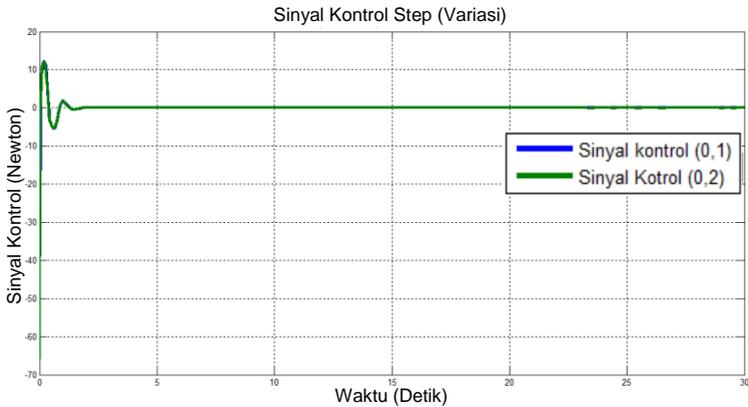


Gambar 4.11 Respon x_2 Sinyal Referensi Step (Variasi)

Pada gambar 4.11 dapat dilihat bahwa kedua respon dari sudut pendulum dapat mempertahankan posisinya pada sudut 0 radian. Kedua respon tersebut mulai memasuki posisi *equilibriumnya* setelah memasuki detik ke-3 pada simulasi. Pada sinyal referensi dengan nilai 0,1 dapat dilihat terdapat *undershoot* yang terjadi sebesar -0,1699 dan pada sinyal referensi dengan nilai 0,2 sebesar -0,1666.

Respon sinyal kontrol dengan nilai awal sinyal referensi step posisi kereta 0,1 meter dan 0,2 meter dapat dilihat pada Gambar 4.12 di bawah. Pada kondisi mula 0,1 meter sinyal kontrol untuk sistem pendulum kereta memiliki *undershoot* sebesar -66,05 N dan nilai *undershoot* lebih kecil didapatkan pada saat kondisi mula 0,2 yaitu, -57,65 N.

Performansi tracking pada tiap-tiap kondisi awal sinyal referensi dapat diketahui dengan menghitung *Integral Absolute Error (IAE)* dari masing-masing respon sistem. Didapat besar *IAE* pada sinyal referensi step kondisi awal 0,1 meter sebesar 0,1294 dan pada referensi step kondisi awal 0,2 meter sebesar 0,2218. Besar nilai *IAE* pada nilai awal sinyal referensi step 0,2 lebih besar namun masih dapat dikatakan sangat baik karena keduanya dapat melakukan *tracking* sesuai dengan kondisi sinyal referensi yang diberikan dan besar *IAE* masih tidak lebih besar dari 1.



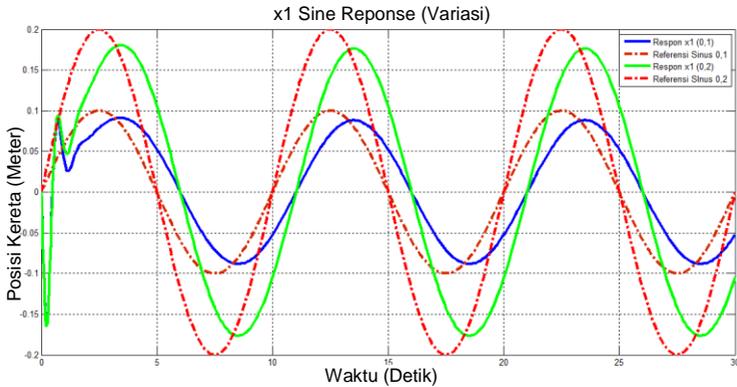
Gambar 4.12 Sinyal Kontrol Referensi Step (Variasi)

Tabel 4.4 Nilai *Overshoot* dan *Undershoot* untuk Respon Sistem dengan Referensi Sinyal Step Variasi

Kondisi Awal Kereta (Meter)	<i>Overshoot</i>		
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)	Sinyal Kontrol (N)
0,1	0,145	0,11	10,54
0,2	-	0,124	11,89
Kondisi Awal Kereta (Meter)	<i>Undershoot</i>		
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)	Sinyal Kontrol (N)
0,1	-0,1796	-0,1696	-66,05
0,2	-0,1664	-0,1666	-57,65

4.1.2.2 Simulasi menggunakan Sinyal Sinus

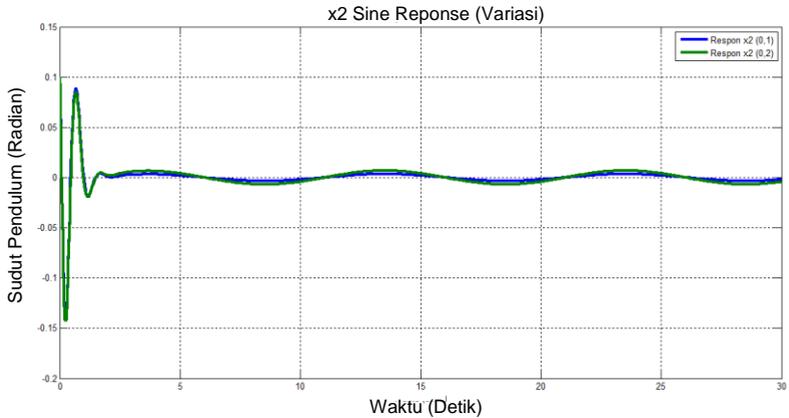
Simulasi dilakukan dengan memberi masukan sinyal referensi berupa sinyal sinus dengan memberikan nilai *final value* atau posisi awal dari kereta sebesar 0,1 dan 0,2 (pada sinyal referensi sinus) dengan initial condition pada sudut pendulum sebesar 0,1 rad. Hasil respon dari posisi kereta dapat dilihat pada gambar 4.13.



Gambar 4.13 Respon Posisi Kereta Sinyal Referensi Sinus (Variasi)

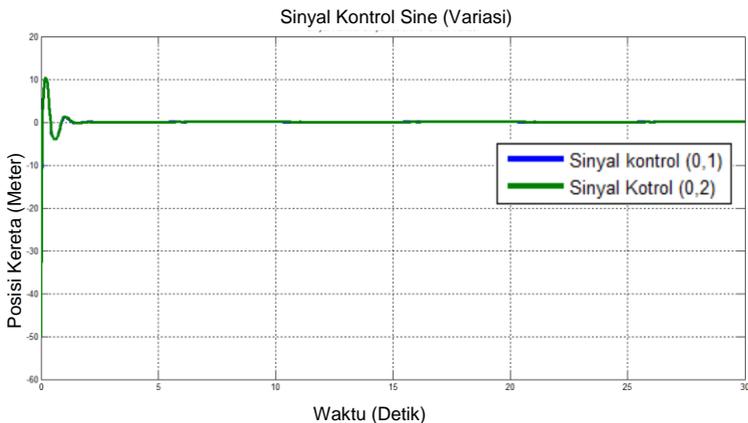
Dari gambar 4.13 dapat dilihat bahwa respon dari posisi kereta tidak sepenuhnya dapat *tracking* terhadap sinyal referensi yang diberikan. Respon dari posisi kereta menunjukkan adanya perbedaan besar amplitude dan perbedaan waktu respon. Pada sinyal referensi dengan nilai awal 0,1 terdapat beda amplitude sebesar 0,0903 meter dan waktu respon dari posisi kereta lebih lambat 1,052 detik dari sinyal referensi yang diberikan. Pada sinyal referensi dengan nilai awal 0,2, terdapat beda amplitude sebesar 0,1904 meter dan waktu respon dari posisi kereta lebih lambat 0,885 detik dari sinyal referensi yang diberikan. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa hal ini dikarenakan adanya beda fase antara kontroler PID dengan sinyal referensi sinus yang menyebabkan terjadinya perbedaan besar dan waktu respon dari sistem.

Simulasi dilanjutkan dengan melihat respon dari sudut pendulum. Dapat dilihat pada Gambar 4.14. Pada gambar 4.14 dapat dilihat bahwa kedua respon dari sudut pendulum dapat mempertahankan posisinya pada sudut 0 radian. Kedua respon tersebut mulai memasuki posisi *equilibriumnya* setelah memasuki detik ke-3 pada simulasi. Pada sinyal referensi dengan nilai 0,1 dapat dilihat terdapat *undershoot* yang terjadi sebesar -0,1372 dan pada sinyal referensi dengan nilai 0,2 sebesar -0,142.



Gambar 4.14 Respon Sudut Pendulum Sinyal Referensi Sinus (Variasi)

Respon sinyal kontrol dengan nilai awal sinyal referensi sinus posisi kereta 0,1 meter dan 0,2 meter dapat dilihat pada Gambar 4.15 di bawah. Pada kondisi mula 0,1 meter sinyal kontrol untuk 59system pendulum kereta memiliki *undershoot* sebesar $-49,25$ N dan nilai *undershoot* lebih besar didapatkan pada saat kondisi mula 0,2 yaitu, $-50,03$ N.



Gambar 4.15 Sinyal Kontrol Referensi Sinus (Variasi)

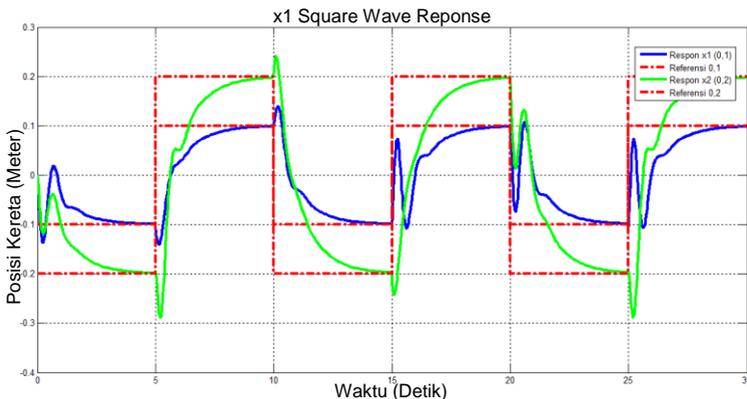
Didapat besar nilai *Integral Absolute Error (IAE)* pada sinyal referensi sinus dengan kondisi awal 0,1 meter sebesar 1,128 dan pada referensi sinus dengan kondisi awal 0,2 meter sebesar 2,21.

Tabel 4.5 Nilai *Overshoot* dan *Undershoot* untuk Respon Sistem dengan Referensi Sinyal Sinus Variasi

Kondisi Awal Kereta (Meter)	Overshoot		
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)	Sinyal Kontrol (N)
0,1	0,75	0,81	10,12
0,2	0,82	0,764	10,54
Kondisi Awal Kereta (Meter)	Undershoot		
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)	Sinyal Kontrol (N)
0,1	-0,1623	-0,1372	-49,25
0,2	-0,1651	-0,142	-50,03

4.1.2.3 Simulasi menggunakan Sinyal Square-Wave

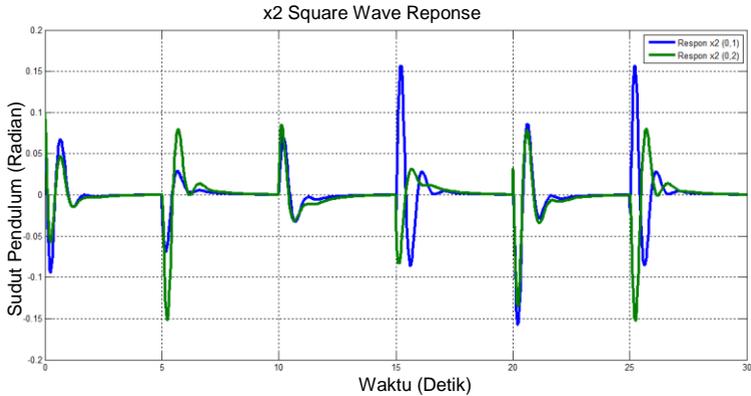
Simulasi dilakukan dengan memberi masukan sinyal referensi berupa sinyal sinus dengan memberikan nilai *final value* atau posisi awal dari kereta sebesar 0,1 dan 0,2 (pada sinyal referensi *square-wave*) dengan initial condition pada sudut pendulum sebesar 0,1 rad. Hasil respon dari posisi kereta dapat dilihat pada gambar 4.16.



Gambar 4.16 Respon Posisi Kereta Sinyal Referensi *Square-Wave* (Variasi)

Pada gambar dapat dilihat bahwa respon dari posisi kereta sama sama tidak dapat men-track sesuai sinyal referensi variasi yang diberikan.

Kedua respon menunjukkan bahwa keduanya tidak dapat mengikuti / menduplikasi bentuk sinyal referensi *square-wave* dengan baik. Pada respon dengan sinyal referensi 0,1 terdapat *undershoot* sebesar -0,1373. Pada sinyal referensi 0,2 nampak *undershoot* yang terlihat semakin sedikit yaitu -0,1171. Simulasi dilanjutkan dengan melihat respon dari sudut pendulum. Dapat dilihat pada Gambar 4.17 berikut.

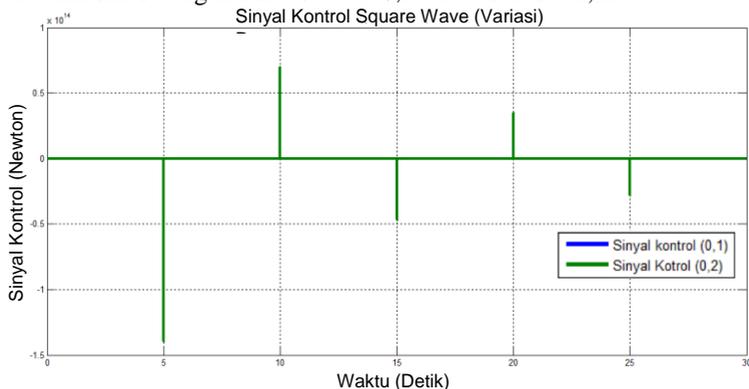


Gambar 4.17 Respon Sudut Pendulum Sinyal Referensi *Square-Wave* (Variasi)

Pada gambar 4.17 dapat dilihat bahwa kedua respon dari sudut pendulum juga tidak terlalu dapat mempertahankan posisinya pada sudut 0 radian. Kedua respon tersebut mulai memasuki posisi *equilibriumnya* setelah memasuki detik ke-3 pada simulasi namun pada detik ke 5 posisi sudut berubah / berosilasi kembali hingga 3 detik kemudian kembali stabil pada posisi 0 radian, hal ini berlanjut dengan pola waktu yang sama. Pada sinyal referensi dengan nilai 0,1 dapat dilihat terdapat *undershoot* yang terjadi sebesar -0,1373 dan pada sinyal referensi dengan nilai 0,2 sebesar -0,0942.

Respon sinyal kontrol dengan nilai awal sinyal referensi step posisi kereta 0,1 meter dan 0,2 meter dapat dilihat pada Gambar 4.18 di bawah. Pada kondisi mula 0,1 meter sinyal kontrol untuk sistem pendulum kereta memiliki *undershoot* sebesar $-1,4 \times 10^{14}$ N dan nilai *undershoot* lebih kecil didapatkan pada saat kondisi mula 0,2 yaitu, $-1,34 \times 10^{14}$ N.

Didapat besar nilai *Integral Absolute Error (IAE)* pada sinyal referensi sinus dengan kondisi awal 0,1 meter sebesar 1,128 dan pada referensi sinus dengan kondisi awal 0,2 meter sebesar 2,21.



Gambar 4.18 Sinyal Kontrol Referensi *Square-Wave* (Variasi)

Tabel 4.6 Nilai *Overshoot* dan *Undershoot* untuk Respon Sistem dengan Referensi Sinyal *Square-Wave* Variasi

Kondisi Awal Kereta (Meter)	<i>Overshoot</i>		
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)	Sinyal Kontrol (N)
0,1	0,12	0,065	$0,75 \times 10^{14}$
0,2	0,23	0,04	$0,75 \times 10^{14}$
Kondisi Awal Kereta (Meter)	<i>Undershoot</i>		
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)	Sinyal Kontrol (N)
0,1	-0,1373	-0,1056	$-1,4 \times 10^{14}$
0,2	-0,2764	-0,0942	$-1,34 \times 10^{14}$

4.2 Perbandingan Respon Hasil Simulasi

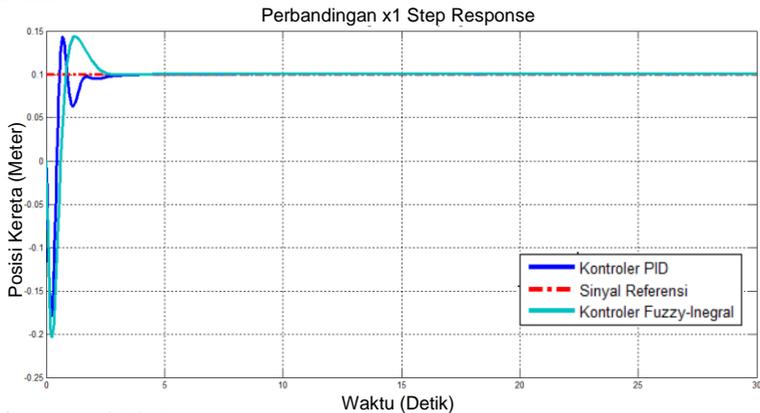
Simulasi dari sistem yang telah dibuat akan dibandingkan dengan sistem yang lain untuk mengetahui perbedaan performansi keduanya dan lebih baik mana jika diaplikasikan pada simulasi Sistem Pendulum Kereta nantinya. Sistem yang akan dijadikan sebagai pembanding ialah sistem kontrol *tracking fuzzy-Integral*. Kedua sistem memiliki kesamaan yakni

memiliki gain Integral sebagai blok kontroler *trackingnya* dan memiliki gain feedback *fuzzy-LQR* untuk mengatur stabilisasi batang pendulum.

Simulasi dilakukan dengan menggunakan dua buah bentuk sinyal referensi yaitu sinyal referensi step dan sinus. Hasil akhir yang akan dibandingkan ialah hasil respon tracking dari posisi kereta pada sistem pendulum kereta. Nilai awal yang diberikan pada perbandingan ialah diberikan nilai awal pada sudut pendulum sebesar 0,1 radian serta nilai awal posisi kereta sebesar 0,1 radian.

4.2.1 Perbandingan Respon dengan Sinyal Referensi Step

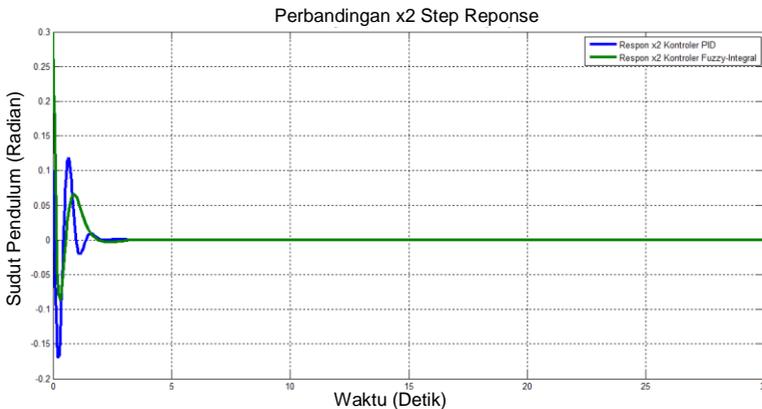
Pada perbandingan pertama ini dipakai sinyal referensi berupa sinyal step dengan besar initial condition 0,1 dan final value 0,1 (posisi awal kereta). Sudut awal dari pendulum diatur pada posisi 0,1 radian. Hasil perbandingan respon dari kedua sistem dapat dilihat pada gambar 4.19 berikut.



Gambar 4.19 Perbandingan sistem dengan Sinyal Referensi Step

Dari gambar 4.19 dapat dilihat bahwa respon kedua sistem dapat *track* sinyal referensi yang diberikan dengan baik dan dapat mengikuti bentuk sinyal referensi yang diberikan. Kontroler PID memiliki *rise-time* 0,225 detik, lebih cepat dari kontroler Fuzzy-Integral yang memiliki *rise time* 0,301 detik. Besar *undershoot* yang dihasilkan respon posisi kereta pada sistem dengan kontroler PID sebesar -0,179 meter, lebih kecil dibandingkan dengan yang dihasilkan oleh respon kontroler *fuzzy-integral* yang menghasilkan nilai *undershoot* sebesar -0,203 meter.

Nilai *overshoot* yang dihasilkan respon posisi kereta pada sistem dengan kontroler PID sebesar 0,1419 meter, lebih kecil dibandingkan dengan yang dihasilkan oleh respon kontroler *fuzzy-integral* yang menghasilkan nilai *overshoot* sebesar 0,1435 meter. Simulasi dilanjutkan dengan melihat perbandingan respon dari sudut pendulum.



Gambar 4.20 Perbandingan Respon x2 Sinyal Referensi Step

Pada gambar 4.20 dapat dilihat bahwa kedua kontroler dapat menghasilkan respon yang baik dan dapat mempertahankan batang oendulum pada posisi 0 radian. Pada sistem dengan kontroler PID dihasilkan nilai *undershoot* sebesar -0.169 radian, nilai ini lebih besar daripada nilai yang dihasilkan pada sistem dengan kontroler fuzzy-Integral yakni sebesar -0,08 radian. Nilai overshoot yang dihasilkan oleh respon sistem dengan kontroler PID sebesar 0,118 radian, lebih besar jika dibandingkan dengan sistem dengan kontroler *Fuzzy-Integral* yang memiliki nilai overshoot sebesar 0.06 radian.

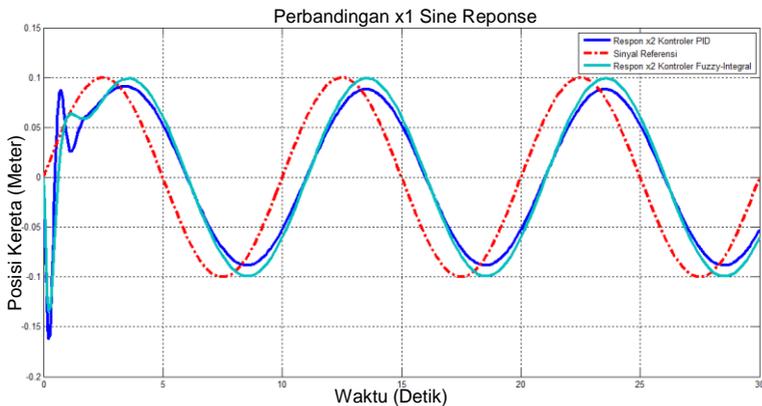
Performansi tracking dari kedua kontroler dapat dilihat dari perbandingan besar *Integral Absolute Error (IAE)* yang dihasilkan oleh kedua respon. Pada kotroler PID dihasilkan nilai *IAE* sebesar 0,1294 dan pada sistem dengan kontroler *fuzzy-integral* didapatkan nilai *IAE* sebesar 0,1877. Hal ini menunjukkan pada simulasi dengan sinyal referensi step, performansi *tracking* sistem dengan kontroler PID lebih unggul dibandingkan dengan sistem dengan kontroler *fuzzy-integral*.

Tabel 4.7 Perbandingan Nilai *Overshoot* dan *Undershoot* dengan Sinyal Referensi Step

Jenis Kotroler	<i>Overshoot</i>	
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)
<i>PID</i>	0,12	0,065
<i>Fuzzy-Integral</i>	0,23	0,04
Jenis Kontroler	<i>Undershoot</i>	
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)
<i>PID</i>	-0,1373	-0,1056
<i>Fuzzy-Integral</i>	-0,2764	-0,0942

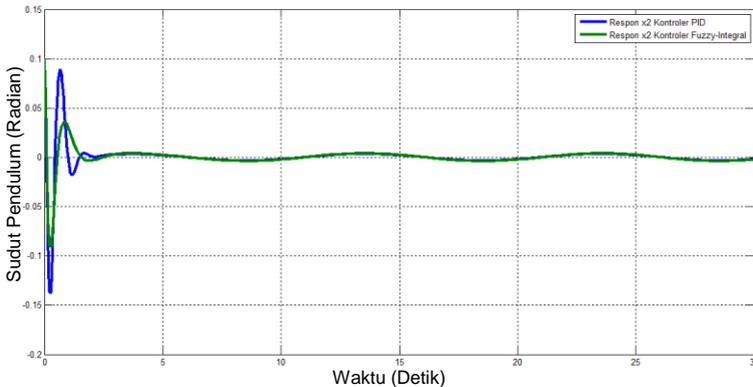
4.2.2 Perbandingan Respon dengan Sinyal Referensi Sinus

Pada perbandingan pertama ini dipakai sinyal referensi berupa sinyal step dengan besar initial condition 0,1 dan final value 0,1 (posisi awal kereta). Sudut awal dari pendulum diatur pada posisi 0,1 radian. Hasil perbandingan respon dari kedua sistem dapat dilihat pada gambar 4.21 berikut.



Gambar 4.21 Perbandingan Sistem dengan Sinyal referensi Sinus

Dari gambar 4.21 dapat dilihat bahwa respon dari posisi kereta tidak sepenuhnya dapat *tracking* terhadap sinyal referensi yang diberikan. Respon dari posisi kereta dari kedua kotroler menunjukkan adanya perbedaan besar amplitude dan perbedaan waktu respon. Pada sistem dengan kotroler PID memiliki respon dengan beda amplitude sebesar 0,0123 meter dan waktu respon dari posisi kereta lebih lambat 0,885 detik dari sinyal referensi yang diberikan. Pada sistem dengan kotroler fuzzy-integral memiliki respon dengan beda amplitude sebesar 0,0084 meter dan waktu respon dari posisi kereta lebih lambat 1,011 detik dari sinyal referensi yang diberikan. Simulasi dilakukan dengan melihat perbandingan respon dari sudut pendulum.



Gambar 4.22 Perbandingan Respon x_2 Sinyal Referensi Sinus

Pada gambar 4.22 dapat dilihat bahwa kedua kotroler dapat menghasilkan respon yang baik dan dapat mempertahankan batang oendulum pada posisi 0 radian. Pada sistem dengan kotroler PID dihasilkan nilai *undershoot* sebesar -0.1372 radian, nilai ini lebih besar daripada nilai yang dihasilkan pada sistem dengan kotroler fuzzy-Integral yakni sebesar -0,0906 radian. Nilai overshoot yang dihasilkan oleh respon sistem dengan kotroler PID sebesar 0,088 radian, lebih besar jika dibandingkan dengan sistem dengan kotroler *Fuzzy-Integral* yang memiliki nilai overshoot sebesar 0.036 radian.

Pada kotroler PID dihasilkan nilai *IAE* sebesar 1,128 dan pada sistem dengan kotroler *fuzzy-integral* didapatkan nilai *IAE* sebesar 1,193.

Tabel 4.8 Perbandingan Nilai *Overshoot* dan *Undershoot* dengan Sinyal Referensi Sinus

Jenis Kotroler	<i>Overshoot</i>	
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)
<i>PID</i>	0,08	0,088
<i>Fuzzy-Integral</i>	-	0,036
Jenis Kontroler	<i>Undershoot</i>	
	Posisi Kereta (Meter)	Posisi Pendulum (Rad)
<i>PID</i>	-0,1622	-0,1372
<i>Fuzzy-Integral</i>	-0,1339	-0,0906

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Setelah melakukan kegiatan perancangan sistem secara matematis, pembuatan model simulasi, serta simulasi sistem kontroler PID dan *fuzzy* T-S untuk kontrol *tracking* pada sistem pendulum kereta, dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Nilai pembobot dari matriks Q dan R sangat mempengaruhi kondisi hasil perhitungan dari proses *Linear Quadratic Regulator* sehingga mempengaruhi hasil sinyal keluaran dari sistem. Untuk mendapatkan nilai pembobot yang pas harus dilakukan *trial and error* hingga mendapat respon model dengan *overshoot* sekecil mungkin.
2. Hasil analisa respon dari kontroler PID dan *fuzzy* T-S menunjukkan bahwa respon posisi kereta dapat *men-track* sinyal referensi dengan baik kecuali pada sinyal referensi sinus dan *square wave*.
3. Hasil simulasi menunjukkan bahwa terdapat perbedaan amplitudo dan waktu pada sinyal referensi sinus.
4. Hasil analisa respon dari kontroler PID dan *fuzzy* T-S menunjukkan bahwa respon sudut pendulum dapat mempertahankan kedudukannya dalam posisi terbalik dengan masukan semua sinyal referensi kecuali sinyal referensi *square wave*.
5. Hasil dari keseluruhan analisa respon sistem menunjukkan bahwa sinyal referensi step merupakan sinyal referensi yang mendapatkan respon paling baik oleh sistem, dengan nilai *IAE* sebesar 0,1229.
6. Sistem dengan kontroler PID memberikan respon yang lebih baik daripada sistem dengan kontroler *fuzzy*-integral.

5.2 Saran

Untuk pengembangan berikutnya, dapat ditambahkan beberapa blok lain agar posisi kereta dapat *men-track* seluruh jenis sinyal referensi, karena PID hanya dapat *men-track* dengan baik sinyal referensi step. Bisa diujikan dengan penambahan blok kompensator, dual PID, ataupun model lainnya agar performansi *tracking* dari kereta dapat menjadi lebih baik.

Disarankan untuk tidak menggunakan sinyal berbentuk *square-wave* untuk kontroler PID ini karena hasil respon sistem menunjukkan sistem tidak dapat *mentrack* sinyal referensi masukan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Adenia, Rahma, “Kontrol Tracking Fuzzy-Optimal untuk Sistem Pendulum Kereta”. *Tugas Akhir Teknik Elektro ITS*, Surabaya, 2013
- [2] Rahmat, Hidayat., “Swing-up dan Tracking pada Pendulum Terbalik Menggunakan Kontrol Fuzzy,” *Tugas Akhir Teknik Elektro ITS*, Surabaya, 2006
- [3] Feedback Instruments Ltd, “*Digital Pendulum: Control in a MATLAB Environment (MATLAB 6.5 Version)*”,., 2004
- [4] Ogata, Katsuhiko, “*Modern Control Engineering*,”^{3rd} ed., Prentice-Hall., New Jersey, 1997.
- [5] Trihastuti A., Bahrudin, A. Jazidie, “Implementasi Kontrol Tracking Fuzzy Menggunakan Sistem Servo Tipe Integral Berbasis Observer Fuzzy Takagi-Sugeno pada Inverted Pendulum,” *Proceeding Seminar Nasional Electrical, Informatics, and It's Education*, Malang, 2009.
- [6] Naidu, Subbaram D., “*Optimal Control Systems*,” CRC Press, Idaho, Ch.3-4, 2002.
- [7] Lal, Bahadur., Barjeev, Tyagi., Hari, Om Gupta., “Optimal Control Of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input”, *International Journal Of Automation and Computing*, India, December, 2014
- [8] Soraya, Parlina, “Kontrol Kecepatan pada Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua Menggunakan Kontroler Fuzzy,” *Tugas Akhir Teknik Elektro ITS*, Surabaya, 2016
- [9] Abdul, Halim, “Kontrol Tracking Robot Pendulum Terbalik Beroda Dua Menggunakan Kontrol Fuzzy Hybrid,” *Tugas Akhir Teknik Elektro ITS*, Surabaya, 2013
- [10] L. B. Prasad, B. Tyagi, H. O. Gupta. Modelling and simulation for optimal control of nonlinear inverted pendulum dynamical system using PID controller and LQR. In *Proceedings of the 6th Asia Modelling Symposium*, IEEE, Bali, Indonesia, pp. 138–143, 2012.
- [11] V. Kumar, A. P. Mittal. Parallel fuzzy P + fuzzy I + fuzzy D controller: Design and performance evaluation. *International Journal of Automation and Computing*, vol. 7, no. 4, pp. 463–471, 2010

Halaman ini sengaja dikosongkan

LAMPIRAN A

A.1 Penurunan Model Matematika *Plant* Pendulum

Kecepatan kereta merupakan turunan pertama dari posisi kereta,

$$x_3 = \frac{dx_1}{dt} \text{ atau dapat ditulis } x'_1 = x_3 \quad (\text{A.1})$$

Sedangkan kecepatan sudut merupakan turunan pertama dari sudut,

$$x_4 = \frac{dx_2}{dt} \text{ atau dapat ditulis } x'_2 = x_4 \quad (\text{A.2})$$

Dalam penurunan dinamika sistem, berlaku hukum Newton II yang menghasilkan persamaan gerak secara translasi dan rotasi. Persamaan gerak translasi meliputi persamaan gerak translasi pada bidang horizontal dan bidang vertikal. Persamaan gerak translasi pada bidang horizontal dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum F_x = ma_x \quad (\text{A.3})$$

$$a_x = (x_1 - l \sin x_2)'' \quad (\text{A.4})$$

Dari persamaan (A.3) dan (A.4) didapat persamaan (2.2) yang dapat diuraikan sebagai berikut:

$$u - T_c = (m_c + m_p)(x_1 - l \sin x_2)''$$

$$u - T_c = (m_c + m_p)(x'_1 - x'_2 l \cos x_2)'$$

$$u - T_c = (m_c + m_p)(x''_1 - x''_2 l \cos x_2 + (x'_2)^2 l \sin x_2) \quad (\text{A.5})$$

Persamaan gerak translasi pada bidang vertikal dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum F_y = ma_y \quad (\text{A.6})$$

$$a_y = (l \cos x_2)'' \quad (\text{A.7})$$

Dari persamaan (A.6) dan (A.7) didapatkan Persamaan (2.3) yang dapat diuraikan sebagai berikut:

$$V - (m_c + m_p)g = (m_c + m_p)(l \cos x_2)''$$

$$V = (m_c + m_p)g + (m_c + m_p)(-l x'_2 \sin x_2)'$$

$$V = (m_c + m_p)g + (m_c + m_p)(-l x''_2 \sin x_2 - l(x'_2)^2 \cos x_2)$$

$$V = (m_c + m_p)(g - l x''_2 \sin x_2 - l(x'_2)^2 \cos x_2) \quad (\text{A.8})$$

Persamaan gerak rotasi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum \tau = J\alpha \quad (\text{A.9})$$

Dimana α adalah percepatan sudut dan τ adalah torsi yang berkerja pada sistem. Persamaan gerak rotasi yang ditunjukkan oleh Persamaan (2.3) yaitu:

$$\begin{aligned} (u - T_c)l \cos x_2 + VI \sin x_2 - D_p &= Jx_2'' \\ (u - T_c)l \cos x_2 + VI \sin x_2 - f_p x_4 &= Jx_2'' \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

2

Dinamika state x_4 didapat dengan mensubstitusi Persamaan (A.8) ke (A.10) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} Jx_2'' &= (u - T_c)l \cos x - f_p x_4 \\ &+ (m_c + m_p)(g - l x_2'' \sin x_2 - l(x_2')^2 \cos x_2)l \sin x_2 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Dengan mendefinisikan $\mu = (m_c + m_p)l$ dan diketahui $x_2' = x_4$ maka didapatkan:

$$\begin{aligned} Jx_4' &= (u - T_c)l \cos x_2 - f_p x_4 \\ &+ (m_c + m_p)l(g - \sin x_2 - l x_4' \sin^2 x_2 - l(x_4')^2 \cos x_2 \sin x_2) \\ Jx_4' &= (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - \mu l x_4' \sin^2 x_2 \\ &- f_p x_4 \\ x_4'(J + \mu l \sin^2 x_2) &= (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4 \\ x_4' &= \frac{(u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Dinamika state x_3 didapat dari persamaan (A.3) dan diketahui $x_1' = x_3$ dan $x_2' = x_4$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} u - T_c &= (m_c + m_p)(x_3' - x_4' l \cos x_2 + (x_4')^2 l \sin x_2) \\ (m_c + m_p)x_3' &= u - T_c - \mu(x_4')^2 \sin x_2 + \mu x_4' \cos x_2 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Dengan mendefinisikan $a = \frac{l^2 + J}{(m_c + m_p)}$ serta melakukan substitusi (A.10)

ke (A.11) akan didapat

$$\begin{aligned}
 (m_c + m_p) x_3' &= u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2 \\
 &+ \frac{\mu l \cos^2 x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} + \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 (m_c + m_p) x_3' &= \frac{(J + \mu l \sin^2 x_2)(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 &+ \frac{\mu l \cos^2 x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} + \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 (m_c + m_p) x_3' &= \frac{(J + \mu l)(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 &+ \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 x_3' &= \frac{(J + \mu l)l}{(m_c + m_p)l} \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} + \frac{\mu l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(m_c + m_p)l(J + \mu l \sin^2 x_2)} \\
 x_3' &= \left(l^2 + \frac{J}{(m_c + m_p)l} \right) \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 &+ \frac{l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)}
 \end{aligned}$$

Dengan mendefinisikan $a = l^2 + \frac{J}{(m_c + m_p)l}$, maka

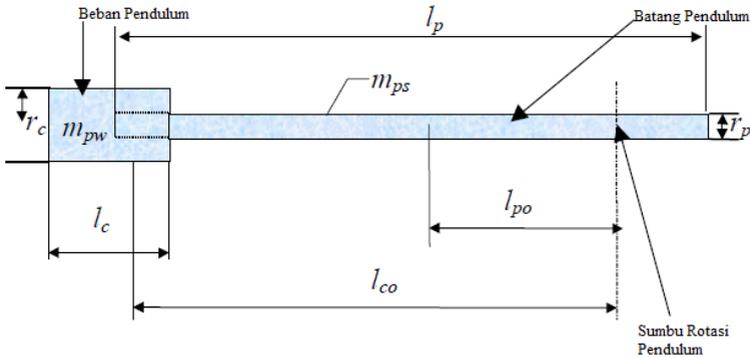
$$x_3' = \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \quad (\text{A.14})$$

Bentuk akhir persamaan *state* dari sistem pendulum kereta dapat dilihat pada Persamaan (2.4).

Nilai momen inersia dari sistem pendulum didapatkan dari hasil analisa momen inersia. Gambar ilustrasi momen inersia batang pendulum dintunjukkan pada Gambar A.1.

Dengan m_{pw} sebagai massa beban pendulum (kg), m_{ps} sebagai massa batang pendulum (kg), l_p sebagai panjang batang pendulum (m), l_{po}

Sebagai jarak antara titik pusat massa batang pendulum dengan sumbu putar pendulum (m), l_c sebagai panjang beban pendulum (m), l_{co} sebagai jarak antara titik pusat massa batang pendulum dengan sumbu putar pendulum (m), r_p sebagai radius batang pendulum (m), r_c sebagai radius beban pendulum (m).



Gambar A.1 Ilustrasi Momen Inersia Batang Pendulum [6]

Momen inersia pendulum dari sumbu rotasi pendulum diberikan oleh persamaan:

$$J_p = \left[\frac{1}{12} m_{pw} l_c^2 + \frac{1}{4} m_{pw} r_c^2 + m_{pw} l_{co}^2 \right] + \left[\frac{1}{12} m_{ps} l_p^2 + \frac{1}{4} m_{ps} r_p^2 + m_{ps} l_{po}^2 \right] \quad (\text{A.15})$$

Asumsikan pendulum sebagai silinder yang memiliki ketebalan seragam dengan panjang L dan massa m_p . Posisi pivot ada pada titik pusat massa kereta dan ujung batang pendulum sehingga titik pusat massa kereta adalah pada posisi pivot. Jika J adalah momen inersia dari sumbu tertentu terhadap titik pusat massa dan J_p adalah momen inersia dari sumbu yang parallel dengan sumbu sebelumnya yang dipisahkan oleh jarak sebesar d , maka persamaan momen inersia menjadi

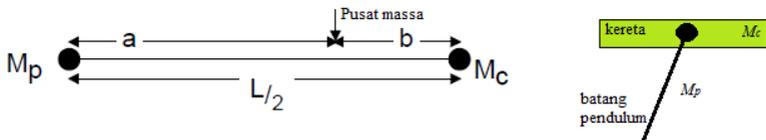
$$J_p = J + Md^2 \quad (\text{A.16})$$

Titik pusat massa sistem berada didekat titik pusat massa kereta seperti pada gambar A.2, sehingga dapat dirumuskan seperti pada Persamaan (A.17)

$$\begin{aligned} M_p a &= M_c b \\ a + b &= L/2 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Sehingga didapatkan momen inersia sistem terhadap pusat massa, yaitu

$$J = M_p a^2 + M_p b^2 + \frac{M_p}{12} L^2 \quad (\text{A.18})$$



Gambar A.2 Ilustrasi Momen Inersia Sistem Pendulum Kereta [6]

Dari persamaan (A.17) diperoleh nilai a dan b

$$a = \frac{LM_c}{2(M_p + M_c)} \text{ dan } b = \frac{LM_p}{2(M_p + M_c)} \quad (\text{A.19})$$

Jika persamaan (A.18) dan (A.19) dijabarkan akan didapat persamaan momen inersia sistem terhadap pusat massa seperti ditunjukkan pada Persamaan (A.20)

$$J = \frac{m_p(4m_c + m_p)L^2}{12(m_c + m_p)} \quad (\text{A.20})$$

Karena tidak ada rotasi pada kereta terhadap titik pusat massanya, maka J dapat diekspresikan dalam J_p

$$J = J_p - l^2(m_c + m_p) \quad (\text{A.21})$$

Sedangkan jarak pusat massa sistem terhadap sumbu putar adalah

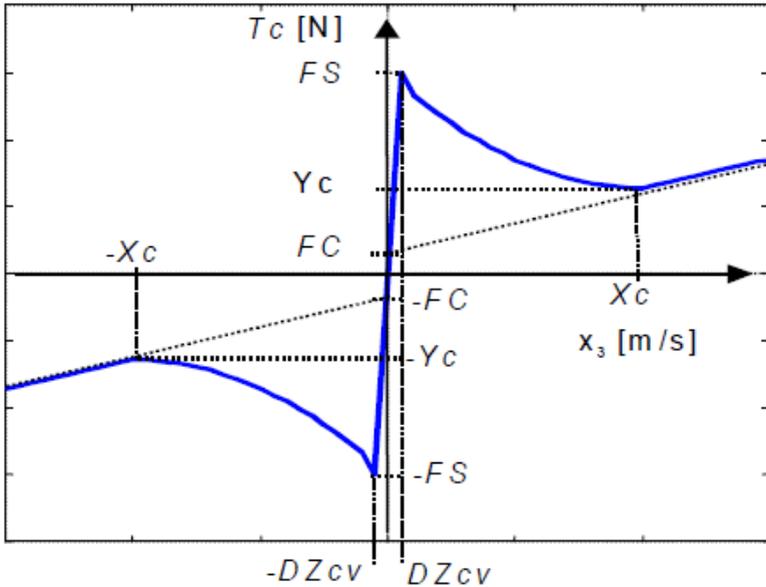
$$l = \frac{m_p L}{2(m_c + m_p)} \quad (\text{A.22})$$

Sementara gaya gesek kereta dengan rel berupa fungsi nonlinear dari kecepatan kereta x_3 seperti pada Gambar A.3. Kereta yang diam tidak memiliki gaya gesek terhadap lintasannya. Namun kereta yang mulai bergerak pada rel mempunyai gaya gesek statis (*static friction*) terhadap lintasannya dan ketika bergerak mempunyai gaya gesek dinamis (*coulomb friction*) yang tidak tetap dan tidak linear terhadap kecepatan kereta.

Dari Gambar A.3, F_s adalah *static friction* (N), F_c adalah *coulomb friction* (N), x_c adalah kecepatan kereta saat gaya gesek memasuki daerah linear, Y_c adalah gaya gesek pada titik x_c (N), DZ_{cv} adalah *dead zone* untuk kecepatan kereta. Selain dari itu pada Gambar A.3 menunjukkan bahwa gaya gesek dapat dibagi dalam lima zona. Zona 1 untuk $x_3 < -x_c$, zona 2 untuk $-x_c \leq x_3 < -DZ_{cv}$, zona 3 untuk $-DZ_{cv} \leq x_3 \leq DZ_{cv}$, zona 4 untuk $DZ_{cv} < x_3 \leq x_c$, zona 5 untuk $x_3 > x_c$.

Karena zona 1 dan 2 adalah pencerminan dari zona 4 dan 5, maka hanya tiga zona saja yang akan dibahas, yaitu zona 3, 4, dan 5. Pada zona 3, persamaan yang digunakan untuk merepresentasikan gaya gesek adalah persamaan linear karena kurva pada daerah itu adalah linear seperti pada Gambar A.3. Sehingga persamaan gaya geseknya dapat dirumuskan seperti pada Persamaan (A.23).

$$T_c = \frac{F_s \cdot x_3}{DZ_{cv}} \quad (\text{A.23})$$



Gambar A.3 Gaya Gesek T_c Terhadap Kecepatan Kereta x_3 [3]

Untuk zona 4, kurva gaya gesek adalah kurva parabolik, sehingga persamaan gaya gesek untuk zona 4 adalah persamaan kuadrat sebagai berikut:

$$T_c = \frac{(F_s - F_c)}{x_c^2} x_3^2 - 2 \frac{(F_s - Y_c)}{x_c} x_3 + F_s \quad (\text{A.24})$$

Dan untuk zona 5, persamaan gaya geseknya adalah

$$T_c = \frac{(Y_c - F_c)}{x_c} x_3 - F_c \quad (\text{A.21})$$

A.2 Elemen-Elemen Matriks Model Linear *Plant* Pendulum

Persamaan sistem nonlinear dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x) + h(x, u)$$

Maka dari Persamaan (2.7) akan didapatkan

$$f_1(\mathbf{x}) = x_3$$

$$f_2(\mathbf{x}) = x_4$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \frac{a(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$f_4(\mathbf{x}) = \frac{l \cos x_2 (-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

dan

$$h_1(\mathbf{x}, u) = 0$$

$$h_2(\mathbf{x}, u) = 0$$

$$h_3(\mathbf{x}, u) = \frac{au}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$h_4(\mathbf{x}, u) = \frac{ul \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

Adapun elemen-elemen matriks \mathbf{A} ,

$$\frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_3} = 1, \quad \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_4} = 1$$

$$\frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \frac{g\mu l \cos^2 x_2 - a\mu x_4^2 \cos x_2 - l \sin x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$- \frac{2\mu l \cos x_2 \sin x_2 (a(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2))}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2}$$

$$- \frac{2\mu l \cos x_2 \sin x_2 (l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4))}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2}$$

$$\frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_3} = \frac{a}{J + \mu l \sin^2 x_2} \frac{\partial T_c}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_4} = \frac{-2a\mu x_4 \sin x_2 - f_p l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$\frac{\partial f_4(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4(\mathbf{x})}{\partial x_2} &= \frac{\mu g \cos x_2 - \mu l x_4^2 \cos^2 x_2 - l \sin x_2 (-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ &\quad - \frac{2\mu l \cos x_2 \sin x_2 (l \cos x_2 (-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2))}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\ &\quad - \frac{2\mu l \cos x_2 \sin x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_4(\mathbf{x})}{\partial x_3} = \frac{l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} \frac{\partial T_c}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial f_4(\mathbf{x})}{\partial x_4} = \frac{-2\mu l x_4 \sin x_2 - f_p}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

Sedangkan elemen matriks **B**,

$$\frac{\partial h_1(\mathbf{x}, u)}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial h_2(\mathbf{x}, u)}{\partial u} = 0$$

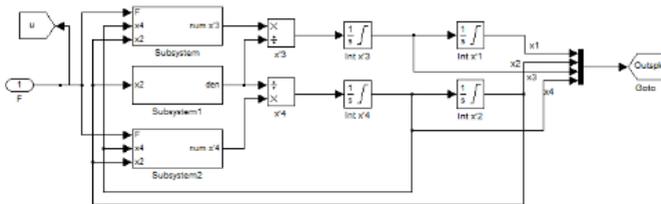
$$\frac{\partial h_3(\mathbf{x}, u)}{\partial u} = \frac{a}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$\frac{\partial h_4(\mathbf{x}, u)}{\partial u} = \frac{l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

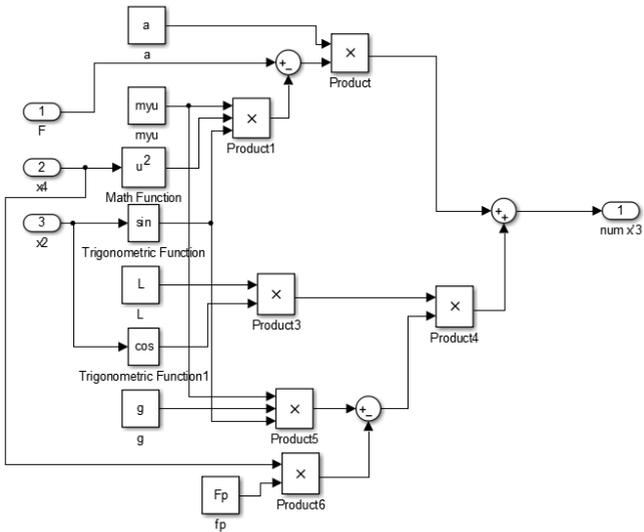
Lampiran B

B.1 Blok Diagram Simulink Simulasi

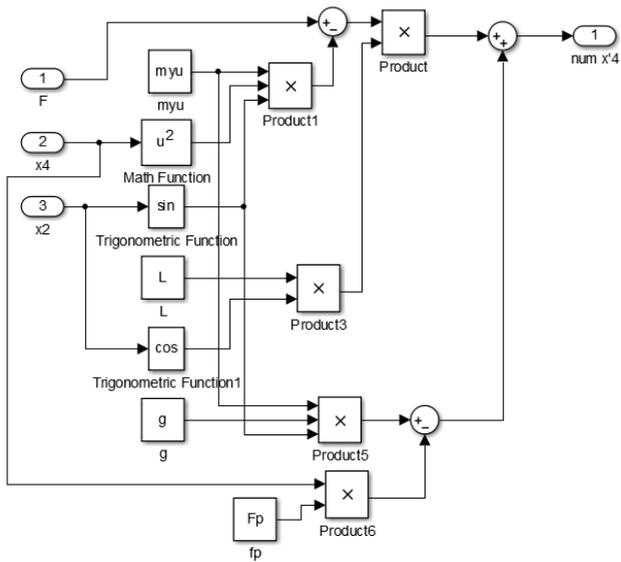
Blok Sistem Pendulum Kereta



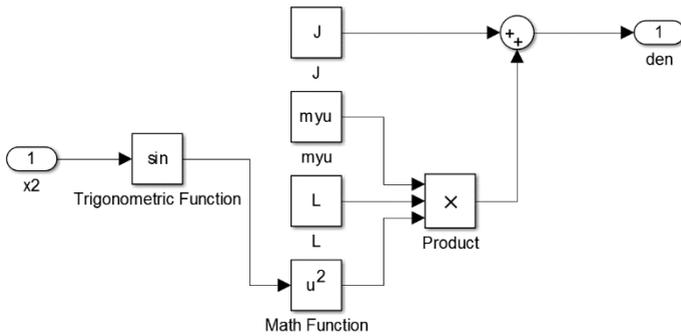
Blok Numerator \dot{x}_3



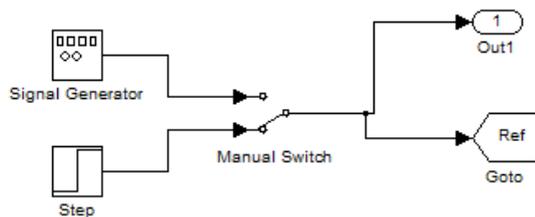
Blok Numerator \dot{x}_4



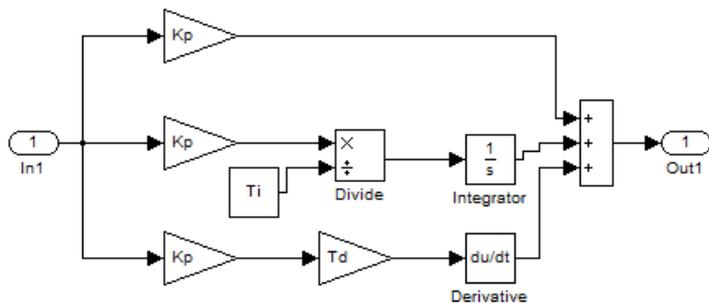
Blok Denominator



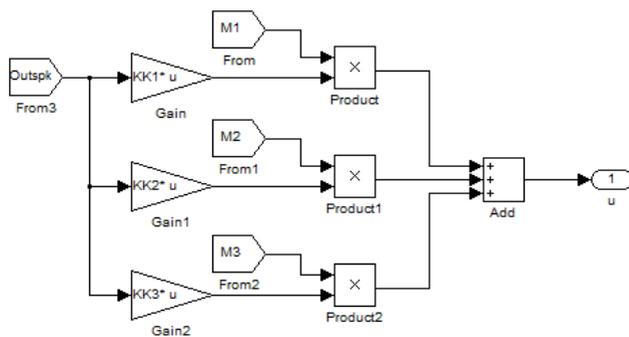
Blok Reference



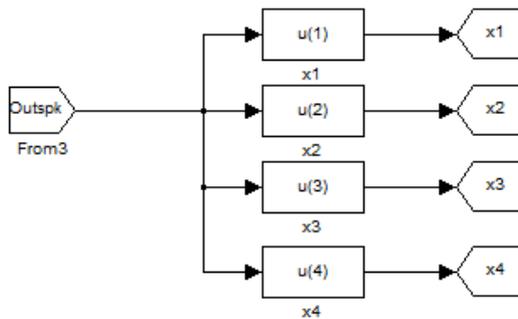
Blok PID



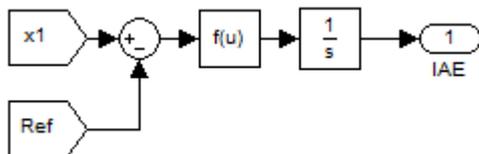
Blok Fuzzy LQR



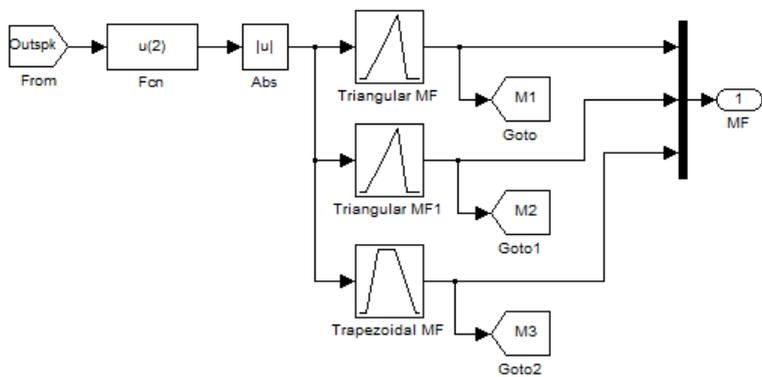
Blok Pendefinisian State



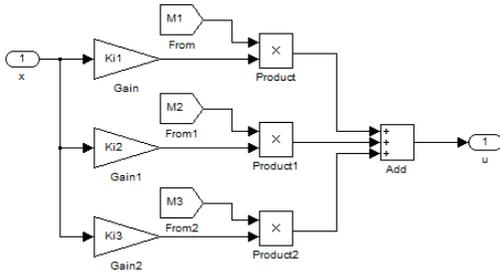
Blok IAE



Blok MF



Blok Ki Sistem *Fuzzy-Integral*



B.2 Program untuk Linearisasi dan Menghitung Nilai Gain

```
%%Aditya Bayu Erwindu / 2214105064%%  
%%Desain Kontroler PID dan Fuzzy Takagi Sugeno untuk  
Kontrol Tracking pada Sistem Pendulum Kereta%%
```

```
%%Parameter Sistem Pendulum Kereta
```

```
L=0.0167903;  
Fp=0.0001;  
myu=0.020819972;  
g=9.8;  
a=0.011228285;  
J=0.0135735;  
Tc=0;
```

```
%%Linierisasi SPK di tiap-tiap titik  
operasi/kerja
```

```
[A1,B1,C1,D1]=linmod('plantspk',[0 0 0 0],[0]);  
%0 radian  
[A2,B2,C2,D2]=linmod('plantspk',[0 0.3 0  
0],[0]); %0.3 radian  
[A3,B3,C3,D3]=linmod('plantspk',[0 0.5 0  
0],[0]); %0.5 radian
```

```
%%Matriks Keluaran State
```

```
C=[1 0 0 0];
```

```

%%Matriks Pembobot Q dan R
Q1=diag([1510 1510 400 10 45660]);
R1=0.5;

Q2=diag([4250 4212 120 11 65660]);
R2=1;

Q3=diag([1410 1410 10 113 6660]);
R3=1;

%%Matriks Augmentasi LQR
Aaug1=[A1 zeros(4,1);-C 0]
Baug1=[B1;0]

Aaug2=[A2 zeros(4,1);-C 0]
Baug2=[B2;0]

Aaug3=[A3 zeros(4,1);-C 0]
Baug3=[B3;0]

%%Perhitungan Gain LQR
[K1,P1,e1]=lqr(Aaug1,Baug1,Q1,R1)
[K2,P2,e2]=lqr(Aaug2,Baug2,Q2,R2)
[K3,P3,e3]=lqr(Aaug3,Baug3,Q1,R3)

%%Gain K (Feedback) LQR
KK1 = K1(1:4);
KK2 = K2(1:4);
KK3 = K3(1:4);

%%Parameter Kontroler Pemanding%%

%%Gain Integral Ki
Ki1 = K1(1,5);
Ki2 = K2(1,5);
Ki3 = K3(1,5);

```

Halaman ini sengaja dikosongkan

RIWAYAT PENULIS



Nama : Aditya Bayu Erwindu
TTL : Surabaya, 28 Mei 1993
Jenis Kelamin : Laki-laki
Agama : Islam
Alamat Rumah: Jl. Bratang Gede 3/ 69-C,
Surabaya
Telp/HP : 082232544666
E-mail : *aditya.bayu.e@gmail.com*

RIWAYAT PENDIDIKAN

- 1999 – 2005 : SD Negeri Ngagel Rejo I Surabaya
- 2005 – 2008 : SMP Negeri 12 Surabaya
- 2008 – 2011 : SMA Negeri 6 Surabaya
- 2011 – 2014 : Program Studi Komputer Kontrol D3 Teknik Elektro ITS.

PENGALAMAN ORGANISASI

- Ketua Departemen Kominfo Himpunan Mahasiswa D3 Tenik Elektro
- Ketua Divisi *Internal & Human Resource* Komunitas ITS JAZZ Surabaya