TESIS-SM 142501

ALGORITMA FILTER KALMAN PADA SISTEM TIDAK STABIL TEREDUKSI

ECHA AYU FATMAWATI
1215 201 006

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2017

THESIS-SM 142501

KALMAN FILTER ALGORITHM OF REDUCED UNSTABLE SYSTEMS

ECHA AYU FATMAWATI
NRP 1215 201 006

SUPERVISORS
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2017

ALGORITMA FILTER KALMAN PADA SISTEM TIDAK STABIL TEREDUKSI

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
ECHA AYU FATMAWATI
NRP. 1215 201 006

Tanggal Ujian : 13 Juni 2017
Periode Wisuda : September 2017

Disetujui oleh :

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si. (Pembimbing 1)
NIP. 19730930 199702 1 001

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. (Pembimbing 2)
NIP. 19660414 199102 2 001

Endah Rokhmati M.P., MT, Ph.D (Penguji)
NIP. 19761213 200212 2 001

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si. (Penguji)
NIP. 19830517 200812 1 003

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Dekan FMIPA,

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 00

ALGORITMA FILTER KALMAN PADA SISTEM TIDAK STABIL TEREDUKSI

Nama Mahasiswa	:	Echa Ayu Fatmawati
NRP	:	1215 201 006
Pembimbing	:	1. Dr. Didik Khusnul Arif S.Si., M.Si. 2. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.

ABSTRAK

Matematika berkembang sangat pesat sehingga Matematika sering digunakan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan di banyak bidang. Permasalahan yang ada dapat dibentuk menjadi sebuah sistem, dimana terdapat 2 macam sistem yaitu stabil dan tidak stabil. Pada fenomena alam yang terjadi, tidak semua sistem merupakan sistem yang stabil. Karena permasalahan nyata dalam pembentukan sistemnya membutuhkan banyak variabel, maka sistem memiliki ordo yang sangat besar. Pada sistem yang besar, pada umumnya tidak semua variabel diketahui sehingga dilakukan estimasi. Estimasi ini perlu dilakukan karena tidak semua besaran pada sistem tersebut dapat diukur secara langsung. Metode estimasi yang digunakan adalah algoritma filter Kalman. Estimasi variabel keadaan dengan filter Kalman dilakukan dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasarkan dinamika sistem dan data pengukuran. Sistem berorde besar dalam penyelesaiannya mempunyai tingkat penyelesaian yang rumit dan waktu komputasinya besar. Oleh karena itu, diperlukan suatu penyederhanaan sistem agar sistem menjadi lebih sederhana tanpa kesalahan yang signifikan. Proses yang digunakan untuk menyederhanakan sistem disebut reduksi model. Metode Pemotongan Setimbang adalah metode reduksi model yang paling sederhana dengan *output* yang dihasilkan dapat mempertahankan sifat-sifat sistem semula. Pada penelitian ini menggunakan sistem yang tidak stabil. Konstruksi algoritma filter Kalman pada sistem tidak stabil tereduksi dapat diperoleh dengan cara melakukan dekomposisi terlebih dahulu menjadi sistem stabil dan sistem tidak stabil. Jika pada sistem yang stabil memenuhi sifat terkendali dan teramati.

Maka bisa dilakukan reduksi model pada subsistem stabil. Subsistem stabil yang tereduksi digabung dengan subsistem tidak stabil sehingga diperoleh sistem tereduksi total. Pengkonstruksian algoritma filter Kalman, diperoleh dari sistem tereduksi total yang ditambahkan dengan derau sehingga didapatkan sistem tereduksi total stokastik. Hasil simulasi dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b didapatkan bahwa dari semua tipe matriks A, matriks A yang mempunyai *error* paling kecil adalah matriks A dengan bentuk tridiagonal dengan nilai *error* 0,1296 pada sistem tereduksi total orde 13. Untuk waktu komputasi paling cepat dimiliki oleh matriks A dengan bentuk segitiga atas dengan waktu komputasi 0,2874577 pada sistem tereduksi total orde 2. Pada hasil yang didapatkan hanya berlaku pada matriks A yang ada telah dikonstruksi.

Kata kunci: *Reduksi Model, Dekomposisi, Metode Pemotongan Setimbang, Sistem Tidak Stabil, Algoritma Filter Kalman*

KALMAN FILTER ALGORITHM ON REDUCED UNSTABLE SYSTEMS

Name	:	Echa Ayu Fatmawati
NRP	:	1215 201 006
Supervisors	:	1. Dr. Didik Khusnul Arif S.Si., M.Si. 2. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.

ABSTRACT

Mathematics is developed very rapidly, so mathematics is often used to complete various problems in many areas. The existing problems could be set up into a system, where there are two kinds of system which are stable and unstable. In natural phenomenas, not all systems are stable systems. Because real problems in the formation of the system needs many variables, then the system has a very large order. On a large system, generally not all variables are known, so it needs to be estimated. Estimation is clearly necessary because not all variables on those systems can be measured directly. An estimation method used is Kalman Filter algorithm. We estimate state variables using Kalman Filter where we predict state variables based on the dynamics of the systems and data measurements. High order systems is difficult to solve and its computation time is large. Hence, it needs a simplification system to simplify it without significant error. This reduced process is called model reduction. Balance truncation method is the simplest method of model reduction where it produces output that can maintain the properties of the original system. In this study, we use unstable system. The construction of the Kalman Filter algorithm on a reduced unstable system can be obtained by decomposing into stable and unstable system. The stable system satisfies controlled and observed properties. So that, we can reduce unstable subsystems. We combine reduced stable system with an unstable system, then we have a total reduced system. We construct Kalman Filter algorithm based on the total reduced system which consist of noise then we have the total stochastic reduced systems. The simulation result using MATLAB R2013b software found that from all type A matrix, matrix A

with tridiagonal shape has the smallest error i.e 0,1296 on the 13th order total reduced system. In the other side, matrix A with upper triangular shape has the fastest with computational time i.e 0,2874577 in the 2nd order total reduced system. This result are only applies to the existing matrix A which has been constructed.

Keywords : *Model Reduction, Decomposition, Balanced Truncation Methods, Unstable Systems, Kalman Filter Algorithm*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul

"Algoritma Filter Kalman pada Sistem Tidak Stabil Tereduksi"

Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA), Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Dalam penyelesaian Tesis ini, banyak kendala dan hambatan dalam pengerjaannya. Namun, berkat bimbingan, arahan, bantuan serta dukungan dari berbagai pihak, akhirnya penulis dapat menyelesaikan Tesis ini dengan baik. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada semua pihak, terutama kepada.

1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc., selaku Dekan MIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
2. Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T. selaku Ketua Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
3. Dr. Mahmud Yunus, M.Si. selaku Ketua Program Studi Pascasarjana Matematika ITS sekaligus dosen wali yang telah memberi bimbingan serta arahan dalam mengerjakan Tesis.
4. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si. dan Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. selaku dosen pembimbing atas segala bantuan, bimbingan, arahan dan motivasinya dalam mengerjakan Tesis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

5. Dr. Hariyanto, M.Si., Endah Rokhmati M.P., MT, Ph.D dan Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si. selaku dosen penguji atas semua kritik dan saran yang telah diberikan demi perbaikan Tesis ini.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Departemen Matematika ITS yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan dan juga atas segala bantuan, kemudahan dan kelancaran selama penulis mengikuti proses perkuliahan.
7. Ayah dan ibu, kedua orang tuaku, adek ku Isna Annysa terima kasih atas perhatian, doa dan segala dukungannya sampai terselesaikannya Tesis ini.
8. Dito Ferandy R., ayah dan ibu, kedua orang tua mas Dito terima kasih atas perhatian, doa dan segala dukungannya sampai terselesaikannya Tesis ini.
9. Ridho Alfarisi, Ida Ayu Putu Ari Utari, Helisyah, Trisna Rusdiana Dewi, Trifena P. Lesnussa atas segala bentuk semangat, dukungan, saran, kritik, motivasi yang diberikan kepada penulis selama awal masuk perkuliahan, mengerjakan Tesis, hingga terselesaikannya Tesis ini.
10. Teman – teman S2 Matematika ITS khususnya angkatan 2015 semester ganjil maupun genap atas persahabatan dan kenangan selama penulis menempuh pendidikan di Pascasarjana Matematika ITS .
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas segala bantuan baik langsung maupun tidak langsung.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak, sehingga penelitian selanjutnya diharapkan bisa lebih baik dan semoga laporan Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, bagi kemajuan dan perkembangan ilmu pengetahuan dan dapat berkontribusi terhadap kemajuan ITS, bangsa dan Negara.

Surabaya, Juni 2017

Penulis

DAFTAR ISI

		hal
LEMBAR PERSETUJUAN	....	v
ABSTRAK	....	vii
ABSTRACT	....	ix
KATA PENGANTAR	....	xi
DAFTAR ISI	....	xiii
DAFTAR GAMBAR	....	xv
DAFTAR TABEL	....	xvii
BAB I	PENDAHULUAN	1
	1.1 Latar Belakang	1
	1.2 Rumusan Masalah	2
	1.3 Batasan Masalah	3
	1.4 Tujuan	3
	1.5 Manfaat	3
	1.6 Sistematika Penulisan Tesis	3
BAB II	KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
	2.1 Penelitian-Penelitian Terkait	5
	2.2 Sifat Linear Waktu Diskrit …...	6
	2.2.1 Sifat-Sifat Sistem …………....................................	6
	2.2.2 Gramian Keterkendalian dan Gramian Keteramatan	8
	2.3 Dekomposisi Sistem Tidak Stabil …...............................	10
	2.4 Reduksi Model ....…...............................	10
	2.5 Metode Filter Kalman ....….......................	14
BAB III	METODE PENELITIAN	17
	3.1 Metode Penelitian	17
	3.2 Diagram Alir Penelitian	19
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	21
	4.1 Reduksi Model pada Sistem Tidak Stabil	21
	4.1.1 Dekomposisi Sistem Tidak Stabil ………….......................	21

		hal
	4.1.2 Reduksi pada Subsistem Stabil ……...................................	23
	4.1.3 Sistem Tereduksi Total …………...................................	30
	4.2 Konstruksi Algoritma Filter Kalman pada Sistem Tereduksi Total	31
	4.3 Simulasi	42
	4.3.1 Kasus 1 ....……….........................	42
	4.3.2 Kasus 2 ....……….........................	72
	4.3.3 Kasus 3 ....……….........................	125
	4.3.4 Kasus 4 ....……….........................	139
	4.3.5 Kasus 5 ....……….........................	154
BAB V	PENUTUP	169
	5.1 Kesimpulan	169
	5.2 Saran	171
DAFTAR PUSTAKA		173
LAMPIRAN A		175
LAMPIRAN B		193
LAMPIRAN C		219
LAMPIRAN D		227
LAMPIRAN E		235
BIODATA PENULIS		243

DAFTAR GAMBAR

		hal
Gambar 3.1	Diagram alir penelitian	19
Gambar 4.1	Nilai Singular Hankel	48
Gambar 4.2	Akurasi hasil estimasi pada sistem awal	48
Gambar 4.3	Akurasi hasil estimasi pada sistem setimbang	68
Gambar 4.4	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 7	69
Gambar 4.5	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 6	69
Gambar 4.6	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 5	70
Gambar 4.7	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 4	70
Gambar 4.8	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 3	71
Gambar 4.9	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 2	71
Gambar 4.10	Nilai Singular Hankel	79
Gambar 4.11	Akurasi hasil estimasi pada sistem awal	118
Gambar 4.12	Akurasi hasil estimasi pada sistem setimbang	118
Gambar 4.13	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 13	119
Gambar 4.14	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 12	119
Gambar 4.15	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 11	120
Gambar 4.16	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde10	120
Gambar 4.17	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 9	121
Gambar 4.18	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 8	121
Gambar 4.19	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 7	122
Gambar 4.20	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 6	122
Gambar 4.21	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 5	123
Gambar 4.22	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 4	123
Gambar 4.23	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 3	124
Gambar 4.24	Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 2	124
Gambar 4.25	Nilai Singular Hankel	130
Gambar 4.26	Akurasi hasil estimasi pada sistem awal	137
Gambar 4.27	Akurasi hasil estimasi pada sistem setimbang	137

hal
Gambar 4.28 Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 3 138
Gambar 4.29 Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 2 138
Gambar 4.30 Nilai Singular Hankel 144
Gambar 4.31 Akurasi hasil estimasi pada sistem awal 152
Gambar 4.32 Akurasi hasil estimasi pada sistem setimbang 152
Gambar 4.33 Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 3 153
Gambar 4.34 Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 2 153
Gambar 4.35 Nilai Singular Hankel 159
Gambar 4.36 Akurasi hasil estimasi pada sistem awal 166
Gambar 4.37 Akurasi hasil estimasi pada sistem setimbang 167
Gambar 4.38 Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 3 167
Gambar 4.39 Akurasi hasil estimasi pada sistem tereduksi total orde 2 168

DAFTAR TABEL

		hal
Tabel 2.1	Algoritma filter Kalman	16
Tabel 4.1	Nilai eigen matriks A	43
Tabel 4.2	Nilai Singular Hankel	48
Tabel 4.3	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_s$	49
Tabel 4.4	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr7}$	51
Tabel 4.5	Nilai eigen matriks A_{r7}	52
Tabel 4.6	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr6}$	54
Tabel 4.7	Nilai eigen matriks A_{r6}	55
Tabel 4.8	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr5}$	57
Tabel 4.9	Nilai eigen matriks A_{r5}	58
Tabel 4.10	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr4}$	59
Tabel 4.11	Nilai eigen matriks A_{r4}	61
Tabel 4.12	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr3}$	62
Tabel 4.13	Nilai eigen matriks A_{r3}	63
Tabel 4.14	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr2}$	65
Tabel 4.15	Nilai eigen matriks A_{r2}	66
Tabel 4.16	Hasil estimasi variabel setiap sistem	67
Tabel 4.17	Nilai eigen matriks A	73
Tabel 4.18	Nilai Singular Hankel	79
Tabel 4.19	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_s$	80
Tabel 4.20	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr13}$	82
Tabel 4.21	Nilai eigen matriks A_{r13}	84

hal

Tabel 4.22 Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr12}$ 86

Tabel 4.23 Nilai eigen matriks A_{r12} 87

Tabel 4.24 Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr11}$ 89

Tabel 4.25 Nilai eigen matriks A_{r11} 90

Tabel 4.26 Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr10}$ 92

Tabel 4.27 Nilai eigen matriks A_{r10} 93

Tabel 4.28 Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr9}$ 95

Tabel 4.29 Nilai eigen matriks A_{r9} 96

Tabel 4.30 Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr8}$ 98

Tabel 4.31 Nilai eigen matriks A_{r8} 99

Tabel 4.32 Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr7}$ 101

Tabel 4.33 Nilai eigen matriks A_{r7} 102

Tabel 4.34 Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr6}$ 104

Tabel 4.35 Nilai eigen matriks A_{r6} 105

Tabel 4.36 Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr5}$ 106

Tabel 4.37 Nilai eigen matriks A_{r5} 108

Tabel 4.38 Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr4}$ 109

Tabel 4.39 Nilai eigen matriks A_{r4} 110

Tabel 4.40 Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr3}$ 112

Tabel 4.41 Nilai eigen matriks A_{r3} 113

Tabel 4.42 Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr2}$ 114

Tabel 4.43 Nilai eigen matriks A_{r2} 115

Tabel 4.44 Hasil estimasi variabel setiap sistem 117

Tabel 4.45 Nilai eigen matriks A 126

Tabel 4.46 Nilai Singular Hankel 129

		hal
Tabel 4.47	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_s$	130
Tabel 4.48	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr3}$	132
Tabel 4.49	Nilai eigen matriks A_{r3}	133
Tabel 4.50	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr2}$	134
Tabel 4.51	Nilai eigen matriks A_{r2}	135
Tabel 4.52	Hasil estimasi variabel setiap sistem	136
Tabel 4.53	Nilai eigen matriks A	140
Tabel 4.54	Nilai Singular Hankel	144
Tabel 4.55	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_s$	145
Tabel 4.56	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr3}$	146
Tabel 4.57	Nilai eigen matriks A_{r3}	147
Tabel 4.58	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr2}$	148
Tabel 4.59	Nilai eigen matriks A_{r2}	150
Tabel 4.60	Hasil estimasi variabel setiap sistem	151
Tabel 4.61	Nilai eigen matriks A	155
Tabel 4.62	Nilai Singular Hankel	158
Tabel 4.63	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_s$	159
Tabel 4.64	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr3}$	161
Tabel 4.65	Nilai eigen matriks A_{r3}	162
Tabel 4.66	Nilai eigen matriks $\tilde{A}_{sr2}$	163
Tabel 4.67	Nilai eigen matriks A_{r2}	164
Tabel 4.68	Hasil estimasi variabel setiap sistem	165

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika berkembang sangat pesat sehingga Matematika sering dipakai untuk menyelesaikan berbagai permasalahan di banyak bidang. Saat ini permasalahan yang muncul pun semakin banyak. Salah satu penyelesaiannya dengan menggunakan model Matematika. Model Matematika adalah representasi ideal dari sistem nyata yang dijabarkan atau dinyatakan dalam bentuk simbol dan pernyataan matematik. Dengan kata lain model Matematika merepresentasikan sebuah sistem dalam bentuk hubungan kuantitatif dan logika, berupa suatu persamaan, pertidaksamaan, sistem persamaan atau lainnya yang terdiri atas sekumpulan variabel atau besaran dengan menggunakan operasi Matematika.

Sistem merupakan suatu kombinasi dari beberapa komponen yang bekerja bersama-sama untuk mendapatkan tujuan tertentu. Suatu sistem memiliki masukan, proses, dan keluaran. Masukan dan keluaran sistem yang disajikan oleh fungsi dari waktu bisa merupakan waktu yang kontinu atau diskrit. Analisis sistem waktu diskrit memiliki sifat yang sama seperti waktu kontinu. Pada kedua sistem tersebut dapat dilakukan analisis pada sistem mengenai kestabilannya. Dari analisis tersebut terlihat bahwa terdapat sistem yang stabil dan tidak stabil.

Suatu sistem yang direpresentasikan dengan model Matematika diubah ke dalam instruksi dari suatu komputer sehingga sangat memungkinkan untuk memodelkan sistem dengan orde yang lebih besar dan komplek. Kebutuhan akan model dengan tingkat keakurasian yang tinggi memunculkan berbagai persoalan diantaranya lama waktu komputasi dan memori yang besar, dan kesulitan dalam hal analisis, optimasi, dan desain kendali. Sehingga, dibutuhkan aproksimasi model dengan orde lebih kecil tetapi perilaku dinamiknya sama atau hampir sama dengan model awal. Oleh karena itu, dibutuhkan penyederhanaan sistem yang berorde besar agar sistem tersebut memiliki orde yang lebih kecil tanpa kesalahan yang signifikan. Penyederhanaan sistem inilah yang dimaksud reduksi model [1].

Beberapa metode reduksi model yaitu metode Pemotongan Setimbang [2], aproksimasi Norm Hankel [3] dan Aproksimasi Perturbasi Singular [4]. Reduksi model dengan metode Pemotongan Setimbang merupakan metode reduksi model yang sering digunakan karena kesederhanaan metodenya. *Output* sistem reduksi dari metode Pemotongan Setimbang yang dihasilkan dapat mempertahankan sifat-sifat sistem semula terutama sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan [1].

Pada fenomena alam yang terjadi, tidak semua sistem merupakan sistem yang stabil. Dalam penyelesaian reduksi model pada sistem tidak stabil berbeda dengan penyelesaian sistem stabil. Oleh karena itu, perlu adanya kajian khusus mengenai reduksi model pada sistem tidak stabil.

Selanjutnya pada sistem yang besar, pada umumnya tidak semua variabel diketahui sehingga perlu dilakukan estimasi. Estimasi ini perlu dilakukan karena tidak semua besaran pada sistem tersebut dapat diukur secara langsung.

Salah satu metode estimasi yang telah banyak diaplikasikan adalah algoritma filter Kalman [5]. Filter Kalman pertama kali diperkenalkan oleh Rudolph E. Kalman pada tahun 1960 yaitu tentang suatu penyelesaian pada masalah filtering data diskrit yang linier, sehingga dinamakan filter Kalman [6]. Metode ini digunakan untuk mengestimasi variabel keadaan dari sistem dinamik linear diskrit yang meminimumkan kovarian *error* estimasi. Filter Kalman adalah algoritma rekursif untuk mengestimasi variabel keadaan dari sistem dinamik stokastik. Estimasi variabel keadaan dengan filter Kalman dilakukan dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasarkan dinamika sistem dan data pengukuran [7].

Berdasarkan latar belakang di atas, pada Tesis ini akan dilakukan kajian tentang implementasi algoritma filter Kalman yang akan diterapkan pada sistem tereduksi yang berasal dari sistem tidak stabil.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, permasalahan yang diselesaikan dalam Tesis ini adalah :

1. Bagaimana mengkonstruksi algoritma filter Kalman pada sistem waktu diskrit tidak stabil tereduksi?
2. Bagaimana akurasi hasil estimasi pada sistem sebelum dan sesudah direduksi?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah, batasan masalah dari Tesis ini adalah:

1. Sistem yang digunakan adalah sistem linier waktu invarian.
2. *Software* yang digunakan adalah MATLAB R2013b.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan Tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui langkah-langkah pembentukan algoritma filter Kalman pada sistem waktu diskrit tidak stabil tereduksi.
2. Memperoleh akurasi hasil estimasi pada sistem sebelum dan sesudah direduksi.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat Tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai penerapan reduksi model pada model Matematika yang memiliki orde besar sehingga dapat mempermudah penghitungan dan analisis.
2. Memberikan informasi mengenai pembentukan algoritma filter Kalman pada sistem tereduksi.

1.6 Sistematika Penulisan Tesis

Sistematika penulisan dalam laporan Tesis ini adalah sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN

   Bab ini menjelaskan latar belakang penyusunan Tesis, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan Tesis.
2. BAB II KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

   Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang mendukung penelitian, antara lain tentang sistem linier waktu diskrit, dekomposisi sistem tidak stabil, reduksi model, dan metode filter Kalman.
3. BAB III METODOLOGI

   Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyusunan Tesis ini.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

   Bab ini menjelaskan secara detail mengenai sistem awal, dekomposisi sistem tidak stabil, reduksi model pada subsistem stabil, pembentukan algoritma filter Kalman, dan simulasi serta analisis hasil.

5. BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

   Bab ini menjelaskan tentang penarikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Pada bab ini dibahas mengenai kajian pustaka yang berkaitan dengan penelitian-penelitian sebelumnya dan dasar-dasar teori yang dibutuhkan dalam penelitian ini yaitu pembahasan mengenai sistem linear dinamik mengenai sifat-sifat sistem, reduksi model dan algoritma filter Kalman.

2.1 Penelitian-Penelitian Terkait

Penelitian-penelitian terkait yang pernah dilakukan sebelumnya yaitu sebagai berikut:

1. *Reduction of Unstable Discrete Time System by Hankel Norm Approximation* [8]. Dalam penelitian ini dibahas reduksi model pada sistem waktu diskrit tidak stabil dengan pendekatan Norm Hankel. Pada sistem tidak stabil Deepak Kumar melakukan pemisahan antara sistem stabil dan sistem tidak stabil dengan algoritma dekomposisi. Selanjutnya pada sistem stabil hasil dekomposisi dilakukan reduksi model dengan pendekatan Norm Hankel. Model akhir berupa penambahan sistem tidak stabil hasil dekomposisi dan sistem stabil hasil reduksi model dengan pendekatan norm hankel. Diperoleh bahwa reduksi model dengan pendekatan norm hankel dapat dilakukan pada sistem waktu diskrit tidak stabil.
2. *Analisis Reduksi Model pada Sistem Linier Waktu Diskrit tak Stabil* [9]. Dalam penelitian ini dibahas reduksi model pada sistem linier waktu diskrit tidak stabil dengan metode Pemotongan Setimbang. Hasil simulasi menunjukkan kesamaan dari perbandingan *error* antara sistem awal dan sistem tereduksi terlihat bahwa semakin kecil variabel yang direduksi akan memiliki *error* semakin kecil.
3. *Construction of the Kalman Filter Algorithm on the Model Reduction* [1]. Dalam penelitian ini dijelaskan bahwa implementasi algoritma filter Kalman pada sistem tereduksi pada masalah distribusi konduksi panas. Estimasi distribusi konduksi panas pada kawat dimensi satu ini

merupakan sistem yang stabil. Hasil simulasi menunjukkan bahwa estimasi filter Kalman pada sistem tereduksi mempunyai hasil yang lebih akurat dan waktu komputasi yang lebih cepat jika dibandingkan dengan filter Kalman pada sistem semula.

2.2 Sistem Linear Waktu Diskrit

Diberikan suatu sistem linear waktu diskrit sebagai berikut: [10]

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{2.1}$$

$$y_k = Cx_k + Du_k, \tag{2.2}$$

dengan

$x_k \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel keadaan pada waktu k,

$u_k \in \mathbb{R}^m$ adalah vektor masukan deterministik pada waktu k,

$y_k \in \mathbb{R}^P$ adalah vektor keluaran pada waktu k.

A, B, C, D masing-masing adalah matriks-matriks konstan dengan ukuran yang bersesuaian dan diasumsikan A merupakan matriks non singular. Persamaan (2.1) dan (2.2) dapat dinyatakan sebagai sistem (A, B, C, D).

2.2.1 Sifat-Sifat Sistem

Sifat-sifat dari suatu sistem meliputi tiga hal, diantaranya kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Berikut ini dijelaskan mengenai pengertian dari kestabilan, keterkendalian dan keteramatan.

A. Kestabilan

Definisi 2.1 [10]

Diberikan sistem linear diskrit

$$x_{k+1} = Ax_k \tag{2.3}$$

dengan $x_k \in \mathbb{R}^n$ *adalah variabel keadaan pada waktu k dan A adalah matriks konstan dengan ukuran yang bersesuaian. Misalkan* x_e *disebut titik setimbang.*

i. *Titik setimbang* x_e *dikatakan stabil bila untuk setiap* $\mathcal{E} > 0$, *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian hingga untuk setiap solusi* x_k *yang memenuhi* $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ *maka berlaku* $\|x_0 - x_e\| \leq \mathcal{E}$ *untuk setiap* $k \geq 0$.

ii. *Titik setimbang* x_e *dikatakan stabil asimtotik jika* x_e *stabil dan bila terdapat* $\delta_1 > 0$ *sedemikian rupa sehingga untuk setiap solusi* x_k *yang memenuhi* $\|x_0 - x_e\| \leq \delta_1$ *maka berlaku* $lim_{k\to\infty}\|x_k - x_e\| = 0$.

Berdasarkan Definisi 2.1 untuk menyelidiki kestabilan sistem (*A*, *B*, *C*, *D*), maka syarat kestabilan sistem dari segi nilai karakteristik dapat ditentukan seperti pada teorema berikut.

Teorema 2.1 [10]

Sistem linear diskrit, seperti yang dinyatakan pada Persamaan (2.3), adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $|\lambda_i(A)| < 1$ *untuk* $i = 1, \ldots, n$ *dengan* $\lambda_i(A)$ *adalah nilai eigen matriks* A. *Sedangkan jika* $|\lambda_i(A)| \leq 1$, *maka sistem diskrit adalah stabil.*

B. Keterkendalian

Definisi 2.2 [10]

Sistem linear (2.1) dikatakan terkendali pada $t = t_0$ *, jika ada sinyal kendali yang tidak dibatasi kemudian mentransfer keadaan awal untuk setiap keadaan akhir dalam interval waktu yang terbatas* $t_0 \leq t \leq t_1$.

Selanjutnya untuk syarat-syarat keterkendalian sistem diskrit diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.2 [10]

Syarat perlu dan cukup sebuah sistem terkendali adalah:

$$rank\ M_C = n \text{ dimana } M_C = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

Matriks M_C *disebut matriks keterkendalian.*

C. Keteramatan

Definisi 2.3 [10]

Bila setiap keadaan awal $x(0) = x_0$ *secara tunggal dapat diamati dari setiap pengukuran keluaran sistem (2.1) dari waktu* $t = 0$ *ke* $t = t_1$, *maka sistem dikatakan teramati.*

Sehingga syarat perlu dan cukup dari keteramatan diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.3 [10]

Syarat perlu dan cukup sebuah sistem teramati adalah:

$$rank\ M_o = n\ dimana\ M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Matriks M_o disebut matriks keteramatan.

2.2.2 Gramian Keterkendalian dan Gramian Keteramatan

Diberikan sistem linier diskrit sebagai sistem (A, B, C, D). Pada sistem (A, B, C, D) juga didefinisikan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M yaitu:

$$W = \sum_{k=0}^{k} A^k B B^T (A^T)^k, \qquad (2.4)$$

$$M = \sum_{k=0}^{k} (A^T)^k C^T C A^k. \qquad (2.5)$$

Hubungan antara sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan sistem dengan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M dapat dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.4 [2]

Diberikan sistem (A, B, C, D) yang stabil, terkendali dan teramati. Gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M, masing-masing merupakan penyelesaian tunggal dan definit positif dari persamaan Lyapunov

$$AWA^T + BB^T - W = 0 \qquad (2.6)$$

$$A^T M A + C^T C - M = 0 \qquad (2.7)$$

Pada Teorema 2.4 sistem (A, B, C, D) yang stabil adalah sistem stabil asimtotik. Sehingga, sistem (A, B, C, D) adalah sistem yang stabil asimtotik, terkendali, dan teramati.

Hubungan antara sifat keterkendalian dengan gramian keterkendalian sistem, dapat dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.5 [11]

Pernyataan berikut ekuivalen

i. *Sistem* (A, B, C, D) *terkendali,*
ii. *Gramian keterkendalian* W *adalah definit positif,*
iii. *Matriks keterkendalian* $(B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B)$ *mempunyai rank baris penuh,*
iv. *Ambil* λ *dan* v *sebagai nilai eigen dan vektor eigen kiri yang bersesuaian dari matriks* A*, yang berarti* $v^T A = v^T \lambda$*, maka berlaku* $v^T B \neq 0$.

Sedangkan untuk menyatakan hubungan antara sifat keteramatan dengan gramian keteramatan sistem, dapat diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.6 [11]

Pernyataan berikut ekuivalen

i. *Sistem* (A, B, C, D) *teramati,*
ii. *Gramian keteramatan* M *adalah definit positif,*
iii. *Matriks keteramatan* $(C^T \quad A^T C^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1} C^T)$ *mempunyai rank kolom penuh,*
iv. *Ambil* λ *dan* y *sebagai nilai eigen dan vektor eigen kanan yang bersesuaian dari matriks A, yang berarti* $Ay = \lambda y$*, maka berlaku* $Cy \neq 0$.

Berdasarkan Teorema 2.4, 2.5 dan 2.6 tersebut, maka sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan sistem merupakan sifat dasar yang harus dipenuhi agar sistem tersebut mempunyai gramian keterkendalian dan gramian keteramatan.

2.3 Dekomposisi Sistem Tidak Stabil

Dekomposisi sistem tidak stabil merupakan metode pemisahan antara subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u). Algoritma dekomposisi dapat dilakukan dengan dua tahap transformasi. Pada tahap pertama, transformasi real Schur bentuk blok. Menggunakan unitary matriks U_d dalam bentuk blok diagonal atas Schur, sehingga nilai-nilai eigen dari transformasi sistem diatur berdasarkan urutan nilai absolut dari nilai eigennya. Jika x sistem awal dan U_d transformasi matriks unitary, maka x_t hasil dari transformasi sistem dengan $x = U_d x_t$.

Pada transformasi tahap kedua, dilakukan dengan menyelesaikan persamaan umum Lyapunov dan melanjutkan untuk transformasi tahap kedua menggunakan transformasi $x_t = W_d x_d$, dimana x_d adalah tahap akhir dari transformasi *state* dan W_d adalah tahap akhir dari transformasi matriks. Sehingga akan diperoleh pemisahan antara subsistem stabil dan tidak stabil [12].

Model hasil dari dekomposisi:

$$
\begin{aligned}
G_d &= \left[\begin{array}{c|c} A_s & B_s \\ \hline C_s & D_s \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & 0 \end{array}\right] \\
&= G_s(subsistem\ stabil) + G_u(subsistem\ tidak\ stabil) \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

2.4 Reduksi Model

Reduksi model merupakan upaya untuk mengganti model atau sistem yang berukuran besar dengan model yang lebih sederhana tanpa kesalahan yang signifikan. Sistem tereduksi ini akan mempunyai perilaku atau sifat yang hampir sama dengan sistem semula [13]. Terdapat banyak metode reduksi model dan salah satu diantaranya adalah metode Pemotongan Setimbang yang telah dikembangkan oleh Siep Weiland [2]. Misalkan diberikan sistem (A_s, B_s, C_s, D_s), sistem diasumsikan stabil, terkendali dan teramati, sehingga pada sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) akan dilakukan Pemotongan Setimbang. Berikut langkah-langkah pada metode Pemotongan Setimbang.

1. Sistem Setimbang

Sistem setimbang adalah sistem baru yang mempunyai gramian keterkendalian dan gramian keteramatan yang sama dan merupakan matriks diagonal. Dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat dibentuk suatu sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang mempunyai gramian keterkendalian $\widetilde{W}$ dan gramian keteramatan $\widetilde{M}$, yang sama dan merupakan matriks diagonal $\sum$. Oleh karena itu, maka sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ disebut sebagai bentuk sistem setimbang dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s). Selanjutnya $\sum$ disebut sebagai gramian kesetimbangan dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$.

Hubungan antara sistem setimbang dengan gramian keterkendalian dan gramian keteramatan sistem, dapat dilihat pada definisi berikut.

Definisi 2.4 [2]

Sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ *disebut sistem setimbang dari sistem* (A_s, B_s, C_s, D_s) *jika sistem* $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ *mempunyai gramian keterkendalian* $\widetilde{W}$ *dan gramian keteramatan* $\widetilde{M}$ *yang merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov*

$$\tilde{A}_s \widetilde{W} \tilde{A}_s{}^T + \tilde{B}_s \tilde{B}_s{}^T - \widetilde{W} = 0, \quad (2.9)$$

$$\tilde{A}_s{}^T \widetilde{M} \, \tilde{A}_s + \tilde{C}_s{}^T \tilde{C}_s - \widetilde{M} = 0, \quad (2.10)$$

sedemikian sehingga memenuhi

$$\widetilde{W} = \widetilde{M} = \sum = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n), \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq \cdots \geq \sigma_n > 0. \quad (2.11)$$

dengan σ_i *menyatakan nilai singular Hankel dari sistem* (A_s, B_s, C_s, D_s) *yang dapat didefinisikan sebagai*

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)}, i = 1, \cdots, n,$$

dengan λ_i *adalah nilai-nilai eigen dari gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M.*

2. Sistem Tereduksi

Sistem tereduksi adalah sistem baru dari pemotongan variabel keadaan pada sistem setimbang yang sulit untuk dikendalikan dan diamati. Variabel keadaan yang sulit untuk dikendalikan dan diamati ini adalah variabel keadaan yang mempunyai pengaruh kecil terhadap sistem dan bersesuaian dengan nilai singular Hankel yang kecil.

Misalkan diberikan sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) yang diasumsikan stabil, terkendali dan teramati. Selanjutnya dibentuk suatu sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang mempunyai gramian kesetimbangan Σ, yaitu:

$$\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{r+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix}, \qquad (2.12)$$

dengan $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$.

Berdasarkan pada urutan nilai singular Hankel, maka gramian kesetimbangan Σ dapat dipartisi menjadi

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix}, \qquad (2.13)$$

dengan $\Sigma_1 = diag\ (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$, $\Sigma_2 = diag\ (\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \cdots, \sigma_n)$ dan $\sigma_r > \sigma_{r+1}$.

Partisi yang terjadi pada Σ menyebabkan terjadinya partisi pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yaitu

$$G = \left(\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{B}_1 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{B}_2 \\ \hline \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & \tilde{D} \end{array}\right), \qquad (2.14)$$

dengan

$$\tilde{A}_s = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \tilde{B}_s = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \text{ dan } \tilde{C}_s = (\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2), \qquad (2.15)$$

dan variabel keadaan pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ juga dipartisi menjadi

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}, \qquad (2.16)$$

dengan $\tilde{x}_1$ merupakan bagian variabel keadaan yang bersesuaian dengan Σ_1 dan $\tilde{x}_2$ adalah bagian variabel keadaan yang bersesuaian dengan Σ_2.

Selanjutnya, pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \widetilde{D}_s)$ dilakukan pemotongan terhadap variabel keadaan yang sulit untuk dikendalikan dan sulit diamati sehingga terbentuk sistem tereduksi yang mempunyai variabel keadaan lebih sedikit daripada variabel keadaan pada sistem semula. Pemotongan terhadap variabel keadaan yang sulit untuk dikendalikan dan sulit diamati ini dapat dijelaskan melalui teorema berikut.

Teorema 2.7 [2]

Diberikan sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \widetilde{D}_s)$ *yang stabil, terkendali, teramati dan setimbang dengan gramian*

$$\widetilde{W} = \widetilde{M} = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n), \ \ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0.$$

Jika $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ *maka sistem tereduksi dengan order r juga akan stabil, terkendali dan teramati serta memenuhi* $\left\| G_s - G_{s_r} \right\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \cdots + \sigma_n)$, *dengan* G_s *dan* G_{s_r} *masing-masing adalah fungsi transfer sistem* $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \widetilde{D}_s)$ *dan sistem tereduksinya.*

Pada Teorema 2.7 sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \widetilde{D}_s)$ memiliki sifat yang sama sesuai pada Teorema 2.4. akhirnya diperoleh sistem tereduksi berukuran *r* yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\tilde{x}_{rk+1} = \tilde{A}_{sr}\tilde{x}_{rk} + \tilde{B}_{sr}\tilde{u}_k, \qquad (2.17)$$

$$\tilde{y}_{rk} = \tilde{C}_{sr}\tilde{x}_{rk} + \widetilde{D}_{sr}\tilde{u}_k, \qquad (2.18)$$

Untuk selanjutnya sistem tereduksi ini disebut sebagai sistem $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \widetilde{D}_{sr})$.

Dari reduksi model diperoleh sebagai berikut:

$$G_{sr} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{sr} & \tilde{B}_{sr} \\ \hline \tilde{C}_{sr} & \widetilde{D}_{sr} \end{array}\right] \qquad (2.19)$$

Reduksi model pada sistem tidak stabil dapat diperoleh:

$$G_r = G_{sr} + G_u \qquad (2.20)$$

Dengan G_{sr} adalah hasil subsistem stabil tereduksi dan G_u adalah subsistem tidak stabil dari dekomposisi.

2.5 Metode Filter Kalman

Fenomena di dunia nyata (*real system*), secara realistis, dapat direpresentasikan melalui model Matematika dan numerik pada dinamika sistem. Model ini dapat digunakan untuk memprediksi perilaku masa depan sistem, asalkan kondisi awal dari sistem diketahui. Data lengkap yang mendefinisikan semua *state* (keadaan) dari suatu sistem pada waktu tertentu tidak selalu tersedia. Selain itu, baik model dan data awal yang tersedia mengandung ketidakakuratan dan gangguan (*noise*) acak yang dapat menyebabkan perbedaan yang signifikan antara *state* yang diprediksi dan *state* aktual dari sistem. Dalam hal ini, pengamatan dari sistem dari waktu ke waktu dapat dimasukkan ke dalam persamaan model untuk memperoleh "perbaikan" estimasi *state* dan juga untuk memberikan informasi tentang "ketidakpastian" dalam estimasi.

Pada saat melakukan pengukuran tidak semua variabel keadaan yang diinginkan dapat diukur. Oleh karena itu untuk mendapatkan semua variabel keadaan yang diinginkan, maka perlu dilakukan estimasi pada variabel-variabel tersebut. Pada pemodelan sistem, tidak ada model Matematika dari suatu sistem yang sempurna. Hal ini dapat disebabkan karena adanya faktor derau yang mempengaruhi sistem. Derau tersebut tidak dapat dimodelkan atau dijadikan sebagai masukan deterministik.

Oleh karena itu Persamaan (2.1) dan (2.2) yang merupakan sistem deterministik invarian terhadap waktu, perlu menambahkan faktor stokastik berupa derau sistem dan derau pengukuran. Sehingga sistem tersebut secara umum dapat ditulis menjadi sistem dinamik stokastik yang invarian terhadap waktu sebagai berikut:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k \tag{2.21}$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + v_k \tag{2.22}$$

Keterangan variabel-variabel diatas adalah sebagai berikut:

x_0 : nilai awal sistem

x_{k+1} : variabel keadaan pada waktu $k+1$ dan berdimensi $n \times 1$

x_k : variabel keadaan pada waktu k yang nilai estimasi awalnya $\bar{x}_0$ dan kovarian awal $P_{x0}, x_k \in \mathbb{R}_n$

u_k : vektor masukan deterministik pada waktu k, $u_k \in \mathbb{R}_m$

w_k : derau pada sistem pada waktu k dengan mean $\bar{w}_k = 0$, dan kovarian Q

y_k : vektor pengukuran $z_k \in \mathbb{R}_p$

v_k : derau pengukuran pada waktu k dengan mean $\bar{v}_k = 0$ dan kovarian R

A, B, G, C, D merupakan matriks-matriks dengan nilai elemen-elemennya adalah koefisien variabel masing-masing dengan ukuran yang bersesuaian.

Derau sistem, w_k, dan derau pengukuran, v_k, masing-masing merupakan besaran stokastik, yang diasumsikan berdistribusi Normal dengan mean nol dan variansinya masing-masing adalah matriks semi-definit positif Q dan matriks definit positif R. Derau sistem, w_k, dan derau pengukuran, v_k, secara berturut-turut memiliki kovariansi Q dan R atau bisa dinotasikan dengan $w_k \sim N(0, Q)$ dan $v_k \sim N(0, R)$. Asumsi ini diperlukan supaya filter Kalman yang dihasilkan adalah optimal.

Estimasi pada filter Kalman dilakukan dengan dua tahap, yaitu *time update* (tahap prediksi), yaitu memprediksi variabel keadaan berdasarkan sistem dinamik dan *measurement update* (tahap koreksi) terhadap data-data pengukuran yang dimaksudkan untuk memperbaiki hasil estimasi.

Tahap prediksi dipengaruhi oleh dinamika sistem dengan memprediksi variabel keadaan dengan menggunakan persamaan estimasi variabel keadaan dan keakuratannya dihitung menggunakan persamaan kovarian *error*.

Pada tahap koreksi hasil estimasi variabel keadaan yang diperoleh pada tahap prediksi dikoreksi menggunakan model pengukuran. Salah satu bagian dari tahap ini yaitu menentukan matriks Kalman Gain yang digunakan untuk meminimumkan kovarian *error*.

Tahap prediksi dan koreksi dilakukan secara rekursif dengan cara meminimumkan kovariansi *error* estimasi $(x_k - \hat{x}_k)$ dengan x_k merupakan variabel keadaan sebenarnya dan $\hat{x}_k$ merupakan estimasi dari variabel keadaan.

Algoritma filter Kalman terdiri dari 4 bagian. Bagian pertama dan kedua memberikan model sistem dan model pengukuran serta nilai awal (inisialisasi), sedangkan bagian ketiga dan keempat adalah tahap prediksi dan tahap koreksi. Tabel 2.1 merupakan algoritma filter Kalman [7].

Tabel 2.1 Algoritma Filter Kalman

1	Model sistem dan model pengukuran
	$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k$ $y_k = Cx_k + Du_k + v_k$ $x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x0}); w_k \sim N(0, Q); v_k \sim N(0, R)$
2	Inisialisasi
	$P_0 = P_{x0}, \hat{x}_k = \bar{x}_0$
3	Tahap prediksi (*time update*)
	Kovariansi *error*: $P_{k+1}^{-} = AP_kA^T + GQG^T$ Estimasi: $\hat{x}_{k+1}^{-} = A\hat{x}_k^{-} + Bu_k$
4	Tahap koreksi (*measurement update*)
	Kovariansi *error*: $P_{k+1} = [(\hat{P}_{k+1}^{-})^{-1} + C^T R^{-1} C]^{-1}$ Estimasi : $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^{-} + P_{k+1}C^T R^{-1}(z_{k+1} - C\hat{x}_{k+1}^{-})$ Jika digunakan Kalman gain, maka Kalman Gain : $K_{k+1} = P_{k+1}^{-}C^T(CP_{k+1}^{-1}C^T + R)^{-1}$ Kovariansi kesalahan : $P_{k+1} = (I - K_{k+1}C)P_{k+1}^{-}$ Estimasi : $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^{-} + K_{k+1}(z_{k+1} - C\hat{x}_{k+1}^{-})$

BAB III
METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan metode yang digunakan pada penelitian secara rinci. Metodologi penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penelitian ini dapat disusun secara sistematis.

3.1 Metode Penelitian

Pada penelitian ini digunakan metode penelitian berdasarkan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Studi Literatur

   Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan cara mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi bisa berupa Tugas Akhir, Tesis, jurnal, buku, Disertasi maupun artikel terkait yang berhubungan dengan permasalahan pada penelitian ini.

2. Analisis Model Awal

   Setelah tahap studi literatur, tahap kedua yang dilakukan adalah analisa model awal sistem. Analisa yang dimaksud meliputi analisa sifat-sifat sistem. Seperti analisa kestabilan, keterkendalian dan keteramatan pada sistem tersebut.

3. Dekomposisi Sistem Tidak Stabil

   Pada tahap ini untuk sistem tidak stabil dilakukan dekomposisi, sehingga sistem terbagi menjadi dua yaitu subsistem stabil dan subsistem tidak stabil.

4. Konstruksi Algoritma Filter Kalman pada Subsistem Stabil

   Pada tahap ini dibutuhkan sistem yang stabil agar bisa dikonstruksi menggunakan filter Kalman. Sehingga subsistem stabil hasil dekomposisi yang akan dikonstruksi menggunakan filter Kalman.

5. Reduksi Model pada Subsistem Stabil

Pada tahap ini subsistem stabil hasil dekomposisi sebelum dikonstruksi menggunakan filter Kalman akan direduksi menggunakan metode Pemotongan Setimbang agar menghasilkan model tereduksi dari subsistem stabil dengan membuang variabel *state* yang pengaruh atau kontribusinya terhadap sistem kurang signifikan.

6. Analisa Sifat Model Tereduksi

Setelah mendapatkan sistem tereduksi dari subsistem stabil, berikutnya dilakukan adalah analisa sifat sistem tersebut berupa analisa kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Karena reduksi model dilakukan dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang sehingga seharusnya sifat model tereduksi dari subsistem stabil sama dengan sifat model subsistem stabil tanpa ada kesalahan yang signifikan, atau dengan kata lain model tereduksi tersebut juga bersifat stabil, terkendali dan teramati.

7. Konstruksi Algoritma Filter Kalman pada Subsistem Stabil Tereduksi

Pada tahap ini, subsistem stabil tereduksi akan dikonstruksi menggunakan algoritma filter Kalman.

8. Simulasi dan Analisis

Tahap ini dilakukan dengan mengambil contoh sistem tidak stabil dengan reduksi model sehingga diperoleh model akhir. Simulasi juga untuk mendapatkan akurasi hasil estimasi sebelum dan sesudah dilakukan reduksi model menggunakan filter Kalman. Sehingga untuk mendapatkan hasil yang optimal dilakukan simulasi menggunakan *software* MATLAB.

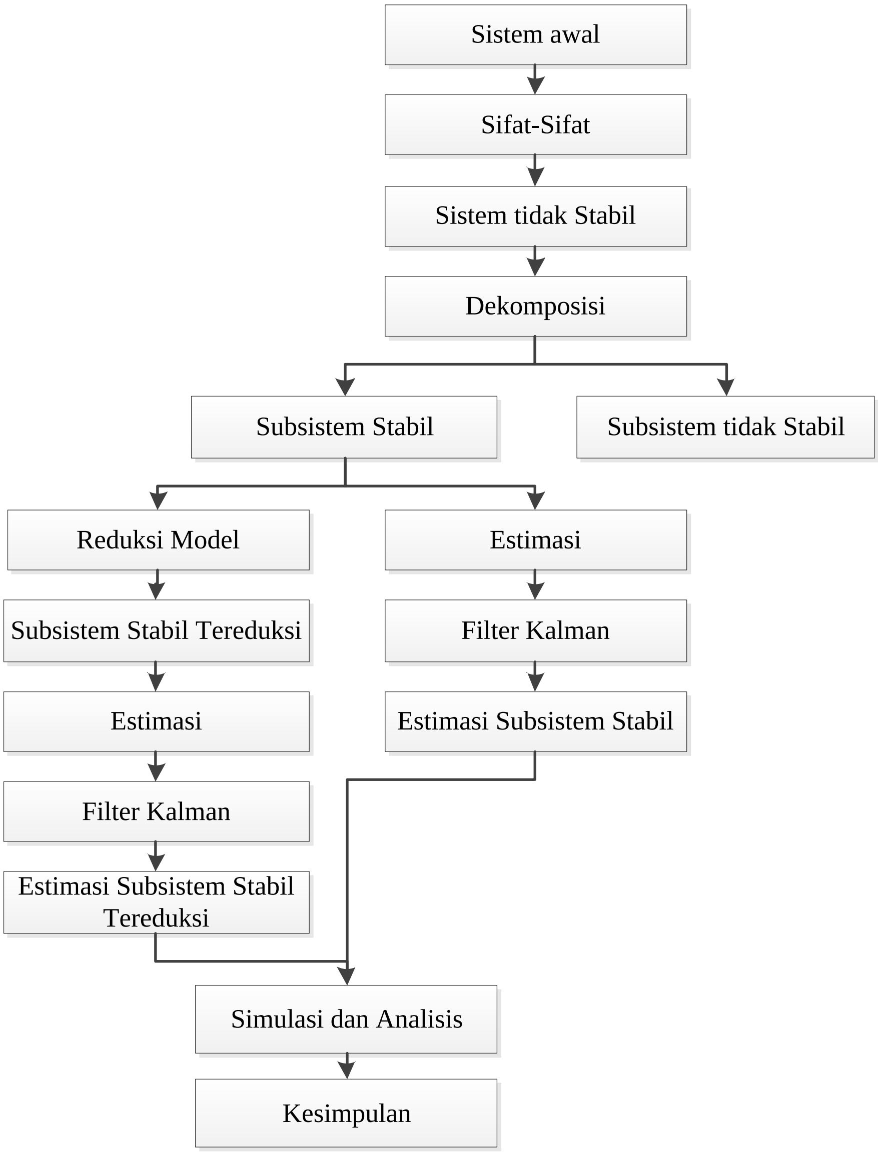
9. Penarikan Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan dan saran berdasarkan pada hasil simulasi dan analisis pada tahap sebelumnya.

10. Penyusunan Laporan

Pada tahap ini dilakukan penyusunan laporan penelitian berdasarkan hasil analisis dan penelitian.

3.2 Diagram Alir Penelitian



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan secara detail mengenai reduksi model pada sistem tidak stabil, dekomposisi sistem tidak stabil, reduksi model pada subsistem stabil, sifat-sifat sistem tereduksi pada subsistem stabil, sistem tereduksi total, sifat-sifat sistem tereduksi total, konstruksi algoritma filter Kalman pada sistem tereduksi total dan simulasi.

4.1 Reduksi Model pada Sistem Tidak Stabil

Sistem awal yang digunakan pada pembahasan ini adalah sistem linear waktu diskrit yang tidak stabil, terkendali dan teramati. Sistem linear waktu diskrit seperti pada Persamaan (2.1) dapat dinyatakan sebagai sistem (A, B, C, D). Pada sistem (A, B, C, D) memiliki $|\lambda_i(A)| > 1$ untuk $i = 1, \dots, n$ dengan $\lambda_i(A)$ adalah nilai eigen matriks A, sehingga sistem merupakan sistem yang tidak stabil menurut Teorema 2.1.

Menurut Teorema 2.2, sistem yang memiliki *rank* $M_C = n$ merupakan sistem yang terkendali. Sehingga sistem (A, B, C, D) merupakan sistem yang terkendali. Pada Teorema 2.3, sistem yang memiliki *rank* $M_O = n$ merupakan sistem yang teramati. Sehingga sistem (A, B, C, D) merupakan sistem yang teramati.

Sistem (A, B, C, D) merupakan sistem yang tidak stabil, sehingga tidak dapat dilakukan reduksi model. Pada sistem (A, B, C, D) akan dilakukan dekomposisi sistem tidak stabil.

4.1.1 Dekomposisi Sistem Tidak Stabil

Dekomposisi sistem tidak stabil merupakan metode pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tidak stabil. Algoritma dekomposisi dapat dilakukan dengan dua tahap transformasi. Pada tahap pertama, transformasi real Schur bentuk blok. Pada tahap transformasi kedua, dilakukan dengan menyelesaikan persamaan umum Lyapunov dan akan diperoleh pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tidak stabil.

Pada Persamaan (2.1) akan dilakukan pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tidak stabil dapat dilakukan dengan cara dekomposisi. Algoritma dekomposisi terdiri dari langkah-langkah sebagai berikut:

1. Transformasi sistem pada Persamaan (2.1) menggunakan matriks unitary U_d dalam bentuk blok diagonal atas Schur, sehingga nilai-nilai eigen dari transformasi sistem diatur berdasarkan urutan nilai absolut dari nilai eigennya. Jika x sistem awal dan U_d transformasi matriks unitary, maka x_t hasil dari transformasi sistem dengan $x = U_d x_t$. Dengan demikian, tahap pertama transformasi sistem diperoleh:

$$G_t = \left[\begin{array}{c|c} U_d^T A U_d & U_d^T B \\ \hline C U_d & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_t & B_t \\ \hline C_t & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_{t11} & A_{t12} & B_{t1} \\ 0 & A_{t22} & B_{t2} \\ \hline C_1 & C_2 & D \\ & & \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow m \\ \updownarrow n-m \end{array} \tag{4.1}$$

   Dimana n menunjukkan ukuran sistem, m menunjukkan jumlah nilai eigen stabil, dan $n-m$ menunjukkan jumlah dari nilai eigen tidak stabil.

2. Transformasi sistem pada Persamaan (4.1) dapat dilakukan untuk pemisahan dengan menyelesaikan bentuk umum persamaan Lyapunov berikut:

$$A_{t11} S - S A_{t22} + A_{t22} = 0$$

   Dengan memperoleh nilai dari S dan melanjutkan untuk transformasi tahap kedua menggunakan transformasi $x_t = W_d x_d$ dimana x_d adalah tahap akhir dari transformasi state dan W_d adalah tahap akhir dari transformasi matriks. Transformasi matriks W_d dari tahap kedua diberikan sebagai berikut:

$$W_d = \begin{pmatrix} I_m & . & S \\ \cdots & . & \cdots \\ 0 & . & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

Dengan I_m adalah matriks identitas berukuran m dan I_{n-m} adalah matriks berukuran $n-m$. Sedangkan pada W_d^{-1} diberikan sebagai berikut:

$$W_d^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & . & -S \\ \cdots & . & \cdots \\ 0 & . & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

Sehingga sistem dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$G_d = \left[\begin{array}{c|c} W_d^{-1}A_tW_d & W_d^{-1}B_t \\ \hline C_tW_d & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_s & 0 & B_s \\ 0 & A_u & B_u \\ \hline C_s & C_u & D \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow m \\ \updownarrow n-m \end{array} \tag{4.2}$$

Dengan $A_t = U_d^T AU, B_t = U_d^T B, C_t = CU_d$ berdasarkan pada Persamaan (4.2), maka diperoleh hasil dari dekomposisi adalah:

$$G_d = \left[\begin{array}{c|c} A_s & B_s \\ \hline C_s & D_s \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & 0 \end{array}\right] \tag{4.3}$$

Dengan,

$$\text{Subsistem stabil } \left[\begin{array}{c|c} A_s & B_s \\ \hline C_s & D_s \end{array}\right]$$

dan

$$\text{Subsistem tidak stabil } \left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & 0 \end{array}\right].$$

Subsistem stabil dapat dinyatakan sebagai sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) dan subsistem tidak stabil dapat dinyatakan sebagai sistem (A_u, B_u, C_u, D_u).

4.1.2 Reduksi pada Subsistem Stabil

Reduksi model merupakan upaya untuk mengganti model atau sistem yang berukuran besar dengan model yang sederhana tanpa kesalahan yang signifikan. Pada reduksi model dengan metode Pemotongan Setimbang digunakan sistem stabil asimtotik, terkendali dan teramati. Sehingga pada sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) diasumsikan sistem merupakan sistem stabil asimtotik, terkendali dan teramati.

Pada sistem tidak stabil, tidak terkendali dan tidak teramati tidak dapat menentukan gramian keterkendalian dan gramian keteramatan yang definit positif. Sehingga pada sistem yang tidak stabil perlu adanya dekomposisi atau pemisahan antara subsistem antara subsistem stabil dan tidak stabil. Dari hasil dekomposisi tersebut dapat dilakukan reduksi model pada subsistem stabil dengan pembentukan sistem setimbang dan pembentukan sistem tereduksi.

1. Sistem setimbang pada subsistem stabil

Sistem setimbang adalah sistem baru yang mempunyai gramian keterkendalian dan gramian keteramatan yang sama dan merupakan matriks diagonal. Sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) diasumsikan stabil asimtotik, terkendali dan teramati, maka gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M, masing-masing adalah definit positif. Berdasarkan Teorema 2.4, maka sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan sistem merupakan sistem dasar yang harus dipenuhi agar sistem tersebut memiliki gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M.

Pada pembentukan sistem setimbang terlebih dahulu akan dilakukan konstruksi matriks transformasi T. Konstruksi matriks transformasi T dilakukan sedemikian sehingga gramian keterkendalian $\tilde{W}$ dan gramian keteramatan $\tilde{M}$ adalah sama dan merupakan matriks diagonal. Algoritma untuk mendapatkan matriks transformasi T tersebut adalah sebagai berikut:

a. Diberikan masukan berupa sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) yang diasumsikan stabil asimtotik, terkendali dan teramati.
b. Ditentukan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s). Sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah stabil asimtotik, terkendali dan teramati maka berdasarkan Teorema 2.4 dijamin bahwa W dan M adalah definit positif. Matriks W definit positif maka semua nilai eigen dari W adalah positif dan $|W| \neq 0$, artinya W juga merupakan matriks non singular. Begitu juga dengan M berlaku sama, sehingga matriks M juga merupakan matriks yang non singular.

c. Ditentukan matriks ϕ sedemikian sehingga berlaku $W = \phi^T \phi$. Diketahui bahwa matriks W non singular, maka ϕ jelas non singular.

d. Dikonstruksikan matriks $\phi M \phi^T$ dan dilakukan diagonalisasi pada $\phi M \phi^T$ sedemikian sehingga berlaku $\phi M \phi^T = U\Sigma^2 U^T$, dengan U adalah matriks unitary (matriks yang dibangun oleh vektor eigennya) dan $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \sqrt{\lambda_i(WM)}$ dengan $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$. Telah diketahui bahwa matriks W, M, ϕ adalah matriks non singular, maka $\phi M \phi^T$ juga non singular. $\phi M \phi^T = U\Sigma^2 U^T$, yang berarti bahwa $U\Sigma^2 U^T$ juga non singular. U adalah matriks unitary, maka berlaku $UU^T = U^T U = I$ yang berarti bahwa U dan U^T masing-masing merupakan matriks non singular. $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ dengan $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$, maka jelas bahwa Σ non singular dan $\Sigma^{\frac{1}{2}}$ non singular.

e. Didefinisikan matriks T non singular sebagai:

$$T = \phi^2 U \Sigma^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4}$$

Matriks $\phi, U, \Sigma^{\frac{1}{2}}$ masing-masing adalah non-singular, maka hal ini merupakan jaminan bahwa matriks transformasi T adalah non singular.

Setelah dilakukan pengkonstruksian matriks transformasi T, akan dilakukan pembentukan sistem setimbang. Relisasi setimbang adalah realisasi yang mentransformasikan suatu sistem menjadi sistem baru yang mempunyai gramian keterkendalian dan gramian keteramatan yang sama dan merupakan suatu matriks diagonal. Misalkan diberikan suatu matriks transformasi T yang memenuhi:

$$x_k = T\tilde{x}_k \tag{4.5}$$

dengan,

x_k : variabel keadaan dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s)

$\tilde{x}_k$: variabel keadaan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$

T : matriks transformasi yang non singular dan berukuran $n \times n$

Selanjutnya, Persamaan (4.5) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\tilde{x}_k = T^{-1} x_k. \tag{4.6}$$

Untuk $k = k+1$, maka Persamaan (4.6) menjadi:

$$\tilde{x}_{k+1} = T^{-1} x_{k+1}. \tag{4.7}$$

Jika sistem pada Persamaan (4.5) dan (4.7) disubtisusikan kedalam sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) maka diperoleh:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}_s \tilde{x}_k + \tilde{B}_s \tilde{u}_k, \tag{4.8}$$

$$\tilde{y}_k = \tilde{C}_s \tilde{x}_k + \tilde{D}_s \tilde{u}_k, \tag{4.9}$$

dengan

$$\tilde{A}_s = T^{-1} A_s T, \tilde{B}_s = T^{-1} B_s, \tilde{C}_s = C_s T. \tag{4.10}$$

Sistem yang dinyatakan pada Persamaan (4.8) dan (4.9) disebut sebagai sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$. Gramian keterkendalian dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (4.10) ke dalam Persamaan (2.5), yaitu:

$$W = T\tilde{W}T^T \tag{4.11}$$

dengan

$$\tilde{W} = \sum_{k=0}^{k} \left(\tilde{A}_s\right)^k \tilde{B}_s \left(\tilde{B}_s\right)^T \left(\left(\tilde{A}_s\right)^T\right)^k. \tag{4.12}$$

Berdasarkan Persamaan (4.10), maka gramian keterkendalian dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$\tilde{W} = T^{-1} \, W \, (T^{-1})^T. \tag{4.13}$$

Sedangkan gramian keteramatan dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (4.10) ke dalam Persamaan (2.6), sehingga diperoleh

$$M = (T^{-1})^T \widetilde{M} T^{-1}, \tag{4.14}$$

dengan

$$\widetilde{M} = \sum_{k=0}^{k} \left((\tilde{A}_s)^T \right)^k (\tilde{C}_s)^T \tilde{C}_s (\tilde{A}_s)^k, \tag{4.15}$$

Berdasarkan Persamaan (4.15), maka gramian keteramatan sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat didefinisikan sebagai

$$\widetilde{M} = T^T \widetilde{M} (T^{-1})^T. \tag{4.16}$$

Dari hasil konstruksi matriks transformasi T, seperti yang dinyatakan pada Persamaan (4.5), maka selanjutnya akan ditinjau kembali untuk gramian keterkendalian $\widetilde{W}$ dan gramian keteramatan $\widetilde{M}$ dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$.

Berdasarkan Persamaan (4.5), maka gramian keterkendalian, $\widetilde{W}$, seperti yang dinyatakan pada Persamaan (4.13) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\widetilde{W} = \left(\phi^T U \Sigma^{-1/2}\right)^{-1} W \left(\left(\phi^T U \Sigma^{-1/2}\right)^{-1} \right)^T = \Sigma. \tag{4.17}$$

Sedangkan gramian keteramatan, $\widetilde{M}$, seperti yang telah dinyatakan pada Persamaan (4.15) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\widetilde{M} = \left(\phi^T U \Sigma^{-1/2}\right)^T M \left(\phi^T U \Sigma^{-1/2}\right) = \Sigma\ . \tag{4.18}$$

Dari Persamaan (4.17) dan (4.18) akhirnya diperoleh

$$\widetilde{W} = \widetilde{M} = \Sigma. \tag{4.19}$$

Menurut hasil yang telah diperoleh pada Persamaan (4.18) menunjukkan bahwa dengan mendefiniskan matriks transformasi T sebagai $T = \phi^T U \Sigma^{-1/2}$, maka dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat dibentuk suatu sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang mempunyai gramian keterkendalian $\widetilde{W}$ dan gramian keteramatan $\widetilde{M}$, yang sama dan merupakan matriks diagonal Σ. Oleh karena itu, maka sistem $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ disebut sebagai bentuk sistem setimbang dari sistem $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$. Selanjutnya, Σ disebut sebagai gramian kesetimbangan dari sistem $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$. Berdasarkan pada Definisi 2.4, maka dapat dinyatakan bahwa gramian kesetimbangan Σ merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov

$$\tilde{A}_s \Sigma \tilde{A}_s{}^T + \tilde{B}_s \tilde{B}_s{}^T - \Sigma = 0, \tag{4.20}$$

$$\tilde{A}_s{}^T \Sigma \tilde{A}_s + \tilde{C}_s{}^T \tilde{C}_s - \Sigma = 0. \tag{4.21}$$

Sehingga sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ yang mempunyai gramian kesetimbangan Σ, yaitu:

$$\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{r+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

dengan $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$.

2. Sistem tereduksi pada subsistem stabil

Sistem tereduksi adalah suatu model pendekatan yang diperoleh dari proses reduksi model. Reduksi model merupakan upaya untuk mengganti model atau sistem yang berukuran besar dengan model yang lebih sederhana tanpa kesalahan yang signifikan. Sistem tereduksi ini akan mempunyai perilaku atau sifat yang hampir sama dengan sistem semula.

Pembentukan sistem tereduksi pada penelitian ini dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang. Pembentukan sistem tereduksi dari sistem $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang diawali dengan pembentukan sistem setimbang dari sistem $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$. Selanjutnya sistem tereduksi diperoleh dengan cara memotong variabel keadaan pada sistem setimbang yang sulit untuk dikendalikan dan diamati. Variabel keadaan yang sulit untuk dikendalikan dan diamati ini adalah variabel keadaan yang mempunyai pengaruh kecil terhadap sistem dan bersesuaian dengan nilai singular Hankel yang kecil.

Misalkan diberikan sistem $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ yang diasumsikan stabil asimtotik, terkendali dan teramati. Selanjutnya dibentuk suatu sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ yang mempunyai gramian kesetimbangan Σ, sesuai dengan Persamaan (4.22).

Berdasarkan pada urutan nilai singular Hankel, maka gramian kesetimbangan Σ dapat dipartisi menjadi

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

dengan $\Sigma_1 = diag\ (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$, $\Sigma_2 = diag\ (\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \cdots, \sigma_n)$ dan $\sigma_r > \sigma_{r+1}$. Partisi yang terjadi pada Σ menyebabkan terjadinya partisi pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$, yaitu

$$\tilde{G}_s = \left(\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{B}_1 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{B}_2 \\ \hline \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & \tilde{D}_s \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} & \tilde{B}_{sr} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{B}_2 \\ \hline \tilde{C}_{sr} & \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{sr} \end{array}\right), \tag{4.24}$$

dengan

$$\tilde{A}_s = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix},\ \tilde{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{sr} \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}, \text{ dan } \tilde{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_{sr} & \tilde{C}_2 \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

dan variabel keadaan pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ juga dipartisi menjadi

$$\tilde{x}_k = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1_k} \\ \tilde{x}_{2_k} \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

dengan $\tilde{x}_1$ merupakan bagian variabel keadaan yang bersesuaian dengan Σ_1 dan $\tilde{x}_2$ adalah bagian variabel keadaan yang bersesuaian dengan Σ_2.

Selanjutnya, pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$dilakukan pemotongan terhadap variabel keadaan yang sulit untuk dikendalikan dan sulit diamati sehingga terbentuk sistem tereduksi yang mempunyai variabel keadaan lebih sedikit daripada variabel keadaan pada sistem semula. Pemotongan terhadap variabel keadaan yang sulit untuk dikendalikan dan sulit diamati ini dapat dijelaskan melalui Teorema 2.7.

Menurut Teorema 2.7, maka pemotongan variabel keadaan pada sistem setimbang dapat dilakukan dengan menentukan urutan nilai singular Hankel dimana terjadi loncatan yang besar atau dipilih urutan singular Hankel ke-r dimana $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$. Akhirnya diperoleh sistem tereduksi yang berukuran r yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\tilde{x}_{sr_{k+1}} = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_{r_k} + \tilde{B}_1\tilde{u}_k = \tilde{A}_{sr}\tilde{x}_{r_k} + \tilde{B}_{sr}\tilde{u}_k \qquad (4.27)$$

$$\tilde{y}_{sr_k} = \tilde{C}_1\tilde{x}_{r_k} + D\tilde{u}_k = \tilde{C}_{sr}\tilde{x}_{r_k} + \tilde{D}_{sr}\tilde{u}_k. \qquad (4.28)$$

Untuk selanjutnya sistem tereduksi ini disebut sebagai sistem $\left(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}\right)$.

4.1.3 Sistem Tereduksi Total

Sistem tereduksi total adalah sistem baru dimana sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ digabungkan dengan subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u). Pada sistem tereduksi total mempunyai perilaku atau sifat yang tidak sama dengan sistem semula, karena pada sistem ini digabungan dengan subsistem tidak stabil. Sehingga sistem tereduksi total mempunyai sifat tidak stabil, terkendali dan teramati. Sistem tereduksi total bisa dinyatakan dalam sistem (A_r, B_r, C_r, D_r).

Selanjutnya dibentuk suatu sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r) yang mempunyai gramian kesetimbangan Σ, sesuai dengan Persamaan (4.22). Berdasarkan pada urutan nilai singular Hankel, maka gramian kesetimbangan Σ dapat dipartisi menjadi

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_5 \end{pmatrix}, \qquad (4.29)$$

dengan $\Sigma_1 = diag\ (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$, $\Sigma_5 = diag\ (\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \cdots, \sigma_n)$ dan $\sigma_r > \sigma_{r+1}$.

Pembentukan sistem tereduksi total diperoleh dari:

$$G_r = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{sr} & \tilde{B}_{sr} \\ \hline \tilde{C}_{sr} & \tilde{D}_{sr} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & 0 \end{array}\right] \tag{4.30}$$

Persamaan (4.29) dapat dituliskan menjadi:

$$G_r = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{sr} & 0 & \tilde{B}_{sr} \\ 0 & A_u & B_u \\ \hline \tilde{C}_{sr} & C_u & \tilde{D}_{sr} \end{array}\right], \tag{4.31}$$

dengan

$$A_r = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & 0 \\ 0 & A_u \end{pmatrix},\ B_u = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{sr} \\ B_u \end{pmatrix}, \text{ dan } C_u = (\tilde{C}_{sr} \quad C_u), \tag{4.32}$$

dari Persamaan (4.31) diperoleh sistem tereduksi total yang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\tilde{x}_{r_{k+1}} = A_r \tilde{x}_{r_k} + B_r \tilde{u}_k \tag{4.33}$$

$$\tilde{y}_{r_k} = C_r \tilde{x}_{r_k} + D_r \tilde{u}_k. \tag{4.34}$$

Setelah mendapatkan sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r), akan dianalisis sifat-sifat atau perilaku dari sistem tereduksi total.

4.2 Konstruksi Algoritma Filter Kalman pada Sistem Tereduksi Total

Filter Kalman digunakan untuk mengestimasi variabel keadaan dari sistem dinamik linear diskrit yang meminimumkan kovarian *error* estimasi. Filter Kalman adalah algoritma rekursif untuk mengestimasi variabel keadaan dari sistem dinamik stokastik. Estimasi variabel keadaan dengan filter Kalman dilakukan dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasarkan dinamika sistem dan data pengukuran.

Pembentukan algoritma filter Kalman pada sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r) dilakukan dengan cara menerapkan langkah-langkah proses estimasi filter Kalman pada sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r). Sistem tereduksi total mempunyai sifat tidak stabil, terkendali dan teramati.

Sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r) yang dinyatakan pada Persamaan (4.32) dan (4.33) tidak memuat adanya derau. Pada umumnya suatu sistem selalu dipengaruhi oleh derau atau gangguan. Derau atau gangguan ini berupa derau pada sistem dan derau pada pengukuran. Oleh karena itu, pada sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r) perlu ditambahkan derau. Sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r) yang memuat derau disebut sebagai sistem tereduksi total stokastik (A_r, B_r, C_r, D_r) yang bentuknya dapat dituliskan sebagai

$$\tilde{x}_{r_{k+1}} = A_r \tilde{x}_{r_k} + B_r \tilde{u}_k + G w_k \tag{4.35}$$

$$\tilde{y}_{r_k} = C_r \tilde{x}_{r_k} + D_r \tilde{u}_k + v_{k,} \tag{4.36}$$

dengan w_k dan v_k masing-masing merupakan derau sistem dan derau pengukuran pada sistem tereduksi total stokastik (A_r, B_r, C_r, D_r). Pada sistem tereduksi total stokastik (A_r, B_r, C_r, D_r) diasumsikan:

$$\tilde{x}_{r_0} \sim N\left(\bar{\tilde{x}}_{r_0}, P_{\tilde{x}_{r_0}}\right); w_k \sim N(0, Q); v_k \sim N(0, R) \tag{4.37}$$

Persamaan (4.36) menunjukkan bahwa pada sistem tereduksi total diberikan keadaan awal $\tilde{x}_{r_0}$ yang merupakan variabel acak dengan rata-rata $\bar{\tilde{x}}_{r_0} = \tilde{x}_{r_0}$ dan kovariansi awal $P_{\tilde{x}_{r_0}}$. Derau sistem w_k dan derau pengukuran v_k merupakan besaran-besaran stokastik yang mempunyai rata-rata nol dan masing-masing mempunyai kovariansi Q dan R, sehingga berlaku

$$E[w_k] = E[w_k^T] = 0;\ E[v_k] = E[v_k^T] = 0, \tag{4.38}$$

dan

$$Q = E[w_k w_k^T]; R = E[v_k v_k^T]. \tag{4.39}$$

Estimasi variabel keadaan pada sistem tereduksi total dengan filter Kalman dilakukan dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasarkan sistem dinamik, yang disebut sebagai tahap prediksi. Pada tahap prediksi ini estimasi variabel keadaan dilakukan berdasarkan data awal yang ada pada sistem tersebut dan berdasarkan dinamika sistemnya itu sendiri. Selanjutnya hasil estimasi dari tahap prediksi ini diperbaiki lagi dengan melakukan koreksi menggunakan data-

data yang diperoleh dari pengukuran. Tahap ini disebut sebagai tahap koreksi. Tahap prediksi dan tahap koreksi dilakukan secara rekursi dengan cara meminimumkan kovariansi kesalahan estimasi.

Untuk pembahasan berikutnya, diberikan penotasian $\hat{\tilde{x}}_{r_k}^{-}$ dan $\tilde{P}_k^{-}$ yang masing-masing menyatakan estimasi dan kovariansi variabel keadaan $\tilde{x}_{r_k}$ pada tahap prediksi, sedangkan notasi $\hat{\tilde{x}}_{r_k}$ dan $\tilde{P}_k$ untuk menyatakan estimasi dan kovariansi variabel keadaan $\tilde{x}_{r_k}$ pada tahap koreksi. Pembentukan algoritma filter Kalman pada tereduksi total dapat disusun dalam 4 tahap dan secara lengkap dapat disusun sebagai berikut:

1. Tahap Penentuan Sistem Dinamik dan Model Pengukuran

   Pada tahap ini didefinisikan persamaan model sistem dinamik dan model pengukuran, seperti yang telah dinyatakan pada Persamaan (4.35) dan (4.36).

2. Tahap Inisialisasi

   Pada tahap ini diberikan inisialisasi pada sistem. Inisialisasi yang diberikan pada sistem berupa, nilai awal $\tilde{x}_{r_0}$, nilai estimasi awal $\hat{\tilde{x}}_{r_0} = E\left[\tilde{x}_{r_0}\right]$, kovariansi kesalahan estimasi awal $\tilde{P}_0 = E\left[\left(\tilde{x}_{r_0} - \hat{\tilde{x}}_{r_0}\right)\left(\tilde{x}_{r_0} - \hat{\tilde{x}}_{r_0}\right)^T\right]$ dan diberikan asumsi-asumsi:

$$\tilde{x}_{r_0} \sim N\left(\hat{\tilde{x}}_{r_0}, P_{\tilde{x}_{r_0}}\right); w_k \sim N(0, Q); v_k \sim N(0, R)$$

3. Tahap Prediksi

   Pada tahap prediksi ini dilakukan estimasi variabel keadaan dilakukan berdasarkan data awal yang ada pada sistem dan berdasarkan dinamika sistemnya itu sendiri tanpa memasukkan pengaruh faktor-faktor diluar sistem. Berdasarkan pengaruh dinamika sistemnya, seperti yang dinyatakan pada Persamaan (4.35), maka dapat ditentukan:

i. Estimasi variabel keadaan

Estimasi variabel keadaan $\boldsymbol{\tilde{x}_{rk+1}}$ pada sistem tereduksi total berdasarkan dinamika sistemnya, dapat dirumuskan sebagai

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-} &= E(\tilde{x}_{rk+1})\\ &= \boldsymbol{E\left(A_r\tilde{x}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k + Gw_k\right)}\\ &= A_rE\left(\tilde{x}_{r_k}\right) + B_rE(\tilde{u}_k) + GE(w_k), \qquad (4.40)\end{aligned}$$

Substitusi Persamaan (4.38) dan $E[\tilde{u}_k] = \tilde{u}_k$ ke dalam Persamaan (4.40) menghasilkan

$$\hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-} = A_r\hat{\tilde{x}}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k. \qquad (4.41)$$

ii. Kovariansi kesalahan estimasi variabel keadaan.

Kovariansi kesalahan estimasi untuk variabel $\tilde{x}_{rk+1}$ pada sistem tereduksi total dapat dirumuskan sebagai

$$\tilde{P}_{k+1}^{-} = E\left[\left(\tilde{x}_{rk+1} - \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-}\right)\left(\tilde{x}_{rk+1} - \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-}\right)^{T}\right]. \qquad (4.42)$$

Substitusi Persamaan (4.35) dan (4.41) ke dalam Persamaan (4.42) menghasilkan

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tilde{P}_{k+1}^{-}} &= \boldsymbol{E\Big[\big(A_r\tilde{x}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k + Gw_k - A_r\hat{\tilde{x}}_{r_k}}\\ &\qquad \boldsymbol{+ B_r\tilde{u}_k\big)\left(A_r\tilde{x}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k + Gw_k - A_r\hat{\tilde{x}}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k\right)^{T}\Big]}\\ &= \boldsymbol{E\left[\left(A_r\tilde{x}_{r_k} + Gw_k - A_r\hat{\tilde{x}}_{r_k}\right)\left(A_r\tilde{x}_{r_k} + Gw_k - A_r\hat{\tilde{x}}_{r_k}\right)^{T}\right]}\\ &= \boldsymbol{A_rE\left[\left(\tilde{x}_{r_k} - \hat{\tilde{x}}_{r_k}\right)\left(\tilde{x}_{r_k} - \hat{\tilde{x}}_{r_k}\right)^{T}\right]A_r^{T} + A_rE\left[\left(\tilde{x}_{r_k} - \hat{\tilde{x}}_{r_k}\right)w_k^{T}\right]G^{T}} +\\ &\quad \boldsymbol{GE\left[w_k\left(\tilde{x}_{r_k} - \hat{\tilde{x}}_{r_k}\right)^{T}\right]A_r^{T} + GE[w_kw_k^{T}]G^{T}}. \qquad (4.43)\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.38) ke dalam Persamaan (4.43) diperoleh

$$\tilde{P}_{k+1}^{-} = E\left[A_r\left(\tilde{x}_{r_k} - \hat{\tilde{x}}_{r_k}\right)\left(\tilde{x}_{r_k} - \hat{\tilde{x}}_{r_k}\right)^T A_r{}^T\right] + E[Gw_k w_k{}^T G^T]$$

$$= A_r E\left[\left(\tilde{x}_{r_k} - \hat{\tilde{x}}_{r_k}\right)\left(\tilde{x}_{r_k} - \hat{\tilde{x}}_{r_k}\right)^T\right] A_r{}^T + GE[w_k w_k{}^T]G^T$$

$$= A_r \tilde{P}_k A_r{}^T + GQG^T. \tag{4.44}$$

4. Tahap Koreksi

Pada tahap koreksi ini dilakukan perbaikan estimasi variabel keadaan yang telah diperoleh pada tahap prediksi dengan cara melibatkan data-data pengukuran yang ada. Pada tahap koreksi ini dapat ditentukan:

i. Estimasi untuk faktor pengukuran

Estimasi untuk faktor pengukuran $\boldsymbol{\tilde{y}_{r_{k+1}}}$ pada sistem tereduksi total dapat dirumuskan sebagai

$$\hat{\tilde{y}}_{r_{k+1}} = E\left[\tilde{y}_{r_{k+1}}\right]$$

$$= E\left[C_r \tilde{x}_{r_{k+1}} + D_r \tilde{u}_{k+1} + v_{k+1}\right]$$

$$= C_r E\left[\tilde{x}_{r_{k+1}}\right] + D_r E[\tilde{u}_{k+1}] + E[v_{k+1}]. \tag{4.45}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.38) dan $E[\tilde{u}_{k+1}] = \tilde{u}_{k+1}$ ke dalam Persamaan (4.45) diperoleh

$$\hat{\tilde{y}}_{r_{k+1}} = C_r \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-} + D_r \tilde{u}_{k+1}. \tag{4.46}$$

ii. Kovariansi kesalahan estimasi untuk faktor pengukuran.

Kovariansi kesalahan estimasi untuk faktor pengukuran $\tilde{y}_{r_{k+1}}$ pada sistem tereduksi total dapat dirumuskan sebagai

$$P_{\boldsymbol{\tilde{y}_{r_{k+1}}}} = E\left[\left(\tilde{y}_{r_{k+1}} - \hat{\tilde{y}}_{r_{k+1}}\right)\left(\left(\tilde{y}_{r_{k+1}} - \hat{\tilde{y}}_{r_{k+1}}\right)\right)^T\right] \tag{4.47}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.36) dan (4.38) ke dalam Persamaan (4.47) diperoleh

$$P_{\tilde{y}_{r_{k+1}}} = E\left[\left(C_r\left(\tilde{x}_{r_{k+1}} - \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-}\right) + v_{k+1}\right)\left(C_r\left(\tilde{x}_{r_{k+1}} - \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-}\right) + v_{k+1}\right)^T\right]$$

$$= E\left[\left(C_r\left(\tilde{x}_{r_{k+1}} - \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-}\right) + v_{k+1}\right)\left(\left(\tilde{x}_{r_{k+1}} - \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-}\right)^T C_r^{\ T} + v_{k+1}^{\ T}\right)\right]$$

$$= E\left[C_r\left(\tilde{x}_{r_{k+1}} - \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-}\right)\left(\tilde{x}_{r_{k+1}} - \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-}\right)^T C_r^{\ T}\right] + E\left[C_r\left(\tilde{x}_{r_{k+1}} - \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-}\right)v_k^{\ T}\right] + E\left[v_k\left(\tilde{x}_{r_{k+1}} - \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-}\right)^T C_r^{\ T}\right] + E\left[v_{k+1}v_{k+1}^{\ T}\right]. \quad (4.48)$$

Substitusikan Persamaan (4.38) ke dalam Persamaan (4.48) sehingga diperoleh

$$P_{\tilde{y}_{r_{k+1}}} = C_r\tilde{P}_{k+1}^{-}C_r + R. \quad (4.49)$$

iii. Kovariansi silang antara variabel keadaan dan faktor pengukuran

Kovariansi silang antara variabel keadaan $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{rk+1}}$ dan faktor pengukuran $\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{r_{k+1}}}$ dapat dirumuskan sebagai

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{x}_{rk+1}\tilde{y}_{r_{k+1}}} = \boldsymbol{E}\left[\left(\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{rk+1}} - \hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{r_{k+1}}}^{-}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{r_{k+1}}} - \hat{\tilde{\boldsymbol{y}}}_{\boldsymbol{r_{k+1}}}\right)^{\boldsymbol{T}}\right]. \quad (4.50)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.41) dan (4.46) ke dalam Persamaan (4.50) diperoleh

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{x}_{rk+1}\tilde{y}_{r_{k+1}}} = \boldsymbol{E}\left[\left(\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{rk+1}} - \hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{r_{k+1}}}^{-}\right)\left(\boldsymbol{C_r}\left(\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{rk+1}} - \hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{r_{k+1}}}^{-}\right) + \boldsymbol{v_{k+1}}\right)^{\boldsymbol{T}}\right]$$

$$= \boldsymbol{E}\left[\left(\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{rk+1}} - \hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{r_{k+1}}}^{-}\right)\left(\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{rk+1}} - \hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{\boldsymbol{r_{k+1}}}^{-}\right)^{\boldsymbol{T}}\right]\boldsymbol{C_r}^{\boldsymbol{T}}. \quad (4.51)$$

Berdasarkan Persamaan (4.42), maka Persamaan (4.51) dapat ditulis menjadi

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{x}_{rk+1}\tilde{y}_{r_{k+1}}} = \tilde{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{k+1}}^{-}\boldsymbol{C_r}^{\boldsymbol{T}}. \quad (4.52)$$

Dengan cara yang sama, dapat ditentukan kovariansi silang $\boldsymbol{P}_{\tilde{y}_{r_{k+1}}\tilde{x}_{rk+1}}$, yaitu

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{y}_{r_{k+1}}\tilde{x}_{rk+1}} = \boldsymbol{C_r}\tilde{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{k+1}}^{-}. \quad (4.53)$$

iv. Kovariansi variabel keadaan yang dipengaruhi faktor pengukuran

Kovariansi kesalahan estimasi untuk variabel keadaan $\tilde{y}_{r_{k+1}}$ yang dipengaruhi oleh faktor pengukuran $\tilde{y}_{r_{k+1}}$ dapat dirumuskan sebagai:

$$\tilde{P}_{k+1} = P_{\tilde{\boldsymbol{x}}_{rk+1}/\tilde{\boldsymbol{y}}_{r_{k+1}}}$$

$$= \tilde{P}_{k+1}^{-} - P_{\tilde{\boldsymbol{x}}_{rk+1}\tilde{\boldsymbol{y}}_{r_{k+1}}} \left(P_{\tilde{\boldsymbol{y}}_{r_{k+1}}}\right)^{-1} P_{\tilde{\boldsymbol{y}}_{r_{k+1}}\tilde{\boldsymbol{x}}_{rk+1}}. \qquad (4.54)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.49), (4.52) dan (4.53) ke dalam Persamaan (4.54) maka diperoleh

$$\tilde{P}_{k+1} = \tilde{P}_{k+1}^{-} - \tilde{P}_{k+1}^{-} C_r^{\,T} \left(C_r \tilde{P}_{k+1}^{-} C_r^{\,T} + R\right)^{-1} C_r \tilde{P}_{k+1}^{-}. \qquad (4.55)$$

Persamaan (4.55) dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\tilde{P}_{r_{k+1}} = \left(\left(\tilde{P}_{r_{k+1}}^{-}\right)^{-1} + C_r^{\,T} R^{-1} C_r\right)^{-1}. \qquad (4.56)$$

v. Estimasi variabel keadaan yang dipengaruhi oleh faktor pengukuran

Pada tahap koreksi ini, hasil estimasi varibel keadaan $\tilde{\boldsymbol{x}}_{rk+1}$, yang telah diperoleh dari tahap prediksi, akan diperbaiki dengan menggunakan data pengukuran $\tilde{\boldsymbol{y}}_{r_{k+1}}$. Hasil perbaikan estimasi variabel keadaan $\tilde{\boldsymbol{y}}_{r_{k+1}}$ oleh faktor pengukuran $\tilde{\boldsymbol{y}}_{r_{k+1}}$ dapat dirumuskan sebagai:

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{r_{k+1}} = \boldsymbol{E}\left[\tilde{\boldsymbol{x}}_{rk+1}/\tilde{\boldsymbol{y}}_{r_{k+1}}\right]$$

$$= \hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{r_{k+1}}^{-} + \boldsymbol{P}_{\tilde{x}_{rk+1}\tilde{y}_{r_{k+1}}} \left(\boldsymbol{P}_{\tilde{y}_{r_{k+1}}}\right)^{-1} \left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{r_{k+1}} - \hat{\tilde{\boldsymbol{y}}}_{r_{k+1}}\right). \qquad (4.57)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.46), (4.49) dan (4.52) diperoleh:

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{r_{k+1}} = \hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{r_{k+1}}^{-} + \tilde{\boldsymbol{P}}_{k+1}^{-} \boldsymbol{C}_r^{\,\boldsymbol{T}} \left(\boldsymbol{C}_r \tilde{\boldsymbol{P}}_{k+1}^{-} \boldsymbol{C}_r^{\,\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{R}\right)^{-1}$$

$$\left(\tilde{\boldsymbol{y}}_{r_{k+1}} - \boldsymbol{C}_r \hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{r_{k+1}}^{-} + \boldsymbol{D}_r \tilde{\boldsymbol{u}}_{k+1}\right). \qquad (4.58)$$

Pada Persamaan (4.58) terlihat bahwa estimator $\hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{r_{k+1}}$ terdapat dua unsur penting yaitu $(\tilde{\boldsymbol{y}}_{r_{k+1}} - \boldsymbol{C}_r\hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{r_{k+1}}^{-} + \boldsymbol{D}_r\tilde{\boldsymbol{u}}_{k+1})$yang disebut residu, dan $\tilde{\boldsymbol{P}}_{k+1}^{-}\boldsymbol{C}_r{}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C}_r\tilde{\boldsymbol{P}}_{k+1}^{-}\boldsymbol{C}_r{}^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{R})^{-\boldsymbol{1}}$ yang disebut faktor pembobot atau biasa disebut dengan nama Kalman gain $\widetilde{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{k+1}}$. Sehingga Kalman gain dirumuskan sebagai

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{k+1}} = \tilde{\boldsymbol{P}}_{k+1}^{-}\boldsymbol{C}_r{}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{C}_r\tilde{\boldsymbol{P}}_{k+1}^{-}\boldsymbol{C}_r{}^{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{R})^{-\boldsymbol{1}}\ , \tag{4.59}$$

dan Persamaan (4.58) bisa dituliskan dalam bentuk

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{r_{k+1}} = \hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{r_{k+1}}^{-} + \widetilde{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{k+1}}(\tilde{\boldsymbol{y}}_{r_{k+1}} - \boldsymbol{C}_r\hat{\tilde{\boldsymbol{x}}}_{r_{k+1}}^{-} + \boldsymbol{D}_r\tilde{\boldsymbol{u}}_{k+1}). \tag{4.60}$$

Persamaan (4.60) ini merupakan persamaan estimator untuk variabel $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{r_{k+1}}}$ pada sistem tereduksi total yang bersifat *unbiased* dengan Kalman gain $\widetilde{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{k+1}}$ yang optimal, yaitu meminimalkan kovariansi kesalahan estimasi.

Berdasarkan pada uraian di atas, secara sederhana dapat disusun suatu algoritma filter Kalman pada sistem tereduksi total, yang dapat dibagi ke dalam enam bagian, yaitu:

1. Diberikan sistem awal yang berupa sistem diskrit (A, B, C, D)
   - Dinamika sistem : $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$,
   - Faktor pengukuran : $y_k = Cx_k + Du_k$.

   Karena pada sistem awal merupakan sistem yang tidak stabil, maka perlu dilakukan dekomposisi untuk mendapatkan subsistem stabil dan subsistem tidak stabil.

2. Dilakukan dekomposisi pada sistem tidak stabil dari sistem (A, B, C, D), yaitu:
   - Subsistem stabil : $x_{s_{k+1}} = (A_s, B_s, C_s, D_s)$
   - Subsistem tidak stabil : $x_{u_{k+1}} = (A_u, B_u, C_u, D_u)$.

3. Dilakukan reduksi model pada subsistem stabil menggunakan metode Pemotongan Setimbang, sehingga mendapatkan sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}\right)$ yaitu:
   - Dinamika sistem : $\tilde{x}_{sr_{k+1}} = \tilde{A}_{sr}\tilde{x}_{r_k} + \tilde{B}_{sr}\tilde{u}_k$
   - Faktor pengukuran : $\tilde{y}_{sr_k} = \tilde{C}_{sr}\tilde{x}_{r_k} + \tilde{D}_{sr}\tilde{u}_k$

4. Dibentuk sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r), yaitu:
   - Dinamika sistem : $\tilde{x}_{r_{k+1}} = A_r\tilde{x}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k$,
   - Faktor pengukuran : $\tilde{y}_{r_k} = C_r\tilde{x}_{r_k} + D_r\tilde{u}_k$,

5. Dibentuk sistem tereduksi total stokastik (A_r, B_r, C_r, D_r)
   - Dinamika sistem : $\tilde{x}_{r_{k+1}} = A_r\tilde{x}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k + Gw_k$,
   - Faktor pengukuran : $\tilde{y}_{r_k} = C_r\tilde{x}_{r_k} + D_r\tilde{u}_k + v_k$,

     dengan $w_k \sim N(0, Q)$ dan $v_k \sim N(0, R)$

6. Penerapan algoritma filter Kalman pada sistem tereduksi total dengan langkah-langkah berikut:
   i. Diberikan model sistem dan model pengukuran dalam bentuk stokastik (A_r, B_r, C_r, D_r)
      - Dinamika sistem : $\tilde{x}_{r_{k+1}} = A_r\tilde{x}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k + Gw_k$
      - Faktor pengukuran : $\tilde{y}_{r_k} = C_r\tilde{x}_{r_k} + D_r\tilde{u}_k + v_k$

        dengan $w_k \sim N(0, Q)$ dan $v_k \sim N(0, R)$

   ii. Tahap Inisialisasi

       Pada tahap inisialisasi diberikan nilai awal dari sistem tereduksi total, yaitu

$$\tilde{x}_{r_0} \sim N\left(\bar{\tilde{x}}_{r_0}, P_{\tilde{x}_{r_0}}\right), P_0 = P_{\tilde{x}_{r_0}},\ \hat{\tilde{x}}_{r_0} = \bar{\tilde{x}}_{r_0}\ .$$

iii. Tahap Prediksi

Pada tahap prediksi ini dilakukan estimasi dan penentuan kovariansi kesalahan berdasarkan dinamika sistemnya saja. Pada tahap ini diperoleh:

- Kovariansi kesalahan : $\tilde{P}_{r_{k+1}}^{-} = A_r\tilde{P}_k A_r^{\,T} + GQG^T$,
- Estimasi : $\hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-} = A_r\hat{\tilde{x}}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k$.

iv. Tahap Koreksi

Pada tahap ini dilakukan koreksi terhadap hasil yang telah diperoleh pada tahap prediksi berdasarkan data pengukuran yang diberikan. Pada tahap koreksi ini diperoleh:

- Kovariansi kesalahan: $\tilde{P}_{r_{k+1}} = \left(\left(\tilde{P}_{r_{k+1}}^{-}\right)^{-1} + C_r^{\,T}R^{-1}C_r\right)^{-1}$,
- Estimasi :

$$\hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}} = \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-} + \tilde{P}_{r_{k+1}}^{-}C_r^{\,T}\left(C_r\tilde{P}_{k+1}^{-}C_r^{\,T} + R\right)^{-1}$$
$$\left(\tilde{y}_{r_{k+1}} - C_r\hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-} + D_r\tilde{u}_{k+1}\right)$$
$$\hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}} = \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-} + \tilde{P}_{r_{k+1}}C_r^{\,T}R^{-1}\left(\tilde{y}_{r_{k+1}} - C_r\hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-} + D_r\tilde{u}_{k+1}\right).$$

Jika digunakan Kalman gain

$$\widetilde{K}_{k+1} = \widetilde{P}_{k+1}^{-}C_r^{\,T}(C_r\widetilde{P}_{k+1}^{-}C_r^{\,T} + R)^{-1},$$

maka diperoleh

- Kovariansi kesalahan : $\tilde{P}_{r_{k+1}} = \left(I - \widetilde{K}_{k+1}C\right)\tilde{P}_{r_{k+1}}^{-}$,
- Estimasi : $\hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}} = \hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-} + \widetilde{K}_{k+1}$
  $\left(\tilde{y}_{r_{k+1}} - C_r\hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}}^{-} + D_r\tilde{u}_{k+1}\right)$.

Sistem Awal (A, B, C, D)

dinamika sistem : $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$,
faktor pengukuran : $y_k = Cx_k + Du_k$.

Karena sistem awal merupakan sistem yang tidak stabil, sehingga perlu dilakukan dekomposisi

Dekomposisi sistem tidak stabil

Subsistem stabil : $x_{s_{k+1}} = (A_s, B_s, C_s, D_s)$
Subsistem tidak stabil : $x_{u_{k+1}} = (A_u, B_u, C_u, D_u)$.

Reduksi model pada subsistem stabil

Dinamika sistem :$\tilde{x}_{sr_{k+1}} = \tilde{A}_{sr}\tilde{x}_{r_k} + \tilde{B}_{sr}\tilde{u}_k$
Faktor pengukuran :$\tilde{y}_{sr_k} = \tilde{C}_{sr}\tilde{x}_{r_k} + \tilde{D}_{sr}\tilde{u}_k$

Dibentuk sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r)

Dinamika sistem : $\tilde{x}_{r_{k+1}} = A_r\tilde{x}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k$,
Faktor pengukuran : $\tilde{y}_{r_k} = C_r\tilde{x}_{r_k} + D_r\tilde{u}_k$,

Dibentuk sistem tereduksi total stokastik (A_r, B_r, C_r, D_r)

Dinamika sistem : $\tilde{x}_{r_{k+1}} = A_r\tilde{x}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k + Gw_k$,
Faktor pengukuran : $\tilde{y}_{r_k} = C_r\tilde{x}_{r_k} + D_r\tilde{u}_k + v_k$,
dengan $w_k \sim N(0, Q)$ dan $v_k \sim N(0, R)$

Penerapan algoritma filter Kalman pada sistem tereduksi total

i. Diberikan model sistem dan model pengukuran dalam bentuk stokastik (A_r, B_r, C_r, D_r)
Dinamika sistem : $\tilde{x}_{r_{k+1}} = A_r\tilde{x}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k + Gw_k$
Faktor pengukuran : $\tilde{y}_{r_k} = C_r\tilde{x}_{r_k} + D_r\tilde{u}_k + v_k$
ii. Tahap Inisialisasi
$$\tilde{x}_{r_0} \sim N\left(\bar{\tilde{x}}_{r_0}, P_{\tilde{x}_{r_0}}\right), P_0 = P_{\tilde{x}_{r_0}}, \ \hat{\tilde{x}}_{r_0} = \bar{\tilde{x}}_{r_0} .$$
iii. Tahap Prediksi
Kovariansi kesalahan : $\tilde{P}^-_{r_{k+1}} = A_r\tilde{P}_k {A_r}^T + GQG^T$,
Estimasi : $\hat{\tilde{x}}^-_{r_{k+1}} = A_r\hat{\tilde{x}}_{r_k} + B_r\tilde{u}_k$.
iv. Tahap Koreksi
Kovariansi kesalahan : $\tilde{P}_{r_{k+1}} = \left(\left(\tilde{P}^-_{r_{k+1}}\right)^{-1} + {C_r}^T R^{-1} C_r\right)^{-1}$,
Estimasi :
$$\hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}} = \hat{\tilde{x}}^-_{r_{k+1}} + \tilde{P}_{r_{k+1}} {C_r}^T R^{-1}\left(\tilde{y}_{r_{k+1}} - C_r\hat{\tilde{x}}^-_{r_{k+1}} + D_r\tilde{u}_{k+1}\right).$$
Jika digunakan Kalman gain
$$\tilde{K}_{k+1} = \tilde{P}^-_{k+1} {C_r}^T\left(C_r\tilde{P}^-_{k+1} {C_r}^T + R\right)^{-1},$$
Kovariansi kesalahan : $\tilde{P}_{r_{k+1}} = \left(I - \tilde{K}_{k+1}C\right)\tilde{P}^-_{r_{k+1}}$,
Estimasi : $\hat{\tilde{x}}_{r_{k+1}} = \hat{\tilde{x}}^-_{r_{k+1}} + \tilde{K}_{k+1}\left(\tilde{y}_{r_{k+1}} - C_r\hat{\tilde{x}}^-_{r_{k+1}} + D_r\tilde{u}_{k+1}\right)$.

4.3 Simulasi

Pada simulasi ini akan diberikan 5 contoh kasus yang diterapkan pada reduksi model dengan Pemotongan Setimbang, lalu dilakukan estimasi variabel menggunakan algoritma filter Kalman. Kasus yang digunakan antara lain: matriks dengan elemen sebarang, matriks bentuk tridiagonal, matriks bentuk diagonal, matriks bentuk segitiga atas, dan matriks bentuk segitiga bawah.

Simulasi yang dilakukan pada penelitian ini menggunakan *software* MATLAB R2013b. Spec PC yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

- *Processor* : Intel(R) Core(TM) i3-2350M CPU @ 2.30 GHz 2.30 GHz
- RAM : 2,00 GB
- *System type* : 32-bit *Operating System*

4.3.1 Kasus 1

Pada kasus 1 ini diambil suatu matriks A berukuran 20x20 dengan elemen sebarang. Simulasi ini akan mengambil contoh sistem awal (A, B, C, D) sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix}
-0.2 & 0.1 & 0.2 & -0.8 & 0.7 & -0.1 & 0.5 & 0.8 & -1 & 0.2 & -0.3 & 0.2 & 0.1 & -0.8 & 0.4 & -0.9 & 0.5 & 0.8 & -1 & -0.1 \\
0.1 & -0.8 & 0.2 & 0.9 & -0.6 & 0.2 & -0.6 & 0.9 & 0.1 & -0.3 & 0.4 & -0.3 & 0.2 & 0.9 & -0.5 & 1 & -0.6 & 0.9 & -0.1 & 0.2 \\
0.4 & 0.2 & -0.3 & 0.1 & 1 & 0.5 & -0.7 & 1 & 0.2 & -0.4 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & -1 & 0.6 & 0.1 & -0.7 & -1 & 0.2 & 0.3 \\
-0.4 & 0.5 & 0.3 & -0.1 & 0.4 & 0.3 & -0.8 & 0.1 & 0.3 & -0.5 & 0.6 & 0.5 & -0.4 & 0.1 & 0.7 & -0.2 & 0.8 & 0.1 & -0.3 & -0.4 \\
0.3 & -0.5 & 0.6 & 0.4 & -0.2 & 0 & -0.9 & 0.2 & 0.4 & -0.6 & 0.7 & -0.6 & 0.5 & 0.2 & -0.8 & 0.3 & -0.9 & 0.2 & -0.4 & 0.5 \\
0.1 & 0.4 & -0.6 & 0.7 & 0.5 & -0.4 & 1 & 0.3 & -0.5 & 0.7 & 0.8 & -0.7 & 0.6 & 0.3 & -0.9 & 0.4 & 1 & -0.3 & 0.5 & 0.6 \\
-0.7 & 0.2 & 0.5 & -0.7 & 0.8 & 0.6 & -0.5 & 0.4 & 0.6 & -0.8 & 0.9 & -0.8 & 0.7 & -0.4 & 1 & -0.5 & 0.1 & -0.4 & 0.6 & -0.7 \\
0.3 & -0.8 & 0.3 & 0.6 & -0.8 & 0.9 & -0.7 & 0.1 & 0.7 & -0.9 & 1 & -0.9 & 0.8 & 0.5 & -0.1 & 0.6 & -0.2 & 0.5 & -0.7 & 0.8 \\
0.7 & 0.4 & -0.9 & 0.4 & 0.7 & -0.9 & 0.1 & 0.1 & -0.2 & 0.1 & 0 & -0.1 & 0.9 & 0.6 & -0.2 & 0.7 & 0.3 & -0.6 & 0.8 & 0.9 \\
-0.1 & 0.8 & 0.5 & -0.1 & 0.5 & -0.8 & 0.1 & 0.2 & -0.2 & 0.1 & -0.1 & 0 & 1 & -0.7 & 0.3 & -0.8 & 0.4 & 0.7 & -0.9 & -1 \\
0.3 & -0.2 & 0.9 & 0.6 & -0.2 & 0.6 & -0.9 & 0.2 & 0.3 & -0.3 & 0.2 & -0.1 & 0.2 & 0.8 & -0.4 & 0.9 & 0.5 & 0.8 & -1 & 0.1 \\
0.4 & 0.4 & -0.3 & 0.1 & 0.7 & -0.3 & 0.7 & 0.1 & -0.3 & 0.1 & 0.4 & -1.2 & 0 & 0.9 & -0.5 & 1 & 0.6 & -0.9 & 0.1 & 0.2 \\
-0.4 & 0.5 & 0.5 & -0.4 & 0.2 & -0.8 & 0.4 & 0.8 & -0.2 & -0.7 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & -1 & 0.6 & -0.1 & 0.7 & 1 & 0.2 & -0.3 \\
0.3 & -0.5 & 0.6 & 0.6 & -0.5 & 0.3 & -0.9 & 0.5 & 0.9 & -0.3 & 0.5 & -0.6 & 0.6 & 0.4 & -0.7 & 0.2 & -0.8 & 0.1 & -0.3 & 0.4 \\
0.1 & 0.4 & -0.6 & 0.7 & 0.7 & -0.6 & 0.4 & 0.1 & -0.6 & 0.1 & 0.4 & -0.6 & 0.7 & 0.7 & -0.2 & 0.3 & 0 & -0.2 & 0.4 & 0.5 \\
-0.7 & 0.2 & 0.5 & -0.7 & 0.8 & 0.8 & -0.7 & 0.5 & 0.2 & -0.7 & 0.2 & 0.5 & -0.7 & 0.8 & 0.8 & -0.1 & 0 & 0.3 & 0.5 & -0.6 \\
0.3 & -0.8 & 0.3 & 0.6 & -0.8 & 0.9 & -0.9 & 0.8 & 0.6 & -0.3 & 0.8 & -0.3 & 0.6 & 0.8 & -0.9 & 0.9 & -1.4 & 0.4 & -0.6 & 0.7 \\
0.7 & 0.4 & -0.9 & 0.4 & 0.7 & -0.9 & 0.1 & 0.1 & -0.9 & 0.7 & 0.4 & 0.9 & 0.4 & 0.7 & -0.9 & 0.1 & 0.1 & -0.4 & -0.7 & 0.8 \\
-0.1 & 0.8 & 0.5 & -0.1 & 0.5 & -0.8 & 0.1 & 0.2 & -0.2 & 0.1 & -0.8 & 0.5 & 0.1 & -0.5 & 0.8 & -0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & -0.9 \\
0.3 & -0.2 & 0.9 & 0.6 & -0.2 & 0.6 & -0.9 & 0.2 & 0.3 & -0.3 & 0.2 & -0.9 & 0.6 & 0.2 & -0.6 & 0.9 & -0.2 & 0.3 & -0.3 & 0.2
\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Tabel 4.1 Nilai Eigen Matriks *A*

i	λ_i
1	3.8034
2	2.5304
3	2.5932
4	1.7205
5	1.7205
6	1.4367
7	1.4367
8	1.3978
9	1.2513
10	1.2513
11	1.0522
12	1.0522
13	0.8751
14	0.8751
15	0.5906
16	0.5954
17	0.5954
18	0.5873
19	0.4224
20	0.4224

Selanjutnya akan diselidiki kestabilan, keterkendalian dan keteramatan dari sistem awal tersebut. Stabilitas sistem awal (A,B,C,D) dapat ditentukan berdasarkan nilai absolut dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.1.

Berdasarkan Tabel 4.1, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem awal (A,B,C,D) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem awal (A,B,C,D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem awal (A,B,C,D) adalah 20. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem awal (A,B,C,D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem awal (A,B,C,D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem awal (A,B,C,D) adalah 20. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem awal (A,B,C,D) adalah teramati.

Pada reduksi model dengan metode Pemotongan Setimbang digunakan sistem stabil asimtotik, terkendali dan teramati. Karena pada sistem yang tidak stabil tidak dapat menentukan gramian keterkendalian dan gramian keteramatan dalam membentuk sistem setimbang. Maka perlu adanya dekomposisi atau pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tidak stabil.

Pada dekomposisi sistem tidak stabil, dilakukan transformasi sistem menggunakan matriks unitary U_d. Diperoleh matriks unitary U_d seperti yang tertulis pada Lampiran A.

Selanjutnya dilakukan transformasi tahap kedua W_d. Diperoleh matriks W_d seperti yang tertulis pada Lampiran A. Sehingga diperoleh hasil dekomposisi sistem tidak stabil, dimana subsistem stabil adalah sebagai berikut:

$$A_S = \begin{pmatrix} 0.1225 & -0.3358 & -0.0014 & 0.2930 & 0.7104 & -0.6466 & -0.1420 & 0.2973 \\ 0.4963 & 0.0962 & -0.0528 & -0.0669 & -0.1638 & 0.1794 & 0.2514 & 0.5144 \\ 0 & 0 & 0.5873 & 0.1331 & 0.0536 & -0.3161 & 0.5477 & 0.4871 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5906 & -0.0268 & 0.0762 & 0.1251 & 0.4431 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4523 & -0.3757 & 0.1627 & 0.0602 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6003 & -0.2852 & 0.1112 & -0.3421 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7124 & 0.5649 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6090 & 0.5919 \end{pmatrix}$$

$$B_S = \begin{pmatrix} -2.3242 \\ 6.0424 \\ -1.2303 \\ 1.8869 \\ 0.1429 \\ -3.2467 \\ -2.4865 \\ 1.8374 \end{pmatrix}$$

$$C_S = \begin{pmatrix} 0.0464 & -1.6808 & 0.9586 & -0.4716 & -1.5915 & -2.0874 & 0.1431 & 1.2963 \end{pmatrix}$$

$$D_S = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Pada subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) diatas, dapat dilakukan analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_s yang dapat dilihat pada Tabel 4.1. Nilai eigen matriks A_s pada Tabel 4.1 disajikan dengan warna hitam. Berdasarkan Tabel 4.1, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_s bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.2 subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah terkendali.

Keteramatan subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.3 subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah teramati.

Setelah itu untuk subsistem tidak stabil. Pada subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang tertulis pada Lampiran A, dapat dilakukan analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan.

Kestabilan dari subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_u seperti yang disajikan pada Tabel 4.1. Nilai eigen matriks A_u pada Tabel 4.1 disajikan dengan warna merah. Berdasarkan Tabel 4.1, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_u bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah tidak stabil.

Keterkendalian subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah 12. Maka berdasarkan Teorema 2.2 subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah terkendali.

Keteramatan subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah 12. Maka berdasarkan Teorema 2.3 subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah teramati.

Selanjutnya adalah membentuk sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dari subsistem stabil, dimana sistem setimbang dapat dilihat sebagai berikut:

$$\tilde{A}_s = \begin{pmatrix} -0.1145 & -0.5870 & -0.3106 & 0.0621 & -0.1434 & 0.0589 & -0.0086 & -0.0053 \\ 0.5870 & 0.5913 & -0.3433 & 0.0164 & -0.0915 & 0.0451 & -0.0055 & -0.0040 \\ -0.3106 & 0.3433 & 0.5647 & 0.3626 & -0.2669 & 0.0653 & -0.0146 & -0.0061 \\ -0.0621 & 0.0164 & -0.3626 & 0.8675 & 0.1705 & -0.0807 & 0.0090 & 0.0071 \\ -0.1434 & 0.0915 & -0.2669 & -0.1705 & -0.6239 & -0.3355 & 0.0042 & 0.0271 \\ -0.0589 & 0.0451 & -0.0653 & -0.0807 & 0.3355 & -0.1166 & -0.4487 & -0.0199 \\ 0.0086 & -0.0055 & 0.0146 & 0.0090 & -0.0042 & -0.4487 & -0.0715 & -0.6473 \\ -0.0053 & 0.0040 & -0.0061 & -0.0071 & 0.0271 & 0.0199 & 0.6473 & -0.3147 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_s \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \\ 0.6386 \\ -0.1976 \\ -0.0486 \\ 0.0433 \\ 0.0021 \\ 0.0035 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_s = \begin{pmatrix} -2.0877 & 0.9851 & -0.6386 & -0.1976 & 0.0486 & 0.0433 & 0.0021 & -0.0035 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_s = (0)$$

Selanjutnya akan dicari gramian keterkendalian $\tilde{W}$ dan gramian keteramatan $\tilde{M}$ dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$, diperoleh:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 6.6781 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5789 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9659 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.9377 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7729 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0426 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0211 \end{pmatrix}$$

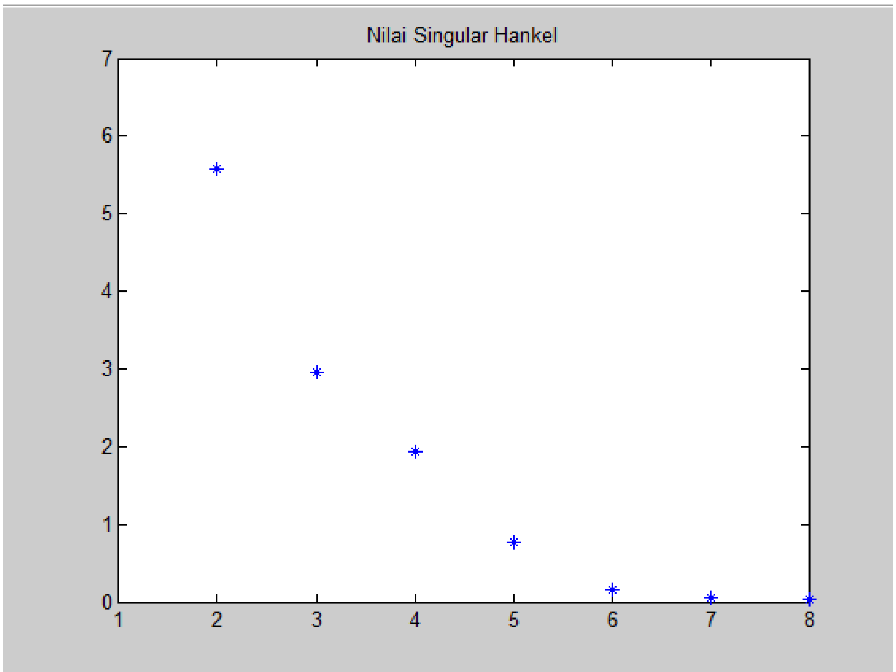
$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 6.6781 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5789 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9659 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.9377 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7729 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1594 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0426 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0211 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa nilai dari $\tilde{W} = \tilde{M}$ yang sama artinya dengan $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma$, dengan $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ dengan σ adalah nilai singular Hankel, maka didapatkan nilai singular Hankel seperti yang disajikan pada Tabel 4.2 berikut:

Tabel 4.2 Nilai Singular Hankel

i	$\lvert\sigma_i\rvert$
1	6.6781
2	5.5789
3	2.9659
4	1.9377
5	0.7729
6	0.1594
7	0.0426
8	0.0211

Berdasarkan Tabel 4.2, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0. Nilai singular Hankel juga dapat ditunjukkan melalui grafik, yang disajikan oleh Gambar 4.1 berikut.



Gambar 4.1 Nilai Singular Hankel

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_s$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.3. Tabel 4.3 disajikan sebagai berikut:

Tabel 4.3 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_s$

I	λ_i
1	0.5906
2	0.5954
3	0.5954
4	0.8751
5	0.8751
6	0.5873
7	0.4224
8	0.4224

Berdasarkan Tabel 4.3, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_s$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah teramati.

Sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ akan direduksi dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, didapatkan sistem tereduksi dengan Pemotongan Setimbang. Orde dari sistem tereduksi r adalah dari 2 sampai dengan $z-1$, dengan z adalah dimensi dari A_s (subsistem stabil). Semakin kecil r maka semakin banyak variabel yang direduksi.

Reduksi orde 7, dengan orde 7 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr7} = \begin{pmatrix} -0.1145 & -0.5870 & -0.3106 & 0.0621 & -0.1434 & 0.0589 & -0.0086 \\ 0.5870 & 0.5913 & -0.3433 & 0.0164 & -0.0915 & 0.0451 & -0.0055 \\ -0.3106 & 0.3433 & 0.5647 & 0.3626 & -0.2669 & 0.0653 & -0.0146 \\ -0.0621 & 0.0164 & -0.3626 & 0.8675 & 0.1705 & -0.0807 & 0.0090 \\ -0.1434 & 0.0915 & -0.2669 & -0.1705 & -0.6239 & -0.3355 & 0.0042 \\ -0.0589 & 0.0451 & -0.0653 & -0.0807 & 0.3355 & -0.1166 & -0.4487 \\ 0.0086 & -0.0055 & 0.0146 & 0.0090 & -0.0042 & -0.4487 & -0.0715 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr7} = \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \\ 0.6386 \\ -0.1976 \\ -0.0486 \\ 0.0433 \\ 0.0021 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr7} = \begin{pmatrix} 2.0877 & 0.9851 & 0.6386 & -0.1976 & -0.0486 & 0.0433 & 0.0021 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr7} = (0)$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr7}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.4 sebagai berikut:

Tabel 4.4 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr7}$

i	λ_i
1	0.6316
2	0.6316
3	0.8746
4	0.8746
5	0.3687
6	0.3687
7	0.6156

Berdasarkan Tabel 4.4, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr7}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ adalah 7. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ adalah 7. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran A.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r7} seperti yang disajikan pada Tabel 4.5 sebagai berikut:

Tabel 4.5 Nilai Eigen Matriks A_{r7}

i	λ_i
1	0.6316
2	0.6316
3	0.8746
4	0.8746
5	0.3687
6	0.3687
7	0.6156
8	3.8034
9	2.5932
10	1.4367
11	1.4367
12	1.3978
13	2.5304
14	1.2513
15	1.2513
16	1.7205
17	1.7205
18	1.0522
19	1.0522

Berdasarkan Tabel 4.5, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r7} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $\left(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7}\right)$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $\left(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7})$ adalah 19. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7})$ adalah 19. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7})$ adalah teramati.

Reduksi orde 6, dengan orde 6 maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr6} = \begin{pmatrix} -0.1145 & -0.5870 & -0.3106 & 0.0621 & -0.1434 & 0.0589 \\ 0.5870 & 0.5913 & -0.3433 & 0.0164 & -0.0915 & 0.0451 \\ -0.3106 & 0.3433 & 0.5647 & 0.3626 & -0.2669 & 0.0653 \\ -0.0621 & 0.0164 & -0.3626 & 0.8675 & 0.1705 & -0.0807 \\ -0.1434 & 0.0915 & -0.2669 & -0.1705 & -0.6239 & -0.3355 \\ -0.0589 & 0.0451 & -0.0653 & -0.0807 & 0.3355 & -0.1166 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr6} = \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \\ 0.6386 \\ -0.1976 \\ -0.0486 \\ 0.0433 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr6} = \begin{pmatrix} -2.0877 & 0.9851 & -0.6386 & -0.1976 & 0.0486 & 0.0433 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr6} = (0)$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 6 $(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr6}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.6 sebagai berikut:

Tabel 4.6 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr6}$

i	λ_i
1	0.6309
2	0.8703
3	0.8703
4	0.2401
5	0.2401
6	0.5199

Berdasarkan Tabel 4.6, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ adalah 6. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ adalah 6. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran A.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem tereduksi total $(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r6} seperti yang disajikan pada Tabel 4.7 sebagai berikut:

Tabel 4.7 Nilai Eigen Matriks A_{r6}

i	λ_i
1	0.6309
2	0.8703
3	0.8703
4	0.2401
5	0.2401
6	0.5199
7	3.8034
8	2.5932
9	1.4367
10	1.4367
11	1.3978
12	2.5304
13	1.2513
14	1.2513
15	1.7205
16	1.7205
17	1.0522
18	1.0522

Berdasarkan Tabel 4.7, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r6} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6})$ adalah 18. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $\left(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $\left(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6}\right)$ adalah 18. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $\left(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6}\right)$ adalah teramati.

Reduksi orde 5, dengan orde 5 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr5} = \begin{pmatrix} -0.1145 & -0.5870 & -0.3106 & 0.0621 & -0.1434 \\ 0.5870 & 0.5913 & -0.3433 & 0.0164 & -0.0915 \\ -0.3106 & 0.3433 & 0.5647 & 0.3626 & -0.2669 \\ -0.0621 & 0.0164 & -0.3626 & 0.8675 & 0.1705 \\ -0.1434 & 0.0915 & -0.2669 & -0.1705 & -0.6239 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr5} = \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \\ 0.6386 \\ -0.1976 \\ -0.0486 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr5} = \begin{pmatrix} -2.0877 & 0.9851 & -0.6386 & -0.1976 & 0.0486 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr5} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr5}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.8 sebagai berikut:

Tabel 4.8 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr5}$

i	λ_i
1	0.7521
2	0.8595
3	0.8595
4	0.4407
5	0.4407

Berdasarkan Tabel 4.8, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr5}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ adalah 5. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ adalah 5. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran A.

Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r5} seperti yang disajikan pada Tabel 4.9 sebagai berikut:

Tabel 4.9 Nilai Eigen Matriks A_{r5}

i	λ_i
1	0.7521
2	0.8595
3	0.8595
4	0.4407
5	0.4407
6	3.8034

7	2.5932
8	1.4367
9	1.4367
10	1.3978
11	2.5304
12	1.2513
13	1.2513
14	1.7205
15	1.7205
16	1.0522
17	1.0522

Berdasarkan Tabel 4.9, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r5} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ adalah 17. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ adalah 17. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ adalah teramati.

Reduksi orde 4, dengan orde 4 maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr4} = \begin{pmatrix} -0.1145 & -0.5870 & -0.3106 & 0.0621 \\ 0.5870 & 0.5913 & -0.3433 & 0.0164 \\ -0.3106 & 0.3433 & 0.5647 & 0.3626 \\ -0.0621 & 0.0164 & -0.3626 & 0.8675 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr4} = \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \\ 0.6386 \\ -0.1976 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr4} = \begin{pmatrix} -2.0877 & 0.9851 & -0.6386 & -0.1976 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr4} = (0)$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr4}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.10 sebagai berikut:

Tabel 4.10 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr4}$

i	λ_i
1	0.0544
2	0.8698
3	0.8698
4	0.5936

Berdasarkan Tabel 4.10, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr4}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software*

MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran A.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r4} seperti yang disajikan pada Tabel 4.11.

Tabel 4.11 Nilai Eigen Matriks A_{r4}

i	λ_i
1	0.0544
2	0.8698
3	0.8698
4	0.5936
5	3.8034
6	2.5932
7	1.4367
8	1.4367
9	1.3978
10	2.5304
11	1.2513
12	1.2513
13	1.7205
14	1.7205

15	1.0522
16	1.0522

Berdasarkan Tabel 4.11, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r4} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ adalah 16. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ adalah 16. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ adalah teramati.

Reduksi orde 3, dengan orde 3 maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr3} = \begin{pmatrix} -0.1145 & -0.5870 & -0.3106 \\ 0.5870 & 0.5913 & -0.3433 \\ -0.3106 & 0.3433 & 0.5647 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr3} = \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \\ 0.6386 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr3} = \begin{pmatrix} -2.0877 & 0.9851 & -0.6386 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr3} = (0)$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr3}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.12 sebagai berikut:

Tabel 4.12 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr3}$

i	λ_i
1	0.0619
2	0.7974
3	0.7974

Berdasarkan Tabel 4.12, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr3}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah 3. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah 3. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran A.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r3} seperti yang disajikan pada Tabel 4.13 sebagai berikut:

Tabel 4.13 Nilai Eigen Matriks A_{r3}

i	λ_i
1	0.0619
2	0.7974
3	0.7974
4	3.8034
5	2.5932
6	1.4367
7	1.4367
8	1.3978
9	2.5304
10	1.2513
11	1.2513
12	1.7205
13	1.7205
14	1.0522
15	1.0522

Berdasarkan Tabel 4.13, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r3} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah 15. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah 15. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah teramati.

Reduksi orde 2, dengan orde 2 maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr2} = \begin{pmatrix} -0.1145 & -0.5870 \\ 0.5870 & 0.5913 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr2} = \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr2} = \begin{pmatrix} -2.0877 & 0.9851 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr2} = (0)$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr2}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.14 sebagai berikut:

Tabel 4.14 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr2}$

i	λ_i
1	0.5261
2	0.5261

Berdasarkan Tabel 4.14, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr2}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2})$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah 2. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah 2. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ orde 14 seperti tertulis pada Lampiran A.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r2} seperti yang disajikan pada Tabel 4.15 sebagai berikut:

Tabel 4.15 Nilai Eigen Matriks A_{r2}

i	λ_i
1	0.5261
2	0.5261
3	3.8034
4	2.5932
5	1.4367
6	1.4367
7	1.3978
8	2.5304
9	1.2513
10	1.2513
11	1.7205

12	1.7205
13	1.0522
14	1.0522

Berdasarkan Tabel 4.15, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r2} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah 14. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah 14. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah teramati.

Setelah dilakukan proses reduksi model, akan dilakukan estimasi menggunakan filter Kalman. Proses estimasi ini menggunakan *software* MATLAB R2013b. Estimasi dilakukan pada sistem awal (A, B, C, D), sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, dan sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r).

Diberikan estimasi awal $\hat{x}_0 = 0$ dan kovariansi kesalahan estimasi awal $P_0 = 0{,}01I$ dan I matriks identitas. Derau sistem w dibangkitkan dari nilai random dengan mengambil mean nol dan kovariansi $Q = 0.01I$ Sedangkan untuk derau pengukuran v juga dibangkitkan dari nilai random dengan mengambil mean nol dan kovariansi $R = 0.2$. Berikut akan ditampilkan hasil simulasi estimasi variabel keadaan dengan melakukan iterasi sebanyak 10 kali atau $N = 10$. Pada semua sistem dilakukan simulasi sebanyak 10 kali. Hasil simulasi estimasi variabel keadaan disajikan pada Tabel 4.16.

Tabel 4.16 Hasil Estimasi Variabel Setiap Sistem

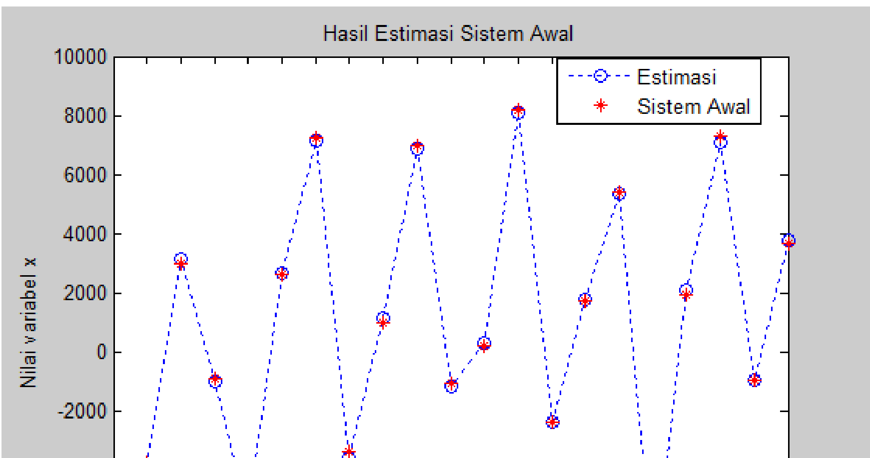
Sistem	Nilai *error* pada N=10	Rata-rata waktu komputasi (detik)
Awal	23,6950	0.7306541
Setimbang	19,2070	0.4164941
Tereduksi Total Orde 7	13,5882	0.3952339
Tereduksi Total Orde 6	13,6578	0.3487187
Tereduksi Total Orde 5	14,5479	0.3379121
Tereduksi Total Orde 4	15,4119	0.3700648
Tereduksi Total Orde 3	13,8241	0.3284897
Tereduksi Total Orde 2	12,4541	0.3447269

Berdasarkan data pada Tabel 4.16 terlihat bahwa nilai *error* terkecil adalah pada sistem tereduksi total orde 2 dengan $error = 12{,}4541$ dengan waktu komputasi tercepat pada sistem tereduksi total. Berdasarkan Tabel 4.16 terlihat bahwa proses estimasi pada sistem tereduksi total lebih cepat daripada proses estimasi pada sistem awal dan sistem setimbang. Hal ini karena banyaknya variabel *state* yang dihitung, sehingga waktu komputasi pada sistem tereduksi lebih sedikit. Untuk tabel nilai *error* dan waktu komputasi setiap sistem yang lebih terperinci dapat dilihat pada Lampiran A.

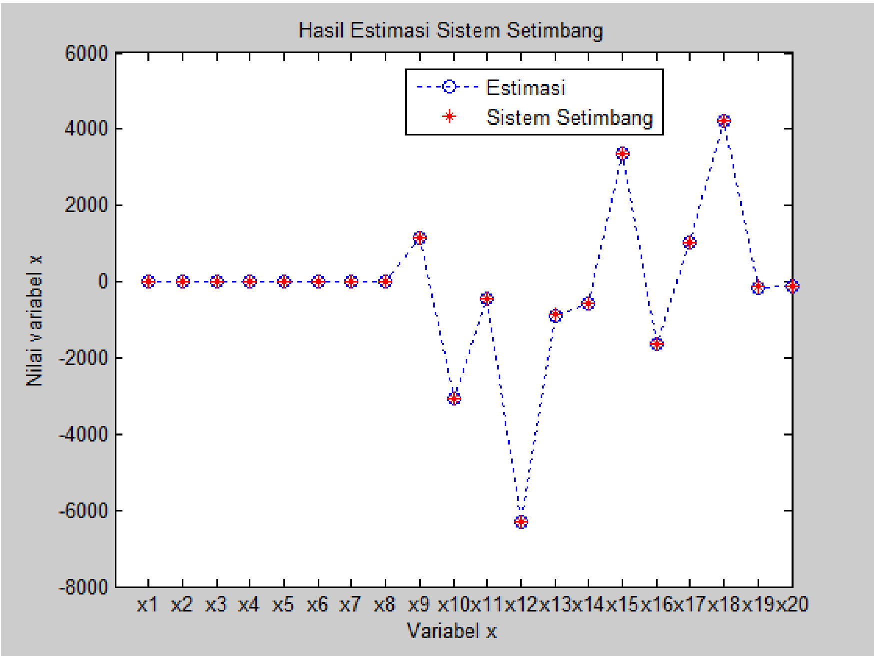
Cara mencari *error* estimasi akan dituliskan dalam persamaan berikut:

$$error = \|x - \hat{x}\| \tag{4.61}$$

dimana x adalah nilai sebenarnya dan $\hat{x}$ adalah nilai hasil estimasi menggunakan algoritma filter Kalman. Hasil simulasi untuk estimasi dari (A, B, C, D) dan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ diberikan pada Gambar 4.2 dan Gambar 4.3.

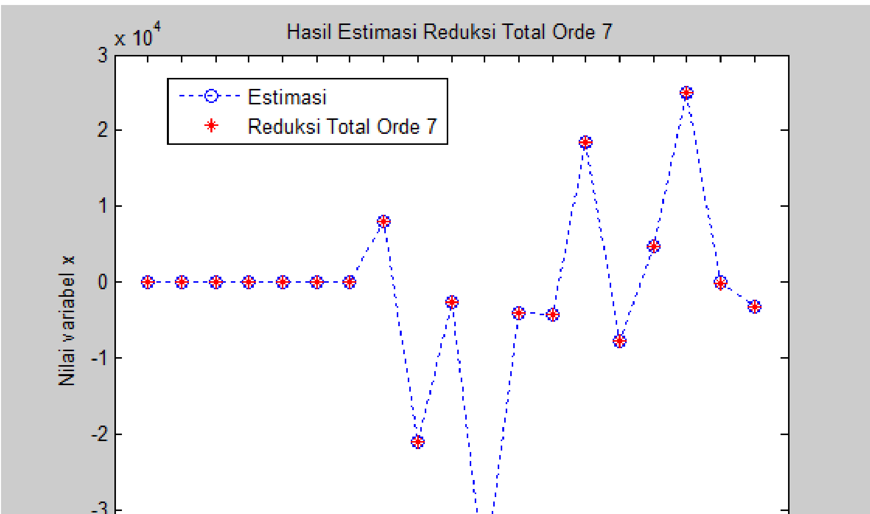


Gambar 4.2 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Awal

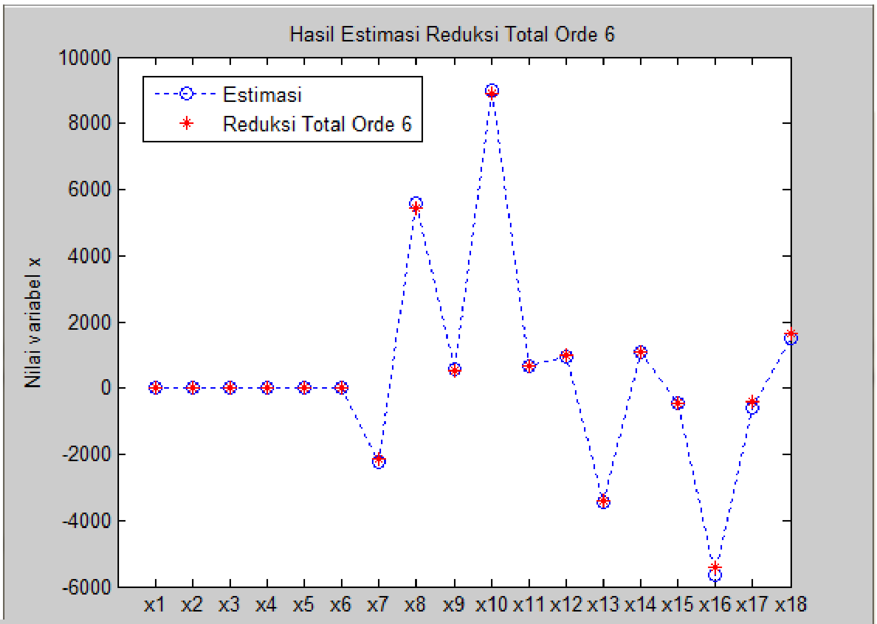


Gambar 4.3 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Setimbang

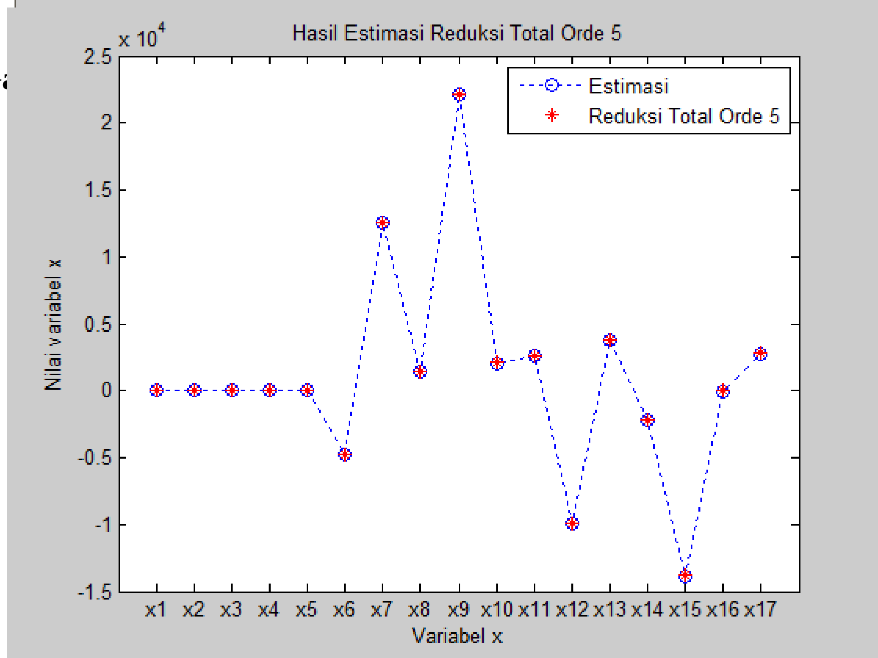
Gambar 4.2 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem awal. Sedangkan Gambar 4.3 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem setimbang. Pada Gambar 4.2 dan 4.3 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama. Pada gambar terlihat bahwa nilai dari x dan $\hat{x}$ berkisar 10^4.



Gambar 4.4 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 7

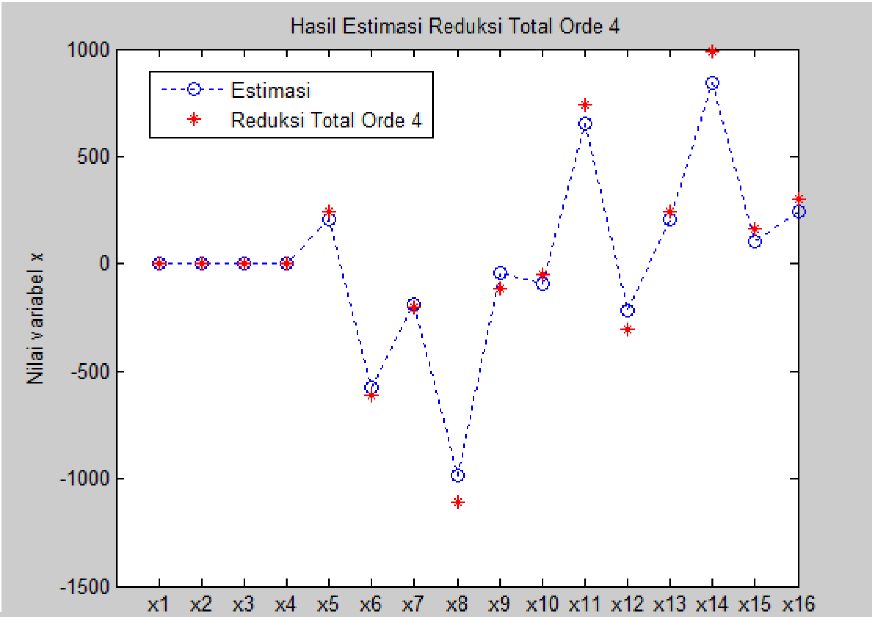


Ga … e 6

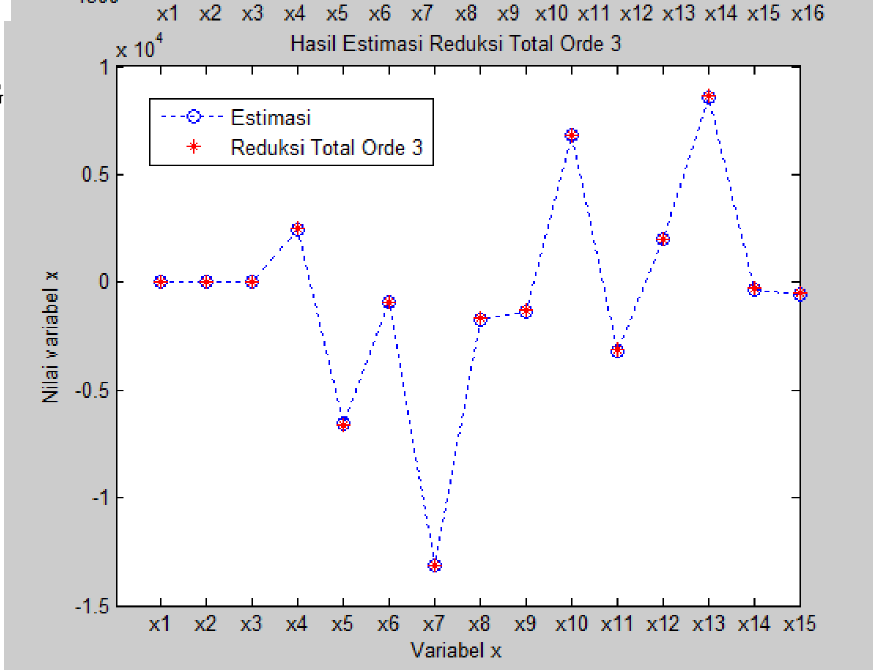


Gambar 4.6 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 5

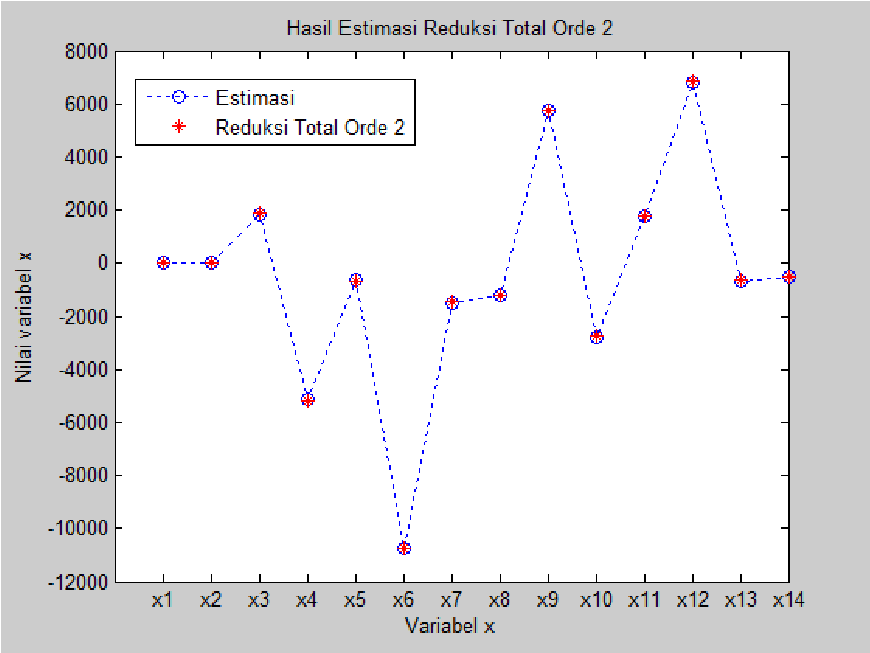
Gambar 4.4 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 7. Gambar 4.5 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 6. Gambar 4.6 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 5. Pada Gambar 4.4, 4.5 dan 4.6 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama. Pada gambar terlihat bahwa nilai dari x dan $\hat{x}$ berkisar 10^4.



G le 4



Gambar 4.8 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 3



Gambar 4.9 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 2

Gambar 4.7 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 4. Gambar 4.8 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 3. Gambar 4.9 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 2. Pada Gambar 4.7, 4.8 dan 4.9 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama. Pada gambar terlihat bahwa nilai dari x dan $\hat{x}$ berkisar 10^4.

4.3.2 Kasus 2

Pada kasus 2 ini diambil suatu matriks A berukuran 20x20 dengan bentuk tridiagonal. Simulasi ini akan mengambil contoh sistem awal (A, B, C, D) sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix}
0.2 & -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -0.8 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.2 & 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.4 & 0.1 & -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & -1 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7 & 0.5 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9 & 0.1 & -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 1.2 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0.5 & -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & -0.4 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4 & 0.2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & -0.1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & -1.4 & 0.4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & -0.2
\end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan diselidiki kestabilan, keterkendalian dan keteramatan dari sistem awal tersebut. Stabilitas sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan nilai absolut dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.17.

Tabel 4.17 Nilai Eigen Matriks A

i	λ_i
1	1.0737
2	1.0179
3	1.2015
4	1.2015
5	0.6806
6	0.4729
7	0.3482
8	0.5088
9	0.5088
10	1.1371
11	1.1371
12	0.9875
13	0.9013
14	0.4174
15	0.6599
16	0.2615
17	0.9387
18	0.9387
19	0.9936
20	0.9936

Berdasarkan Tabel 4.17, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem awal (A, B, C, D) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 20. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem awal (A,B,C,D) adalah 20. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem awal (A,B,C,D) adalah teramati.

Pada reduksi model dengan metode Pemotongan Setimbang dapat diterapkan pada sistem stabil asimtotik, terkendali dan teramati. Karena pada sistem yang tidak stabil tidak dapat menentukan gramian keterkendalian dan gramian keteramatan dalam membentuk sistem setimbang. Maka perlu adanya dekomposisi atau pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tidak stabil.

Pada dekomposisi sistem tidak stabil, dilakukan transformasi sistem menggunakan matriks unitary U_d . Diperoleh matriks unitary U_d seperti yang tertulis pada Lampiran B.

Selanjutnya dilakukan transformasi tahap kedua W_d. Diperoleh matriks W_d seperti yang tertulis pada Lampiran B. Sehingga diperoleh hasil dekomposisi sistem tidak stabil, dimana subsistem stabil adalah sebagai berikut:

$$A_s = \begin{pmatrix} 0.2615 & -0.1018 & 0.005 & -0.1623 & -0.0153 & -0.0051 & 0.2444 & -0.0430 & 0.0144 & -0.0338 & -0.0045 & -0.0042 & -0.5490 & -0.0255 \\ 0 & -0.3482 & 0.0314 & 0.1074 & -0.0681 & -0.0034 & 0.7123 & -0.5020 & -0.2193 & -0.3278 & -0.1059 & -0.0163 & 0.0757 & 0.0255 \\ 0 & 0 & 0.4174 & -0.0017 & 0.1279 & 0.0952 & 0.0058 & -0.0464 & -0.0173 & 0.0192 & -0.0004 & -0.0235 & -0.0001 & 0.0003 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4729 & -0.0122 & -0.0072 & 0.6301 & 0.1525 & 0.0076 & 0.1092 & 0.0390 & 0.0058 & 0.1596 & 0.0431 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0470 & -0.7681 & -0.0273 & 0.2236 & 0.0379 & -0.0071 & 0.0158 & -0.1682 & 0.0035 & -0.0008 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3442 & 0.1177 & -0.0126 & -0.3833 & -0.0613 & -0.1985 & -0.3040 & -0.4598 & 0.0021 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6599 & 0.1614 & -0.6422 & 0.1418 & -0.0829 & 0.0198 & 0.0169 & -0.0070 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6806 & -0.0220 & -0.3301 & -0.3290 & 0.2240 & 0.0083 & -0.0040 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9013 & 0.0527 & 0.2029 & 0.0014 & 0.0414 & 0.0052 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3403 & 0.7226 & -0.1241 & -0.0029 & -0.0062 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2470 & -0.0586 & -0.1010 & 0.0068 & -0.0025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9875 & -0.0021 & -0.0003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1063 & -1.2569 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7719 & 0.1597 \end{pmatrix}$$

$$B_s = \begin{pmatrix} -0.0295 \\ -1.3666 \\ -1.0414 \\ -0.8545 \\ -0.7546 \\ 0.1992 \\ 0.2075 \\ 1.0393 \\ 1.7122 \\ 1.1279 \\ -0.7869 \\ 0.3175 \\ 0.6833 \\ -0.7271 \end{pmatrix}$$

$$C_s = \begin{pmatrix} -1.4427 & 0.0639 & 0.3611 & 0.4716 & -0.9708 & -0.0126 & -2.3107 & 1.0655 & 0.3018 & -1.0077 & -1.6472 & 1.7267 & 1.5239 & 0.8865 \end{pmatrix}$$

$$D_s = (0)$$

Pada subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) diatas, dapat dilakukan analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_s yang dapat dilihat pada Tabel 4.17. Nilai eigen matriks A_s pada Tabel 4.17 disajikan dengan warna hitam. Berdasarkan Tabel 4.17, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_s bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah 14. Maka berdasarkan Teorema 2.2 subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah terkendali.

Keteramatan subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ adalah 14. Maka berdasarkan Teorema 2.3 subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ adalah teramati.

Setelah itu untuk subsistem tidak stabil. Pada subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang tertulis pada Lampiran B, dapat dilakukan analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan.

Kestabilan dari subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_u seperti yang disajikan pada Tabel 4.17. Nilai eigen matriks A_u pada Tabel 4.17 disajikan dengan warna merah. Berdasarkan Tabel 4.17, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_u bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah 6. Maka berdasarkan Teorema 2.2 subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah 6. Maka berdasarkan Teorema 2.3 subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya adalah membentuk sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dari subsistem stabil, dimana sistem setimbang dapat dilihat sebagai berikut:

$$\tilde{A}_s = \begin{pmatrix}
0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 & 0.0023 & -0.0002 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 \\
-0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 & 0.0026 & -0.0002 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 & 0.0056 & -0.0008 & -0.0003 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 & -0.0041 & -0.0007 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 & -0.0476 & -0.0001 & 0.0018 & -0.0003 & 0 & 0 \\
-0.0060 & 0.007 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 & -0.0359 & 0.0002 & 0.0014 & -0.0002 & 0 & 0 \\
0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 & 0.1096 & 0.0008 & -0.0040 & 0.0006 & -0.0001 & 0 \\
0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 & 0.2988 & 0.0264 & -0.0095 & 0.0017 & -0.0002 & -0.0001 \\
0.0023 & -0.0026 & 0.0056 & -0.0041 & 0.0476 & -0.0359 & -0.1096 & 0.2988 & -0.0697 & 0.4779 & 0.0235 & 0.0017 & -0.0004 & -0.0001 \\
0.0002 & -0.0002 & 0.0008 & 0.0007 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0264 & -0.4779 & 0.0781 & -0.3028 & 0.0437 & -0.0039 & -0.0017 \\
-0.0001 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0001 & -0.0018 & 0.0013 & 0.0040 & -0.0095 & 0.0235 & 0.3028 & -0.4745 & -0.2103 & 0.0273 & 0.0107 \\
0 & -0.0001 & 0 & 0 & -0.0003 & 0.0002 & 0.0006 & -0.0017 & -0.0017 & 0.0437 & 0.2103 & 0.4909 & 0.2028 & 0.0631 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 & 0.0002 & 0.0004 & -0.0039 & -0.0273 & 0.2028 & -0.5935 & 0.3198 \\
0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 & -0.0001 & 0.0017 & 0.0107 & -0.0631 & -0.3198 & 0.2885
\end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_s \begin{pmatrix}
1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.8127 \\ 0.1652 \\ 0.0170 \\ -0.0070 \\ -0.0009 \\ 0.0001 \\ 0.0001
\end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_s = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 & 0.1653 & -0.0170 & -0.0071 & 0.0008 & -0.0001 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_s = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari gramian keterkendalian $\tilde{W}$ dan gramian keteramatan $\tilde{M}$ dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$, diperoleh:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 92.8188 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 92.7998 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 53.0319 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.8124 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.1522 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.1053 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.2620 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1523 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3433 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0817 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0105 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

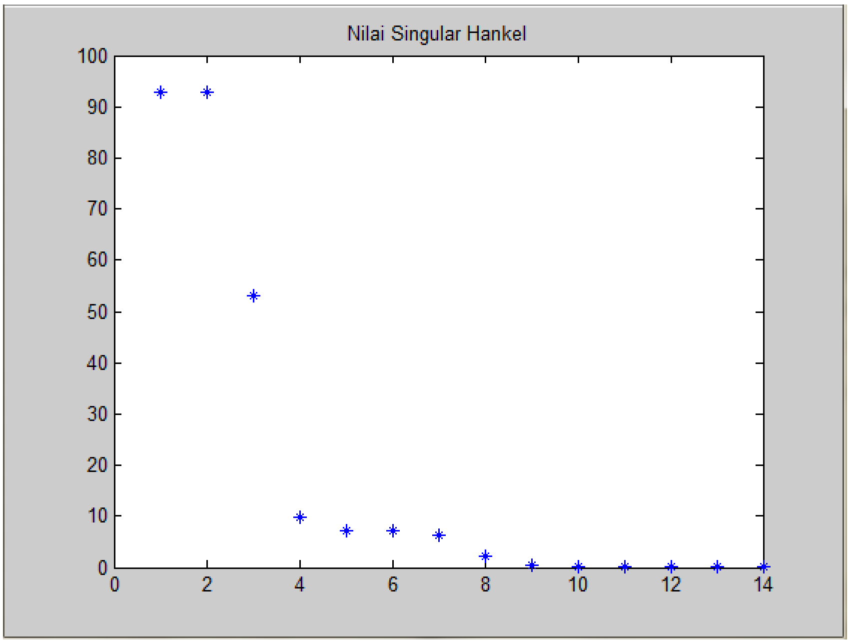
$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 92.8188 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 92.7998 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 53.0319 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.8124 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.1522 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.1053 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.2620 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1523 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3433 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0817 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0105 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0008 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa nilai dari $\tilde{W} = \tilde{M}$ yang sama artinya dengan $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma$, dengan $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ dengan σ adalah nilai singular Hankel, maka didapatkan nilai singular Hankel seperti yang disajikan pada Tabel 4.18. Berdasarkan Tabel 4.18, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0.

Tabel 4.18 Nilai Singular Hankel

i	$\lvert\sigma_i\rvert$
1	92.8188
2	92.7998
3	53.0319
4	9.8124
5	7.1522
6	7.1053
7	6.2620
8	2.1523
9	0.3433
10	0.0817
11	0.0105
12	0.0008
13	0.0001
14	0

Nilai singular Hankel juga dapat ditunjukkan melalui grafik, yang disajikan oleh Gambar 4.10 berikut.



Gambar 4.10 Nilai Singular Hankel

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_s$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.19 sebagai berikut:

Tabel 4.19 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_s$

i	λ_i
1	0.9936
2	0.9936
3	0.9387
4	0.9387
5	0.9875
6	0.9013
7	0.6806
8	0.5088
9	0.5088
10	0.4729
11	0.3482
12	0.6599
13	0.4174
14	0.2615

Berdasarkan Tabel 4.19, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_s$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah 14. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah 14. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah teramati.

Sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ akan direduksi dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, didapatkan sistem tereduksi dengan Pemotongan Setimbang. Orde dari sistem tereduksi r adalah dari 2 sampai dengan $z-1$, dengan z adalah dimensi dari A_s (subsistem stabil). Semakin kecil r maka semakin banyak variabel yang direduksi.

Reduksi orde 13, dengan orde 13 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr13}, \tilde{B}_{sr13}, \tilde{C}_{sr13}, \tilde{D}_{sr13}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr13} = \begin{pmatrix}
0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 & 0.0023 & -0.0002 & -0.0001 & 0 & 0 \\
-0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 & 0.0026 & -0.0002 & -0.0001 & 0 & 0 \\
-0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 & 0.0056 & -0.0008 & -0.0003 & 0 & 0 \\
-0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 & -0.0041 & -0.0007 & 0.0001 & 0 & 0 \\
-0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 & -0.0476 & -0.0001 & 0.0018 & -0.0003 & 0 \\
-0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 & -0.0359 & 0.0002 & 0.0014 & -0.0002 & 0 \\
0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 & 0.1096 & 0.0008 & -0.0040 & 0.0006 & -0.0001 \\
0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 & 0.2988 & 0.0264 & -0.0095 & 0.0017 & -0.0002 \\
0.0023 & -0.0026 & 0.0056 & -0.0041 & 0.0476 & -0.0359 & -0.1096 & 0.2988 & -0.0697 & 0.4779 & 0.0235 & 0.0017 & -0.0004 \\
0.0002 & -0.0002 & 0.0008 & 0.0007 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0264 & -0.4779 & 0.0781 & -0.3028 & 0.0437 & -0.0039 \\
-0.0001 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0001 & -0.0018 & 0.0013 & 0.0040 & -0.0095 & 0.0235 & 0.3028 & -0.4745 & -0.2103 & 0.0273 \\
0 & -0.0001 & 0 & 0 & -0.0003 & 0.0002 & 0.0006 & -0.0017 & -0.0017 & 0.0437 & 0.2103 & 0.4909 & 0.2028 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 & 0.0002 & 0.0004 & -0.0039 & -0.0273 & 0.2028 & -0.5935
\end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr13} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.8127 \\ 0.1652 \\ 0.0170 \\ -0.0070 \\ -0.0009 \\ 0.0001 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr13} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 & 0.1653 & -0.0170 & -0.0071 & 0.0008 & -0.0001 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr13} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 13 $\left(\tilde{A}_{sr13}, \tilde{B}_{sr13}, \tilde{C}_{sr13}, \tilde{D}_{sr13}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr13}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.20 sebagai berikut:

Tabel 4.20 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr13}$

i	λ_i
1	0.9936
2	0.9936
3	0.9387
4	0.9387
5	0.9875
6	0.9013
7	0.6602
8	0.4922
9	0.5080
10	0.5080
11	0.3042
12	0.6791
13	0.6182

Berdasarkan Tabel 4.20, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr13}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 13 $\left(\tilde{A}_{sr13}, \tilde{B}_{sr13}, \tilde{C}_{sr13}, \tilde{D}_{sr13}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 13 $\left(\tilde{A}_{sr13}, \tilde{B}_{sr13}, \tilde{C}_{sr13}, \tilde{D}_{sr13}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 13 $\left(\tilde{A}_{sr13}, \tilde{B}_{sr13}, \tilde{C}_{sr13}, \tilde{D}_{sr13}\right)$ adalah 13. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 13 $\left(\tilde{A}_{sr13}, \tilde{B}_{sr13}, \tilde{C}_{sr13}, \tilde{D}_{sr13}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 13 $\left(\tilde{A}_{sr13}, \tilde{B}_{sr13}, \tilde{C}_{sr13}, \tilde{D}_{sr13}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 13 $\left(\tilde{A}_{sr13}, \tilde{B}_{sr13}, \tilde{C}_{sr13}, \tilde{D}_{sr13}\right)$ adalah 13. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 13 $\left(\tilde{A}_{sr13}, \tilde{B}_{sr13}, \tilde{C}_{sr13}, \tilde{D}_{sr13}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 13 $\left(\tilde{A}_{sr13}, \tilde{B}_{sr13}, \tilde{C}_{sr13}, \tilde{D}_{sr13}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r13}, B_{r13}, C_{r13}, D_{r13}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran B.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r13}, B_{r13}, C_{r13}, D_{r13}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r13}, B_{r13}, C_{r13}, D_{r13}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r13} seperti yang disajikan pada Tabel 4.21 sebagai berikut:

Tabel 4.21 Nilai Eigen Matriks A_{r13}

i	λ_i
1	0.9936
2	0.9936
3	0.9387
4	0.9387
5	0.9875
6	0.9013
7	0.6602
8	0.4922
9	0.5080
10	0.5080
11	0.3042
12	0.6791
13	0.6182
14	1.1371
15	1.1371
16	1.2015
17	1.2015
18	1.0179
19	1.0737

Berdasarkan Tabel 4.21, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r13} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r13}, B_{r13}, C_{r13}, D_{r13})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r13}, B_{r13}, C_{r13}, D_{r13})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r13}, B_{r13}, C_{r13}, D_{r13})$ adalah 19. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r13}, B_{r13}, C_{r13}, D_{r13})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r13}, B_{r13}, C_{r13}, D_{r13})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o

pada sistem tereduksi total $\left(A_{r13}, B_{r13}, C_{r13}, D_{r13}\right)$ adalah 19. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $\left(A_{r13}, B_{r13}, C_{r13}, D_{r13}\right)$ adalah teramati.

Reduksi orde 12, dengan orde 12 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr12}, \tilde{B}_{sr12}, \tilde{C}_{sr12}, \tilde{D}_{sr12}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr12} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 & 0.0023 & -0.0002 & -0.0001 & 0 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 & 0.0026 & -0.0002 & -0.0001 & 0 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 & 0.0056 & -0.0008 & -0.0003 & 0 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 & -0.0041 & -0.0007 & 0.0001 & 0 \\ -0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 & -0.0476 & -0.0001 & -0.0018 & -0.0003 \\ -0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 & -0.0359 & 0.0002 & 0.0014 & -0.0002 \\ 0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 & 0.1096 & 0.0008 & -0.0040 & 0.0006 \\ 0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 & 0.2988 & 0.0264 & -0.0095 & 0.0017 \\ 0.0023 & -0.0026 & 0.0056 & -0.0041 & 0.0476 & -0.0359 & -0.1096 & 0.2988 & -0.0697 & 0.4779 & 0.0235 & 0.0017 \\ 0.0002 & -0.0002 & 0.0008 & 0.0007 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0264 & -0.4779 & 0.0781 & -0.3028 & 0.0437 \\ -0.0001 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0001 & -0.0018 & 0.0013 & 0.0040 & -0.0095 & 0.0235 & 0.3028 & -0.4745 & -0.2103 \\ 0 & -0.0001 & 0 & 0 & -0.0003 & 0.0002 & 0.0006 & -0.0107 & -0.0107 & 0.0437 & 0.2103 & 0.4909 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr12} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.8127 \\ 0.1652 \\ 0.0170 \\ -0.0070 \\ -0.0009 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr12} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 & 0.1653 & -0.0170 & -0.0071 & 0.0008 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr12} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 12 $\left(\tilde{A}_{sr12}, \tilde{B}_{sr12}, \tilde{C}_{sr12}, \tilde{D}_{sr12}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr12}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.22 sebagai berikut:

Tabel 4.22 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr12}$

i	λ_i
1	0.9936
2	0.9936
3	0.9387
4	0.9387
5	0.6819
6	0.2814
7	0.5087
8	0.5087
9	0.9875
10	0.9013
11	0.6599
12	0.4509

Berdasarkan Tabel 4.22, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr12}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 12 $\left(\tilde{A}_{sr12}, \tilde{B}_{sr12}, \tilde{C}_{sr12}, \tilde{D}_{sr12}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 12 $\left(\tilde{A}_{sr12}, \tilde{B}_{sr12}, \tilde{C}_{sr12}, \tilde{D}_{sr12}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 12 $\left(\tilde{A}_{sr12}, \tilde{B}_{sr12}, \tilde{C}_{sr12}, \tilde{D}_{sr12}\right)$ adalah 12. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 12 $\left(\tilde{A}_{sr12}, \tilde{B}_{sr12}, \tilde{C}_{sr12}, \tilde{D}_{sr12}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 12 $\left(\tilde{A}_{sr12}, \tilde{B}_{sr12}, \tilde{C}_{sr12}, \tilde{D}_{sr12}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 12 $\left(\tilde{A}_{sr12}, \tilde{B}_{sr12}, \tilde{C}_{sr12}, \tilde{D}_{sr12}\right)$ adalah 12. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 12 $\left(\tilde{A}_{sr12}, \tilde{B}_{sr12}, \tilde{C}_{sr12}, \tilde{D}_{sr12}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 12 $\left(\tilde{A}_{sr12}, \tilde{B}_{sr12}, \tilde{C}_{sr12}, \tilde{D}_{sr12}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r12}, B_{r12}, C_{r12}, D_{r12}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran B. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r12}, B_{r12}, C_{r12}, D_{r12}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r12} seperti yang disajikan pada Tabel 4.23 sebagai berikut:

Tabel 4.23 Nilai Eigen Matriks A_{r12}

i	λ_i
1	0.9936
2	0.9936
3	0.9387
4	0.9387
5	0.6819
6	0.2814
7	0.5087
8	0.5087
9	0.9875
10	0.9013
11	0.6599
12	0.4509
13	1.1371
14	1.1371
15	1.2015
16	1.2015
17	1.0179
18	1.0737

Berdasarkan Tabel 4.23, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r12} yang berwana merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $\left(A_{r12}, B_{r12}, C_{r12}, D_{r12}\right)$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $\left(A_{r12}, B_{r12}, C_{r12}, D_{r12}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $\left(A_{r12}, B_{r12}, C_{r12}, D_{r12}\right)$

adalah 18. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $\left(A_{r12}, B_{r12}, C_{r12}, D_{r12}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $\left(A_{r12}, B_{r12}, C_{r12}, D_{r12}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $\left(A_{r12}, B_{r12}, C_{r12}, D_{r12}\right)$ adalah 18. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $\left(A_{r12}, B_{r12}, C_{r12}, D_{r12}\right)$ adalah teramati.

Reduksi orde 11, dengan orde 11 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr11}, \tilde{B}_{sr11}, \tilde{C}_{sr11}, \tilde{D}_{sr11}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr11} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 & 0.0023 & -0.0002 & -0.0001 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 & 0.0026 & -0.0002 & -0.0001 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 & 0.0056 & -0.0008 & -0.0003 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 & -0.0041 & -0.0007 & 0.0001 \\ -0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 & -0.0476 & -0.0001 & 0.0018 \\ -0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 & -0.0359 & 0.0002 & 0.0014 \\ 0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 & 0.1096 & 0.0008 & -0.0040 \\ 0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 & 0.2988 & 0.0264 & -0.0095 \\ 0.0023 & -0.0026 & 0.0056 & -0.0041 & 0.0476 & -0.0359 & -0.1096 & 0.2988 & -0.0697 & 0.4779 & 0.0235 \\ 0.0002 & -0.0002 & 0.0008 & 0.0007 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0264 & -0.4779 & 0.0781 & -0.3028 \\ -0.0001 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0001 & -0.0018 & 0.0013 & 0.0040 & -0.0095 & 0.0235 & 0.3028 & -0.4745 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr11} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.8127 \\ 0.1652 \\ 0.0170 \\ -0.0070 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr11} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 & 0.1653 & -0.0170 & -0.0071 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr11} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 11 $\left(\tilde{A}_{sr11}, \tilde{B}_{sr11}, \tilde{C}_{sr11}, \tilde{D}_{sr11}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr11}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.24 sebagai berikut:

Tabel 4.24 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr11}$

i	λ_i
1	0.9936
2	0.9936
3	0.9387
4	0.9387
5	0.9875
6	0.9014
7	0.6581
8	0.5076
9	0.5076
10	0.6836
11	0.3456

Berdasarkan Tabel 4.24, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr11}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 11 $\left(\tilde{A}_{sr11}, \tilde{B}_{sr11}, \tilde{C}_{sr11}, \tilde{D}_{sr11}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 11 $\left(\tilde{A}_{sr11}, \tilde{B}_{sr11}, \tilde{C}_{sr11}, \tilde{D}_{sr11}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 11 $\left(\tilde{A}_{sr11}, \tilde{B}_{sr11}, \tilde{C}_{sr11}, \tilde{D}_{sr11}\right)$ adalah 11. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 11 $\left(\tilde{A}_{sr11}, \tilde{B}_{sr11}, \tilde{C}_{sr11}, \tilde{D}_{sr11}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 11 $\left(\tilde{A}_{sr11}, \tilde{B}_{sr11}, \tilde{C}_{sr11}, \tilde{D}_{sr11}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 11 $\left(\tilde{A}_{sr11}, \tilde{B}_{sr11}, \tilde{C}_{sr11}, \tilde{D}_{sr11}\right)$ adalah 11.

Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 11 $\left(\tilde{A}_{sr11}, \tilde{B}_{sr11}, \tilde{C}_{sr11}, \tilde{D}_{sr11}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 11 $\left(\tilde{A}_{sr11}, \tilde{B}_{sr11}, \tilde{C}_{sr11}, \tilde{D}_{sr11}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r11}, B_{r11}, C_{r11}, D_{r11}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran B.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r11}, B_{r11}, C_{r11}, D_{r11}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r11}, B_{r11}, C_{r11}, D_{r11}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r11} seperti yang disajikan pada Tabel 4.25 sebagai berikut:

Tabel 4.25 Nilai Eigen Matriks A_{r11}

i	λ_i
1	0.9936
2	0.9936
3	0.9387
4	0.9387
5	0.9875
6	0.9014
7	0.6581
8	0.5076
9	0.5076
10	0.6836
11	0.3456
12	1.1371
13	1.1371
14	1.2015
15	1.2015
16	1.0179
17	1.0737

Berdasarkan Tabel 4.25, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r11} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r11}, B_{r11}, C_{r11}, D_{r11})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r11}, B_{r11}, C_{r11}, D_{r11})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r11}, B_{r11}, C_{r11}, D_{r11})$ adalah 17. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r11}, B_{r11}, C_{r11}, D_{r11})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r11}, B_{r11}, C_{r11}, D_{r11})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r11}, B_{r11}, C_{r11}, D_{r11})$ adalah 17. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r11}, B_{r11}, C_{r11}, D_{r11})$ adalah teramati.

Reduksi orde 10, dengan orde 10 maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr10}, \tilde{B}_{sr10}, \tilde{C}_{sr10}, \tilde{D}_{sr10})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr10} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 & 0.0023 & -0.0002 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 & 0.0026 & -0.0002 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 & 0.0056 & -0.0008 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 & -0.0041 & -0.0007 \\ -0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 & -0.0476 & -0.0001 \\ -0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 & -0.0359 & 0.0002 \\ 0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 & 0.1096 & 0.0008 \\ 0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 & 0.2988 & 0.0264 \\ 0.0023 & -0.0026 & 0.0056 & -0.0041 & 0.0476 & -0.0359 & -0.1096 & 0.2988 & -0.0697 & 0.4779 \\ 0.0002 & -0.0002 & 0.0008 & 0.0007 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0264 & -0.4779 & 0.0781 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr10} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.8127 \\ 0.1652 \\ 0.0170 \end{pmatrix}$$

$\tilde{C}_{sr10} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 & 0.1653 & -0.0170 \end{pmatrix}$

$\tilde{D}_{sr10} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 10 $\left(\tilde{A}_{sr10}, \tilde{B}_{sr10}, \tilde{C}_{sr10}, \tilde{D}_{sr10}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr10}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.26 sebagai berikut:

Tabel 4.26 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr10}$

i	λ_i
1	0.6625
2	0.9936
3	0.9936
4	0.9389
5	0.9389
6	0.4711
7	0.4711
8	0.6608
9	0.9875
10	0.9012

Berdasarkan Tabel 4.26, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr10}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 10 $\left(\tilde{A}_{sr10}, \tilde{B}_{sr10}, \tilde{C}_{sr10}, \tilde{D}_{sr10}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 10 $\left(\tilde{A}_{sr10}, \tilde{B}_{sr10}, \tilde{C}_{sr10}, \tilde{D}_{sr10}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 10 $\left(\tilde{A}_{sr10}, \tilde{B}_{sr10}, \tilde{C}_{sr10}, \tilde{D}_{sr10}\right)$ adalah 10. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 10 $\left(\tilde{A}_{sr10}, \tilde{B}_{sr10}, \tilde{C}_{sr10}, \tilde{D}_{sr10}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 10 $\left(\tilde{A}_{sr10}, \tilde{B}_{sr10}, \tilde{C}_{sr10}, \tilde{D}_{sr10}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\widetilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 10 $\left(\widetilde{A}_{sr10}, \widetilde{B}_{sr10}, \widetilde{C}_{sr10}, \widetilde{D}_{sr10}\right)$ adalah 10. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 10 $\left(\widetilde{A}_{sr10}, \widetilde{B}_{sr10}, \widetilde{C}_{sr10}, \widetilde{D}_{sr10}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 10 $\left(\widetilde{A}_{sr10}, \widetilde{B}_{sr10}, \widetilde{C}_{sr10}, \widetilde{D}_{sr10}\right)$ dan subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $(A_{r10}, B_{r10}, C_{r10}, D_{r10})$ seperti tertulis pada Lampiran B.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $(A_{r10}, B_{r10}, C_{r10}, D_{r10})$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $(A_{r10}, B_{r10}, C_{r10}, D_{r10})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r10} seperti yang disajikan pada Tabel 4.27 sebagai berikut:

Tabel 4.27 Nilai Eigen Matriks A_{r10}

i	λ_i
1	0.6625
2	0.9936
3	0.9936
4	0.9389
5	0.9389
6	0.4711
7	0.4711
8	0.6608
9	0.9875
10	0.9012
11	1.1371
12	1.1371
13	1.2015
14	1.2015
15	1.0179
16	1.0737

Berdasarkan Tabel 4.27, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r10} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r10}, B_{r10}, C_{r10}, D_{r10})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r10}, B_{r10}, C_{r10}, D_{r10})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r10}, B_{r10}, C_{r10}, D_{r10})$ adalah 16. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r10}, B_{r10}, C_{r10}, D_{r10})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r10}, B_{r10}, C_{r10}, D_{r10})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r10}, B_{r10}, C_{r10}, D_{r10})$ adalah 16. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r10}, B_{r10}, C_{r10}, D_{r10})$ adalah teramati.

Reduksi orde 9, dengan orde 9 maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr9}, \tilde{B}_{sr9}, \tilde{C}_{sr9}, \tilde{D}_{sr9})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr9} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 & 0.0023 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 & 0.0026 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 & 0.0056 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 & -0.0041 \\ -0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 & -0.0476 \\ -0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 & -0.0359 \\ 0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 & 0.1096 \\ 0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 & 0.2988 \\ 0.0023 & -0.0026 & 0.0056 & -0.0041 & 0.0476 & -0.0359 & -0.1096 & 0.2988 & -0.0697 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr9} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr9} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 & 0.1653 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr9} = (0)$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 9 $\left(\tilde{A}_{sr9}, \tilde{B}_{sr9}, \tilde{C}_{sr9}, \tilde{D}_{sr9}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr9}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.28 sebagai berikut:

Tabel 4.28 Nilai Eigen matriks $\tilde{A}_{sr9}$

i	λ_i
1	0.7015
2	0.9936
3	0.9936
4	0.9394
5	0.9394
6	0.1874
7	0.6261
8	0.9029
9	0.9877

Berdasarkan Tabel 4.28, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr9}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 9 $\left(\tilde{A}_{sr9}, \tilde{B}_{sr9}, \tilde{C}_{sr9}, \tilde{D}_{sr9}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 9 $\left(\tilde{A}_{sr9}, \tilde{B}_{sr9}, \tilde{C}_{sr9}, \tilde{D}_{sr9}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 9 $\left(\tilde{A}_{sr9}, \tilde{B}_{sr9}, \tilde{C}_{sr9}, \tilde{D}_{sr9}\right)$ adalah 9. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 9 $\left(\tilde{A}_{sr9}, \tilde{B}_{sr9}, \tilde{C}_{sr9}, \tilde{D}_{sr9}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 9 $\left(\tilde{A}_{sr9}, \tilde{B}_{sr9}, \tilde{C}_{sr9}, \tilde{D}_{sr9}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 9 $\left(\tilde{A}_{sr9}, \tilde{B}_{sr9}, \tilde{C}_{sr9}, \tilde{D}_{sr9}\right)$ adalah 9. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 9 $\left(\tilde{A}_{sr9}, \tilde{B}_{sr9}, \tilde{C}_{sr9}, \tilde{D}_{sr9}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 9 $\left(\tilde{A}_{sr9}, \tilde{B}_{sr9}, \tilde{C}_{sr9}, \tilde{D}_{sr9}\right)$ dan sub sistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r9}, B_{r9}, C_{r9}, D_{r9}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran B.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r9}, B_{r9}, C_{r9}, D_{r9}\right)$yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r9}, B_{r9}, C_{r9}, D_{r9}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r9} seperti yang disajikan pada Tabel 4.29 sebagai berikut:

Tabel 4.29 Nilai Eigen Matriks A_{r9}

i	λ_i
1	0.7015
2	0.9936
3	0.9936
4	0.9394
5	0.9394
6	0.1874
7	0.6261
8	0.9029
9	0.9877
10	1.1371
11	1.1371
12	1.2015
13	1.2015
14	1.0179
15	1.0737

Berdasarkan Tabel 4.29, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r9} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $\left(A_{r9}, B_{r9}, C_{r9}, D_{r9}\right)$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $\left(A_{r9}, B_{r9}, C_{r9}, D_{r9}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $\left(A_{r9}, B_{r9}, C_{r9}, D_{r9}\right)$ adalah 15. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $\left(A_{r9}, B_{r9}, C_{r9}, D_{r9}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $\left(A_{r9}, B_{r9}, C_{r9}, D_{r9}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $\left(A_{r9}, B_{r9}, C_{r9}, D_{r9}\right)$ adalah 15. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $\left(A_{r9}, B_{r9}, C_{r9}, D_{r9}\right)$ adalah teramati.

Reduksi orde 8, dengan orde 8 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr8}, \tilde{B}_{sr8}, \tilde{C}_{sr8}, \tilde{D}_{sr8}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr8} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 \\ -0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 \\ -0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 \\ 0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 \\ 0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr8} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.8127 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr8} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr8} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 8 $\left(\tilde{A}_{sr8}, \tilde{B}_{sr8}, \tilde{C}_{sr8}, \tilde{D}_{sr8}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr8}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.30 sebagai berikut:

Tabel 4.30 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr8}$

i	λ_i
1	0.5239
2	0.9935
3	0.9935
4	0.9391
5	0.9391
6	0.7022
7	0.8958
8	0.9871

Berdasarkan Tabel 4.30, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr8}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 8 $\left(\tilde{A}_{sr8}, \tilde{B}_{sr8}, \tilde{C}_{sr8}, \tilde{D}_{sr8}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 8 $\left(\tilde{A}_{sr8}, \tilde{B}_{sr8}, \tilde{C}_{sr8}, \tilde{D}_{sr8}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 8 $\left(\tilde{A}_{sr8}, \tilde{B}_{sr8}, \tilde{C}_{sr8}, \tilde{D}_{sr8}\right)$ adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 8 $\left(\tilde{A}_{sr8}, \tilde{B}_{sr8}, \tilde{C}_{sr8}, \tilde{D}_{sr8}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 8 $\left(\tilde{A}_{sr8}, \tilde{B}_{sr8}, \tilde{C}_{sr8}, \tilde{D}_{sr8}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 8 $\left(\tilde{A}_{sr8}, \tilde{B}_{sr8}, \tilde{C}_{sr8}, \tilde{D}_{sr8}\right)$ adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 8 $\left(\tilde{A}_{sr8}, \tilde{B}_{sr8}, \tilde{C}_{sr8}, \tilde{D}_{sr8}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 8 $\left(\tilde{A}_{sr8}, \tilde{B}_{sr8}, \tilde{C}_{sr8}, \tilde{D}_{sr8}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r8}, B_{r8}, C_{r8}, D_{r8}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran B.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r8}, B_{r8}, C_{r8}, D_{r8}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r8}, B_{r8}, C_{r8}, D_{r8}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r8} seperti yang disajikan pada Tabel 4.31 sebagai berikut:

Tabel 4.31 Nilai Eigen Matriks A_{r8}

i	λ_i
1	0.5239
2	0.9935
3	0.9935
4	0.9391
5	0.9391
6	0.7022
7	0.8958
8	0.9871
9	1.1371
10	1.1371
11	1.2015
12	1.2015
13	1.0179
14	1.0737

Berdasarkan Tabel 4.31, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r8} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $\left(A_{r8}, B_{r8}, C_{r8}, D_{r8}\right)$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $\left(A_{r8}, B_{r8}, C_{r8}, D_{r8}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $\left(A_{r8}, B_{r8}, C_{r8}, D_{r8}\right)$ adalah 14.

Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $\left(A_{r8}, B_{r8}, C_{r8}, D_{r8}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $\left(A_{r8}, B_{r8}, C_{r8}, D_{r8}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $\left(A_{r8}, B_{r8}, C_{r8}, D_{r8}\right)$ adalah 14. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $\left(A_{r8}, B_{r8}, C_{r8}, D_{r8}\right)$ adalah teramati.

Reduksi orde 7, dengan orde 7 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr7} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 \\ -0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 \\ -0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 \\ 0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr7} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr7} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr7} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr7}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.32 sebagai berikut:

Tabel 4.32 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr7}$

i	λ_i
1	0.9934
2	0.9934
3	0.9508
4	0.9508
5	0.7863
6	0.8781
7	0.9859

Berdasarkan Tabel 4.32, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr7}$ seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ adalah 7. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ adalah 7. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 7 $\left(\tilde{A}_{sr7}, \tilde{B}_{sr7}, \tilde{C}_{sr7}, \tilde{D}_{sr7}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran B.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7})$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r7} seperti yang disajikan pada Tabel 4.33 sebagai berikut:

Tabel 4.33 Nilai Eigen Matriks A_{r7}

i	λ_i
1	0.9934
2	0.9934
3	0.9508
4	0.9508
5	0.7863
6	0.8781
7	0.9859
8	1.1371
9	1.1371
10	1.2015
11	1.2015
12	1.0179
13	1.0737

Berdasarkan Tabel 4.33, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r7} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7})$ adalah 13. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $\left(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $\left(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7}\right)$ adalah 13. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $\left(A_{r7}, B_{r7}, C_{r7}, D_{r7}\right)$ adalah teramati.

Reduksi orde 6, dengan orde 6 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr6} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 \\ -0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 \\ -0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr6} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr6} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr6} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr6}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.34 sebagai berikut:

Tabel 4.34 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr6}$

i	λ_i
1	0.9934
2	0.9934
3	0.9482
4	0.9482
5	0.9526
6	0.9953

Berdasarkan Tabel 4.34, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr6}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ adalah 6. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ adalah 6. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 6 $\left(\tilde{A}_{sr6}, \tilde{B}_{sr6}, \tilde{C}_{sr6}, \tilde{D}_{sr6}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran B.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6})$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r6} seperti yang disajikan pada Tabel 4.35 sebagai berikut:

Tabel 4.35 Nilai Eigen Matriks A_{r6}

i	λ_i
1	0.9934
2	0.9934
3	0.9482
4	0.9482
5	0.9526
6	0.9953
7	1.1371
8	1.1371
9	1.2015
10	1.2015
11	1.0179
12	1.0737

Berdasarkan Tabel 4.35, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r6} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6})$ adalah 12. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $\left(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $\left(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6}\right)$ adalah 12. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $\left(A_{r6}, B_{r6}, C_{r6}, D_{r6}\right)$ adalah teramati.

Reduksi orde 5, dengan orde 5 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr5} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 \\ -0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr5} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr5} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr5} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr5}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.36 sebagai berikut:

Tabel 4.36 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr5}$

i	λ_i
1	0.9915
2	0.9915
3	0.1021
4	0.9466
5	0.9910

Berdasarkan Tabel 4.36, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr5}$ seluruhnya bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ adalah 5. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ adalah 5. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 5 $\left(\tilde{A}_{sr5}, \tilde{B}_{sr5}, \tilde{C}_{sr5}, \tilde{D}_{sr5}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran B.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r5} seperti yang disajikan pada Tabel 4.37 sebagai berikut:

Tabel 4.37 Nilai Eigen Matriks A_{r5}

i	λ_i
1	0.9915
2	0.9915
3	0.1021
4	0.9466
5	0.9910
6	1.1371
7	1.1371
8	1.2015
9	1.2015
10	1.0179
11	1.0737

Berdasarkan Tabel 4.37, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r5} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ adalah 11. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ adalah 11. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r5}, B_{r5}, C_{r5}, D_{r5})$ adalah teramati.

Reduksi orde 4, dengan orde 4 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr4} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr4} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr4} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr4} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr4}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.38 sebagai berikut:

Tabel 4.38 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr4}$

i	λ_i
1	0.9915
2	0.9915
3	0.9505
4	0.9934

Berdasarkan Tabel 4.38, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr4}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$

adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 4 $\left(\tilde{A}_{sr4}, \tilde{B}_{sr4}, \tilde{C}_{sr4}, \tilde{D}_{sr4}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran B.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r4} seperti yang disajikan pada Tabel 4.39.

Tabel 4.39 Nilai Eigen Matriks A_{r4}

i	λ_i
1	0.9915
2	0.9915
3	0.9505
4	0.9934
5	1.1371
6	1.1371
7	1.2015
8	1.2015
9	1.0179
10	1.0737

Berdasarkan Tabel 4.39, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r4} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ adalah 10. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ adalah 10. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r4}, B_{r4}, C_{r4}, D_{r4})$ adalah teramati.

Reduksi orde 3, dengan orde 3 maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr3} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr3} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr3} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr3} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 3 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr3}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.40 sebagai berikut:

Tabel 4.40 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr3}$

i	λ_i
1	0.9914
2	0.9914
3	0.9548

Berdasarkan Tabel 4.40, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr3}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah 3. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah 3. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran B.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r3} seperti yang disajikan pada Tabel 4.41 sebagai berikut:

Tabel 4.41 Nilai Eigen Matriks A_{r3}

i	λ_i
1	0.9914
2	0.9914
3	0.9548
4	1.1371
5	1.1371
6	1.2015
7	1.2015
8	1.0179
9	1.0737

Berdasarkan Tabel 4.41, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r3} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah 9. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah 9. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah teramati.

Reduksi orde 2, dengan orde 2 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr2} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 \\ -0.9800 & 0.1239 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr2} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr2} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr2} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr2}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.42 sebagai berikut:

Tabel 4.42 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr2}$

i	λ_i
1	0.9892
2	0.9892

Berdasarkan Tabel 4.42, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr2}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah 2. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah 2. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran B.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r2} seperti yang disajikan pada Tabel 4.43 sebagai berikut:

Tabel 4.43 Nilai Eigen Matriks A_{r2}

i	λ_i
1	0.9892
2	0.9892
3	1.1371
4	1.1371
5	1.2015
6	1.2015
7	1.0179
8	1.0737

Berdasarkan Tabel 4.43, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r2} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ adalah teramati.

Setelah dilakukan proses reduksi model, akan dilakukan estimasi menggunakan filter Kalman. Proses estimasi ini menggunakan *software* MATLAB R2013b. Estimasi dilakukan pada sistem awal (A, B, C, D), sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$, dan sistem tereduksi total $\left(A_r, B_r, C_r, D_r\right)$.

Diberikan estimasi awal $\hat{x}_0 = 0$ dan kovariansi kesalahan estimasi awal $P_0 = 0{,}01I$ dan I matriks identitas. Derau sistem w dibangkitkan dari nilai random dengan mengambil mean nol dan kovariansi $Q = 0.01I$. Sedangkan untuk derau pengukuran v juga dibangkitkan dari nilai random dengan mengambil mean nol dan kovariansi $R = 0.2$. Berikut akan ditampilkan hasil simulasi estimasi variabel keadaan dengan melakukan iterasi sebanyak 10 kali atau $N = 10$. Pada semua sistem dilakukan simulasi sebanyak 10 kali. Nilai *error* dari sistem dengan $N = 10$ diberikan pada Tabel 4.44.

Tabel 4.44 Hasil Estimasi Variabel Setiap Sistem

Sistem	Nilai *error* pada N=10	Rata-rata waktu komputasi (detik)
Awal	0,3082	0.7506565
Setimbang	0,2182	0.3276453
Tereduksi Total Orde 13	0,1296	0,3714621
Tereduksi Total Orde 12	0,1667	0,3930848
Tereduksi Total Orde 11	0,2519	0,4107269
Tereduksi Total Orde 10	0,1746	0,3983792
Tereduksi Total Orde 9	0,2224	0,4275576
Tereduksi Total Orde 8	0,2382	0,3220611
Tereduksi Total Orde 7	0,2638	0.3306274
Tereduksi Total Orde 6	0,2428	0.3292049
Tereduksi Total Orde 5	0,2511	0.3258818
Tereduksi Total Orde 4	0,2623	0.3224604
Tereduksi Total Orde 3	0,2404	0.3685681
Tereduksi Total Orde 2	0,2150	0.3420017

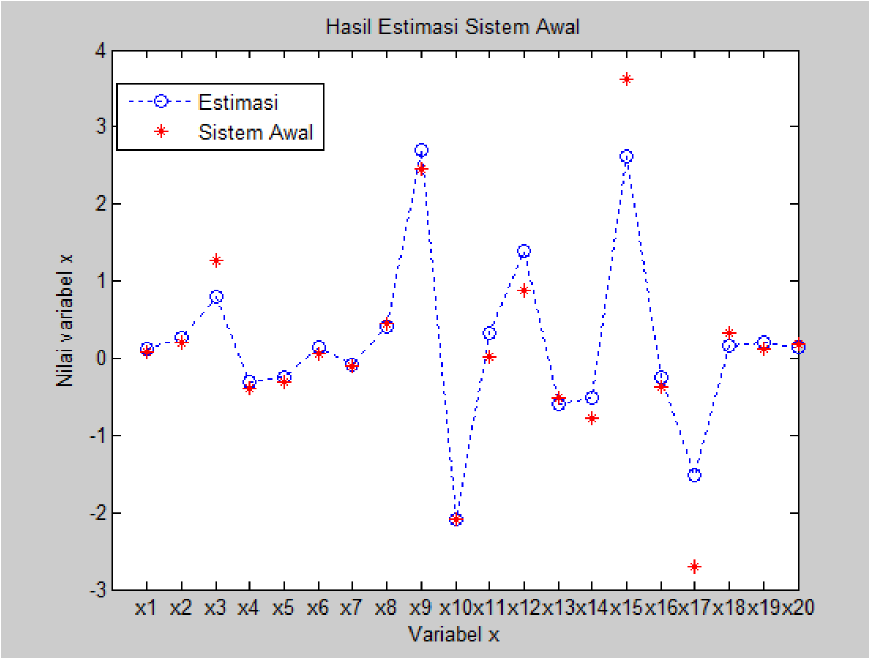
Berdasarkan data pada Tabel 4.44 terlihat bahwa nilai *error* terkecil adalah pada sistem tereduksi total orde 13 dengan $error = 0{,}1296$ dengan waktu komputasi tercepat pada sistem tereduksi total. Berdasarkan Tabel 4.44 terlihat bahwa proses estimasi pada sistem tereduksi total lebih cepat daripada proses estimasi pada sistem awal dan sistem setimbang. Hal ini karena banyaknya variabel *state* yang dihitung, sehingga waktu komputasi pada sistem tereduksi total lebih cepat. Untuk tabel nilai *error* dan waktu komputasi setiap sistem yang lebih terperinci dapat dilihat pada Lampiran B.

Cara mencari *error* estimasi akan dituliskan dalam persamaan berikut:

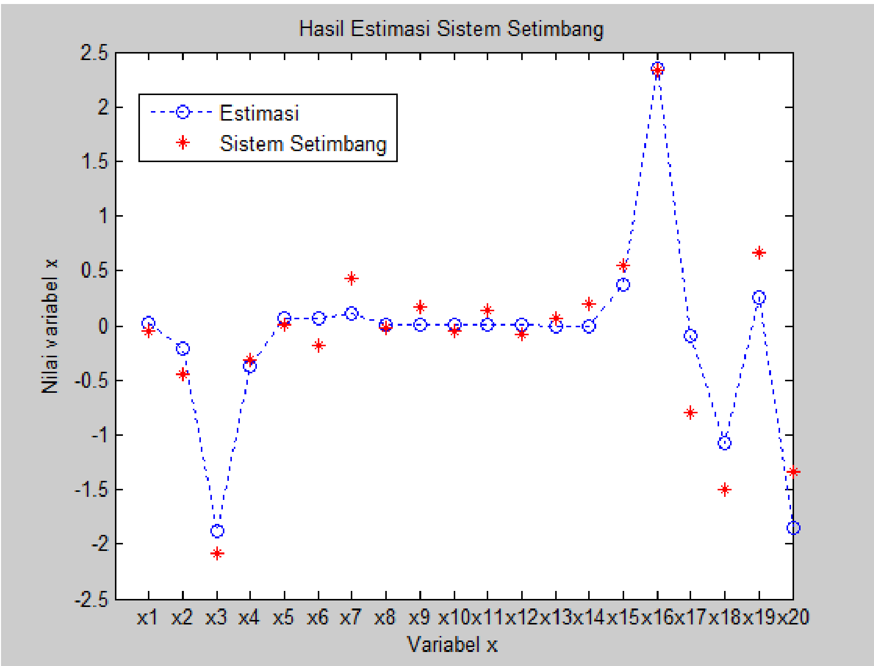
$$error = \|x - \hat{x}\|$$

dimana x adalah nilai sebenarnya dan $\hat{x}$ adalah nilai hasil estimasi menggunakan algoritma filter Kalman.

Hasil simulasi untuk estimasi dari (A, B, C, D) dan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ diberikan pada Gambar 4.11 dan Gambar 4.12..

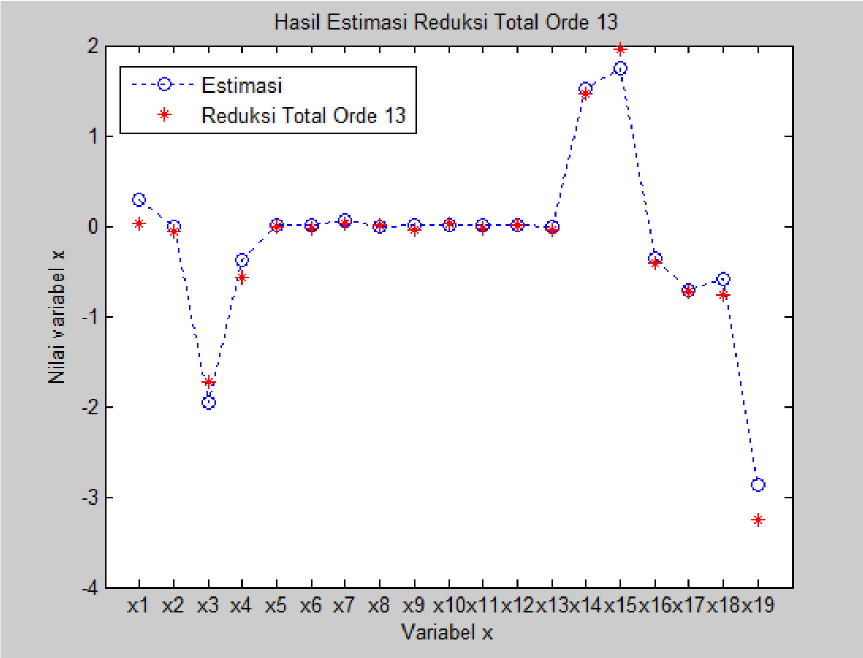


Gambar 4.11 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Awal

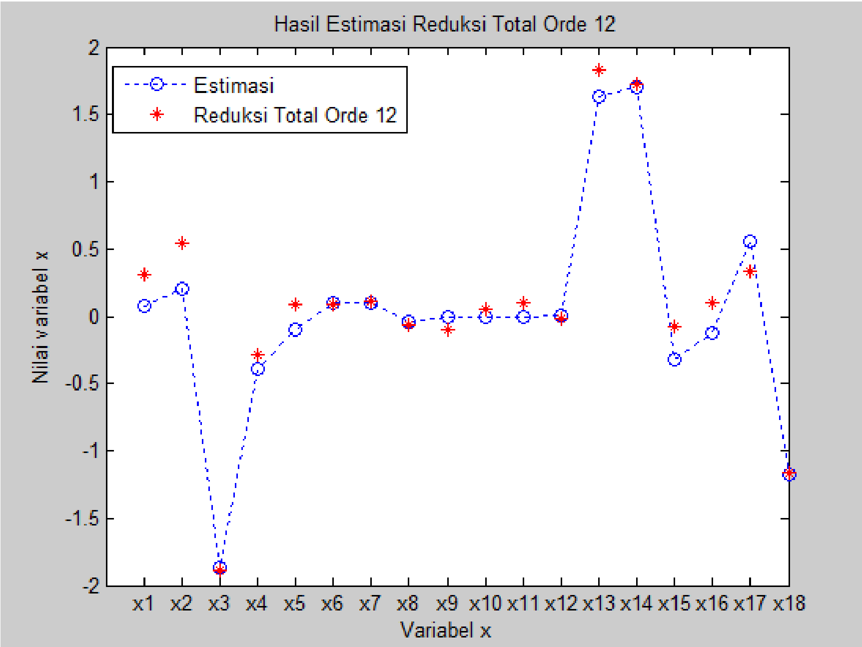


Gambar 4.12 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Setimbang

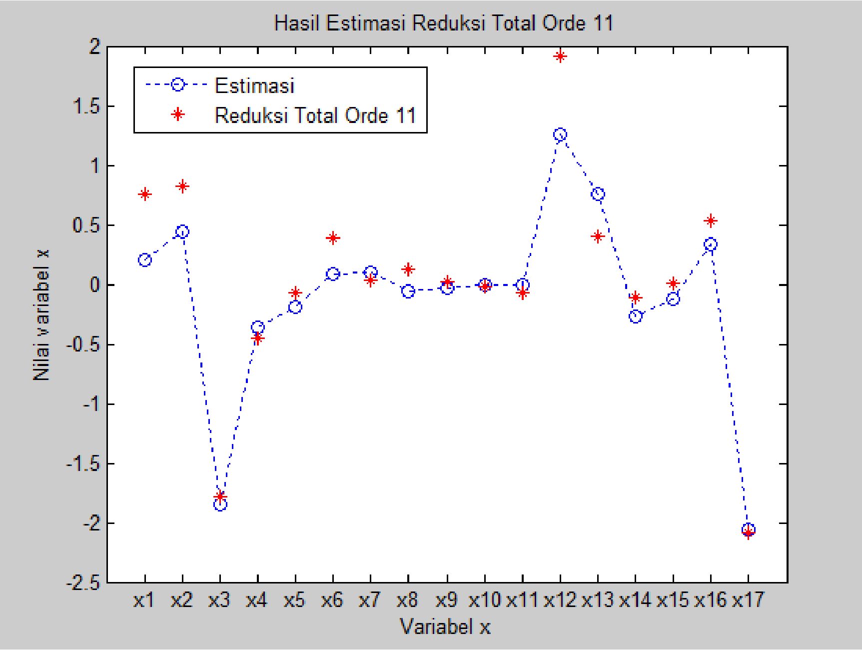
Gambar 4.11 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem awal. Sedangkan Gambar 4.12 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem setimbang. Pada Gambar 4.11 dan 4.12 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama.



Gambar 4.13 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 13

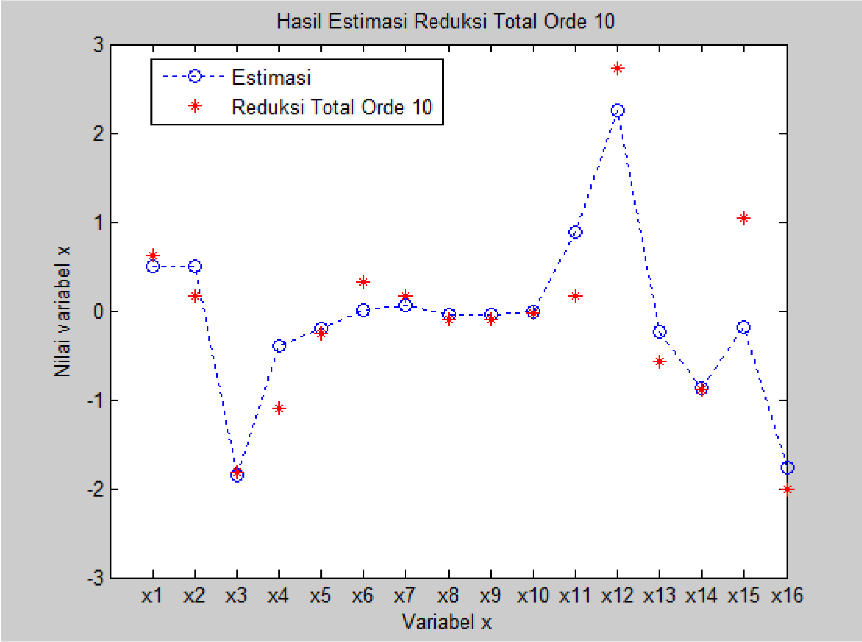


Gambar 4.14 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 12

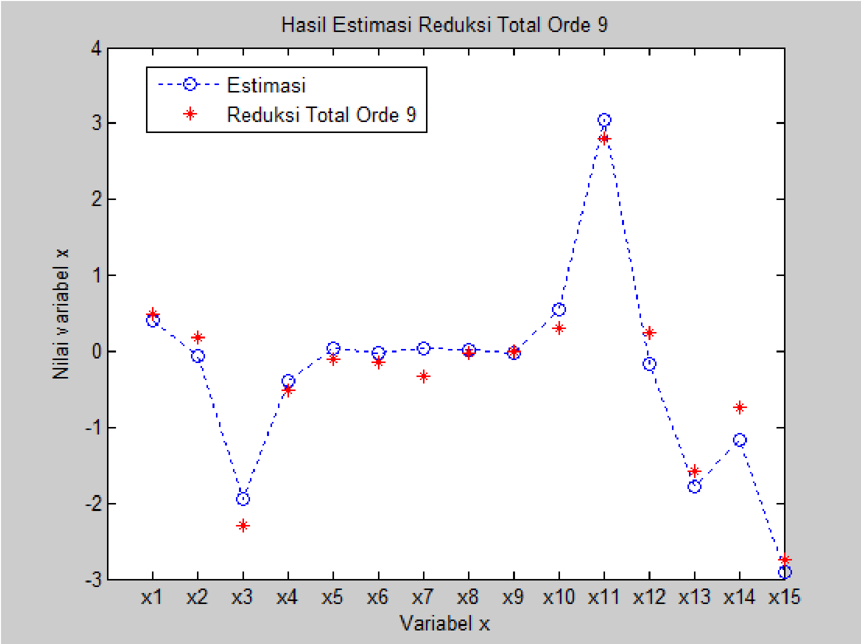


Gambar 4.15 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 11

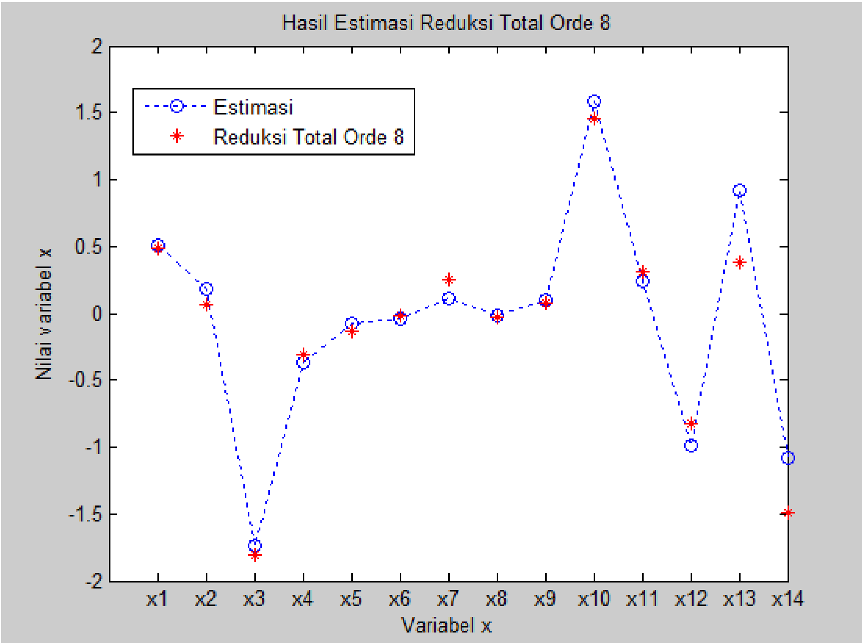
Gambar 4.13 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 13. Gambar 4.14 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 12. Gambar 4.15 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 11. Pada Gambar 4.13, 4.14 dan 4.15 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama.



Gambar 4.16 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 10

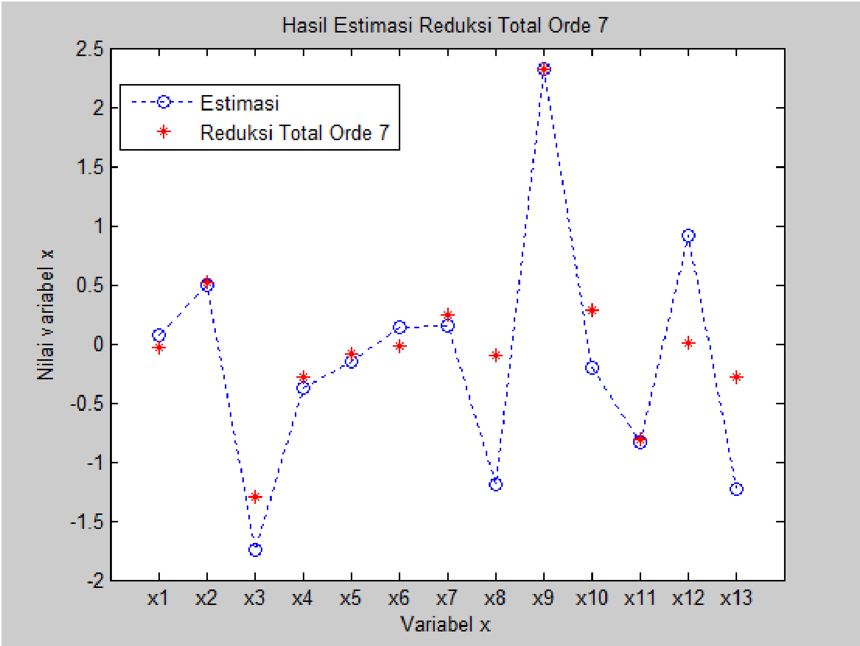


Gambar 4.17 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 9

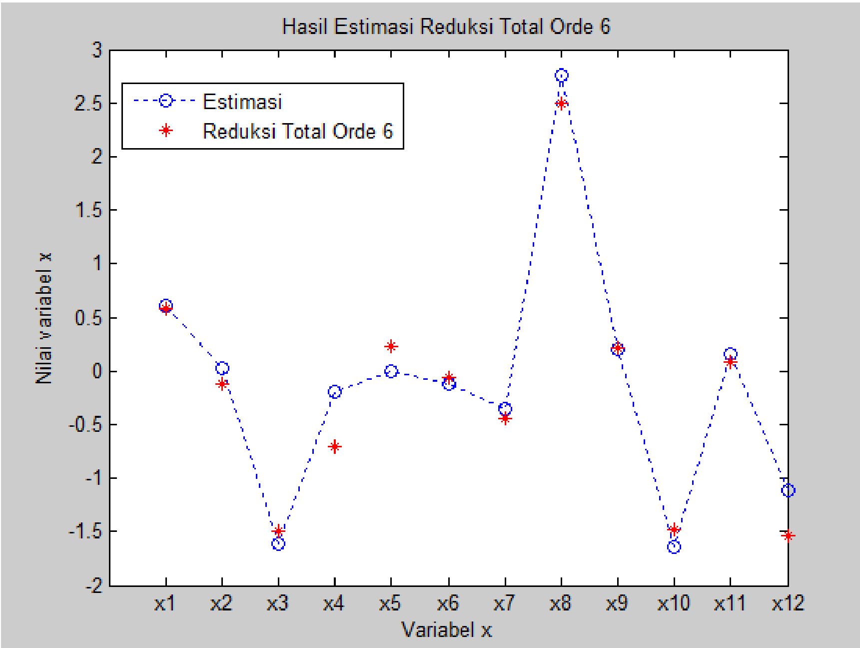


Gambar 4.18 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 8

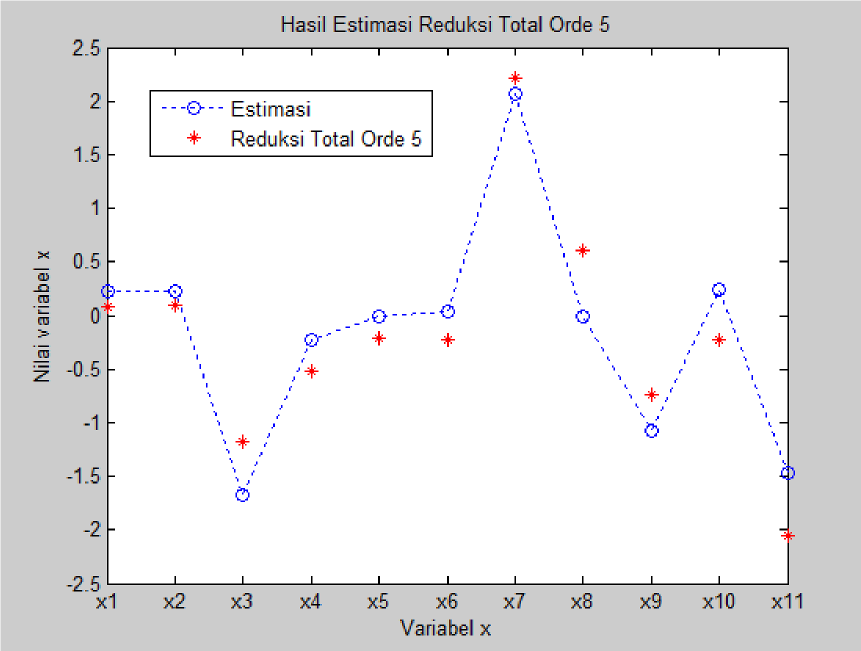
Gambar 4.16 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 10. Gambar 4.17 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 9. Gambar 4.18 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 8. Pada Gambar 4.16, 4.17 dan 4.18 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama.



Gambar 4.19 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 7

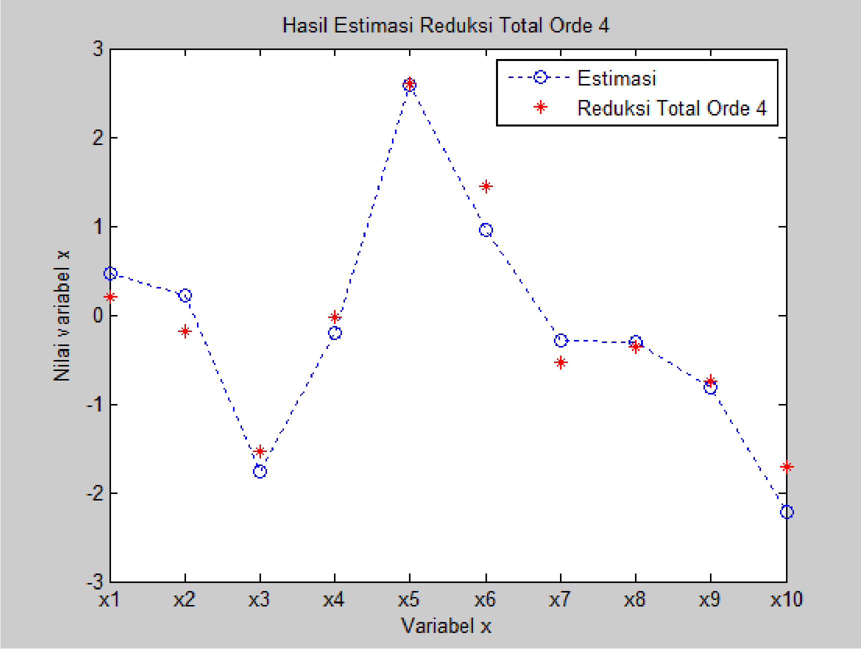


Gambar 4.20 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 6

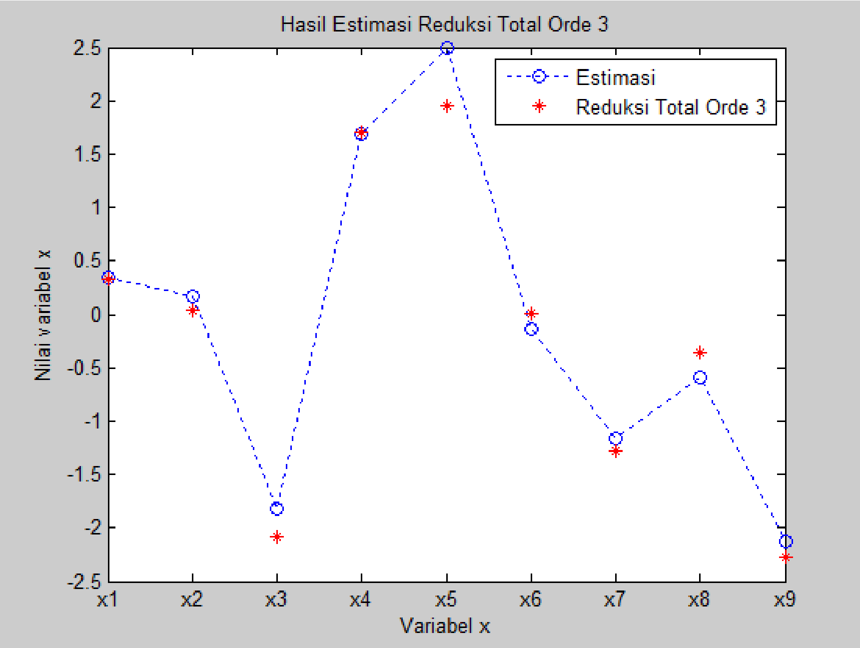


Gambar 4.21 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 5

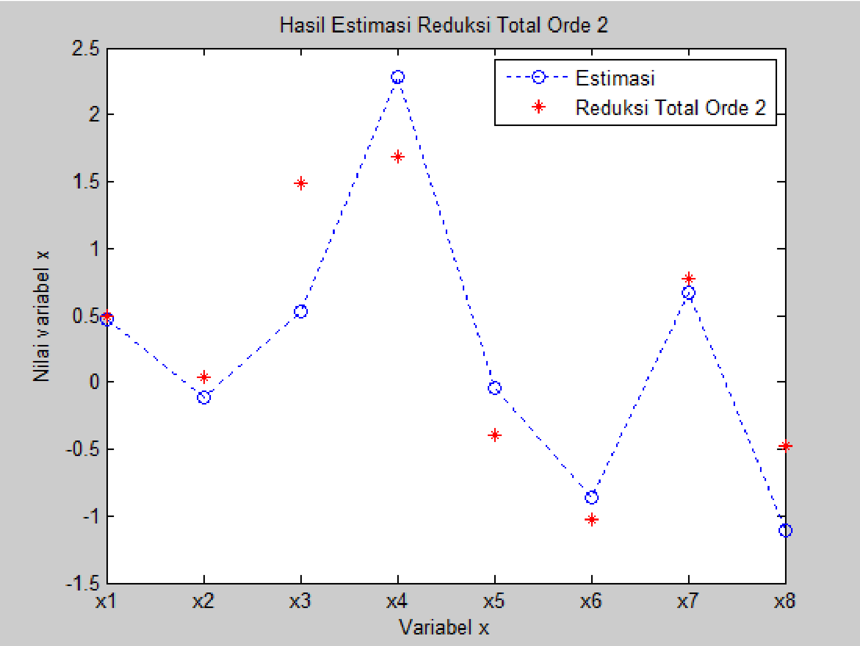
Gambar 4.19 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 7. Gambar 4.20 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 6. Gambar 4.21 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 5. Pada Gambar 4.19, 4.20 dan 4.21 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama.



Gambar 4.22 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 4



Gambar 4.23 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 3



Gambar 4.24 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 2

Gambar 4.22 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 4. Gambar 4.23 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 3. Gambar 4.24 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 2. Pada Gambar 4.22, 4.23 dan 4.24 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama.

4.3.3 Kasus 3

Pada kasus 3 ini diambil suatu matriks A berukuran 10x10 dengan bentuk diagonal. Simulasi ini akan mengambil contoh sistem awal (A, B, C, D) sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & -1 & 4 & -2 & 2 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan diselidiki kestabilan, keterkendalian dan keteramatan dari sistem awal tersebut. Stabilitas sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan nilai absolut dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.45.

Tabel 4.45 Nilai Eigen Matriks A

i	λ_i
1	1.4000
2	1.3000
3	1.2000
4	0.8000
5	0.4000
6	0.5000
7	0.8000
8	1.2000
9	1.4000
10	1.6000

Berdasarkan Tabel 4.45, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem awal (A,B,C,D) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem awal (A,B,C,D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem awal (A,B,C,D) adalah 10. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem awal (A,B,C,D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem awal (A,B,C,D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem awal (A,B,C,D) adalah 10. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem awal (A,B,C,D) adalah teramati.

Pada reduksi model dengan metode Pemotongan Setimbang dapat diterapkan pada sistem stabil asimtotik, terkendali dan teramati. Karena pada sistem yang tidak stabil tidak dapat menentukan gramian keterkendalian dan gramian keteramatan dalam membentuk sistem setimbang. Maka perlu adanya dekomposisi atau pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tidak stabil.

Pada dekomposisi sistem tidak stabil, dilakukan transformasi sistem menggunakan matriks unitary U_d . Diperoleh matriks unitary U_d seperti yang tertulis pada Lampiran C.

Selanjutnya dilakukan transformasi tahap kedua W_d. Diperoleh matriks W_d seperti yang tertulis pada Lampiran C. Sehingga diperoleh hasil dekomposisi sistem tidak stabil, dimana subsistem stabil adalah sebagai berikut:

$$A_S = \begin{pmatrix} -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$B_S = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$C_S = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D_S = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Pada subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) diatas, dapat dilakukan analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_s yang dapat dilihat pada Tabel 4.45. Nilai eigen matriks A_s pada Tabel 4.45 disajikan dengan warna hitam. Berdasarkan Tabel 4.45, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_s bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.2 subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah terkendali.

Keteramatan subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB

R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.3 subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah teramati.

Setelah itu untuk subsistem tidak stabil. Pada subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang tertulis pada Lampiran C, dapat dilakukan analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan.

Kestabilan dari subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_u seperti yang disajikan pada Tabel 4.45. Nilai eigen matriks A_u pada Tabel 4.45 disajikan dengan warna merah. Berdasarkan Tabel 4.45, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_u bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah tidak stabil.

Keterkendalian subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah 6. Maka berdasarkan Teorema 2.2 subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah terkendali.

Keteramatan subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah 6. Maka berdasarkan Teorema 2.3 subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah teramati.

Selanjutnya adalah membentuk sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dari subsistem stabil, dimana sistem setimbang dapat dilihat sebagai berikut:

$$\tilde{A}_s = \begin{pmatrix} -0.5919 & -0.2400 & 0.1125 & 0.1388 \\ -0.2400 & 0.8634 & 0.1655 & 0.1980 \\ 0.1125 & 0.1655 & -0.7073 & 0.3685 \\ -0.1388 & -0.1980 & -0.3685 & 0.5358 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_s \begin{pmatrix} -5.2647 \\ 0.7112 \\ -0.6750 \\ 0.8240 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_s = \begin{pmatrix} 5.2647 & -0.7112 & 0.6750 & 0.8240 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_s = (0)$$

Selanjutnya akan dicari gramian keterkendalian $\tilde{W}$ dan gramian keteramatan $\tilde{M}$ dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$, diperoleh:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 43.9856 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12.8869 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6979 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5545 \end{pmatrix}$$

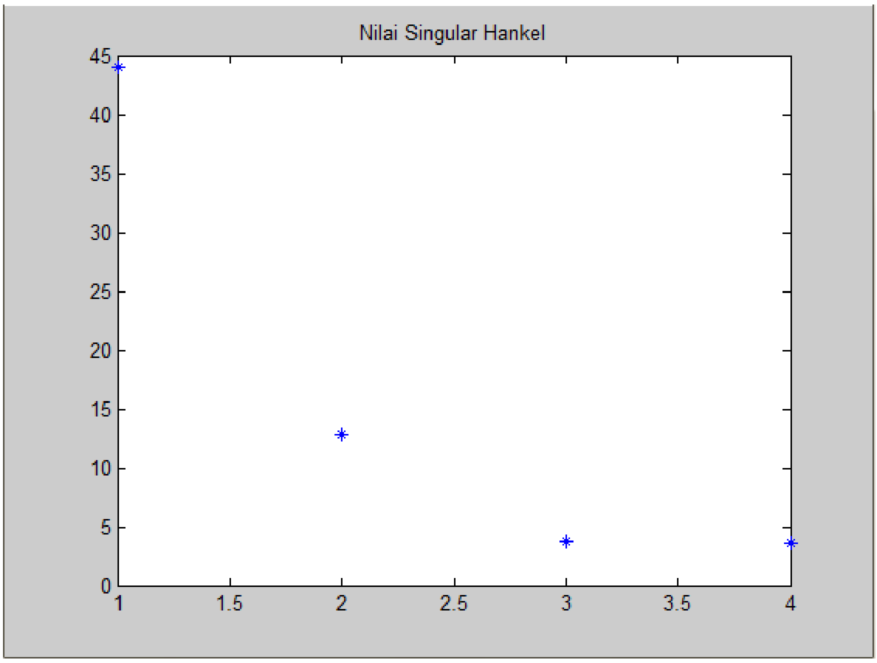
$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 43.9856 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12.8869 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6979 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.5545 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa nilai dari $\tilde{W} = \tilde{M}$ yang sama artinya dengan $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma$, dengan $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ dengan σ adalah nilai singular Hankel, maka didapatkan nilai singular Hankel seperti yang disajikan pada Tabel 4.46 berikut:

Tabel 4.46 Nilai Singular Hankel

i	$\lvert\sigma_i\rvert$
1	43.9856
2	12.8869
3	3.6979
4	3.5545

Berdasarkan Tabel 4.46, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0. Nilai singular Hankel juga dapat ditunjukkan melalui grafik, yang disajikan oleh Gambar 4.25 berikut.



Gambar 4.25 Nilai Singular Hankel

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_s$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.47 sebagai berikut:

Tabel 4.47 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_s$

i	λ_i
1	0.8
2	0.4
3	0.8
4	0.5

Berdasarkan Tabel 4.47, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_s$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah teramati.

Sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ akan direduksi dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, didapatkan sistem tereduksi dengan Pemotongan Setimbang. Orde dari sistem tereduksi r adalah dari 2 sampai dengan $z-1$, dengan z adalah dimensi dari A_s (subsistem stabil). Semakin kecil r maka semakin banyak variabel yang direduksi.

Reduksi orde 3, dengan orde 3 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr3} = \begin{pmatrix} -0.5919 & -0.2400 & 0.1125 \\ -0.2400 & 0.8634 & 0.1655 \\ 0.1125 & 0.1655 & -0.7073 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr3} = \begin{pmatrix} -5.2647 \\ 0.7112 \\ -0.6750 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr3} = \begin{pmatrix} 5.2647 & -0.7112 & 0.6750 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr3} = (0)$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr3}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.48 sebagai berikut:

Tabel 4.48 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr3}$

i	λ_i
1	0.9151
2	0.5315
3	0.8194

Berdasarkan Tabel 4.48, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr3}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah 3. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah 3. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran C.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r3} seperti yang disajikan pada Tabel 4.49 sebagai berikut:

Tabel 4.49 Nilai Eigen Matriks A_{r3}

i	λ_i
1	0.9151
2	0.5315
3	0.8194
4	1.3000
5	1.2000
6	1.6000
7	1.4000
8	1.4000
9	1.2000

Berdasarkan Tabel 4.49, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r3} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah 9. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah 9. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah teramati.

Reduksi orde 2, dengan orde 2 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr2} = \begin{pmatrix} -0.5919 & -0.2400 \\ -0.2400 & 0.8634 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr2} = \begin{pmatrix} -5.2647 \\ 0.7112 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr2} = \begin{pmatrix} 5.2647 & -0.7112 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr2} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr2}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.50 sebagai berikut:

Tabel 4.50 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr2}$

i	λ_i
1	0.6305
2	0.9020

Berdasarkan Tabel 4.50, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr2}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah 2. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$

pada sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah 2. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dan subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ seperti tertulis pada Lampiran C.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r2} seperti yang disajikan pada Tabel 4.51 sebagai berikut:

Tabel 4.51 Nilai Eigen Matriks A_{r2}

i	λ_i
1	0.6305
2	0.9020
3	1.3000
4	1.2000
5	1.6000
6	1.4000
7	1.4000
8	1.2000

Berdasarkan Tabel 4.51, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r2} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah teramati.

Setelah dilakukan proses reduksi model, akan dilakukan estimasi menggunakan filter Kalman. Proses estimasi ini menggunakan *software* MATLAB R2013b. Estimasi dilakukan pada sistem awal (A, B, C, D), sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, dan sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r).

Diberikan estimasi awal $\hat{x}_0 = 0$ dan kovariansi kesalahan estimasi awal $P_0 = 0{,}01I$ dan I matriks identitas. Derau sistem w dibangkitkan dari nilai random dengan mengambil mean nol dan kovariansi $Q = 0.01I$. Sedangkan untuk derau pengukuran v juga dibangkitkan dari nilai random dengan mengambil mean nol dan kovariansi $R = 0.2$. Berikut akan ditampilkan hasil simulasi estimasi variabel keadaan dengan melakukan iterasi sebanyak 10 kali atau $N = 10$. Pada semua sistem dilakukan simulasi sebanyak 10 kali. Hasil estimasi variabel setiap sistem dengan $N = 10$ diberikan pada Tabel 4.52.

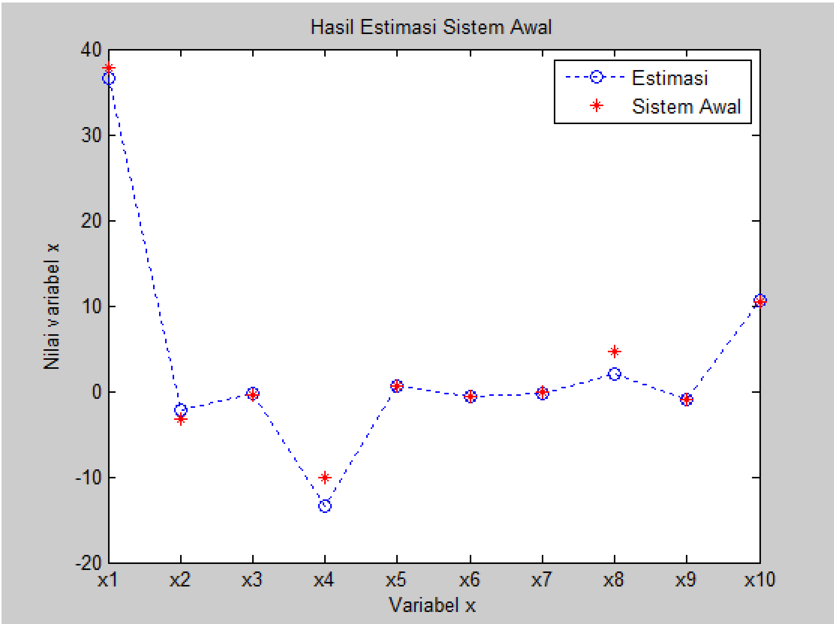
Tabel 4.52 Hasil Estimasi Variabel Setiap Sistem

Sistem	Nilai *error* pada N=10	Rata-rata waktu komputasi (detik)
Awal	0,6981	0.3366518
Setimbang	0,6206	0.2934213
Tereduksi Total Orde 3	0,5784	0.310564
Tereduksi Total Orde 2	0,6778	0.3136311

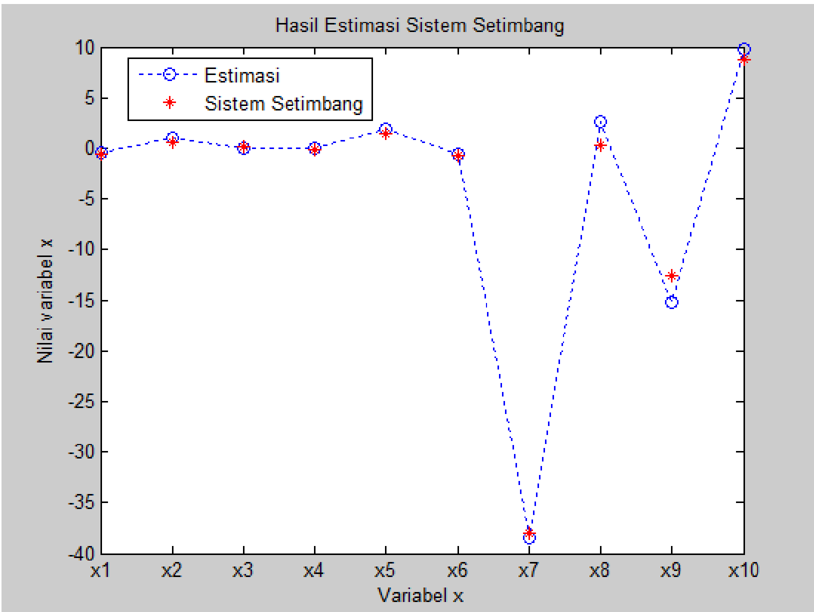
Berdasarkan data pada Tabel 4.52 terlihat bahwa nilai *error* terkecil adalah pada sistem tereduksi total orde 3 dengan $error = 0{,}5784$ dengan waktu komputasi tercepat pada sistem tereduksi total. Berdasarkan Tabel 4.52 terlihat bahwa proses estimasi pada sistem tereduksi total lebih cepat daripada proses estimasi pada sistem awal dan sistem setimbang. Hal ini karena banyaknya variabel *state* yang dihitung, sehingga waktu komputasi pada sistem tereduksi total lebih cepat. Untuk tabel nilai *error* dan waktu komputasi setiap sistem yang lebih terperinci dapat dilihat pada Lampiran C. Cara mencari *error* estimasi akan dituliskan dalam persamaan berikut:

$$error = \|x - \hat{x}\|$$

dimana x adalah nilai sebenarnya dan $\hat{x}$ adalah nilai hasil estimasi menggunakan algoritma filter Kalman.

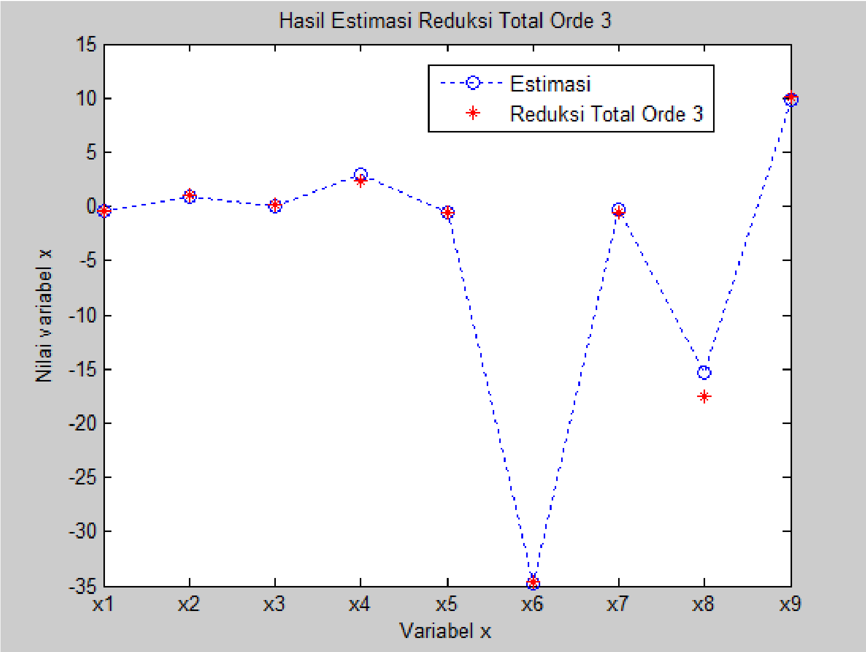


Gambar 4.26 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Awal

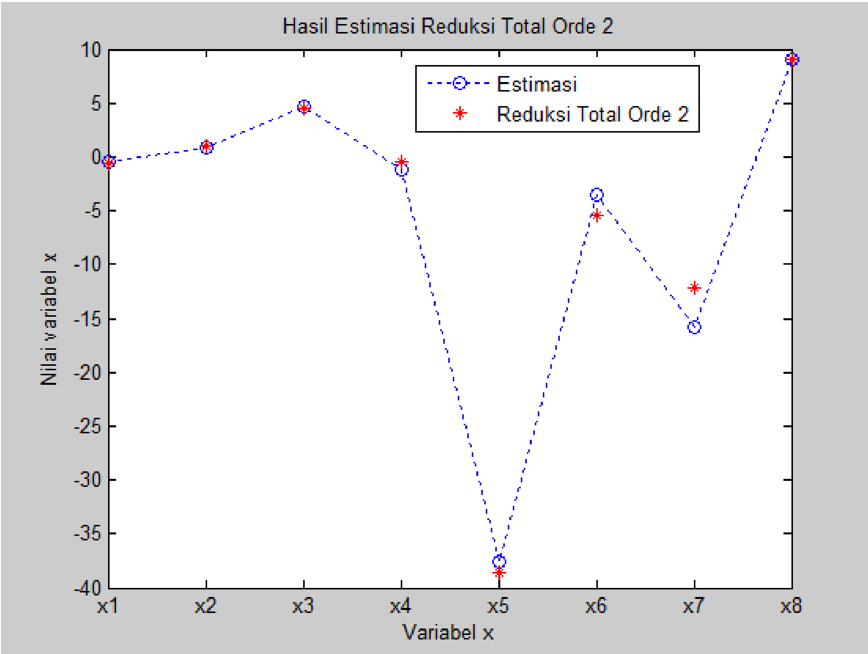


Gambar 4.27 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Setimbang

Gambar 4.26 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem awal. Sedangkan Gambar 4.27 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem setimbang. Pada Gambar 4.26 dan 4.27 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama.



Gambar 4.28 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 3



Gambar 4.29 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 2

Gambar 4.28 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 3. Gambar 4.29 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 2. Pada gambar 4.28 dan 4.29 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama.

4.3.4 Kasus 4

Pada kasus 4 ini diambil suatu matriks A berukuran 10x10 dengan bentuk segitiga atas. Simulasi ini akan mengambil contoh sistem awal (A, B, C, D) sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.2 & 1.6 & 0.4 & -0.5 & 0.3 & 1.2 & -0.9 & 0.7 & 1.4 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 1.5 & -0.5 & 0.2 & 0.4 & -1.3 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1.3 & -0.3 & 1.8 & 0.6 & 0.4 & 1.6 & 0.2 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.2 & 0.4 & 1.6 & 0.9 & 0.3 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 1.8 & -0.4 & 0.3 & -0.7 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & -0.3 & 0.5 & 1.6 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 1.2 & 0.3 & -0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & -0.3 & 1.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan diselidiki kestabilan, keterkendalian dan keteramatan dari sistem awal tersebut. Stabilitas sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan nilai absolut dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.53.

Tabel 4.53 Nilai Eigen Matriks A

i	λ_i
1	1.2
2	0.2
3	1.3
4	0.1
5	1.6
6	0.4
7	1.5
8	0.1
9	1.2
10	1.4

Berdasarkan Tabel 4.53, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem awal (A, B, C, D) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 9. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem awal (A, B, C, D) adalah tidak terkendali.

Keteramatan sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 9. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem awal (A, B, C, D) adalah tidak teramati.

Pada reduksi model dengan metode Pemotongan Setimbang dapat diterapkan pada sistem stabil asimtotik, terkendali dan teramati. Karena pada sistem yang tidak stabil tidak dapat menentukan gramian keterkendalian dan gramian keteramatan dalam membentuk sistem setimbang. Maka perlu adanya dekomposisi atau pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tidak stabil.

Pada dekomposisi sistem tidak stabil, dilakukan transformasi sistem menggunakan matriks unitary U_d . Diperoleh matriks unitary U_d seperti yang tertulis pada Lampiran D.

Selanjutnya dilakukan transformasi tahap kedua W_d. Diperoleh matriks W_d seperti yang tertulis pada Lampiran D. Sehingga diperoleh hasil dekomposisi sistem tidak stabil, dimana subsistem stabil adalah sebagai berikut:

$$A_S = \begin{pmatrix} -0.1000 & 1.3395 & 0.7324 & 1.5798 \\ 0 & 0.1000 & 0.1779 & 0.9834 \\ 0 & 0 & 0.2000 & -1.3922 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4000 \end{pmatrix}$$

$$B_s = \begin{pmatrix} -5.0856 \\ -1.9232 \\ 10.7579 \\ -1.5846 \end{pmatrix}$$

$$C_s = \begin{pmatrix} -0.7710 & -1.0178 & -0.5610 & 0.0350 \end{pmatrix}$$
$$D_s = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Pada subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) diatas, dapat dilakukan analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_s yang dapat dilihat pada Tabel 4.53. Nilai eigen matriks A_s pada Tabel 4.53 disajikan dengan warna hitam. Berdasarkan Tabel 4.53, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_s bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 subsistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.2 subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.3 subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ adalah teramati.

Setelah itu untuk subsistem tidak stabil. Pada subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang tertulis pada Lampiran D, dapat dilakukan analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan.

Kestabilan dari subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_u seperti yang disajikan pada Tabel 4.53. Nilai eigen matriks A_u pada Tabel 4.53 disajikan dengan warna merah. Berdasarkan Tabel 4.53, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_u bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah 5. Maka berdasarkan Teorema 2.2 subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah tidak terkendali.

Keteramatan subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah 6. Maka berdasarkan Teorema 2.3 subsistem tidak stabil (A_u, B_u, C_u, D_u) adalah teramati.

Selanjutnya adalah membentuk sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dari subsistem stabil, dimana sistem setimbang dapat dilihat sebagai berikut:

$$\tilde{A}_s = \begin{pmatrix} 0.7210 & -0.4368 & 0.0149 & -0.0002 \\ 0.4368 & -0.1861 & -0.0498 & 0.0007 \\ 0.0149 & 0.0498 & -0.1494 & -0.0915 \\ 0.0002 & 0.0007 & 0.0915 & 0.2144 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_s \begin{pmatrix} 1.7281 \\ -1.6655 \\ 0.0065 \\ 0.0001 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_s = \begin{pmatrix} -1.7281 & -1.6655 & -0.0065 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_s = (0)$$

Selanjutnya akan dicari gramian keterkendalian $\tilde{W}$ dan gramian keteramatan $\tilde{M}$ dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, diperoleh:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 7.9894 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.4525 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0132 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

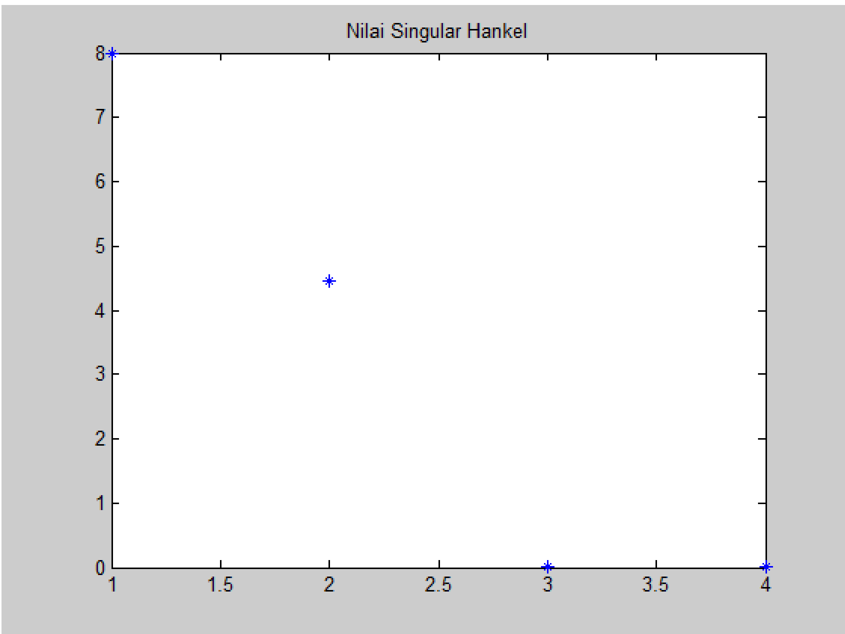
$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 7.9894 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.4525 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0132 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa nilai dari $\tilde{W} = \tilde{M}$ yang sama artinya dengan $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma$, dengan $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ dengan σ adalah nilai singular Hankel, maka didapatkan nilai singular Hankel seperti yang disajikan pada Tabel 4.54 berikut:

Tabel 4.54 Nilai Singular Hankel

i	$\lvert\sigma_i\rvert$
1	7.9894
2	4.4525
3	0.0132
4	0.0001

Berdasarkan Tabel 4.54, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0. Nilai singular Hankel juga dapat ditunjukkan melalui grafik, yang disajikan oleh Gambar 4.30 berikut.



Gambar 4.30 Nilai Singular Hankel

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_s$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.55 sebagai berikut:

Tabel 4.55 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_s$

i	λ_i
1	0.4
2	0.1
3	0.1
4	0.2

Berdasarkan Tabel 4.55, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_s$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah teramati.

Sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ akan direduksi dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, didapatkan sistem tereduksi dengan Pemotongan Setimbang. Orde dari sistem tereduksi r adalah dari 2 sampai dengan $z-1$, dengan z adalah dimensi dari A_s (subsistem stabil). Semakin kecil r maka semakin banyak variabel yang direduksi.

Reduksi orde 3, dengan orde 3 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr3} = \begin{pmatrix} 0.7210 & -0.4368 & 0.0149 \\ 0.4368 & -0.1861 & -0.0498 \\ 0.0149 & 0.0498 & -0.1494 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr3} = \begin{pmatrix} 1.7281 \\ -1.6655 \\ 0.0065 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr3} = \begin{pmatrix} -1.7281 & -1.6655 & -0.0065 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr3} = (0)$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr3}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.56 sebagai berikut:

Tabel 4.56 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr3}$

i	λ_i
1	0.4009
2	0.1146
3	0.1300

Berdasarkan Tabel 4.56, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr3}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah 3. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah 3. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran D.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r3} seperti yang disajikan pada Tabel 4.57 sebagai berikut:

Tabel 4.57 Nilai Eigen Matriks A_{r3}

i	λ_i
1	0.4009
2	0.1146
3	0.1300
4	1.2000
5	1.3000
6	1.6000
7	1.5000
8	1.2000
9	1.4000

Berdasarkan Tabel 4.57, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r3} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $\left(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3}\right)$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah tidak terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah 9. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah teramati.

Reduksi orde 2, dengan orde 2 maka dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2})$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr2} = \begin{pmatrix} 0.7210 & -0.4368 \\ 0.4368 & -0.1861 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr2} = \begin{pmatrix} 1.7281 \\ -1.6655 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr2} = \begin{pmatrix} -1.7281 & -1.6655 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr2} = (0)$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 2 $(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr2}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.58 sebagai berikut:

Tabel 4.58 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr2}$

i	λ_i
1	0.3898
2	0.1452

Berdasarkan Tabel 4.58, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr2}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah 2. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah 2. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran D.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r2} seperti yang disajikan pada Tabel 4.59 sebagai berikut:

Tabel 4.59 Nilai Eigen Matriks A_{r2}

i	λ_i
1	0.3898
2	0.1452
3	1.2000
4	1.3000
5	1.6000
6	1.5000
7	1.2000
8	1.4000

Berdasarkan Tabel 4.59, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r2} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah 7. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah tidak terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah teramati.

Setelah dilakukan proses reduksi model, akan dilakukan estimasi menggunakan filter Kalman. Proses estimasi ini menggunakan *software* MATLAB R2013b. Estimasi dilakukan pada sistem awal (A, B, C, D), sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, dan sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r).

Diberikan estimasi awal $\hat{x}_0 = 0$ dan kovariansi kesalahan estimasi awal $P_0 = 0{,}01I$ dan I matriks identitas. Derau sistem w dibangkitkan dari nilai random dengan mengambil mean nol dan kovariansi $Q = 0.01I$. Sedangkan untuk derau pengukuran v juga dibangkitkan dari nilai random dengan mengambil mean nol dan kovariansi $R = 0.2$.

Berikut akan ditampilkan hasil simulasi estimasi variabel keadaan dengan melakukan iterasi sebanyak 10 kali atau $N = 10$. Pada semua sistem dilakukan simulasi sebanyak 10 kali. Nilai hasil estimasi variabel dari setiap sistem dengan $N = 10$ diberikan pada Tabel 4.60.

Tabel 4.60 Nilai Hasil Estimasi Variabel Setiap Sistem

Sistem	Nilai *error* pada N=10	Rata-rata waktu komputasi (detik)
Awal	13,5445	0,3517334
Setimbang	1,2575	0,3600904
Tereduksi Total Orde 3	0,6421	0,3346059
Tereduksi Total Orde 2	0,7471	0,2874577

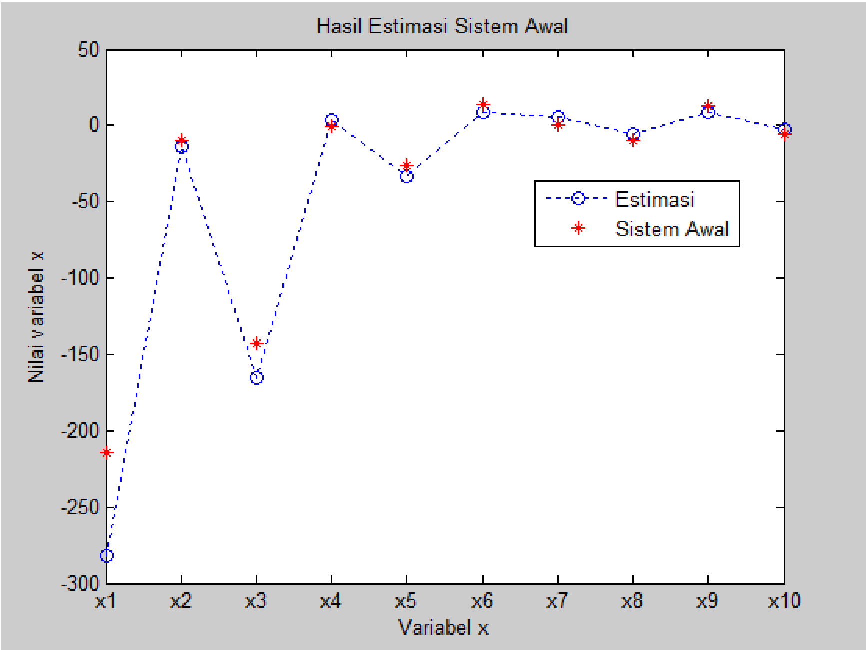
Berdasarkan data pada Tabel 4.60 terlihat bahwa nilai *error* terkecil adalah pada sistem tereduksi total orde 3 dengan $error = 0{,}6421$ dengan waktu komputasi tercepat pada sistem tereduksi total. Berdasarkan Tabel 4.52 terlihat bahwa proses estimasi pada sistem tereduksi total lebih cepat daripada proses estimasi pada sistem awal dan sistem setimbang. Hal ini karena banyaknya variabel *state* yang dihitung, sehingga waktu komputasi pada sistem tereduksi total lebih cepat. Untuk tabel nilai *error* dan waktu komputasi setiap sistem yang lebih terperinci dapat dilihat pada Lampiran D.

Cara mencari *error* estimasi akan dituliskan dalam persamaan berikut:

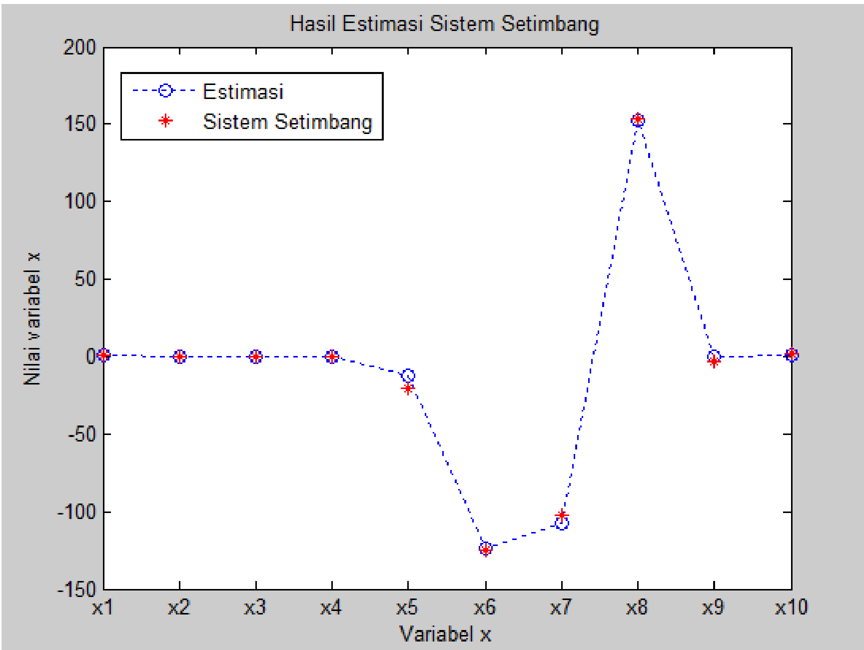
$$error = \|x - \hat{x}\|$$

dimana x adalah nilai sebenarnya dan $\hat{x}$ adalah nilai hasil estimasi menggunakan algoritma filter Kalman.

Hasil simulasi untuk estimasi dari (A, B, C, D) dan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ diberikan pada Gambar 4.31 dan Gambar 4.32.

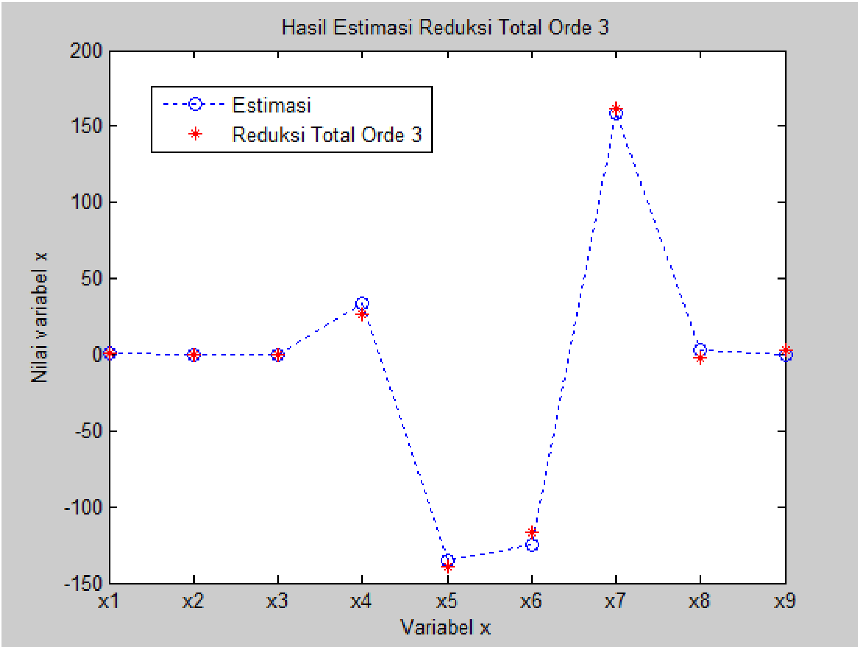


Gambar 4.31 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Awal

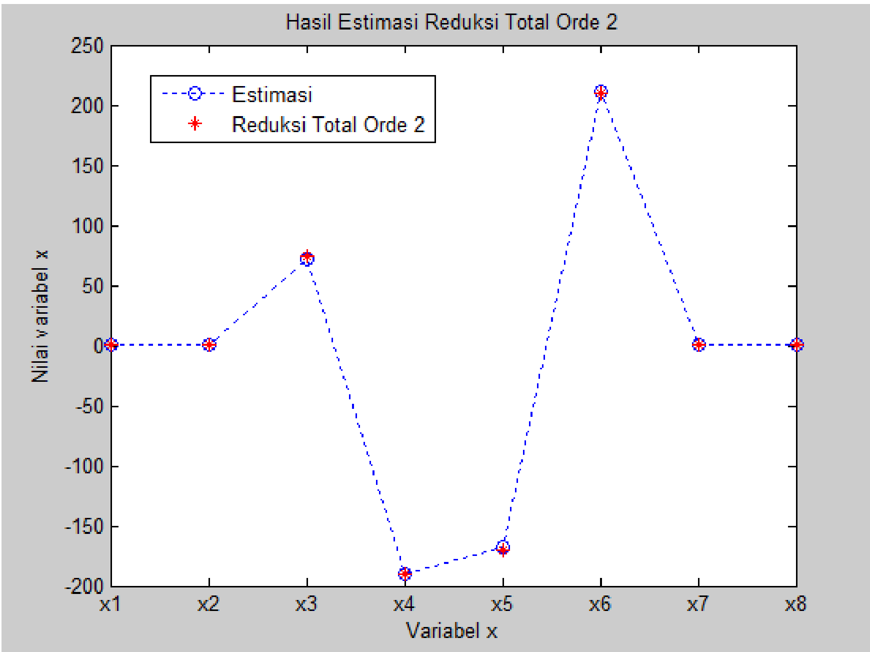


Gambar 4.32 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Setimbang

Gambar 4.31 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem awal. Sedangkan Gambar 4.32 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem setimbang. Pada Gambar 4.31 dan 4.32 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama.



Gambar 4.33 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 3



Gambar 4.34 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 2

Gambar 4.33 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 3. Gambar 4.34 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 2. Pada Gambar 4.33 dan 4.34 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama.

4.3.5 Kasus 5

Pada kasus 5 ini diambil suatu matriks A berukuran 10x10 dengan bentuk segitiga bawah. Simulasi ini akan mengambil contoh sistem awal (A, B, C, D) sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.6 & 0.4 & 1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1.5 & -0.3 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1.8 & 0.2 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.6 & 0.4 & 1.8 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.2 & 0.4 & 0.4 & 1.6 & -0.4 & -0.3 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9 & -1.3 & 1.6 & 0.9 & 0.3 & 0.5 & 1.2 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.4 & 0.2 & 0.3 & -0.7 & 1.6 & 0.3 & -0.3 & 1.2 & 0 \\ 1.4 & 0.6 & -0.4 & -0.4 & 0.9 & -0.1 & -0.9 & 1.6 & -0.5 & 1.4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = (0)$$

Selanjutnya akan diselidiki kestabilan, keterkendalian dan keteramatan dari sistem awal tersebut. Stabilitas sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan nilai absolut dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.61.

Tabel 4.61 Nilai Eigen Matriks *A*

i	λ_i
1	1.4000
2	1.2000
3	0.1000
4	1.5000
5	0.4000
6	1.6000
7	0.1000
8	1.3000
9	0.2000
10	1.2000

Berdasarkan Tabel 4.61, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem awal (A, B, C, D) adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 10. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 10. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem awal (A, B, C, D) adalah teramati.

Pada reduksi model dengan metode Pemotongan Setimbang dapat diterapkan pada sistem stabil asimtotik, terkendali dan teramati. Karena pada sistem yang tidak stabil tidak dapat menentukan gramian keterkendalian dan gramian keteramatan dalam membentuk sistem setimbang. Maka perlu adanya dekomposisi atau pemisahan antara subsistem stabil dan subsistem tidak stabil.

Pada dekomposisi sistem tidak stabil, dilakukan transformasi sistem menggunakan matriks unitary U_d . Diperoleh matriks unitary U_d seperti yang tertulis pada Lampiran E.

Selanjutnya dilakukan transformasi tahap kedua W_d. Diperoleh matriks W_d seperti yang tertulis pada Lampiran E. Sehingga diperoleh hasil dekomposisi sistem tidak stabil, dimana subsistem stabil adalah sebagai berikut:

$$A_S = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.6093 & 0.6726 & -2.0534 \\ 0 & -0.1 & 0.2876 & -0.6648 \\ 0 & 0 & 0.2 & 1.5958 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$B_S = \begin{pmatrix} 5.8538 \\ 1.2507 \\ 0.3568 \\ -0.6248 \end{pmatrix}$$

$$C_S = \begin{pmatrix} 0.0823 & 0.5357 & -0.1059 & 0.6264 \end{pmatrix}$$

$$D_S = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Pada subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ diatas, dapat dilakukan analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_s yang dapat dilihat pada Tabel 4.61. Nilai eigen matriks A_s pada Tabel 4.61 disajikan dengan warna hitam. Berdasarkan Tabel 4.61, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_s bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.2 subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB

R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.3 subsistem stabil $\left(A_s, B_s, C_s, D_s\right)$ adalah teramati.

Setelah itu untuk subsistem tidak stabil. Pada subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang tertulis pada Lampiran E, dapat dilakukan analisis kestabilan, keterkendalian dan keteramatan.

Kestabilan dari subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_u seperti yang disajikan pada Tabel 4.61. Nilai eigen matriks A_u pada Tabel 4.61 disajikan dengan warna merah. Berdasarkan Tabel 4.61, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_u bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah 6. Maka berdasarkan Teorema 2.2 subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah 6. Maka berdasarkan Teorema 2.3 subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya adalah membentuk sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dari subsistem stabil, dimana sistem setimbang dapat dilihat sebagai berikut:

$$\tilde{A}_s = \begin{pmatrix} 0.3386 & 0.4449 & -0.0191 & 0.0033 \\ -0.4449 & -0.0916 & -0.4148 & 0.0106 \\ 0.0191 & -0.4148 & 0.3767 & 0.0586 \\ -0.0033 & 0.0106 & 0.0586 & -0.0236 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_s \begin{pmatrix} -0.8668 \\ -0.1655 \\ -0.0394 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_s = \begin{pmatrix} -0.8668 & 0.1655 & 0.0394 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_s = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari gramian keterkendalian $\tilde{W}$ dan gramian keteramatan $\tilde{M}$ dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$, diperoleh:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 0.8965 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2144 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0452 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0002 \end{pmatrix}$$

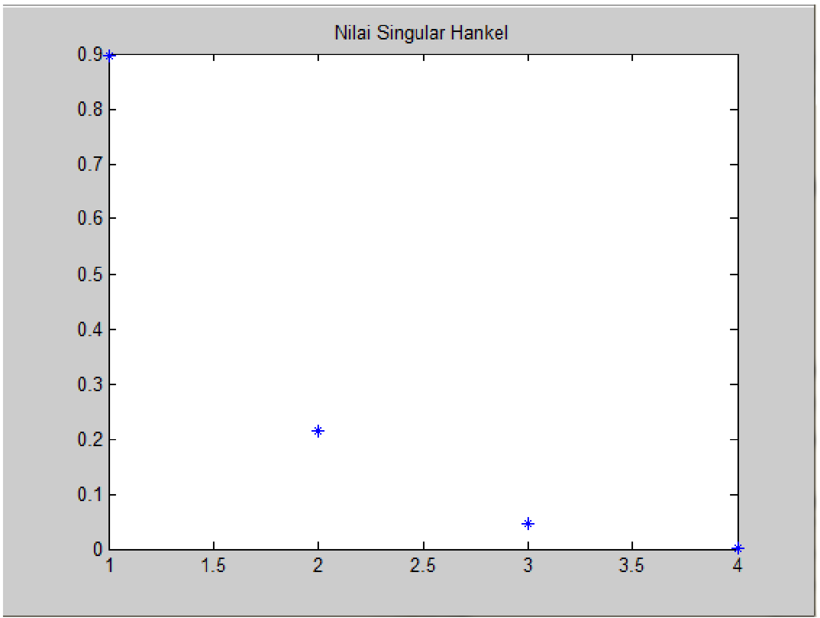
$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0.8965 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2144 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0452 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0002 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa nilai dari $\tilde{W} = \tilde{M}$ yang sama artinya dengan $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma$, dengan $\Sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ dengan σ adalah nilai singular Hankel, maka didapatkan nilai singular Hankel seperti yang disajikan pada Tabel 4.62 berikut:

Tabel 4.62 Nilai Singular Hankel

i	$\lvert\sigma_i\rvert$
1	0.8965
2	0.2144
3	0.0452
4	0.0002

Berdasarkan Tabel 4.62, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0. Nilai singular Hankel juga dapat ditunjukkan melalui grafik, yang disajikan oleh Gambar 4.35 berikut.



Gambar 4.35 Nilai Singular Hankel

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_s$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.63 sebagai berikut:

Tabel 4.63 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_s$

i	λ_i
1	0.4
2	0.2
3	0.1
4	0.1

Berdasarkan Tabel 4.63, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_s$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah 4. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ adalah teramati.

Sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ akan direduksi dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, didapatkan sistem tereduksi dengan Pemotongan Setimbang. Orde dari sistem tereduksi r adalah dari 2 sampai dengan $z-1$, dengan z adalah dimensi dari A_s (subsistem stabil). Semakin kecil r maka semakin banyak variabel yang direduksi.

Reduksi orde 3, dengan orde 3 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr3} = \begin{pmatrix} 0.3386 & 0.4449 & -0.0191 \\ -0.4449 & -0.0916 & -0.4148 \\ 0.0191 & -0.4148 & 0.3767 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr3} = \begin{pmatrix} -0.8668 \\ -0.1655 \\ -0.0394 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr3} = \begin{pmatrix} -0.8668 & 0.1655 & -0.0394 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr3} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr3}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.64 sebagai berikut:

Tabel 4.64 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr3}$

i	λ_i
1	0.0236
2	0.2895
3	0.3577

Berdasarkan Tabel 4.64, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr3}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah 3. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah 3. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 3 $\left(\tilde{A}_{sr3}, \tilde{B}_{sr3}, \tilde{C}_{sr3}, \tilde{D}_{sr3}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u, B_u, C_u, D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran E.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r3} seperti yang disajikan pada Tabel 4.65 sebagai berikut:

Tabel 4.65 Nilai Eigen Matriks A_{r3}

i	λ_i
1	0.0236
2	0.2895
3	0.3577
4	1.6000
5	1.5000
6	1.4000
7	1.3000
8	1.2000
9	1.2000

Berdasarkan Tabel 4.65, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r3} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah 9. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah 9. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r3}, B_{r3}, C_{r3}, D_{r3})$ adalah teramati.

Reduksi orde 2, dengan orde 2 maka dari sistem setimbang $\left(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s\right)$ dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ yaitu:

$$\tilde{A}_{sr2} = \begin{pmatrix} 0.3386 & 0.4449 \\ -0.4449 & -0.0916 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr2} = \begin{pmatrix} -0.8668 \\ -0.1655 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr2} = \begin{pmatrix} -0.8668 & 0.1655 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr2} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan dari sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks $\tilde{A}_{sr2}$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.66 sebagai berikut:

Tabel 4.66 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}_{sr2}$

i	λ_i
1	0.4086
2	0.4086

Berdasarkan Tabel 4.66, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks $\tilde{A}_{sr2}$ bernilai kurang dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian $\tilde{M}_c$ pada sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah 2. Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2}, \tilde{B}_{sr2}, \tilde{C}_{sr2}, \tilde{D}_{sr2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$. Dengan menggunakan *software*

MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan $\tilde{M}_o$ pada sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2},\tilde{B}_{sr2},\tilde{C}_{sr2},\tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah 2. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2},\tilde{B}_{sr2},\tilde{C}_{sr2},\tilde{D}_{sr2}\right)$ adalah teramati.

Selanjutnya akan dilakukan penggabungan antara sistem tereduksi orde 2 $\left(\tilde{A}_{sr2},\tilde{B}_{sr2},\tilde{C}_{sr2},\tilde{D}_{sr2}\right)$ dan subsistem tidak stabil $\left(A_u,B_u,C_u,D_u\right)$ yang menghasilkan sistem tereduksi total dengan menggunakan Pemotongan Setimbang $\left(A_{r2},B_{r2},C_{r2},D_{r2}\right)$ seperti tertulis pada Lampiran E.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi total $\left(A_{r2},B_{r2},C_{r2},D_{r2}\right)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi total $\left(A_{r2},B_{r2},C_{r2},D_{r2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks A_{r2} seperti yang disajikan pada Tabel 4.67 sebagai berikut:

Tabel 4.67 Nilai Eigen Matriks A_{r2}

i	λ_i
1	0.4086
2	0.4086
3	1.6000
4	1.5000
5	1.4000
6	1.3000
7	1.2000
8	1.2000

Berdasarkan Tabel 4.67, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A_{r2} yang berwarna merah bernilai lebih dari 1, maka berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi total $\left(A_{r2},B_{r2},C_{r2},D_{r2}\right)$ adalah tidak stabil.

Keterkendalian sistem tereduksi total $\left(A_{r2},B_{r2},C_{r2},D_{r2}\right)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem tereduksi total $\left(A_{r2},B_{r2},C_{r2},D_{r2}\right)$ adalah 8.

Maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o. Dengan menggunakan *software* MATLAB R2013b, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah 8. Maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi total $(A_{r2}, B_{r2}, C_{r2}, D_{r2})$ adalah teramati.

Setelah dilakukan proses reduksi model, akan dilakukan estimasi menggunakan filter Kalman. Proses estimasi ini menggunakan *software* MATLAB R2013b. Estimasi dilakukan pada sistem awal (A, B, C, D), sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, dan sistem tereduksi total (A_r, B_r, C_r, D_r).

Diberikan estimasi awal $\hat{x}_0 = 0$ dan kovariansi kesalahan estimasi awal $P_0 = 0{,}01I$ dan I matriks identitas. Derau sistem w dibangkitkan dari nilai random dengan mengambil mean nol dan kovariansi $Q = 0.01I$. Sedangkan untuk derau pengukuran v juga dibangkitkan dari nilai random dengan mengambil mean nol dan kovariansi $R = 0.2$.

Berikut akan ditampilkan hasil simulasi estimasi variabel keadaan dengan melakukan iterasi sebanyak 10 kali atau $N = 10$. Pada semua sistem dilakukan simulasi sebanyak 10 kali. Nilai hasil estimasi variabel dari setiap sistem dengan $N = 10$ diberikan pada Tabel 4.68.

Tabel 4.68 Hasil Estimasi Variabel Setiap Sistem

Sistem	Nilai *error* pada N=10	Rata-rata waktu komputasi (detik)
Awal	5,6435	0,3236033
Setimbang	3,8675	0,3280971
Tereduksi Total Orde 3	2,7420	0,3191526
Tereduksi Total Orde 2	3,4702	0,3170966

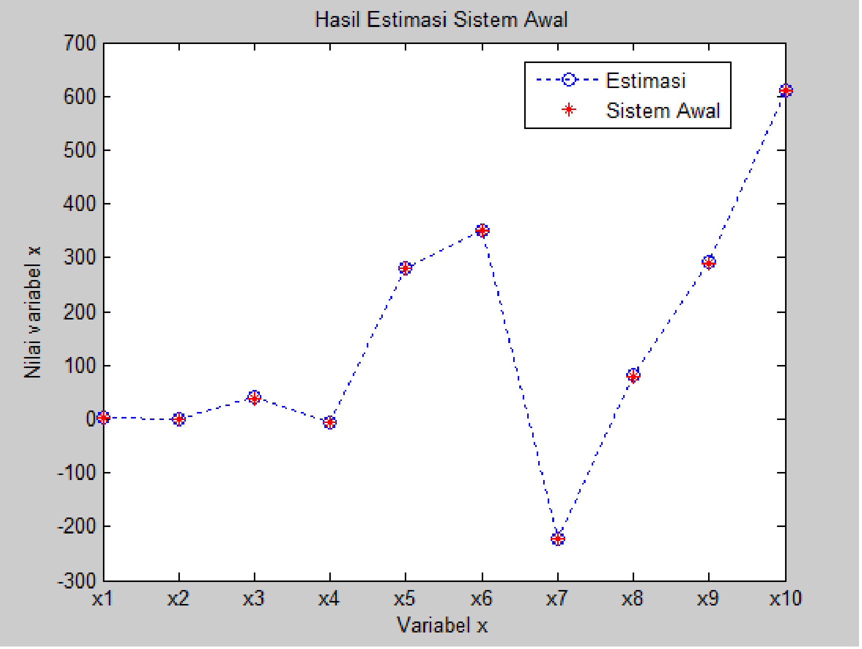
Berdasarkan data pada Tabel 4.68 terlihat bahwa nilai *error* terkecil adalah pada sistem tereduksi total orde 3 dengan $error = 2{,}7420$ dengan waktu komputasi tercepat pada sistem tereduksi total. Berdasarkan Tabel 4.68 terlihat bahwa proses estimasi pada sistem tereduksi total lebih cepat daripada proses estimasi pada sistem awal dan sistem setimbang. Hal ini karena banyaknya variabel *state* yang dihitung, sehingga waktu komputasi pada sistem tereduksi total lebih cepat. Untuk tabel nilai *error* dan waktu komputasi setiap sistem yang lebih terperinci dapat dilihat pada Lampiran D.

Cara mencari *error* estimasi akan dituliskan dalam persamaan berikut:

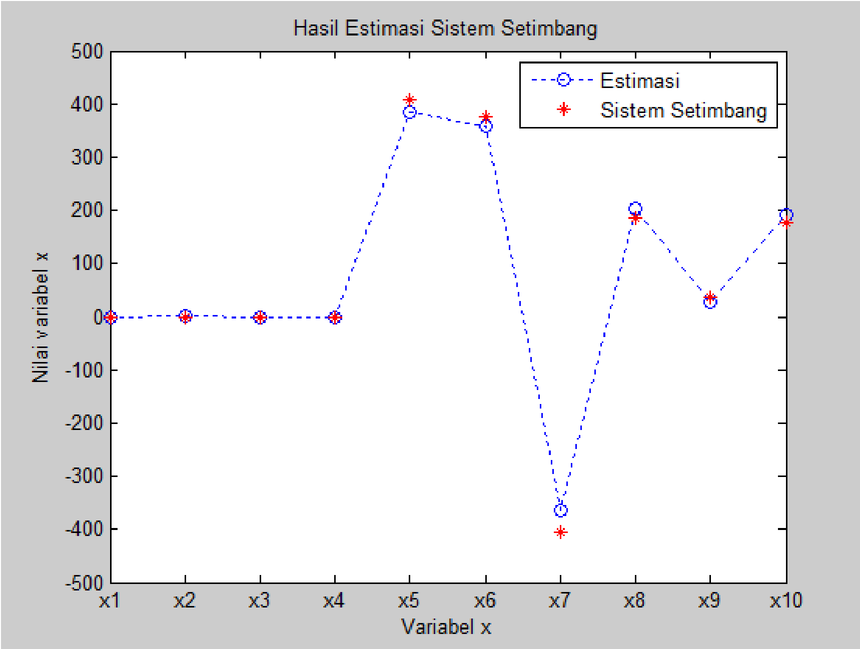
$$error = \|x - \hat{x}\|$$

dimana x adalah nilai sebenarnya dan $\hat{x}$ adalah nilai hasil estimasi menggunakan algoritma filter Kalman.

Hasil simulasi untuk estimasi dari (A, B, C, D) dan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ diberikan pada Gambar 4.36 dan Gambar 4.37.

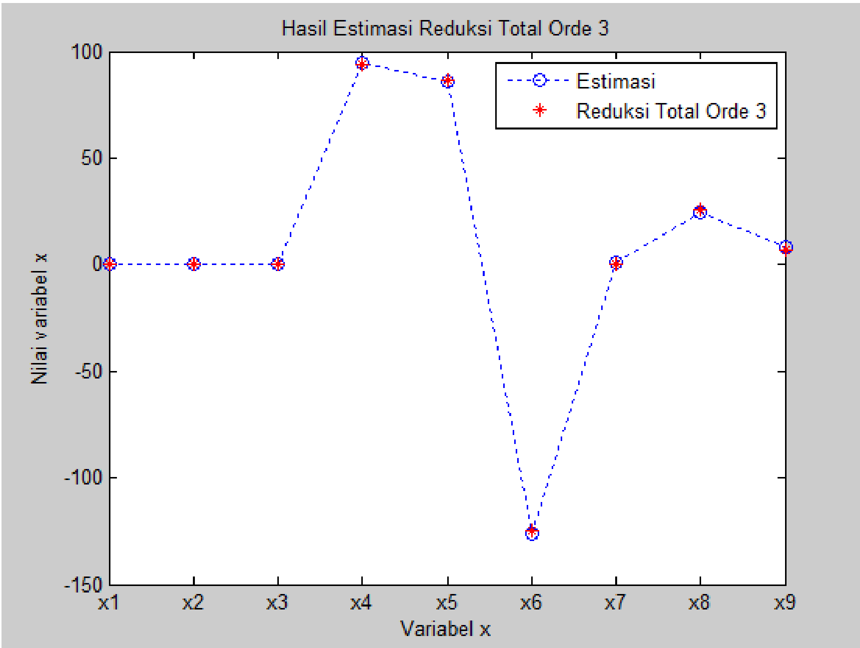


Gambar 4.36 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Awal

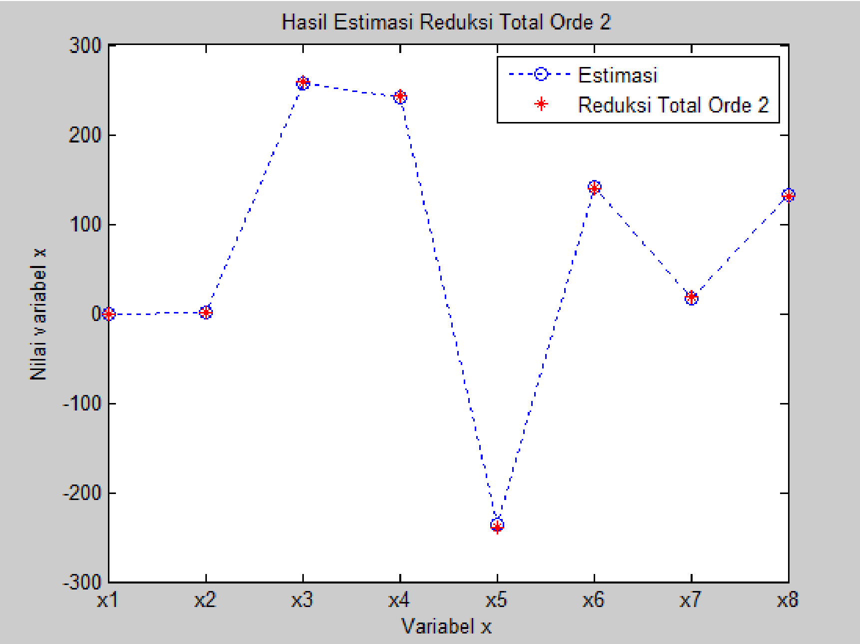


Gambar 4.37 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Setimbang

Gambar 4.36 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem awal. Sedangkan Gambar 4.37 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem setimbang. Pada Gambar 4.36 dan 4.37 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama.



Gambar 4.38 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 3



Gambar 4.39 Akurasi Hasil Estimasi pada Sistem Tereduksi Total Orde 2

Gambar 4.38 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 3. Gambar 4.39 menunjukkan grafik nilai sebenarnya dan grafik nilai estimasi untuk sistem tereduksi total orde 2. Pada Gambar 4.38 dan 4.39 terlihat bahwa grafik hasil estimasi dan grafik nilai sebenarnya memiliki performansi yang sama.

BAB V
PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan serta saran yang diberikan jika penelitian ini ingin dikembangkan.

5.1 Kesimpulan

Dari analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Konstruksi algoritma filter Kalman pada sistem waktu diskrit tereduksi yang tidak stabil dapat diperoleh dengan cara melakukan dekomposisi terlebih dahulu menjadi subsistem yang stabil dan subsistem yang tidak stabil. Jika pada subsistem yang stabil memenuhi sifat terekendali dan teramati, bisa dilakukan reduksi model pada subsistem yang stabil. Subsistem stabil yang tereduksi akan digabung dengan subsistem tidak stabil sehingga diperoleh sistem tereduksi total. Pengkonstruksian algoritma filter Kalman, diperoleh dari sistem tereduksi total yang ditambahkan dengan derau sehingga didapatkan sistem tereduksi total stokastik.
2. Berdasarkan hasil simulasi, kasus reduksi model yang dilakukan pada sistem yang memiliki matriks A seperti yang ditunjukkan dengan tipe sebagai berikut:
   a. Matriks A berukuran 20x20 dengan elemen sebarang dengan sifat tidak stabil, terkendali dan teramati. Pada matriks dengan elemen sebarang rata-rata *error* paling kecil adalah pada sistem tereduksi total orde 2 dengan nilai *error* 12,4541. Sedangkan untuk waktu komputasi paling cepat adalah pada sistem tereduksi total orde 3 dengan waktu 0.3284897. Sifat-sifat sistem tereduksi total dan sistem awal memiliki sifat yang sama yaitu tidak stabil, terkendali dan teramati.

b. Matriks A berukuran 20x20 dengan bentuk tridiagonal dengan sifat tidak stabil, terkendali dan teramati. Pada matriks dengan bentuk tridiagonal rata-rata *error* paling kecil adalah pada sistem tereduksi total orde 13 dengan nilai *error* 0,1296. Sedangkan untuk waktu komputasi paling cepat adalah pada sistem tereduksi total orde 8 dengan waktu 0.3220611. Sifat-sifat sistem tereduksi total dan sistem awal memiliki sifat yang sama yaitu tidak stabil, terkendali dan teramati.
c. Matriks A berukuran 10x10 dengan bentuk diagonal dengan sifat tidak stabil, terkendali dan teramati. Pada matriks dengan bentuk diagonal rata-rata *error* paling kecil adalah pada sistem tereduksi total orde 3 dengan nilai *error* 0,5784. Sedangkan untuk waktu komputasi paling cepat adalah pada sistem setimbang dengan waktu 0.2934213. Sifat-sifat sistem tereduksi total dan sistem awal memiliki sifat yang sama yaitu tidak stabil, terkendali dan teramati.
d. Matriks A berukuran 10x10 dengan bentuk segitiga atas dengan sifat tidak stabil, tidak terkendali dan tidak teramati. Pada matriks dengan bentuk segitiga atas rata-rata *error* paling kecil adalah pada sistem tereduksi total orde 3 dengan nilai *error* 0,6421. Sedangkan untuk waktu komputasi paling cepat adalah pada sistem tereduksi total orde 2 dengan waktu 0.2874577. Sifat-sifat sistem tereduksi total dan sistem awal memiliki sifat yang berbeda. Pada sistem tereduksi total sifat sistem adalah tidak stabil, tidak terkendali dan teramati.
e. Matriks A berukuran 10x10 dengan bentuk segitiga bawah dengan sifat tidak stabil, terkendali dan teramati. Pada matriks dengan bentuk segitiga bawah rata-rata *error* paling kecil adalah pada sistem tereduksi total orde 3 dengan nilai *error* 2,7420. Sedangkan untuk waktu komputasi paling cepat adalah pada sistem tereduksi total orde 2 dengan waktu 0.3170966. Sifat-sifat sistem tereduksi total dan sistem awal memiliki sifat yang sama yaitu tidak stabil, terkendali dan teramati.

Jadi dari semua tipe matriks A, matriks A yang mempunyai *error* paling kecil adalah matriks A dengan bentuk tridiagonal dengan nilai *error* 0,1296 pada sistem tereduksi total orde 13. Meskipun memiliki nilai error paling kecil, akan tetapi memiliki waktu komputasi yang cukup besar yaitu 0,3714621. Untuk waktu komputasi paling cepat dimiliki oleh matriks A dengan bentuk segitiga atas dengan waktu komputasi 0,2874577 pada sistem tereduksi total orde 2. Hasil yang didapatkan ini hanya berlaku pada matriks yang dikonstruksi pada Tesis ini saja.

5.2 Saran

Pada penelitian ini dibahas mengenai sistem awal yang memiliki matriks A dengan 5 tipe. Elemen-elemen pada matriks A tersebut dikonstruksi sendiri oleh penulis, sehingga hasil kesimpulan yang didapat hanya berlaku pada matriks A yang ada pada Tesis ini. Sehingga untuk penelitian selanjutnya, dapat dikembangkan dengan mengkonstruksi elemen-elemen matriks A dengan bentuk yang umum.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Arif, D.K, et al. (2014). *Construction of the Kalman Filter Algorithm on the Model Reduction.* International Journal Control and Automation (IJCA), Vol. 7, No.9, pp. 257-270.

[2] Weiland, S. dan Roordo, B., (2009). Optimal Hankel Norm Model Reduction by Truncation of Trajectories. Netherlands.

[3] Green M. dan Limebeer, D.J.N., (1995). *Linear Robust Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[4] Muscato, G., et al., (1997). Singular Perturbation Approximation of Bounded Real Balanced and Stochastically Balanced Transfer Matrices, *Int. J. Control*, 66(2), 253-269.

[5] E. Apriliani, Soetrisno and B.A. Sanjoyo, (2015). *Data Assimilation Method for Environmental Problem*. Indian Journal of Science and Technology, Vol.8(13)

[6] Asfihani, T., (2011). Penerapan Kendali Optimal dan Metode EKF-UI-WDF untuk Estimasi Panduan Peluru Kendali pada Penembakan Target. Tesis Program Pascasarjana. Jurusan Matematika FMIPA – ITS. Surabaya.

[7] Lewis, F.L., (1992). *Applied Optimal Control & Estimation,* Prentice-Hall International, Inc, New Jersey

[8] Kumar, D. Tiwari, J.P dan Nagar, S.K., (2011). *Reduction of Unstable Discrete Time Systems by Hankel Norm Approximation*. International Journal of Engineering Science and Technology, Vol.3, No.4

[9] Khasanah, I.N. (2016). *Analisis Reduksi Model pada Sistem Linier Waktu Diskrit Tak Stabil,* Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA ITS. Surabaya.

[10] Ogata, K., (1997). *Discrete-Time Control System*, second edition, Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.

[11] Zhou, K. dan Doyle, J.C., (1998). *Essentials of Robust Control*. Prentice-Hall, New Jersey.

[12] Nagar, S.K, et al. (2004). *An Algorithmic Approach for System Decomposition and Balanced Realized Model Reduction.* Journal of the Franklin Institute, Hal. 615–630.

[13] Gregoriadis, K.M., (1995). Optimal H_∞ Model Reduction via Linear Matrix inequalities: Continous and Discrete-Time Cases, *Elsevier*, System and Control Letter 26: 321-333

LAMPIRAN A

KASUS 1

- **Matriks Unitary U_d**

$$U_d = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
-0.1589 & -0.3556 & -0.2686 & -0.1173 & -0.1183 & -0.5780 & -0.1444 & 0.0237 & -0.0003 & 0.1085 & 0.2589 & 0.1497 & 0.3817 & 0.0912 & -0.2428 & 0.0142 & 0.1309 & 0.0126 & -0.0613 & 0.2399 \\
0.1650 & 0.0285 & 0.4114 & -0.6831 & 0.0420 & -0.0415 & 0.0911 & 0.0491 & -0.0657 & 0.0400 & 0.0761 & 0.1794 & -0.0076 & -0.0711 & 0.1249 & 0.3919 & 0.1322 & 0.1565 & 0.1987 & 0.1493 \\
-0.4130 & -0.2342 & -0.2674 & -0.1455 & 0.1291 & 0.2660 & 0.0013 & -0.2967 & 0.2532 & -0.1637 & -0.0024 & 0.1044 & -0.0599 & -0.0425 & 0.3478 & 0.2976 & 0.2600 & -0.1408 & -0.3195 & -0.0152 \\
-0.2185 & 0.2784 & 0.3707 & 0.1233 & -0.3514 & 0.0618 & 0.3413 & -0.1532 & 0.1086 & 0.3609 & 0.2800 & 0.0846 & 0.0696 & 0.2463 & -0.0206 & -0.0960 & 0.2469 & -0.2565 & -0.1539 & 0.0413 \\
0.0024 & 0.4576 & -0.5038 & 0.0243 & -0.3623 & 0.1049 & -0.0070 & -0.1270 & 0.0631 & 0.0016 & 0.1230 & 0.1787 & 0.0238 & -0.0647 & 0.2124 & 0.0554 & -0.0464 & 0.2832 & 0.3494 & 0.2633 \\
-0.1317 & 0.0090 & 0.1490 & -0.0958 & -0.3307 & -0.3166 & 0.0877 & -0.3144 & -0.2450 & -0.4043 & -0.2275 & -0.3467 & -0.2471 & -0.0364 & 0.0996 & -0.1305 & -0.0497 & -0.0401 & -0.1229 & 0.3620 \\
-0.2201 & -0.0624 & -0.1105 & -0.2988 & -0.0909 & -0.0779 & -0.1173 & -0.1996 & -0.2794 & 0.1557 & -0.0983 & 0.3750 & -0.3775 & 0.0379 & -0.0649 & -0.3874 & 0.0653 & -0.0315 & 0.1858 & -0.4332 \\
-0.0944 & -0.2195 & 0.2759 & 0.2092 & 0.0697 & 0.0331 & -0.3445 & -0.0308 & -0.0491 & 0.2411 & 0.2580 & 0.1127 & -0.2221 & 0.1207 & 0.3813 & -0.1328 & -0.2313 & 0.4402 & -0.1645 & 0.2374 \\
-0.0047 & 0.3560 & -0.1197 & -0.1501 & 0.1310 & -0.1328 & -0.3834 & 0.3227 & -0.2661 & 0.0642 & 0.0518 & -0.2383 & 0.0827 & 0.2387 & 0.4352 & -0.0636 & 0.2003 & -0.3313 & -0.0896 & -0.0303 \\
-0.4909 & 0.2655 & -0.0184 & 0.1810 & 0.2414 & -0.1388 & 0.0845 & 0.3029 & -0.1653 & -0.0678 & -0.0076 & 0.0786 & -0.3746 & 0.1430 & -0.3232 & 0.3782 & 0.0295 & 0.1450 & 0.0105 & 0.1025 \\
-0.0633 & -0.0488 & -0.1232 & -0.1501 & 0.2997 & 0.0069 & 0.5240 & 0.1344 & 0.0129 & -0.0599 & -0.2519 & 0.1570 & 0.1878 & 0.4625 & 0.2087 & -0.3346 & -0.1645 & 0.1274 & 0.0072 & 0.1833 \\
0.0220 & -0.2203 & -0.2544 & -0.1801 & -0.1148 & 0.1344 & 0.3652 & 0.2587 & -0.1457 & 0.0621 & 0.4714 & -0.4635 & -0.2326 & -0.0803 & 0.0108 & -0.0994 & 0.1155 & 0.2227 & -0.0712 & -0.1468 \\
-0.0170 & -0.1577 & -0.1315 & -0.0614 & -0.4054 & 0.1915 & -0.0061 & 0.1165 & -0.2953 & 0.4205 & -0.4552 & -0.0642 & 0.1042 & 0.1375 & -0.0185 & 0.3492 & -0.2252 & 0.0487 & -0.2398 & -0.0334 \\
-0.1656 & -0.1814 & 0.0353 & -0.0688 & -0.2382 & 0.0158 & -0.0234 & 0.5482 & 0.3945 & 0.0734 & -0.1441 & 0.1055 & -0.2541 & -0.2677 & 0.1014 & -0.1757 & -0.0901 & -0.3240 & 0.1541 & 0.2615 \\
-0.5363 & 0.0756 & 0.1732 & 0.0146 & 0.0730 & -0.1338 & 0.0824 & -0.0014 & -0.0206 & 0.1382 & -0.1045 & -0.2472 & 0.4155 & -0.4103 & 0.2115 & -0.0531 & -0.1175 & 0.1972 & 0.2256 & -0.2505 \\
0.1609 & 0.0654 & -0.1780 & 0.0704 & 0.3849 & -0.1265 & 0.2306 & -0.2059 & -0.2297 & 0.4744 & -0.0367 & 0.0449 & -0.1501 & -0.4497 & 0.0443 & -0.0213 & -0.0012 & -0.2262 & -0.1071 & 0.3202 \\
0.0857 & -0.1726 & 0.0569 & 0.2734 & -0.0321 & 0.0562 & -0.0065 & 0.0963 & -0.0968 & 0.0538 & -0.3418 & -0.0074 & 0.0145 & -0.0258 & 0.0645 & -0.0917 & 0.7798 & 0.2754 & 0.1769 & 0.1160 \\
0.1593 & 0.2822 & -0.0651 & -0.1300 & -0.0211 & -0.4056 & 0.0175 & 0.0292 & 0.4932 & 0.1612 & -0.2223 & -0.0582 & -0.1754 & -0.0454 & 0.0268 & -0.0374 & 0.0786 & 0.3368 & -0.4215 & -0.2313 \\
0.0551 & -0.2050 & -0.0497 & 0.1140 & 0.0707 & -0.2501 & 0.0470 & -0.2333 & 0.2578 & 0.2521 & -0.0438 & -0.3260 & -0.2315 & 0.3584 & 0.1599 & 0.2674 & -0.0612 & -0.1469 & 0.5132 & -0.0959 \\
-0.1791 & 0.1073 & -0.0231 & -0.3345 & 0.1760 & 0.3395 & -0.2984 & -0.1667 & 0.2014 & 0.2210 & -0.0939 & -0.3624 & 0.0262 & 0.1118 & -0.4173 & -0.2328 & 0.0483 & 0.0911 & 0.0539 & 0.3104
\end{array} \right)$$

Dengan demikian, dari tahap pertama transformasi sistem diperoleh, $G_t = \left[\frac{U_d{}^T A U_d}{C U_d}\middle|\frac{U_d{}^T B}{D}\right] = \left[\frac{A_t}{C_t}\middle|\frac{B_t}{D}\right]$ dengan:

$$A_t = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
0.1225 & -0.3358 & -0.0014 & 0.2930 & 0.7104 & -0.6466 & -0.1420 & 0.2973 & 0.5781 & -0.4791 & 0.5224 & -0.6847 & -1.1846 & -0.5161 & -0.9317 & -0.5902 & 0.1875 & -1.2173 & 0.1513 & -0.3925 \\
0.4963 & 0.0962 & -0.0528 & -0.0669 & -0.1638 & 0.1794 & 0.2514 & 0.5144 & 0.6794 & 0.6086 & -0.2117 & 0.5244 & 0.3172 & 0.4843 & -0.5154 & 0.3640 & 0.1273 & -0.6810 & 0.7070 & 0.5141 \\
0 & 0 & 0.5873 & 0.1331 & 0.0536 & -0.3161 & 0.5477 & 0.4871 & 0.3566 & 0.3457 & -0.3641 & -0.4369 & -0.3447 & 0.1073 & -0.2227 & -0.8234 & 0.3491 & -0.9092 & -0.6541 & 0.0387 \\
0 & 0 & 0 & -0.5906 & -0.0268 & 0.0762 & 0.1251 & 0.4431 & -0.4179 & -1.1701 & 0.4890 & -0.6430 & 0.1483 & -0.3850 & -0.2588 & 0.0340 & 0.3655 & 0.3026 & 0.0954 & -1.4282 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.4523 & -0.3757 & 0.1627 & 0.0602 & 0.2396 & -0.3532 & 0.2881 & -0.4662 & 0.1551 & -0.9347 & 0.3749 & 0.0566 & -0.1728 & -0.4294 & -0.0843 & 0.2020 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.6003 & -0.2852 & 0.1112 & -0.3421 & -0.3109 & -0.4197 & 0.3723 & -1.4230 & 0.5274 & -0.0646 & 0.7852 & -0.3432 & -0.2432 & -1.7632 & -1.4962 & 0.6339 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7124 & 0.5649 & 0.2698 & -0.4561 & 0.3784 & 0.3548 & -0.6264 & -0.8309 & 0.8058 & -0.1352 & 0.8492 & 0.3847 & 0.2484 & 0.2988 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6090 & 0.5919 & 0.3243 & 0.8388 & -0.3109 & 0.8531 & -0.0735 & 0.2110 & -0.9966 & 0.0428 & 0.0688 & -0.7747 & -1.0804 & 0.3682 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2722 & -0.1151 & 0.9400 & -0.2044 & 0.4264 & 0.4370 & -0.7432 & 0.1255 & -0.3466 & -0.7635 & -0.6406 & 0.7472 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8808 & -0.0987 & -0.4064 & -0.5228 & 0.3980 & -0.8374 & 1.9702 & 0.4496 & -0.1516 & 0.7056 & -0.4565 & 0.1414 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2614 & -0.8534 & -0.1051 & 0.2137 & 0.4938 & -0.5789 & -0.0661 & -0.6541 & 0.1914 & -0.1201 & 0.7738 & -0.0227 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2333 & -1.8265 & 0.1452 & -1.8091 & 0.8679 & -0.1523 & 1.5806 & -0.5409 & -0.7361 & 0.3336 & -1.9077 & -0.6834 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2756 & -0.0436 & 0.5801 & -0.2972 & -0.6110 & -0.6725 & -1.2020 & -0.4644 & 0.3217 & 0.4916 & -0.2156 & -0.4252 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3259 & 0.1347 & -0.1397 & 0.1498 & 0.5263 & -0.6724 & 0.1702 & 0.6900 & 1.2219 & 0.8451 & -0.9016 & -0.5554 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3033 & 1.7315 & -0.1340 & -0.2516 & 0.5364 & 0.7451 & -0.1705 & -0.7806 & -0.8464 & -1.2547 & 0.1394 & 2.0324 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2869 & 0.3192 & 1.3818 & 0.0787 & -0.2831 & -0.4532 & -0.2176 & 0.8406 & 0.0432 & 1.7673 & 0.1435 & -1.9410 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0016 & 0.2687 & 0.2584 & -0.1674 & 0.1805 & 0.4263 & 0.2702 & -0.4695 & -1.3191 & -0.4401 & -0.5881 & 1.6250 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5910 & 0.8916 & -0.9667 & 0.9224 & -0.0407 & 0.6346 & -0.9447 & -0.7273 & -0.4854 & -1.0378 & -1.8211 & 1.3183 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4806 & -0.1310 & 0.0852 & -0.1908 & 0.1190 & -0.2348 & 0.7944 & 0.2369 & -0.4000 & -1.0992 & -1.5953 & -0.3908 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7929 & 0.0657 & -0.2895 & -0.3282 & -0.1369 & 0.0820 & 0.4529 & -0.8177 & 0.0627 & -0.5841 & -2.9699 & 1.3239
\end{array} \right)$$

$$B_t = \begin{pmatrix} 1.0851 \\ 0.6025 \\ -0.5891 \\ 0.4347 \\ -1.2687 \\ -0.1694 \\ -1.0847 \\ 1.0289 \\ -0.8194 \\ 0.3261 \\ 0.1376 \\ -0.0446 \\ 0.6724 \\ -0.0292 \\ -0.4121 \\ 0.4734 \\ 0.8574 \\ 0.2833 \\ -0.4768 \\ 1.1670 \end{pmatrix}$$

$$C_t = \begin{pmatrix} 0.0464 & -1.6808 & 0.9586 & -0.4716 & -1.5915 & -2.0874 & 0.1431 & 1.2963 & 0.5020 & -0.9003 & 1.4291 & -1.7497 & -0.1879 & -0.4503 & 0.4516 & 0.9227 & 0.3160 & 0.7873 & -1.4192 & 1.1166 \end{pmatrix}$$

$$D_t = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriks Transformasi W_d**

$$W_d = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9904 & -0.1804 & -2.1568 & -1.7731 & 3.1581 & -2.9873 & -2.4998 & 1.8663 & -2.0179 & -0.4707 & 0.2481 & 0.6270 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.2969 & 0.2424 & 1.0119 & 0.5728 & -2.2307 & 1.0325 & 0.5760 & -0.3814 & -0.2173 & 0.6733 & -0.0040 & -0.8478 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8139 & -1.0424 & 0.7969 & 0.8151 & 1.9624 & -0.2533 & -0.2700 & -0.3084 & -0.3198 & 0.0305 & 0.1640 & 0.5366 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7719 & -0.3010 & 0.3124 & 0.7850 & -0.2029 & 0.5060 & 0.0254 & -0.0687 & -0.0281 & 0.0516 & 0.1926 & -0.3719 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1.6657 & 0.0012 & 1.1531 & 1.5620 & 1.3868 & 2.4630 & 0.9886 & -1.4778 & 1.4779 & 0.3603 & 0.9534 & -0.6894 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1.7421 & -0.8941 & -1.0263 & -0.7820 & 2.1080 & -1.6218 & -0.9000 & 0.2985 & -0.2925 & -1.2985 & 0.7770 & 0.9081 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1.0627 & -0.1954 & 1.9772 & 0.4178 & 0.3442 & -0.0847 & -0.1425 & -0.1737 & 0.4932 & -0.5536 & -0.1124 & 1.3307 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.8184 & 0.3423 & -1.3329 & -0.7981 & 0.1207 & 0.5643 & -0.9381 & 1.6733 & -0.9128 & 0.9438 & 0.1667 & -0.6430 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh sistem sebagai berikut: $G_d = \left[\begin{array}{c|c} \frac{{W_d}^{-1} A_t W_d}{C_t W_d} & \frac{{W_d}^{-1} B_t}{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A_d}{C_d} & \frac{B_d}{D} \end{array}\right]$

dengan:

$$
A_d = \begin{pmatrix}
0.1225 & -0.3358 & -0.0014 & 0.2930 & 0.7104 & -0.6466 & -0.1420 & 0.2973 & 1.3637 & 0.0543 & -3.2334 & -1.6300 & 8.3684 & 4.6506 & 5.7853 & -3.9665 & -2.7524 & -6.5279 & -3.6687 & 9.4600 \\
0.4963 & 0.0962 & -0.0528 & -0.0669 & -0.1638 & 0.1794 & 0.2514 & 0.5144 & 0.4762 & 1.2986 & -2.2820 & -1.0562 & -2.9917 & -3.5832 & -3.1554 & 1.5533 & -0.0573 & 3.2005 & 2.3800 & -2.7630 \\
0 & 0 & 0.5873 & 0.1331 & 0.0536 & -0.3161 & 0.5477 & 0.4871 & 2.1200 & 2.9261 & -0.7883 & 1.9461 & 0.9060 & 1.5783 & 2.8784 & 2.2678 & -0.1858 & 0.7230 & 2.2763 & 0.9874 \\
0 & 0 & 0 & -0.5906 & -0.0268 & 0.0762 & 0.1251 & 0.4431 & -0.2371 & 0.7384 & -0.8572 & -0.4177 & -1.0469 & -0.7145 & -1.1247 & 0.8330 & 0.2771 & 0.9511 & 1.3871 & -0.6749 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.4523 & -0.3757 & 0.1627 & 0.0602 & -0.5801 & 1.9403 & 0.1226 & 2.3403 & -5.6940 & -0.6366 & -0.3803 & 3.1998 & 0.7944 & 3.5090 & 5.9323 & -4.3117 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.6003 & -0.2852 & 0.1112 & -0.3421 & 1.1227 & 0.1562 & 0.3477 & 0.2530 & 5.7804 & 3.1631 & 4.1207 & -1.7598 & -0.2572 & -3.5369 & -2.9625 & 4.8919 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7124 & 0.5649 & 0.9893 & 2.7390 & -0.1557 & 1.7510 & -1.6612 & 0.2153 & 0.0161 & 3.3569 & 1.0859 & 1.8980 & 3.2182 & -1.3781 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6090 & 0.5919 & 0.2608 & -0.8196 & -4.4395 & -2.3054 & 1.5029 & 1.4324 & 1.1924 & -3.2006 & -3.0025 & -3.6744 & -0.7603 & 4.6163 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2722 & -0.1151 & 0.9400 & -0.2044 & 0.4264 & 0.4370 & -0.7432 & 0.1255 & -0.3466 & -0.7635 & -0.6406 & 0.7472 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8808 & -0.0987 & -0.4064 & -0.5228 & 0.3980 & -0.8374 & 1.9702 & 0.4496 & -0.1516 & 0.7056 & -0.4565 & 0.1414 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2614 & -0.8534 & -0.1051 & 0.2137 & 0.4938 & -0.5789 & -0.0661 & -0.6541 & 0.1914 & -0.1201 & 0.7738 & -0.0227 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2333 & -1.8265 & 0.1452 & -1.8091 & 0.8679 & -0.1523 & 1.5806 & -0.5409 & -0.7361 & 0.3336 & -1.9077 & -0.6834 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2756 & -0.0436 & 0.5801 & -0.2972 & -0.6110 & -0.6725 & -1.2020 & -0.4644 & 0.3217 & 0.4916 & -0.2156 & -0.4252 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3259 & 0.1347 & -0.1397 & 0.1498 & 0.5263 & -0.6724 & 0.1702 & 0.6900 & 1.2219 & 0.8451 & -0.9016 & -0.5554 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3033 & 1.7315 & -0.1340 & -0.2516 & 0.5364 & 0.7451 & -0.1705 & -0.7806 & -0.8464 & -1.2547 & 0.1394 & 2.0324 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2869 & 0.3192 & 1.3818 & 0.0787 & -0.2831 & -0.4532 & -0.2176 & 0.8406 & 0.0432 & 1.7673 & 0.1435 & -1.9410 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0016 & 0.2687 & 0.2584 & -0.1674 & 0.1805 & 0.4263 & 0.2702 & -0.4695 & -1.3191 & -0.4401 & -0.5881 & 1.6250 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5910 & 0.8916 & -0.9667 & 0.9224 & -0.0407 & 0.6346 & -0.9447 & -0.7273 & -0.4854 & -1.0378 & -1.8211 & 1.3183 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4806 & -0.1310 & 0.0852 & -0.1908 & 0.1190 & -0.2348 & 0.7944 & 0.2369 & -0.4000 & -1.0992 & -1.5953 & -0.3908 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7929 & 0.0657 & -0.2895 & -0.3282 & -0.1369 & 0.0820 & 0.4529 & -0.8177 & 0.0627 & -0.5841 & -2.9699 & 1.3239
\end{pmatrix}
$$

$$
B_d = \begin{pmatrix}
-2.3242 \\ 6.0424 \\ -1.2303 \\ 1.8869 \\ 0.1429 \\ -3.2467 \\ -2.4865 \\ 1.8374 \\ -0.8194 \\ 0.3261 \\ 0.1376 \\ -0.0446 \\ 0.6724 \\ -0.0292 \\ -0.4121 \\ 0.4734 \\ 0.8574 \\ 0.2833 \\ -0.4768 \\ 1.1670
\end{pmatrix}
\qquad
D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}
$$

$$
C_d = \begin{pmatrix} 0.0464 & -1.6808 & 0.9586 & -0.4716 & -1.5915 & -2.0874 & 0.1431 & 1.2963 & -2.4704 & 0.1067 & -0.8926 & -4.2117 & -0.7167 & -2.6207 & -1.8342 & 5.2601 & -2.5597 & 2.9200 & -4.2737 & 1.8189 \end{pmatrix}
$$

- **Subsistem tidak Stabil A_u**

$$
A_u = \begin{pmatrix}
0.2722 & -0.1151 & 0.9400 & -0.2044 & 0.4264 & 0.4370 & -0.7432 & 0.1255 & -0.3466 & -0.7635 & -0.6406 & 0.7472 \\
0.8808 & -0.0987 & -0.4064 & -0.5228 & 0.3980 & -0.8374 & 1.9702 & 0.4496 & -0.1516 & 0.7056 & -0.4565 & 0.1414 \\
-0.2614 & -0.8534 & -0.1051 & 0.2137 & 0.4938 & -0.5789 & -0.0661 & -0.6541 & 0.1914 & -0.1201 & 0.7738 & -0.0227 \\
0.2333 & -1.8265 & 0.1452 & -1.8091 & 0.8679 & -0.1523 & 1.5806 & -0.5409 & -0.7361 & 0.3336 & -1.9077 & -0.6834 \\
0.2756 & -0.0436 & 0.5801 & -0.2972 & -0.6110 & -0.6725 & -1.2020 & -0.4644 & 0.3217 & 0.4916 & -0.2156 & -0.4252 \\
-0.3259 & 0.1347 & -0.1397 & 0.1498 & 0.5263 & -0.6724 & 0.1702 & 0.6900 & 1.2219 & 0.8451 & -0.9016 & -0.5554 \\
0.3033 & 1.7315 & -0.1340 & -0.2516 & 0.5364 & 0.7451 & -0.1705 & -0.7806 & -0.8464 & -1.2547 & 0.1394 & 2.0324 \\
-0.2869 & 0.3192 & 1.3818 & 0.0787 & -0.2831 & -0.4532 & -0.2176 & 0.8406 & 0.0432 & 1.7673 & 0.1435 & -1.9410 \\
-0.0016 & 0.2687 & 0.2584 & -0.1674 & 0.1805 & 0.4263 & 0.2702 & -0.4695 & -1.3191 & -0.4401 & -0.5881 & 1.6250 \\
0.5910 & 0.8916 & -0.9667 & 0.9224 & -0.0407 & 0.6346 & -0.9447 & -0.7273 & -0.4854 & -1.0378 & -1.8211 & 1.3183 \\
0.4806 & -0.1310 & 0.0852 & -0.1908 & 0.1190 & -0.2348 & 0.7944 & 0.2369 & -0.4000 & -1.0992 & -1.5953 & -0.3908 \\
0.7929 & 0.0657 & -0.2895 & -0.3282 & -0.1369 & 0.0820 & 0.4529 & -0.8177 & 0.0627 & -0.5841 & -2.9699 & 1.3239
\end{pmatrix}
$$

$$
B_u = \begin{pmatrix} -0.8194 \\ 0.3261 \\ 0.1376 \\ -0.0446 \\ 0.6724 \\ -0.0292 \\ -0.4121 \\ 0.4734 \\ 0.8574 \\ 0.2833 \\ -0.4768 \\ 1.1670 \end{pmatrix}
$$

$$
C_u = \begin{pmatrix} -2.4704 & 0.1067 & -0.8926 & -4.2117 & -0.7167 & -2.6207 & -1.8342 & 5.2601 & -2.5597 & 2.9200 & -4.2737 & 1.8189 \end{pmatrix}
$$

$$
D_u = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}
$$

- **Sistem Tereduksi Total Orde 7**

$$
A_{r7} = \left(\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrr}
-0.1145 & 0.5870 & -0.3106 & 0.0621 & -0.1434 & 0.0589 & -0.0086 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5870 & 0.5913 & -0.3433 & 0.0164 & -0.0915 & 0.0451 & -0.0055 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.3106 & 0.3433 & 0.5647 & 0.3626 & -0.2669 & 0.0653 & -0.0146 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0621 & 0.0164 & -0.3626 & 0.8675 & 0.1705 & -0.0807 & 0.0090 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.1434 & 0.0915 & -0.2669 & -0.1705 & -0.6239 & -0.3355 & 0.0042 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0589 & 0.0451 & -0.0653 & -0.0807 & 0.3355 & -0.1166 & -0.4487 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0086 & -0.0055 & 0.0146 & 0.0090 & -0.0042 & -0.4487 & -0.0715 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2722 & -0.1151 & 0.9400 & -0.2044 & 0.4264 & 0.4370 & -0.7432 & 0.1255 & -0.3466 & -0.7635 & -0.6406 & 0.7472 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8808 & -0.0987 & -0.4064 & -0.5228 & 0.3980 & -0.8374 & 1.9702 & 0.4496 & -0.1516 & 0.7056 & -0.4565 & 0.1414 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2614 & -0.8534 & -0.1051 & 0.2137 & 0.4938 & -0.5789 & -0.0661 & -0.6541 & 0.1914 & -0.1201 & 0.7738 & -0.0227 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2333 & -1.8265 & 0.1452 & -1.8091 & 0.8679 & -0.1523 & 1.5806 & -0.5409 & -0.7361 & 0.3336 & -1.9077 & -0.6834 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2756 & -0.0436 & 0.5801 & -0.2972 & -0.6110 & -0.6725 & -1.2020 & -0.4644 & 0.3217 & 0.4916 & -0.2156 & -0.4252 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3259 & 0.1347 & -0.1397 & 0.1498 & 0.5263 & -0.6724 & 0.1702 & 0.6900 & 1.2219 & 0.8451 & -0.9016 & -0.5554 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3033 & 1.7315 & -0.1340 & -0.2516 & 0.5364 & 0.7451 & -0.1705 & -0.7806 & -0.8464 & -1.2547 & 0.1394 & 2.0324 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2869 & 0.3192 & 1.3818 & 0.0787 & -0.2831 & -0.4532 & -0.2176 & 0.8406 & 0.0432 & 1.7673 & 0.1435 & -1.9410 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0016 & 0.2687 & 0.2584 & -0.1674 & 0.1805 & 0.4263 & 0.2702 & -0.4695 & -1.3191 & -0.4401 & -0.5881 & 1.6250 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5910 & 0.8916 & -0.9667 & 0.9224 & -0.0407 & 0.6346 & -0.9447 & -0.7273 & -0.4854 & -1.0378 & -1.8211 & 1.3183 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4806 & -0.1310 & 0.0852 & -0.1908 & 0.1190 & -0.2348 & 0.7944 & 0.2369 & -0.4000 & -1.0992 & -1.5953 & -0.3908 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7929 & 0.0657 & -0.2895 & -0.3282 & -0.1369 & 0.0820 & 0.4529 & -0.8177 & 0.0627 & -0.5841 & -2.9699 & 1.3239
\end{array}\right)
$$

$$
B_{r7} = \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \\ 0.6386 \\ -0.1976 \\ -0.0486 \\ 0.0433 \\ 0.0021 \\ -0.8194 \\ 0.3261 \\ 0.1376 \\ -0.0446 \\ 0.6724 \\ -0.0292 \\ -0.4121 \\ 0.4734 \\ 0.8574 \\ 0.2833 \\ -0.4768 \\ 1.1670 \end{pmatrix}
$$

$$C_{r7} = \begin{pmatrix} -2.0877 & 0.9851 & -0.6386 & -0.1976 & 0.0486 & 0.0433 & 0.0021 & -2.4704 & 0.1067 & -0.8926 & -4.2117 & -0.7167 & -2.6207 & -1.8342 & 5.2601 & -2.5597 & 2.9200 & -4.2737 & 1.8189 \end{pmatrix}$$

$$D_{r7} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- ## Sistem Tereduksi Total Orde 6

$$A_{r6} = \begin{pmatrix}
-0.1145 & -0.5870 & -0.3106 & 0.0621 & -0.1434 & 0.0589 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5870 & 0.5913 & -0.3433 & 0.0164 & -0.0915 & 0.0451 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.3106 & 0.3433 & 0.5647 & 0.3626 & -0.2669 & 0.0653 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0621 & 0.0164 & -0.3626 & 0.8675 & 0.1705 & -0.0807 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.1434 & 0.0915 & -0.2669 & -0.1705 & -0.6239 & -0.3355 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0589 & 0.0451 & -0.0653 & -0.0807 & 0.3355 & -0.1166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2722 & -0.1151 & 0.9400 & -0.2044 & 0.4264 & 0.4370 & -0.7432 & 0.1255 & -0.3466 & -0.7635 & -0.6406 & 0.7472 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8808 & -0.0987 & -0.4064 & -0.5228 & 0.3980 & -0.8374 & 1.9702 & 0.4496 & -0.1516 & 0.7056 & -0.4565 & 0.1414 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2614 & -0.8534 & -0.1051 & 0.2137 & 0.4938 & -0.5789 & -0.0661 & -0.6541 & 0.1914 & -0.1201 & 0.7738 & -0.0227 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2333 & -1.8265 & 0.1452 & -1.8091 & 0.8679 & -0.1523 & 1.5806 & -0.5409 & -0.7361 & 0.3336 & -1.9077 & -0.6834 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2756 & -0.0436 & 0.5801 & -0.2972 & -0.6110 & -0.6725 & -1.2020 & -0.4644 & 0.3217 & 0.4916 & -0.2156 & -0.4252 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3259 & 0.1347 & -0.1397 & 0.1498 & 0.5263 & -0.6724 & 0.1702 & 0.6900 & 1.2219 & 0.8451 & -0.9016 & -0.5554 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3033 & 1.7315 & -0.1340 & -0.2516 & 0.5364 & 0.7451 & -0.1705 & -0.7806 & -0.8464 & -1.2547 & 0.1394 & 2.0324 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2869 & 0.3192 & 1.3818 & 0.0787 & -0.2831 & -0.4532 & -0.2176 & 0.8406 & 0.0432 & 1.7673 & 0.1435 & -1.9410 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0016 & 0.2687 & 0.2584 & -0.1674 & 0.1805 & 0.4263 & 0.2702 & -0.4695 & -1.3191 & -0.4401 & -0.5881 & 1.6250 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5910 & 0.8916 & -0.9667 & 0.9224 & -0.0407 & 0.6346 & -0.9447 & -0.7273 & -0.4854 & -1.0378 & -1.8211 & 1.3183 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4806 & -0.1310 & 0.0852 & -0.1908 & 0.1190 & -0.2348 & 0.7944 & 0.2369 & -0.4000 & -1.0992 & -1.5953 & -0.3908 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7929 & 0.0657 & -0.2895 & -0.3282 & -0.1369 & 0.0820 & 0.4529 & -0.8177 & 0.0627 & -0.5841 & -2.9699 & 1.3239
\end{pmatrix}$$

$$B_{r6} = \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \\ 0.6386 \\ -0.1976 \\ -0.0486 \\ 0.0433 \\ -0.8194 \\ 0.3261 \\ 0.1376 \\ -0.0446 \\ 0.6724 \\ -0.0292 \\ -0.4121 \\ 0.4734 \\ 0.8574 \\ 0.2833 \\ -0.4768 \\ 1.1670 \end{pmatrix}$$

$$C_{r6} = \begin{pmatrix} -2.0877 & 0.9851 & -0.6386 & -0.1976 & 0.0486 & 0.0433 & -2.4704 & 0.1067 & -0.8926 & -4.2117 & -0.7167 & -2.6207 & -1.8342 & 5.2601 & -2.5597 & 2.9200 & -4.2737 & 1.8189 \end{pmatrix}$$

$$D_{r6} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- ## Sistem Tereduksi Total Orde 5

$$A_{r5} = \begin{pmatrix}
-0.1145 & -0.5870 & -0.3106 & 0.0621 & -0.1434 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5870 & 0.5913 & -0.3433 & 0.0164 & -0.0915 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.3106 & 0.3433 & 0.5647 & 0.3626 & -0.2669 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0621 & 0.0164 & -0.3626 & 0.8675 & 0.1705 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.1434 & 0.0915 & -0.2669 & -0.1705 & -0.6239 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2722 & -0.1151 & 0.9400 & -0.2044 & 0.4264 & 0.4370 & -0.7432 & 0.1255 & -0.3466 & -0.7635 & -0.6406 & 0.7472 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8808 & -0.0987 & -0.4064 & -0.5228 & 0.3980 & -0.8374 & 1.9702 & 0.4496 & -0.1516 & 0.7056 & -0.4565 & 0.1414 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2614 & -0.8534 & -0.1051 & 0.2137 & 0.4938 & -0.5789 & -0.0661 & -0.6541 & 0.1914 & -0.1201 & 0.7738 & -0.0227 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2333 & -1.8265 & 0.1452 & -1.8091 & 0.8679 & -0.1523 & 1.5806 & -0.5409 & -0.7361 & 0.3336 & -1.9077 & -0.6834 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2756 & -0.0436 & 0.5801 & -0.2972 & -0.6110 & -0.6725 & -1.2020 & -0.4644 & 0.3217 & 0.4916 & -0.2156 & -0.4252 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3259 & 0.1347 & -0.1397 & 0.1498 & 0.5263 & -0.6724 & 0.1702 & 0.6900 & 1.2219 & 0.8451 & -0.9016 & -0.5554 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3033 & 1.7315 & -0.1340 & -0.2516 & 0.5364 & 0.7451 & -0.1705 & -0.7806 & -0.8464 & -1.2547 & 0.1394 & 2.0324 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2869 & 0.3192 & 1.3818 & 0.0787 & -0.2831 & -0.4532 & -0.2176 & 0.8406 & 0.0432 & 1.7673 & 0.1435 & -1.9410 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0016 & 0.2687 & 0.2584 & -0.1674 & 0.1805 & 0.4263 & 0.2702 & -0.4695 & -1.3191 & -0.4401 & -0.5881 & 1.6250 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5910 & 0.8916 & -0.9667 & 0.9224 & -0.0407 & 0.6346 & -0.9447 & -0.7273 & -0.4854 & -1.0378 & -1.8211 & 1.3183 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4806 & -0.1310 & 0.0852 & -0.1908 & 0.1190 & -0.2348 & 0.7944 & 0.2369 & -0.4000 & -1.0992 & -1.5953 & -0.3908 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7929 & 0.0657 & -0.2895 & -0.3282 & -0.1369 & 0.0820 & 0.4529 & -0.8177 & 0.0627 & -0.5841 & -2.9699 & 1.3239
\end{pmatrix}$$

$$B_{r5} = \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \\ 0.6386 \\ -0.1976 \\ -0.0486 \\ -0.8194 \\ 0.3261 \\ 0.1376 \\ -0.0446 \\ 0.6724 \\ -0.0292 \\ -0.4121 \\ 0.4734 \\ 0.8574 \\ 0.2833 \\ -0.4768 \\ 1.1670 \end{pmatrix}$$

$$C_{r5} = \begin{pmatrix} -2.0877 & 0.9851 & -0.6386 & -0.1976 & 0.0486 & -2.4704 & 0.1067 & -0.8926 & -4.2117 & -0.7167 & -2.6207 & -1.8342 & 5.2601 & -2.5597 & 2.9200 & -4.2737 & 1.8189 \end{pmatrix}$$

$$D_{r5} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Sistem Tereduksi Total Orde 4**

$$A_{r4} = \begin{pmatrix}
-0.1145 & -0.5870 & -0.3106 & -0.0621 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5870 & 0.5913 & -0.3433 & 0.0164 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.3106 & 0.3433 & 0.5647 & 0.3626 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0621 & 0.0164 & -0.3626 & 0.8675 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.2722 & -0.1151 & 0.9400 & -0.2044 & 0.4264 & 0.4370 & -0.7432 & 0.1255 & -0.3466 & -0.7635 & -0.6406 & 0.7472 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.8808 & -0.0987 & -0.4064 & -0.5228 & 0.3980 & -0.8374 & 1.9702 & 0.4496 & -0.1516 & 0.7056 & -0.4565 & 0.1414 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.2614 & -0.8534 & -0.1051 & 0.2137 & 0.4938 & -0.5789 & -0.0661 & -0.6541 & 0.1914 & -0.1201 & 0.7738 & -0.0227 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.2333 & -1.8265 & 0.1452 & -1.8091 & 0.8679 & -0.1523 & 1.5806 & -0.5409 & -0.7361 & 0.3336 & -1.9077 & -0.6834 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.2756 & -0.0436 & 0.5801 & -0.2972 & -0.6110 & -0.6725 & -1.2020 & -0.4644 & 0.3217 & 0.4916 & -0.2156 & -0.4252 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.3259 & 0.1347 & -0.1397 & 0.1498 & 0.5263 & -0.6724 & 0.1702 & 0.6900 & 1.2219 & 0.8451 & -0.9016 & -0.5554 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.3033 & 1.7315 & -0.1340 & -0.2516 & 0.5364 & 0.7451 & -0.1705 & -0.7806 & -0.8464 & -1.2547 & 0.1394 & 2.0324 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.2869 & 0.3192 & 1.3818 & 0.0787 & -0.2831 & -0.4532 & -0.2176 & 0.8406 & 0.0432 & 1.7673 & 0.1435 & -1.9410 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.0016 & 0.2687 & 0.2584 & -0.1674 & 0.1805 & 0.4263 & 0.2702 & -0.4695 & -1.3191 & -0.4401 & -0.5881 & 1.6250 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.5910 & 0.8916 & -0.9667 & 0.9224 & -0.0407 & 0.6346 & -0.9447 & -0.7273 & -0.4854 & -1.0378 & -1.8211 & 1.3183 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.4806 & -0.1310 & 0.0852 & -0.1908 & 0.1190 & -0.2348 & 0.7944 & 0.2369 & -0.4000 & -1.0992 & -1.5953 & -0.3908 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.7929 & 0.0657 & -0.2895 & -0.3282 & -0.1369 & 0.0820 & 0.4529 & -0.8177 & 0.0627 & -0.5841 & -2.9699 & 1.3239
\end{pmatrix}$$

$$B_{r4} = \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \\ 0.6386 \\ -0.1976 \\ -0.8194 \\ 0.3261 \\ 0.1376 \\ -0.0446 \\ 0.6724 \\ -0.0292 \\ -0.4121 \\ 0.4734 \\ 0.8574 \\ 0.2833 \\ -0.4768 \\ 1.1670 \end{pmatrix}$$

$$C_{r4} = \begin{pmatrix} -2.0877 & 0.9851 & -0.6386 & -0.1976 & -2.4704 & 0.1067 & -0.8926 & -4.2117 & -0.7167 & -2.6207 & -1.8342 & 5.2601 & -2.5597 & 2.9200 & -4.2737 & 1.8189 \end{pmatrix}$$

$$D_{r4} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Sistem Tereduksi Total Orde 3**

$$A_{r3} = \begin{pmatrix}
-0.1145 & -0.5870 & -0.3106 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5870 & 0.5913 & -0.3433 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.3106 & 0.3433 & 0.5647 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.2722 & -0.1151 & 0.9400 & -0.2044 & 0.4264 & 0.4370 & -0.7432 & 0.1255 & -0.3466 & -0.7635 & -0.6406 & 0.7472 \\
0 & 0 & 0 & 0.8808 & -0.0987 & -0.4064 & -0.5228 & 0.3980 & -0.8374 & 1.9702 & 0.4496 & -0.1516 & 0.7056 & -0.4565 & 0.1414 \\
0 & 0 & 0 & -0.2614 & -0.8534 & -0.1051 & 0.2137 & 0.4938 & -0.5789 & -0.0661 & -0.6541 & 0.1914 & -0.1201 & 0.7738 & -0.0227 \\
0 & 0 & 0 & 0.2333 & -1.8265 & 0.1452 & -1.8091 & 0.8679 & -0.1523 & 1.5806 & -0.5409 & -0.7361 & 0.3336 & -1.9077 & -0.6834 \\
0 & 0 & 0 & 0.2756 & -0.0436 & 0.5801 & -0.2972 & -0.6110 & -0.6725 & -1.2020 & -0.4644 & 0.3217 & 0.4916 & -0.2156 & -0.4252 \\
0 & 0 & 0 & -0.3259 & 0.1347 & -0.1397 & 0.1498 & 0.5263 & -0.6724 & 0.1702 & 0.6900 & 1.2219 & 0.8451 & -0.9016 & -0.5554 \\
0 & 0 & 0 & 0.3033 & 1.7315 & -0.1340 & -0.2516 & 0.5364 & 0.7451 & -0.1705 & -0.7806 & -0.8464 & -1.2547 & 0.1394 & 2.0324 \\
0 & 0 & 0 & -0.2869 & 0.3192 & 1.3818 & 0.0787 & -0.2831 & -0.4532 & -0.2176 & 0.8406 & 0.0432 & 1.7673 & 0.1435 & -1.9410 \\
0 & 0 & 0 & -0.0016 & 0.2687 & 0.2584 & -0.1674 & 0.1805 & 0.4263 & 0.2702 & -0.4695 & -1.3191 & -0.4401 & -0.5881 & 1.6250 \\
0 & 0 & 0 & 0.5910 & 0.8916 & -0.9667 & 0.9224 & -0.0407 & 0.6346 & -0.9447 & -0.7273 & -0.4854 & -1.0378 & -1.8211 & 1.3183 \\
0 & 0 & 0 & 0.4806 & -0.1310 & 0.0852 & -0.1908 & 0.1190 & -0.2348 & 0.7944 & 0.2369 & -0.4000 & -1.0992 & -1.5953 & -0.3908 \\
0 & 0 & 0 & 0.7929 & 0.0657 & -0.2895 & -0.3282 & -0.1369 & 0.0820 & 0.4529 & -0.8177 & 0.0627 & -0.5841 & -2.9699 & 1.3239
\end{pmatrix}$$

$$B_{r3} = \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \\ 0.6386 \\ -0.8194 \\ 0.3261 \\ 0.1376 \\ -0.0446 \\ 0.6724 \\ -0.0292 \\ -0.4121 \\ 0.4734 \\ 0.8574 \\ 0.2833 \\ -0.4768 \\ 1.1670 \end{pmatrix}$$

$$C_{r3} = \begin{pmatrix} -2.0877 & 0.9851 & -0.6386 & -2.4704 & 0.1067 & -0.8926 & -4.2117 & -0.7167 & -2.6207 & -1.8342 & 5.2601 & -2.5597 & 2.9200 & -4.2737 & 1.8189 \end{pmatrix}$$

$$D_{r3} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Sistem Tereduksi Total Orde 2**

$$A_{r2} = \begin{pmatrix}
-0.1145 & -0.5870 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5870 & 0.5913 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.2722 & -0.1151 & 0.9400 & -0.2044 & 0.4264 & 0.4370 & -0.7432 & 0.1255 & -0.3466 & -0.7635 & -0.6406 & 0.7472 \\
0 & 0 & 0.8808 & -0.0987 & -0.4064 & -0.5228 & 0.3980 & -0.8374 & 1.9702 & 0.4496 & -0.1516 & 0.7056 & -0.4565 & 0.1414 \\
0 & 0 & -0.2614 & -0.8534 & -0.1051 & 0.2137 & 0.4938 & -0.5789 & -0.0661 & -0.6541 & 0.1914 & -0.1201 & 0.7738 & -0.0227 \\
0 & 0 & 0.2333 & -1.8265 & 0.1452 & -1.8091 & 0.8679 & -0.1523 & 1.5806 & -0.5409 & -0.7361 & 0.3336 & -1.9077 & -0.6834 \\
0 & 0 & 0.2756 & -0.0436 & 0.5801 & -0.2972 & -0.6110 & -0.6725 & -1.2020 & -0.4644 & 0.3217 & 0.4916 & -0.2156 & -0.4252 \\
0 & 0 & -0.3259 & 0.1347 & -0.1397 & 0.1498 & 0.5263 & -0.6724 & 0.1702 & 0.6900 & 1.2219 & 0.8451 & -0.9016 & -0.5554 \\
0 & 0 & 0.3033 & 1.7315 & -0.1340 & -0.2516 & 0.5364 & 0.7451 & -0.1705 & -0.7806 & -0.8464 & -1.2547 & 0.1394 & 2.0324 \\
0 & 0 & -0.2869 & 0.3192 & 1.3818 & 0.0787 & -0.2831 & -0.4532 & -0.2176 & 0.8406 & 0.0432 & 1.7673 & 0.1435 & -1.9410 \\
0 & 0 & -0.0016 & 0.2687 & 0.2584 & -0.1674 & 0.1805 & 0.4263 & 0.2702 & -0.4695 & -1.3191 & -0.4401 & -0.5881 & 1.6250 \\
0 & 0 & 0.5910 & 0.8916 & -0.9667 & 0.9224 & -0.0407 & 0.6346 & -0.9447 & -0.7273 & -0.4854 & -1.0378 & -1.8211 & 1.3183 \\
0 & 0 & 0.4806 & -0.1310 & 0.0852 & -0.1908 & 0.1190 & -0.2348 & 0.7944 & 0.2369 & -0.4000 & -1.0992 & -1.5953 & -0.3908 \\
0 & 0 & 0.7929 & 0.0657 & -0.2895 & -0.3282 & -0.1369 & 0.0820 & 0.4529 & -0.8177 & 0.0627 & -0.5841 & -2.9699 & 1.3239
\end{pmatrix}$$

$$B_{r2} = \begin{pmatrix} 2.0877 \\ 0.9851 \\ -0.8194 \\ 0.3261 \\ 0.1376 \\ -0.0446 \\ 0.6724 \\ -0.0292 \\ -0.4121 \\ 0.4734 \\ 0.8574 \\ 0.2833 \\ -0.4768 \\ 1.1670 \end{pmatrix}$$

$$C_{r2} = \begin{pmatrix} -2.0877 & 0.9851 & -2.4704 & 0.1067 & -0.8926 & -4.2117 & -0.7167 & -2.6207 & -1.8342 & 5.2601 & -2.5597 & 2.9200 & -4.2737 & 1.8189 \end{pmatrix}$$

$$D_{r2} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Awal**

rata-rata *error* untuk sistem awal										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	55,967	13,069	17,436	31,978	16,077	53,713	5,0423	20,737	36,239	41,651
2	82,933	25,997	11,232	43,238	14,081	72,907	19,329	37,284	73,265	51,533
3	24,479	1,5624	16,466	9,4811	4,2004	18,655	1,1824	9,6654	8,3313	14,698
4	79,631	8,9356	31,561	34,660	0,2918	63,656	3,2427	30,517	32,743	45,676
5	17,902	2,4731	7,6180	17,165	18,695	17,178	3,5288	3,1097	9,8702	22,306
6	33,462	5,4739	12,428	12,197	5,8531	14,297	1,2518	9,8211	7,6913	14,211
7	103,45	13,708	19,544	33,555	11,420	62,626	16,854	36,400	61,446	43,663
8	47,302	22,361	7,0676	35,581	20,407	53,642	13,641	27,330	49,576	39,300
9	54,706	16,321	18,282	10,507	19,469	29,558	18,841	25,377	39,349	11,570
10	37,443	12,520	0,2114	6,5920	11,656	20,111	15,377	13,373	28,202	9,0821
11	36,856	17,006	1,9448	28,750	20,641	40,347	12,681	21,097	47,247	32,779
12	45,316	9,7684	1,8660	2,4738	22,349	21,467	11,835	15,526	28,407	5,6026
13	4,9423	11,192	11,472	10,463	12,230	0,3435	6,7807	4,5912	12,396	12,291
14	32,760	10,474	7,2677	20,208	12,999	34,312	3,9945	14,395	26,701	26,156
15	27,397	3,3469	5,4563	6,9327	10,638	13,008	4,4269	13,069	10,473	6,1799
16	67,555	3,2680	30,884	40,246	14,297	58,172	4,6985	26,066	21,639	48,922
17	85,116	28,929	11,423	41,719	11,260	74,080	21,037	38,672	71,042	50,459
18	77,405	30,966	6,6185	28,966	10,895	60,179	25,050	43,383	63,021	30,535
19	2,9361	1,7300	1,4757	0,8293	3,9375	1,9836	4,1694	0,2475	1,1657	1,8737
20	35,8493	8,8027	16,018	38,032	34,072	48,321	0,463	17,819	29,4497	45,099
jumlah	953,421	247,910	236,275	453,582	275,476	758,566	193,430	408,489	658,261	553,593
rata-rata	47,6710	12,3955	11,8137	22,6791	13,7738	37,9282	9,6715	20,4244	32,9130	27,6797

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Setimbang**

rata-rata *error* untuk sistem setimbang										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0550	0,0736	0,0394	0,0774	0,2087	0,0317	0,1918	0,1817	0,0511	0,0682
2	0,2235	0,0721	0,1603	0,1044	0,0633	0,0802	0,1094	0,0344	0,0015	0,1038
3	0,0636	0,3798	0,2370	0,1159	0,0606	0,0361	0,2364	0,0178	0,0090	0,0973
4	0,0044	0,0564	0,0039	0,0568	0,0357	0,0586	0,2571	0,3104	0,0542	0,0106
5	0,0077	0,1025	0,1283	0,2123	0,0856	0,0928	0,1802	0,1185	0,2002	0,1580
6	0,0714	0,0035	0,1727	0,0688	0,0899	0,1305	0,2492	0,0515	0,1394	0,1178
7	0,1212	0,192	0,0343	0,1767	0,0080	0,1705	0,0761	0,1361	0,1690	0,2502
8	0,2347	0,0508	0,0206	0,4058	0,0769	0,0314	0,0497	0,0516	0,2439	0,0341
9	10,734	16,159	31,243	90,505	41,268	41,389	24,470	7,2249	99,334	36,457
10	21,464	28,089	53,453	14,403	68,143	64,319	34,730	16,792	16,892	51,679
11	15,168	25,834	7,3932	65,938	39,377	34,091	13,947	22,433	78,427	18,925
12	20,113	4,5250	9,1904	54,256	9,2333	15,140	12,393	16,222	53,412	50,829
13	26,234	20,562	31,407	42,938	45,040	44,504	48,072	21,962	50,699	7,2431
14	1,7028	14,026	3,6141	51,170	19,590	13,735	20,439	2,7758	56,948	23,662
15	9,6157	1,0313	31,217	25,572	3,2485	17,252	29,321	6,7875	36,216	26,759
16	27,641	19,564	37,966	33,239	44,507	47,858	21,802	18,071	39,795	13,032
17	9,6098	9,5660	24,659	20,274	16,745	22,388	5,7080	0,3648	16,087	1,5347
18	11,112	43,727	19,747	19,900	75,285	55,211	80,097	23,256	21,044	91,738
19	32,433	58,181	55,667	20,748	102,39	90,601	53,839	31,101	22,459	71,726
20	22,818	47,160	3,7342	13,573	71,904	52,921	39,896	39,894	16,161	44,740
jumlah	209,428	289,359	310,092	453,739	537,373	500,047	386,070	207,790	508,347	439,168
rata-rata	10,4714	14,4679	15,5046	22,6869	26,8686	25,0023	19,3035	10,3895	25,4174	21,9584

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 7**

rata-rata *error* untuk sistem tereduksi total orde 7										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,1963	0,0274	0,0238	0,1985	0,0117	0,1266	0,3319	0,0298	0,2236	0,0208
2	0,0720	0,0178	0,0436	0,0360	0,0564	0,1767	0,0558	0,3186	0,2151	0,1019
3	0,1514	0,0809	0,0968	0,1989	0,0617	0,0682	0,2713	0,3087	0,2389	0,1084
4	0,0077	0,0623	0,1708	0,2345	0,0299	0,1719	0,0116	0,2417	0,3923	0,1123
5	0,2176	0,0792	0,0979	0,0182	0,0193	0,4127	0,1218	0,0857	0,2086	0,2667
6	0,2128	0,3742	0,0983	0,0707	0,2398	0,1279	0,0926	0,1144	0,1579	0,1815
7	0,1097	0,0398	0,0671	0,0094	0,1258	0,0306	0,0252	0,0694	0,1969	0,0104
8	2,7034	28,266	15,220	30,662	9,7379	28,252	41,776	12,700	18,190	33,824
9	1,7045	51,380	31,484	37,607	16,432	32,768	70,108	20,987	12,285	6,3157
10	21,115	32,386	19,159	15,005	4,7881	1,0426	21,122	21,397	16,131	31,932
11	5,2996	47,889	7,9892	51,005	2,1821	41,005	4,9142	42,814	47,875	29,863
12	6,4870	6,3998	22,723	12,836	7,5923	10,497	33,300	16,176	27,406	53,735
13	6,4541	4,1819	7,1014	25,851	4,1622	19,727	17,831	19,215	8,6982	7,2534
14	21,892	33,193	0,9834	31,213	0,2958	7,3881	16,319	41,581	13,265	23,612
15	2,0960	6,1802	21,586	19,430	8,2813	9,0802	36,046	27,761	27,355	5,2546
16	9,2215	27,677	7,0884	6,4928	3,3895	3,2159	22,538	13,478	6,4375	24,575
17	25,038	23,329	32,149	8,7394	16,490	53,385	63,407	7,2684	27,278	40,659
18	18,742	7,3817	46,692	5,7706	21,121	40,591	9,3838	4,4354	1,0493	8,4109
19	42,882	46,647	35,237	45,232	10,018	8,8329	38,581	52,898	20,299	48,725
jumlah	164,603	315,595	248,013	290,613	105,036	256,902	376,240	281,884	227,906	314,963
rata-rata	8,6633	16,6102	13,0533	15,2954	5,5282	13,5211	19,8021	14,8360	11,9950	16,5770

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 6**

rata-rata *error* untuk sistem tereduksi total orde 6										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,1858	0,1239	0,0829	0,0165	0,2464	0,2185	0,3079	0,0838	0,1027	0,2166
2	0,0542	0,0988	0,1437	0,0967	0,2910	0,4048	0,1753	0,0615	0,0733	0,1226
3	0,3785	0,1074	0,1566	0,2109	0,0534	0,0110	0,0468	0,0428	0,0121	0,0604
4	0,2906	0,2650	0,1189	0,1659	0,2617	0,0753	0,0254	0,1131	0,1273	0,0615
5	0,0420	0,1844	0,1552	0,1023	0,0908	0,0432	0,1691	0,3137	0,2102	0,1405
6	0,1178	0,0949	0,0961	0,2196	0,1138	0,0304	0,0553	0,1108	0,0768	0,2555
7	8,7893	39,880	2,4457	95,735	10,153	9,4362	21,667	9,6325	39,096	2,8442
8	16,359	70,545	1,0538	15,343	17,804	16,308	35,381	15,315	56,451	4,6231
9	11,885	37,919	5,7247	6,5553	7,2559	2,0192	24,185	4,5087	20,151	19,062
10	22,144	35,164	14,279	5,3916	30,099	28,433	15,839	54,970	33,485	38,881
11	5,3331	17,558	10,868	4,9551	7,8877	26,760	10,765	27,981	7,6751	30,248
12	9,3037	25,099	0,5228	5,1796	55,053	3,8147	15,633	16,520	22,233	5,1025
13	24,390	33,385	0,2103	11,235	9,1241	30,606	23,109	40,381	12,949	6,5396
14	13,867	1,7719	9,8677	44,474	69,105	34,728	2,7593	40,590	5,0842	29,511
15	8,2810	0,6468	0,6147	30,122	34,114	17,643	3,8498	15,758	5,5345	4,1053
16	44,668	11,854	1,0061	19,235	20,633	17,264	66,026	64,744	8,4573	7,3031
17	25,762	12,677	3,3427	21,559	24,947	15,989	55,752	23,055	7,6659	14,025
18	31,822	8,6444	13,639	12,308	15,371	6,8722	54,857	27,922	4,3485	28,660
jumlah	223,676	296,023	64,329	272,908	302,608	210,659	330,607	342,107	223,734	191,764
rata-rata	12,4264	16,4457	3,5738	15,1615	16,8115	11,7033	18,3670	19,0059	12,4296	10,6535

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 5**

rata-rata *error* untuk sistem tereduksi total orde 5										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0822	0,0735	0,0944	0,1758	0,0440	0,0338	0,2563	16,337	0,0262	0,1645
2	0,0073	0,1616	0,1815	0,1655	0,0741	0,1134	0,0292	0,0485	0,0299	0,0417
3	0,0437	0,1981	0,0334	0,0854	0,2477	0,2138	0,369	0,0572	0,2101	0,0148
4	0,0978	0,1007	0,1244	0,1270	0,2728	0,1065	0,2856	0,0621	0,3552	0,2566
5	0,3430	0,0600	0,4317	0,0393	0,0594	0,0818	0,1123	0,2274	0,1616	0,2817
6	7,4848	26,732	0,2256	5,7540	5,8823	6,2790	2,9199	0,1028	37,609	41,373
7	2,6969	39,258	10,861	14,598	14,229	7,6179	8,7965	22,026	70,059	6,5382
8	15,268	17,652	6,4145	9,0185	12,809	4,1138	2,7848	35,290	26,210	22,295
9	13,631	6,2074	31,714	36,814	75,552	12,800	27,613	20,696	7,7239	10,658
10	11,804	19,927	26,657	30,279	57,536	3,4072	11,630	21,085	29,194	28,690
11	2,9337	26,444	5,3493	6,9309	10,951	6,0652	8,3129	4,3114	16,372	17,846
12	11,444	43,100	16,260	26,926	55,887	10,056	20,367	18,657	10,765	11,060
13	4,8156	27,855	28,856	39,042	73,835	5,7650	21,216	2,0083	30,118	30,970
14	4,5676	12,438	8,4289	15,650	30,113	2,1602	6,6998	1,4498	21,083	21,347
15	8,1503	9,4176	15,040	21,009	48,720	22,056	36,111	59,501	65,443	66,201
16	9,7176	57,245	8,8250	15,500	20,475	13,781	15,734	53,395	9,6737	9,1260
17	28,616	48,543	6,9389	0,0127	1,6429	11,639	17,292	43,059	4,0909	37,993
jumlah	121,705	335,417	166,438	222,128	408,334	106,291	180,532	298,316	329,129	304,860
rata-rata	7,1591	19,7304	9,7904	13,0663	24,0196	6,2524	10,6195	17,5480	19,3605	17,9329

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 4**

rata-rata *error* untuk sistem tereduksi total orde 4										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0771	0,1685	0,0713	0,0344	0,2615	0,1598	0,0276	0,3219	0,0666	0,0319
2	0,1769	0,3496	0,0119	0,0659	0,1446	0,1127	0,0590	0,1738	0,2800	0,0743
3	0,1269	0,0699	0,1575	0,2561	0,0864	0,3086	0,2335	0,2311	0,0479	0,0823
4	0,0791	0,0050	0,1997	0,4810	0,0130	0,0560	0,1306	0,3473	0,0211	0,0730
5	20,284	22,802	4,1828	16,529	34,105	10,660	31,360	30,627	10,028	19,626
6	30,887	38,978	1,6943	32,891	63,549	13,249	46,678	51,593	17,119	44,916
7	15,053	10,535	11,237	10,451	31,982	1,3960	25,401	18,568	5,6578	15,609
8	18,158	25,205	21,230	15,257	16,169	29,516	17,825	7,5243	30,088	29,525
9	29,169	36,997	13,364	24,156	21,895	13,201	13,583	32,173	30,315	41,832
10	5,8344	1,8791	10,134	2,0966	20,012	10,157	19,296	10,045	4,6991	1,7123
11	22,170	37,295	27,981	47,220	12,263	9,7233	11,170	18,871	26,660	27,529
12	35,025	44,947	18,733	34,038	18,054	15,069	11,809	34,672	33,213	48,083
13	18,510	27,333	13,286	29,388	7,4328	0,9682	5,6705	20,645	15,508	21,777
14	16,928	5,5466	34,723	15,946	8,5361	30,054	6,4315	39,829	10,110	10,816
15	47,339	49,829	9,7564	26,103	8,3744	17,027	7,3909	6,1982	18,656	5,1558
16	18,631	6,1496	28,782	29,241	6,8918	3,9709	4,9324	29,698	2,3739	19,032
jumlah	278,453	308,094	195,547	284,158	249,772	155,630	202,000	301,520	204,847	285,880
rata-rata	17,4033	19,2559	12,2217	17,7599	15,6108	9,7269	12,6250	18,8450	12,8029	17,8675

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 3**

rata-rata *error* untuk sistem tereduksi total orde 3										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,2304	0,1273	0,0486	0,0383	0,1856	0,2375	0,1785	0,0180	0,0709	0,0125
2	0,1933	0,2769	0,0137	0,0165	0,3645	0,1112	0,0544	0,2340	0,1061	0,0079
3	0,0652	0,1477	0,2905	0,1355	0,2347	0,0817	0,0649	0,1009	0,3249	0,2005
4	32,906	37,379	16,419	18,092	9,0311	9,6659	4,4625	25,490	11,631	16,182
5	54,971	56,286	12,486	29,307	2,3384	8,6477	19,163	38,096	26,720	23,218
6	16,662	17,272	3,5125	1,4661	5,0243	6,1685	8,2592	12,909	3,0782	6,2181
7	17,461	42,700	56,552	0,2410	0,7842	18,011	1,3013	11,854	55,118	6,3788
8	16,073	1,4211	29,373	10,598	1,1214	8,927	8,8524	11,797	49,469	29,125
9	17,280	24,499	19,867	3,1908	7,9147	4,0569	0,7904	12,084	8,4760	13,407
10	3,2417	16,260	32,527	19,480	2,8377	7,9348	0,4533	2,8492	6,3547	30,412
11	17,158	4,7428	37,183	19,915	2,8693	6,4314	8,246	12,973	6,1993	38,983
12	13,389	4,4635	10,554	15,248	6,2084	7,3184	3,9671	10,226	35,332	11,216
13	59,313	8,5989	6,4868	7,3307	9,6277	9,5846	11,573	42,910	37,092	58,509
14	7,6592	7,8888	27,611	29,323	12,502	10,132	21,046	51,906	28,774	19,862
15	31,815	44,541	22,220	7,7568	8,2600	13,637	11,489	23,372	15,304	6,5352
jumlah	288,421	266,608	275,1482	162,141	69,3044	110,946	99,903	256,825	284,052	260,270
rata-rata	19,2280	17,7738	18,3432	10,8094	4,6202	7,3964	6,6602	17,1216	18,9368	17,3513

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 2**

rata-rata *error* untuk sistem tereduksi total orde 2										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,1914	0,2072	0,0774	0,0138	0,1698	0,0470	0,1413	0,1894	0,0161	0,0761
2	0,2942	0,1234	0,0832	0,0743	0,0730	0,1740	0,1504	0,0865	0,1482	0,1439
3	4,0160	21,399	26,292	23,653	12,577	17,865	10,686	14,164	11,039	6,9630
4	0,6340	29,399	39,985	33,146	19,944	23,399	15,424	18,993	23,617	12,330
5	6,9516	5,1658	17,367	2,8627	13,517	13,335	8,4634	11,220	4,2043	2,2988
6	25,285	40,589	5,4440	33,013	11,211	33,434	16,422	2,0895	1,3496	0,7750
7	17,339	11,659	17,905	4,5812	18,089	6,6693	2,2659	9,8639	11,972	5,3622
8	5,1990	11,465	12,037	14,075	3,6389	15,339	7,7731	9,1041	0,5649	1,6047
9	13,566	12,443	5,1887	6,0113	9,1762	29,226	16,233	1,7226	5,6297	15,308
10	18,537	17,575	18,601	6,9578	19,530	17,501	6,2795	9,9669	8,3828	9,0529
11	7,9172	2,3614	12,495	4,5964	9,2165	9,1027	5,0872	6,5400	7,2467	10,456
12	15,364	46,030	4,5084	48,905	15,244	6,1499	33,668	27,104	16,645	0,0374
13	4,1667	25,895	5,1700	40,945	31,285	37,860	21,313	33,282	24,775	13,148
14	5,0810	4,1909	29,542	11,984	19,761	39,545	21,233	21,628	7,7438	7,6649
jumlah	124,545	228,506	194,699	230,822	183,436	249,652	165,143	165,955	115,592	85,222
rata-rata	8,8960	16,3218	13,9071	16,4872	13,1025	17,8322	11,7959	11,8539	8,2566	6,0873

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error***

rata-rata *error*								
percobaan	awal	setimbang	orde 7	orde 6	orde 5	orde 4	orde 3	orde 2
1	47,6710	10,4714	8,6632	12,4264	7,1591	17,4033	19,2280	8,8960
2	12,3955	14,4679	16,6102	16,4457	19,7304	19,2559	17,7738	16,3218
3	11,8137	15,5046	13,0533	3,5738	9,7904	12,2217	18,3432	13,9071
4	22,6791	22,6869	15,2954	15,1615	13,0663	17,7599	10,8094	16,4872
5	13,7738	26,8686	5,5282	16,8115	24,0196	15,6108	4,6202	13,1025
6	37,9282	25,0023	13,5211	11,7033	6,2524	9,7269	7,3964	17,8322
7	9,6715	19,3035	19,8021	18,3670	10,6195	12,6250	6,6602	11,7959
8	20,4244	10,3895	14,8360	19,0059	17,5480	18,8450	17,1216	11,8539
9	32,9130	25,4173	11,9950	12,4296	19,3605	12,8029	18,9368	8,2566
10	27,6796	21,9584	16,5770	10,6535	17,9329	17,8675	17,3513	6,0873
jumlah	236,950	192,070	135,882	136,578	145,479	154,119	138,241	124,541
rata-rata	23,6950	19,2070	13,5882	13,6578	14,5479	15,4119	13,8241	12,4541

- **Tabel Rata-Rata Waktu Komputasi**

rata-rata waktu komputasi								
percobaan	awal	setimbang	orde 7	orde 6	orde 5	orde 4	orde 3	orde 2
1	0,717128	0,392422	0,38245	0,372109	0,338464	0,366498	0,31797	0,341351
2	0,726647	0,48477	0,414212	0,377842	0,332221	0,375934	0,340057	0,325984
3	0,724826	0,381788	0,370067	0,341694	0,332516	0,38134	0,332225	0,320618
4	0,716294	0,430439	0,384024	0,33042	0,33047	0,355032	0,337918	0,346305
5	0,717169	0,463488	0,401139	0,330845	0,342221	0,374104	0,325294	0,381077
6	0,748417	0,358593	0,407444	0,337603	0,3642	0,369211	0,320719	0,35084
7	0,731249	0,433958	0,395845	0,364671	0,3281	0,366418	0,329306	0,375147
8	0,773729	0,400298	0,404956	0,364527	0,322439	0,376674	0,333876	0,353502
9	0,710042	0,38546	0,390303	0,338633	0,360964	0,363305	0,328078	0,282052
10	0,74104	0,433725	0,401899	0,328843	0,327526	0,372132	0,319454	0,370393
jumlah	7,306541	4,164941	3,952339	3,487187	3,379121	3,700648	3,284897	3,447269
rata-rata	0,7306541	0,4164941	0,3952339	0,3487187	0,3379121	0,3700648	0,3284897	0,3447269

LAMPIRAN B

KASUS 2

- **Matriks Unitary U_d**

$$
U_d = \begin{pmatrix}
-0.0003 & -0.0007 & -0.7665 & 0.0016 & -0.1479 & 0.0876 & 0.0053 & -0.0226 & 0.0012 & 0.0143 & -0.0237 & -0.0916 & 0 & 0 & 0.0002 & -0.0126 & 0.6069 & -0.0303 & -0.0488 & -0.0391 \\
0.0001 & -0.0013 & 0.5555 & -0.0008 & 0.1044 & -0.1116 & -0.0046 & 0.0325 & -0.0013 & -0.0307 & 0.0161 & 0.2461 & -0.0002 & 0.0002 & 0.0092 & -0.0051 & 0.7717 & -0.0356 & -0.0673 & -0.0612 \\
-0.0007 & -0.0031 & -0.2256 & 0.0005 & -0.0914 & -0.1054 & -0.0027 & 0.0535 & 0.0067 & -0.0493 & -0.0227 & 0.9460 & -0.0008 & 0.0010 & 0.0423 & 0.0169 & -0.1509 & -0.0560 & 0.0031 & -0.0283 \\
0.0024 & 0.0228 & 0.1011 & -0.0024 & 0.0497 & 0.8204 & 0.0115 & -0.3239 & 0.0386 & 0.3377 & 0.0009 & 0.1427 & -0.0002 & 0.0003 & 0.0416 & -0.0831 & 0.0109 & -0.2517 & 0.0228 & 0.0087 \\
-0.0004 & 0.0390 & 0.1914 & -0.0116 & -0.8329 & 0.1875 & -0.0317 & 0.1462 & 0.0727 & -0.0060 & -0.3238 & -0.0080 & 0.0009 & -0.0011 & -0.0669 & 0.0771 & 0.0189 & 0.2977 & -0.0258 & 0.0143 \\
-0.0064 & -0.0712 & 0.0457 & 0.0237 & -0.2265 & -0.2573 & 0.0079 & -0.0995 & 0.0089 & -0.0695 & -0.3915 & -0.0949 & -0.0001 & 0.0004 & 0.1024 & -0.2839 & -0.0257 & -0.7710 & 0.0835 & 0.0664 \\
-0.0132 & -0.1023 & -0.0235 & 0.0174 & 0.0653 & -0.3069 & -0.0030 & -0.0058 & 0.0117 & 0.8527 & -0.2871 & -0.0044 & -0.0036 & 0.0040 & 0.0994 & 0.1695 & -0.0078 & 0.0942 & -0.0343 & -0.1779 \\
0.0017 & -0.0478 & -0.0383 & 0.0114 & 0.3700 & 0.1436 & 0.0726 & -0.1557 & -0.0713 & -0.3389 & -0.7661 & 0.0178 & -0.0029 & 0.0033 & 0.0552 & 0.1794 & -0.0029 & 0.2079 & -0.0359 & -0.1488 \\
0.0459 & 0.3800 & 0.0072 & -0.0900 & 0.0064 & 0.1679 & 0.0654 & 0.5435 & -0.3664 & -0.0122 & 0.0295 & -0.0563 & -0.0095 & 0.0105 & 0.3060 & 0.2371 & -0.0350 & -0.2585 & -0.0192 & -0.4008 \\
-0.0015 & 0.1748 & -0.0444 & -0.0847 & 0.2643 & 0.1338 & -0.1949 & 0.6132 & 0.3473 & 0.1260 & -0.2430 & 0.0229 & 0.0083 & -0.0091 & -0.2219 & -0.2824 & 0.0238 & -0.0038 & 0.0260 & 0.3634 \\
-0.1370 & -0.8794 & 0.0071 & 0.0445 & 0.0116 & 0.1792 & -0.0375 & 0.3724 & -0.0796 & -0.0494 & 0.0574 & -0.0142 & -0.0010 & 0.0013 & 0.0854 & 0.0454 & -0.0106 & -0.0679 & -0.0542 & -0.0655 \\
-0.0625 & 0.0569 & -0.0017 & -0.0420 & -0.0064 & -0.0149 & -0.5692 & -0.1039 & -0.0649 & -0.0315 & -0.0005 & -0.0147 & 0.0123 & -0.0122 & 0.3154 & 0.0663 & -0.0449 & -0.0268 & -0.7060 & 0.2129 \\
0.1206 & 0.0103 & 0.0035 & 0.1367 & -0.0016 & 0.0057 & 0.5172 & 0.0640 & 0.6370 & -0.0590 & 0.0622 & -0.0317 & -0.0067 & 0.0043 & 0.2356 & 0.2947 & -0.0262 & -0.1264 & -0.3456 & 0.0498 \\
0.1375 & 0.0321 & -0.0010 & 0.5327 & 0.0074 & 0.0175 & -0.3059 & 0.0168 & 0.3031 & -0.0594 & 0.0341 & -0.0192 & -0.0036 & -0.0242 & 0.2992 & -0.3930 & -0.0214 & 0.1514 & 0.1288 & -0.4697 \\
0.0372 & -0.0370 & -0.0024 & -0.2794 & -0.0027 & -0.0095 & -0.4858 & -0.0766 & 0.4130 & -0.0891 & 0.0486 & -0.0256 & 0.0069 & 0.0252 & -0.2536 & 0.4915 & -0.0019 & -0.2203 & 0.2322 & -0.2943 \\
0.1902 & 0.0285 & 0.0001 & 0.5679 & 0.0079 & 0.0200 & -0.0118 & 0.0570 & -0.1861 & 0.0296 & -0.0203 & 0.0096 & 0.0352 & -0.0166 & -0.6507 & 0.1499 & -0.0382 & -0.1834 & -0.3287 & -0.1004 \\
-0.1139 & 0.0608 & -0.0006 & 0.5090 & 0.0076 & 0.0156 & -0.1546 & 0.0284 & -0.0845 & 0.0040 & -0.0080 & 0.0034 & 0.0259 & 0.0178 & 0.2670 & 0.4422 & 0.0726 & -0.0415 & 0.4186 & 0.4919 \\
-0.8535 & 0.1320 & 0.0004 & 0.1066 & 0.0016 & -0.0037 & 0.0669 & -0.0060 & 0.1031 & -0.0152 & 0.0099 & -0.0051 & 0.4176 & 0.0886 & -0.0995 & -0.0299 & -0.0186 & -0.0252 & -0.0717 & -0.1675 \\
0.2014 & -0.0343 & 0 & -0.0602 & -0.0009 & -0.0002 & 0.0014 & 0 & -0.0205 & 0.0037 & -0.0020 & 0.0011 & 0.6310 & -0.7426 & 0.0439 & 0.0210 & 0.0055 & 0.0043 & 0.0373 & 0.0288 \\
0.3492 & -0.0546 & -0.0001 & -0.0528 & -0.0009 & 0.0012 & -0.0141 & 0.0029 & -0.0380 & 0.0064 & -0.0035 & 0.0019 & 0.6520 & 0.6622 & 0.0548 & -0.0237 & 0.0054 & 0.0228 & 0.0180 & 0.0500
\end{pmatrix}
$$

Dengan demikian, dari tahap pertama transformasi sistem diperoleh, $G_t = \left[\frac{{U_d}^T A U_d}{C U_d} \middle| \frac{{U_d}^T B}{D}\right] = \left[\frac{A_t}{C_t} \middle| \frac{B_t}{D}\right]$ dengan:

$$
A_t = \begin{pmatrix}
0.2615 & -0.1018 & 0.0050 & -0.1623 & -0.0153 & -0.0051 & 0.2444 & -0.0430 & 0.0144 & -0.0338 & -0.0045 & -0.0042 & -0.5490 & -0.0255 & 0.0549 & -0.0290 & 0.0046 & 0.0261 & 0.1111 & -0.0757 \\
0 & -0.3482 & 0.0314 & 0.1074 & -0.0681 & -0.0034 & 0.7123 & -0.5020 & -0.2193 & -0.3278 & -0.1059 & -0.0163 & 0.0757 & 0.0255 & -0.1539 & 0.1631 & 0.0075 & -0.0647 & 0.4574 & -0.4802 \\
0 & 0 & 0.4174 & -0.0017 & 0.1279 & 0.0952 & 0.0058 & -0.0464 & -0.0173 & 0.0192 & -0.0004 & -0.0235 & -0.0001 & 0.0003 & 0.0210 & -0.0076 & -0.6257 & -0.0633 & 0.0549 & 0.0361 \\
0 & 0 & 0 & -0.4729 & -0.0122 & -0.0072 & 0.6301 & 0.1525 & 0.0076 & 0.1092 & 0.0390 & 0.0058 & 0.1596 & 0.0431 & -0.8330 & -0.1378 & -0.1038 & -0.1814 & -0.9206 & -0.2994 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.0470 & -0.7681 & -0.0273 & 0.2236 & 0.0379 & -0.0071 & 0.0158 & -0.1682 & 0.0035 & -0.0008 & -0.0977 & 0.1040 & -0.1169 & 0.4027 & -0.0358 & 0.0190 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.3442 & 0.1177 & -0.0126 & -0.3833 & -0.0613 & -0.1985 & -0.3040 & -0.4598 & 0.0021 & -0.0001 & 0.0930 & -0.1697 & 0.1548 & -0.5100 & -0.0951 & 0.0371 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6599 & 0.1614 & -0.6422 & 0.1418 & -0.0829 & 0.0198 & 0.0169 & -0.0070 & -0.5473 & 0.2985 & 0.0596 & -0.0875 & 0.4958 & 0.1614 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6806 & -0.0220 & -0.3301 & -0.3290 & 0.2240 & 0.0083 & -0.0040 & -0.1208 & -0.0333 & -0.0647 & 0.0339 & -0.2271 & 0.1563 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9013 & 0.0527 & 0.2029 & 0.0014 & 0.0414 & 0.0052 & 0.1602 & -0.0377 & 0.0622 & -0.0052 & 0.4675 & 0.2801 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3403 & 0.7226 & -0.1241 & -0.0029 & -0.0062 & -0.2728 & -0.0578 & 0.0807 & 0.3007 & -0.0018 & 0.1596 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2470 & -0.0586 & -0.1010 & 0.0068 & -0.0025 & 0.0221 & -0.2092 & -0.0284 & -0.3441 & 0.0531 & 0.1756 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9875 & -0.0021 & -0.0003 & 0.0001 & -0.0821 & -0.2929 & -0.1972 & 0.0429 & 0.0297 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1063 & -1.2569 & 0.0170 & 0.0294 & 0.0036 & -0.0089 & 0.0201 & 0.0248 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7719 & 0.1597 & 0.0332 & -0.0294 & -0.0009 & 0.0189 & 0.0279 & -0.0477 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966
\end{pmatrix}
$$

$$B_t = \begin{pmatrix} 0.1397 \\ -0.5668 \\ -0.8094 \\ 0.2685 \\ -0.9864 \\ 0.2216 \\ -0.1260 \\ 1.1029 \\ 0.5913 \\ 0.6097 \\ -0.4697 \\ 0.7187 \\ 0.6430 \\ -0.6796 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix} \qquad D_t = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$C_t = \begin{pmatrix} -1.4427 & 0.0639 & 0.3611 & 0.4716 & -0.9708 & -0.0126 & -2.3107 & 1.0655 & 0.3018 & -1.0077 & -1.6472 & 1.7267 & 1.5239 & 0.8865 & 1.5299 & 1.3183 & 0.2797 & -2.1806 & -0.5738 & -1.4121 \end{pmatrix}$$

- **Matriks W_d**

$$W_d = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0944 & 0.0352 & 0.0240 & -0.0232 & 0.2295 & 0.0558 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3078 & 0.1020 & 0.0183 & -0.5132 & 0.4064 & -0.2415 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0135 & 0.0140 & 0.4215 & 0.0164 & -0.0563 & -0.0330 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0464 & 0.4703 & 0.1423 & 0.2536 & 0.5220 & 1.3292 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1045 & -0.0934 & 0.0760 & -0.0183 & 0.0871 & 0.1032 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0205 & 0.1384 & -0.0975 & 0.2936 & -0.1028 & 0.0647 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2584 & -0.2648 & -0.0098 & 0.1595 & -0.0465 & -0.0453 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1309 & -0.1123 & 0.0449 & -0.5119 & -0.0287 & 0.1403 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6794 & -0.4240 & 0.0628 & 0.2041 & 0.8634 & -0.1491 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0813 & -0.2418 & -0.0166 & -0.1886 & 0.0534 & 0.2437 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.0902 & 0.1029 & -0.0126 & -0.0083 & -0.0907 & -0.1963 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.0846 & 0.1356 & 0.1315 & 0.0583 & -0.0268 & -0.1451 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.0106 & -0.0143 & -0.0013 & 0.0067 & -0.0154 & 0.0019 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.0129 & 0.0251 & 0.0005 & -0.0114 & 0.0166 & -0.0119 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh sistem sebagai berikut: $G_d = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{{W_d}^{-1}\,A_t W_d}{C_t W_d} & \dfrac{{W_d}^{-1} B_t}{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{A_d}{C_d} & \dfrac{B_d}{D} \end{array}\right]$

dengan:

$$A_d = \begin{pmatrix}
0.2615 & -0.1018 & 0.0050 & -0.1623 & -0.0153 & -0.0051 & 0.2444 & -0.0430 & 0.0144 & -0.0338 & -0.0045 & -0.0042 & -0.5490 & -0.0255 & 0.1206 & -0.1289 & -0.0070 & 0.0658 & -0.0012 & -0.0923 \\
0 & -0.3482 & 0.0314 & 0.1074 & -0.0681 & -0.0034 & 0.7123 & -0.5020 & -0.2193 & -0.3278 & -0.1059 & -0.0163 & 0.0757 & 0.0255 & 0.0827 & -0.0942 & 0.0145 & 0.0143 & 0.0048 & 0.2415 \\
0 & 0 & 0.4174 & -0.0017 & 0.1279 & 0.0952 & 0.0058 & -0.0464 & -0.0173 & 0.0192 & -0.0004 & -0.0235 & -0.0001 & 0.0003 & -0.0008 & -0.0103 & 0.0001 & 0.0082 & 0.0012 & 0.0057 \\
0 & 0 & 0 & -0.4729 & -0.0122 & -0.0072 & 0.6301 & 0.1525 & 0.0076 & 0.1092 & 0.0390 & 0.0058 & 0.1596 & 0.0431 & 0.4254 & -0.4277 & -0.0302 & 0.2143 & -0.0111 & -0.4374 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.0470 & -0.7681 & -0.0273 & 0.2236 & 0.0379 & -0.0071 & 0.0158 & -0.1682 & 0.0035 & -0.0008 & 0.0671 & 0.0825 & -0.0011 & 0.0033 & -0.0143 & -0.0387 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.3442 & 0.1177 & -0.0126 & -0.3833 & -0.0613 & -0.1985 & -0.3040 & -0.4598 & 0.0021 & -0.0001 & -0.0176 & -0.0208 & 0.0019 & 0.0330 & 0.0085 & 0.0479 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6599 & 0.1614 & -0.6422 & 0.1418 & -0.0829 & 0.0198 & 0.0169 & -0.0070 & 0.1808 & -0.1236 & 0.0021 & -0.0179 & -0.0154 & -0.0114 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6806 & -0.0220 & -0.3301 & -0.3290 & 0.2240 & 0.0083 & -0.0040 & -0.0981 & -0.0660 & 0.0026 & -0.0263 & 0.0151 & 0.0710 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9013 & 0.0527 & 0.2029 & 0.0014 & 0.0414 & 0.0052 & -0.0095 & 0.2402 & 0.0108 & 0.0604 & -0.0023 & 0.2115 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3403 & 0.7226 & -0.1241 & -0.0029 & -0.0062 & 0.0367 & -0.0287 & -0.0027 & 0.0055 & -0.0031 & -0.0467 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2470 & -0.0586 & -0.1010 & 0.0068 & -0.0025 & -0.1400 & -0.0904 & -0.0021 & -0.0937 & 0.0119 & -0.0203 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9875 & -0.0021 & -0.0003 & -0.0682 & -0.0197 & 0 & -0.0587 & 0.0027 & -0.0002 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1063 & -1.2569 & 0.0294 & -0.0052 & 0.0008 & 0.0120 & -0.0015 & 0.0130 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7719 & 0.1597 & 0.0074 & -0.0092 & -0.0006 & 0.0067 & 0.0002 & -0.0082 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966
\end{pmatrix}$$

$$B_d = \begin{pmatrix} -0.0295 \\ -1.3666 \\ -1.0414 \\ -0.8545 \\ -0.7546 \\ 0.1992 \\ 0.2075 \\ 1.0393 \\ 1.7122 \\ 1.1279 \\ -0.7869 \\ 0.3175 \\ 0.6833 \\ -0.7271 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$C_d = \begin{pmatrix} -1.4427 & 0.0639 & 0.3611 & 0.4716 & -0.9708 & -0.0126 & -2.3107 & 1.0655 & 0.3018 & -1.0077 & -1.6472 & 1.7267 & 1.5239 & 0.8865 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}$$

- **Subsistem tidak Stabil A_u**

$$A_u = \begin{pmatrix}
-0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\
0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\
-0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\
-0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\
-0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\
-0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966
\end{pmatrix}$$

$$B_u = \begin{pmatrix} 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix}$$

$$C_u = \begin{pmatrix} 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}$$

$$D_u = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Tereduksi Orde 13**

$$A_{r13} = \begin{pmatrix}
0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 & 0.0023 & -0.0002 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 & 0.0026 & -0.0002 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 & 0.0056 & -0.0008 & -0.0003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 & -0.0041 & -0.0007 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 & -0.0476 & -0.0001 & 0.0018 & -0.0003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 & -0.0359 & 0.0002 & 0.0014 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 & 0.1096 & 0.0008 & -0.0040 & 0.0006 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 & 0.2988 & 0.0264 & -0.0095 & 0.0017 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0023 & -0.0026 & 0.0056 & -0.0041 & 0.0476 & -0.0359 & -0.1096 & 0.2988 & -0.0697 & 0.4779 & 0.0235 & 0.0017 & -0.0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0002 & -0.0002 & 0.0008 & 0.0007 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0264 & -0.4779 & 0.0781 & -0.3028 & 0.0437 & -0.0039 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0001 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0001 & -0.0018 & 0.0013 & 0.0040 & -0.0095 & 0.0235 & 0.3028 & -0.4745 & -0.2103 & 0.0273 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.0001 & 0 & 0 & -0.0003 & 0.0002 & 0.0006 & -0.0017 & -0.0017 & 0.0437 & 0.2103 & 0.4909 & 0.2028 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 & 0.0002 & 0.0004 & -0.0039 & -0.0273 & 0.2028 & -0.5935 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966
\end{pmatrix}$$

$$B_{r13} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.8127 \\ 0.1652 \\ 0.0170 \\ -0.0070 \\ -0.0009 \\ 0.0001 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix}$$

$$C_{r13} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 & 0.1653 & -0.0170 & -0.0071 & 0.0008 & -0.0001 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}$$

$$D_{r13} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- ## **Tereduksi Total Orde 12**

$$A_{r12} = \begin{pmatrix}
0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 & 0.0023 & -0.0002 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 & 0.0026 & -0.0002 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 & 0.0056 & -0.0008 & -0.0003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 & -0.0041 & -0.0007 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 & -0.0476 & -0.0001 & 0.0018 & -0.0003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 & -0.0359 & 0.0002 & 0.0014 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 & 0.1096 & 0.0008 & -0.0040 & 0.0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 & 0.2988 & 0.0264 & -0.0095 & 0.0017 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0023 & -0.0026 & 0.0056 & -0.0041 & 0.0476 & -0.0359 & -0.1096 & 0.2988 & -0.0697 & 0.4779 & 0.0235 & 0.0017 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0002 & -0.0002 & 0.0008 & 0.0007 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0264 & -0.4779 & 0.0781 & -0.3028 & 0.0437 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0001 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0001 & -0.0018 & 0.0013 & 0.0040 & -0.0095 & 0.0235 & 0.3028 & -0.4745 & -0.2103 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.0001 & 0 & 0 & -0.0003 & 0.0002 & 0.0006 & -0.0017 & -0.0017 & 0.0437 & 0.2103 & 0.4909 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966
\end{pmatrix}$$

$$B_{r12} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.8127 \\ 0.1652 \\ 0.0170 \\ -0.0070 \\ -0.0009 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix}$$

$$C_{r12} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 & 0.1653 & -0.0170 & -0.0071 & 0.0008 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}$$

$$D_{r12} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Tereduksi Total Orde 11**

$$A_{r11} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 & 0.0023 & -0.0002 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 & 0.0026 & -0.0002 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 & 0.0056 & -0.0008 & -0.0003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 & -0.0041 & -0.0007 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 & -0.0476 & -0.0001 & 0.0018 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 & -0.0359 & 0.0002 & 0.0014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 & 0.1096 & 0.0008 & -0.0040 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 & 0.2988 & 0.0264 & -0.0095 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0023 & -0.0026 & 0.0056 & -0.0041 & 0.0476 & -0.0359 & -0.1096 & 0.2988 & -0.0697 & 0.4779 & 0.0235 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0002 & -0.0002 & 0.0008 & 0.0007 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0264 & -0.4779 & 0.0781 & -0.3028 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0001 & 0.0001 & -0.0003 & 0.0001 & -0.0018 & 0.0013 & 0.0040 & -0.0095 & 0.0235 & 0.3028 & -0.4745 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966 \end{pmatrix}$$

$$B_{r11} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.8127 \\ 0.1652 \\ 0.0170 \\ -0.0070 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix}$$

$$C_{r11} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 & 0.1653 & -0.0170 & -0.0071 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}$$

$$D_{r11} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Tereduksi Total Orde 10**

$$A_{r10} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 & 0.0023 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 & 0.0026 & -0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 & 0.0056 & -0.0008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 & -0.0041 & -0.0007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 & -0.0476 & -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 & -0.0359 & 0.0002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 & 0.1096 & 0.0008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 & 0.2988 & 0.0264 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0023 & -0.0026 & 0.0056 & -0.0041 & 0.0476 & -0.0359 & -0.1096 & 0.2988 & -0.0697 & 0.4779 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0002 & -0.0002 & 0.0008 & 0.0007 & -0.0001 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0264 & -0.4779 & 0.0781 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966 \end{pmatrix}$$

$$B_{r10} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.8127 \\ 0.1652 \\ 0.0170 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix}$$

$$C_{r10} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 & 0.1653 & -0.0170 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}$$

$$D_{r10} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Tereduksi Total Orde 9**

$$A_{r9} = \begin{pmatrix}
0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 & 0.0023 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 & 0.0026 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 & 0.0056 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 & -0.0041 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 & -0.0476 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 & -0.0359 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 & 0.1096 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 & 0.2988 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0023 & -0.0026 & 0.0056 & -0.0041 & 0.0476 & -0.0359 & -0.1096 & 0.2988 & -0.0697 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.9157 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966
\end{pmatrix}$$

$$B_{r9} = \begin{pmatrix}
1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.8127 \\ 0.1652 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210
\end{pmatrix}$$

$$C_{r9} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 & 0.1653 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}$$

$$D_{r9} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Tereduksi Total Orde 8**

$$A_{r8} = \begin{pmatrix}
0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0080 & -0.0060 & -0.0164 & 0.0099 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0.0116 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0.0336 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0.0080 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & -0.1170 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & -0.0960 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0.2630 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0100 & -0.0116 & 0.0336 & 0.0080 & 0.1170 & -0.0961 & -0.2630 & -0.6028 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966
\end{pmatrix}$$

$$
B_{r8} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.8127 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix}
$$

$$
C_{r8} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 0.8128 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}
$$

$$
D_{r8} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}
$$

- **Tereduksi Total Orde 7**

$$
A_{r7} = \begin{pmatrix}
0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & -0.0164 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & -0.0191 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & -0.0698 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & -0.0868 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0.0773 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0.1589 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0165 & -0.0191 & 0.0698 & 0.0868 & 0.0773 & -0.1590 & 0.7304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966
\end{pmatrix}
$$

$$
B_{r7} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 1.4677 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix}
$$

$$
C_{r7} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & -1.4677 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}
$$

$$
D_{r7} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}
$$

- ## **Tereduksi Total Orde 6**

$$A_{r6} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & -0.0060 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & -0.0070 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & -0.0272 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & -0.0493 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & -0.9378 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0060 & 0.0070 & -0.0272 & -0.0492 & 0.9378 & 0.1924 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966 \end{pmatrix}$$

$$B_{r6} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ -0.5504 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix}$$

$$C_{r6} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & -0.5506 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}$$

$$D_{r6} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- ## **Tereduksi Total Orde 5**

$$A_{r5} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0.0088 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0.0103 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0.0385 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0.0641 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0089 & 0.0103 & -0.0385 & -0.0641 & 0.0960 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966 \end{pmatrix}$$

$$B_{r5} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ -0.7963 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix}$$

$$C_{r5} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 0.7960 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}$$

$$D_{r5} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- ## **Tereduksi Total Orde 4**

$$A_{r4} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & -0.0041 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & -0.0048 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & -0.0132 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0042 & 0.0048 & -0.0132 & 0.9891 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966 \end{pmatrix}$$

$$B_{r4} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ -0.3250 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix}$$

$$C_{r4} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & -0.3251 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}$$

$$D_{r4} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- ## **Tereduksi Total Orde 3**

$$A_{r3} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & -0.0622 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9800 & 0.1239 & -0.0718 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0624 & 0.0716 & 0.9500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966 \end{pmatrix}$$

$$B_{r3} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ -2.0692 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix}$$

$$C_{r3} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & -2.0692 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}$$

$$D_{r3} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Tereduksi Total Orde 2**

$$A_{r2} = \begin{pmatrix} 0.1455 & 0.9800 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9800 & 0.1239 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2058 & 1.0330 & -0.0562 & -0.2178 & -0.5929 & -0.0644 \\ 0 & 0 & 0.3792 & -0.6473 & -0.0921 & -0.0688 & -0.2525 & -0.9157 \\ 0 & 0 & -0.1110 & -0.0636 & -1.0619 & 0.0082 & 0.1054 & 0.0331 \\ 0 & 0 & -0.1992 & -0.1088 & 0.0340 & -1.0059 & 0.1591 & 0.3868 \\ 0 & 0 & -0.5706 & -0.3228 & 0.1072 & 0.1462 & 0.6799 & -0.6679 \\ 0 & 0 & -0.8878 & -0.5370 & 0.0353 & -0.0568 & -0.6429 & 0.1966 \end{pmatrix}$$

$$B_{r2} = \begin{pmatrix} 1.2315 \\ 1.3997 \\ 0.7593 \\ 1.7826 \\ 0.4714 \\ -0.4045 \\ 0.1633 \\ -0.4210 \end{pmatrix} \qquad D_{r2} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{r2} = \begin{pmatrix} 1.2347 & -1.3969 & 1.4026 & 2.2626 & 0.7456 & -2.5882 & -0.3583 & -0.9655 \end{pmatrix}$$

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Awal**

rata-rata *error* untuk sistem awal										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,3056	0,0347	0,1450	0,1652	0,0374	0,0123	0,0911	0,0856	0,2488	0,2505
2	0,7300	0,4696	0,2385	0,9384	0,5648	0,0186	0,4309	0,2926	0,3371	0,6741
3	0,4648	0,1800	0,5747	0,0477	0,4199	0,162	0,5474	0,2084	0,0415	0,4052
4	0,0115	0,0040	0,3000	0,1603	0,1316	0,0694	0,1160	0,2824	0,0193	0,1901
5	0,1251	0,3173	0,0732	0,0185	0,1920	0,1015	0,0087	0,0687	0,1861	0,4938
6	0,3115	0,2028	0,2858	0,0537	0,4559	0,3466	0,1774	0,4461	0,1565	0,1880
7	0,2573	0,1692	0,2834	0,2340	0,2379	0,1994	0,0886	0,1923	0,3471	0,0107
8	0,0591	0,3126	0,1470	0,0775	0,4586	0,047	0,0660	0,1299	0,0757	0,3296
9	0,2415	0,4969	0,3072	0,2989	0,6559	0,9804	0,2232	0,1269	0,0017	0,2131
10	0,5460	0,1034	0,3563	0,2336	0,1263	0,3153	0,2139	0,4253	0,4446	0,1379
11	0,4558	0,9110	0,2582	0,2139	0,2103	0,2566	0,1058	0,2331	0,1610	0,2105
12	0,4254	0,8277	0,1823	0,4922	0,7387	0,0816	0,3531	0,0376	0,0260	0,5119
13	0,0436	0,1523	0,0549	0,1393	0,0234	0,1812	0,0494	0,2265	0,0851	0,0453
14	0,1883	0,2781	0,2652	0,2236	0,0198	0,3788	0,1085	0,5068	0,7880	0,1290
15	0,1287	1,3579	0,3919	0,5169	0,9439	1,1672	1,0860	1,3141	0,9174	0,3950
16	0,3068	0,4239	0,3773	0,2507	0,6763	0,1694	0,6181	0,1261	0,5338	0,7741
17	0,8558	1,3110	0,8642	0,7387	0,4556	0,8504	0,7082	1,3497	0,9072	0,6656
18	0,0431	0,4363	0,3235	0,1978	0,1635	0,5996	0,0391	0,1802	0,0717	0,1274
19	0,2940	0,1869	0,0846	0,1511	0,0879	0,5903	0,1030	0,0163	0,3644	0,2351
20	0,0416	0,1445	0,0792	0,2593	0,0355	0,0403	0,1117	0,0041	0,0947	0,0026
jumlah	5,8355	8,3201	5,5924	5,4113	6,6352	6,5679	5,2461	6,2527	5,8077	5,9895
rata-rata	0,2917	0,4160	0,2796	0,2705	0,3317	0,3283	0,2623	0,3126	0,2903	0,2994

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Setimbang**

rata-rata *error* untuk sistem setimbang										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,2376	0,066	0,117	0,0412	0,2118	0,1472	0,0996	0,0306	0,0032	0,0954
2	0,4044	0,2408	0,2726	0,0839	0,5415	0,1313	0,0939	0,3182	0,1812	0,1794
3	0,3781	0,2031	0,1018	0,2863	0,7215	0,5143	0,0849	0,4492	0,1493	0,2175
4	0,2706	0,0621	0,7055	0,4713	0,0406	0,2366	0,172	0,0722	0,0289	0,1391
5	0,1608	0,0657	0,1498	0,2416	0,199	0,1834	0,0291	0,1266	0,0347	0,0123
6	0,0006	0,2482	0,1088	0,042	0,2932	0,5227	0,2631	0,1615	0,004	0,6161
7	0,286	0,3255	0,0775	0,1481	0,2744	0,0735	0,0415	0,2784	0,2651	0,1091
8	0,1814	0,0305	0,0558	0,2149	0,3075	0,1497	0,2038	0,1099	0,0781	0,0156
9	0,0780	0,162	0,0584	0,2641	0,045	0,254	0,0412	0,0014	0,0353	0,1362
10	0,1509	0,0628	0,0939	0,2493	0,0044	0,0666	0,0733	0,0051	0,1289	0,0376
11	0,1613	0,1415	0,0684	0,1185	0,0228	0,1082	0,3836	0,1026	0,023	0,1177
12	0,028	0,0791	0,092	0,0387	0,0367	0,131	0,2305	0,0388	0,2135	0,2351
13	0,4497	0,0654	0,1175	0,0132	0,1745	0,0036	0,1487	0,0774	0,084	0,2121
14	0,1448	0,1927	0,0439	0,0316	0,1821	0,0031	0,0304	0,0638	0,2201	0,1602
15	1,2878	0,1742	0,0599	0,8737	0,1292	0,0634	0,1332	0,2071	0,073	0,8932
16	0,6462	0,0234	0,1721	0,3156	1,0485	0,3982	0,1078	0,0182	0,1063	0,7833
17	0,1416	0,7022	0,9062	0,2567	0,1112	0,8227	0,4402	0,1898	0,0932	1,1544
18	0,246	0,4183	0,0691	0,0372	0,2694	0,335	0,0849	0,6907	0,3154	0,0735
19	0,4481	0,411	0,5038	0,0611	0,108	0,7162	0,0634	0,638	0,2098	0,1481
20	0,7959	0,5038	0,614	0,225	0,3471	0,0891	0,2302	0,0279	0,3393	0,0735
jumlah	6,4978	4,1783	4,388	4,014	5,0684	4,9498	2,9553	3,6074	2,5863	5,4094
rata-rata	0,3248	0,2089	0,2194	0,2007	0,2534	0,2474	0,1477	0,1803	0,1293	0,2704

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 13**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 13										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,2376	0,2508	0,1069	0,0101	0,2666	0,1307	0,0387	0,0172	0,3774	0,0303
2	0,6075	0,0317	0,0533	0,2931	0,0875	0,0274	0,322	0,0182	0,1256	0,4484
3	0,0462	0,4334	0,352	0,1495	0,1862	0,0521	0,2219	0,002	0,24	0,1578
4	0,0304	0,6474	0,0647	0,0371	0,1645	0,0052	0,0705	0,0679	0,0471	0,1314
5	0,1096	0,1791	0,1527	0,2842	0,0023	0,1171	0,1121	0,0541	0,0856	0,2745
6	0,1743	0,2024	0,0923	0,3272	0,0254	0,4711	0,2551	0,0555	0,034	0,0763
7	0,0151	0,003	0,0083	0,1684	0,0915	0,0381	0,1978	0,0688	0,3565	0,0345
8	0,045	0,056	0,0541	0,1708	0,0442	0,0648	0,1392	0,0843	0,0423	0,2635
9	0,0062	0,1802	0,1774	0,2593	0,0544	0,0267	0,0739	0,0196	0,1358	0,0884
10	0,1483	0,0047	0,0386	0,0599	0,0285	0,0911	0,0621	0,0933	0,0187	0,0846
11	0,0781	0,0636	0,1215	0,0583	0,1717	0,1108	0,1663	0,0239	0,032	0,1405
12	0,0976	0,0738	0,0295	0,0518	0,0562	0,1044	0,0335	0,0103	0,0209	0,058
13	0,0583	0,1412	0,007	0,0112	0,0164	0,0138	0,1156	0,0202	0,1696	0,1474
14	0,0134	0,0384	0,2059	0,047	0,1467	0,0053	0,0247	0,0496	0,0048	0,4694
15	0,2767	0,357	0,1534	0,1225	0,1271	0,1159	0,1006	0,0794	0,0011	0,0806
16	0,1494	0,0342	0,0411	0,2886	0,0027	0,4924	0,2075	0,2196	0,0858	0,276
17	0,0028	0,2222	0,0627	0,0097	0,0546	0,2047	0,3552	0,069	0,0554	0,0642
18	0,4068	0,3289	0,0299	0,2028	0,3792	0,4719	0,2939	0,1344	0,1147	0,0712
19	0,2158	0,1329	0,1808	0,0637	0,166	0,2546	0,1136	0,023	0,2395	0,0159
jumlah	2,7191	3,3809	1,9321	2,6152	2,0717	2,7981	2,9042	1,1103	2,1868	2,9129
rata-rata	0,1431	0,1779	0,1016	0,1376	0,1090	0,1472	0,1528	0,0584	0,1150	0,1533

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 12**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 12										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,1867	0,1318	0,3669	0,1952	0,1464	0,0409	0,008	0,2382	0,0996	0,2376
2	0,1317	0,0874	0,1467	0,0279	0,1537	0,2201	0,2155	0,1443	0,1943	0,2277
3	0,1964	0,2	0,2462	0,1804	0,0153	0,1383	0,3709	0,3652	0,2217	0,1467
4	0,1541	0,1011	0,2594	0,5302	0,2974	0,1161	0,0393	0,0601	0,3277	0,0829
5	0,091	0,2338	0,702	0,0444	0,0585	0,1121	0,3716	0,1554	0,0543	0,0677
6	0,5535	0,4323	0,0861	0,1348	0,1429	0,0518	0,0063	0,2527	0,3307	0,394
7	0,3033	0,296	0,0062	0,051	0,0311	0,3305	0,0218	0,0142	0,0867	0,1333
8	0,0516	0,1066	0,2189	0,075	0,0638	0,4	0,0138	0,0682	0,2863	0,1447
9	0,1263	0,0457	0,081	0,3078	0,2529	0,0324	0,0533	0,2057	0,1547	0,101
10	0,1442	0,2145	0,0107	0,054	0,1442	0,0832	0,1697	0,2222	0,0534	0,1567
11	0,0088	0,0836	0,1323	0,0433	0,221	0,1588	0,0452	0,0695	0,0104	0,0201
12	0,1715	0,0991	0,0011	0,0202	0,0796	0,0276	0,0266	0,1717	0,1249	0,0827
13	0,144	0,0826	0,0978	0,012	0,0362	0,2293	0,0596	0,5171	0,0462	0,177
14	0,3734	0,0073	0,0295	0,4637	0,0133	0,7134	0,2615	0,4114	0,2997	0,3108
15	0,1649	0,1339	0,1701	0,4116	0,3188	0,2882	0,176	0,2225	0,4022	0,1296
16	0,2677	0,0671	0,112	0,0572	0,2212	0,1279	0,0155	0,0967	0,0881	0,1871
17	0,335	0,1275	0,4144	0,1061	0,1053	0,7594	0,1584	0,0089	0,0605	0,281
18	0,0518	0,0086	0,1557	0,2877	0,0676	0,1662	0,1627	0,1912	0,0116	0,1775
jumlah	3,4559	2,4589	3,237	3,0025	2,3692	3,9962	2,1757	3,4152	2,853	3,0581
rata-rata	0,1919	0,1366	0,1798	0,1668	0,1316	0,2220	0,1208	0,1897	0,1585	0,1698

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 11**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 11										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,1708	0,0331	0,2942	0,1633	0,1385	0,1735	0,1035	0,26	0,0466	0,4439
2	0,521	0,1798	0,104	0,4121	0,0278	0,2317	0,1658	0,2628	0,1537	0,5117
3	0,0005	0,1438	0,0113	0,0975	0,4094	0,3974	0,023	0,2526	0,1754	0,0812
4	0,1775	0,2095	0,175	0,3646	0,4872	0,0959	0,0107	0,0309	0,4292	0,3408
5	0,387	0,1347	0,2363	0,2929	0,2386	0,5511	0,2031	0,2413	0,3361	0,2971
6	0,4089	0,0335	0,3726	0,18	0,145	0,1917	0,1662	0,0171	0,0623	0,4372
7	0,2871	0,0086	0,1368	0,3432	0,1035	0,0354	0,2856	0,0019	0,31	0,0499
8	0,1993	0,0465	0,0642	0,1937	0,0892	0,0649	0,126	0,0678	0,0359	0,1375
9	0,0271	0,0763	0,0393	0,0432	0,0629	0,276	0,0211	0,0043	0,093	0,0355
10	0,1055	0,0485	0,1519	0,2622	0,0759	0,0129	0,0692	0,1005	0,0109	0,03
11	0,0565	0,0688	0,1203	0,2244	0,069	0,0013	0,0286	0,1301	0,2747	0,0155
12	0,2685	0,4959	0,5722	0,0306	0,6262	0,6456	0,087	1,357	0,6868	0,1076
13	0,1581	0,4437	0,0549	0,4917	0,2728	0,1807	0,5385	0,8713	0,0321	0,3216
14	0,541	0,1273	0,4439	0,4205	0,3981	0,2713	0,2345	0,8159	0,2404	0,0959
15	0,2776	0,0981	0,0194	0,1163	0,2506	0,0972	0,0866	0,0789	0,2618	0,0516
16	0,3652	1,0438	0,8294	1,5801	0,1779	0,5906	0,3031	0,1452	0,2591	2,0009
17	0,3606	0,1129	0,458	0,1679	0,1885	0,3837	0,4829	1,3638	0,3459	0,0247
jumlah	4,3122	3,3048	4,0837	5,3842	3,7611	4,2009	2,9354	6,0014	3,7539	4,9826
rata-rata	0,2536	0,1944	0,2402	0,3167	0,2212	0,2471	0,1726	0,3530	0,2208	0,2930

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 10**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 10										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0791	0,2314	0,2982	0,1893	0,2098	0,4256	0,0954	0,1295	0,0512	0,0352
2	0,0785	0,2542	0,2896	0,0197	0,0745	0,0752	0,0863	0,2498	0,1808	0,1942
3	0,3418	0,0192	0,2247	0,0942	0,0478	0,0345	0,0823	0,1346	0,0601	0,0492
4	0,0347	0,0725	0,4169	0,6246	0,1572	0,023	0,2432	0,474	0,1626	0,0138
5	0,323	0,2284	0,0088	0,0129	0,114	0,1019	0,1332	0,4979	0,0196	0,1227
6	0,2885	0,1095	0,0253	0,0351	0,3969	0,1842	0,3486	0,0456	0,118	0,1128
7	0,0611	0,0757	0,1893	0,1926	0,0211	0,1895	0,112	0,0533	0,0104	0,0931
8	0,03	0,0004	0,0536	0,0086	0,1027	0,0956	0,227	0,0951	0,081	0,1263
9	0,0511	0,0456	0,2146	0,1093	0,0343	0,002	0,0616	0,1514	0,2179	0,1152
10	0,0249	0,0127	0,0386	0,0258	0,1616	0,0367	0,1316	0,0097	0,1629	0,15
11	0,1645	0,4275	0,5017	0,2639	0,3628	0,0749	0,2718	0,3772	0,5413	0,0061
12	0,2582	0,3177	0,5557	0,2032	0,2872	0,3025	0,2957	0,3694	0,1352	0,0794
13	0,2232	0,9833	0,0886	0,3704	0,5818	0,4707	0,2579	0,4155	0,0913	0,3359
14	0,2335	0,3527	0,0416	0,2345	0.0282	0,113	0,0107	0,3322	0,1015	0,1787
15	0,7474	0,0879	0,9262	0,0652	0,7202	0,3959	0,1538	0,2041	0,0012	0,697
16	0,6234	0,3938	0,1486	0,6396	0,5588	0,3632	0,1247	0,1873	0,1031	0,2482
jumlah	3,5629	3,6125	4,022	3,0889	3,8307	2,8884	2,6358	3,7266	2,0381	2,5578
rata-rata	0,2226	0,2257	0,2513	0,1930	0,2394	0,1805	0,1647	0,2329	0,1273	0,1598

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 9**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 9										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,1899	0,1285	0,3833	0,2836	0,3378	0,0126	0,0417	0,2407	0,0111	0,1177
2	0,1265	0,033	0,4244	0,1856	0,0682	0,2412	0,3175	0,2181	0,4492	0,5643
3	0,1651	0,0739	0,2384	0,0458	0,47	0,0761	0,5575	0,1495	0,0032	0,3262
4	0,1173	0,2478	0,5262	0,2982	0,0617	0,2433	0,3183	0,3385	0,2339	0,1124
5	0,1625	0,2766	0,3869	0,0516	0,0796	0,2773	0,1379	0,1854	0,3183	0,1833
6	0,1301	0,0006	0,1176	0,0899	0,1595	0,0633	0,1364	0,3761	0,2599	0,2093
7	0,0225	0,098	0,2191	0,0844	0,0582	0,0232	0,17	0,0292	0,045	0,2401
8	0,1439	0,1836	0,0451	0,1849	0,2252	0,0528	1,0087	0,1594	0,148	0,5719
9	0,1544	0,1383	0,2462	0,0105	0,0384	0,0583	0,1669	0,1051	0,2356	0,0432
10	0,618	0,8441	0,0153	0,4849	0,0656	0,0069	0,3246	0,5466	0,0214	0,1814
11	0,19	0,22	0,1613	0,2293	0,0589	0,0988	0,2166	0,6434	0,3015	0,2231
12	0,0663	0,2122	0,3789	0,051	0,1045	0,1586	0,4725	0,7751	0,164	0,5935
13	0,0173	0,0405	0,1756	0,2249	0,1819	0,1848	0,1718	0,0124	0,0194	0,293
14	1,0571	0,0579	0,0353	0,8315	0,0771	0,3435	0,2097	0,0268	0,4386	0,1645
15	0,2053	0,5029	0,4168	0,0881	0,4101	0,6201	0,276	0,184	0,1535	0,0268
jumlah	3,3662	3,0579	3,7704	3,1442	2,3967	2,4608	4,5261	3,9903	2,8026	3,8507
rata-rata	0,2244	0,2038	0,2513	0,2096	0,1597	0,1640	0,3017	0,2660	0,1868	0,2567

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 8**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 8										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,1231	0,4082	0,1356	0,0709	0,6139	0,1415	0,0654	0,2861	0,2124	0,0011
2	0,0413	0,108	0,1377	0,0878	0,2456	0,2667	0,1024	0,292	0,1238	0,2636
3	0,1883	0,3812	0,0237	0,2319	0,0008	0,0968	0,0569	0,1578	0,0864	0,1312
4	0,3044	0,098	0,1033	0,3558	0,3131	0,187	0,0499	0,0217	0,2388	0,1993
5	0,1481	0,2116	0,0224	0,0384	0,1541	0,4806	0,0409	0,2457	0,0306	0,2828
6	0,2337	0,154	0,3353	0,0532	0,05	0,0973	0,0527	0,0077	0,1231	0,3504
7	0,1911	0,2041	0,2059	0,0928	0,0434	0,0759	0,1535	0,1302	0,0812	0,0028
8	0,0141	0,0903	0,1779	0,1884	0,0347	0,1179	0,2181	0,1269	0,0282	0,1014
9	0,1232	0,3504	0,1328	0,2805	0,1617	0,6683	0,2144	0,7095	0,5539	0,0459
10	0,1585	0,9809	0,1445	0,6417	0,3404	0,1037	0,1005	0,7278	0,4039	0,1363
11	0,4975	0,9013	0,0436	0,5077	0,1207	0,1678	0,176	0,2371	0,8673	0,4533
12	0,2439	0,496	0,0116	0,1151	0,1893	0,0878	0,0539	0,3253	0,1784	0,2398
13	0,3933	0,194	0,3078	0,2015	0,6706	0,5031	0,0853	0,4621	0,5778	0,9292
14	0,7414	0,1168	0,4943	0,0267	0,2351	0,8265	0,3978	0,4071	0,2581	0,2859
jumlah	3,4019	4,6948	2,2764	2,8924	3,1734	3,8209	1,7677	4,137	3,7639	3,423
rata-rata	0,2429	0,3353	0,1626	0,2066	0,2266	0,2729	0,1262	0,2955	0,26885	0,2445

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 7**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 7										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0578	0,1256	0,2347	0,2063	0,3639	0,0695	0,1973	0,3977	0,123	0,2493
2	0,058	0,3859	0,1284	0,0881	0,1694	0,3108	0,128	0,2253	0,3084	0,0581
3	0,1779	0,2216	0,4982	0,0488	0,3434	0,4358	0,1419	0,5196	0,1143	0,3426
4	0,1429	0,0968	0,169	0,2493	0,3649	0,076	0,3375	0,2325	0,495	0,0059
5	0,0989	0,0948	0,1778	0,0681	0,0543	0,0618	0,1424	0,425	0,371	0,2347
6	0,1639	0,0244	0,1352	0,3865	0,0134	0,3695	0,1306	0,0426	0,3668	0,187
7	0,2736	0,0729	0,2348	0,2375	0,071	0,0687	0,1065	0,041	0,313	0,3048
8	0,6555	0,4163	0,0265	0,3157	0,4872	0,9093	0,2952	0,931	0,6246	0,3575
9	0,306	0,2358	0,3279	0,1476	0,0665	0,0125	0,0323	0,3548	0,0439	0,6044
10	0,1433	0,2561	0,4102	0,1242	0,3049	0,2944	0,6176	0,9453	0,5654	0,1985
11	0,0344	0,2883	0,2538	0,0252	0,1648	0,386	0,063	0,0639	0,1328	0,0747
12	0,4642	0,7155	0,1412	0,6455	0,3535	0,5662	0,1644	0,4842	0,8673	0,1279
13	0,1409	0,2532	0,0529	0,0719	0,2882	0,6581	0,4014	0,779	0,3203	0,1375
jumlah	2,7173	3,1872	2,7906	2,6147	3,0454	4,2186	2,7581	5,4419	4,6458	2,8829
rata-rata	0,2090	0,2451	0,2146	0,2011	0,2342	0,3245	0,2121	0,4186	0,3573	0,2217

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 6**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 6										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0203	0,013	0,2216	0,1704	0,1539	0,1344	0,3216	0,1943	0,2381	0,1634
2	0,0204	0,2437	0,0192	0,2647	0,0721	0,2269	0,3373	0,1122	0,2819	0,3975
3	0,1994	0,3175	0,0602	0,0703	0,1213	0,2468	0,0501	0,3086	0,4837	0,2592
4	0,1282	0,1032	0,0797	0,2878	0,0309	0,3801	0,0691	0,0063	0,8053	0,1444
5	0,4606	0,0282	0,2061	0,2148	0,0724	0,2808	0,0743	0,2347	0,0056	0,0393
6	0,37	0,0793	0,0002	0,2942	0,1915	0,4379	0,3429	0,0104	0,2523	0,0727
7	0,1987	0,252	0,1172	0,8631	0,6463	0,07	0,148	0,281	0,4791	0,4729
8	0,1883	0,2942	0,2421	0,3885	0,4074	0,2891	0,3661	0,5884	0,4062	0,29
9	0,3038	0,0393	0,148	0,5071	0,2538	0,2989	0,4725	0,7702	0,2791	0,369
10	0,158	0,0007	0,2484	0,2449	0,1678	0,1543	0,4434	0,1533	0,0483	0,2639
11	0,1269	0,747	0,3302	0,2398	0,383	0,022	0,2314	0,0232	0,1118	0,2485
12	0,0472	0,336	0,2547	0,4684	0,2664	0,2058	0,5382	0,0759	0,2833	0,4626
jumlah	2,2218	2,4541	1,9276	4,014	2,7668	2,747	3,3949	2,7585	3,6747	3,1834
rata-rata	0,1851	0,2045	0,1606	0,3345	0,2305	0,2289	0,2829	0,2298	0,3062	0,2652

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 5**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 5										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,3332	0,2843	0,0554	0,0253	0,2306	0,1943	0,2785	0,2322	0,2272	0,0868
2	0,1407	0,3374	0,0532	0,4906	0,0527	0,166	0,3871	0,0808	0,209	0,1852
3	0,2514	0,1238	0,0958	0,0037	0,3732	0,2011	0,1544	0,1858	0,148	0,3301
4	0,1808	0,1723	0,1962	0,2519	0,1941	0,1573	0,0735	0,3432	0,2049	0,4178
5	0,069	0,0022	0,1197	0,2714	0,0057	0,0897	0,1118	0,0359	0,1339	0,077
6	0,6497	0,1638	0,2662	0,2941	0,3487	0,5194	0,1959	0,118	0,3189	0,2561
7	0,2952	0,2509	0,1749	0,0268	0,1009	0,113	0,4037	0,2255	0,1367	0,0563
8	0,4442	0,8975	0,4098	0,0457	0,2509	0,0702	0,4738	0,1786	0,5973	0,5981
9	0,1704	0,1996	0,0673	0,3004	0,0621	0,221	0,151	0,0755	0,566	0,3098
10	0,5662	0,5117	0,4095	0,0922	0,3743	0,8975	0,2243	0,0819	0,0234	0,5657
11	0,6033	0,2843	0,1001	0,0741	0,4851	0,6868	0,2434	0,4205	0,4039	0,5531
jumlah	3,7041	3,2278	1,9481	1,8762	2,4783	3,3163	2,6974	1,9779	2,9692	3,436
rata-rata	0,3367	0,2934	0,1771	0,1705	0,2253	0,3014	0,2452	0,1798	0,2699	0,3123

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 4**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 4										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,1409	0,056	0,1558	0,0916	0,1409	0,056	0,1726	0,0916	0,3937	0,375
2	0,2915	0,0124	0,1726	0,0983	0,2915	0,0124	0,1558	0,0983	0,3154	0,1059
3	0,4507	0,0223	0,0691	0,227	0,4507	0,0223	0,0691	0,227	0,2227	0,0425
4	0,7035	0,2485	0,299	0,0808	0,7035	0,2485	0,299	0,0808	0,2419	0,098
5	0,2387	0,4926	0,0853	0,0103	0,2387	0,4926	0,0853	0,0103	0,137	0,6287
6	0,0368	0,1208	0,1162	0,0566	0,0368	0,1208	0,1162	0,0566	0,3196	0,149
7	0,3994	0,2362	0,2394	0,953	0,3994	0,2362	0,2394	0,953	0,2546	0,1833
8	0,9248	0,1919	0,0452	0,6649	0,0035	0,1919	0,0452	0,6649	0,0367	0,3129
9	0,0035	0,8272	0,129	0,0809	0,9248	0,5343	0,129	0,0809	0,3637	0,273
10	0,2866	0,5343	0,378	0,2141	0,2866	0,8272	0,378	0,2141	0,9223	0,0885
jumlah	3,4764	2,7422	1,6896	2,4775	3,4764	2,7422	1,6896	2,4775	3,2076	2,2568
rata-rata	0,3476	0,2742	0,1689	0,2477	0,3476	0,2742	0,1689	0,2477	0,3207	0,2256

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 3**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 3										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,061	0,0161	0,5416	0,0847	0,1535	0,0827	0,3253	0,1045	0,0282	0,0194
2	0,245	0,32	0,3164	0,3071	0,046	0,1825	0,0323	0,1367	0,1103	0,1693
3	0,0438	0,292	0,0653	0,1229	0,068	0,153	0,304	0,0566	0,1133	0,3958
4	0,3085	0,4934	0,4529	0,3619	0,0995	0,5522	0,0894	0,006	0,0545	0,3861
5	0,5983	0,2711	0,942	0,645	0,0863	0,3782	0,1027	0,4114	0,2172	0,1961
6	0,4359	0,0838	0,7314	0,8898	0,199	0,2601	0,0282	0,0526	0,4241	0,3875
7	0,0026	0,021	0,3702	0,2579	0,221	0,0572	0,3552	0,079	0,0206	0,2959
8	0,1989	0,0517	0,5983	0,3224	0,4308	0,23	0,0439	0,171	0,6436	0,0246
9	0,3099	0,3969	0,052	0,5971	0,2148	0,1593	0,187	0,025	0,2302	0,0266
jumlah	2,2039	1,946	4,0701	3,5888	1,5189	2,0552	1,468	1,0428	1,842	1,9013
rata-rata	0,2448	0,2162	0,4522	0,3987	0,1687	0,2283	0,1631	0,1158	0,2046	0,2112

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 2**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 2										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0759	0,2077	0,0067	0,1022	0,0273	0,0971	0,2795	0,0151	0,381	0,1142
2	0,1359	0,012	0,1047	0,2504	0,111	0,1656	0,0138	0,1707	0,1998	0,213
3	0,2342	0,1245	0,4658	0,0858	0,3349	0,2706	0,0885	0,2674	0,2575	0,3788
4	0,4718	0,0618	0,7502	0,1334	0,1778	0,1279	0,2008	0,1925	0,0122	0,2175
5	0,0512	0,2598	0,2703	0,0428	0,414	0,1721	0,2039	0,3478	0,3527	0,0548
6	0,1312	0,1278	0,5516	0,1351	0,4117	0,1396	0,0309	0,1745	0,079	0,1296
7	0,1208	0,2384	0,2598	0,2312	0,783	0,099	0,0794	0,4542	0,4656	0,3517
8	0,1342	0,1448	0,2324	0,1411	0,8877	0,3634	0,4501	0,1079	0,0079	0,0309
jumlah	1,3552	1,1768	2,6415	1,122	3,1474	1,4353	1,3469	1,7301	1,7557	1,4905
rata-rata	0,1694	0,1471	0,3301	0,1402	0,3934	0,1794	0,1683	0,2162	0,2194	0,1863

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error***

	rata-rata *error*								
percobaan	awal	setimbang	orde 2	orde 3	orde 4	orde 5	orde 6	orde 7	orde 8
1	0,291775	0,32489	0,1694	0,24487778	0,34764	0,33673636	0,18515	0,20902308	0,24299286
2	0,416005	0,208915	0,1471	0,21622222	0,27422	0,29343636	0,20450833	0,24516923	0,33534286
3	0,27962	0,2194	0,3301875	0,45223333	0,16896	0,1771	0,16063333	0,21466154	0,1626
4	0,270565	0,2007	0,14025	0,39875556	0,24775	0,17056364	0,3345	0,20113077	0,2066
5	0,33176	0,25342	0,393425	0,16876667	0,34764	0,2253	0,23056667	0,23426154	0,22667143
6	0,328395	0,24749	0,1794125	0,22835556	0,27422	0,30148182	0,22891667	0,32450769	0,27292143
7	0,262305	0,147765	0,1683625	0,16311111	0,16896	0,24521818	0,28290833	0,21216154	0,12626429
8	0,312635	0,18037	0,2162625	0,11586667	0,24775	0,17980909	0,229875	0,41860769	0,2955
9	0,290385	0,129315	0,2194625	0,20466667	0,32076	0,26992727	0,306225	0,35736923	0,26885
10	0,299475	0,27047	0,1863125	0,21125556	0,22568	0,31236364	0,26528333	0,22176154	0,2445
jumlah	3,08292	2,182735	2,150175	2,40411111	2,62358	2,51193636	2,42856667	2,63865385	2,38224286
rata-rata	0,308292	0,2182735	0,2150175	0,24041111	0,262358	0,25119364	0,24285667	0,26386538	0,23822429

- **Tabel Rata-Rata Waktu Komputasi**

	rata-rata waktu komputasi								
percobaan	awal	setimbang	orde 2	orde 3	orde 4	orde 5	orde 6	orde 7	orde 8
1	0,794596	0,327883	0,318752	0,350491	0,317076	0,328967	0,338177	0,333309	0,314173
2	0,719301	0,315307	0,380698	0,344824	0,315334	0,320144	0,326482	0,331997	0,326859
3	0,783125	0,353903	0,351934	0,34569	0,322272	0,315363	0,321298	0,319315	0,319092
4	0,725833	0,330264	0,343456	0,487524	0,336245	0,333591	0,341222	0,309244	0,317578
5	0,726957	0,318322	0,295546	0,359439	0,313536	0,317796	0,313665	0,335491	0,325326
6	0,719774	0,330386	0,363052	0,379602	0,346666	0,336685	0,336382	0,338942	0,325496
7	0,756591	0,322156	0,327037	0,356889	0,315617	0,324376	0,332201	0,325345	0,316813
8	0,717882	0,312583	0,380015	0,365191	0,314169	0,329848	0,326251	0,360002	0,325312
9	0,800096	0,334042	0,347888	0,370623	0,311784	0,319056	0,327622	0,329105	0,332117
10	0,76241	0,331607	0,311639	0,325408	0,331905	0,332992	0,328749	0,323524	0,317845
jumlah	7,506565	3,276453	3,420017	3,685681	3,224604	3,258818	3,292049	3,306274	3,220611
rata-rata	0,7506565	0,3276453	0,3420017	0,3685681	0,3224604	0,3258818	0,3292049	0,3306274	0,3220611

LAMPIRAN C
KASUS 3

- **Matriks Unitary U_d**

$$U_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, dari tahap pertama transformasi sistem diperoleh, $G_t = \left[\frac{U_d{}^T AU_d}{CU_d}\middle|\frac{U_d{}^T B}{D}\right] = \left[\frac{A_t}{C_t}\middle|\frac{B_t}{D}\right]$ dengan:

$$A_t = \begin{pmatrix} -0.4000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2000 \end{pmatrix}$$

$$B_t = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -4 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad D_t = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$C_t = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 2 & 4 & 2 & -2 & -4 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

- **Matriks W_d**

$$W_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh sistem sebagai berikut: $G_d = \left[\frac{W_d{}^{-1}\, A_t W_d}{C_t W_d} \middle| \frac{W_d{}^{-1} B_t}{D}\right] = \left[\frac{A_d}{C_d} \middle| \frac{B_d}{D}\right]$

dengan:

$$A_d = \begin{pmatrix} -0.4000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.3000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2000 \end{pmatrix}$$

$$B_d = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -4 \\ -2 \\ -6 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad D = (0)$$

$$C_d = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 2 & 4 & 2 & -2 & -4 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

- **Subsistem tidak Stabil A_u**

$$A_u = \begin{pmatrix} -1.3000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2000 \end{pmatrix}$$

$$B_u = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C_u = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D_u = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Tereduksi Total Orde 3**

$$A_{r3} = \begin{pmatrix} -0.5919 & -0.2400 & 0.1125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2400 & 0.8634 & 0.1655 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1125 & 0.1655 & -0.7073 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.3000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2000 \end{pmatrix}$$

$$B_{r3} = \begin{pmatrix} -5.2647 \\ 0.7112 \\ -0.6750 \\ -6 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C_{r3} = \begin{pmatrix} 5.2647 & -0.7112 & 0.6750 & 2 & -2 & -4 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D_{r3} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Tereduksi Total Orde 2**

$$A_{r2} = \begin{pmatrix} -0.5919 & -0.2400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2400 & 0.8634 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.3000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2000 \end{pmatrix}$$

$$B_{r2} = \begin{pmatrix} -5.2647 \\ 0.7112 \\ -6 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C_{r2} = \begin{pmatrix} 5.2647 & -0.7112 & 2 & -2 & -4 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D_{r2} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Awal**

rata-rata *error* untuk sistem awal										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,4173	0,2475	0,5687	0,1395	0,5179	0,2244	0,3434	0,2465	0,7194	1,0346
2	0,2013	1,6073	1,4999	0,5043	0,0408	0,2504	2,0107	3,004	0,0412	0,9064
3	0,0332	0,1312	0,0958	0,0357	0,0413	0,0251	0,0839	0,0112	0,0046	0,0804
4	1,3424	0,0151	0,5717	2,6557	4,369	0,1629	3,0551	2,5367	3,1814	4,0082
5	0,1159	0,099	0,2115	0,0816	0,0984	0,0521	0,1868	0,0218	0,026	0,002
6	0,9206	0,4999	0,9621	0,675	0,2652	0,2922	0,5924	0,6714	0,1678	0,0862
7	0,1547	0,0422	0,2078	0,1314	0,2176	0,2287	0,3521	0,1743	0,0325	0,2226
8	3,1465	0,0339	0,5656	2,8367	0,0425	1,256	3,3905	4,075	2,0643	1,7146
9	0,0393	0,1878	0,2699	0,0237	0,1394	0,0926	0,1313	0,2436	0,1677	0,176
10	0,0711	0,0094	0,5085	0,9317	0,4599	0,4542	0,251	0,9032	0,7858	0,0862
jumlah	6,4423	2,8733	5,4615	8,0153	6,192	3,0386	10,3972	11,8877	7,1907	8,3172
rata-rata	0,6442	0,2873	0,5461	0,8015	0,6192	0,3038	1,0397	1,1887	0,7190	0,8317

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Setimbang**

rata-rata *error* untuk sistem setimbang										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0489	0,0464	0,0418	0,1448	0,0988	0,0308	0,0865	0,1191	0,128	0,2242
2	0,4365	0,0367	0,2351	0,0001	0,0144	0,1311	0,0265	0,1455	0,0127	0,1191
3	0,0138	0,1289	0,1959	0,1851	0,0986	0,3139	0,2722	0,132	0,0054	0,164
4	0,2297	0,1943	0,027	0,0809	0,2113	0,1107	0,0579	0,1267	0,1226	0,2145
5	0,7015	1,7853	0,4543	0,5896	0,9634	0,7843	2,8598	0,1462	2,2934	0,603
6	0,1359	0,0136	0,7323	0,6781	0,7212	0,0931	0,0946	0,3871	0,4803	0,9434
7	0,5759	1,3171	1,3078	0,3083	0,5687	0,61	0,8071	0,0374	0,8346	0,1821
8	1,787	2,0573	1,0417	1,4333	0,1207	1,5739	4,8722	1,2792	3,5953	0,4903
9	2,0637	2,2773	2,6875	1,24	0,9317	0,0288	0,0721	0,1108	2,1453	0,8162
10	0,1325	0,6116	0,3766	0,6448	0,4085	0,3347	0,8466	0,3613	0,4552	0,2476
jumlah	6,1254	8,4685	7,1	5,305	4,1373	4,0113	9,9955	2,8453	10,0728	4,0044
rata-rata	0,6125	0,8468	0,71	0,5305	0,4137	0,4011	0,9995	0,2845	1,0072	0,4004

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 3**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 3										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,2204	0,063	0,0622	0,0415	0,2101	0,0922	0,0154	0,1743	0,0724	0,1104
2	0,0621	0,1429	0,0751	0,0614	0,3348	0,1611	0,1695	0,2688	0,0643	0,1937
3	0,1607	0,0482	0,0578	0,0672	0,273	0,003	0,2534	0,1905	0,0821	0,1893
4	0,6705	1,4345	0,7661	1,1653	0,6751	1,1425	1,2098	0,7683	0,9	0,9628
5	1,2822	0,163	0,3405	0,9961	0,2186	0,0781	0,7572	0,7485	0,7876	0,0333
6	0,0645	0,1137	0,4989	0,0337	0,6702	0,9701	0,5971	0,4436	0,0918	0,1035
7	2,3877	2,8512	1,131	0,1777	0,9119	1,1996	0,3298	2,71	0,3865	1,4811
8	0,1413	1,9714	1,8626	0,3543	0,2158	0,5892	0,4805	2,458	2,2125	1,7142
9	0,014	0,681	0,1443	0,1408	0,7606	0,8784	0,0823	0,4464	0,4794	0,2616
jumlah	5,0034	7,4689	4,9385	3,038	4,2701	5,1142	3,895	8,2084	5,0766	5,0499
rata-rata	0,5559	0,8298	0,5487	0,3375	0,4744	0,5682	0,4327	0,9120	0,5640	0,5611

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 2**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 2										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0846	0,2164	0,1646	0,1055	0,0773	0,0742	0,0551	0,1374	0,2028	0,0372
2	0,0953	0,1967	0,0638	0,0735	0,0516	0,3974	0,0272	0,1435	0,1717	0,1975
3	1,6654	0,3358	0,8617	0,1365	1,3812	0,2729	1,1278	0,9814	0,9787	0,7927
4	1,1424	0,2529	0,17	0,7892	0,9198	0,9041	1,0523	1,1107	0,1296	0,2694
5	0,1534	0,3351	0,7582	0,4455	0,1566	0,5949	0,084	0,2295	0,3117	0,3269
6	0,8414	1,2609	0,4143	1,9631	0,4885	2,2388	0,6182	0,4274	0,904	2,6006
7	0,8437	1,9638	2,2643	1,0423	0,3575	0,223	0,5773	3,4397	2,8631	2,4686
8	0,4175	1,2938	0,0634	0,1468	0,1065	0,8213	0,3849	0,7094	1,1434	0,0961
jumlah	5,2437	5,8554	4,7603	4,7024	3,539	5,5266	3,9268	7,179	6,705	6,789
rata-rata	0,6554	0,7319	0,5950	0,5878	0,4423	0,6908	0,4908	0,8973	0,8381	0,8486

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error***

rata-rata *error*				
percobaan	awal	setimbang	orde 3	orde 2
1	0,64423	0,61254	0,555933333	0,6554625
2	0,28733	0,84685	0,829877778	0,731925
3	0,54615	0,71	0,548722222	0,5950375
4	0,80153	0,5305	0,337555556	0,5878
5	0,6192	0,41373	0,474455556	0,442375
6	0,30386	0,40113	0,568244444	0,690825
7	1,03972	0,99955	0,432777778	0,49085
8	1,18877	0,28453	0,912044444	0,897375
9	0,71907	1,00728	0,564066667	0,838125
10	0,83172	0,40044	0,5611	0,848625
jumlah	6,98158	6,20655	5,784777778	6,7784
rata-rata	0,698158	0,620655	0,578477778	0,67784

- **Tabel Rata-Rata Waktu Komputasi**

rata-rata waktu komputasi				
percobaan	awal	setimbang	orde 3	orde 2
1	0,344725	0,,384927	0,309895	0,329674
2	0,369152	0,314667	0,319585	0,307506
3	0,322341	0,308068	0,306438	0,309414
4	0,315547	0,319704	0,309134	0,32339
5	0,310027	0,319945	0,303335	0,307975
6	0,306092	0,315817	0,304812	0,31773
7	0,379358	0,361749	0,310026	0,317714
8	0,383259	0,317705	0,320014	0,308369
9	0,332351	0,371311	0,313312	0,306031
10	0,303666	0,305247	0,309089	0,308508
jumlah	3,366518	2,934213	3,10564	3,136311
rata-rata	0,3366518	0,2934213	0,310564	0,3136311

LAMPIRAN D
KASUS 4

- **Matriks Unitary U_d**

$$U_d = \begin{pmatrix} -0.2491 & -0.1591 & 0.7939 & -0.3025 & -0.0691 & -0.1872 & -0.2529 & 0.2951 & 0 & 0 \\ -0.9508 & -0.1396 & -0.2552 & 0.0605 & 0.0138 & 0.0374 & 0.0506 & -0.0590 & 0 & 0 \\ 0.0385 & -0.0060 & -0.3896 & -0.0108 & 0.3747 & -0.6018 & -0.3817 & 0.4453 & 0 & 0 \\ 0.1799 & -0.9569 & -0.1659 & -0.0967 & -0.1029 & 0.0677 & -0.0010 & 0.0012 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1342 & 0.2387 & 0.0802 & 0.9113 & 0.1939 & 0.1462 & -0.1705 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1303 & -0.2317 & -0.5239 & 0.0972 & 0.6621 & -0.2961 & 0.3455 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0442 & -0.0787 & -0.5101 & 0.0413 & -0.2262 & 0.7846 & 0.2513 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0516 & 0.0918 & 0.5952 & -0.0482 & 0.2639 & 0.2513 & 0.7068 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, dari tahap pertama transformasi sistem diperoleh, $G_t = \left[\frac{U_d{}^T\, AU_d}{CU_d}\middle|\frac{U_d{}^T B}{D}\right] = \left[\frac{A_t}{C_t}\middle|\frac{B_t}{D}\right]$ dengan:

$$A_t = \begin{pmatrix} -0.1000 & 1.3395 & 0.7324 & 1.5798 & 0.4353 & 0.9378 & 0.6298 & 0.5104 & -0.4930 & -1.0066 \\ 0 & 0.1000 & 0.1779 & 0.9834 & -0.4424 & -0.0082 & -1.1282 & -1.1394 & -0.1243 & -0.1776 \\ 0 & 0 & 0.2000 & -1.3922 & -0.2992 & -0.9558 & -0.7606 & -0.0649 & -0.2629 & 1.6363 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4000 & 0.0105 & 0.3426 & -0.7060 & -1.2053 & -1.4447 & 1.1918 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.2280 & 1.7534 & -0.4593 & 0.9593 & -0.4543 & 0.4990 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0098 & 0.7649 & -0.6141 & -1.0388 & 0.5604 & 0.7082 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6410 & 0.3620 & 1.1165 & 0.0080 & -0.6496 & -0.3135 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7479 & -0.4223 & 0.4474 & 1.4907 & 0.8079 & 0.9158 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2000 & -0.5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4000 \end{pmatrix}$$

$$B_t = \begin{pmatrix} -0.2105 \\ -0.2550 \\ 0.5643 \\ -0.7432 \\ 1.2583 \\ -0.8213 \\ 0.2962 \\ 0.8211 \\ 1.0000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_t = \begin{pmatrix} -0.7710 & -1.0178 & -0.5610 & 0.0350 & -0.0401 & 1.0311 & 0.0047 & 0.9945 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$D_t = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriks W_d**

$$W_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2.3535 & -5.2802 & -2.3320 & -0.7866 & -1.0863 & 1.4076 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4.1766 & -1.2302 & 2.4771 & -6.0943 & -0.3270 & 1.1201 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -19.5389 & -0.4809 & -21.1622 & 27.6084 & -2.4053 & -2.1453 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3.8232 & -0.4965 & 3.3760 & -6.3037 & -0.2008 & 2.1266 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh sistem sebagai berikut: $G_d = \left[\frac{W_d^{-1} A_t W_d}{C_t W_d} \middle| \frac{W_d^{-1} B_t}{D}\right] = \left[\frac{A_d}{C_d} \middle| \frac{B_d}{D}\right]$

dengan:

$$A_d = \begin{pmatrix} -0.1000 & 1.3395 & 0.7324 & 1.5798 & -13.9585 & -0.8946 & -5.1911 & -3.8636 & 1.5510 & 2.1819 \\ 0 & 0.1000 & 0.1779 & 0.9834 & -4.1421 & -10.5580 & -0.2004 & 0.7425 & 8.7294 & 5.0573 \\ 0 & 0 & 0.2000 & -1.3922 & -0.6962 & 53.5879 & -7.6884 & -8.5081 & -42.2354 & -21.7801 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4000 & -0.6011 & -10.0643 & 1.1467 & 1.4593 & 8.0166 & 4.2399 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.2280 & 1.7534 & -0.4593 & 0.9593 & -0.4543 & 0.4990 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0098 & 0.7649 & -0.6141 & -1.0388 & 0.5604 & 0.7082 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6410 & 0.3620 & 1.1165 & 0.0080 & -0.6496 & -0.3135 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7479 & -0.4223 & 0.4474 & 1.4907 & 0.8079 & 0.9158 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2000 & -0.5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4000 \end{pmatrix}$$

$$B_d = \begin{pmatrix} -5.0856 \\ -1.9232 \\ 10.7579 \\ -1.5846 \\ 1.2583 \\ -0.8213 \\ 0.2962 \\ 0.8211 \\ 1.0000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_d = \begin{pmatrix} -0.7710 & -1.0178 & -0.5610 & 0.0350 & 4.9894 & 6.6064 & 11.2712 & -7.9048 & 2.5127 & 0.0526 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Subsistem tidak Stabil A_u**

$$A_u = \begin{pmatrix} 2.2280 & 1.7534 & -0.4593 & 0.9593 & -0.4543 & 0.4990 \\ -1.0098 & 0.7649 & -0.6141 & -1.0388 & 0.5604 & 0.7082 \\ -0.6410 & 0.3620 & 1.1165 & 0.0080 & -0.6496 & -0.3135 \\ 0.7479 & -0.4223 & 0.4474 & 1.4907 & 0.8079 & 0.9158 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2000 & -0.5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4000 \end{pmatrix}$$

$$B_u = \begin{pmatrix} 1.2583 \\ -0.8213 \\ 0.2962 \\ 0.8211 \\ 1.0000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_u = \begin{pmatrix} 4.9894 & 6.6064 & 11.2712 & -7.9048 & 2.5127 & 0.0526 \end{pmatrix}$$

$$D_u = (0)$$

- **Tereduksi Total Orde 3**

$$A_{r3} = \begin{pmatrix} 0.7210 & -0.4368 & 0.0149 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4368 & -0.1861 & -0.0498 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0149 & 0.0498 & -0.1494 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.2280 & 1.7534 & -0.4593 & 0.9593 & -0.4543 & 0.4990 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0098 & 0.7649 & -0.6141 & -1.0388 & 0.5604 & 0.7082 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6410 & 0.3620 & 1.1165 & 0.0080 & -0.6496 & -0.3135 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7479 & -0.4223 & 0.4474 & 1.4907 & 0.8079 & 0.9158 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2000 & -0.5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4000 \end{pmatrix}$$

$$B_{r3} = \begin{pmatrix} 1.7281 \\ -1.6655 \\ 0.0065 \\ 1.2583 \\ -0.8213 \\ 0.2962 \\ 0.8211 \\ 1.0000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{r3} = \begin{pmatrix} -1.7281 & -1.6655 & -0.0065 & 4.9894 & 6.6064 & 11.2712 & -7.9048 & 2.5127 & 0.0526 \end{pmatrix}$$

$$D_{r3} = (0)$$

- **Tereduksi Total Orde 2**

$$A_{r2} = \begin{pmatrix} 0.7210 & -0.4368 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4368 & -0.1861 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2280 & 1.7534 & -0.4593 & 0.9593 & -0.4543 & 0.4990 \\ 0 & 0 & -1.0098 & 0.7649 & -0.6141 & -1.0388 & 0.5604 & 0.7082 \\ 0 & 0 & -0.6410 & 0.3620 & 1.1165 & 0.0080 & -0.6496 & -0.3135 \\ 0 & 0 & 0.7479 & -0.4223 & 0.4474 & 1.4907 & 0.8079 & 0.9158 \\ 0 & 0 & 0 & 0. & 0 & 0 & 1.2000 & -0.5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4000 \end{pmatrix}$$

$$B_{r2} = \begin{pmatrix} 1.7281 \\ -1.6655 \\ 1.2583 \\ -0.8213 \\ 0.2962 \\ 0.8211 \\ 1.0000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{r2} = \begin{pmatrix} -1.7281 & -1.6655 & 4.9894 & 6.6064 & 11.2712 & -7.9048 & 2.5127 & 0.0526 \end{pmatrix}$$

$$D_{r2} = (0)$$

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Awal**

rata-rata *error* untuk sistem awal										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	116,40	51,703	58,153	60,256	131,804	82,702	13,363	34,686	2,1349	30,545
2	5,3431	4,4498	0,7065	3,2668	3,1552	0,6215	2,5207	1,2132	5,1328	0,4549
3	48,492	39,931	22,926	33,579	22,314	54,688	35,846	28,427	3,9092	12,666
4	4,74	0,7484	1,5665	3,0626	2,4532	2,497	1,798	2,0287	6,439	0,9305
5	17,911	37,519	5,9401	19,719	7,426	26,359	21,254	15,498	7,2112	15,213
6	7,395	8,9092	0,5933	8,1159	5,1224	4,8106	6,0244	4,9178	19,648	5,948
7	7,8508	6,8596	2,0177	6,996	0,5225	6,3654	5,2867	4,5078	2,6571	3,7947
8	4,8837	2,6615	1,1114	5,16	2,7067	1,499	3,8414	2,71	29,102	2,7673
9	5,3625	5,0642	1,0371	6,0046	3,9614	2,2564	4,4242	3,2979	2,0043	3,8549
10	3,1182	1,2873	0,7302	2,9805	1,5245	0,6604	2,3611	1,5452	14,961	1,5114
jumlah	221,506	159,133	94,782	149,142	180,990	182,460	96,720	98,832	93,200	77,687
rata-rata	22,1506	15,9133	9,4782	14,9142	18,0990	18,2460	9,6720	9,8832	9,3200	7,7687

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Setimbang**

rata-rata *error* untuk sistem setimbang										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0299	0,2561	0,0437	0,0267	0,3645	0,0199	0,0033	0,1612	0,0449	0,061
2	0,0359	0,154	0,111	0,1355	0,1824	0,0637	0,0513	0,0885	0,2254	0,0289
3	0,081	0,1194	0,0056	0,0585	0,0356	0,0749	0,0818	0,1094	0,0925	0,1104
4	0,0483	0,1391	0,1918	0,0594	0,0731	0,0165	0,1892	0,0293	0,0184	0,053
5	9,3379	0,1751	4,4329	3,8199	5,1281	5,2082	0,5145	3,4825	6,2759	0,4095
6	1,3134	0,8597	1,4199	0,9576	1,7143	0,8094	0,4973	0,4909	2,2615	1,1072
7	6,5168	1,1103	3,3125	2,3074	5,6125	4,1084	0,0276	2,6937	6,0592	1,8221
8	1,9006	0,2707	0,0282	0,2778	2,6115	1,6994	0,2013	1,0035	1,7205	0,948
9	1,3141	1,8763	2,3398	1,1723	3,1152	0,7512	0,3509	0,7956	3,8546	1,4903
10	0,6043	1,3071	1,3207	0,1333	2,6517	0,7758	0,2344	0,5302	2,0629	0,9499
jumlah	21,182	6,2678	13,206	8,9484	21,488	13,527	2,1516	9,3848	22,615	6,9803
rata-rata	2,1182	0,6267	1,3206	0,8948	2,1488	1,3527	0,2151	0,9384	2,2615	0,6980

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 3**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 3										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,2197	0,1249	0,0746	0,1755	0,1659	0,0727	0,1309	0,1049	0,0139	0,0646
2	0,1164	0,2354	0,0225	0,0132	0,1328	0,0494	0,0379	0,1317	0,0418	0,1426
3	0,1473	0,0001	0,061	0,1206	0,0453	0,0682	0,0851	0,0533	0,0763	0,0713
4	2,6256	1,0958	0,459	0,7736	0,094	3,0165	1,5166	0,6934	0,3782	0,5707
5	1,0506	1,2229	0,4482	0,3116	0,3999	0,3737	1,3376	0,3104	0,6023	0,27
6	2,7196	0,874	0,1512	0,2523	1,0478	2,3109	1,8679	0,5022	0,0592	1,1149
7	0,9428	1,1203	0,839	0,297	0,7614	0,9276	0,4717	0,6396	1,2524	1,6113
8	1,4534	2,369	1,1152	0,3134	1,461	0,2781	3,1506	0,5203	1,1373	0,4108
9	0,9233	0,9623	0,0701	0,0962	1,1671	0,2688	1,6787	0,0002	0,0933	0,2146
jumlah	10,198	8,0047	3,2408	2,3534	5,2752	7,3659	10,277	2,956	3,6547	4,4708
rata-rata	1,1331	0,8894	0,3600	0,2614	0,5861	0,8184	1,1418	0,3284	0,4060	0,4967

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 2**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 2										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0083	0,0753	0,0828	0,01	0,1351	0,1195	0,0555	0,133	0,1702	0,0166
2	0,003	0,1065	0,0348	0,1402	0,1379	0,1959	0,0539	0,0306	0,005	0,0883
3	3,4671	2,4317	2,1016	2,4494	3,102	0,015	1,2311	1,0584	3,9333	1,9741
4	0,2627	0,5409	0,1316	0,2059	0,2522	0,333	1,9706	0,3605	0,5129	0,117
5	1,7201	2,412	1,4422	0,5787	1,8543	0,1661	1,9196	0,6611	0,6748	1,0036
6	0,6634	1,1033	0,3714	0,6204	0,4521	0,4786	0,7462	0,3121	0,2345	0,1679
7	0,3813	0,6862	0,9164	0,1201	0,0155	0,3297	3,3697	0,6683	2,4723	0,2957
8	0,2347	0,856	0,3898	0,0527	0,0962	0,0663	1,3145	0,1159	1,7156	0,0359
jumlah	6,7406	8,2119	5,4706	4,1774	6,0453	1,7041	10,6611	3,3399	9,7186	3,6991
rata-rata	0,8425	1,0264	0,6838	0,5221	0,7556	0,2130	1,3326	0,4174	1,2148	0,4623

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error***

rata-rata *error*				
percobaan	awal	setimbang	orde 3	orde 2
1	22,15064	2,11822	1,133188889	0,842575
2	15,91336	0,62678	0,889411111	1,0264875
3	9,47822	1,32061	0,360088889	0,683825
4	14,91424	0,89484	0,261488889	0,522175
5	18,09902	2,14889	0,586133333	0,7556625
6	18,24608	1,35274	0,818433333	0,2130125
7	9,67201	0,21516	1,141888889	1,3326375
8	9,88326	0,93848	0,328444444	0,4174875
9	9,32001	2,26158	0,406077778	1,214825
10	7,76872	0,69803	0,496755556	0,4623875
jumlah	135,44556	12,57533	6,421911111	7,471075
rata-rata	13,544556	1,257533	0,642191111	0,7471075

- **Tabel Rata-Rata Waktu Komputasi**

rata-rata waktu komputasi				
percobaan	awal	setimbang	orde 3	orde 2
1	0,352323	0,320708	0,3217	0,32483
2	0,364636	0,379391	0,346429	0,335683
3	0,306938	0,336125	0,331109	0,320922
4	0,339617	0,364275	0,334394	0,335291
5	0,339214	0,35007	0,335301	0,203295
6	0,367335	0,365121	0,329039	0,347146
7	0,312565	0,377377	0,340264	0,18616
8	0,376509	0,343463	0,325749	0,13576
9	0,357403	0,376486	0,339433	0,345371
10	0,400794	0,387888	0,342641	0,340119
jumlah	3,517334	3,600904	3,346059	2,874577
rata-rata	0,3517334	0,3600904	0,3346059	0,2874577

LAMPIRAN E

KASUS 5

- **Matriks Unitary U_d**

$$U_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6534 & -0.1782 & 0.7357 \\ 0 & 0 & 0.0576 & -0.4593 & -0.4155 & 0.4223 & -0.0404 & 0.1259 & 0.5933 & 0.2555 \\ 0 & 0 & -0.0209 & 0.1670 & 0.2012 & -0.6744 & -0.1667 & 0.1646 & 0.5823 & 0.2872 \\ 0 & 0.6340 & -0.2991 & 0.3196 & 0.0067 & 0.1419 & 0.5889 & 0.0430 & 0.1762 & 0.0809 \\ 0 & -0.0746 & 0.0749 & -0.3543 & 0.8613 & 0.2554 & 0.1928 & 0.0225 & 0.1264 & 0.0506 \\ 0 & -0.2387 & -0.4137 & 0.5434 & 0.1624 & 0.4833 & -0.4279 & 0.0527 & 0.1540 & 0.0841 \\ 0 & -0.6974 & 0.1301 & 0.2712 & -0.1232 & 0.0055 & 0.6243 & 0.0252 & 0.1219 & 0.0519 \\ -0.6534 & 0.0492 & 0.1958 & 0.0705 & 0.0057 & 0.0642 & -0.0136 & 0.5284 & -0.2909 & 0.3989 \\ -0.1782 & 0.1961 & 0.7415 & 0.3695 & 0.0555 & 0.1830 & -0.1097 & -0.2944 & 0.2629 & -0.1978 \\ 0.7357 & 0.0912 & 0.3535 & 0.1522 & 0.0185 & 0.1014 & -0.0387 & 0.3980 & -0.1947 & 0.3064 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, dari tahap pertama transformasi sistem diperoleh,

$G_t = \left[\frac{U_d{}^T AU_d}{CU_d}\middle|\frac{U_d{}^T B}{D}\right] = \left[\frac{A_t}{C_t}\middle|\frac{B_t}{D}\right]$ dengan:

$$A_t = \begin{pmatrix} 0.1000 & 0.6093 & 0.6726 & -2.0534 & -0.2138 & 1.1939 & -0.8922 & 0.0474 & -1.4143 & 1.7293 \\ 0 & -0.1000 & 0.2876 & -0.6648 & -0.5032 & 0.7663 & -1.5460 & 0.2238 & -0.1945 & -0.3879 \\ 0 & 0 & 0.2000 & 1.5958 & -0.3514 & 0.2240 & -0.3382 & -0.1774 & 0.0585 & 0.7642 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4000 & -0.1370 & 0.9981 & 0.3016 & -0.7526 & 0.6669 & 1.6144 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.0692 & -0.8893 & -0.1364 & 0.3434 & 1.0929 & 0.4849 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1408 & 0.7304 & 0.2238 & 0.7002 & 0.4261 & -0.4581 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1431 & 0.0603 & 1.1286 & -0.1507 & 0.4465 & 0.4945 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9969 & -0.6329 & 0.4665 & 1.3238 & 0.0718 & 0.3526 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2225 & 0.1187 & -0.1835 & -0.8142 & 1.2184 & 0.8934 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8315 & -0.5334 & 0.3699 & -0.0873 & 0.0682 & 1.7296 \end{pmatrix}$$

$$B_t = \begin{pmatrix} -0.1782 \\ -0.5759 \\ 0.9255 \\ 0.4534 \\ 0.9949 \\ -0.2304 \\ 0.5407 \\ -0.7356 \\ 0.9152 \\ 0.9276 \end{pmatrix} \qquad D_t = (0)$$

$$C_t = \begin{pmatrix} 0.0823 & 0.5357 & -0.1059 & 0.6264 & -0.2221 & 1.2131 & 0.0683 & 1.1480 & 0.4380 & 1.1257 \end{pmatrix}$$

- **Matriks W_d**

$$W_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4.1186 & -0.4635 & -4.9911 & 4.4443 & 2.3718 & 1.8930 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1.0491 & -0.4183 & -1.0905 & 1.0931 & 1.5248 & -0.9497 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.3582 & 4.8026 & -1.0482 & 1.7562 & 0.2144 & 3.2139 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.5647 & 1.8135 & -0.1913 & 0.0255 & 0.7938 & 1.5670 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh sistem sebagai berikut: $G_d = \left[\frac{W_d^{-1} A_t W_d}{C_t W_d} \middle| \frac{W_d^{-1} B_t}{D}\right] = \left[\frac{A_d}{C_d} \middle| \frac{B_d}{D}\right]$

dengan:

$$A_d = \begin{pmatrix} 0.1000 & 0.6093 & 0.6726 & -2.0534 & -1.9952 & 0.9163 & 0.4689 & -0.5139 & 1.8553 & -2.4239 \\ 0 & -0.1000 & 0.2876 & -0.6648 & 1.5210 & 0.4263 & -0.3089 & 0.8028 & -0.8728 & 0.3410 \\ 0 & 0 & 0.2000 & 1.5958 & -12.9746 & 3.7530 & -2.6646 & -5.2986 & -1.2084 & 0.0829 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4000 & -2.6338 & 0.6660 & -0.4877 & -1.0978 & -0.1617 & 0.0119 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.0692 & -0.8893 & -0.1364 & 0.3434 & 1.0929 & 0.4849 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.1408 & 0.7304 & 0.2238 & 0.7002 & 0.4261 & -0.4581 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.1431 & 0.0603 & 1.1286 & -0.1507 & 0.4465 & 0.4945 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9969 & -0.6329 & 0.4665 & 1.3238 & 0.0718 & 0.3526 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2225 & 0.1187 & -0.1835 & -0.8142 & 1.2184 & 0.8934 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8315 & -0.5334 & 0.3699 & -0.0873 & 0.0682 & 1.7296 \end{pmatrix}$$

$$B_d = \begin{pmatrix} 5.8538 \\ 1.2507 \\ 0.3568 \\ -0.6248 \\ 0.9949 \\ -0.2304 \\ 0.5407 \\ -0.7356 \\ 0.9152 \\ 0.9276 \end{pmatrix}$$

$$C_d = \begin{pmatrix} 0.0823 & 0.5357 & -0.1059 & 0.6264 & -1.5146 & 1.5785 & -0.9352 & 1.9292 & 1.9245 & 1.4140 \end{pmatrix}$$

$$D = (0)$$

- **Subsistem tidak Stabil A_u**

$$A_u = \begin{pmatrix} 2.0692 & -0.8893 & -0.1364 & 0.3434 & 1.0929 & 0.4849 \\ 1.1408 & 0.7304 & 0.2238 & 0.7002 & 0.4261 & -0.4581 \\ -1.1431 & 0.0603 & 1.1286 & -0.1507 & 0.4465 & 0.4945 \\ 0.9969 & -0.6329 & 0.4665 & 1.3238 & 0.0718 & 0.3526 \\ -0.2225 & 0.1187 & -0.1835 & -0.8142 & 1.2184 & 0.8934 \\ 0.8315 & -0.5334 & 0.3699 & -0.0873 & 0.0682 & 1.7296 \end{pmatrix}$$

$$B_u = \begin{pmatrix} 0.9949 \\ -0.2304 \\ 0.5407 \\ -0.7356 \\ 0.9152 \\ 0.9276 \end{pmatrix}$$

$$C_u = \begin{pmatrix} -1.5146 & 1.5785 & -0.9352 & 1.9292 & 1.9245 & 1.4140 \end{pmatrix}$$

$$D_u = (0)$$

- **Tereduksi Total Orde 3**

$$A_{r3} = \begin{pmatrix} 0.3386 & 0.4449 & -0.0191 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4449 & -0.0916 & -0.4148 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0191 & -0.4148 & 0.3767 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0692 & -0.8893 & -0.1364 & 0.3434 & 1.0929 & 0.4849 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1408 & 0.7304 & 0.2238 & 0.7002 & 0.4261 & -0.4581 \\ 0 & 0 & 0 & -1.1431 & 0.0603 & 1.1286 & -0.1507 & 0.4465 & 0.4945 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9969 & -0.6329 & 0.4665 & 1.3238 & 0.0718 & 0.3526 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2225 & 0.1187 & -0.1835 & -0.8142 & 1.2184 & 0.8934 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8315 & -0.5334 & 0.3699 & -0.0873 & 0.0682 & 1.7296 \end{pmatrix}$$

$$B_{r3} = \begin{pmatrix} -0.8668 \\ -0.1655 \\ -0.0394 \\ 0.9949 \\ -0.2304 \\ 0.5407 \\ -0.7356 \\ 0.9152 \\ 0.9276 \end{pmatrix}$$

$$C_{r3} = \begin{pmatrix} -0.8668 & 0.1655 & 0.0394 & -1.5146 & 1.5785 & -0.9352 & 1.9292 & 1.9245 & 1.4140 \end{pmatrix}$$

$$D_{r3} = (0)$$

- **Tereduksi Total Orde 2**

$$A_{r2} = \begin{pmatrix} 0.3386 & 0.4449 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4449 & -0.0916 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0692 & -0.8893 & -0.1364 & 0.3434 & 1.0929 & 0.4849 \\ 0 & 0 & 1.1408 & 0.7304 & 0.2238 & 0.7002 & 0.4261 & -0.4581 \\ 0 & 0 & -1.1431 & 0.0603 & 1.1286 & -0.1507 & 0.4465 & 0.4945 \\ 0 & 0 & 0.9969 & -0.6329 & 0.4665 & 1.3238 & 0.0718 & 0.3526 \\ 0 & 0 & -0.2225 & 0.1187 & -0.1835 & -0.8142 & 1.2184 & 0.8934 \\ 0 & 0 & 0.8315 & -0.5334 & 0.3699 & -0.0873 & 0.0682 & 1.7296 \end{pmatrix}$$

$$B_{r2} = \begin{pmatrix} -0.8668 \\ -0.1655 \\ 0.9949 \\ -0.2304 \\ 0.5407 \\ -0.7356 \\ 0.9152 \\ 0.9276 \end{pmatrix}$$

$$C_{r2} = \begin{pmatrix} -0.8668 & 0.1655 & -1.5146 & 1.5785 & -0.9352 & 1.9292 & 1.9245 & 1.4140 \end{pmatrix}$$

$$D_{r2} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Awal**

rata-rata *error* untuk sistem awal										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,3209	0,3422	0,2318	0,0869	0,2242	0,5712	0,2213	0,4661	0,0332	0,3349
2	0,1057	0,1464	0,067	0,0809	0,1377	0,078	0,001	0,2465	0,0289	0,1493
3	1,5572	0,6201	0,4389	0,7415	0,8943	0,574	1,2052	1,9185	0,0506	0,2654
4	0,1541	0,028	0,0705	0,0416	0,0237	0,2979	0,36	0,1859	0,1352	0,1419
5	4,2492	1,6939	8,3159	3,0682	10,371	6,751	4,6964	5,866	6,1214	2,5436
6	5,0729	2,1161	12,634	5,1217	14,618	9,4514	5,5272	9,8265	9,3304	4,423
7	11,396	10,743	23,070	13,282	36,583	26,904	8,713	21,626	19,456	10,700
8	5,8885	7,7575	10,158	7,1771	20,8642	15,482	2,9178	10,255	9,7776	6,5122
9	7,2241	0,4507	23,732	6,788	16,566	7,8275	10,118	19,242	13,556	5,4612
10	1,2177	5,1811	2,5976	1,9915	5,6733	6,5142	1,7981	0,6998	0,9143	2,1551
jumlah	37,186	29,079	81,317	38,379	105,957	74,451	35,557	70,333	59,404	32,686
rata-rata	3,7186	2,9079	8,1317	3,8379	10,595	7,4451	3,5557	7,0333	5,9404	3,2686

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Setimbang**

rata-rata *error* untuk sistem setimbang										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0623	0,1392	0,0179	0,1158	0,0137	0,0593	0,2254	0,003	0,1106	0,1235
2	0,0794	0,1121	0,1847	0,0836	0,0098	0,1875	0,1245	0,1489	0,052	0,2084
3	0,0454	0,0645	0,1174	0,0727	0,185	0,0453	0,0022	0,1571	0,0476	0,0044
4	0,019	0,0054	0,0408	0,0539	0,0952	0,0717	0,424	0,0154	0,0448	0,0879
5	13,841	6,0555	9,2577	10,430	8,3975	4,6458	6,6208	7,7375	1,0914	7,9204
6	8,5248	4,7293	6,9796	6,6024	7,9486	2,2096	2,7779	7,057	1,3993	5,0803
7	25,906	11,657	16,746	17,288	14,945	1,0153	9,2215	8,533	2,6548	13,914
8	8,4812	5,5685	7,6598	7,4606	6,9252	1,6863	2,9845	7,2048	1,2204	4,9117
9	4,6759	3,4825	5,3191	5,2092	4,3205	0,3381	2,8653	7,0129	1,089	2,8107
10	6,6133	4,2243	5,9431	5,0482	5,8394	1,3044	1,7678	4,2726	1,9548	3,7103
jumlah	68,249	36,038	52,266	52,365	48,679	11,563	27,013	42,142	9,6647	38,771
rata-rata	6,8249	3,6038	5,2266	5,2365	4,8679	1,1563	2,7013	4,2142	0,9664	3,8771

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 3**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 3										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0156	0,1083	0,0738	0,0607	0,1366	0,1128	0,1416	0,0532	0,0125	0,09
2	0,0452	0,006	0,0044	0,0352	0,0049	0,1817	0,0665	0,1223	0,2401	0,1173
3	0,0261	0,0799	0,0547	0,3407	0,0342	0,1217	0,0556	0,0716	0,0928	0,3305
4	6,3646	7,8377	7,1665	2,0506	5,4666	1,7948	0,0301	5,6644	5,4603	4,4623
5	5,9962	6,4112	3,9167	2,0859	4,0379	0,4993	0,4023	3,6735	5,1088	3,3373
6	7,7261	9,5642	12,700	3,5234	10,047	2,7832	1,0742	6,0059	6,0053	4,2205
7	6,8477	6,791	3,3032	1,626	5,3552	1,0646	0,1364	4,7803	5,5254	3,9815
8	6,1642	6,2742	1,6396	1,3183	3,6716	0,9882	0,1634	4,8757	5,1121	4,2436
9	4,6134	4,2315	2,5449	1,7998	3,3813	0,0396	0,1689	2,4581	3,5209	1,9115
jumlah	37,799	41,304	31,403	12,840	32,136	7,5859	2,239	27,705	31,078	22,694
rata-rata	4,1999	4,5893	3,4893	1,4267	3,5706	0,8428	0,2487	3,0783	3,4531	2,5216

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error* pada Sistem Tereduksi Total Orde 2**

rata-rata *error* untuk tereduksi total orde 2										
state	percobaan									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,0888	0,007	0,1796	0,0841	0,0624	0,0631	0,3539	0,1005	0,0253	0,1453
2	0,0119	0,0038	0,0145	0,1403	0,0077	0,0278	0,3293	0,2745	0,1327	0,0643
3	7,0169	0,2831	10,323	8,8376	4,4711	7,8042	5,3689	4,549	3,3224	4,4687
4	5,0732	0,6771	5,4918	5,7349	4,9215	4,2344	4,0906	3,0404	0,1114	0,8196
5	10,800	1,6542	17,239	14,494	7,7683	14,547	7,8907	9,8609	7,066	9,6844
6	5,1285	0,992	4,5522	6,4358	3,9862	4,8878	4,2528	2,5755	0,1427	2,1408
7	3,9214	0,4393	2,6323	4,5883	2,514	2,7961	3,259	0,896	0,9605	0,7278
8	3,5236	0,9412	3,4185	4,2382	3,6092	2,9885	3,212	2,3149	0,4777	1,3009
jumlah	35,565	4,9977	43,851	44,553	27,340	37,349	28,757	23,611	12,238	19,351
rata-rata	4,4456	0,6247	5,4814	5,5692	3,4175	4,6686	3,5946	2,9514	1,5298	2,4189

- **Tabel Rata-Rata Nilai *Error***

rata-rata *error*				
percobaan	awal	setimbang	orde 3	orde 2
1	3,71867	6,82494	4,1999	4,44565
2	2,90798	3,60389	4,589333333	0,6247125
3	8,13179	5,22667	3,489322222	5,4814875
4	3,83794	5,2365	1,426733333	5,5692
5	10,59571	4,86799	3,570677778	3,41755
6	7,44518	1,15633	0,842877778	4,66865
7	3,55577	2,70139	0,248777778	3,59465
8	7,03338	4,21422	3,078333333	2,9514625
9	5,94049	0,96647	3,453133333	1,5298375
10	0,3829	3,87717	2,521611111	2,418975
jumlah	56,43559	38,67557	27,4207	34,702175
rata-rata	5,643559	3,867557	2,74207	3,4702175

- **Tabel Rata-Rata Waktu Komputasi**

rata-rata waktu komputasi				
percobaan	awal	setimbang	orde 3	orde 2
1	0,318278	0,31996	0,324482	0,310824
2	0,310849	0,311521	0,306752	0,319596
3	0,321208	0,311414	0,310073	0,329649
4	0,314864	0,323495	0,319866	0,311633
5	0,31865	0,392003	0,317548	0,313135
6	0,320046	0,364498	0,323332	0,311224
7	0,316485	0,308718	0,324982	0,323554
8	0,312205	0,31473	0,32445	0,318155
9	0,320548	0,316882	0,314909	0,317698
10	0,3829	0,31775	0,325132	0,315498
jumlah	3,236033	3,280971	3,191526	3,170966
rata-rata	0,3236033	0,3280971	0,3191526	0,3170966

BIODATA PENULIS

Penulis yang memiliki nama lengkap Echa Ayu Fatmawati lahir di Banyuwangi, 20 Mei 1992. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari SD Negeri Brawijaya. SMP Negeri 1 Banyuwangi, dan SMA Negeri 1 Glagah. Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi S1 di Jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang dan diterima sebagai mahasiswa angkatan 2010. Selama kuliah S1 di Jurusan Matematika penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Penulis lulus sarjana dengan mendapatkan gelar Sarjana Sains. Pada tahun 2015, penulis melanjutkan studi S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dan mengambil Bidang Minat Analisis dan Aljabar. Untuk membentuk jaringan atau membutuhkan informasi yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui email echaayufatmawati@gmail.com .