



TUGAS AKHIR - SM 141501

ANALISIS STABILITAS MODEL PENYEBARAN WHITE SPOT SYNDROME VIRUS PADA PREY PREDATOR UDANG WINDU DAN SIMULASI DENGAN MENGGUNAKAN METODE ADAM BASHFORTH-MOULTON

KARTIKA RATNA DEWI
NRP 1213 100 053

Dosen Pembimbing :
Dr. Hariyanto, M.Si
Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017



TUGAS AKHIR– SM141501

**ANALISIS STABILITAS MODEL PENYEBARAN WHITE
SPOT SYNDROME VIRUS PADA PREY PREDATOR
UDANG WINDU DAN SIMULASI DENGAN
MENGUNAKAN METODE ADAM BASHFORTH-
MOULTON**

**KARTIKA RATNA DEWI
NRP 1213 100 053**

**Dosen Pembimbing :
Dr. Hariyanto, M.Si
Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017**



FINAL PROJECT– SM141501

STABILITY ANALYSIS SPREADING MODEL OF WHITE SPOT SYNDROME VIRUS IN PREDATOR-PREY INTERACTION FOR TIGER SHRIMP AND SIMULATION USING ADAM BASHFORTH-MOULTON METHOD

**KARTIKA RATNA DEWI
NRP 1213 100 053**

**Supervisor :
Dr. Hariyanto, M.Si
Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si**

**DEPARTMENT OF MATHEMATIC
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2017**

LEMBAR PENGESAHAN
ANALISIS STABILITAS MODEL PENYEBARAN
WHITE SPOT SYNDROME VIRUS PADA PREY-
PREDATOR UDANG WINDU DAN SIMULASI
DENGAN MENGGUNAKAN METODE ADAM
BASHFORTH-MOULTON

STABILITY ANALYSIS SPREADING MODEL OF
WHITE SPOT SYNDROME VIRUS IN PREDATOR-
PREY INTERACTION FOR TIGER SHRIMP AND
SIMULATION USING ADAM BASHFORTH-
MOULTON METHOD

TUGAS AKHIR

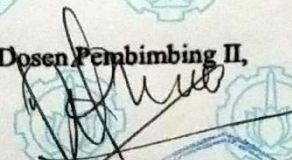
Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:


KARTIKA RATNA DEWI
NRP. 1213 100 053

Menyetujui,


Dosen Pembimbing II,


Drs. Darwono Budi Utomo, M.Si
NIP. 19590419 198603 1 004

Dosen Pembimbing I,


Dr. Hariyanto, M.Si
NIP. 19530414 198203 1 002

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
EMIPA ITS


Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2017

ANALISIS STABILITAS MODEL PENYEBARAN WHITE SPOT SYNDROME VIRUS PADA PREY- PREDATOR UDANG WINDU DAN SIMULASI DENGAN MENGGUNAKAN METODE ADAM BASHFORTH-MOULTON

Nama : Kartika Ratna Dewi
NRP : 1213100053
Departemen : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : 1. Dr. Hariyanto, M.Si
2. Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si

ABSTRAK

Kualitas lingkungan dan kelangsungan hidup merupakan masalah yang membatasi produktivitas budidaya udang windu (*Penaeus monodon*). Kondisi udang dan kualitas lingkungan yang kurang baik dapat menyebabkan udang terserang penyakit, termasuk yang disebabkan oleh *white spot syndrome virus* (WSSV). WSSV dapat menular dengan cepat dari satu petakan tambak ke petakan tambak lain dan juga dapat menular udang yang sakit ke udang yang sehat baik dari udang windu ke udang windu (sejenis) maupun udang windu ke udang vaname (berlainan jenis) dalam petakan tambak yang sama. Dalam penelitian ini akan dibahas bilangan reproduksi dasar, analisis stabilitas dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, kaitannya dengan bilangan reproduksi dasar untuk simulasi perilaku sistem yang dipengaruhi infeksi dengan menggunakan metode adam bashforth-moulton. Diasumsikan bahwa penyebaran WSSV pada udang windu di tambak selama terjadinya proses mangsa-pemangsa (*prey-predator*) menggunakan model SIS (*Susceptible-Infected-Susceptible*).

Kata kunci: *predator, prey, SIS, WSSV, udang windu, analisis kestabilan, adam bashforth-moulton*

**STABILITY ANALYSIS SPREADING MODEL OF
WHITE SPOT SYNDROME VIRUS IN PREDATOR-
PREY INTERACTION FOR TIGER SHRIMP AND
SIMULATION USING ADAM BASHFORTH-
MOULTON METHOD**

Name : Kartika Ratna Dewi
NRP : 1213100053
Department : Mathematics
Supervisor : 1. Dr. Hariyanto, M.Si
2. Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si

ABSTRACT

*Environmental quality and survival is a problem limiting the productivity of tiger shrimp farming (*Penaeus monodon*). Shrimp conditions and poor environmental quality can cause shrimp disease, including those caused by white spot syndrome virus (WSSV). WSSV can be transmitted rapidly from one pond to another and can also infect sick shrimp to healthy shrimp from tiger shrimp to tiger shrimp (similar) and tiger shrimp to vaname shrimp (different species) in the same pond plot. In this study we will discuss the basic reproduction numbers, stability analysis of the disease free equilibrium point and the endemic equilibrium point, relation to the basic reproduction number and the simulation of infected system behavior using the adam bashforth-moulton method. It is assumed that the spread of WSSV in the tiger shrimp in the pond during the prey-predator process uses the SIS (Susceptible-Infected-Susceptible) model.*

Keywords: *predator, prey, SIS, WSSV, tiger shrimp, stability analysis, adam bashforth-moulton*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

**“ANALISIS STABILITAS MODEL PENYEBARAN
WHITE SPOT SYNDROME VIRUS PADA PREY-
PREDATOR UDANG WINDU DAN SIMULASI
DENGAN MENGGUNAKAN METODE ADAM
BASHFORTH-MOULTON ”**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Ketua Departemen Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Kaprodi S1 Departemen Matematika dan sekretaris prodi S1 yang telah memberikan arahan akademik selama penulis kuliah di Departemen Matematika FMIPA-ITS.
3. Bapak Dr. Hariyanto, M.Si dan bapak Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si sebagai dosen pembimbing yang telah memberikan motivasi dan pengarahan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.

4. Ibu Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si, bapak Drs. Kamiran, M.Si dan bapak Drs. Mohammad Setijo Winarko, M.Si selaku dosen penguji.
5. Bapak Drs. Sadjidon, M.Si sebagai dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis kuliah di Departemen Matematika FMIPA-ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Departemen Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
7. bapak saya Suyono yang telah memberikan semangat dan doanya dari lahir sampai sekarang dan Alm. Ibu saya Kusiyah yang telah memberikan motivasi, dorongan dan mendampingi saya dari saya lahir sampai saya kuliah semester 2.
8. Keluarga besar saya yang telah mendampingi dan memberikan semangat selama saya kuliah.
9. Teman-teman saya Alfa, Bella, Titi, Azizah, Dinan, dan seluruh teman-teman.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini masih mempunyai banyak kekurangan. Kritik dan saran dari berbagai pihak yang bersifat membangun juga sangat diharapkan sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang.

Surabaya, Juli 2017

Penulis

DAFTAR ISI

Hal

TUGAS AKHIR– SM14	i
FINAL PROJECT– SM14150	iii
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
DAFTAR SYMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat.....	4
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Penelitian Terdahulu	7
2.2 Penyakit Menular pada Udang Windu	8
2.3 Model Prey-Predator Udang Windu	14
2.4 Bilangan Reproduksi Dasar	15
2.5 Titik Keseimbangan dan Kestabilan	16
2.6 Kriteria Kestabilan Ruth-Hurwitz.....	18
2.7 Metode Adam Bashforth-Moulton.....	20
BAB III METODE PENELITIAN	
3.1 Kajian Pustaka.....	25
3.2 Menyusun Asumsi dan Deskripsi Model.....	25
3.3 Analisis WSSV	26
3.4 Simulasi Model.....	26
3.5 Analisis Hasil	26

3.6	Penarikan Kesimpulan dan Penulisan Laporan Tugas Akhir	27
3.7	Alur Penelitian.....	28
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN		
4.1	Asumsi dan Deskripsi Model.....	29
4.2	Titik Kesetimbangan Model.....	35
	4.2.1 Titik Kesetimbangan Bebas WSSV.....	36
	4.2.1 Titik Kesetimbangan Endemik.....	38
4.3	Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan	43
	4.3.1 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan Bebas WSSV.....	51
	4.3.2 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan Endemik.....	58
4.4	Bilangan Reproduksi.....	76
4.5	Simulasi Model.....	79
	4.5.1 Penyelesaian Numerik Model.....	79
	4.5.2 Hasil Simulasi	86
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN		
5.1	Kesimpulan	95
5.2	Saran.....	98
DAFTAR PUSTAKA.....		99
LAMPIRAN		103
BIODATA PENULIS.....		111

DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 2.1.1 Virus WSSV	9
Gambar 2.1.2 Udang Windu yang Terserang WSSV	9
Gambar 2.1.3 Siklus Hidup Udang Windu	13
Gambar 4.1 Grafik Kondisi 1 <i>Prey</i> Rentan	87
Gambar 4.2 Grafik Kondisi 1 <i>Prey</i> Terinfeksi.....	87
Gambar 4.3 Grafik Kondisi 1 <i>Predator</i> Rentan.....	88
Gambar 4.4 Grafik Kondisi 1 <i>Predator</i> Terinfeksi	88
Gambar 4.5 Grafik Kondisi 2 <i>Prey</i> Rentan	91
Gambar 4.6 Grafik Kondisi 2 <i>Prey</i> Terinfeksi.....	91
Gambar 4.7 Grafik Kondisi 2 <i>Predator</i> Rentan.....	92
Gambar 4.8 Grafik Kondisi 2 <i>Predator</i> Terinfeksi	92

DAFTAR TABEL

	Hal
TABEL 2.1 Umur dan Panjang Larva Udang Windu	12
TABEL 4.1 Metode Routh-Hurwitz dari titik kesetimbangan $E^{(2)}$	55
TABEL 4.2 Metode Routh-Hurwitz dari titik kesetimbangan $E^{(3)}$	60
TABEL 4.3 Metode Routh-Hurwitz dari titik kesetimbangan $E^{(4)}$	65
TABEL 4.4 Metode Routh-Hurwitz dari titik kesetimbangan $E^{(5)}$	69
TABEL 4.5 Metode Routh-Hurwitz dari titik kesetimbangan $E^{(6)}$	74
TABEL 4.6 Penyebaran dan Presentase Serangan WSSV pada Induk Udang Windu.....	84
TABEL 4.7 Penyebaran dan Presentase Serangan WSSV pada Udang Windu.....	85
TABEL 4.8 Nilai Parameter Kondisi 1	86
TABEL 4.9 Nilai Parameter Kondisi 2	90

DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
LAMPIRAN A Source Code Matlab.....	103

DAFTAR SIMBOL

- $S(t)$: Populasi Udang Windu yang rentan terhadap WSSV
- $I(t)$: Populasi Udang Windu terinfeksi terhadap WSSV
- $P_1(t)$: Populasi Predator yang rentan terhadap WSSV
- $P_2(t)$: Populasi Predator terinfeksi terhadap WSSV
- r : Rate pertumbuhan populasi udang windu per kapita tanpa adanya predator
- β : Koefisien infeksi dari *prey* yang sehat
- γ : Koefisien infeksi dari *predator*
- K : Lingkungan yang mendukung terhadap udang windu sebagai *prey*
- a : Koefisien *prey-predasi* yang sehat dengan *predator* sehat
- u : Koefisien *prey-predasi* yang terinfeksi dengan *predator* sehat
- b : Koefisien *prey-predasi* yang sehat dengan *predator* yang terinfeksi
- v : Koefisien *prey-predasi* yang terinfeksi dengan *predator* yang terinfeksi
- k : Koefisien konversi dari *prey* yang sehat ke *predator* yang sehat
- l : Koefisien konversi dari *prey* yang terinfeksi ke *predator* yang sehat
- o : Koefisien konversi dari *prey* yang sehat ke *predator* yang terinfeksi
- w : Koefisien konversi dari *prey* yang terinfeksi ke *predator* yang terinfeksi
- d_1 : Rate kematian alami udang windu sebagai *prey* yang sehat
- d_2 : Rate kematian alami udang windu sebagai *prey* yang terinfeksi

- c : Rate kematian alami udang windu sebagai *predator* yang sehat
- d_4 : Rate kematian alami *predator* yang terinfeksi
- d_5 : Rate kematian *predator* yang terinfeksi akibat infeksi
- h : Rate kematian udang windu sebagai *prey* yang terinfeksi akibat infeksi
- m_3 : Koefisien pembasmian *predator*

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, serta sistematika penulisan dalam Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Udang windu (*Penaeus monodon*) merupakan udang asli Indonesia unggulan di sektor perikanan Indonesia. Budi daya udang windu di Indonesia telah di budi dayakan sejak tahun 80-an dan sampai sekarang masih merupakan salah satu hasil tambak yang cukup potensial. Usaha budidaya udang windu berkembang cukup pesat pada tahun 1985-1995, sehingga pada kurun waktu tersebut udang windu merupakan penghasil devisa terbesar pada produk perikanan [1].

Pada tahun 1995 produksi udang windu mengalami penurunan yang disebabkan oleh penurunan mutu lingkungan dan serangan penyakit [1]. Jika dibandingkan dengan udang vaname, udang windu sulit di budidaya karena udang windu mudah terkena penyakit. Beberapa kajian diketahui penyebab penurunan produksi budidaya udang windu adalah menurunnya kualitas lingkungan perairan sehingga memicu wabahnya serangan penyakit termasuk jenis virus [2]. Jenis virus yang sering menyerang udang adalah WSSV. WSSV atau yang biasa dikenal dengan virus bercak putih menular secara hidup bersama pada habitat yang sama (kohabitasi) udang sakit dengan udang sehat baik dari udang windu ke udang windu (sejenis) maupun udang windu ke udang vaname (berlainan jenis). WSSV dapat menyebabkan kematian 80% selama 2-3 hari pada tahap juvenile dan 7-8 hari pada udang dewasa [3]. Terdapat penelitian lain yang

menyatakan bahwa WSSV dapat menyebabkan kematian pada udang windu sebesar 100% dalam waktu 2-7 hari [4]. Terdapat tiga pola penularan virus WSSV, yaitu pola vertikal, horizontal dan kanibalisme. Secara horizontal yaitu terjadi melalui lingkungan (udang liar, kepiting, crustacea) dengan udang liar, kepiting dan golongan crustacea memangsa udang windu yang berada didalam tambak, serta melalui proses irigasi yang berada didalam tambak. Proses penularan secara vertikal terjadi ketika induk yang menjadi karier virus akan menularkan melalui kotoran setelah itu kotoran yang terdapat WSSV bebas di air akan menginfeksi larva. Sedangkan pada pola kanibalisme ketika udang memakan udang yang terserang virus, biasanya satu udang mati dan dimakan udang lain maka yang akan mati berarti sepuluh udang [5]. Infeksi pada umumnya terjadi melalui 3 rute utama yaitu kulit, insang, dan saluran pencernaan. WSSV tidak menular ke manusia dan tidak membahayakan jika kita mengkonsumsi udang yang terinfeksi virus ini.

Dalam permasalahan tersebut perlu suatu alat untuk mengontrol dan mengetahui penyebaran WSSV. Salah satunya adalah model matematika yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah tersebut. Model yang sesuai untuk mengatasi permasalahan tersebut adalah model SIS (Susceptible Infection Susceptible). Dalam model tersebut didalamnya terdapat model prey-predator dengan prey yang rentan dan terinfeksi serta predator yang rentan dan terinfeksi [6]. Predator pada model tersebut adalah golongan crustacea (kepiting, udang windu sejenis dan udang liar).

Dengan model yang didapat, model matematika ini dianalisis dengan mengetahui titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, kaitannya dengan bilangan reproduksi dasar dan simulasi dengan menggunakan metode numerik. Metode numerik mempunyai sifat lebih

efektif dan efisien apabila error yang terjadi dalam metode dalam menyelesaikan model semakin kecil (menuju nol) dan waktu yang dibutuhkan metode untuk menyelesaikan model matematika semakin sedikit. Metode yang sesuai dengan sifat tersebut adalah metode numerik Adam Bashforth-Moulton. Metode Adam Bashforth-Moulton merupakan metode numerik memiliki banyak langkah (multisep) karena dalam penyelesaiannya digunakan persamaan prediktor-korektor. Sehingga dalam penelitian ini, metode yang akan digunakan adalah metode Adam Bashforth-Moulton untuk mengetahui laju pertumbuhan prey dan predator karena metode tersebut lebih stabil dibandingkan dengan yang metode numerik yang lain.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah:

1. Bagaimana membentuk model penyebaran WSSV pada udang windu.
2. Bagaimana menentukan bilangan reproduksi dasar, analisis stabilitas dari titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik dari model penyebaran WSSV pada udang windu.
3. Bagaimana simulasi model pengaruh penyebaran WSSV pada udang windu dengan menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada Tugas Akhir ini adalah :

1. Model penyebaran WSSV pada udang windu yang dipakai adalah model tipe SIS.

2. Terjadi penularan WSSV dari golongan crustacea (kepiting udang liar) ke udang windu dalam satu petakan.
3. Terjadi proses saling makan.
4. Menggunakan sampel penyebaran WSSV pada udang windu.
5. Simulasi model menggunakan Matlab.

1.4 Tujuan

Tujuan dalam Tugas Akhir ini adalah:

1. Membentuk model penyebaran WSSV pada udang windu.
2. Menentukan bilangan reproduksi dasar, analisis stabilitas dari titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik, serta kaitannya dengan bilangan reproduksi dasar dari model penyebaran WSSV pada udang windu.
3. Membuat simulasi model pengaruh penyebaran WSSV pada udang windu dengan menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton.

1.5 Manfaat

Manfaat yang bisa diperoleh dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Memberikan informasi mengenai penyebaran WSSV pada udang windu.
2. Mengontrol penyebaran WSSV pada udang windu.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab sebagai berikut :

1. **BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan pada Tugas Akhir.

2. **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Bab ini menjelaskan dasar teori yang digunakan penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir. Pada bab ini berisi tentang cara penyebaran WSSV pada udang windu, bentuk model *prey-predator* pada udang windu serta tahapan menganalisis model *prey-predator*.

3. **BAB III METODOLOGI TUGAS AKHIR**

Bab ini menjelaskan alur kerja dan metode yang digunakan penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir. Gambaran umum mengenai analisa stabilitas model penyebaran WSSV pada *prey-predator* udang windu.

4. **BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Bab ini menyajikan tentang analisa stabilitas model penyebaran WSSV pada *prey-predator* udang windu serta simulasi dengan menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton.

5. **BAB V KESIMPULAN**

Bab ini menjelaskan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas teori-teori yang terkait dengan permasalahan dalam Tugas Akhir ini. Pertama, akan dibahas mengenai penyebaran WSSV pada udang windu. Selanjutnya, dibahas mengenai bentuk model *prey-predator* udang windu serta tahapan analisa stabilitas.

2.1 Penelitian Terdahulu

Dalam penelitian sebelumnya, penerapan model *predator-prey* sudah beberapa kali digunakan untuk mengetahui penyebaran suatu penyakit di daerah tertentu. Beberapa penelitian yang terkait adalah Sudipa Sinha, O.P. Misra, J.Dhar [7] mengenai model *predator-prey* dengan *prey* yang terinfeksi di lingkungan tercemar dengan menyelidiki gabungan dari penyakit dan racun pada sistem *predator-prey*. Pada model tersebut menggunakan model SIS dengan *prey* yang terinfeksi. Lingkungan yang tercemar mempengaruhi populasi *prey* dan *predator* diasumsikan bahwa *prey* lebih rentan terhadap racun dibandingkan dengan adanya predasi oleh *prey* yang sehat.

Metode Adam Bashforth-Moulton telah beberapa digunakan dalam penelitian, seperti halnya berdasarkan peneliti Yanse [8] mengenai efektifitas metode Adam Bashforth-Moulton orde sembilan. Metode tersebut digunakan untuk memformulasikan model penyebaran penyakit demam berdarah. Sedangkan Kuzairi [9] menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton untuk mendapatkan solusi terbaik dari model penyakit kanker. Dari hasil penelitian tersebut metode Adam Bashforth-Moulton orde tiga lebih baik dibandingkan orde lain.

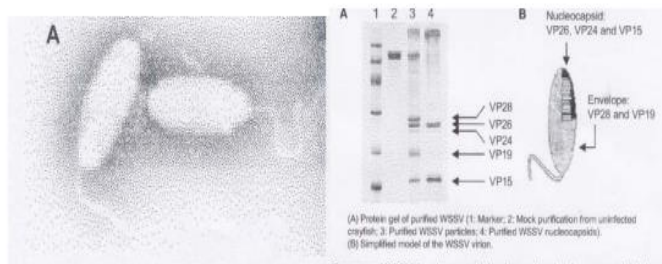
Dalam proses penyebaran WSSV pada udang windu, berdasarkan penelitian Muliani [10] menghasilkan

kesimpulan bahwa WSSV menyerang pada semua siklus budidaya udang windu mulai dari induk, benur, tongkolan, dan udang yang dibudidayakan di tambak. Presentasi serangan WSSV tertinggi pada udang windu yang dibudidayakan di tambak sebesar 40,4% dan terendah ketika benur di tebar sebesar 4,4%.

Pada Tugas Akhir ini, model matematika yang digunakan adalah model tipe SIS dengan *prey* dan *predator* terinfeksi serta untuk mengetahui laju pertumbuhan populasi *prey* dan *predator* menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton Orde Empat.

2.2 Penyakit Menular pada Udang Windu

Penyakit menular adalah sebuah penyakit yang disebabkan oleh agen biologi (seperti virus, bakteri atau parasit) yang dapat berpindah dari tubuh individu ke individu lainnya. Penyakit menular disebut juga dengan wabah. Wabah dalam lingkup yang lebih luas disebut epidemik, yaitu wabah yang terjadi secara lebih cepat daripada yang diduga. Adapun wabah dalam lingkup global disebut pandemik. Penyakit yang umum yang terjadi pada laju yang konstan namun cukup tinggi pada suatu populasi disebut sebagai endemik. Suatu infeksi penyakit dikatakan sebagai endemik bila secara rata-rata setiap individu yang terinfeksi menularkannya kepada individu lain. Bila infeksi tersebut tidak hilang dan jumlah individu yang terinfeksi tidak bertambah secara eksponensial, maka suatu infeksi dikatakan berada dalam keadaan endemik (*endemic steady state*) [11]. Contoh penyakit menular pada hewan laut adalah WSSV. Penyakit tersebut menyerang pada spesies *crustacea*, diantaranya udang, kepiting, lobster, dll.



Gambar 2.1.1 Virus penyebab penyakit bercak putih (WSSV), kiri morfologi virus pemotretan dengan *scanning* mikroskop, kanan komponen virus



Gambar 2.1.2 Udang Windu Terserang WSSV

WSSV adalah virus yang menyerang sistem organ *crustacea* yang menyebabkan bercak putih pada permukaan luar udang. Virus penyebab WSSV merupakan virus eksotik yang tetap bersifat infeksiif meskipun dalam kondisi beku. WSSV termasuk dalam family Nimaviridae genus *Whispovirus* [12]. WSSV merupakan penyakit yang paling berbahaya dengan urutan nomer 1 dibandingkan dengan penyakit lainnya seperti

YHV (kepala kuning) dan MBV (bakteri dan virus bergabung sehingga udang tidak tumbuh besar). Berikut cara penularan penyakit akibat virus ini diantaranya [13]:

1. Dari induk ke larva
 - a. Induk yang terinfeksi melepaskan jaringan dan cairan ovary bernama telur
 - b. Virus dalam cairan akan menempel ke telur
 - c. Jika menetas, telur sudah terinfeksi oleh virus
 - d. Nauplius terkena virus hingga PL 20
 - e. Jika larva Nauplius ini dipelihara di hatchery, tingkat bertahan hidupnya dibawah 20% dan kualitasnya tidak bagus.
2. Dari udang dan kepiting liar
 - a. Udang dan kepiting liar terinfeksi tapi sering tidak mati karena lingkungan masih mendukung.
 - b. Pada saat hujan atau oksigen turun drastis, gas H_2S (gas beracun yang berbahaya dan mematikan timbul dari proses penguraian yang tidak sempurna) muncul, sehingga udang dan kepiting mati.
 - c. Jaringan pada saat pergantian air, penyakit dalam tubuh udang kecil/zitoplankton (makhluk hidup kecil berupa hewan hidup di air) akan masuk bersama air dan menginfeksi udang dalam tambak karena dimakan oleh udang budidaya.
3. Darah
 - a. Udang yang sakit darahnya tidak bisa mengental.

- b. Bila ada udang sakit yang mati dan dimakan udang lain, darahnya akan lepas ke air.
 - c. Butiran darah mengandung banyak sekali virus, dalam 0.3 ml darah, akan mampu menulari 12 ekor udang besar hanya dalam waktu 30 menit.
4. Kanibalisme
- a. Udang yang mulai sakit akan lambat bergerak.
 - b. Udang yang sehat akan memakan ekor, kaki atau sungut udang sakit.
 - c. Udang sehat akan tertular.
 - d. Udang yang baru mati, biasanya akan dimakan oleh minimal 12 ekor udang sehat.
 - e. Penularan meningkat dalam hitungan 3 hari.
5. Penularan melalui air tambak lain
- a. Tambak lain terserang WSSV.
 - b. Jika air tambak lebih rendah, rembesan air dari tambak lain membawa penyakit.
6. Penularan melalui bangkai udang
- a. Udang yang sakit akan berenang di permukaan tambak.
 - b. Burung seperti burung camar akan menyambar udang yang sakit.
 - c. Jika udang terlepas dan jatuh dari mulut burung camar kemudian masuk ke tambak, maka tambak akan terinfeksi.

Tabel 2.1 Umur dan Panjang Tubuh Larva Udang Windu

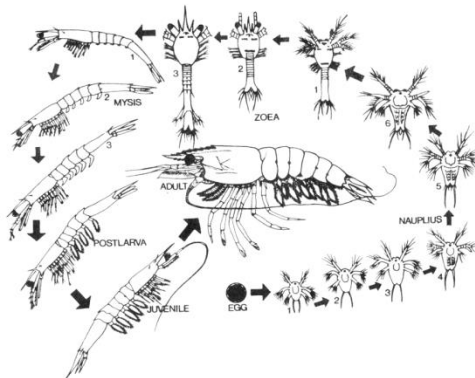
Tahapan Udang	Rata-rata Panjang Tubuh (mm)	Hari Setelah Menetas (Umur)
Nauplius 1	0.32	15 Jam
Nauplius 2	0.35	20 Jam
Nauplius 3	0.39	1 Hari 2 Jam
Nauplius 4	0.40	1 Hari 8 Jam
Nauplius 5	0.41	1 Hari 14 Jam
Nauplius 6	0.54	1 Hari 20 Jam
Protozoaea 1	1.05	2 Hari 16 Jam
Protozoaea 2	1.9	4 Hari 4 Jam
Protozoaea 3	3.2	6 Hari
Mysis 1	3.8	7 Hari 4 Jam
Mysis 2	4.3	8 Hari 16 Jam
Mysis 3	4.5	9 hari 4 Jam
Postlarvae 1	5.2	10 Hari 20 Jam
Postlarvae 5	8	16 Hari
Postlarvae 15	12	26 Hari
Postlarvae 20	18	30 Hari

Sumber: Biology and Culture of Sea (Kungvankij *et al.*, 1986).

Udang windu yang terinfeksi WSSV akan mengalami perubahan tingkah laku yaitu menurunnya aktivitas berenang, kurangnya keseimbangan dalam berenang, dan tidak terarah. Selain itu udang windu lebih sering berenang bergerombol di tepi tambak dan berenang ke permukaan. Pada fase akut terdapat bercak-bercak putih pada karapas dengan diameter 0.5-3.0 mm tetapi pada induk udang warnanya menjadi merah dan bercak putih ini pertama kali muncul pada *cephalothorax* yaitu segmen ke 5 dan ke 6 dari abdominal lalu menyebar ke seluruh kutikula tubuhnya [14].

Bila udang yang terserang WSSV tetapi belum terdapat tanda bintik putih, dikategorikan pada kronis, dimana infeksi yang dialami oleh jaringan rendah

sehingga bintik putih dan kemerahan pada udang tidak tampak. Organ-organ target yang diserang udang fase kronis akan terjadi lebih lama yaitu 15-28 hari yang dapat dijadikan sebagai indikator serangan yaitu sel-sel insang, hepatopankreas dan usus. Sel-sel hepatopankreas, usus dan insang yang terserang penyakit WSSV mengalami kerusakan yang ditandai dengan hipertopi inti (*eosinofilik hipertopi*) dan *inclusion bodies sel*. Sedangkan organ lain yang diserang adalah lambung, sel epitel, subkutikula, organ lymphoid, *antennal gland* dan *hemocyte* [15].



Gambar 2.1.3 Siklus Hidup Udang Windu

Untuk menghindari WSSV pada udang windu, diantaranya [13]:

1. Membeli benih yang bebas virus dan dari induk yang bebas WSSV (disertai dengan bukti sertifikat) atau dari *hatchery* yang bersertifikat CPIB dengan sertifikat masih berlaku.

2. Menyiapkan tambak:
 - a. Pengeringan 7-8 hari agar bisa sisa udang sakit dan virus ikut mati.
 - b. Memasukkan air dengan saringan berlapis agar telur dan benih udang liar tidak masuk.
 - c. Membiarkan air tambak tanpa diisi udang windu selama minimal 5 hari agar partikel virus tidak bertemu atau dimakan oleh udang.
 - d. Membuat pagar *biosecurity* (suatu sistem untuk mencegah terjangkitnya penyakit) dengan plastik atau bungkus semen/pakan di sepanjang pematang.
 - e. Jangan memasukkan air tanpa saringan halus dan endapkan 5 hari setelahnya.

Dari proses tersebut dapat dibuat model matematika *prey-predator* dengan *prey* udang windu yang rentan dan terinfeksi WSSV. Dan *predator* berupa kepiting, udang windu sejenis dan udang liar yang rentan dan terinfeksi WSSV. Dengan permasalahan tersebut, dibuat model matematika menggunakan model SIS (*Susceptible Infected Susceptibel*).

2.3 Model Predator-Prey pada Udang Windu

Model *predator-prey* dengan $S(t)$ dan $P(t)$ masing-masing merupakan ukuran populasi *predator* dan *prey* adalah sebagai berikut [4]:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - aSP_1 - d_1S \\ \dot{P}_1(t) &= -cP_1 + kaSP_1\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dengan:

- $S(t)$: Populasi udang windu yang rentan sebagai *prey* ($S(0) > 0$)
 $P_1(t)$: Populasi *predator* ($P_1(0) > 0$)
 r : Rate pertumbuhan populasi udang windu per kapita tanpa adanya predator
 K : Lingkungan yang mendukung terhadap udang windu sebagai *prey*
 d_1 : Rate kematian alami udang windu sebagai *prey* yang sehat
 a : Koefisien *prey-predasi* yang sehat dengan *predator* sehat
 k : Koefisien konversi dari mangsa sehat untuk predator sehat
 c : Rate kematian alami sebagai *predator* yang sehat

2.4 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar dinotasikan dengan R_0 merupakan suatu ukuran potensi penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai nilai harapan banyaknya populasi rentan yang menjadi terinfeksi selama masa infeksi berlangsung [16]. Ada yang mendefinisikan bahwa bilangan reproduksi dasar adalah rata-rata banyaknya individu yang rentan terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi bila individu yang terinfeksi tersebut masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan [17]. Bilangan reproduksi dasar dinyatakan sebagai berikut [18]:

$$G = FV^{-1}$$

Dimana

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i(x_0)}{\partial x_j} \right]$$

Dan

$$V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i(x_0)}{\partial x_j} \right]$$

F merupakan matriks tak negatif dan V merupakan matriks tak singular, maka FV^{-1} adalah matriks *next generation* dengan V^{-1} menyatakan rata-rata panjang waktu yang dibutuhkan individu terinfeksi pada golongan j selama hidupnya dan F menyatakan laju individu terinfeksi pada golongan j yang menimbulkan infeksi baru pada golongan i [17]. Serta x_0 menunjukkan keadaan titik setimbang bebas penyakit [18].

R_0 merupakan nilai eigen dominan bagi matriks *next generation* $G = FV^{-1}$. Sehingga $R_0 = \rho(FV^{-1})$, dengan kondisi yang akan timbul, yaitu [19]:

1. Jika $R_0 \leq 1$, maka tidak terjadi endemik.
2. Jika $R_0 > 1$, maka akan terjadi penularan penyakit pada seluruh populasi *prey* yang rentan (*susceptible*).

2.5 Titik Keseimbangan dan Kestabilannya

Suatu sistem persamaan diferensial berbentuk [20]:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= f(S, I, P_1, P_2) \\ \dot{I}(t) &= g(S, I, P_1, P_2) \\ \dot{P}_1(t) &= h(S, I, P_1, P_2) \\ \dot{P}_2(t) &= i(S, I, P_1, P_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sebuah titik $(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)})$ merupakan titik kesetimbangan dari persamaan (2.2) jika memenuhi [20]:

$$f(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)}) = 0$$

$$g(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)}) = 0$$

$$h(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)}) = 0$$

$$i(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)}) = 0$$

Kestabilan suatu titik setimbang juga dapat diperiksa dari akar-akar karakteristik dengan menyelesaikan $|A - \lambda I| = 0$ dengan A adalah matriks dari sistem linierisasi dari persamaan diferensial (2.2). Sifat stabilitas titik setimbang $(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)})$ berdasarkan tanda bagian real menjadi 3, yaitu [20]:

1. Stabil

Titik kesetimbangan $(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)})$ dari persamaan (2.2) disebut stabil jika dan hanya jika akar karakteristik adalah real dan negatif atau kompleks konjugate dengan bagian realnya non positif.

2. Stabil Asimtotis

Titik kesetimbangan $(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)})$ dari persamaan (2.2) disebut stabil asimtotis jika dan hanya jika akar karakteristik adalah real dan negatif atau kompleks konjugate dengan bagian realnya negatif.

3. Tidak Stabil

Titik kesetimbangan $(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)})$ dari persamaan (2.2) disebut tidak stabil jika dan hanya jika akar karakteristik adalah real

dan positif atau kompleks konjugate dengan bagian realnya positif.

2.6 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Pada permasalahan tertentu kestabilan titik setimbang tidak bisa diamati karena tanda bagian real nilai eigen tidak mudah ditentukan, oleh karena itu perlu digunakan metode lain untuk menentukan tanda bagian real nilai eigen λ . Sebagai contoh untuk matriks yang berukuran $n \times n$ dengan $n > 2$ tanda bagian real nilai eigen dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz (*Routh-Hurwitz Stability Criterion*) [20].

Nilai eigen dari A adalah akar polynomian karakteristik

$$\det(\lambda I - A) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n\lambda^0$$

Prosedur dan kriteria Routh-Hurwitz adalah sebagai berikut [21]:

1. Menuliskan polinomial dalam λ sesuai dengan bentuk berikut:

$$q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.3)$$

Dimana koefisien-koefisien tersebut konstanta real.

2. Jika ada koefisien-koefisien bernilai nol atau negatif dimana paling tidak terdapat satu koefisien bernilai positif maka terdapat satu atau lebih akar kompleks yang mempunyai bagian real positif, oleh karena itu sistem tidak stabil. Agar diperoleh akar yang mempunyai bagian real negatif, maka semua koefisiennya harus positif. Kondisi semua koefisien bernilai positif belum cukup untuk menjamin kestabilan.

3. Jika semua koefisien bernilai positif, susun koefisien polinomial tersebut menjadi:

$$\begin{array}{l|cccc}
 \lambda^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\
 \lambda^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\
 \lambda^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\
 \lambda^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\
 \lambda^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \lambda^0 & q & & &
 \end{array}$$

Koefisien-koefisien b_1, b_2, b_3 dan seterusnya dihitung sebagai berikut:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}; \\
 b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}; \dots$$

Perhitungan koefisien b_i dilanjutkan sampai nilai $b_i = 0$, untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots$. Pola yang sama dari perkalian silang koefisien-koefisien, dan baris di atasnya digunakan dalam menghitung koefisien c_i, d_i dan seterusnya. Sehingga,

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}; \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}; \\
 c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}; \dots \\
 d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}; \quad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}; \\
 d_3 = \frac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{c_1}; \dots$$

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz menyatakan bahwa sistem dikatakan stabil syarat perlu dan semua akar-akar persamaan (2.3) mempunyai bilangan real negatif jika dan hanya jika elemen-elemen pada kolom pertama $(a_0, a_1, b_1, c_1, \dots)$ memiliki tanda yang sama.

Persamaan hasil linearisasi disekitar $(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)})$. Persamaan tersebut dapat ditulis [20]:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial P_1} & \frac{\partial f}{\partial P_2} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial P_1} & \frac{\partial g}{\partial P_2} \\ \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial P_1} & \frac{\partial h}{\partial P_2} \\ \frac{\partial i}{\partial S} & \frac{\partial i}{\partial I} & \frac{\partial i}{\partial P_1} & \frac{\partial i}{\partial P_2} \end{bmatrix}_{(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)})} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial P_1} & \frac{\partial f}{\partial P_2} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial P_1} & \frac{\partial g}{\partial P_2} \\ \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial P_1} & \frac{\partial h}{\partial P_2} \\ \frac{\partial i}{\partial S} & \frac{\partial i}{\partial I} & \frac{\partial i}{\partial P_1} & \frac{\partial i}{\partial P_2} \end{bmatrix}_{(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)})} \quad (2.4)$$

disebut matriks Jacobian disekitar titik kesetimbangan $(\bar{S}^{(0)}, \bar{I}^{(0)}, \bar{P}_1^{(0)}, \bar{P}_2^{(0)})$.

2.7 Metode Adam Bashforth-Moulton

Metode Adams Bashforth–Moulton merupakan metode numerik yang memiliki banyak langkah (multi step) atau biasa disebut sebagai metode predictor-korektor karena dalam penyelesaiannya digunakan persamaan prediktor dan persamaan korektor. Metode Adams Bashforth-Moulton dapat digunakan tanpa harus mencari turunan-turunan fungsinya terlebih dahulu, melainkan langsung menggunakan persamaan prediktorkorektor, karena metode ini banyak langkah (multi step), maka dibutuhkan beberapa solusi awal yang dapat diperoleh dari metode one step menggunakan metode Runge–Kutta [22]. Metode Runge Kutta adalah alternatif dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$ pada titik terpilih dalam setiap selang langkah. Metode Runge-Kutta adalah metode PDB yang paling populer karena banyak dipakai dalam praktek [23].

Dalam menyelesaikan simulasi pada model *prey-predator*, langkah awal yang dilakukan adalah menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk memperoleh tiga solusi awal y_r , y_{r-1} , dan y_{r-2} . Kemudian digunakan menggunakan metode Adam Bashforth orde empat untuk memprediksikan nilai y_{r+1} setelah itu nilai prediksi tersebut diperbaiki menggunakan metode Adam Moulton orde empat [22].

Metode Runge-Kutta orde empat mempunyai bentuk sebagai berikut [24]:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.5)$$

Dengan:

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3h)$$

Metode Adam Bashforth-Moulton orde empat mempunyai bentuk sebagai berikut [22]:

Prediktor

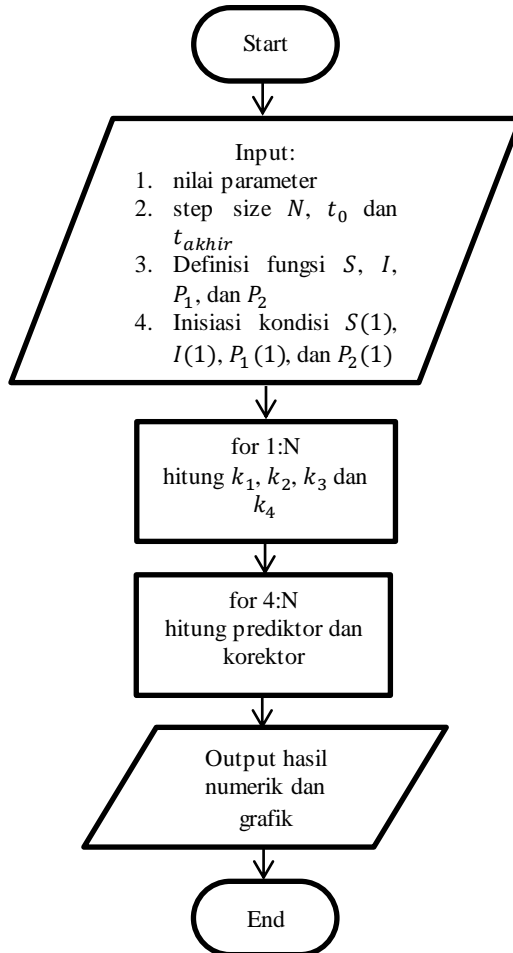
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) \quad (2.6)$$

Korektor

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9y_{i+1}^* - 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) \quad (2.7)$$

Dalam penelitian ini, akan menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton untuk mengetahui pengaruh penyebaran WSSV pada udang windu karena pada metode tersebut memiliki ketelitian yang tinggi.

Algoritma untuk menyelesaikan metode Adam Bashforth-Moulton orde empat:



BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan metode yang digunakan dalam Tugas Akhir agar proses pengerjaan dapat terstruktur dengan baik dan dapat mencapai tujuan yang telah ditetapkan sebelumnya.

3.1. Kajian Pustaka

Kajian Pustaka merupakan suatu kajian yang dilakukan untuk mendapatkan data dan informasi dari buku-buku, artikel-artikel, jurnal dan skripsi atau tugas akhir yang terkait. Pada penelitian ini, informasi yang terkait adalah ciri-ciri udang windu terkena WSSV dan cara penyebaran WSSV. Setelah mengetahui ciri-ciri udang windu yang terkena WSSV, mencari model yang sesuai dengan cara penyebaran penyakit pada udang windu. Model yang digunakan adalah model *prey-predator* dengan model tipe SIS. Setelah itu mendapatkan informasi mengenai aplikasi dari metode Adam Bashforth-Moulton di berbagai bidang.

3.2. Menyusun Asumsi dan Deskripsi Model

Pada tahap ini mengasumsikan model penyebaran WSSV pada udang windu. Diasumsikan bahwa pada suatu tambak WSSV menyebar diantara udang windu sebagai *prey* dan *predator*. Adanya penyakit, populasi udang windu sebagai *prey* dibagi menjadi dua bagian: Rentan (S) dan Infeksi (I). Demikian pula dengan adanya penyakit pada udang windu *predator* dibagi menjadi dua bagian: (P_1) dan (P_2). Dengan demikian terdapat empat populasi, yaitu *prey* sehat, *prey* yang terinfeksi, *predator* yang sehat dan *predator* yang terinfeksi.

3.3. Analisis WSSV

Pada tahap ini, model penyebaran WSSV pada udang windu dianalisis titik kesetimbangan dan kestabilan. Serta mencari bilangan reproduksi dasar R_0 . Dimana dalam menganalisis kestabilan menggunakan metode Ruth-Hurwitz. Dan untuk menganalisis bilangan reproduksi dasar R_0 menggunakan metode matriks generasi.

3.4. Simulasi Model

Software yang akan digunakan dalam pembuatan program adalah software MATLAB.

Prosedur untuk membuat program simulasi dari model *prey-predator* adalah sebagai berikut:

1. Input nilai parameter.
2. Proses membuat subprogram untuk metode Runge-Kutta orde empat dari iterasi 1:N.
3. Proses membuat subprogram untuk metode Adam Bashforth-Moulton orde empat dari iterasi 5:N.
4. Output
Output yang dihasilkan dari simulasi ini berupa grafik laju pertumbuhan *prey-predator* serta perhitungan numerik.

3.5. Analisis Hasil

Pada tahap ini menganalisis model penyebaran WSSV pada udang windu dengan mencari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, nilai eigen dan bilangan reproduksi serta simulasi hasil menggunakan program MATLAB.

3.6. Penarikan Kesimpulan dan Penulisan Laporan Tugas Akhir

Setelah di analisis, dilakukan penarikan kesimpulan pada seluruh tahap penelitian sehingga diperoleh model penyebaran WSSV pada *prey-predator* udang windu, analisis kestabilan sistem dari model penyebaran WSSV, simulasi kestabilan sistem, serta penarikan kesimpulan hasil parameter-parameter yang diperoleh dari analisis kestabilan dan simulasi kestabilan serta dilakukan penulisan Laporan Tugas Akhir.

3.7. Alur Penelitian

Berikut adalah alur yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir ini, sebagai berikut:



BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dilakukan analisis dan pembahasan mengenai tahapan dalam menganalisis penyebaran WSSV pada udang windu.

4.1 Asumsi dan Deskripsi Model

Dari model bab 2.2 persamaan (2.1) sudah dikemukakan model interaksi *predator-prey* dengan $S(t)$ sebagai *prey* dan $P_1(t)$ sebagai *predator* tanpa penyakit dalam ekosistem dengan bentuk:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - aSP_1 - d_1S \\ \dot{P}_1(t) &= -cP_1 + kaSP_1\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dimana pada *prey* dipengaruhi oleh pertumbuhan *prey* dilingkungan berkurang dengan adanya predasi dan kematian alami dari *prey*. Kondisi awal $S(0) > 0$.

Untuk *predator* dipengaruhi oleh perkembangan *predator* berkurang karena adanya kematian alami. Kondisi awal $P_1(0) > 0$.

Pada bagian ini akan dianalisa pengembangan model tersebut dengan *prey* dan *predator* terinfeksi serta terjadinya proses moulting pada udang. Sebelum dianalisa kestabilannya, terlebih dahulu akan disusun asumsi dari model dan deskripsi model. Asumsi model ini adalah:

1. Dengan tidak adanya penyakit dan predasi, populasi *prey* tumbuh dengan rate pertumbuhan

populasi udang windu r ($r > 0$) dan koefisien konversi dari udang windu yang sehat untuk predator sehat K ($K > 0$).

2. Diasumsikan bahwa WSSV menyebar diantara populasi udang windu sebagai *prey* dan *predator*. Dengan adanya penyakit, populasi udang windu sebagai *prey* dibagi menjadi dua bagian: Rentan (S) dan Infeksi (I), sehingga jumlah biomassa *prey* $S(t) + I(t)$. Demikian pula dengan adanya penyakit pada *predator* dibagi menjadi dua bagian: (P_1) dan (P_2), sehingga total biomassa *predator* adalah $P_1(t) + P_2(t)$. Dengan demikian terdapat empat populasi, yaitu *prey* sehat, *prey* yang terinfeksi, *predator* yang sehat dan *predator* yang terinfeksi.
3. Hanya *prey* yang rentan diasumsikan yang mereproduksi keturunan yaitu hanya S memiliki tingkat pertumbuhan.
4. *Prey* memiliki satu sumber infeksi (sumber eksternal) yaitu virus. Setelah terinfeksi, maka dikonversikan menjadi *prey* yang terinfeksi (I). Namun pada kasus dimana *prey* yang terinfeksi, sehingga menetapkan nilai awal *prey* yang terinfeksi $I(0) \geq 0$. Jika diasumsikan bahwa populasi *predator* yang terinfeksi terjadi karena hanya adanya predasi dari *prey* yang terinfeksi maka nilai awal *predator* yang terinfeksi sebagai $P_2(0) \geq 0$. Adanya penularan penyakit dari *prey* βSI dimana β adalah koefisien infeksi dari *prey*

yang sehat. Demikian pula dengan *predator* yang dinyatakan dengan $\gamma P_1 P_2$.

5. Diasumsikan bahwa *prey* yang terinfeksi mempunyai probabilitas predasi yang tinggi oleh predator (*prey* yang sehat mempunyai probabilitas minimum jika ditangkap oleh *predator*). Demikian pula predator yang terinfeksi memiliki kapasitas rendah menangkap mangsa sebagai dibandingkan dengan yang sehat.
6. Diasumsikan bahwa koefisien konversi kedua *prey* dan *predator* berbeda yang dinotasikan k, l, o, w
7. Diasumsikan bahwa ke empat spesies memiliki tingkat kematian alami.
8. Diasumsikan bahwa *predator* yang sehat maupun terinfeksi dibasmi oleh petani m_3 .

Diberikan model matematika dari semua asumsi diatas sebagai berikut:

$$\dot{S}(t) = rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - aSP_1 - bSP_2 - d_1S \quad (4.2)$$

$$\dot{I}(t) = \beta SI - uIP_1 - vIP_2 - (h + d_2)I \quad (4.3)$$

$$\dot{P}_1(t) = kaSP_1 + lulP_1 - cP_1 - \gamma P_1 P_2 - m_3P_1 \quad (4.4)$$

$$\dot{P}_2(t) = obSP_2 + vwIP_2 - (d_4 + d_5)P_2 + \gamma P_1 P_2 - m_3P_2 \quad (4.5)$$

Kondisi awal $S(0) > 0, I(0) \geq 0, P_1(0) > 0, P_2(0) \geq 0$, dengan:

- r : Rate pertumbuhan populasi udang windu per kapita tanpa adanya predator
 β : Koefisien infeksi dari *prey*

- γ : Koefisien infeksi dari *predator*
- K : Lingkungan yang mendukung terhadap udang windu sebagai *prey*
- a : Koefisien *prey-predasi* yang sehat dengan *predator* sehat
- u : Koefisien *prey-predasi* yang terinfeksi dengan *predator* sehat
- b : Koefisien *prey-predasi* yang sehat dengan *predator* yang terinfeksi
- v : Koefisien *prey-predasi* yang terinfeksi dengan *predator* yang terinfeksi
- k : Koefisien konversi dari *prey* yang sehat ke *predator* yang sehat
- l : Koefisien konversi dari *prey* yang terinfeksi ke *predator* yang sehat
- o : Koefisien konversi dari *prey* yang sehat ke *predator* yang terinfeksi
- w : Koefisien konversi dari *prey* yang terinfeksi ke *predator* yang terinfeksi
- d_1 : Rate kematian alami udang windu sebagai *prey* yang sehat
- d_2 : Rate kematian alami udang windu sebagai *prey* yang terinfeksi
- c : Rate kematian alami udang windu sebagai *predator* yang sehat
- d_4 : Rate kematian alami *predator* yang terinfeksi
- d_5 : Rate kematian *predator* yang terinfeksi akibat infeksi
- h : Rate kematian udang windu sebagai *prey* yang terinfeksi akibat infeksi
- m_3 : Koefisien pembasmian *predator*

Berdasarkan variabel, parameter dan asumsi yang digunakan, dapat ditentukan perubahan jumlah populasi udang windu yang rentan S , perubahan jumlah populasi

udang windu yang terinfeksi I , perubahan jumlah populasi *predator* yang rentan P_1 , dan perubahan jumlah populasi *predator* yang terinfeksi P_2 terhadap waktu sebagai berikut:

1. Perubahan jumlah populasi udang windu yang rentan S terhadap waktu.

Individu udang windu sebagai *prey* yang rentan dalam tambak dinotasikan sebagai $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ sehingga populasinya dalam tambak menjadi $S = \sum_{i=1}^n S_i$. Perubahan jumlah populasi udang windu yang rentan S dipengaruhi oleh ada atau tidaknya interaksi dengan populasi P_1 dan P_2 . Saat tidak terjadi interaksi pada populasi P_1 dan P_2 , maka pertumbuhan populasi udang windu S mengikuti model logistik dengan daya dukung lingkungan K , rate pertumbuhan udang windu sebesar r dan jumlah populasi udang windu yang terinfeksi sebesar I . Jadi populasi udang windu yang rentan akan bertambah dengan laju $rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right)$. Terjadi infeksi oleh *prey* yang terinfeksi I sebesar β , sehingga menyebabkan populasi udang windu S berkurang dengan laju sebesar βSI . Saat terjadi interaksi oleh P_1 dan P_2 sehingga terjadi *predasi* oleh *predator* yang rentan P_1 dan terinfeksi P_2 sebesar a dan b sehingga pertumbuhan S berkurang karena adanya laju $(aSP_1 + bSP_2)$. Selain itu, yang menyebabkan berkurangnya populasi S berkurang adanya kematain alami d_1 dari S dengan laju d_1S . Jadi laju perubahan jumlah populasi udang windu S terhadap satuan waktu dapat dinyatakan sebagai:

$$\dot{S}(t) = rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - aSP_1 - bSP_2 - d_1S$$

2. Perubahan jumlah populasi udang windu yang terinfeksi I terhadap waktu.

Individu udang windu sebagai *prey* yang terinfeksi dalam tambak dinotasikan sebagai $I_1, I_2, I_3, \dots, I_m$ sehingga populasinya dalam tambak menjadi $I = \sum_{i=1}^m I_i$. Perubahan jumlah populasi udang windu yang terinfeksi I dipengaruhi oleh ada atau tidaknya interaksi dengan populasi P_1 dan P_2 . Saat tidak terjadi interaksi pada populasi P_1 dan P_2 , maka populasi udang windu I bertambah dipengaruhi oleh koefisien infeksi sebesar β , sehingga laju sebesar βSI . Disamping itu, udang windu yang terinfeksi I selama pembudidayaan didalam tambak mati karena mati secara alami sebesar h dan mati karena terinfeksi sebesar d_2 , dengan demikian populasi I berkurang karena adanya laju sebesar $(h + d_2)I$. Saat terjadi interaksi populasi P_1 dan P_2 , menyebabkan adanya *predasi* oleh *predator* yang rentan P_1 dan terinfeksi P_2 sebesar u dan v , sehingga pertumbuhan I berkurang dipengaruhi oleh laju $(uIP_1 + vIP_2)$. Jadi laju perubahan jumlah populasi udang windu yang terinfeksi I terhadap satuan waktu dapat dinyatakan sebagai:

$$\dot{I}(t) = \beta SI - uIP_1 - vIP_2 - (h + d_2)I$$

3. Perubahan jumlah populasi *predator* yang rentan P_1 terhadap waktu.

Individu *predator* yang rentan dalam tambak dinotasikan sebagai $P_{11}, P_{12}, P_{13}, \dots, P_{1r}$, sehingga populasi *predator* yang rentan menjadi $P_1 = \sum_{i=1}^r P_{1i}$. Saat tidak terjadi interaksi dengan populasi S dan I , populasi P_1 mati secara alami sebesar c , terjadi pembasmian sebesar m_3 , dan terjadi interaksi oleh *predator* yang terinfeksi P_2 yang menyebabkan P_1 tertular dengan koefisien sebesar γ sehingga populasinya berkurang dengan laju sebesar $(c + \gamma P_2 + m_3)P_1$. Saat terjadi interaksi

oleh S dan I terjadi proses saling makan, sehingga populasi P_1 bertambah karena adanya laju $kaSP_1 + luIP_1$. Dengan demikian, laju pertumbuhan jumlah populasi *predator* yang rentan terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai:

$$\dot{P}_1(t) = kaSP_1 + luIP_1 - cP_1 - \gamma P_1 P_2 - m_3 P_1$$

4. Perubahan jumlah populasi *predator* yang terinfeksi P_2 terhadap waktu.

Individu *predator* yang terinfeksi dalam tambak dinotasikan sebagai $P_{21}, P_{22}, P_{23}, \dots, P_{2s}$, sehingga populasi *predator* yang rentan menjadi $P_2 = \sum_{i=1}^r P_{2i}$. Saat tidak terjadi interaksi dengan populasi S dan I , populasi berkurang oleh adanya kematian secara alami sebesar d_4 , mati akibat infeksi sebesar d_5 serta adanya pembasmian sebesar m_3 sehingga lajunya menjadi $(d_4 + d_5 + \gamma P_1 + m_3)P_2$. Saat terjadi interaksi dengan populasi S dan I , populasi P_2 bertambah karena terjadi proses saling makan sehingga laju sebesar $obSP_2 + vwIP_2$. Jadi laju perubahan jumlah populasi *predator* yang terinfeksi P_2 terhadap waktu dapat dinyatakan sebagai:

$$\dot{P}_2(t) = obSP_2 + vwIP_2 - (d_4 + d_5)P_2 + \gamma P_1 P_2 - m_3 P_2$$

4.2 Titik Setimbang Model

Titik setimbang adalah titik yang invariant terhadap waktu, dimana laju perubahan adalah nol.

Dengan demikian titik-titik setimbang dari persamaan (4.2) sampai (4.5) diperoleh dari $\dot{S}(t) = 0, \dot{I}(t) = 0, \dot{P}_1(t) = 0, \dot{P}_2(t) = 0$, yaitu:

$$rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - aSP_1 - bSP_2 - d_1 S = 0 \quad (4.2a)$$

$$\beta SI - uIP_1 - vIP_2 - (h + d_2)I = 0 \quad (4.3a)$$

$$kaSP_1 + luIP_1 - cP_1 - \gamma P_1 P_2 - m_3 P_1 = 0 \quad (4.4a)$$

$$\begin{aligned} obSP_2 + vwIP_2 - (d_4 + d_5)P_2 + \gamma P_1 P_2 \\ - m_3 P_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.5a)$$

Selanjutnya akan didapatkan titik setimbang dari model *predator-prey* pada udang windu dengan udang windu sebagai *prey* yang sehat maupun terinfeksi dan udang windu sebagai *predator* yang sehat dan terinfeksi.

Titik setimbang yang akan dicari adalah titik setimbang bebas WSSV dan endemik.

4.2.1 Titik Kesetimbangan Bebas WSSV

Titik setimbang bebas WSSV adalah suatu keadaan dimana tidak terjadi penyebaran WSSV pada udang windu.

- a. Misalkan titik setimbang bebas WSSV adalah titik $E^{(1)}(S^{(1)}, I^{(1)}, P_1^{(1)}, P_2^{(1)})$. Dalam kasus ini $I = I^{(1)} = 0$ dan $P_2 = P_2^{(1)} = 0$. Maka persamaan (4.4a) diperoleh:

$$kaSP_1 - cP_1 - m_3 P_1 = 0$$

$$P_1(kaS - c - m_3) = 0$$

$$\text{didapat } P_1 = 0 \text{ sehingga } P_1^{(1)} = 0.$$

Persamaan (4.2a) diperoleh:

$$rS \left(1 - \frac{S + I}{K} \right) - aSP_1 - d_1 S = 0$$

$$S \left[r \left(1 - \frac{S}{K} \right) - d_1 \right] = 0$$

$$r\left(1 - \frac{S}{K}\right) - d_1 = 0$$

$$r\left(1 - \frac{S}{K}\right) = d_1$$

$$\frac{S}{K} = 1 - \frac{d_1}{r}$$

$$S = K\left(1 - \frac{d_1}{r}\right)$$

didapat $S = K\left(1 - \frac{d_1}{r}\right)$ sehingga $S^{(1)} = K\left(1 - \frac{d_1}{r}\right)$.

Sehingga titik setimbang menjadi

$$E^{(1)}\left(K\left(1 - \frac{d_1}{r}\right), 0, 0, 0\right).$$

- b. Misalkan titik setimbang bebas WSSV adalah titik $E^{(2)}(S^{(2)}, I^{(2)}, P_1^{(2)}, P_2^{(2)})$. Dalam kasus ini $I = I^{(2)} = 0$ dan $P_2 = P_2^{(2)} = 0$. Maka persamaan (4.4a) diperoleh:

$$kaSP_1 - cP_1 - m_3P_1 = 0$$

$$P_1(kaS - c - m_3) = 0$$

$$kaS = c + m_3$$

$$S = \frac{c + m_3}{ka}$$

didapat $S = \frac{c+m_3}{ka}$ sehingga $S^{(2)} = \frac{c+m_3}{ka}$

Akibatnya pada persamaan (4.2a) diperoleh:

$$rS\left(1 - \frac{S}{K}\right) - aSP_1 - d_1S = 0$$

$$S\left[r\left(1 - \frac{S}{K}\right) - aP_1 - d_1\right] = 0$$

$$r\left(1 - \frac{S}{K}\right) - aP_1 - d_1 = 0$$

$$aP_1 = r \left(1 - \frac{S}{K} \right) - d_1$$

$$P_1 = \frac{r \left(1 - \frac{c}{kaK} \right) - d_1}{a}$$

didapat $P_1 = \frac{r \left(1 - \frac{c+m_3}{kaK} \right) - d_1}{a} = 0$ sehingga $P_1^{(2)} =$

$$\frac{r \left(1 - \frac{c+m_3}{kaK} \right) - d_1}{a}. \text{ Sehingga titik setimbang}$$

$$E^{(2)} \left(\frac{c}{ka}, 0, \frac{r \left(1 - \frac{c+m_3}{kaK} \right) - d_1}{a}, 0 \right).$$

4.2.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik setimbang endemik adalah adalah suatu keadaan dimana terjadi penyebaran WSSV pada udang windu.

- a. Misalkan titik setimbang endemik adalah titik $E^{(3)}(S^{(3)}, I^{(3)}, P_1^{(3)}, P_2^{(3)})$. Oleh karena $I = I^{(3)} \neq 0$ dan $P_2 = P_2^{(3)} \neq 0$ maka dari persamaan (4.2a) diperoleh $S = S^{(3)} = 0$. Sehingga persamaan (4.4a) menjadi:

$$luIP_1 - cP_1 - \gamma P_1 P_2 - m_3 P_1 = 0$$

$$P_1(luI - c - \gamma P_2 - m_3) = 0$$

$$luI - c - \gamma P_2 - m_3 = 0$$

$$P_2 = \frac{luI - c - m_3}{\gamma}$$

didapat $P_2 = \frac{luI - c - m_3}{\gamma}$ sehingga $P_2^{(3)} =$

$$\frac{luI^{(3)} - c - m_3}{\gamma}.$$

Akibatnya pada persamaan (4.5a) menjadi:

$$kwIP_2 - (d_4 + d_5)P_2 + \gamma P_1 P_2 - m_3 P_2 = 0$$

$$P_2[kwI - (d_4 + d_5) + \gamma P_1 - m_3] = 0$$

$$kwI - (d_4 + d_5) + \gamma P_1 - m_3 = 0$$

$$P_1 = \frac{(d_4 + d_5) - kwI + m_3}{\gamma}$$

didapat $P_1 = \frac{(d_4 + d_5) - kwI + m_3}{\gamma}$ sehingga

$$P_1^{(3)} = \frac{(d_4 + d_5) - kwI^{(3)} + m_3}{\gamma}$$

Sehingga pada persamaan (4.3a) menjadi:

$$-uIP_1 - vIP_2 - (h + d_2)I = 0$$

$$I[-uP_1 - vP_2 - (h + d_2)] = 0$$

$$I \left[-u \left(\frac{(d_4 + d_5) - kwI}{\gamma} \right) - v \left(\frac{luI - c}{\gamma} \right) - (h + d_2) \right] = 0$$

$$-u \left(\frac{(d_4 + d_5) - kwI}{\gamma} \right) - v \left(\frac{luI - c}{\gamma} \right)$$

$$= (h + d_2)$$

$$-u((d_4 + d_5) - kwI) - v(luI - c)$$

$$= \gamma(h + d_2)$$

$$-u(d_4 + d_5) + ukwI - vluI + vc$$

$$= \gamma(h + d_2)$$

$$I(ukw - vlu) = \gamma(h + d_2) + u(d_4 + d_5) - vc$$

$$I = \frac{\gamma(h + d_2) + u(d_4 + d_5) - vc}{u(kw - vl)}$$

didapat $I = \frac{\gamma(h + d_2) + u(d_4 + d_5) - vc}{u(kw - vl)}$ sehingga

$$I^{(3)} = \frac{\gamma(h + d_2) + u(d_4 + d_5) - vc}{u(kw - vl)}$$

Sehingga titik setimbang menjadi

$$E^{(3)} \left(0, \frac{\gamma(h + d_2) + u(d_4 + d_5) - vc}{u(kw - vl)} \right),$$

$$\frac{(d_4 + d_5) - kw \left(\frac{\gamma(h + d_2) + u(d_4 + d_5) - vc}{u(kw - vl)} \right) + m_3}{\frac{\gamma}{lu \left(\frac{\gamma(h + d_2) + u(d_4 + d_5) - vc}{u(kw - vl)} \right) - c - m_3}},$$

- b. Misalkan titik setimbang endemik adalah titik $E^{(4)}(S^{(4)}, I^{(4)}, P_1^{(4)}, P_2^{(4)})$. Oleh karena $I = I^{(4)} \neq 0$ dan $P_2 = P_2^{(4)} \neq 0$ maka dari persamaan (4.4a) diperoleh $P_1 = P_1^{(4)} = 0$. Akibatnya pada persamaan (4.2a) menjadi:

$$rS \left(1 - \frac{S + I}{K} \right) - \beta SI - bSP_2 - d_1S = 0$$

$$1 - \frac{(\beta I + bP_2 + d_1)}{r} = \frac{S + I}{K}$$

$$S = K \left[1 - \frac{(\beta I + bP_2 + d_1)}{r} \right] - I$$

didapat $S = K \left[1 - \frac{(\beta I + bP_2 + d_1)}{r} \right] - I$ sehingga

$$S^{(4)} = K \left[1 - \frac{(\beta I + bP_2^{(4)} + d_1)}{r} \right] - I^{(4)}$$

Pada persamaan (4.3a) menjadi:

$$\beta SI - vIP_2 - (h + d_2)I = 0$$

$$\beta S - (h + d_2) = vP_2$$

$$P_2 = \frac{\beta S - (h + d_2)}{v}$$

didapat $P_2 = \frac{\beta S - (h + d_2)}{v}$ sehingga $P_2^{(4)} =$

$$\frac{\beta S^{(4)} - (h + d_2)}{v}.$$

Pada persamaan (4.5a)

$$obSP_2 + kwIP_2 - (d_4 + d_5)P_2 - m_3P_2 = 0$$

$$P_2[obS + kwI - (d_4 + d_5) - m_3] = 0$$

$$obS + kwI - (d_4 + d_5) - m_3 = 0$$

$$I = \frac{(d_4 + d_5) + m_3 - obS}{kw}$$

didapat $I = \frac{(d_4 + d_5) + m_3 - obS}{kw}$ sehingga $I^{(4)} = \frac{(d_4 + d_5) + m_3 - obS^{(4)}}{kw}$.

Sehingga titik setimbang menjadi

$$E^{(4)} \left(K \left[1 - \frac{(\beta I^{(4)} + bP_2^{(4)} + d_1)}{r} \right], \frac{(d_4 + d_5) + m_3 - obS^{(4)}}{kw}, 0, \frac{\beta S^{(4)} - (h + d_2)}{v} \right).$$

Dengan:

$$S^{(4)} = K \left[1 - \frac{(\beta I + bP_2^{(4)} + d_1)}{r} \right] - I^{(4)}$$

$$I^{(4)} = \frac{(d_4 + d_5) + m_3 - obS^{(4)}}{kw}$$

- c. Misalkan titik setimbang endemik adalah titik $E^{(5)}(S^{(5)}, I^{(5)}, P_1^{(5)}, P_2^{(5)})$. Dengan $P_1 = P_1^{(3)} = 0$ dan $P_2 = P_2^{(3)} = 0$ maka persamaan (4.3a) menjadi:

$$\beta SI - uIP_1 - vIP_2 - (h + d_2)I = 0$$

$$I(\beta S - (h + d_2)) = 0$$

$$S = \frac{(h + d_2)}{\beta}$$

didapat $S = \frac{(h + d_2)}{\beta}$ sehingga

$$S^{(5)} = \frac{(h + d_2)}{\beta}.$$

Pada persamaan (4.2a) menjadi:

$$rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - aSP_1 - bSP_2 - d_1S = 0$$

$$rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - d_1S = 0$$

$$S \left(r \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta I - d_1\right) = 0$$

$$r - \frac{rS}{K} - \frac{rI}{K} - \beta I - d_1 = 0$$

$$r - \frac{rS}{K} - d_1 = \frac{rI}{K} + \beta I$$

$$r - \frac{rS}{K} - d_1 = I \left(\frac{r}{K} + \beta\right)$$

$$\frac{r - \frac{rS}{K} - d_1}{\left(\frac{r}{K} + \beta\right)} = I$$

$$\frac{rK - rS - d_1K}{(r + \beta K)} = I$$

Substitusikan $S^{(5)}$ ke S , sehingga menjadi:

$$I = \frac{rK - r\left(\frac{h+d_2}{\beta}\right) - d_1K}{(r + \beta K)}$$

$$I = \frac{K\beta(r-d_1) - r(h+d_2)}{\beta(r + \beta K)}$$

$$\text{Didapat } I^{(5)} = \frac{K\beta(r-d_1) - r(h+d_2)}{\beta(r + \beta K)}$$

Sehingga titik kesetimbangan menjadi

$$E^{(5)} \left(\frac{(h+d_2)}{\beta}, \frac{K\beta(r-d_1) - r(h+d_2)}{\beta(r + \beta K)}, 0, 0 \right)$$

d. Misalkan titik setimbang endemik adalah titik

$$E^{(6)}(S^{(6)}, I^{(6)}, P_1^{(6)}, P_2^{(6)}). \text{ Dengan } I = I^{(6)} =$$

0 dan $P_1 = P_1^{(6)} = 0$ maka persamaan (4.5a) menjadi:

$$\begin{aligned} obSP_2 + vwIP_2 - (d_4 + d_5)P_2 + \gamma P_1 P_2 \\ - m_3 P_2 &= 0 \\ obS - (d_4 + d_5) - m_3 &= 0 \\ S &= \frac{(d_4 + d_5) + m_3}{ob} \end{aligned}$$

$$\text{Didapat } S^{(6)} = \frac{(d_4 + d_5) + m_3}{ob}.$$

Selanjutnya, persamaan (4.2a) menjadi:

$$\begin{aligned} rS \left(1 - \frac{S + I}{K} \right) - \beta SI - aSP_1 - bSP_2 - d_1 S \\ = 0 \end{aligned}$$

$$rS \left(1 - \frac{S}{K} \right) - bSP_2 - d_1 S = 0$$

$$rS \left(1 - \frac{S}{K} \right) - d_1 S = bSP_2$$

$$\frac{r \left(1 - \frac{S}{K} \right) - d_1}{b} = P_2$$

Substitusikan $S^{(6)}$ ke S sehingga menjadi:

$$P_2 = \frac{r \left(1 - \frac{\left(\frac{(d_4 + d_5) + m_3}{ob} \right)}{K} \right) - d_1}{b}$$

$$P_2^{(6)} = \frac{r - d_1 - \left(\frac{(d_4 + d_5) + m_3}{obK} \right)}{b}$$

Sehingga titik kesetimbangan menjadi

$$E^{(6)} \left(\frac{(d_4 + d_5) + m_3}{ob}, 0, 0, \frac{r - d_1 - \left(\frac{(d_4 + d_5) + m_3}{obK} \right)}{b} \right)$$

4.3 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan

Setelah didapat titik setimbang bebas penyakit $E^{(1)}, E^{(2)}$, dan endemik $E^{(3)}, E^{(4)}, E^{(5)}, E^{(6)}$ maka langkah selanjutnya adalah akan dianalisa kestabilan dari masing-masing titik setimbang. Kestabilan ini menunjukkan bahwa suatu populasi udang windu ketika terserang penyakit dapat disembuhkan.

Karena pada persamaan (4.2) - (4.5) dapat terlihat bahwa persamaan tersebut non linear sehingga harus dilinearkan terlebih dahulu untuk mendapatkann bentuk sistem yang linear. Selanjutnya dicari pendekatan linear disekitar $(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})$ yang merupakan titik kesetimbangan dari persamaan (4.2) - (4.5) dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor disekitar titik $(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= f(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) + \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(S - \bar{S}_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(I - \bar{I}_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_1 - \bar{P}_{10}) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_2 - \bar{P}_{20}) \\ &\quad + R_1(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) \\ \frac{dI}{dt} &= f(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) + \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(S - \bar{S}_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(I - \bar{I}_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_1 - \bar{P}_{10}) \\
& + \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_2 - \bar{P}_{20}) \\
& + R_2(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) \\
\frac{dP_1}{dt} & = f(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) + \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(S - \bar{S}_0) \\
& + \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(I - \bar{I}_0) \\
& + \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_1 - \bar{P}_{10}) \\
& + \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_2 - \bar{P}_{20}) \\
& + R_3(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) \\
\frac{dP_2}{dt} & = f(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) + \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(S - \bar{S}_0) \\
& + \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(I - \bar{I}_0) \\
& + \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_1 - \bar{P}_{10}) \\
& + \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_2 - \bar{P}_{20}) \\
& + R_4(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})
\end{aligned}$$

Karena $(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})$ adalah titik kesetimbangan, maka berlaku $f(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) = 0$ sehingga persamaan diatas menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) (S - \bar{S}_0) + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) (I - \bar{I}_0) + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) (P_1 - \bar{P}_{10}) + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) (P_2 - \bar{P}_{20}) + \\
&\quad R_1(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) (S - \bar{S}_0) + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) (I - \bar{I}_0) + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) (P_1 - \bar{P}_{10}) + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) (P_2 - \bar{P}_{20}) + \\
&\quad R_2(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) \\
\frac{dP_1}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) (S - \bar{S}_0) + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) (I - \bar{I}_0) + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) (P_1 - \bar{P}_{10}) + \\
&\quad \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) (P_2 - \bar{P}_{20}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& R_3(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) \\
\frac{dP_2}{dt} = & \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(S - \bar{S}_0) + \\
& \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(I - \bar{I}_0) + \\
& \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_1 - \bar{P}_{10}) + \\
& \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_2 - \bar{P}_{20}) + \\
& R_4(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})
\end{aligned}$$

Jika berlaku $\lim_{r \rightarrow 0} R_i(S, I, P_1, P_2) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ dengan

$$r = \sqrt{(S - S_0)^2 + (I - I_0)^2 + (P_1 - P_{10})^2 + (P_2 - P_{20})^2}$$

maka persamaan diatas menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} = & \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(S - \bar{S}_0) + \\
& \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(I - \bar{I}_0) + \\
& \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_1 - \bar{P}_{10}) + \\
& \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_2 - \bar{P}_{20}) \\
\frac{dI}{dt} = & \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(S - \bar{S}_0) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(I - \bar{I}_0) + \\
& \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_1 - \bar{P}_{10}) + \\
& \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_2 - \bar{P}_{20}) \\
\frac{dP_1}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(S - \bar{S}_0) + \\
& \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(I - \bar{I}_0) + \\
& \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_1 - \bar{P}_{10}) + \\
& \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_2 - \bar{P}_{20}) \\
\frac{dP_2}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(S - \bar{S}_0) + \\
& \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(I - \bar{I}_0) + \\
& \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_1 - \bar{P}_{10}) + \\
& \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})(P_2 - \bar{P}_{20})
\end{aligned}$$

Bila dilakukan substitusi $(S - \bar{S}_0) = u$, $(I - \bar{I}_0) = v$,
 $(P_1 - \bar{P}_{10}) = w$, $(P_2 - \bar{P}_{20}) = x$ maka,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{du}{dt}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dP_1}{dt} = \frac{dw}{dt}, \quad \text{dan} \quad \frac{dP_2}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad \text{sehingga} \\
\text{didapat:}$$

$$\frac{du}{dt} = u \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) + v \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) +$$

$$w \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) + x \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})$$

$$\frac{dv}{dt} = u \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) + v \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) +$$

$$w \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) + x \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})$$

$$\frac{dw}{dt} = u \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) + v \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) +$$

$$w \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) + x \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})$$

$$\frac{dx}{dt} = u \frac{\partial f}{\partial S}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) + v \frac{\partial f}{\partial I}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) +$$

$$w \frac{\partial f}{\partial P_1}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20}) + x \frac{\partial f}{\partial P_2}(\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})$$

Persamaan $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ diatas merupakan hasil linearisasi dari pemotongan orde yang lebih besar dapat ditulis dalam bentuk sebagai:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial P_1} & \frac{\partial f}{\partial P_2} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial P_1} & \frac{\partial g}{\partial P_2} \\ \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial P_1} & \frac{\partial h}{\partial P_2} \\ \frac{\partial i}{\partial S} & \frac{\partial i}{\partial I} & \frac{\partial i}{\partial P_1} & \frac{\partial i}{\partial P_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{bmatrix} \quad (\bar{S}_0, \bar{I}_0, \bar{P}_{10}, \bar{P}_{20})$$

atau

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = J * \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ x \end{bmatrix} \text{ dimana,}$$

$$J = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} \end{bmatrix}$$

dengan:

$$j_{11} = r \left(1 - \frac{2S + I}{K} \right) - \beta I - aP_1 - bP_2 - d_1$$

$$j_{12} = -\frac{rS}{K} - \beta S$$

$$j_{13} = -aS$$

$$j_{14} = -bS$$

$$j_{21} = \beta I$$

$$j_{22} = \beta S - uP_1 - vP_2 - (h + d_2)$$

$$j_{23} = -uI$$

$$j_{24} = -vI$$

$$\begin{aligned}
j_{31} &= kaP_1 \\
j_{32} &= luP_1 \\
j_{33} &= kaS + luI - c - \gamma P_2 - m_3 \\
j_{34} &= -\gamma P_1 \\
j_{41} &= obP_2 \\
j_{42} &= kwP_2 \\
j_{43} &= \gamma P_2 \\
j_{44} &= obS + kwI - (d_4 + d_5) + \gamma P_1 - m_3
\end{aligned}$$

4.3.1 Analisis Kestabilan pada Titik Setimbang Bebas WSSV

- a) Untuk titik setimbang $E^{(1)} = (S^{(1)}, I^{(1)}, P_1^{(1)}, P_2^{(1)})$ matriks jacobianya adalah:

$$J = \begin{bmatrix} k_{11} & -\frac{rS^{(1)}}{K} - \beta S^{(1)} & -aS^{(1)} & -bS^{(1)} \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} \end{bmatrix}$$

dengan memisalkan:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= r \left(1 - \frac{2S^{(1)}}{K} \right) - d_1 \\
k_{22} &= \beta S^{(1)} - (h + d_2) \\
k_{33} &= kaS^{(1)} - c - m_3 \\
k_{44} &= obS^{(1)} - (d_4 + d_5) - m_3
\end{aligned}$$

Nilai eigen diperoleh:

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \lambda & -\frac{rS^{(1)}}{K} - \beta S^{(1)} & -aS^{(1)} & -bS^{(1)} \\ 0 & k_{22} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 \\
&\Leftrightarrow (-1)^2(k_{11} - \lambda) \\
&\left| \begin{array}{ccc} k_{22} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & k_{33} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & k_{44} - \lambda \end{array} \right| - \\
&\left(-\frac{rS^{(1)}}{K} - \beta S^{(1)} \right) \\
&\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{33} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & k_{44} - \lambda \end{array} \right| + (-aS^{(1)}) \\
&\left| \begin{array}{ccc} 0 & k_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{44} - \lambda \end{array} \right| - (-bS^{(1)}) \\
&\left| \begin{array}{ccc} 0 & k_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} - \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow (k_{11} - \lambda)(k_{22} - \lambda)(k_{33} - \lambda)(k_{44} - \lambda) = 0
\end{aligned}$$

Didapatkan nilai eigen:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = k_{11} &= r \left(1 - \frac{2K \left(1 - \frac{d_1}{r} \right)}{K} \right) - d_1 \\
&= r \left(1 - 2 \left(1 - \frac{d_1}{r} \right) \right) - d_1 \\
&= r - 2r + 2d_1 - d_1 \\
&= -r + d_1 \\
\lambda_2 = k_{22} &= \beta K \left(1 - \frac{d_1}{r} \right) - (h + d_2) \\
\lambda_3 = k_{33} &= kaK \left(1 - \frac{d_1}{r} \right) - c - m_3 \\
\lambda_4 = k_{44} &= obK \left(1 - \frac{d_1}{r} \right) - (d_4 + d_5) - m_3
\end{aligned}$$

Titik setimbang bebas penyakit $E^{(1)} = (S^{(1)}, I^{(1)}, P_1^{(1)}, P_2^{(1)})$ stabil lokal jika $\lambda_{2,3,4} < 0$, yaitu:

- i. $\lambda_2 < 0$ jika $\beta S^{(1)} - (h + d_2) < 0$
- ii. $\lambda_3 < 0$ jika $kaS^{(1)} - c - m_3 < 0$
- iii. $\lambda_4 < 0$ jika $obS^{(1)} - (d_4 + d_5) - m_3 < 0$

- b) Untuk titik setimbang $E^{(2)}(S^{(2)}, I^{(2)}, P_1^{(2)}, P_2^{(2)})$ matriks jacobianya adalah:

$$J = \begin{bmatrix} d_{11} & -\frac{rS^{(2)}}{K} - \beta S^{(2)} & -aS^{(2)} & -bS^{(2)} \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ kaP_1^{(2)} & luP_1^{(2)} & d_{33} & -\gamma P_1^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{bmatrix}$$

dengan:

$$d_{11} = r \left(1 - \frac{2S^{(2)}}{K} \right) - aP_1^{(2)} - d_1$$

$$d_{22} = \beta S^{(2)} - uP_1^{(2)} - (h + d_2)$$

$$d_{33} = kaS^{(2)} - c - m_3$$

$$d_{44} = obS^{(2)} - (d_4 + d_5) - m_3 + \gamma P_1^{(2)}$$

Nilai eigen diperoleh dari:

$$\begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & -\frac{rS^{(2)}}{K} - \beta S^{(2)} & -aS^{(2)} & -bS^{(2)} \\ 0 & d_{22} - \lambda & 0 & 0 \\ kaP_1^{(2)} & luP_1^{(2)} & d_{33} - \lambda & -\gamma P_1^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (d_{11} - \lambda) \\
&\left| \begin{array}{ccc} d_{22} - \lambda & 0 & 0 \\ luP_1^{(2)} & d_{33} - \lambda & -\gamma P_1^{(2)} \\ 0 & 0 & d_{44} - \lambda \end{array} \right| \\
&- \left(-\frac{rS^{(2)}}{K} - \beta S^{(2)} \right) \\
&\left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ kaP_1^{(2)} & d_{33} - \lambda & -\gamma P_1^{(2)} \\ 0 & 0 & d_{44} - \lambda \end{array} \right| \\
&+ (-aS^{(2)}) \\
&\left| \begin{array}{ccc} 0 & d_{22} - \lambda & 0 \\ kaP_1^{(2)} & luP_1^{(2)} & -\gamma P_1^{(2)} \\ 0 & 0 & d_{44} - \lambda \end{array} \right| \\
&- (-bS^{(2)}) \\
&\left| \begin{array}{ccc} 0 & d_{22} - \lambda & 0 \\ kaP_1^{(2)} & luP_1^{(2)} & d_{33} - \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow (d_{11} - \lambda)(d_{22} - \lambda)(d_{33} - \lambda)(d_{44} - \lambda) \\
&- (-aS^{(2)})(d_{22} - \lambda)(kaP_1^{(2)})(d_{44} - \lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow (d_{22} - \lambda)(d_{44} - \lambda) \\
&\left((d_{11} - \lambda)(d_{33} - \lambda) - (-aS^{(2)})(kaP_1^{(2)}) \right) = 0
\end{aligned}$$

Didapat dua nilai eigen yaitu:

$$\lambda_1 = d_{22} = \beta S^{(2)} - uP_1^{(2)} - (h + d_2)$$

$$\lambda_2 = d_{44} = obS^{(2)} - (d_4 + d_5) - m_3 + \gamma P_1^{(2)}$$

Dan sisa dua nilai eigen terdapat pada matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{2S^{(2)}}{K} \right) - aP_1^{(2)} - d_1 & -aS^{(2)} \\ kaP_1^{(2)} & kaS^{(2)} - c - m_3 \end{bmatrix}$$

Dengan memisalkan:

$$i_{11} = r \left(1 - \frac{2S^{(2)}}{K} \right) - aP_1^{(2)} - d_1$$

$$i_{12} = -aS^{(2)}$$

$$i_{21} = kaP_1^{(2)}$$

$$i_{22} = kaS^{(2)} - c - m_3$$

Sehingga menjadi:

$$\begin{vmatrix} i_{11} - \lambda & i_{12} \\ i_{21} & i_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Didapatkan akar persamaan:

$$(i_{11} - \lambda)(i_{22} - \lambda) - (i_{12})(i_{21}) = 0$$

$$i_{11}i_{22} - (i_{11} + i_{22})\lambda + \lambda^2 - i_{12}i_{21} = 0$$

$$\lambda^2 - (i_{11} + i_{22})\lambda + (i_{11}i_{22} - i_{12}i_{21}) = 0$$

yang dapat ditulis menjadi:

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

maka koefisien dari polynomial orde 2 adalah:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = i_{11} + i_{22}$$

$$a_2 = i_{11}i_{22} - i_{12}i_{21}$$

Dengan menggunakan metode Routh-Hurwitz untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien λ dan konstanta dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar persamaan langsung.

Tabel 4.1. Metode Routh-Hurwitz untuk koefisien λ pada Persamaan Karakteristik dari titik kesetimbangan $E^{(2)}$

$a_0 = 1$	$a_2 = i_{11}i_{22} - i_{12}i_{21}$	$a_4 = 0$
$a_1 = i_{11} + i_{22}$	$a_3 = 0$	$a_5 = 0$
$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	
$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	

Titik kesetimbangan dari suatu sistem dikatakan stabil jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ dan $b_1 > 0$.

Nilai a_1 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$a_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow i_{11} + i_{22} > 0$$

$$\Leftrightarrow i_{11} > i_{22}$$

$$\Leftrightarrow r \left(1 - \frac{2S^{(2)}}{K} \right) - aP_1^{(2)} - d_1$$

$$> kaS^{(2)} - c - m_3$$

Selanjutnya, nilai a_2 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$a_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow i_{11}i_{22} - i_{12}i_{21} > 0$$

$$\Leftrightarrow i_{11}i_{22} > i_{12}i_{21}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(r \left(1 - \frac{2S^{(2)}}{K} \right) - aP_1^{(2)} - d_1 \right) (kaP_1^{(2)}) \\
&> (aS^{(2)})(kaS^{(2)} - c - m_3) \\
&\Leftrightarrow \left(rkaP_1^{(2)} - \frac{2S^{(2)}}{K}kaP_1^{(2)} - aP_1^{(2)}(kaP_1^{(2)}) \right. \\
&\quad \left. - d_1kaP_1^{(2)} - kaP_1^{(2)} \right) \\
&> (aS^{(2)})(kaS^{(2)}) - (aS^{(2)})c - m_3
\end{aligned}$$

Selanjutnya, nilai b_1 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&b_1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} > 0
\end{aligned}$$

$$i_{11} = r \left(1 - \frac{2S^{(2)}}{K} \right) - aP_1^{(2)} - d_1$$

$$i_{12} = -aS^{(2)}$$

$$i_{21} = kaP_1^{(2)}$$

$$i_{22} = kaS^{(2)} - c - m_3$$

Karena $a_1 > 0$ maka

$$\Leftrightarrow a_1a_2 > a_0a_3$$

$$\Leftrightarrow (i_{11} + i_{22})(i_{11}i_{22} - i_{12}i_{21}) > 0$$

$$\Leftrightarrow i_{11}(i_{11}i_{22}) - i_{11}(i_{12}i_{21}) + i_{22}(i_{11}i_{22}) - i_{22}(i_{12}i_{21}) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(r \left(1 - \frac{2S^{(2)}}{K} \right) - aP_1^{(2)} - d_1 \right)$$

$$\left(\left(r \left(1 - \frac{2S^{(2)}}{K} \right) - aP_1^{(2)} - d_1 \right) \right)$$

$$(kaS^{(2)} - c - m_3) - (-aS^{(2)})(kaP_1^{(2)}) +$$

$$(kaS^{(2)} - c - m_3)$$

$$\left(\left(r \left(1 - \frac{2S^{(2)}}{K} \right) - aP_1^{(2)} - d_1 \right) \right. \\ \left. (kaS^{(2)} - c - m_3) - (-aS^{(2)})(kaP_1^{(2)}) \right) \\ > 0$$

Titik setimbang bebas penyakit $E^{(2)}(S^{(2)}, I^{(2)}, P_1^{(2)}, P_2^{(2)})$ stabil jika $\lambda_{1,2} < 0$, $a_1 a_2 > a_0 a_3$ dan $a_i > 0$ untuk $i = 1, 2, 3$, yaitu:

- i. $\lambda_1 < 0$ jika $\beta S^{(2)} - uP_1^{(2)} - (h + d_2) < 0$
- ii. $\lambda_2 < 0$ jika $obS^{(2)} - (d_4 + d_5) + \gamma P_1^{(2)} - m_3 < 0$
- iii. $a_1 a_2 > 0$
- iv. $a_i > 0$ untuk $i = 1, 2, 3$

4.3.2 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan Endemik

a) Untuk titik setimbang $E^{(3)}(S^{(3)}, I^{(3)}, P_1^{(3)}, P_2^{(3)})$ matriks jacobianya adalah:

$$J = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \beta I^{(3)} & q_{22} & -uI^{(3)} & -vI^{(3)} \\ kaP_1^{(3)} & luP_1^{(3)} & q_{33} & -\gamma P_1^{(3)} \\ obP_2^{(3)} & kwP_2^{(3)} & \gamma P_2^{(3)} & q_{44} \end{bmatrix}$$

dengan:

$$q_{11} = r \left(1 - \frac{I^{(3)}}{K} \right) - \beta I^{(3)} - aP_1^{(3)} - bP_2^{(3)} - d_1$$

$$q_{22} = -uP_1^{(3)} - vP_2^{(3)} - (h + d_2)$$

$$q_{33} = luI^{(3)} - c - m_3 - \gamma P_2^{(3)}$$

$$q_{44} = kwI^{(3)} - (d_4 + d_5) + \gamma P_1^{(3)} - m_3$$

Nilai eigen diperoleh:

$$\begin{vmatrix} q_{11} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \beta I^{(3)} & q_{22} - \lambda & -uI^{(3)} & -vI^{(3)} \\ kaP_1^{(3)} & luP_1^{(3)} & q_{33} - \lambda & -\gamma P_1^{(3)} \lambda \\ obP_2^{(3)} & kwP_2^{(3)} & \gamma P_2^{(3)} & q_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$q_{11} - \lambda$$

$$\begin{vmatrix} q_{22} - \lambda & -uI^{(3)} & -vI^{(3)} \\ luP_1^{(3)} & q_{33} - \lambda & -\gamma P_1^{(3)} \\ kwP_2^{(3)} & \gamma P_2^{(3)} & q_{44} - \lambda \end{vmatrix} -$$

$$0 \begin{vmatrix} \beta I^{(3)} & -uI^{(3)} & -vI^{(3)} \\ kaP_1^{(3)} & q_{33} - \lambda & -\gamma P_1^{(3)} \lambda \\ obP_2^{(3)} & \gamma P_2^{(3)} & q_{44} - \lambda \end{vmatrix} +$$

$$0 \begin{vmatrix} \beta I^{(3)} & q_{22} - \lambda & -vI^{(3)} \\ kaP_1^{(3)} & luP_1^{(3)} & -\gamma P_1^{(3)} \lambda \\ obP_2^{(3)} & kwP_2^{(3)} & q_{44} - \lambda \end{vmatrix} -$$

$$0 \begin{vmatrix} \beta I^{(3)} & q_{22} - \lambda & -uI^{(3)} \\ kaP_1^{(3)} & luP_1^{(3)} & q_{33} - \lambda \\ obP_2^{(3)} & kwP_2^{(3)} & \gamma P_2^{(3)} \end{vmatrix} = 0$$

Didapat $\lambda_1 = q_{11} = r \left(1 - \frac{I^{(3)}}{K} \right) - \beta I^{(3)} -$
 $aP_1^{(3)} - bP_2^{(3)} - d_1$

dan tiga sisanya eigenvalues diberikan oleh nilai eigen dari matriks:

$$J'(S^{(3)}, I^{(3)}, P_1^{(3)}, P_2^{(3)}) = \begin{bmatrix} q_{22} & -uI^{(3)} & -vI^{(3)} \\ luP_1^{(3)} & q_{33} & -\gamma P_1^{(3)} \\ kwP_2^{(3)} & \gamma P_2^{(3)} & q_{44} \end{bmatrix}$$

Karakteristik persamaan matriks diatas adalah:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

Nilai-nilai koefisiennya:

$$a_1 = -tr(J'(S^{(3)}, I^{(3)}, P_1^{(3)}, P_2^{(3)}))$$

$$a_2 = a_{11}^{(3)} + a_{22}^{(3)} + a_{33}^{(3)}$$

$$a_3 = -Det(J'(S^{(3)}, I^{(3)}, P_1^{(3)}, P_2^{(3)}))$$

Dimana:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(q_{22} + q_{33} + q_{44}) \\ &= -\left(\left(-uP_1^{(3)} - vP_2^{(3)} - (h + d_2)\right) + \right. \\ &\quad \left.(luI^{(3)} - c - m_3 - \gamma P_2^{(3)}) + \right. \\ &\quad \left.(kwI^{(3)} - (d_4 + d_5) + \gamma P_1^{(3)} - m_3\right) \end{aligned}$$

$$a_{11}^{(3)} = \det \begin{bmatrix} q_{33} & -\gamma P_1^{(3)} \\ \gamma P_2^{(3)} & q_{44} \end{bmatrix}$$

$$a_{22}^{(3)} = \det \begin{bmatrix} q_{22} & -vI^{(3)} \\ kwP_2^{(3)} & q_{44} \end{bmatrix}$$

$$a_{33}^{(3)} = \det \begin{bmatrix} q_{22} & -uI^{(3)} \\ luP_1^{(3)} & q_{33} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode Routh-Hurwitz untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien λ dan konstanta dari

persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar persamaan langsung.

Tabel 4.2. Metode Routh-Hurwitz untuk koefisien λ pada Persamaan Karakteristik dari titik kesetimbangan $E^{(3)}$

$a_0 = 1$	$a_2 = a_{11}^{(3)} + a_{22}^{(3)} + a_{33}^{(3)}$	$a_4 = 0$
$a_1 = -tr(J'(S^{(3)}, I^{(3)}, P_1^{(3)}, P_2^{(3)}))$	$a_3 = -Det(J'(S^{(3)}, I^{(3)}, P_1^{(3)}, P_2^{(3)}))$	$a_5 = 0$
$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	
$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	

Titik kesetimbangan dari suatu sistem dikatakan stabil jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ dan $b_1 > 0$.

Nilai a_1 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$a_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow -tr(J'(S^{(3)}, I^{(3)}, P_1^{(3)}, P_2^{(3)})) > 0$$

Selanjutnya, nilai a_2 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$a_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow a_{11}^{(3)} + a_{22}^{(3)} + a_{33}^{(3)} > 0$$

$$\Leftrightarrow q_{22} + q_{33} + q_{44} > 0$$

$$\Leftrightarrow (-uP_1^{(3)} - vP_2^{(3)} - (h + d_2))$$

$$+ (lul^{(3)} - c - m_3 - \gamma P_2^{(3)})$$

$$+ (kwI^{(3)} - (d_4 + d_5) - m_3 + \gamma P_1^{(3)}) > 0$$

Selanjutnya, nilai b_1 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & b_1 > 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} > 0 \\
 & \Leftrightarrow a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \\
 & \Leftrightarrow a_1 a_2 > a_0 a_3 \\
 & \Leftrightarrow a_1 a_2 > a_3 \\
 & \Leftrightarrow \left(-\text{tr} \left(J' \left(S^{(3)}, I^{(3)}, P_1^{(3)}, P_2^{(3)} \right) \right) \right. \\
 & \quad \left(-uP_1^{(3)} - vP_2^{(3)} - (h + d_2) + l u I^{(3)} - c - m_3 \right. \\
 & \quad \left. - \gamma P_2^{(3)} + k w I^{(3)} - (d_4 + d_5) + \gamma P_1^{(3)} - m_3 \right) \\
 & \quad \left. > -\text{Det} \left(J' \left(S^{(3)}, I^{(3)}, P_1^{(3)}, P_2^{(3)} \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

Titik setimbang $E^{(3)}(S^{(3)}, I^{(3)}, P_1^{(3)}, P_2^{(3)})$ stabil jika :

- i. $\lambda_1 < 0$ jika $r \left(1 - \frac{I^{(3)}}{K} \right) - \beta I^{(3)} - aP_1^{(3)} - bP_2^{(3)} - d_1 < 0$
- ii. $a_1 a_2 > a_3$
- iii. $a_i > 0$ untuk $i = 1, 2, 3$

b) Untuk titik setimbang $E^{(4)}(S^{(4)}, I^{(4)}, P_1^{(4)}, P_2^{(4)})$ matriks jacobiani adalah:

$$J = \begin{bmatrix} y_{11} & -\left(\frac{r}{K} + \beta\right)S^{(4)} & -aS^{(4)} & -bS^{(4)} \\ \beta I^{(4)} & y_{22} & -uI^{(4)} & -vI^{(4)} \\ 0 & 0 & y_{33} & 0 \\ \text{ob}P_2^{(4)} & kwP_2^{(4)} & \gamma P_2^{(4)} & y_{44} \end{bmatrix}$$

dengan:

$$\begin{aligned}
 y_{11} &= r \left(1 - \frac{2S^{(4)} + I^{(4)}}{K} \right) - \beta I^{(4)} - bP_2^{(4)} \\
 &\quad - d_1 \\
 y_{22} &= \beta S^{(4)} - vP_2^{(4)} - (h + d_2) \\
 y_{33} &= kaS^{(4)} + luI^{(4)} - c - m_3 - \gamma P_2^{(4)} \\
 y_{44} &= obS^{(4)} + kwI^{(4)} - (d_4 + d_5) - m_3
 \end{aligned}$$

Nilai eigen diperoleh:

$$\begin{vmatrix}
 y_{11} - \lambda & -\left(\frac{r}{K} + \beta\right)S^{(4)} & -aS^{(4)} & -bS^{(4)} \\
 \beta I^{(4)} & y_{22} - \lambda & -uI^{(4)} & -vI^{(4)} \\
 0 & 0 & y_{33} - \lambda & 0 \\
 obP_2^{(4)} & kwP_2^{(4)} & \gamma P_2^{(4)} & y_{44} - \lambda
 \end{vmatrix}
 = 0$$

$$\begin{aligned}
 &0 \begin{vmatrix}
 -\left(\frac{r}{K} + \beta\right)S^{(4)} & -aS^{(4)} & -bS^{(4)} \\
 y_{22} - \lambda & -uI^{(4)} & -vI^{(4)} \\
 kwP_2^{(4)} & \gamma P_2^{(4)} & y_{44} - \lambda
 \end{vmatrix} - \\
 &0 \begin{vmatrix}
 y_{11} - \lambda & -aS^{(4)} & -bS^{(4)} \\
 \beta I^{(4)} & -uI^{(4)} & -vI^{(4)} \\
 obP_2^{(4)} & \gamma P_2^{(4)} & y_{44} - \lambda
 \end{vmatrix} + \\
 &(y_{33} - \lambda) \begin{vmatrix}
 y_{11} - \lambda & -\left(\frac{r}{K} + \beta\right)S^{(4)} & -bS^{(4)} \\
 \beta I^{(4)} & y_{22} - \lambda & -vI^{(4)} \\
 obP_2^{(4)} & kwP_2^{(4)} & y_{44} - \lambda
 \end{vmatrix} - \\
 &0 \begin{vmatrix}
 y_{11} - \lambda & -\left(\frac{r}{K} + \beta\right)S^{(4)} & -aS^{(4)} \\
 \beta I^{(4)} & y_{22} - \lambda & -uI^{(4)} \\
 obP_2^{(4)} & kwP_2^{(4)} & \gamma P_2^{(4)}
 \end{vmatrix}
 = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Didapat } \lambda_1 = y_{33} = kaS^{(4)} + luI^{(4)} - c - m_3 - \gamma P_2^{(4)}$$

dan tiga sisanya eigenvalues diberikan oleh nilai eigen dari matriks:

$$J'(S^{(4)}, I^{(4)}, P_1^{(4)}, P_2^{(4)}) = \begin{bmatrix} y_{11} & -\left(\frac{r}{K} + \beta\right)S^{(4)} & -bS^{(4)} \\ \beta I^{(4)} & y_{22} & -vI^{(4)} \\ obP_2^{(4)} & kwP_2^{(4)} & y_{44} \end{bmatrix}$$

Karakteristik persamaan matriks diatas adalah:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

Nilai-nilai koefisiennya:

$$a_1 = -tr\left(J'(S^{(4)}, I^{(4)}, P_1^{(4)}, P_2^{(4)})\right)$$

$$a_2 = a_{11}^{(4)} + a_{22}^{(4)} + a_{33}^{(4)}$$

$$a_3 = -Det\left(J'(S^{(4)}, I^{(4)}, P_1^{(4)}, P_2^{(4)})\right)$$

Dengan:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(y_{11} + y_{22} + y_{33}) \\ &= (\beta S^{(4)} - vP_2^{(4)} - (h + d_2) + \\ &\quad (kaS^{(4)} + luI^{(4)} - c - m_3 - \gamma P_2^{(4)}) + \\ &\quad (obS^{(4)} + kwI^{(4)} - (d_4 + d_5) - m_3)) \end{aligned}$$

$$a_{11}^{(4)} = det \begin{bmatrix} y_{22} & -vI^{(4)} \\ kwP_2^{(4)} & y_{44} \end{bmatrix}$$

$$a_{22}^{(4)} = det \begin{bmatrix} y_{11} & -bS^{(4)} \\ obP_2^{(4)} & y_{44} \end{bmatrix}$$

$$a_{33}^{(4)} = \det \begin{bmatrix} y_{11} & -\left(\frac{r}{K} + \beta\right) S^{(4)} \\ \beta I^{(4)} & y_{22} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode Routh-Hurwitz untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien λ dan konstanta dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar persamaan langsung.

Tabel 4.3. Metode Routh-Hurwitz untuk koefisien λ pada Persamaan Karakteristik dari titik kesetimbangan $E^{(4)}$

$a_0 = 1$	$a_2 = a_{11}^{(4)} + a_{22}^{(4)} + a_{33}^{(4)}$	$a_4 = 0$
$a_1 = -tr \left(J'(S^{(4)}, I^{(4)}, P_1^{(4)}, P_2^{(4)}) \right)$	$a_3 = -Det \left(J'(S^{(4)}, I^{(4)}, P_1^{(4)}, P_2^{(4)}) \right)$	$a_5 = 0$
$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	
$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	

Titik kesetimbangan dari suatu sistem dikatakan stabil jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0, a_2 > 0$ dan $b_1 > 0$.

Nilai a_1 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$a_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow -tr \left(J'(S^{(4)}, I^{(4)}, P_1^{(4)}, P_2^{(4)}) \right) > 0$$

Selanjutnya, nilai a_2 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$a_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow a_{11}^{(4)} + a_{22}^{(4)} + a_{33}^{(4)} > 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow y_{11} + y_{22} + y_{44} > 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\beta S^{(4)} - vP_2^{(4)} - (h + d_2) \right) \\
&\quad + (kaS^{(4)} + luI^{(4)} - c - m_3 - \gamma P_2^{(4)}) \\
&\quad + (obS^{(4)} + kwI^{(4)} - (d_4 + d_5) - m_3) > 0
\end{aligned}$$

Selanjutnya, nilai b_1 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&b_1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} > 0 \\
&\Leftrightarrow a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \\
&\Leftrightarrow a_1 a_2 > a_0 a_3 \\
&\Leftrightarrow a_1 a_2 > a_3 \\
&\Leftrightarrow \left(-tr \left(J' \left(S^{(4)}, I^{(4)}, P_1^{(4)}, P_2^{(4)} \right) \right) \right) \\
&\quad \left(\beta S^{(4)} - vP_2^{(4)} - (h + d_2) + kaS^{(4)} + luI^{(4)} \right. \\
&\quad \quad \left. - c - m_3 \right. \\
&\quad \left. - \gamma P_2^{(4)} + obS^{(4)} + kwI^{(4)} - (d_4 + d_5) - m_3 \right) \\
&> -Det \left(J' \left(S^{(4)}, I^{(4)}, P_1^{(4)}, P_2^{(4)} \right) \right)
\end{aligned}$$

Titik setimbang $E^{(4)}(S^{(4)}, I^{(4)}, P_1^{(4)}, P_2^{(4)})$ stabil jika :

- i. $\lambda_1 < 0$ jika $kaS^{(4)} + luI^{(4)} - c - m_3 - \gamma P_2^{(4)} < 0$
- ii. $a_1 a_2 > a_3$
- iii. $a_i > 0$ untuk $i = 1, 2, 3$

- c) Untuk titik setimbang $E^{(5)}(S^{(5)}, I^{(5)}, 0, 0)$ matriks jacobianya adalah:

$$J = \begin{bmatrix} e_{11} & -\frac{rS^{(5)}}{K} - \beta S^{(5)} & -aS^{(5)} & -bS^{(5)} \\ \beta I^{(5)} & e_{22} & -uI^{(5)} & -vI^{(5)} \\ 0 & 0 & e_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{44} \end{bmatrix}$$

dengan:

$$e_{11} = r \left(1 - \frac{2S^{(5)} + I^{(5)}}{K} \right) - \beta I^{(5)} - d_1$$

$$e_{22} = \beta S^{(5)} - (h + d_2)$$

$$e_{33} = kaS^{(5)} + luI^{(5)} - c - m_3$$

$$e_{44} = obS^{(5)} + kwI^{(5)} - (d_4 + d_5) - m_3$$

Nilai eigen diperoleh:

$$\begin{vmatrix} e_{11} - \lambda & -\frac{rS^{(5)}}{K} - \beta S^{(5)} & -aS^{(5)} & -bS^{(5)} \\ \beta I^{(5)} & e_{22} - \lambda & -uI^{(5)} & -vI^{(5)} \\ 0 & 0 & e_{33} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{44} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

$$\Leftrightarrow (e_{11} - \lambda)$$

$$\begin{vmatrix} e_{22} - \lambda & -uI^{(5)} & -vI^{(5)} \\ 0 & e_{33} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & e_{44} - \lambda \end{vmatrix} -$$

$$\left(-\frac{rS^{(5)}}{K} - \beta S^{(5)} \right)$$

$$\begin{vmatrix} \beta I^{(5)} & -uI^{(5)} & -vI^{(5)} \\ 0 & e_{33} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & e_{44} - \lambda \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& (-aS^{(5)}) \\
& \begin{vmatrix} \beta I & e_{22} - \lambda & -vI^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{44} - \lambda \end{vmatrix} - \\
& (-bS^{(5)}) \\
& \begin{vmatrix} \beta I & e_{22} - \lambda & -uI^{(5)} \\ 0 & 0 & e_{33} - \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
& = 0 \\
& \Leftrightarrow (e_{11} - \lambda)(e_{22} - \lambda)(e_{33} - \lambda)(e_{44} - \lambda) + \\
& \quad \left(-\frac{rS^{(5)}}{K} - \beta S^{(5)} \right) (\beta I)(e_{33} - \lambda)(e_{44} - \lambda) \\
& = 0 \\
& \Leftrightarrow (e_{33} - \lambda)(e_{44} - \lambda) \\
& \quad ((e_{11} - \lambda)(e_{22} - \lambda) + \\
& \quad \left(-\frac{rS^{(5)}}{K} - \beta S^{(5)} \right) (\beta I)) \\
& = 0
\end{aligned}$$

Didapat dua nilai eigen:

$$\lambda_1 = e_{33} = kaS^{(5)} + luI^{(5)} - c - m_3$$

$$\lambda_2 = e_{44} = obS^{(5)} + kwI^{(5)} - (d_4 + d_5) - m_3$$

dan dua sisanya eigenvalues diberikan oleh nilai eigen dari matriks:

$$\begin{aligned}
& J'(S^{(5)}, I^{(5)}, P_1^{(5)}, P_2^{(5)}) \\
& = \begin{bmatrix} e_{11} & -\left(\frac{r}{K} + \beta\right) S^{(5)} \\ \beta I^{(5)} & e_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Atau

$$\begin{vmatrix} e_{11} - \lambda & -\left(\frac{r}{K} + \beta\right) S^{(5)} \\ \beta I^{(5)} & e_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Didapatkan akar persamaan:

$$\begin{aligned} & (e_{11} - \lambda)(e_{22} - \lambda) - \left(-\left(\frac{r}{K} + \beta\right) S^{(5)}\right)(\beta I^{(5)}) \\ & = 0 \\ & \lambda^2 - (e_{11} + e_{22})\lambda + \\ & \left((e_{11} e_{22}) - \left(-\left(\frac{r}{K} + \beta\right) S^{(5)}\right)(\beta I^{(5)}) \right) = 0 \end{aligned}$$

yang dapat ditulis menjadi:

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

maka koefisien dari polynomial orde 2 adalah:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -(e_{11} + e_{22})$$

$$a_2 = (e_{11} e_{22}) - \left(-\left(\frac{r}{K} + \beta\right) S^{(5)}\right)(\beta I^{(5)})$$

Dengan menggunakan metode Routh-Hurwitz untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien λ dan konstanta dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar persamaan langsung.

Tabel 4.4. Metode Routh-Hurwitz untuk koefisien λ pada Persamaan Karakteristik dari titik kesetimbangan $E^{(5)}$

$a_0 = 1$	$a_2 = (e_{11} e_{22}) - \left(-\left(\frac{r}{K} + \beta\right) S^{(5)}\right)(\beta I^{(5)})$	$a_4 = 0$
-----------	---	-----------

a_1 $= -(e_{11} + e_{22})$	$a_3 = 0$	$a_5 = 0$
b_1 $= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	b_2 $= \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	
c_1 $= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	c_2 $= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	

Titik kesetimbangan dari suatu sistem dikatakan stabil jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ dan $b_1 > 0$.

Nilai a_1 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & a_1 > 0 \\
 & \Leftrightarrow -(e_{11} + e_{22}) > 0 \\
 & \Leftrightarrow e_{11} > -e_{22} \\
 & \Leftrightarrow r \left(1 - \frac{2S^{(5)} + I^{(5)}}{K} \right) - \beta I^{(5)} - d_1 \\
 & \quad > -(\beta S^{(5)} - (h + d_2))
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, nilai a_2 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & a_2 > 0 \\
 & \Leftrightarrow (e_{11} e_{22}) - \left(-\left(\frac{r}{K} + \beta \right) S^{(5)} \right) (\beta I^{(5)}) > 0 \\
 & \Leftrightarrow \left(r \left(1 - \frac{2S^{(5)} + I^{(5)}}{K} \right) - \beta I^{(5)} - d_1 \right) \\
 & \quad (\beta S^{(5)} - (h + d_2)) > \\
 & \quad \quad \left(-\left(\frac{r}{K} + \beta \right) S^{(5)} \right) (\beta I^{(5)})
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, nilai b_1 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$b_1 > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} > 0$$

Karena $a_1 > 0$ maka

$$\Leftrightarrow a_1 a_2 > a_0 a_3$$

$$\Leftrightarrow -(e_{11} + e_{22})$$

$$\left((e_{11} e_{22}) - \left(-\left(\frac{r}{K} + \beta \right) S^{(5)} \right) (\beta I^{(5)}) \right) > 0$$

$$- \left(r \left(1 - \frac{2S^{(5)} + I^{(5)}}{K} \right) - \beta I^{(5)} - d_1 + \beta S^{(5)} \right. \\ \left. - (h + d_2) \right)$$

$$\left(\left(r \left(1 - \frac{2S^{(5)} + I^{(5)}}{K} \right) - \beta I^{(5)} - d_1 \right) \right.$$

$$\left. \left(\beta S^{(5)} - (h + d_2) \right) - \right.$$

$$\left. \left(-\left(\frac{r}{K} + \beta \right) S^{(5)} \right) (\beta I^{(5)}) \right) > 0$$

Pada titik kesetimbangan $E^{(5)}(S^{(5)}, I^{(5)}, 0, 0)$ stabil jika:

- i. $kaS^{(5)} + luI^{(5)} - c - m_3 < 0$
- ii. $obS^{(5)} + kwI^{(5)} - (d_4 + d_5) - m_3 < 0$
- iii. $a_1 a_2 > 0$
- iv. $a_i > 0$ untuk $i = 1, 2$

- d) Untuk titik setimbang $E^{(6)}(S^{(6)}, 0, 0, P_2^{(6)})$ matriks jacobianya adalah:

$$J = \begin{bmatrix} p_{11} & -\frac{rS^{(6)}}{K} - \beta S^{(6)} & -aS^{(6)} & -bS^{(6)} \\ 0 & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & 0 \\ obP_2 & kWP_2^{(6)} & \gamma P_2^{(6)} & p_{44} \end{bmatrix}$$

dengan:

$$p_{11} = r \left(1 - \frac{2S^{(6)}}{K} \right) - bP_2^{(6)} - d_1$$

$$p_{22} = \beta S^{(6)} - vP_2^{(6)} - (h + d_2)$$

$$p_{33} = kaS^{(6)} - c - \gamma P_2^{(6)} - m_3$$

$$p_{44} = obS^{(6)} - (d_4 + d_5)$$

Nilai eigen diperoleh:

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & -\frac{rS^{(6)}}{K} - \beta S^{(6)} & -aS^{(6)} & -bS^{(6)} \\ 0 & p_{22} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} - \lambda & 0 \\ obP_2^{(6)} & kWP_2^{(6)} & \gamma P_2^{(6)} & p_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} (p_{11} - \lambda) & & & \\ p_{22} - \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & p_{33} - \lambda & 0 & \\ kWP_2^{(6)} & \gamma P_2^{(6)} & p_{44} - \lambda & \end{vmatrix} - \left(-\frac{rS^{(6)}}{K} - \beta S^{(6)} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{33} - \lambda & 0 \\ obP_2^{(6)} & \gamma P_2^{(6)} & p_{44} - \lambda \end{vmatrix} + \\
& (-aS^{(6)}) \\
& \begin{vmatrix} 0 & p_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ obP_2^{(6)} & kW P_2^{(6)} & p_{44} - \lambda \end{vmatrix} - \\
& (-bS^{(6)}) \\
& \begin{vmatrix} 0 & p_{22} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} - \lambda \\ obP_2^{(6)} & kW P_2^{(6)} & \gamma P_2^{(6)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & p_{22} - \lambda \\ 0 & 0 \\ obP_2^{(6)} & kW P_2^{(6)} \end{vmatrix} \\
& = 0 \\
& \Leftrightarrow (p_{11} - \lambda)(p_{22} - \lambda)(p_{33} - \lambda)(p_{44} - \lambda) \\
& \quad + (bS^{(6)})(p_{22} - \lambda)(p_{33} - \lambda)(obP_2^{(6)}) \\
& \Leftrightarrow (p_{22} - \lambda)(p_{33} - \lambda) \\
& \quad \left((p_{11} - \lambda)(p_{44} - \lambda) + (bS^{(6)})(obP_2^{(6)}) \right)
\end{aligned}$$

Sehingga didapat nilai eigen:

$$\lambda_1 = p_{22} = \beta S^{(6)} - v P_2^{(6)} - (h + d_2)$$

$$\lambda_2 = p_{33} = kaS^{(6)} - c - \gamma P_2^{(6)} - m_3$$

dan dua sisanya eigenvalues diberikan oleh nilai eigen dari matriks:

$$\begin{aligned}
& J'(S^{(6)}, I^{(6)}, P_1^{(6)}, P_2^{(6)}) \\
& = \begin{bmatrix} p_{11} & -bS^{(6)} \\ obP_2^{(6)} & p_{44} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Atau

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & -bS^{(6)} \\ obP_2^{(6)} & p_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Didapatkan akar persamaan:

$$\begin{aligned} & (p_{11} - \lambda)(p_{44} - \lambda) - (-bS^{(6)})(obP_2^{(6)}) \\ & = 0 \\ & \lambda^2 - (p_{11} + p_{44})\lambda \\ & + \left((p_{11}p_{44}) - (-bS^{(6)})(obP_2^{(6)}) \right) = 0 \end{aligned}$$

yang dapat ditulis menjadi:

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

maka koefisien dari polynomial orde 2 adalah:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -(p_{11} + p_{44})$$

$$a_2 = (p_{11}p_{44}) - (-bS^{(6)})(obP_2^{(6)})$$

Dengan menggunakan metode Routh-Hurwitz untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien λ dan konstanta dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar persamaan langsung.

Tabel 4.5. Metode Routh-Hurwitz untuk koefisien λ pada Persamaan Karakteristik dari titik kesetimbangan $E^{(6)}$

$a_0 = 0$	a_2 $= (p_{11}p_{44})$ $- (-bS^{(6)})(obP_2^{(6)})$	a_4 $= 0$
a_1 $= -(p_{11}$ $+ p_{44})$	$a_3 = 0$	a_5 $= 0$
b_1 $= \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$	

$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	
---------------------------------------	---------------------------------------	--

Titik kesetimbangan dari suatu sistem dikatakan stabil jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen bagian real negatif jika dan hanya jika $a_1 > 0, a_2 > 0$ dan $b_1 > 0$.

Nilai a_1 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 a_1 &> 0 \\
 &\Leftrightarrow -(p_{11} + p_{44}) > 0 \\
 &\Leftrightarrow p_{11} > -p_{44} \\
 &\Leftrightarrow r \left(1 - \frac{2S^{(6)}}{K} \right) - bP_2^{(6)} - d_1 \\
 &\quad > - (obS^{(6)} - (d_4 + d_5))
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, nilai a_2 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 a_2 &> 0 \\
 &\Leftrightarrow (p_{11}p_{44}) - (-bS^{(6)})(obP_2^{(6)}) > 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(r \left(1 - \frac{2S^{(6)}}{K} \right) - bP_2^{(6)} - d_1 \right) \\
 &\quad (obS^{(6)} - (d_4 + d_5)) > \\
 &\quad (-bS^{(6)})(obP_2^{(6)})
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, nilai b_1 dapat dianalisa sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 b_1 &> 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} > 0
 \end{aligned}$$

Karena $a_1 > 0$ maka

$$\Leftrightarrow a_1 a_2 > a_0 a_3$$

$$\Leftrightarrow -(p_{11} + p_{44})$$

$$(p_{11} p_{44}) - (-bS^{(6)})(obP_2^{(6)}) > 0$$

$$- \left(r \left(1 - \frac{2S^{(6)}}{K} \right) - bP_2^{(6)} - d_1 + \right.$$

$$\left. obS^{(6)} - (d_4 + d_5) \right)$$

$$\left(\left(r \left(1 - \frac{2S^{(6)}}{K} \right) - bP_2^{(6)} - d_1 \right) \right.$$

$$\left. \left(obS^{(6)} - (d_4 + d_5) \right) \right) -$$

$$\left((-bS^{(6)})(obP_2^{(6)}) \right) > 0$$

Pada titik kesetimbangan $E^{(6)}(S^{(6)}, 0, 0, P_2^{(6)})$

stabil jika:

$$\text{i. } \beta S^{(6)} - vP_2^{(6)} - (h + d_2) < 0$$

$$\text{ii. } kaS^{(6)} - c - \gamma P_2^{(6)} - m_3 < 0$$

$$\text{iii. } a_1 a_2 > 0$$

$$\text{iv. } a_i > 0 \text{ untuk } i = 1, 2$$

4.4 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Model yang mempunyai dua titik keseimbangan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan endemik, tidak terjadi endemik jika $R_0 < 1$ dan terjadi endemik jika $R_0 > 1$. Pada model yang kompleks, suatu model mungkin mempunyai lebih dari satu bilangan reproduksi dasar.

Dilihat bahwa I dan P_2 merupakan kelas infeksi, sebagai berikut:

$$\dot{I}(t) = \beta SI - uIP_1 - vIP_2 - (h + d_2)I$$

$$\dot{P}_2(t) = obSP_2 + kwIP_2 - (d_4 + d_5)P_2 + \gamma P_1 P_2 - m_3 P_2$$

$$\dot{S}(t) = rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - aSP_1 - bSP_2 - d_1 S$$

$$\dot{P}_1(t) = kaSP_1 + luIP_1 - cP_1 - \gamma P_1 P_2 - m_3 P_1$$

dengan:

$I(t)$: menyatakan populasi *prey* yang terinfeksi pada saat t .

$P_2(t)$: menyatakan populasi *predator* yang terinfeksi pada saat t .

$S(t)$: menyatakan populasi *prey* yang rentan pada saat t .

$P_1(t)$: menyatakan populasi *predator* yang rentan pada saat t .

Matriks *next generation* dapat diperoleh dari $I(t)$ dan $P_2(t)$, sehingga didapatkan:

$$I(t) = \mathcal{F}((S, P_1), I) - \mathcal{V}((S, P_1), I)$$

$$P_2(t) = \mathcal{F}((S, P_1), P_2) - \mathcal{V}((S, P_1), P_2)$$

dengan:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta S(t)I(t) \\ \gamma P_1(t)P_2(t) \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} (h + d_2)I(t) \\ (d_4 + d_5)P_2(t) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya membentuk matriks Jacobian dari φ dan ψ masing-masing adalah:

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i(x_0)}{\partial x_j} \right]$$

$$F = \begin{bmatrix} \beta S^{(2)}(t) & 0 \\ 0 & \gamma P_1^{(2)}(t) \end{bmatrix}$$

dan

$$V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i(x_0)}{\partial x_j} \right]$$

$$V = \begin{bmatrix} (h + d_2) & 0 \\ 0 & (d_4 + d_5) \end{bmatrix}$$

Dengan demikian matriks *next generation* sebagai berikut:

$$G = FV^{-1}$$

$$G = \begin{bmatrix} \beta S^{(2)}(t) & 0 \\ 0 & \gamma P_1^{(2)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (h + d_2) & 0 \\ 0 & (d_4 + d_5) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$G = \begin{bmatrix} \beta S^{(2)}(t) & 0 \\ 0 & \gamma P_1^{(2)}(t) \end{bmatrix} \left(\frac{1}{(h + d_2)(d_4 + d_5)} \right) \begin{bmatrix} (d_4 + d_5) & 0 \\ 0 & (h + d_2) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \beta S^{(2)}(t) & 0 \\ 0 & \gamma P_1^{(2)}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(h + d_2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(d_4 + d_5)} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\beta S^{(2)}(t)}{(h + d_2)} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma P_1^{(2)}(t)}{(d_4 + d_5)} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$$R_0 = \rho(G)$$

$$R_0 = \rho \begin{bmatrix} \frac{\beta S^{(2)}(t)}{(h + d_2)} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma P_1^{(2)}(t)}{(d_4 + d_5)} \end{bmatrix}$$

$$R_0 = \frac{\beta S^{(2)}(t) \gamma P_1^{(2)}(t)}{(h + d_2)(d_4 + d_5)}$$

Sehingga diperoleh $R_0 = \frac{\beta S^{(2)}(t) \gamma P_1^{(2)}(t)}{(h + d_2)(d_4 + d_5)}$ demikian penyakit akan terjadi endemik jika $R_0 > 1$.

4.5 Simulasi Model

4.5.1 Penyelesaian Numerik Model

Model *prey-predator* udang windu, sebagai berikut:

$$\dot{S}(t) = rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - aSP_1 - bSP_2 - d_1S$$

$$\dot{I}(t) = \beta SI - uIP_1 - vIP_2 - (h + d_2)I$$

$$\dot{P}_1(t) = kaSP_1 + luIP_1 - cP_1 - \gamma P_1 P_2 - m_3 P_1$$

$$\dot{P}_2(t) = obSP_2 + kwIP_2 - (d_4 + d_5)P_2 + \gamma P_1 P_2 - m_3 P_2$$

Dari model tersebut, penyelesaian numerik menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton dimana sebelum melakukan penyelesaian menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton terlebih dahulu melakukan penyelesaian numerik menggunakan metode Runge-Kutta sebagai berikut:

$$k_{1S} = f(t_i, S_i, I_i, P_{1i}, P_{2i})$$

$$= \left(rS_i \left(1 - \frac{S_i + I_i}{K} \right) - \beta S_i I_i - aS_i P_{1i} - bS_i P_{2i} - d_1 S_i \right)$$

$$k_{1I} = f(t_i, S_i, I_i, P_{1i}, P_{2i})$$

$$= (\beta S_i I_i - uI_i P_{1i} - vI_i P_{2i} - (h + d_2)I_i)$$

$$k_{1P_1} = f(t_i, S_i, I_i, P_{1i}, P_{2i})$$

$$= (kaS_i P_{1i} + luI_i P_{1i} - cP_{1i} - \gamma P_{1i} P_{2i} - m_3 P_{1i})$$

$$k_{1P_2} = f(t_i, S_i, I_i, P_{1i}, P_{2i})$$

$$= (obS_i P_{2i} + kwI_i P_{2i} - (d_4 + d_5)P_{2i} + \gamma P_{1i} P_{2i} - m_3 P_{2i})$$

$$k_{2S} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{1}{2}k_{1S}, I_i + \frac{1}{2}k_{1I}, P_{1i} + \frac{1}{2}k_{1P_1}, P_{2i} + \frac{1}{2}k_{1P_2}\right)$$

$$= \left(S_i + \frac{k_{1S}}{2} \right)$$

$$\left(r \left(1 - \frac{\left(S_i + \frac{k_{1S}}{2} \right) + I_i}{K} \right) - \beta I_i - aP_{1i} - bP_{2i} - d_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
k_{2I} &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{1}{2}k_{1S}, I_i + \frac{1}{2}k_{1I}, P_{1i} + \frac{1}{2}k_{1P_1}, P_{2i} + \frac{1}{2}k_{1P_2}\right) \\
&= \left(I_i + \frac{k_{1I}}{2}\right) \left(\beta S_i - uP_{1i} - vP_{2i} - (h + d_2)\right) \\
k_{2P_1} &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{1}{2}k_{1S}, I_i + \frac{1}{2}k_{1I}, P_{1i} + \frac{1}{2}k_{1P_1}, P_{2i} + \frac{1}{2}k_{1P_2}\right) \\
&= \left(P_{1i} + \frac{k_{1P_1}}{2}\right) \left(kaS_i + lI_i - c - \gamma P_{2i} - m_3\right) \\
k_{2P_2} &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{1}{2}k_{1S}, I_i + \frac{1}{2}k_{1I}, P_{1i} + \frac{1}{2}k_{1P_1}, P_{2i} + \frac{1}{2}k_{1P_2}\right) \\
&= \left(P_{2i} + \frac{k_{1P_2}}{2}\right) \\
&\quad \left(obS_i + kW I_i - (d_4 + d_5) + \gamma P_{1i} - m_3\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3S} &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{1}{2}k_{2S}, I_i + \frac{1}{2}k_{2I}, P_{1i} + \frac{1}{2}k_{12}, P_{2i} + \frac{1}{2}k_{2P_2}\right) \\
&= \left(S_i + \frac{k_{2S}}{2}\right) \\
&\quad \left(r \left(1 - \frac{\left(S_i + \frac{k_{2S}}{2}\right) + I_i}{K}\right) - \beta I_i - aP_{1i} - bP_{2i} - d_1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3I} &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{1}{2}k_{2S}, I_i + \frac{1}{2}k_{2I}, P_{1i} + \frac{1}{2}k_{12}, P_{2i} + \frac{1}{2}k_{2P_2}\right) \\
&= \left(I_i + \frac{k_{2I}}{2}\right)\left(\beta S_i - uP_{1i} - vP_{2i} - (h + d_2)\right) \\
k_{3P_1} &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{1}{2}k_{2S}, I_i + \frac{1}{2}k_{2I}, P_{1i} + \frac{1}{2}k_{12}, P_{2i} + \frac{1}{2}k_{2P_2}\right) \\
&= \left(P_{1i} + \frac{k_{2P_1}}{2}\right)\left(kaS_i + luI_i - c - \gamma P_{2i} - m_3\right) \\
k_{3P_2} &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, S_i + \frac{1}{2}k_{2S}, I_i + \frac{1}{2}k_{2I}, P_{1i} + \frac{1}{2}k_{12}, P_{2i} + \frac{1}{2}k_{2P_2}\right) \\
&= \left(P_{2i} + \frac{k_{2P_2}}{2}\right) \\
&\quad \left(obS_i + kwI_i - (d_4 + d_5) + \gamma P_{1i} - m_3\right) \\
k_{4S} &= f(t_i + h, S_i + k_{3S}, I_i + k_{3I}, P_{1i} + k_{3P_1}, P_{2i} + k_{3P_2}) \\
&= (S_i + k_{3S}) \\
&\quad \left(r\left(1 - \frac{(S_i + k_{3S}) + I_i}{K}\right) - \beta I_i - aP_{1i} - bP_{2i} - d_1\right) \\
k_{4I} &= f(t_i + h, S_i + k_{3S}, I_i + k_{3I}, P_{1i} + k_{3P_1}, P_{2i} + k_{3P_2}) \\
&= \left(I_i + \frac{k_{3I}}{2}\right)\left(\beta S_i - uP_{1i} - vP_{2i} - (h + d_2)\right) \\
k_{4P_1} &= f(t_i + h, S_i + k_{3S}, I_i + k_{3I}, P_{1i} + k_{3P_1}, P_{2i} + k_{3P_2}) \\
&= \left(P_{1i} + \frac{k_{3P_1}}{2}\right)\left(kaS_i + luI_i - c - \gamma P_{2i} - m_3\right) \\
k_{4P_2} &= f(t_i + h, S_i + k_{3S}, I_i + k_{3I}, P_{1i} + k_{3P_1}, P_{2i}
\end{aligned}$$

$$= \left(P_{2i} + \frac{k_{3P_2}}{2} \right) (obS_i + kW I_i - (d_4 + d_5) + \gamma P_{1i} - m_3)$$

Sehingga:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{h}{6} (k_{1S} + 2k_{2S} + 2k_{3S} + k_{4S})$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{h}{6} (k_{1I} + 2k_{2I} + 2k_{3I} + k_{4I})$$

$$P_{1i+1} = S_i + \frac{h}{6} (k_{1P_1} + 2k_{2P_1} + 2k_{3P_1} + k_{4P_1})$$

$$P_{2i+1} = P_{2i} + \frac{h}{6} (k_{1P_2} + 2k_{2P_2} + 2k_{3P_2} + k_{4P_2})$$

Setelah itu, menyelesaikan persamaan model *prey-predator* menggunakan Adam Bashforth-Moulton Orde empat:

Prediktor:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{h}{24} (55S_i - 59S_{i-1} + 37S_{i-2} - 9S_{i-3})$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{h}{24} (55I_i - 59I_{i-1} + 37I_{i-2} - 9I_{i-3})$$

$$P_{1i+1} = P_{1i} + \frac{h}{24} (55P_{1i} - 59P_{1i-1} + 37P_{1i-2} - 9P_{1i-3})$$

$$P_{2i+1} = P_{2i} + \frac{h}{24} (55P_{2i} - 59P_{2i-1} + 37P_{2i-2} - 9P_{2i-3})$$

Korektor:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{h}{24} (9S^*_{i+1} - 19S_i - 5S_{i-1} + S_{i-2})$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{h}{24} (9I_{i+1}^* - 19I_i - 5I_{i-1} + I_{i-2})$$

$$P_{1i+1} = P_{1i} + \frac{h}{24} (9P_{1i+1}^* - 19P_{1i} - 5P_{1i-1} + P_{1i-2})$$

$$P_{2i+1} = P_{2i} + \frac{h}{24} (9P_{2i+1}^* - 19P_{2i} - 5P_{2i-1} + P_{2i-2})$$

Tabel 4.6. Penyebaran dan Presentase serangan WSSV pada induk udang Windu

Sumber	Tanggal Sampling	Jumlah Sampel	Jumlah Sampel yang positif WSSV	Presentase (%)
Kalimantan				
Timur	30/05/2004*	9	2	22
Gorontalo	20/07/2004*	2	2	100
Timika	28/04/2005**	4	0	0
Gorontalo	21/04/2005*	2	0	0
Sulawesi Selatan			0	0
Pinrang	13/04/2005*	3	0	0
Siwa	31/05/2005*	5	0	0
Pare-pare	09/06/2005*	6	0	0
Luwu	04/08/2005**	2	0	0
Selayar	02/08/2006	5	0	0
Selayar	20/11/2006	12	0	0
Jawa Tengah				
Cilacap	30/07/2005**	3	1	33
Cilacap	18/09/2005**	4	1	25
Total		57	6	10.05

Keterangan:

* Sumber: Deteksi WSSV pada Induk Udang Windu. (Muliani, et al., 2005)

** Sumber: Pemantauan Penyakit WSSV Melalui Tarnsportasi Antar Dua Kota (Muliani, et al., 2006)

Tabel 4.7. Penyebaran dan Presentase Serangan WSSV % pada Udang Windu yang dibudidayakan

Sumber	Tanggal Sampling	Jumlah Sampel	Jumlah Sampel yang positif WSSV	Presentase (%)
Bulukumba	19/05/2004*	6	0	0
	30/05/2006	1	1	100
Barro	30/11/2004*	4	4	100
Bone	04/10/2004*	2	1	50
	30/05/2006	3	0	0
Luwu	16/04/2004*	2	1	50
	15/07/2004*	3	3	100
	06/08/2005	5	0	0
Maros	14/08/2004*	5	5	100
	03/12/2004*	16	4	25
	13/04/2005*	4	4	100
	09/08/2005*	4	4	100
	08/08/2005*	2	2	100
	25/08/2005*	10	1	10
	12/06/2006	5	4	80
	19/06/2006	3	1	33,33
	17/07/2006	3	0	0
	03/12/2006	2	0	0
Pangkep	24/06/2004*	2	1	50
	15/07/2004*	2	0	0
Pinrang	13/04/2005*	3	3	100
Polmas	14/06/2005*	3	1	33
	06/06/2006	1	0	0
Takalar	14/06/2004*	2	0	0
	30/03/2005*	5	5	100
	14/04/2005*	3	3	100
Selayar	02/08/2006	8	0	0
Total		109	44	40

Keterangan:

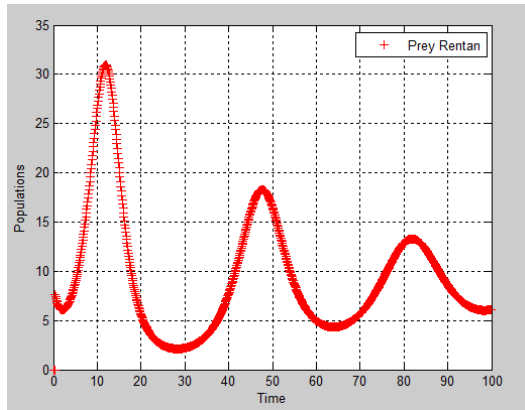
* Sumber: Deteksi WSSV pada Induk Udang Windu. (Muliani, et al., 2005)

4.5.2 Hasil Simulasi

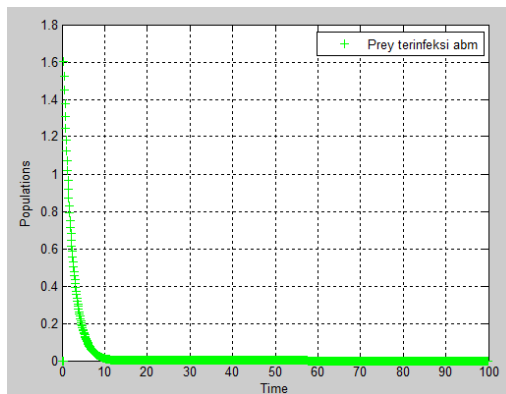
1. Untuk percobaan 1 dengan nilai parameter dan variabel berikut:

Tabel 4.8. Kondisi 1

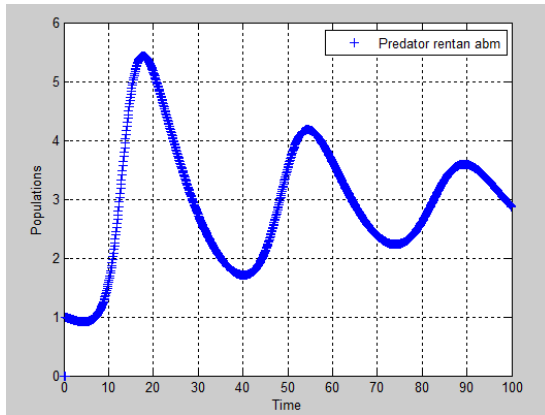
Simbol	Nilai
r	0.5
β	0.5
γ	0.25
K	50
a	0.125
u	0.125
b	0.25
v	0.0625
k	0.125
l	0.0625
o	0.25
w	0.0625
d_1	0.125
d_2	0.25
c	0.125
d_4	0.0625
d_5	0.25
h	0.25
m_3	0.01
$S(1)$	9
$I(1)$	2
$P_1(1)$	1
$P_2(1)$	0



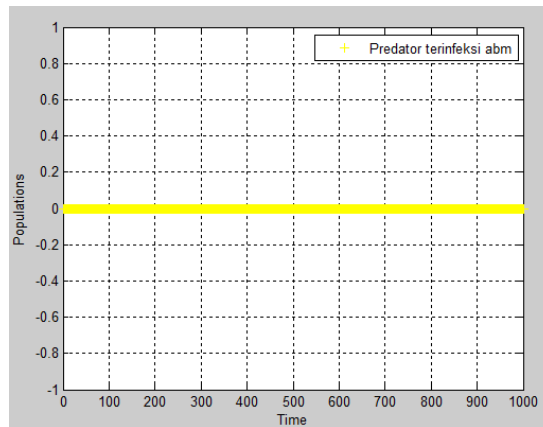
Gambar 4.1 Grafik Kondisi 1 Pada *Prey* yang rentan



Gambar 4.2 Grafik Kondisi 1 Pada *Prey* yang terinfeksi



Gambar 4.3 Grafik Kondisi 1 Pada *Predator* yang rentan



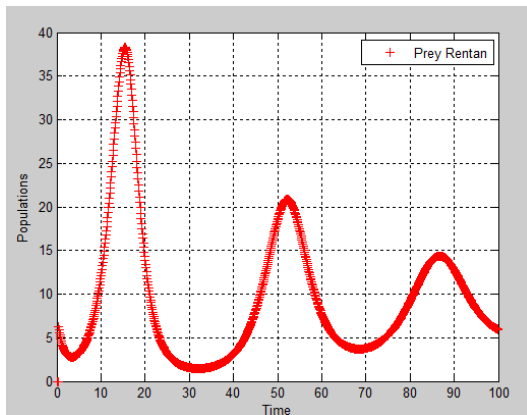
Gambar 4.4 Grafik Kondisi 1 Pada *Predator* yang terinfeksi

1. Laju Pertumbuhan Udang Windu yang Rentan S
Laju pertumbuhan udang windu S mengalami osilasi yang menyebabkan laju pertumbuhan tidak stabil karena populasi udang windu S terinfeksi oleh udang windu terinfeksi WSSV. Serta adanya predasi pada didalam tambak.
2. Laju Pertumbuhan Udang Windu Terinfeksi I
Laju pertumbuhan udang windu I menurun karena udang windu mati karena terinfeksi oleh WSSV. Serta dimangsa oleh *predator* P_1 setelah kurun beberapa waktu populasi I punah.
3. Laju Pertumbuhan *Predator* yang Rentan P_1
Laju pertumbuhan *predator* P_1 tidak stabil karena dalam pembasmian *predator* kurang maksimal sehingga menyebabkan populasi terus bertambah dari populasi awal.
4. Laju Pertumbuhan *Predator* yang terinfeksi P_2
Tidak ada populasi *predator* yang terinfeksi P_2 .

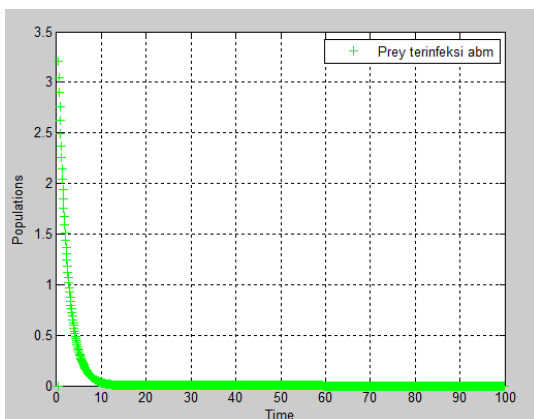
2. Untuk kondisi 2 dengan nilai parameter dan variabel berikut:

Tabel 4.9. Kondisi 2

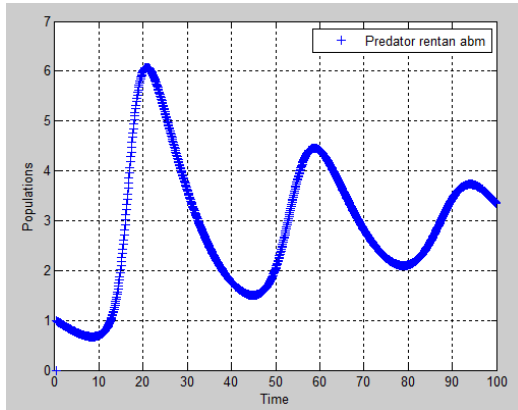
Simbol	Nilai
r	0.5
β	0.5
γ	0.25
K	50
a	0.125
u	0.125
b	0.25
v	0.0625
k	0.125
l	0.0625
o	0.25
w	0.0625
d_1	0.125
d_2	0.25
c	0.125
d_4	0.0625
d_5	0.25
h	0.25
m_3	0.01
$S(1)$	9
$I(1)$	4
$P_1(1)$	1
$P_2(1)$	0



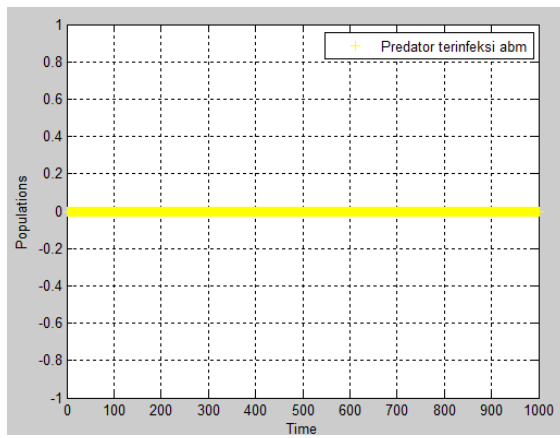
Gambar 4.5. Grafik Kondisi 2 Pada *Prey* yang Rentan



Gambar 4.6. Grafik Kondisi 2 Pada *Prey* yang Terinfeksi



Gambar 4.7. Grafik Kondisi 2 Pada *Predator* yang Rentan



Gambar 4.8. Grafik Kondisi 2 Pada *Predator* yang Terinfeksi

1. Laju Pertumbuhan Udang Windu yang Rentan S

Laju pertumbuhan udang windu S tidak stabil dikarenakan populasi didalam tambak dipengaruhi oleh populasi *prey* yang terinfeksi serta adanya *predator* yang rentan dan terinfeksi. Dengan jumlah udang windu yang terinfeksi sebanyak 4 ekor yang memengaruhi populasi udang windu yang sehat karena semakin banyak populasi udang windu terinfeksi maka semakin banyak yang mati populasi udang windu yang sehat.

2. Laju Pertumbuhan Udang Windu Terinfeksi I

Laju pertumbuhan udang windu I tidak stabil karena tidak hanya dipengaruhi oleh dirinya sendiri yang terinfeksi tetapi juga dipengaruhi oleh adanya *predasi* didalam tambak. Setelah kurun beberapa waktu, populasinya punah.

3. Laju Pertumbuhan *Predator* yang Rentan P_1

Laju pertumbuhan *predator* P_1 meningkat karena dalam pembasmian petani kurang maksimal.

4. Laju Pertumbuhan *Predator* yang terinfeksi P_2

Tidak ada populasi *predator* yang terinfeksi P_2 .

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan dalam tugas akhir ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Dari pembahasan diatas, didapat titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, kestabilan serta bilangan reproduksi, sebagai berikut:

a. Titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu:

- 1) $E^{(1)} \left(K \left(1 - \frac{d_1}{r} \right), 0, 0, 0 \right)$
- 2) $E^{(2)} \left(\frac{c}{ka}, 0, \frac{r \left(1 - \frac{c+m_3}{kaK} \right) - d_1}{a}, 0 \right)$

b. Titik kesetimbangan endemik, yaitu:

- 1) $E^{(3)}(0, A, B, C)$ dengan:

$$A = \frac{\gamma(h + d_2) + u(d_4 + d_5) - vc}{u(kw - vl)}$$

$$B = \frac{(d_4 + d_5) - kwI^{(3)} + m_3}{\gamma}$$

$$C = \frac{lul^{(3)} - c - m_3}{\gamma}$$

- 2) $E^{(4)} \left(K \left[1 - \frac{(\beta I^{(4)} + bP_2^{(4)} + d_1)}{r} \right] - I^{(4)}, \frac{(d_4 + d_5) + m_3 - obs^{(4)}}{kw}, 0, \frac{\beta S^{(4)} - (h + d_2)}{v} \right)$
- 3) $E^{(5)} \left(\frac{(h + d_2)}{\beta}, \frac{K\beta(r - d_1) - r(h + d_2)}{\beta(r + \beta K)}, 0, 0 \right)$

$$4) E^{(6)} \left(\frac{(d_4+d_5)+m_3}{ob}, 0, 0, \frac{r-d_1-\frac{(d_4+d_5)+m_3}{obK}}{b} \right)$$

c. Dengan titik kesetimbangan bebas penyakit, didapat kestabilan.

1) Titik setimbang bebas penyakit $E^{(1)} \left(K \left(1 - \frac{d_1}{r} \right), 0, 0, 0 \right)$ stabil jika $\lambda_{2,3,4} < 0$, yaitu:

i. $\lambda_2 < 0$ jika $\beta S^{(1)} - (h + d_2) < 0$

ii. $\lambda_3 < 0$ jika $kaS^{(1)} - c - m_3 < 0$

iii. $\lambda_4 < 0$ jika $obS^{(1)} - (d_4 + d_5) - m_3 < 0$

2) Titik setimbang bebas penyakit

$$E^{(2)} \left(\frac{c}{ka}, 0, \frac{r \left(1 - \frac{c+m_3}{kaK} \right) - d_1}{a}, 0 \right)$$
 stabil jika

$\lambda_{1,2} < 0$, $a_1 a_2 > a_0 a_3$ dan $a_i > 0$ untuk $i = 1, 2, 3$, yaitu:

i. $\lambda_1 < 0$ jika $\beta S^{(2)} - uP_1^{(2)} - (h + d_2) < 0$

ii. $\lambda_2 < 0$ jika $obS^{(2)} - (d_4 + d_5) + \gamma P_1^{(2)} - m_3 < 0$

iii. $a_1 a_2 > 0$

iv. $a_i > 0$ untuk $i = 1, 2, 3$

d. Dengan titik kesetimbangan endemik, didapat kestabilan

1) Titik setimbang endemik

$$E^{(3)}(S^{(3)}, I^{(3)}, P_1^{(3)}, P_2^{(3)})$$
 stabil jika :

- i. $\lambda_1 < 0$ jika $r \left(1 - \frac{I^{(3)}}{K}\right) - \beta I^{(3)} - aP_1^{(3)} - bP_2^{(3)} - d_1 < 0$
- ii. $a_1 a_2 > a_3$
- iii. $a_i > 0$ untuk $i = 1, 2, 3$
- 2) Titik setimbang endemik
- $$E^{(4)} \left(K \left[1 - \frac{(\beta I^{(4)} + bP_2^{(4)} + d_1)}{r} \right], I^{(4)}, \frac{(d_4 + d_5) + m_3 - obS^{(4)}}{kw}, 0, \frac{\beta S^{(4)} - (h + d_2)}{v} \right)$$
- stabil jika :
- i. $\lambda_1 < 0$ jika $kaS^{(4)} + luI^{(4)} - c - m_3 - \gamma P_2^{(4)} < 0$
- ii. $a_1 a_2 > a_3$
- iii. $a_i > 0$ untuk $i = 1, 2, 3$
- 3) Pada titik kesetimbangan
- $$E^{(5)} \left(\frac{(h + d_2)}{\beta}, \frac{K\beta(r - d_1) - r(h + d_2)}{\beta(r + \beta K)}, 0, 0 \right)$$
- stabil jika:
- i. $kaS^{(5)} + luI^{(5)} - c - m_3 < 0$
- ii. $obS^{(5)} + kwI^{(5)} - (d_4 + d_5) - m_3 < 0$
- iii. $a_1 a_2 > 0$
- iv. $a_i > 0$ untuk $i = 1, 2$
- 4) Pada titik kesetimbangan
- $$E^{(6)} \left(\frac{(d_4 + d_5) + m_3}{ob}, 0, 0, \frac{r - d_1 - \left(\frac{(d_4 + d_5) + m_3}{obK}\right)}{b} \right)$$
- stabil jika:
- i. $\beta S^{(6)} - vP_2^{(6)} - (h + d_2) < 0$
- ii. $kaS^{(6)} - c - \gamma P_2^{(6)} - m_3 < 0$
- iii. $a_1 a_2 > 0$
- iv. $a_i > 0$ untuk $i = 1, 2$

e. Diperoleh Bilangan Reproduksi Dasar R_0 :

$$R_0 = \frac{\beta S^{(2)}(t) \gamma P_1^{(2)}(t)}{(h + d_2)(d_4 + d_5)}$$

dengan demikian penyakit akan terjadi endemik jika $R_0 > 0$.

3. Pada model *prey-predator* udang windu di simulasikan menggunakan metode Adam Bashforth-Moulton orde empat menunjukkan bahwa banyaknya populasi udang windu yang terinfeksi didalam tambak sangat memengaruhi populasi udang windu lainnya yang sehat karena penularan WSSV udang windu secara vertikal dimana induk yang terinfeksi akan menularkan ke benur dan WSSV dapat menyebar secara kanibalisme dimana udang windu mempunyai karakteristik memakan udang windu lainnya disekitarnya.

5.2 Saran

Berdasarkan pembahasan dan kesimpulan yang telah dilakukan, untuk penelitian selanjutnya diharapkan memodelkan persamaan vaksin untuk menyembuhkan udang windu terhadap WSSV.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] PT. Natural Nusantara. (2015, Juni 13). **"Pedoman Praktis Budidaya Udang Windu"**. Retrieved Februari 06, 2017, from Mitra Nasa: <http://mitranasa.com/pedoman-budidaya-udang-windu/>.
- [2] Rukyani, A. (2000). **"Masalah penyakit udang dan harapan solusinya"**. Pusat Penelitian dan Pengembangan Perikanan. Jakarta.
- [3] Munn, C.B. (2004). **"Marine Microbiology"**. Ecology and applications. BIOS Scientific Publisher. London and New York. 282 pp.
- [4] Chang, P.S., L.J. Chen, and Y.C. Wang. (1998). **"The Effect of Ultraviolet Radiation Irradiation, Heat, pH, Ozone, Salinity, and Chemical Desinfectant on the Infectivity of White Syndrome Virus Associated Baculovirus"**. Aquaculture. 166:1-17.
- [5] Kono, T., R. Savan, and T. Itami. (2004). **"Detection of White Spot Syndrome Virus in Shrimp by Loop-Mediated Isothermal Amplification"**. J. Virol. Methods. 115 :59-65.
- [6] Shashi Kant, Vivek Kumar. (2016), **"Stability analysis of predator-prey system with migrating prey and disease infection in both species"**, *Applied Mathematical Modelling*, doi:10.1016/j.apm.2016.10.003.
- [7] Sinha. S., Misra. O.P., dan Dhar. J. (2010). **"Modelling a Predator-Prey System with Infected Prey in Polluted Environment"**. Applied Mathematical Modelling 34 (2010) 1861-1872.
- [8] Yanse. (2012) **"Efektifitas Metode Adams Bashforth-Moulton Orde Sembilan dalam Menganalisis Model Penyebaran Penyakit Demam"**

- Berdarah Dengue (DBD)***". Skripsi Universitas Jember.
- [9] Kuzairi, Yulianto, Tony., dan Safitri, Lilik. (2016). ***"Aplikasi Metode Adams Bashforth-Moulton (ABM) pada Model Penyakit Kanker"***. Jurnal Matematika "Mantik", 06.
- [10] Muliani, B.R. Tampangallo, dan M. Atmomarsono. (2006). ***"Pemantauan Penyakit White Spot Syndrome Virus (WSSV) pada Budi Daya Udang Windu (Panaeus Monodon)"***. Jurnal Akuakultur Indonesia. Institut Pertanian Bogor. 15 pp.
- [11] Sari, A. N., (2011) ***"Analisis Stabilitas matematika dari Penyebaran Penyakit Menular melalui Transportasi Antar Dua Kota"***, Institut Teknologi Sepuluh November, (http://digilib.its.ac.id/ITS-undergraduate-15082-abstract_id.pdf, diakses 25 Januari 2017)
- [12] Vlak, J. M., J.R. Bonami., T.W. Flegel., G.H. Kou., D.V. Lighner., C.F. Lo., P.C. Loh and P.J. Walker. (2002). ***"A New Virus Family Infecting Aquatik Invertebrates"***. 12th International Congress of Virology. Paris
- [13] Tim Perikanan WWF Indonesia. (2011). ***"Mencegah dan Mengatasi Penyakit Udang Windu"***. Jakarta Selatan: WWF Indonesia.
- [14] Yanto H. (2006). ***"Diagnosa dan Identifikasi Penyakit Udang Asal Tambak Intensif dan Panti Benih di Kalimantan Barat"***. *Jurnal Penelitian Sains dan Teknologi* 7(1): 17-32.
- [15] Anonim. (2009). *Jurnal Manajemen Sumber Daya Manusia*. (<http://www.jurnalsdm.blogspot.com>, diakses 25 Januari 2017).
- [16] Diekmann O, Heesterbeek JAP, Metz JAJ. (1990). ***"On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for***

- infectious diseases in heterogeneous populations*". Journal Mathematics Bio. 28:365-382.
- [17] Driessche, P. Van den and Watmough, J. (2002). "**Reproduction Numbe and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission**". Mathematical Biosciences. 180:29-48.
- [18] Jones, James H. (2007). "**Notes On R_0** ". Department of Anthropological.
- [19] Oktaviani, L.D. (2013). "**Penentuan Bilangan Reproduksi Dengan Menggunakan Matriks Next Generation Pada Model West Nile Virus**". Skripsi IPB.
- [20] Angkasa, dan Winarko. (2005). "**Masalah Penyebaran Penyakit Menular pada Model Predator-Prey**". Skripsi ITS.
- [21] <http://anies.staff.gunadarma.ac.id/Downloads/files/45572/04.+Analisis+Sistem+Kendali+%233.PDF> (diakses pada tanggal 30 April 2017 pukul 19.24)
- [22] Apriadi, Prihandono, B., & Noviani, E. (2014). "**Metode Adams Bashforth-Moulton dalam penyelesaian Persamaan Diferensial Non-Linear**". Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster), 107-116.
- [23] Munir, R. (2010). *Metode Numerik*. Bandung : Informatika Bandung.
- [24] Muhammad, Singgih T., Apriliani, E., dan Hanafi, Lukman. (2015). "**Pengkajian Metode Extended Runge Kutta dan Penerapannya pada Persamaan Diferensial Biasa**". Jurnal Sains dan Seni ITS Vol. 4, No. 1.
- [25] Kungvankij, P., J. R. Pudadera., B.J. Tiro and I.O. Potestes. (1986). "**Biology and Culture of Sea (*Lates calcarifer*)**". SEAFDEC Aquaculture Department.

- [26] Muliani, Nurhidayah, and M.I. Madeali. (2005). ***“Deteksi White Spot Syndrome Virus (WSSV) pada Induk Udang Windu *Panaeus Monodon* dengan Teknik Polymearase Chain Reaction (PCR)”***. Universitas Gajah Mada. Yogyakarta. P.151-157.

LAMPIRAN A

Source Code Matlab Model Penyebaran WSSV *Prey-Predator* pada Udang Windu dengan Menggunakan Metode Adam Bashforth-Moulton Orde 4

```

clear;
clc
%source code Runge Kutta and Adam
Bashforth-Moulton orde 4
%terdapat prey yang rentan dan terinfeksi
serta predator yang rentan dan terinfeksi
N=input('masukkan banyak iterasi = ');
%banyaknya iterasi
t0=input('masukkan t awal = '); %waktu
awal
tfinal=input('masukkan t akhir = ');
%waktu batas
s1=input('masukkan prey rentan awal= ');
v1=input('masukkan prey terinfeksi awal=
');
p11=input('masukkan predator rentan awal=
');
p21=input('masukkan predator terinfeksi
awal= ');
be=input('masukkan beta= ');
g=input('masukkan gamma= ');
m3=input('masukkan m3= ');
t(1)=t0;
s(1)=s1;
v(1)=v1;
p1(1)=p11;
p2(1)=p21;
%parameters for s
r=0.5;
k=50;

```

```

b=0.25;
a=0.125;
%be=0.1;
d1=0.125;
%parameters for v
u=0.125;
ve=0.0625;
h1=0.25;
d2=0.25;
%parameters for p1
k1=0.125;
l=0.0625;
c=0.125;
%g=0.05;

%parameters for p2
o=0.25;
w=0.0625;
d4=0.0625;
d5=0.25;
%m1=1/6;
%m2=1/8;
h=(tfinal-t(1))/N;
%define function handle
fs=@(t,s,v,p1,p2)      r*s*(1-(s+v)/k) -
    (be*s*v) - (a*s*p1) - (b*s*p2) - (d1*s); %-
    (m1*s);
fv=@(t,s,v,p1,p2)      (be*s*p2) - (u*v*p1) -
    (ve*v*p1) - (h1+d2)*v; %- (m2*v);
fp1=@(t,s,v,p1,p2)
    (k1*a*s*p1) + (l*u*v*p1) - (c*p1) - (g*p1*p2) -
    (m3*p1);

```



```

fp2=@(t,s,v,p1,p2)
(o*b*s*p2)+(ve*w*v*p2)-
((d4*d5)*p2)+(g*p1*p2)-(m3*p2);

%ABM 4
for i=1:N
    %update time
    t(i+1)=t(i)+h;

    %runge kutta
    K1s      =fs(t(i)      ,s(i)      ,v(i)
,p1(i)      ,p2(i));
    K1v      =fv(t(i)      ,s(i)      ,v(i)
,p1(i)      ,p2(i));
    K1p1     =fp1(t(i)     ,s(i)      ,v(i)
,p1(i)      ,p2(i));
    K1p2     =fp2(t(i)     ,s(i)      ,v(i)
,p1(i)      ,p2(i));

    K2s      =fs(t(i)+h/2  ,s(i)+1/2*K1s
,v(i)+1/2*K1v  ,p1(i)+1/2*K1p1
,p2(i)+1/2*K1p2);
    K2v      =fv(t(i)+h/2  ,s(i)+1/2*K1s
,v(i)+1/2*K1v  ,p1(i)+1/2*K1p1
,p2(i)+1/2*K1p2);
    K2p1     =fp1(t(i)+h/2 ,s(i)+1/2*K1s
,v(i)+1/2*K1v  ,p1(i)+1/2*K1p1
,p2(i)+1/2*K1p2);
    K2p2     =fp2(t(i)+h/2 ,s(i)+1/2*K1s
,v(i)+1/2*K1v  ,p1(i)+1/2*K1p1
,p2(i)+1/2*K1p2);

```

```

    K3s      =fs(t(i)+h/2 ,s(i)+1/2*K2s
,v(i)+1/2*K2v ,p1(i)+1/2*K2p1
,p2(i)+1/2*K2p2);
    K3v      =fv(t(i)+h/2 ,s(i)+1/2*K2s
,v(i)+1/2*K2v ,p1(i)+1/2*K2p1
,p2(i)+1/2*K2p2);
    K3p1     =h*fp1(t(i)+h/2 ,s(i)+1/2*K2s
,v(i)+1/2*K2v ,p1(i)+1/2*K2p1
,p2(i)+1/2*K2p2);
    K3p2     =h*fp2(t(i)+h/2 ,s(i)+1/2*K2s
,v(i)+1/2*K2v ,p1(i)+1/2*K2p1
,p2(i)+1/2*K2p2);

    K4s      =fs(t(i)+h ,s(i)+1*K3s
,v(i)+1*K3v ,p1(i)+1*K3p1
,p2(i)+1*K3p2);
    K4v      =fv(t(i)+h ,s(i)+1*K3s
,v(i)+1*K3v ,p1(i)+1*K3p1
,p2(i)+1*K3p2);
    K4p1     =fp1(t(i)+h ,s(i)+1*K3s
,v(i)+1*K3v ,p1(i)+1*K3p1
,p2(i)+1*K3p2);
    K4p2     =fp2(t(i)+h ,s(i)+1*K3s
,v(i)+1*K3v ,p1(i)+1*K3p1
,p2(i)+1*K3p2);

    s(i+1)=s(i)+(h/6*(K1s+ 2*K2s+ 2*K3s
+K4s));
    v(i+1)=v(i)+(h/6*(K1v+ 2*K2v+ 2*K3v
+K4v));
    p1(i+1)=p1(i)+(h/6*(K1p1+ 2*K2p1+
2*K3p1 +K4p1));
    p2(i+1)=p2(i)+(h/6*(K1p2+ 2*K2p2+
2*K3p2 +K4p2));
end
srung=s';

```

```

vrung=v';
p1rung=p1';
p2rung=p2';

for i=4:N

    %update time
    t(i+1)=t(i)+h;
    %metode predictor orde 4
    %prey rentan

spr(i+1)=s(i)+(h/24)*(55*fs(t(i),srung(i)
, vrung(i),p1rung(i),p2rung(i)) -
59*fs(t(i-1),srung(i-1),vrung(i-
1),p1rung(i-1),p2rung(i-1))+37*fs(t(i-
2),srung(i-2),vrung(i-2),p1rung(i-
2),p2rung(i-2))-9*fs(t(i-3),srung(i-
3),vrung(i-3),p1rung(i-3),p2rung(i-3)));

    %prey terinfeksi

vpr(i+1)=v(i)+(h/24)*(55*fv(t(i),srung(i)
, vrung(i),p1rung(i),p2rung(i)) -
59*fv(t(i-1),srung(i-1),vrung(i-
1),p1rung(i-1),p2rung(i-1))+37*fv(t(i-
2),srung(i-2),vrung(i-2),p1rung(i-
2),p2rung(i-2))-9*fv(t(i-3),srung(i-
3),vrung(i-3),p1rung(i-3),p2rung(i-3)));

    %predator rentan

```

```

p1pr(i+1)=p1(i)+(h/24)*(55*fp1(t(i),srung
(i),vrung(i),plrung(i),p2rung(i))-
59*fp1(t(i-1),srung(i-1),vrung(i-
1),plrung(i-1),p2rung(i-1))+37*fp1(t(i-
2),srung(i-2),vrung(i-2),plrung(i-
2),p2rung(i-2))-9*fp1(t(i-3),srung(i-
3),vrung(i-3),plrung(i-3),p2rung(i-3)));
    %predator terinfeksi

p2pr(i+1)=p2(i)+(h/24)*(55*fp2(t(i),srung
(i),vrung(i),plrung(i),p2rung(i))-
59*fp2(t(i-1),srung(i-1),vrung(i-
1),plrung(i-1),p2rung(i-1))+37*fp2(t(i-
2),srung(i-2),vrung(i-2),plrung(i-
2),p2rung(i-2))-9*fp2(t(i-3),srung(i-
3),vrung(i-3),plrung(i-3),p2rung(i-3)));

    %metode corrector
    %prey rentan

spd(i+1)=s(i)+(h/24)*(9*fs(t(i+1),spr(i+1)
),vpr(i+1),p1pr(i+1),p2pr(i+1))+19*fs(t(i)
),s(i),v(i),p1(i),p2(i))-
5*fs(t(i),s(i),v(i),p1(i),p2(i))+fs(t(i),
s(i),v(i),p1(i),p2(i)));

    %prey terinfeksi

vpd(i+1)=v(i)+(h/24)*(9*fv(t(i+1),spr(i+1)
),vpr(i+1),p1pr(i+1),p2pr(i+1))+19*fv(t(i)
),s(i),v(i),p1(i),p2(i))-
5*fv(t(i),s(i),v(i),p1(i),p2(i))+fv(t(i),
s(i),v(i),p1(i),p2(i)));

```

```

%predator rentan

p1pd(i+1)=p1(i)+(h/24)*(9*fp1(t(i+1),spr(i+1),vpr(i+1),p1pr(i+1),p2pr(i+1))+19*fp1(t(i),s(i),v(i),p1(i),p2(i))-5*fp1(t(i),s(i),v(i),p1(i),p2(i))+fp1(t(i),s(i),v(i),p1(i),p2(i))));

%predator terinfeksi

p2pd(i+1)=p2(i)+(h/24)*(9*fp2(t(i+1),spr(i+1),vpr(i+1),p1pr(i+1),p2pr(i+1))+19*fp2(t(i),s(i),v(i),p1(i),p2(i))-5*fp2(t(i),s(i),v(i),p1(i),p2(i))+fp2(t(i),s(i),v(i),p1(i),p2(i))));

end

spdr=spd';
vpdr=vpd';
p1pdr=p1pd';
p2pdr=p2pd';

%output
disp('Hasil Penyelesaian numerik')
disp('pra      ps      prel      pre2')
disp([spdr,   vpdr,   p1pdr,   p2pdr,])
figure(1)
plot(t,spd,'+r')
grid on
xlabel('Time')
ylabel('Populations')
legend('Prey Rentan')

```

```
figure(2)
plot(t,vpd, '+g')
grid on
xlabel('Time')
ylabel('Populations')
legend('Prey terinfeksi abm')
figure(3)
plot(t,p1pd, '+b')
grid on
xlabel('Time')
ylabel('Populations')
legend('Predator rentan abm')
figure(4)
plot(t,p2pd, '+y')
grid on
xlabel('Time')
ylabel('Populations')
legend('Predator terinfeksi abm')
```

BIODATA PENULIS



Kartika Ratna Dewi atau yang biasa dipanggil Nana lahir di Semarang, 16 Mei 1995. Penulis menempuh pendidikan di SDN Ujungrusi 01 Tegal, SDN Mayonglor 01 Jepara, SMPN 1 Mayong Jepara, dan SMAN 1 Jepara. Penulis yang memiliki kegemaran mendengarkan musik, ini diterima di Jurusan Matematika ITS untuk menempuh pendidikan S1 selama 4 tahun. Penulis juga mengikuti kegiatan organisasi yaitu anggota himpunan mahasiswa jurusan Departemen Perekonomian 2014/2015. Di Jurusan Matematika ITS penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan yang terdiri atas Pemodelan Matematika. Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai Penelitian Tugas Akhir ini, bisa melalui email karde16057@gmail.com.

Semoga bermanfaat.