SKRIPSI

APLIKASI BIT (*BOUNDARY INTEGRAL TECNIQOE*) PADA ANALISA PROFIL ALIRAN FLUIDA DI PERMUKAAN BEBAS DIATAS PENGHALANG DALAM SUATU KANAL

Oleh :

ANTONIUS. E
1297 109 040

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2005

LEMBAR PENGESAHAN

SKRIPSI

APLIKASI BIT (*BOUNDARY INTEGRAL TECNIQOE*) PADA ANALISA PROFIL ALIRAN FLUIDA DI PERMUKAAN BEBAS DIATAS PENGHALANG DALAM SUATU KANAL

Dipersiapkan dan diusulkan oleh :

ANTONIUS. E
Nrp. 1297 109 040

Telah dipertahankan di depan Tim Penguji
Pada tanggal : 25 Juli 2005

Susunan Tim Penguji

Pembimbing

DR. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 131 839 345

Anggota Tim Penguji

1. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc.
NIP. 131 782 039

a/n

2. Drs. Kamiran
NIP. 131 843 899

3. Dra. Mardlijah, M.Si
NIP. 131 933 301

Tugas Akhir ini telah diterima sebagai salah satu persyaratan
untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Surabaya, 28 Juli 2005

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Drs. Lukman Hanafi, MSc
NIP : 131 782 039

ABSTRAK

Secara teori matematika, perhitungan aliran fluida di permukaan bebas dimensi dua, tak berputar, takmampu mampat, meliputi tidak hanya dalam hal penentuan dari fungsi potensial atau fungsi aliran dalam kanal tetapi perlu juga diperhatikan mengenai kondisi batas daripada domain penyelesaian masalah aliran fluida yang akan dibawa kedalam bentuk persamaan integral. Dalam penelitian ini akan diselesaikan model matematika dari aliran fluida di permukaan bebas tersebut dengan menggunakan suatu metode numerik yang disebut metode integral batas atau *Boundary Integral Technique* (BIT). Kemudian dari hasil penyelesaian tersebut akan dipakai dalam memprediksi atau menggambarkan bentuk profil dari aliran fluida di permukaan bebas diatas penghalang pada suatu kanal yang dipengaruhi oleh gravitasi bumi dan tegangan permukaan, dengan tinggi penghalang non dimensi dan lebar penghalang non dimensi.

Kata kunci : Metode Integral Batas, profil fluida di permukaan bebas.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan yang Maha Esa atas segala rahmat dan karunia-Nya, sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini, dengan judul :

APLIKASI BIT (*BOUNDARY INTEGRAL TECNIQUE*) PADA ANALISA PROFIL ALIRAN FLUIDA DI PERMUKAAN BEBAS DIATAS PENGHALANG DALAM SUATU KANAL

Dengan terselesaikannya laporan ini, saya menyampaikan ucapan terima kasih setinggi-tingginya kepada :

1. Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc. selaku ketua Jurusan Matematika, dosen wali dan selaku dosen penguji.
2. Bapak DR. Basuki Widodo, M.Sc. selaku dosen pembimbing yang telah berkenan meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing dan memberikan referensi pustaka dengan penuh kesabaran.
3. Ibu Dra. Mardlijah, MT. Selaku dosen penguji dan koordinator tugas akhir yang telah memberikan keleluasaan waktu bagi penulis untuk dapat menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Drs. Kamiran selaku dosen penguji.
5. Keluargaku tercinta : Ayah, Ibu, Kakak , dan adik, yang telah memberikan dukungan dan doa sehingga dapat terselasainya laporan ini.
6. Teman-teman seperjuangan Angkatan 97' : Andik, Fitri, Gigih, dan Safira, yang telah berjuang dalam susah dan senang tetap menjaga semangat kekompakannya hingga mencapai kelulusan.
7. Sobat-sobatku : Vasco yang banyak memberikan dorongan semangat dan nasehat, serta terima kasih buat sahabat lama : Iput dan Baloma terima kasih atas bantuannya.

8. Teman-teman di kampung halaman : Zoel, Bonjor, Eko, Melky.
9. Pihak-pihak lain yang telah ikut membantu dalam penulisan laporan ini.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih jauh dari sempurna, untuk itu kami mengharapkan saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini.

Akhir kata semoga laporan skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca.

Surabaya, Juni 2005

(Penulis)

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR NOTASI

Daftar Notasi dalam huruf abjad

a, b, c, d	konstanta dalam integral I
a_1 , b_2	titik pada sumbu riel bidang paruh bagian atas
$\arg(Z)$	argumen bilangan kompleks variabel Z
C	konstanta
f	fungsi riel dalam masalah Riemann-Hilbert
f	pernyataan dasar saluran
f^*	pernyataan untuk dasar kanal
E	titik yang cukup jauh dari penghalang
F	titik yang cukup jauh dari penghalang
Fr	bilangan Froude
h_1, h_2, h_3	tinggi penghalang non dimensi
H	kedalam air hulu
H_{sp}	tinggi penghalang
I	integral
l_1, l_2, l_3	panjang penghalang non dimensi
M	titik paling ujung dari penghalang
N	titik yang cukup jauh dari penghalang
n	nomor urutan titik-titik, integer
Q	dimensi flux dari fluida pada bidang tak terbatas ujung penghalang , $U_\infty H$
q	perubahan non dimensi dari fluida pada garis jauh tak hingga, $Q/(U_\infty H)$
s	panjang non dimensi dari panjang dasar saluran dan permukaan bebas
S	ukuran panjang pancaran dasar kanal dan permukaan bebas
S^+	daerah terbatas dan tak terbatas bagian atas bidang paruh
T	dimensi tegangan permukaan
TL	dimensi panjang penghalang
tl	non dimensi panjang penghalang, T_L/H

t, t'	bagian atas bidang paruh
u	komponen kecepatan fluida non dimensi dalam arah X
u_1, u_2	laju fluida pada bagian atas dan bagian bawah permukaan bebas
U	komponen kecepatan fluida dalam arah X
$\underline{U}$	vektor kecepatan fluida
$\lvert\underline{U}\rvert$	laju fluida
U_∞	kecepatan fluida ujung hulu
v	komponen kecepatan fluida dalam arah Y
W	kecepatan kompleks, $W = U + iV$
X	sumbu horisontal untuk sistem koordinat berdimensi
X^+	nilai dari $X(t)$ pada sumbu riel dalam bidang paruh bagian atas
$X(t)$	penyelesaian homogen dari Ω
x	koordinat non dimensi, X/H
x^*, X^*	variabel bebas
y	koordinat non dimensi, Y/H
Y	sumbu vertikal untuk sistem koordinat berdimensi
$\underline{Z}$	variabel kompleks

Daftar Notasi dalam Huruf Yunani

$\Re e$	bagian riel bilangan kompleks
$\Im m$	bagian imajiner bilangan kompleks
ρ	density fluida
ψ	dimensi fungsi aliran
Φ	dimensi potential kecepatan
κ	potential kompleks, $\Phi + i\psi$
ζ	sumbu riel dalam bidang paruh bagian atas
η, η'	bagian riel dalam bidang paruh bagian atas
η_0	titik pada sumbu riel dalam bidang paruh bagian atas
ξ, ξ'	bagian imajiner dalam bidang paruh bagian atas
θ	sudut yang dibentuk permukaan bebas dengan sumbu x-positif

$\bar{\theta}$	sudut yang dibuat garis dZ dengan sumbu riel positif
Θ	bagian imajiner dari Riemann-Hilbert
Θ^{+}	bagian imajiner dari Ω
β	sudut yang dibentuk oleh dasar permukaan dengan sumbu X positif
β^{*}	sudut yang dibentuk oleh garis dZ dengan sumbu riel positif, $\pi + \bar{\theta}$
τ	bagian riel dari Riemann-Hilbert
τ^{+}	bagian riel dari Ω
$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$	batas daerah penyelesaian
γ	non dimensi tegangan permukaan
∞	nilai tak hingga
Ω	variabel Riemann-Hilbert, $\tau + i\Theta$
Ω^{+}	fungsi dalam bidang paruh bagian atas
ϕ	non dimensi potential kecepatan, $\Phi/(U_\infty H)$
ϕ'	non dimensi potential kecepatan pada titik ujung hulu
ϕ^{0}	inisial potensial kecepatan
ω	bidang kompleks
α'	sudut yang dibentuk permukaan bebas dengan sumbu X
Δx	pias yang sama dalam sumbu X
$\zeta(t)$	fungsi analitik dalam bidang paruh

subcripts

b	dasar saluran (dasar kanal)
f	permukaan bebas
i	posisi ke-i

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Aliran fluida dalam saluran terbuka (open channel flow) dapat berupa aliran pada permukaan bebas. Sistem aliran pada permukaan bebas merupakan sistem yang sangat penting keberadaannya di bidang hidrodinamika. Penyelesaian masalah aliran pada permukaan bebas lebih kompleks dan luas, meliputi klasifikasi aliran yang beragam, penggolongan sifat fluida, dan perilaku dari aliran fluida dipermukaan bebas yang dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial parsial dimana akan mengalami kesulitan dalam mencari analisis umum dari penyelesaian persamaan tersebut. Sebagai contoh adalah aliran air yang terjadi diatas dasar kanal sebarang[1]. Berbagai penelitian telah banyak dilakukan dan dikembangkan untuk menganalisis permasalahan aliran pada permukaan bebas ini, termasuk didalamnya metode-metode konvensional misalnya dengan menggunakan metode beda hingga (*finite difference method*), metode elemen hingga (*finite element method*), dan metode elemen batas (*boundary element method*).

Didasarkan penjelasan diatas, telah dikembangkan metode baru yaitu Metode Integral Batas atau *Boundary Integral Technique* dan ternyata dapat diaplikasikan pada permasalahan aliran di permukaan bebas tersebut (penelitian Widodo[14]). Metode Integral Batas ini dikembangkan untuk menganalisa aliran air dimensi-dua di permukaan bebas dalam suatu kanal diatas penghalang berbentuk sebarang, dimana sistem alirannya adalah sistem aliran fluida ideal yang dipengaruhi oleh gravitasi bumi dan tegangan permukaan. Dimana untuk menguji konvergensi dan stabilitas penyelesaian dari teknik integral batas dari model matematika aliran fluida telah disusun oleh Moch. Naki[15] pada tugas akhir sebelumnya, sehingga pada penyusunan tugas akhir ini akan diuji model matematika tersebut untuk menggambarkan bentuk profil dari aliran fluida di permukaan bebas.

Oleh karena Metode Integral Batas tergolong suatu metode yang relatif baru, maka perlu dipelajari dan dikembangkan penerapannya dalam praktek.

1.2. Permasalahan

Berkaitan dengan latar belakang diatas, maka dalam penelitian ini akan dikembangkan penerapan dari metode integral batas dengan permasalahan yang timbul adalah :

a. Menyusun model matematika dari aliran fluida di permukaan bebas suatu fluida diatas suatu penghalang dalam suatu kanal yang dipengaruhi oleh gravitasi bumi dan tegangan permukaan.

b. Bagaimanakah peran metode integral batas dalam menentukan atau menggambarkan profil aliran fluida di permukaan bebas diatas suatu penghalang dalam suatu kanal yang dipengaruhi oleh gravitasi bumi dan tegangan permukaan.

1.3. Pembatasan Masalah

Dalam tugas akhir ini digunakan batasan-batasan masalah sebagai berikut:

1. Sistem aliran yang dimaksud adalah sistem aliran fluida dimensi-dua.
2. Aliran fluida bersifat takmampu mampat, tak berputar, tunak, dan tak kental.
3. Fluida yang mengalir adalah air.
4. Aliran fuida hanya dipengaruhi oleh gravitasi dan tegangan permukaan.
5. Bentuk penghalang yang akan dibahas pada penelitian ini diasumsikan pada bentuk penghalang sebagai berikut :

* Bentuk penghalang melengkung bertingkat turun

Gambar 1.1. Penghalang melengkung bertingkat turun

Asumsi :

Kecepatan aliran fluida di hulu dan di hilir adalah uniform (seragam).

1.4. Metode Penelitian

Metode penelitian dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Studi literatur tentang konsep dasar aliran fluida di permukaan bebas.
2. Mengembangkan model matematika dari aliran fluida.
3. Merumuskan algoritma BIT untuk menyelesaikan model matematika.
4. Melakukan simulasi dengan program komputer .
5. Menganalisa hasil dari simulasi.
6. Penyusunan laporan tugas akhir.

1.5. Tujuan dan Manfaat

Tujuan dan manfaat dari penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Tujuan Penelitian.

Adapun tujuan umum dari penelitian ini adalah menerapkan metode integral batas pada bidang hidrodinamika, terutama pada permasalahan aliran fluida di permukaan bebas. Sedangkan tujuan khusus dari penelitian ini adalah mendesaian profil dari aliran fluida di permukaan bebas diatas suatu penghalang dalam suatu kanal yang dipengaruhi oleh gravitasi bumi dan tegangan permukaan.

2. Manfaat Penelitian.

Hasil dari penelitian ini adalah metode penyelesaian alternatif dimana tingkat akurasinya bagus untuk menyelesaikan permasalahan aliran fluida di permukaan bebas, khususnya aliran fluida diatas suatu penghalang dalam suatu kanal yang dipengaruhi oleh gravitasi bumi dan tegangan permukaan. Diharapkan penelitian ini dapat digunakan sebagai bahan referensi bagi penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan pengembangan metode penyelesaian numerik yang sudah ada.

1.6. Sistematika Penelitian

Dalam Tugas akhir ini sistematika penulisannya adalah sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang disusunnya tugas akhir, permasalahan, tujuan dan manfaat, batasan masalah, metodologi penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini membahas sejumlah teori dan konsep secara umum yang mendukung dalam penulisan tugas akhir ini.

BAB III MODEL MATEMATIKA DARI ALIRAN FLUIDA

Pada bab ini dibahas pengembangan model matematika dari aliran fluida di permukaan bebas diatas penghalang pada suatu kanal yang dipengaruhi oleh gravitasi bumi dan tegangan permukaan. Kemudian menyusun prosedur numerik untuk penyelesaian masalah aliran fluida di permukaan bebas tersebut dengan menggunakan teknik integral batas. Selanjutnya adalah menyusun prosedur simulasi pada komputer untuk menentukan profil dari aliran fluida tersebut.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan implementasi dari simulasi komputer untuk menentukan profil aliran fluida di permukaan bebas diatas penghalang pada suatu kanal yang dipengaruhi oleh gravitasi bumi dan tegangan permukaan.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini disusun kesimpulan dari hasil penulisan tugas akhir ini disertai dengan saran bagi penelitian yang lain untuk dapat mengembangkan aplikasi yang digunakan.

BAB II
DASAR TEORI

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Aliran Fluida di Permukaan Bebas.

Suatu teknik baru untuk menyelesaikan masalah gelombang periodik menggunakan pemetaan konformal langsung pada bidang fisis ke bidang paruh telah diterapkan oleh Bloor (1978). Transformasi yang digunakan adalah transformasi Schwartz-Cristhofell dan melibatkan peubah Hilbert pada sudut tangensial yang dibentuk oleh permukaan bebas dengan garis horisontal. Hasil pemetaan kedalam bidang paruh tersebut dapat diperoleh dengan menggambarkan aliran bersama dengan kondisi permukaan bebas yang sebenarnya, yang menghasilkan persamaan integral differensial non linier dalam sudut tangensial. Walter dan Street (1964) telah menggunakan teknik Riemann-Hilbert, dimana daerah permukaan bebas dalam bidang fisis dipetakan kedalam suatu bidang paruh-t. Hal ini membuat geometri relatif mudah digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas campuran Riemann-Hilbert. Model aliran fluida yang mempelajari aliran fluida dibawah pengaruh gravitasi bumi dan tegangan permukaan melalui batas-batas kurva linier dengan menentukan teknik Riemann-Hilbert telah dihasilkan oleh Larock dan Street (1967) serta Larock (1969). Wen dan Wu (1987) telah menggunakan teknik baru dengan menggabungkan penggunaan metode integral batas, metode Riemann-Hilbert, dan teori persamaan integral singular Muskhelishvilli. Persamaan integral batas diperoleh dalam garis aliran yang panjang untuk diambil sebagai variabel tak bebas. Suatu metode iterasi dianjurkan dalam mendapatkan aliran fluida yang dipengaruhi oleh gravitasi bumi dan tegangan permukaan melalui batas-batas kurva dengan permukaan bebas. Teknik persamaan integral juga telah digunakan oleh Wen, Ingham,dan Widodo (1992) untuk menghitung aliran permukaan bebas diatas penghalang berbentuk sebarang dalam suatu kanal. Serta penelitian dari Widodo (2000) yang menggunakan metode integral batas. Secara umum pada suatu aliran dua-dimensi, takmampu mampat, dan stedi, berlaku persamaan aliran fluida di permukaan bebas yang telah dibuktikan oleh Lamb (1932), yaitu sebagai berikut : [6]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \;, \; -\infty < x < \infty \;\;, \; 0 < y < y_f \tag{2.1}$$

dan

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]^2\right\} + g y_f \;=\; \text{konstan, untuk } y_f \;=\; y_f(x) \tag{2.2}$$

dimana g = gaya gravitasi bumi, dengan syarat batas :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dy_f}{dx}, \quad \text{untuk } y_f = y_f(x) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \;\;, \text{pada batas-batas solid dengan vektor normal n} \tag{2.4}$$

dimana : Φ adalah kecepatan potensial

$y_f = y_f(x)$ adalah persamaan aliran fluida di permukaan bebas.

Penyelesaian persamaan (2.1) dan (2.2) dengan syarat batas (2.3) dan (2.4) secara matematis mengalami kesulitan dan tidak ada analisis umum dari penyelesaian persamaan-persamaan tersebut dengan syarat batas yang belum diketahui. Suatu fungsi aliran boleh dimasukkan ke dalam jenis gerakan dan hasilnya dalam syarat-syarat yang sederhana untuk sistem diatas dalam syarat potensial kompleks yang mana secara analitis bagian imajiner adalah konstan pada semua batas solid dan permukaan bebas bersama dengan persamaan Bernoulli diatas.

2.2. Potensial Kecepatan Kompleks.

Dalam aliran fluida, daerah penyelesaian adalah riel, pandang koordinat kartesius X dan Y masing-masing dalam arah horisontal dan vertikal dengan potential kecepatan Φ dan fungsi aliran Ψ, dan komponen kecepatan u dan v. Sekarang ada 2 variabel dalam potensial kecepatan kompleks yang akan ditransformasikan daerah penyelesaiannya ke bidang fisis dengan memasukkan suatu variabel kompleks , sehingga persamaan yang terbentuk dapat disederhanakan. Oleh karena itu variabel kompleks Z yang dimaksud dapat didefinisikan :

$$Z = X + i\,Y \tag{2.5}$$

Dan potensial kecepatan kompleks :

$$\kappa\,(Z) = \Phi + i\Psi \tag{2.6}$$

Sekarang variabel baru $\kappa(Z)$ digunakan bersama-sama dengan persamaan Cauchy-Reimann untuk mendapatkan komponen kecepatan u dan v dalam bentuk kecepatan kompleks. Misal κ adalah suatu variabel dalam bidang kompleks, kemudian dengan menggunakan persamaan (2.5) dan (2.6) didapat :

$$\frac{\partial\kappa}{\partial Z} = \frac{\partial\kappa}{\partial X}\,\frac{\partial X}{\partial Z} = \frac{\partial\kappa}{\partial X} \tag{2.7}$$

dan

$$\frac{\partial\kappa}{\partial Z} = \frac{\partial\kappa}{\partial Y}\,\frac{\partial Y}{\partial Z} = -\,i\,\frac{\partial\kappa}{\partial Y} \tag{2.8}$$

Jadi dengan menggunakan κ diperoleh :

$$\frac{\partial\kappa}{\partial Z} = \frac{\partial\kappa}{\partial X} = -\,i\,\frac{\partial\kappa}{\partial Y} \tag{2.9}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (2.6) , (2.9), dan persamaan Cauchy-Reimann diperoleh :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial Z} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} + i\,\frac{\partial \Psi}{\partial X} = u - iv \qquad (2.10)$$

dan ini disebut kecepatan kompleks W. Masalah utama dalam aliran fluida ideal dimensi dua adalah sulit untuk mendapatkan potensial kompleks dalam bidang-Z. Salah satu cara untuk mengatasi masalah ini adalah dengan memetakan bidang-Z pada bidang-t untuk mendapatkan potensial kompleks dalam bidang-t.

Misal potensial kompleks dalam bidang-Z adalah $\kappa(Z)$ dan potential kompleks dalam bidang-t adalah $\zeta(t)$. Selanjutnya pemetaan dari bidang-t ke bidang-Z didefinisikan dengan :

$$Z = \Omega(t) \qquad (2.11)$$

Maka hubungan antara 2 potensial kompleks adalah sebagai berikut :

$$\zeta(t) = \kappa(\Omega(t)) \qquad (2.12)$$

sehingga jika pemetaan dari bidang-Z ke bidang-t dipilih dengan tepat maka dapat diperoleh potential kompleks dalam bidang-t, sehingga potensial kompleks dalam bidang-Z dapat dicari dengan menggunakan persamaan (2.11) dan (2.12).

2.3. Aliran Fluida Potensial dalam Dimensi Dua

Diasumsikan bahwa aliran fluida potensial dimensi dua adalah tak mampu mampat, tak berputar. Jika sistem koordinat $Z = x + iy$ dimasukkan dalam bidang fisis dan potensial kecepatan kompleks yang didefinisikan $\kappa = \Phi + i\Psi$ dimana Φ adalah kecepatan potensial dan ψ adalah fungsi aliran, maka penyelesaian aliran fluida di permukaan bebas digambarkan dengan himpunan persamaan dan syarat batas. Salah satu rumus untuk menyelesaikan aliran fluida tak mampu mampat dan tak berputar adalah persamaan Laplace :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.14}$$

untuk $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$, yaitu tidak ada perembesan fluida pada dasar kanal dan permukaan bebas. Persamaan Bernoulli dapat diterapkan untuk permukaan bebas dengan tekanan konstan dan ini menghasilkan persamaan sebagai berikut :

$$\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + g\ Y_f = C \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{2}|\nabla\Psi|^2 + g\ Y_f = C \tag{2.16}$$

dimana Y_f adalah tinggi permukaan bebas dan C suatu konstanta yang diketahui. Dengan mengubah variabel (X,Y) dan (Φ,Ψ) masing-masing menjadi variabel tak bebas dan variabel bebas, serta menggunakan invers untuk persamaan (2.13) dan (2.14), akan menjadi persamaan sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \Psi^2} = 0 \tag{2.17}$$

dan

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \Psi^2} = 0 \tag{2.18}$$

Jika didefinisikan $\underline{U} = \frac{d\kappa}{dZ}$ dan syarat batas permukaan bebas, persamaan (2.15) dan (2.16) menjadi :

$$\frac{1}{2}|\underline{U}|^2 + g\ \Im m(Z) = C \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{2}\left|\frac{dZ}{d\kappa}\right|^{-2} + g\ \Im m(Z) = C \tag{2.20}$$

dimana $Z(\kappa) = X(\Phi,\Psi)+iY(\Phi,\Psi)$ dan $|\underline{U}|$ adalah laju fluida. Jika teori variabel kompleks digunakan maka dalam masalah invers tersebut adalah penting untuk mendapatkan fungsi analitik $Z(\kappa)$. Selanjutnya kecepatan fluida kompleks dapat ditulis :

$$\frac{d\kappa}{dZ} = u - iv = U\ e^{-i\theta} = \underline{U} \tag{2.21}$$

dimana θ adalah sudut vektor kecepatan fluida dengan sumbu-X positif. Kemudian dengan logaritma natural dari kecepatan fluida kompleks, yaitu :

$$\Omega = \ln\left(\frac{d\kappa}{dZ}\right) = \tau - i\bar{\theta} = \tau + i\Theta \tag{2.22}$$

dimana $\tau = \ln(U)$, $\Theta = -\bar{\theta}$, dan τ, $\bar{\theta}$, $\frac{d\kappa}{dZ}$ serta Ω adalah fungsi analitik dalam domain aliran fluida. Menurut teori variabel kompleks pada batas yang diberikan, nilai Ω pada bagian dalam daerah penyelesaian ditentukan oleh nilai Γ pada bagian dalam daerah penyelesaian dengan mengubah persamaan differensial parsial yang menggambarkan perlakuan bagian dalam daerah penyelesaian dan pada batas daerah penyelesaian ke dalam persamaan integral dan kemudian diperoleh penyelesaian numerik dari persamaan ini. Andaikata batas daerah penyelesaian terdiri dari dua bagian, yaitu pada bagian pertama untuk batas Γ_1 dan τ diketahui, dan bagian yang lain untuk batas Γ_2 dengan bagian imajiner Θ diketahui , dimana $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Maka masalah nilai batas campuran digambarkan sebagai bagian riel Ω yaitu τ yang diketahui pada bagian batas Γ_1 dan bagian imajiner Θ diketahui pada bagian batas Γ_2. Sehingga untuk mendapatkan penyelesaian fungsi analitik Ω dalam daerah penyelesaian diperoleh :

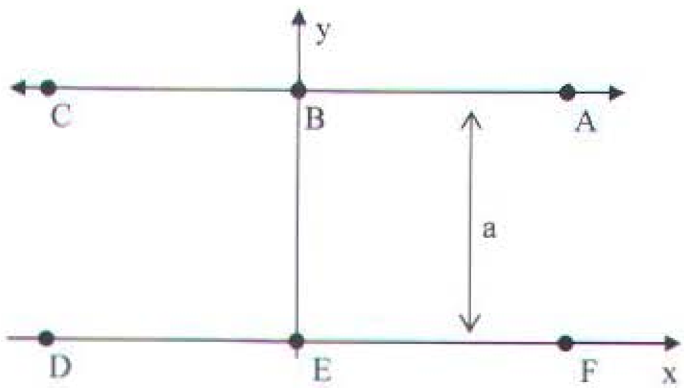
$$\Re e\ (\Omega) = \tau = f \text{ pada } \Gamma_1 \tag{2.23}$$

$$\Im m\ (\Omega) = \Theta = g \text{ pada } \Gamma_2 \tag{2.24}$$

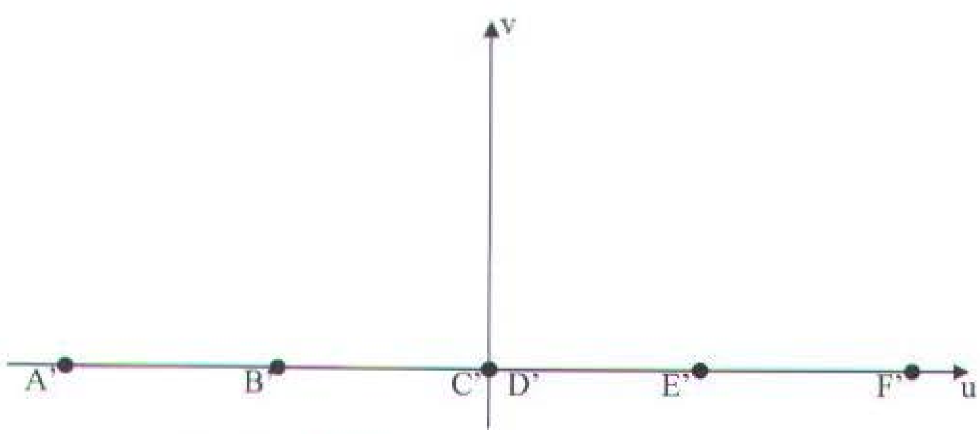
Penyelesaian masalah nilai batas campuran diperoleh dari penyelesaian masalah Reimann-Hilbert. Masalah Reimann-Hilbert adalah untuk mendapatkan suatu fungsi yang analitik dalam daerah S^+ yang dibatasi oleh bentuk sederhana Γ dan yang memenuhi syarat batas pada garis lurus dalam bidang –Z.

2.4. Transformasi Pada Bidang Paruh Bagian Atas.

Didefinisikan suatu transformasi atau pemetaan yang menghubungkan titik didalam bidang-xy kedalam bidang uv atau $W = u + iv$. Persamaan $u = u(x,y)$ dan $v = v(x,y)$ dinamakan persamaan transformasi. Dalam hal ini rotasi dari pemetaan bidang-Z ke bidang paruh-W diputar sejauh sudut θ.



Gambar 2.1. Bidang-Z dengan panjang pita tak terhingga dan lebar a



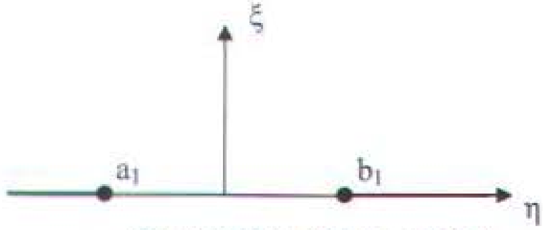
Gambar 2.2. Bidang paruh-W bagian atas

Dapat ditunjukkan bahwa (dari Gambar (2.1.) dan (2.2.)) pemetaan pada bidang paruh-W bagian atas dari bidang-bidang pita tak berhingga dengan lebar sama dengan titik-titik D, E, dan F terletak pada sumbu-x dan titik-titik A, B, dan C pada garis yang sejajar dengan sumbu-x berjarak y = a pada bidang-Z dengan menggunakan fungsi pemetaan :

$$W = e^{\frac{\pi}{a}z} \tag{2.25}$$

2.5. Masalah Riemann-Hilbert untuk Bidang paruh

Didefinisikan interval $\eta \in (-\infty, a_1) \cup (b_1, \infty)$ pada sumbu riel pada bidang paruh bagian atas yang ditulis dengan Γ_1 dan interval $\eta \in (-a_1, b_1)$ ditulis dengan Γ_2 (lihat gambar 2.3). Bagian atas bidang paruh didefinisikan sebagai S^+, yang dibatasi kurva sederhana tertutup dan mulus $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dalam bidang kompleks.



Gambar 2.3. Bidang paruh-t

Masalah batas Riemann-Hilbert adalah untuk mendapatkan rumus Ω, yaitu

$$\Omega(t) = \tau(t) + i\Theta(t) \tag{2.26}$$

lihat Muskheslisvilli (1953), yang analitik pada bagian atas bidang paruh-t yang kontinu sampai ke Γ dengan nilai batas yang memenuhi persamaan berikut :

$$\Re e\ [a(\eta) + i\, b(\eta)]\ \Omega^+(\eta) = a(\eta)\ \tau^+(\eta) - b(\eta)\ \Theta^+(\eta) = c(\eta) \tag{2.27}$$

dimana η adalah nilai t pada batas Γ dan $a(\eta)$, $b(\eta)$, $c(\eta)$, $\tau^+(\eta)$, dan $\Theta^+(\eta)$, dengan :

$$a^2(\eta) + b^2(\eta) \neq 0 \tag{2.28}$$

Masalah nilai batas campuran adalah suatu kasus untuk masalah Riemann-Hilbert dengan $a(\eta) = 0$, $b(\eta) = -1$, $c(\eta) = g(\eta)$ dimana $\eta \in \Gamma_2$ dan $g(\eta)$ adalah fungsi riel yang diketahui dan $a(\eta) = 1$, $b(\eta) = 0$, dan $c(\eta) = f(\eta)$ dimana $\eta \in \Gamma_1$, dan $f(\eta)$ adalah fungsi riel yang diketahui. Selanjutnya syarat batas untuk masalah Riemann-Hilbert pada bagian atas bidang paruh dinyatakan oleh :

$$\tau^+(\eta) = f(\eta)\text{, pada } \Gamma_1 \tag{2.29}$$

$$\Theta^+(\eta) = g(\eta)\text{, pada } \Gamma_2 \tag{2.30}$$

Selanjutnya, dianggap penyelesaian diatas hanya terbatas pada titik a_1 dan b_1 seperti yang diberikan oleh Muskheslisvilli (1953), jika $X(t)$ adalah penyelesaian homogen Ω seperti $c(\eta) = 0$ maka penyelesaian tak homogen Ω adalah :

$$\Omega(t) = \frac{X(t)}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{c(\eta)}{[a(\eta) + ib(\eta)]X^+(t)(\eta - t)} d\eta \tag{2.31}$$

Penyelesaian homogen $X(t)$ untuk t diambil pada bagian atas bidang paruh adalah :

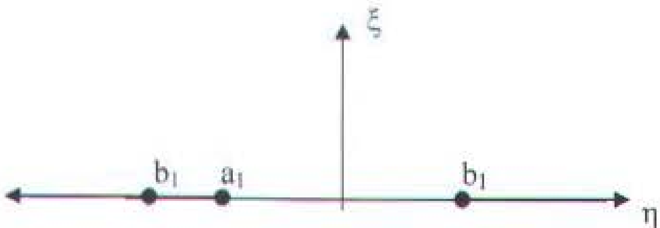
$$X(t) = \sqrt{(t - a_1)(t - b_1)} \tag{2.32}$$

dan saat t mendekati sumbu riel η, dari bagian atas bidang paruh nilai $X(t)$ pada sumbu riel adalah :

$$X^+(t) = \sqrt{(\eta - a_1)(\eta - b_1)}\text{, } -\infty < \eta < a_1 \tag{2.33}$$

$$X^+(t) = -i\sqrt{(\eta - a_1)(b_1 - \eta)}\text{, } a_1 < \eta < b_1 \tag{2.34}$$

$$X^+(t) = -\sqrt{(\eta - a_1)(b_1 - \eta)}\text{, } b_1 < \eta < \infty \tag{2.35}$$



Gambar 2.4. Bidang paruh-t

Dimana $X^{+}(t)$ adalah nilai X(t) pada saat t mendekati sumbu riel pada bagian atas bidang paruh-t. Selanjutnya, dengan mensubtitusikan persamaan (2.32), (2.33), (2.34), dan (2.35) ke persamaan (2.31) diperoleh persamaan :

$$\Omega(t) = \frac{X(t)}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{a_1} \frac{g(\eta)}{\sqrt{(\eta - a_1)(\eta - b_1)}[\eta - t]} d\eta + \right.$$

$$\left. \int_{a_1}^{b_1} \frac{f(\eta)}{\sqrt{(\eta - a_1)(b_1 - \eta)}[\eta - t]} d\eta - \int_{b_1}^{\infty} \frac{g(\eta)}{\sqrt{(\eta - a_1)(\eta - b_1)}[\eta - t]} d\eta \right]$$

(2.36)

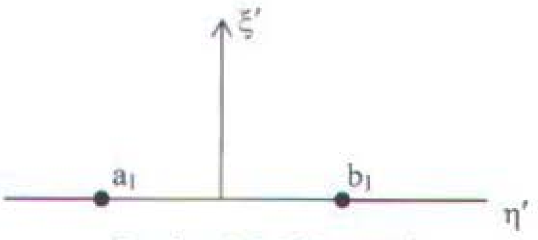
Dari persamaan (2.36) akan dicari penyelesaian dengan b_1 adalah tak terbatas (lihat gambar 2.4), yaitu masalah nilai batas :

$$\Re e\{\Omega(\eta)\} = \tau^{+}(\eta) = f(\eta)\text{ , untuk } a_1 < \eta \qquad (2.37)$$

$$\Im m\{\Omega(\eta)\} = \Theta^{+}(\eta) = g(\eta)\text{ , untuk } a_1 > \eta \qquad (2.38)$$

Dalam urutan mendapatkan penyelesaian masalah nilai batas campuran, seperti dinyatakan oleh syarat (2.37) dan (2.38), dengan mentransformasikan bidang-t ke bidang-t' oleh suatu fungsi pecahan, yaitu :

$$t' = \frac{t - a_1 - 1}{t - a_1 + 1} \qquad (2.39)$$



Gambar 2.5. Bidang-t'

Ini mentransformasikan bagian atas bidang paruh dari bidang-t ke bidang-t' dan titik a_1 dan b_1 (∞) pada sumbu riel dalam bidang-t ke -1(a_1) dan +1(b_1) pada sumbu riel dalam bidang-t', lihat gambar (2.5). Masalah nilai batas yang bersesuaian dinyatakan oleh syarat (2.29) dan (2.30). Selanjutnya menjadi masalah nilai batas dengan syarat (2.29) dan (2.30). Kemudian menerapkan persamaan (2.31) pada bagian atas bidang paruh dari bidang-t' menghasilkan :

$$\Omega(t') = \frac{X(t')}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-1}\frac{g(\eta')}{\sqrt{(\eta'+1)(\eta'-1)}[\eta'-t']}\,d\eta' + \right.$$

$$\left.\int_{-1}^{1}\frac{f(\eta')}{\sqrt{(\eta'+1)(1-\eta')}[\eta'-t']}\,d\eta' - \int_{-1}^{\infty}\frac{g(\eta')}{\sqrt{(\eta'-a_1)(\eta'-b_1)}[\eta'-t']}\,d\eta'\right]$$

(2.40)

Pada pensutitusian persamaan (2.39) kedalam (2.40)) penyelesaian masalah nilai batas campuran diberikan oleh persamaan (2.37) dan persamaan (2.38) ditransformasikan kedalam pernyataan berikut :

$$\Omega(t) = \frac{X(t)}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{a_1}\frac{g(\eta)}{\sqrt{a_1-\eta}[\eta-t]}\,d\eta + \int_{a_1}^{\infty}\frac{f(\eta)}{\sqrt{\eta-a_1}[\eta-t]}d\eta\right] \tag{2.41}$$

dimana penyelesaian homogen persamaan (2.31) untuk $c(\eta) = 0$ menggunakan rumus:

$$X(t) = \sqrt{a_1 - t}\ ,\ \eta < a_1 \tag{2.42}$$

Dan pada sumbu riel bidang-t nilai X(t) adalah :

$$X^{+}(\eta) = \sqrt{a_1 - \eta}\ ,\ \eta < a_1 \tag{2.43}$$

$$X^{+}(\eta) = -i\sqrt{\eta - a_1}\ ,\ \eta > a_1 \tag{2.44}$$

Jika bagian imajiner $g(\eta)$ pada $\Omega(t)$ diketahui pada seluruh sumbu riel dan dengan mengasumsikan bahwa $f(\eta) = C$, (C = konstanta). Maka persamaan (2.41) dapat ditulis :

$$\Omega(t) = \frac{X(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{a_1}\frac{g(\eta)}{\sqrt{a_1-\eta}[\eta-t]}\,d\eta + C \tag{2.45}$$

Dengan mengambil $a_1 \rightarrow \infty$, maka persamaan (2.40) dapat ditulis menjadi :

$$\Omega(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\eta)}{[\eta-t]}\,d\eta + C \tag{2.46}$$

persamaan (2.46) ini adalah rumus Schwartz (lihat Muskhelishvilli (1953)).

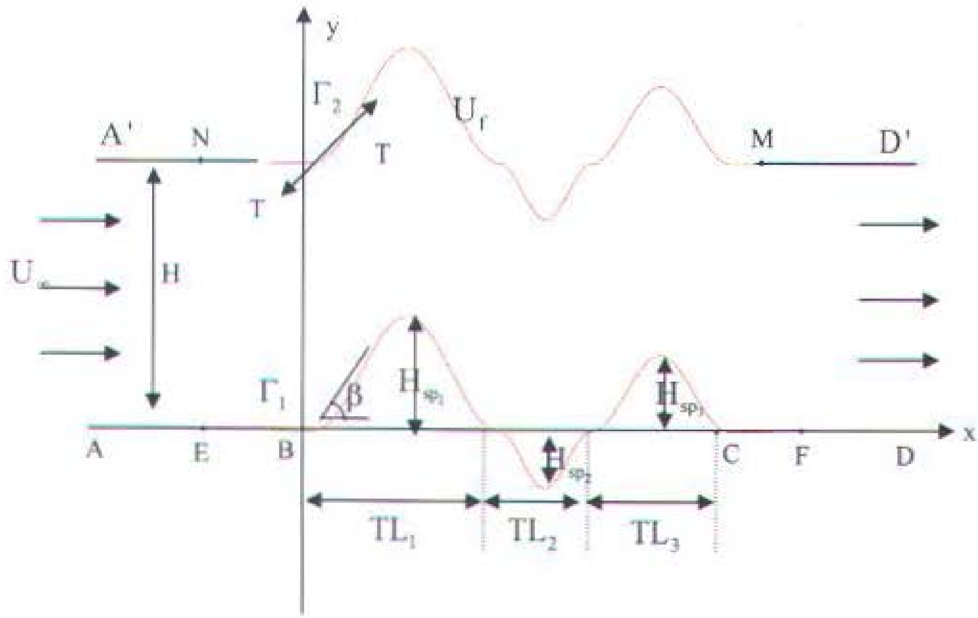
BAB III
PEMODELAN MATEMATIKA

BAB III

PERUMUSAN MATEMATIKA

3.1. Model Fisis Aliran Fluida di permukaan bebas pada suatu kanal.

Pada penelitian ini diselidiki pengaruh gravitasi dan tegangan permukaan , aliran fluida dimensi-dua, tunak, tak-kental, tak-mampu-mampat dan tak-berputar di atas penghalang dalam saluran. Pada ujung hulu dari penghalang, aliran seragam dengan laju U dan kedalaman fluida adalah H dan aliran horisontal pada arah sumbu X positif. Dengan penghalang dimulai pada $X = 0$ dan fungsi kurva yang diketahui $Y = f(X)$ hingga tinggi penghalang H_{sp} dan pada saat dasar permukaan saluran tetap horisontal. Pada penelitian ini aliran fluidanya ditunjukkan pada Gambar 3.1 :



Gambar 3.1. : Bidang fisis untuk aliran di permukaan bebas di atas penghalang dipengaruhi pengaruh gravitasi dan tegangan permukaan.

Dasar dari saluran AB dan CD horisontal, BC adalah suatu fungsi yang diberikan dan permukaan bebas lapisan atas adalah A'D'. Pada dasar saluran, fungsi aliran Ψ dipilih untuk $\Psi = 0$, dimana permukaan bebas A'D' diberikan $\Psi = Q = HU_\infty$.

3.2. Model Matematika dari aliran Fluida dipermukaan bebas dipengaruhi gravitasi dan tegangan permukaan.

Sekarang digunakan persamaan Bernoulli pada permukaan bebas A'D' (bidang fisis [gambar 3.1]) untuk permukaan bebas dinamik kondisi batas dan diperoleh :

$$\frac{U_f^2}{2} + gY_f - \frac{\frac{T}{\rho}}{dS/d\theta} = gH + \frac{U_\infty^2}{2} \tag{3.1}$$

atau

$$\frac{U_f^2}{2} + gY_f - \frac{T}{\rho}\left(\frac{d\theta}{dS}\right) = gH + \frac{U_\infty^2}{2} \tag{3.2}$$

dimana :

Y_f = tinggi permukaan bebas

U_f = kecepatan fluida pada permukaan

g = percepatan gravitasi

U_∞ = kecepatan fluida di ujung hulu penghalang

T = tegangan permukaan

ds = perluasan panjang pancaran

$d\theta$ = perubahan sudut yang dibentuk oleh permukaan bebas dengan sumbu-x horisontal.

Untuk memudahkan dalam melakukan analisis, persamaan (3.2) diubah ke dalam bentuk persamaan tanpa dimensi yaitu sebagai berikut :

$$u_f = \sqrt{1 + \frac{2(1-y_f)}{Fr^2} + 2We\left(\frac{d\theta}{ds}\right)} \tag{3.3}$$

dengan :

$u_f = \dfrac{U_f}{U_\infty}$ adalah kecepatan fluida tak berdimensi di permukaan bebas, (3.4)

$y_f = \dfrac{Y_f}{H}$ adalah tinggi aliran fluida tak berdimensi di permukaan bebas, (3.5)

$Fr = \dfrac{U_\infty}{\sqrt{gH}}$ adalah bilangan Froude di bagian hulu, (3.6)

$We = \dfrac{\gamma}{Fr^2}$ adalah bilangan Weber, (3.7)

$\gamma = \dfrac{T}{(g\rho H^2)}$ adalah tegangan permukaan tak berdimensi, (3.8)

$s = \dfrac{S}{H}$ adalah panjang kurva tak berdimensi baik di permukaan bebas maupun di dasar kanal (3.9)

Pada bidang fisis (gambar 3.1) ditempatkan sistem koordinat $Z = x + iy$ dengan panjang AB pada sumbu-x, dimana sumbu-y ukuran vertikal naik dan pusat sumbu sistem koordinat adalah titik dimana penghalang pada dasar saluran pertama menyimpang dari sumbu horizontal. Asumsi di atas mengikuti teori sebelumnya dari kecepatan potensial Φ dan fungsi aliran Ψ sehingga kecepatan potensial kompleks $\kappa = \Phi + i\Psi$ analisisnya dalam daerah yang ditempati oleh fluida. Selanjutnya untuk penyelesaian masalah aliran fluida di permukaan bebas digunakan prinsip dasar dari fungsi potential dan fungsi aliran Maka dapat didefinisikan $\kappa = f(Z)$, sehingga fungsi potential dan fungsi alirannya sehubungan dengan komponen u dan v dibidang-W adalah dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{d\kappa}{dZ} = f'(Z) \tag{3.10}$$

sehingga

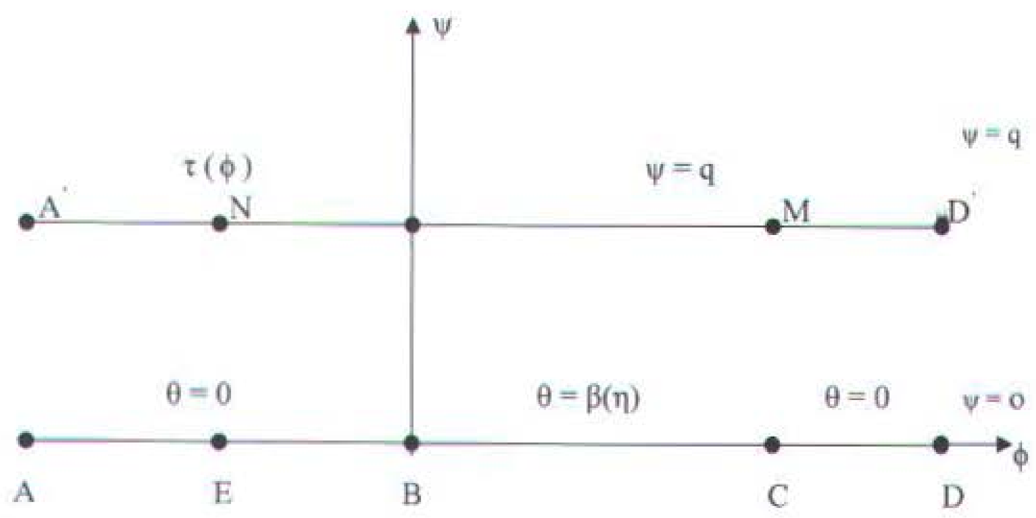
$$\frac{d\kappa}{dZ} = |U|e^{-i\theta} \tag{3.11}$$

dengan $|U|$ adalah kecepatan fluida pada beberapa titik dalam daerah aliran fluida, dan θ mewakili daerah aliran pada titik ini yaitu sudut yang dibuat antara permukaan bebas dengan sumbu-X positif. Selanjutnya persamaan (3.11) diaplikasikan pada aliran fluida di permukaan bebas dan pada setiap sisi kanan dan sisi kiri dari dibagi dengan U_∞ dan kemudian dengan sifat elementer persamaan tersebut dilogaritmakan, diperoleh :

$$\Omega = \ln\left(\frac{1}{U_\infty}\frac{d\kappa}{dZ}\right) = \tau - i\theta \tag{3.12}$$

dengan $\tau = \ln\left(\frac{U_f}{U_\infty}\right)$ dan $\tau, \Omega, \frac{d\kappa}{dZ}$ adalah fungsi analitik pada bidang-ω (Gambar 3.2). Sudut dasar dari saluran yang dibuat dengan sumbu-X positif adalah β ditunjukkan pada gambar 3.1, adalah $\beta = \text{arc}\ \beta = \arctan(f'(x))$.

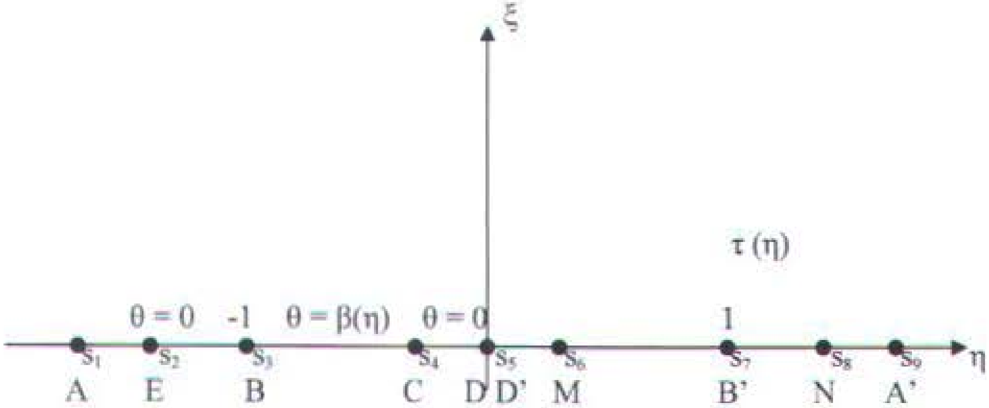
Pada bagian ini akan dipetakan bidang fisis aliran fluida dipermukaan bebas pada bidang-ω (gambar 3.2) dengan fungsi pemetaan kompleksnya $\omega(\phi, \psi)$. Fungsi aliran dipermukaan bebas A'D' pada bidang-Z dipetakan pada garis horisontal A'D' pada bidang-ω dengan fungsi alirannya $\psi = q$, sedangkan untuk didasar saluran fungsi alirannya $\psi = 0$.



Gambar 3.2. Pemetaan bidang-Z ke bidang-ω

Selanjutnya, ditransformasikan bidang tak-terbatas yang ada pada dalam bidang-ω ke bagian atas bidang paruh-t (lihat gambar 3.3), dimana $t = \eta + i\xi$. Dengan menggunakan transformasi bidang paruh bagian atas diperoleh fungsi pemetaannya :

$$t = -e^{-\frac{\pi}{q}\omega} \tag{3.13}$$



Gambar 3.3. Pemetaan bidang-ω ke bidang paruh-t.

Masalahnya sekarang adalah bagaimana mengurangi tingkat kesulitan yang ada pada bidang-ω ke permasalahan satu-dimensi dalam bidang-t (Gambar 3.3). Selanjutnya diaplikasikan masalah Riemann-Hilbert dalam bidang-t untuk mendapatkan masalah nilai batas campuran Riemann-Hilbert, dimana keadaan batas pada sumbu riel η dari bidang-t diberikan oleh :

- titik AB pada sumbu riel $\eta < -1$, $\theta = 0$ merupakan bagian $\Im m[\Omega(\eta)] = 0$ (3.14)
- titik BC pada interval ($-1 < \eta < t_c$), $\theta = \beta$ merupakan bagian $\Im m[\Omega(\eta)] = -\beta$ (3.15)
- titik CD pada interval ($t_c < \eta < 0$), merupakan bagian $\Im m[\Omega(\eta)] = 0$ (3.16)
- titik D'A' pada interval ($0 < \eta < \infty$), merupakan bagian $\Re e[\Omega(\eta)] = \tau(\eta)$ (3.17)

Menurut Muskheslishvilli (1953), penyelesaian dari Ω dapat diperoleh melalui penyelesaian umum Riemann –Hilbert, yaitu dalam bentuk :

$$\Omega(t) = \frac{X(t)}{\pi}\left[\int_{-1}^{t_c} \frac{-\beta(\eta)}{\sqrt{-\eta}(\eta - t)} d\eta + \int_{0}^{t_\infty} \frac{\tau(\eta)}{\sqrt{\eta}(\eta - t)} d\eta\right] \tag{3.18}$$

dimana $X(t) = \sqrt{-t}$ adalah penyelesaian homogen dari $\Omega(t)$ pada saat bagian riel $\Re e(\Omega)$, dan bagian imajiner $\Im m(\Omega)$ sama dengan nol pada sumbu riel η. Pada saat t mendekati sumbu riel η dari bidang paruh bagian atas, nilai dari $X^{+}(t)$ pada sumbu riel η disajikan dengan :

$$X^{+}(\eta) = \sqrt{-\eta}\,,\ \eta < 0 \tag{3.19}$$

$$X^{+}(\eta) = -i\sqrt{\eta}\,,\ \eta > 0 \tag{3.20}$$

Dengan menggunakan nilai utama Cauchy maka bagian riel dan imajiner $\Omega(\eta_0)$ masing-masing dapat dinyatakan dengan $\tau(\eta_0)$ dan $\theta(\eta_0)$. Bagian riel $\tau(\eta_0)$ adalah kecepatan fluida pada dasar saluran AD dan dinyatakan dengan :

$$\tau(\eta_0) = \frac{\sqrt{-\eta_0}}{\pi}\left[\int_{-1}^{c} \frac{-\beta(\eta)}{\sqrt{-\eta}(\eta-\eta_0)}d\eta + \int_{0}^{\infty} \frac{\tau(\eta)}{\sqrt{\eta}(\eta-\eta_0)}d\eta\right],\ \eta_0 < 0 \tag{3.21}$$

sedangkan bagian imajiner $\theta(\eta_0)$ adalah sudut yang dibentuk oleh permukaan bebas $A'D'$ dengan garis horizontal dan diberikan oleh :

$$\theta(\eta_0) = \frac{\sqrt{\eta_0}}{\pi}\left[\int_{-1}^{c} \frac{-\beta(\eta)}{\sqrt{-\eta}(\eta-\eta_0)}d\eta + \int_{0}^{\infty} \frac{\tau(\eta)}{\sqrt{\eta}(\eta-\eta_0)}d\eta\right],\ \eta_0 > 0 \tag{3.22}$$

Selanjutnya, ditunjukkan jarak tanpa-dimensi dari dasar permukaan dan penampang permukaan bebas. Karena itu digunakan syarat batas kinematik dan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$d\eta = \frac{d\eta}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}ds \text{ pada } \Gamma_1 \text{ dan } \Gamma_2 \tag{3.23}$$

yang mana Γ_1 adalah dasar saluran, termasuk penghalangnya, AD, sedangkan Γ_2 adalah penampang permukaan bebas $A'D'$. Kemudian persamaan (3.23) diselesaikan pada batas Γ_1 dan Γ_2, diperoleh :

$$d\eta = \frac{\pi}{q}e^{-\frac{\pi}{q}\phi(s)}u(s)\,ds \text{ , pada } \Gamma_1 \tag{3.24}$$

$$d\eta = -\frac{\pi}{q}e^{-\frac{\pi}{q}\phi(s)}u(s)\,ds \text{ , pada } \Gamma_2 \tag{3.25}$$

Dari syarat batas pada dasar perairan, didapatkan kecepatan aliran fluida ke arah horisontal yang diberikan oleh persamaan :

$$\frac{d(\phi(s))}{ds} = u(s) \tag{3.26}$$

Sehingga kalau Persamaan (3.26) ini diselesaikan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\phi(s) = \phi_E + \int_0^s u(l)\, dl \tag{3.27}$$

dengan nilai fungsi potensial pada titik E dan N sama dengan ϕ_E.

Jika diketahui dari fungsi trigonometri bahwa :

$$\frac{dx}{ds} = \mathrm{Cos}\,\theta \tag{3.28}$$

$$\frac{dy}{ds} = \mathrm{Sin}\,\theta \tag{3.29}$$

Oleh karena itu, koordinat dari permukaan bebas dapat dinyatakan dengan :

$$x(s) = x_N + \int_0^s \cos\theta(l)\,dl \tag{3.30}$$

$$y(s) = y_N + \int_0^s \sin\theta(l)\,dl \tag{3.31}$$

dengan x_N dan y_N adalah koordinat dari titik N.

Persamaan (3.21) dan (3.22) dalam bidang fisis dapat ditulis kembali menjadi :

$$\begin{aligned}\tau_b(s) &= \ln\left(\frac{U_b(s)}{U_\infty}\right)\\ &= \frac{\sqrt{-\eta_b(s)}}{q}\int_{\Gamma_1}\frac{-\beta(l)}{\sqrt{-\eta_b(l)}\left[\eta_b(l)-\eta_b(s)\right]}e^{-\frac{\pi}{q}\phi_b(l)}u_b(l)\,dl\\ &\quad-\int_{\Gamma_2}\frac{\tau_f(l)}{\sqrt{\eta_f(l)}\left[\eta_f(l)-\eta_b(s)\right]}e^{-\frac{\pi}{q}\phi_b(l)}u_f(l)\,dl\ ,\ s\in\Gamma_1\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\theta(s) = \frac{\sqrt{\eta_f(s)}}{q}\left[\int_{\Gamma_1}\frac{-\beta(l)}{\sqrt{-\eta_b(l)}[\eta_b(l)-\eta_f(s)]}e^{-\frac{\pi}{q}\phi_b(l)}u_b(l)dl\right.$$

$$\left.-\int_{\Gamma_2}\frac{\tau_f(l)}{\sqrt{\eta_f(l)}[\eta_f(l)-\eta_f(s)]}e^{-\frac{\pi}{q}\phi_f(l)}u_f(l)dl\right],\ s\in\Gamma_2 \tag{3.33}$$

dengan

$$\eta_b(l) = -e^{-\frac{\pi}{q}\phi_b(l)} \text{ pada } \Gamma_1 \tag{3.34}$$

$$\eta_f(l) = e^{-\frac{\pi}{q}\phi_f(l)} \text{ pada } \Gamma_2 \tag{3.35}$$

Dalam Persamaan (3.32) dan (3.33), $\tau_f(i)$ dihitung dengan menggunakan Persamaan (3.3), yaitu:

$$\tau_f(l) = \ln\left[\frac{U_f(l)}{U_\infty}\right] = \ln\left[\sqrt{1+\frac{2(1-y_f)}{Fr^2}+2We\left(\frac{d\theta}{ds}\right)}\right] \tag{3.36}$$

3.3. Prosedur Numerik

Dalam menyelesaikan persamaan (3.27) sampai dengan persamaan (3.33) pada pemodelan matematika digunakan prosedur numerik yang sama seperti telah dilakukan oleh Widodo (1998), dimana langkah-langkah iterasi numerik yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Membagi jaringan titik-titik pada dasar saluran Γ_1 , dan mengasumsikan suatu inisial penampang permukaan bebas Γ_2 .
2. Mengasumsikan inisial laju fluida, yaitu :
   - $u_b^n(s)$ untuk U_∞ pada dasar saluran AB
   - $u_f^n(s)$ untuk U_∞ pada permukaan bebas A'B'

   dengan keadaan awal n = 0

3. Laju fluida $u_f^n(s)$ pada permukaan bebas Γ_2 dihitung dengan menggunakan persamaan :

$$\tau_f(l) = \ln\left[\frac{U_f(l)}{U_\infty}\right] = \ln\left[\sqrt{1 + \frac{2(1-y_f)}{Fr^2} + 2We\left(\frac{d\theta}{ds}\right)}\right] \tag{3.37}$$

dimana :

$\tau_f(l)$ = logaritma daripada kecepatan fluida pada permukaan bebas yang tak berdimensi.

$U_f(l)$ = kecepatan fluida pada permukaan bebas.

U_∞ = kecepatan awal daripada fluida

y_f = tinggi permukaan fluida terhadap dasar saluran

Fr = Bilangan Froude

We = Bilangan Weber

ds = perluasan panjang pancaran

$d\theta$ = perubahan sudut yang dibentuk oleh permukaan bebas dengan sumbu-x horisontal.

4. Kemudian kecepatan potential $\phi^n(s)$ pada Γ_1 dan Γ_2 dihitung dengan menggunakan persamaan :

$$\phi(s) = \phi_E + \int_0^s u(l)\, dl \tag{3.38}$$

dimana :

$\phi(s)$ = fungsi potensial pada permukaan bebas dan dasar saluran

ϕ_E = fungsi potensial awal pada permukaan bebas dan dasar saluran

$u(l)$ = kecepatan fluida pada permukaan bebas dan dasar saluran.

5. Mensubtitusikan nilai-nilai β, $u_f^n(s)$, dan $\phi^n(s)$ ke dalam ruas kanan persamaan (3.32) dan (3.33) diperoleh tafsiran baru, yaitu :

- $u_b^{n+1}(s)$ untuk kecepatan fluida pada dasar saluran
- $\phi^{n+1}(s)$ untuk sudut yang dibentuk oleh permukaan bebas dengan sumbu-x horisontal.

6. Menggunakan persamaan (3.30) dan (3.31) untuk mendapatkan tafsiran baru dari pada profil permukaan bebas :

$$x(s) = x_N + \int_0^s \cos\theta(l)dl \tag{3.39}$$

dan

$$y(s) = y_N + \int_0^s \sin\theta(l)dl \tag{3.40}$$

dimana :

(x(s), y(s)) = koordinat dari permukaan bebas

x_N dan y_N = koordinat dari titik N.

$\theta(l)$ = sudut permukaan bebas

7. Mengulangi langkah (3) sampai (6) sedemikian hingga kecepatan fluida $u^n(s)$ dan potensial kecepatan $\phi^n(s)$ konvergen pada batas-batas yang telah ditentukan.

3.4. Prosedur Simulasi pada komputer dari profil aliran fluida di permukaan bebas diatas penghalang pada suatu kanal.

Dalam mengambarkan profil aliran fluida di permukaan bebas diatas penghalang dalam suatu kanal yang dipengaruhi gravitasi dan tegangan permukaan perlu dibuat titik-titik pias pada permukaan dasar dan permukaan bebas dengan cara sama, yaitu panjang setiap elemen pada sumbu-x pada kedua batas adalah sama. Penempatan titik-titik pias dibagi dalam lima bagian (lihat gambar 3.4) yaitu daerah aliran hulu yang seragam, daerah aliran hulu tepat pada ujung penghalang, daerah aliran hulu diatas penghalang, dan daerah aliran hilir yang seragam. Daerah-daerah tersebut ditandai dengan huruf A, E, B, C, F, dan D pada dasar saluran sedemikian hingga masing-masing A dan D pada aliran hulu dan aliran hilir yang jauh tak berhingga dari penghalang. Sedangkan pada permukaan bebas A' adalah posisi aliran hulu yang tak berhingga dan D' adalah posisi aliran hilir yang tak berhingga dari penghalang.

Ditentukan sebuah titik misalnya E pada dasar saluran yang mana jaraknya berhingga dari titik B (dinyatakan B sebagai titik acuan) dan ambil titik N pada permukaan bebas diatas titik E. Aliran hilir yang jauh pada permukaan bebas diambil titik M diatas titik F. Untuk daerah antara E dan F integral yang terbentuk dihitung dengan menggunakan teknik numerik yang telah dijelaskan pada tugas akhir M. Naki(2004). Aliran hulu yang jauh dan dipilih sebagai posisi awal dari aliran di permukaan bebas dan posisi awal dari dasar saluran, masing-masing mempunyai koordinat (x_N , 1) dan (x_E , 0) dimana :

$$x_N = x_E = x_B - [(n_2 - n_1)\Delta x] \qquad (3.41)$$

$$\text{untuk } x_B = 0$$

Didefinisikan koordinat (x_f , y_f) pada aliran di permukaan bebas dan (x_b , y_b) pada dasar saluran, dimana untuk pendiskritisisasian interval dan laju fluida pada dasar saluran dan permukaan bebas masing-masing adalah ds_b , ds_f , u_b , u_f . Pada iterasi yang pertama laju fluida tak berdimensi sepanjang permukaan bebas (u_f) = 1, dan untuk laju fluida tak berdimensi sepanjang dasar saluran (u_b) = 1.

Pendiskritisisasian interval pada permukaan bebas ds_f sama dengan ds_b (diskritisasi interval pada dasar saluran), yaitu :

$$ds_{bi} = \sqrt{(x_{bi} - x_{bi-1})^2 + (y_{bi} - y_{bi-1})^2} \text{ , i = 1,2,3,...,n} \qquad (3.42)$$

$$ds_{fi} = \sqrt{(x_{fi} - x_{fi-1})^2 + (y_{fi} - y_{fi-1})^2} \text{ , i = 1,2,3,...,n} \quad (3.43)$$

Untuk posisi awal iterasi pertama, didefinisikan potential kecepatan pada dasar saluran dan permukaan bebas masing-masing ϕ_{fE} dan ϕ_{bN}. Selanjutnya potential kecepatan antara i-1 dan i pada permukaan bebas dan dasar saluran dihitung dengan menggunakan persamaan (3.27) dan aturan trapesium yaitu :

- potential kecepatan pada permukaan bebas yang dinyatakan dengan :

$$\phi_{fi} = \phi_{fi-1} + \frac{1}{2}(u_{fi} + u_{fi-1})ds_{fi} \text{ , i = 1,2,3,...,n} \quad (3.44)$$

- potential kecepatan pada dasar saluran yang dinyatakan dengan :

$$\phi_{bi} = \phi_{bi-1} + \frac{1}{2}(u_{bi} + u_{bi-1})ds_{bi} \text{ , i = 1,2,3,...,n} \quad (3.45)$$

Kemudian t_f dan t_b masing-masing adalah posisi permukaan bebas dan dasar saluran dalam bidang-t. Jadi dari persamaan (3.34) dan (3.35) didapatkan :

$$t_{fi} = \exp\left(-\frac{\pi}{q}\phi_{fi}\right) \text{ , i = 1,2,3,...,n} \quad (3.46)$$

$$t_{bi} = -\exp\left(-\frac{\pi}{q}\phi_{bi}\right) \text{ , i = 1,2,3,...,n} \quad (3.47)$$

dimana : $\pi = 2{,}0$ arc sin (1,0) dan $q = 1$.

Didefinisikan β sudut antara dasar saluran dengan garis horisontal, sehingga untuk setiap titik pias pada dasar saluran merupakan β_i .

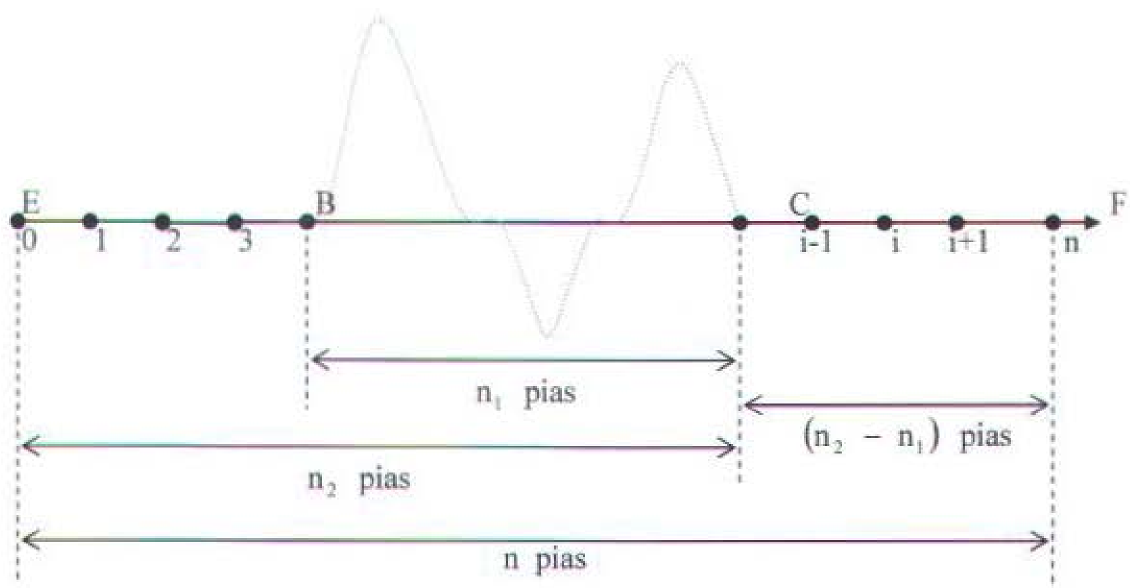
3.4.1. Konversi satuan non dimensi dalam Pias

Bilangan Pias merupakan bilangan non dimensi yang digunakan sebagai indeks pada proses iterasi setiap perhitungan integral batas. Pada penyelesaian aliran fluida ini dibuat titik pias yang seragam antara titik E sampai F dan dinyatakan ukurannya dengan Δx , sehingga :

$$\Delta x = \frac{x_F - x_E}{n} \tag{3.48}$$

dimana : n = banyaknya pias

Antara pias ke-i dan pias ke-(i-1) merupakan lebar pias, dimana lebar pias akan menentukan ketepatan perhitungan yaitu semakin kecil lebar pias maka semakin tepat hasil perhitungan. Lebar pias dapat dihitung dari panjang penghalang dibagi dengan banyaknya sebaran pias pada daerah tersebut. Untuk memudahkan dalam menggunakan bahasa pemrograman, maka pias pada titik E adalah 0, pias pada titik B adalah N1 = (n_2-n_1), pias pada titik C adalah N2 = n_2 dan pias pada titik F adalah N = n. Jika pada daerah antara B dan C diambil sebaran titik pias sebanyak n_1 = 600, pada daerah antara E dan C diambil sebaran pias sebanyak n_2 = 720, sehingga pada daerah titik E dan titik B diambil sebaran pias sebanyak (n_2-n_1) = 120, demikian juga pada daerah antara titik C dan F yang jauh dari penghalang diambil sebaran pias yang sama yaitu sebanyak (n_2-n_1) = 120, sehingga banyaknya sebaran pias seluruhnya adalah n = 840. Dalam hal ini jika menggunakan bahasa pemrograman maka didapatkan N_1 = 600, N_2 = 720, N = 840.



Gambar 3.4. Diagram titik-titik pias pada dasar saluran

Gambar 3.4. menunjukkan skema titik-titik pias pada dasar saluran untuk tujuan simulasi pada program komputer yaitu membagi daerah antara titik B dan C dalam n_1 pias dan daerah antara E dan C dalam n_2 pias. Jadi dalam daerah antara E – B dan C - F terdapat $(n_2 - n_1)$ pias.

BAB IV
PEMBAHASAN

BAB IV

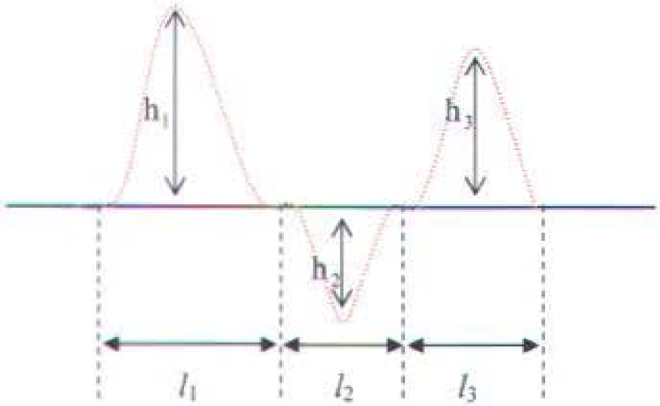
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas hasil simulasi dari program komputer dimana untuk variasi dari pengaruh tegangan permukaan ditunjukkan dengan bilangan Weber dan terdapatnya bilangan permukaan yang mungkin menimbulkan gelombang kapiler. Hasil numerik dibentuk dengan bermacam-macam bentuk geometri yang berbeda dari dasar saluran bila bilangan Froude aliran hulu lebih dari satu. Bentuk penghalang yang akan dibahas pada penelitian ini diasumsikan pada bentuk kurva melengkung bertingkat turun yang didefinisikan oleh persamaan berikut :

$$y = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } x < 0 \\ \dfrac{h_1}{2}\left[1-\cos\left(2\pi\dfrac{x}{l_1}\right)\right] & \text{, untuk } 0 \le x \le l_1 \\ -\dfrac{h_2}{2}\left[1-\cos\left(2\pi\dfrac{x-l_1}{l_2}\right)\right] & \text{, untuk } l_1 < x \le l_1 + l_2 \\ \dfrac{h_2}{2}\left[1-\cos\left(2\pi\dfrac{x-l_1-l_2}{l_3}\right)\right] & \text{, untuk } l_1 + l_2 < x \le l_1 + l_2 + l_3 \\ 0 & \text{, untuk } x > l_1 + l_2 + l_3 \end{cases} \tag{4.1}$$

Dimana h_1, h_2, h_3 adalah tinggi tak berdimensi penghalang pertama, kedua, ketiga dan tl $= l_1 + l_2 + l_3$ adalah panjang tak berdimensi penghalang pertama, kedua, dan ketiga (lihat gambar 4.1.).

Bentuk penghalang kurva bertingkat turun dengan $h_1 > h_2 > h_3$



Gambar 4.1. Penghalang kurva bertingkat turun

4.1. Hubungan antara tinggi permukaan bebas dan Bilangan Froude Hulu untuk aliran fluida pada hilir dimana tinggi penghalang diberikan.

Dalam bagian ini digambarkan secara matematis nilai analisis dari aliran fluida permukaan bebas ujung hilir pada saat pengaruh gravitasi bumi dan tegangan permukaan diberikan. Dari persamaan Bernoulli (persamaan (3.2)) telah diketahui batas permukaan bebas dinamik berikut :

$$\frac{U_f}{U_\infty} = u_f = \sqrt{1 + \frac{2(1-y_f)}{Fr^2} + 2We\left(\frac{d\theta}{ds}\right)} \tag{4.2}$$

Dan juga dalam persamaan kontinuitas diperoleh hubungan :

$$\frac{U_f}{U_\infty} = \frac{1}{y_f - h} \tag{4.3}$$

subtitusikan persamaan (3.114) kedalam persamaan (3.113) sehingga menjadi :

$$\frac{1}{y_f - h} = u_f = \sqrt{1 + \frac{2(1-y_f)}{Fr^2} + 2We\left(\frac{d\theta}{ds}\right)} \tag{4.4}$$

dan dapat disusun sebagi berikut :

$$\frac{Fr^2}{(y_f - h)^2} = Fr^2 + 2(1 - y_f) + 2\ We\ Fr^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right) \tag{4.5}$$

Selanjutnya aliran fluida dipertimbangkan hanya pada ujung hilir, yaitu pada saat $X \rightarrow \infty$, kemudian sudut permukaan bebas dengan sumbu X positif adalah nol dan saat itu $\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = 0$. Persamaan (3.116) dapat disederhanakan menjadi :

$$\frac{Fr^2}{(y_f - h)^2} = Fr^2 + 2(1 - y_f) \tag{4.6}$$

atau

$$Fr^2 = (y_f - h)^2 \left[Fr^2 + 2(1 - y_f)\right] \tag{4.7}$$

dapat dilihat pula bahwa untuk diberikan tinggi penghalang tanpa dimensi h dan bilangan froude hulu (Fr) kemudian tinggi dari permukaan bebas ujung hilir penghalang dapat ditentukan dengan penyelesaian persamaan y_f pangkat tiga sebagai berikut :

$$(y_f - h)^3 + \frac{Fr^2}{2} - \frac{1}{2}(y_f - h)^2 Fr^2 = 0 \tag{4.8}$$

misal $P = (y_f - h)$, maka persamaan (4.8) dapat ditulis :

$$P^3 + \frac{Fr^2}{2} - \frac{1}{2}P^2 Fr^2 = 0 \tag{4.9}$$

Sebagai contoh untuk bilangan Froude hulu = 4.0 pada saat diberikan tinggi penghalang non dimensi, misal h = 0.5. Maka dapat dicari akar-akar dari persamaan (4.9) yaitu :

$$P_1 = 7.8709, \quad P_2 = 1.0748, \quad P_3 = -0.9457$$

Maka dari ketiga akar-akar diatas, diambil akar yang memenuhi persamaan (4.9) yaitu :

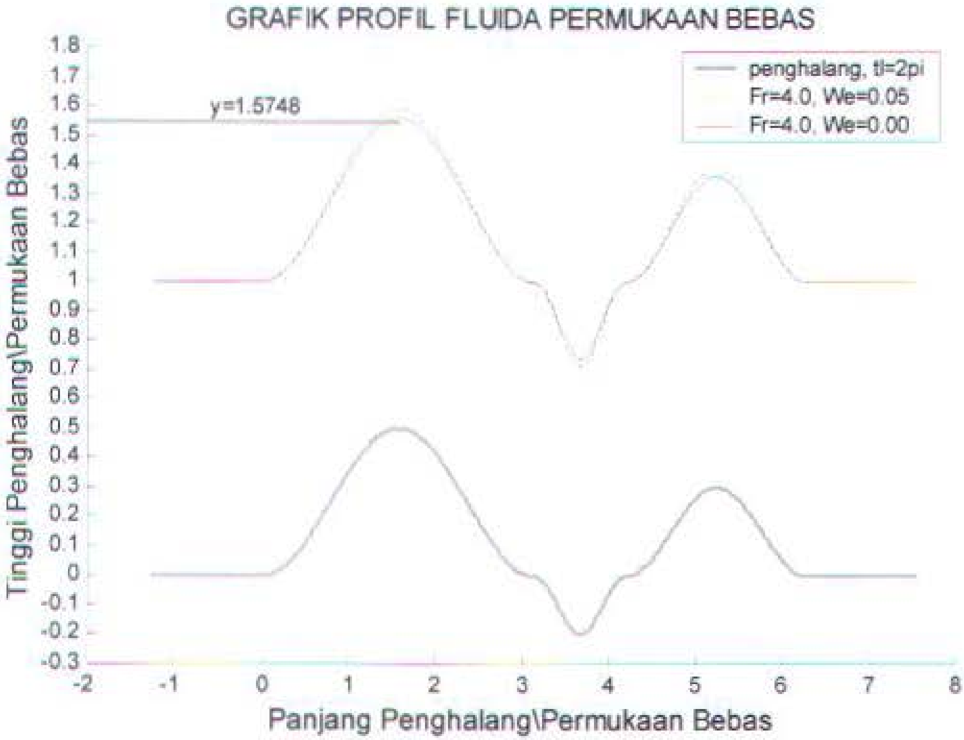
$$P = P_2 = 1.0748$$

Sehingga diperoleh tinggi permukaan bebas untuk Fr = 4.0, h = 0.5 adalah $y_f = 1{,}5748$.

Demikian juga untuk penggunaan bilangan Froude hulu yang lain akan dapat dicari penyelesaian secara analitik dari tinggi permukaan bebas disaat diberikan tinggi penghalang non dimensi.

4.2. Profil permukaan bebas dengan Fr = 4.0 dan We = 0.05, We = 0.00

Implementasi diawali pada saat fungsi bentuk penghalang didefinisikan oleh persamaan (4.1) dan tinggi penghalang tanpa dimensi h1=0.5, h2=0.2, h3=0.3, dengan variasi untuk bilangan Froude hulu Fr = 4.0, We = 0.05 dan tanpa tegangan permukaan We= 0.0. panjang penghalang tl = 2π. Hasilnya dapat dilihat pada gambar 4.2.

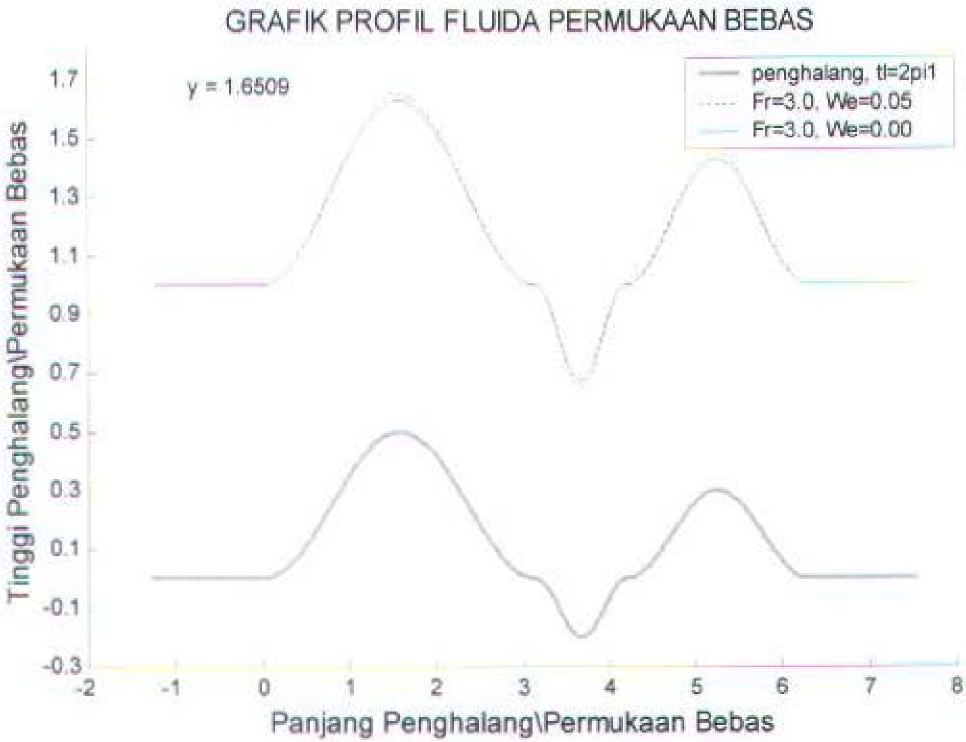


Gambar 4.2. Profil permukaan bebas dengan bilangan Fr=4.0, dengan variasi bilangan We=0.05, We=0.00.

Gambar 4.2 menunjukkan perbedaan dari profil permukaan bebas pada saat We=0.05 dan tanpa tegangan permukaan We=0.0, untuk bilangan Froude hulu Fr= 4.0. Bentuk dari penghalang diberikan oleh persamaan 4.1., tinggi penghalang tanpa dimensi h1=0.5, h2=0.2, h3=0.3, dan panjang penghalang tanpa dimensi tl=2π. Dapat dijelaskan bahwa semakin besar tegangan permukaan yang diberikan, maka tinggi puncak permukaan bebas semakin bertambah. Dimana untuk bilangan We=0.05 puncak permukaan bebas lebih tinggi daripada tanpa tegangan permukaan. Gambar diatas menjelaskan bahwa penyelesaian analitik dari persamaan (4.9) memenuhi persamaan untuk bilangan Froude hulu = 4.0 dengan tinggi permukaan bebas y_f = 1.5748.

4.3. Profil permukaan bebas dengan Fr = 3.0 dan We = 0.05, We = 0.00

Kemudian implementasi yang kedua akan dianalisa pengaruh pengambilan bilangan Weber We=0.05, We=0.00, dan tanpa tegangan permukaan We=0.0, untuk bilangan Froude hulu Fr = 3.0. Pada saat bentuk saluran didefinisikan oleh persamaan (4.1) dan tinggi penghalang tanpa dimensi h1=0.5, h2=0.2, h3=0.3, yang hasilnya seperti pada gambar 4.3 dibawah ini.



Gambar 4.3. Profil permukaan bebas dengan bilangan Fr=3.0, dengan variasi bilangan We=0.05, We=0.00.

Gambar 4.3 menunjukkan perbandingan dari profil permukaan bebas pada saat tegangan permukaan We=0.05, dan tanpa tegangan permukaan We=0.0 diatas penghalang dengan panjang tanpa dimensi tl = 2π untuk bilangan Froude hulu Fr = 3.0, fungsi dari penghalang pada persamaan 4.1 dan tinggi penghalang tanpa dimensi h1=0.5, h2=0.2, h3=0.3. Dapat dijelaskan bahwa tegangan permukaan tidak berpengaruh pada permukaan bebas ujung hulu tetapi tegangan permukaan berpengaruh pada daerah belokan daripada aliran fluida tersebut. Gambar diatas menjelaskan bahwa penyelesaian analitik dari persamaan (4.9) memenuhi persamaan untuk bilangan Froude hulu = 3.0 dengan tinggi permukaan bebas $y_f = 1.6509$.

4.4. Profil permukaan bebas dengan We = 0.00 dengan variasi Fr = 3.0 dan Fr = 4.0.

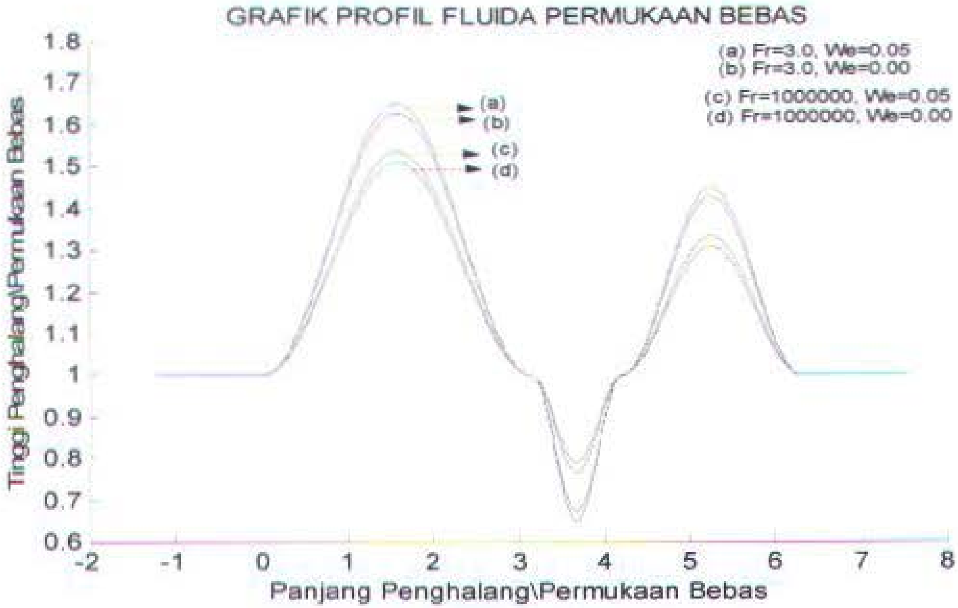
Selanjutnya, implementasi yang ketiga akan dianalisis variasi penggunaan dari bilangan Froude hulu Fr = 4.0 dan Fr = 3.0 dengan tanpa tegangan permukaan We=0.0, pada saat fungsi penghalang didefinisikan oleh persamaan (4.1) dan tinggi penghalang tanpa dimensi h1=0.5, h2=0.2, h3=0.3, panjang penghalang tl = 2π. Dimana hasilnya dapat dilihat pada gambar 4.4.

Gambar 4.4. Profil permukaan bebas dengan variasi bilangan Fr=3.0 dan Fr = 4.0, dengan bilangan We=0.00.

Dari hasil plot gambar 4.4 dapat dijelaskan bahwa pada saat dimasukkan variasi bilangan Fr=3.0 dan Fr=4.0, untuk tanpa tegangan permukaan We=0.00. Pada saat diberikan bilangan Froude hulu dari Fr = 4.0 ke Fr = 3.0 tinggi permukaan bebas bertambah tinggi.

4.5. Profil permukaan bebas dengan We = 0.00 dan We = 0.05 dengan variasi Fr = 3.0 dan Fr = 10^6.

Untuk implementasi yang keempat akan dianalisis variasi penggunaan dari bilangan Froude hulu Fr = 3.0 dan Fr = 10^6 , dengan tegangan permukaan We = 0.00 dan We = 0.05. Pada saat fungsi penghalang didefinisikan oleh persamaan (4.1), tinggi penghalang tanpa dimensi h1=0.5, h2=0.2, h3=0.3, dengan variasi penggunaan panjang penghalang tl = 2π.



Gambar 4.5. Profil permukaan bebas dengan variasi bilangan Fr=3.0 dan Fr=10^6, dengan bilangan We=0.00 dan We=0.05

Selanjutnya, dari gambar 4.5 dijelaskan bahwa untuk penggunaan bilangan Froude hulu Fr = 3.0 dan Fr = 10^6 dengan tegangan permukaan We = 0.00 dan We = 0.05 dengan panjang penghalang tl = 2π, tinggi permukaan bebas mengalami perubahan. Dan dapat dikatakan bahwa tinggi permukaan bebas dipengaruhi oleh penggunaan bilangan Froude hulu, dimana semakin kecil bilangan Froude yang diberikan maka tinggi permukaan bebas semakin bertambah.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Dari penyelesaian model matematika aliran flida di permukaan bebas dengan menggunakan metode integral batas diperoleh hasil perhitungan numerik dari metode tersebut untuk digunakan dalam memprediksi bentuk profil permukaan bebas dengan aliran hulu adalah superkritis, yaitu bilangan Froude hulu lebih dari satu. Dimana semakin besar penggunaan bilangan Froude hulu (Fr) yaitu mulai dari Fr = 3.0, Fr = 4.0, dan Fr = 10^6, maka tinggi permukaan bebas semakin berkurang. Sedangkan pengaruh dari penggunaan bilangan Weber (We) yaitu pada saat dikenai tegangan permukaan dari We = 0.00 ke We = 0.05, hanya timbul gelombang-gelombang kecil (gelombang kapiler) pada permukaan bebas. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bilangan Froude (Fr) dan bilangan Weber (We) mempengaruhi mekanisme terjadinya perubahan bentuk profil aliran fluida di permukaan bebas diatas penghalang kurva melengkung bertingkat turun pada suatu kanal.

5.2. Saran

Metode integral batas telah dikembangkan untuk memprediksi awal terjadinya gelombang untuk aliran fluida di permukaan bebas diatas penghalang dalam suatu kanal yang dipengaruhi gravitasi bumi dan tegangan permukaan. Dalam hal ini aliran fluida dimensi dua yang tunak, tak kental, tak berputar, dan tak mampu mampat. Oleh karena itu untuk aliran fluida dimensi tiga dapat dikembangkan lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR PUSTAKA

1. Streeter, V.L. (1988). Fluid Dynamics. Mc Graw-Hill, New York.
2. Djojodihardjo, H. (1983). Mekanika Fluida. Erlangga, Jakarta.
3. CA. Brebbia, (1999), Boundary Elements XXI, *International Series On Advances in Boundary Elements*, Volume 6, WIT, Southampton, UK.
4. Cokelet, E.D. (1997). Steep Gravity Waves in Water of Arbitary Uniform Depth.. Vol. 286, pp 183-230. Philos.Trans. Roy. Soc, London.
5. Forbes, L.K (1985). A Numerical Method for Nonlinear Flow About A Submerged Hydrofoil, *Journal Of Enggineering Mathematics*. Vol.9 , pp 329-339.
6. Lamb, H. (1972). Hydrodynamics, Cambridge University, Cambridge.
7. Love, C.H. (1966). Abscissas and weight for Gaussian Quadrature for N=2 to 100 an N=125, 150, 175, 200. U.S. Government Printing Office, Washington D.C.
8. Hogan, S.J. (1980). Some effects of surface tension on steep water waves, part. 2. *Journal Fluid Mechanics*, pp 417-449.
9. Muskhelishvilli, N.I, (1953). Boundary problems of Functions Theory and their application to Mathematical Physics, second edition. Groningen-Holland.
10. Muskhelishvilli, N.I, (1953). Singular Integral Equations, Edited by Raddock, J.R.M.P. Noordhoff, Groningen-Holland.
11. Wen, X dan Ingham, D.B. (1991). A Boundary Integral Tecnique for Dimensional Potential Flows, *Proceedings of Boundary Elements*, vol. XVIII, pp 561-571. *Computational Mechanics*, Southampton.
12. Wen, X. Ingham, D.B. & Widodo, B. (1997). The free surface Fluid Flow over fall of An Arbitary Shape in a Channel, *Enggineering Analysis with Boundary Elements*, vol.9, pp 299-308

13. Widodo , B. (1998). The Critical Local Froude Number for Which Waves First Occur on The Free Surface Fluid Flow Over A Step in A Channel Under The Effects of Gravity. *Proceedings The 3rd Indonesian Student's Scientifics Meeting*, pp 57 – 64 . Padeborn, Germany.

14. Widodo , B. (2000). The Application of the Boundary Integral Method on some Free Surface Fluid Flows, Ph.D Thesis, Departement of Aplied Mathematics University of Leeds, England.

15. Naki, M, (2005),"Analisa Konvergensi, Stabilitas, dan Estimasi kesalahan dari aplikasi BIT pada aliran Fluida di permukaan bebas diatas penghalang dalam suatu kanal, Tugas Akhir, ITS, Surabaya.

LAMPIRAN

LAMPIRAN

Listing Program Fortran :

```
C*************************************************************
C   PROGRAM ANALISA PROFIL FLUIDA PERMUKAAN BEBAS DI
C   BAWAH PENGARUH GRAVITASI DAN TEGANGAN PERMUKAAN
C*************************************************************
C234567
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      INTEGER I,KJ,KK,M,N,NM,IFAIL,NOUT,NCAP7,NX,NLWRK,
     1 NS2,LEFT,MN,J,L
            REAL*8 Q,PI,W,FR,TM,SUM,HALF,ONE,ZERO,DEXP,DCOS,DSIN,
            1 DABS,DSQRT,DASIN,DATAN,TOL,A,IB,DPSIF
            PARAMETER(N=840,Q=1.d0,M=840,NS2=720,TOL=0.001)

            REAL*8 XB(0:N),YB(0:N),DSB(0:N),BATAB(0:N),DX(0:N),
     1 UB(0:N),PSIB(0:N),TB(0:N),XF(0:N),YF(0:N),DSF(0:N),
     1 BATAF(0:N),UF(0:N),PSIF(0:N),TF(0:N),TAUF(0:N),
     1 C(N+7),K(N+7),WRK(N*6+16),X(N+7),RE(0:N),
     1 Y(N+7),TBATAF(0:N+7),SF(0:N+7),S(4),SB(0:N+7),
     1 PSIFO(0:N),PSIFN(0:N),XI(0:N),YI(0:N)
C       DATA ZERO,HALF,ONE,NOUT/0.0E0,0.5E0,1.0E0,16/
c       EXTERNAL E01BAF,E02BCF
       OPEN(UNIT=16,FILE='ta1Xb.dat',STATUS='UNKNOWN')
       OPEN(UNIT=17,FILE='ta1Yb.dat',STATUS='UNKNOWN')
       OPEN(UNIT=18,FILE='ta1Xf.dat',STATUS='UNKNOWN')
       OPEN(UNIT=19,FILE='ta1Yf.dat',STATUS='UNKNOWN')
       OPEN(UNIT=20,FILE='ta1R1.dat',STATUS='UNKNOWN')
       PI=DASIN(1.d0)*2.d0
            WRITE (*,*)'        PROGRAM ITERASI NUMERIK  '
            WRITE (*,*)'                                 '
            WRITE (*,*)'     APLIKASI METODE INTEGRAL BATAS       '
            WRITE (*,*)' '
            WRITE (*,*)'     SKETSA GRAFIK DARI DASAR SALURAN   '
            WRITE (*,*)' PEMBAGIAN PIAS, TINGGI DAN LEBAR PENGHALANG '
            WRITE (*,*)' '
            WRITE (*,*)' A______B__________C_______D______E______F '
            WRITE (*,*)' 0    120  L1      L2   L3 720   840'
            WRITE (*,*)' '
            WRITE (*,*)' DENGAN KETENTUAN : '
            WRITE (*,*)' '
            WRITE (*,*)'*)POSISI PENGHALANG DARI B SAMPAI E SEBANYAK 600 PIAS'
            WRITE (*,*)' *)JUMLAH L1+L2+L3 = 600 (2 PI) '
            WRITE (*,*)' *)BANYAKNYA PIAS N= 840,N1 = AB,N2 = AE  '
            WRITE (*,*)' *)TINGGI H1+H2+H3=SATU SATUAN (FLOAT) '
      WRITE (*,*)' *)TITIK B DIMULAI DARI PIAS KE 120'
            WRITE (*,*)' *)TITIK E PADA PIAS KE 720'
      WRITE(*,10)
            READ(*,12)W
10    FORMAT(/,1X,'Nilai W  = ',\)
12     FORMAT(1X,F9.3)
      WRITE(*,14)
            READ(*,16)FR
14    FORMAT(1X,'Nilai FR = ',\)
16     FORMAT(1X,F9.3)
      WRITE(*,18)
            READ(*,20)KK
18    FORMAT(1X,'Nilai Iterasi = ',\)
20     FORMAT(1X,I4)

            CALL  GEO(N,DX,XB,YB,DSB,BATAB,XF,YF,DSF)
            DO 46 I=0,N
46    UB(I)=1.d0
      DO 48 I=0,N
48    UF(I)=1.d0
```

```
      PSIF(0)=-10.0d0
      PSIB(0)=-10.0d0
      UF(0)=1.d0
      DO 90 KJ=1,KK
C       KJ=0
C500    PSIFO(N)=PSIF(N)
C       KJ=KJ+1
          DO 50 I=1,N
      UF(I)=DSQRT(1.d0+2.d0/FR/FR*(1.d0-YF(I))+2.0d0*W*
     1 TBATAF(I))
      TAUF(I)=DLOG(UF(I))
      PSIF(I)=PSIF(I-1)+(UF(I-1)+UF(I))/2.d0*DSF(I)
50    PSIB(I)=PSIB(I-1)+(UB(I-1)+UB(I))/2.d0*DSB(I)
          DO 52 I=0,N
      TF(I)=DEXP(-PI/Q*PSIF(I))
52    TB(I)=-DEXP(-PI/Q*PSIB(I))
C-----------------------------------------------
     DO 54 NM=1,N-1
      TM=TB(NM)

54    RE(NM)=RE(NM)+SUM+
     1 2.d0/PI*TAUF(N)*DATAN(DSQRT(-TF(N)/TM))
     DO 56 NM=1,N-1
56    UB(NM)=DEXP(RE(NM))
      UB(N)=UB(N-1)
C-----------------------------------------------
     DO 58 NM=1,N-1
      SUM=0.d0
      TM=TF(NM)
      CALL WALL(N,DSB,BATAB,UB,PSIB,Q,TM,SUM)
      RE(NM)=SUM
      CALL SURF(N,DSF,TAUF,UF,PSIF,Q,TM,SUM)
58    BATAF(NM)=RE(NM)+SUM + TAUF(N)/PI*
     1        DLOG((DSQRT(TM)-DSQRT(TF(N)))/(DSQRT(TF(N))+
     1        DSQRT(TM)))
C-----------------------------------------------
     DO 60 IB=1,N
       IF(BATAF(IB).LT.0.d0) BATAF(IB)=0.D0
60    CONTINUE
c-----------------------------------------------
     DO 62 I=1,N-1
62    CONTINUE
      BATAF(N)=BATAF(N-1)
     DO 64 I=1,N
      XF(I)=XF(I-1)+(DCOS(BATAF(I))+DCOS(BATAF(I-1)))/2.d0*DSF(I)
64     YF(I)=YF(I-1)+(DSIN(BATAF(I))+DSIN(BATAF(I-1)))/2.d0*DSF(I)
     DO 66 I=1,N
      SF(I)=SF(I-1)+DSF(I)
      SB(I)=SB(I-1)+DSB(I)
66    CONTINUE
     DO 68 I=1,N
      X(I) = SF(I)
      Y(I) = BATAF(I)
68    CONTINUE

     CALL CUBIC(N,X,Y,XI,YI)
          TBATAF(0)=(-3.0D0*YI(0)+4.0D0*YI(1)-YI(2))/(2.0D0*(XI(2)-XI(0)))
          TBATAF(N)=(3.0D0*YI(N)-4.0D0*YI(N-1)+YI(N-2))/(2.0D0*
     1  (XI(N)-XI(N-2)))
     DO 1000 I=1,N-1
          TBATAF(I)=(YI(I+1)-YI(I-1))/(2.0D0*(XI(I+1)-X(I-1)))
1000  CONTINUE
C70   CONTINUE
     DO 72 IB=1,N
       IF(TBATAF(IB).LT.0.d0) TBATAF(IB)=0.D0
72    CONTINUE
     DO 74 I=1,N-1
```

```
        IF(I.GT.NS2) THEN
          IF(TBATAF(I).GT.TBATAF(I-1)) THEN
            TBATAF(I) = TBATAF(I-1)
          ELSE
            TBATAF(I) = TBATAF(I)
          ENDIF
        ELSE
          TBATAF(I) = TBATAF(I)
        ENDIF
74    CONTINUE
      TBATAF(N)=TBATAF(N-1)
      DPSIF=DABS(PSIF(N)-PSIF(N-1))
      WRITE(*,76) KJ,DPSIF
76      FORMAT(1X,I4,2X,D19.13)
       WRITE(6,*) KJ,PSIF(N),YF(N)
      DO 78 I=1,N-1
      DO 80 MN=0,N
80    IF(PSIB(MN).GT.PSIF(I)) GO TO 82
82      A=(PSIF(I)-PSIB(MN-1))/(PSIB(MN)-PSIB(MN-1))
      A=YB(MN-1)+A*(YB(MN)-YB(MN-1))
78    RE(I)=DSQRT(UF(I)**2*FR**2/(YF(I)-A))
      RE(0)=RE(1)
            RE(N)=RE(N-1)
      A=FR**2/2.d0+1.d0
      DO 84 I=1,N
84      IF(RE(I).LT.A) A=RE(I)
      WRITE(6,*) A
90      CONTINUE
      PSIFN(N)=PSIF(N)
      IF (DABS(PSIFN(N)-PSIFO(N)).GT.TOL) THEN
        GO TO 500
      ELSE
      ENDIF
      DO 92 I=0,N
      WRITE(16,94) XB(I)
94    FORMAT(1X,E12.6)
92    CONTINUE
      DO 96 I=0,N
      WRITE(17,98) YB(I)
98    FORMAT(1X,E12.6)
96    CONTINUE

      DO 104 I=1,N
      WRITE(18,106) XF(I)
106   FORMAT(1X,E12.6)
104   CONTINUE
      DO 108 I=1,N
      WRITE(19,110) YF(I)
110   FORMAT(1X,E12.6)
108   CONTINUE

      WRITE(20,112) W,FR,N,KK
112   FORMAT(1X,/1X,'W = ',E12.3,2X,'FR = ',F10.3,2X,'  N = ',I4,
     1 '  iterations = ',I4,2(1X/))
      WRITE(20,114)
114   FORMAT(1X,' N ',2x,'    XF    ',2X,'    YF    ',2X,
     1'    RE    ',2X,' BATAF    ',2X,'    TBATAF    ',2X,1X/)
      DO 118 J=1,N
      WRITE(20,116) J,XF(J),YF(J),RE(J),BATAF(J),TBATAF(J)
116   FORMAT(1X,I5,2X,E12.6,'  ',E12.6)
118   CONTINUE
      CLOSE(UNIT=16)
            CLOSE(UNIT=17)
            CLOSE(UNIT=18)
      CLOSE(UNIT=19)
      CLOSE(UNIT=20)
      WRITE(6,*) 'DARI XR.dat'
```

```
      STOP
      END
C=====================================================================
      SUBROUTINE GEO(N,DX,XB,YB,DSB,BATAB,XF,YF,DSF)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION XB(0:N),YB(0:N),DSB(0:N),BATAB(0:N),DX(0:N),
     1 XF(0:N),YF(0:N),DSF(0:N)
      PI=DASIN(1.d0)*2.d0
      TL=2*PI
      H1=.50
      H2=.20
      H3=.30
      L1=300
      L2=100
      L3=200
      N1=120
      N2=720
      DO 200 L= 0,N1
200   DX=TL/DFLOAT(N1)
      DO 202 L= N1+1,N1+L1
202   DX=TL/DFLOAT(N1+L1-N1)
      DO 204 L= N1+L1+1,N1+L1+L2
204   DX=TL/DFLOAT(N1+L1+L2-N1-L1)
      DO 206 L= N1+L1+L2+1,N1+L1+L2+L3
206   DX=TL/DFLOAT(N1+L1+L2+L3-N1-L1-L2)
      DO 208 L= N1+L1+L2+L3+1,N
208   DX=TL/DFLOAT(N-N1-L1-L2-L3)
      XB(N1)=0.d0
      YB(N1)=0.d0
      X0=XB(N1)
      DX=TL/DFLOAT(N2-N1)
      XB(N1)=0.d0
      YB(N1)=0.d0
      X0=0.d0
      DO 210 I=N1-1,0,-1
      XB(I)=XB(I+1)-DX(I)
      YB(I)=YB(I+1)
210   BATAB(I)=0.d0
      DO 212 I=N1+1,N1+L1
      XB(I)=XB(I-1)+DX(I)
      YB(I)= H1/2*(1.0d0-DCOS(2.0D0*(I-N1-1)*PI/L1))
      B=H1*PI/TL*DSIN(2.0D0*DX(I)*(I-X0)*PI/L1)
212   BATAB(I)=DATAN(B)
      DO 214 I=N1+L1+1,N1+L1+L2
      XB(I)=XB(I-1)+DX(I)
      YB(I)= -H2/2*(1.0d0-DCOS(2.0D0*(I-(N1+L1+1))*PI/L2))
      B=H2*PI/TL*DSIN(2.0D0*(I-(N1+L1+1))*PI/L2)
214   BATAB(I)=DATAN(B)
      DO 216 I=N1+L1+L2+1,N1+L1+L2+L3
      XB(I)=XB(I-1)+DX(I)
      YB(I)= H3/2*(1.0d0-DCOS(2.0D0*(I-(N1+L1+L2+1))*PI/L3))
      B=H3*PI/TL*DSIN(2.0D0*DX(I)*(I-(N1+L1+L2+1))*PI/L3)
216   BATAB(I)=DATAN(B)
      XB(I)=XB(I-1)+DX(I)
      YB(I)=0.0d0
218   BATAB(I)=0.d0
      DO 220 I=1,N
220   DSB(I)=DSQRT( (XB(I)-XB(I-1))**2+(YB(I)-YB(I-1))**2)
      DO 222 I=0,N
      DSF(I)=DSB(I)
      XF(I)=XB(I)
222   YF(I)=YB(I)+1.d0
      RETURN
      END
```