



TESIS-SM 142501

**PERBANDINGAN ANTARA KALMAN FILTER DAN
FRAKSIONAL KALMAN FILTER UNTUK ESTIMASI
KONSENTRASI POLUTAN PADA MASALAH POLUSI
UDARA**

Yessy Vita Oktaviana
06111550012010

DOSEN PEMBIMBING
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.

**PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI, DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018**



THESIS-SM 142501

THE COMPARISON BETWEEN KALMAN FILTER AND FRACTIONAL KALMAN FILTER TO ESTIMATE THE POLLUTANT CONCENTRATION OF AIR POLLUTION PROBLEM

Yessy Vita Oktaviana
06111550012010

SUPERVISORS

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.

**MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTING, AND DATA SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2018**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)

di

Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

oleh:

YESSY VITA OKTAVIANA
NRP. 06111550012010

Tanggal Ujian : 15 Januari 2018
Periode Wisuda : Maret 2018

Disetujui oleh:

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.
NIP. 19660414 199102 2 001

(Pembimbing I)

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.
NIP. 19730930 199702 1 001

(Pembimbing II)

Dr. Hariyanto, M.Si.
NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)

Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.
NIP. 19611115 198703 1 003

(Penguji)

Endah RM Putri, S.Si., M.T., Ph.D.
NIP. 19761213 200212 2 001

(Penguji)



Dekan FMKSD,

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

PERBANDINGAN ANTARA KALMAN FILTER DAN FRAKSIONAL KALMAN FILTER UNTUK ESTIMASI KONSENTRASI POLUTAN PADA MASALAH POLUSI UDARA

Oleh : Yessy Vita Oktaviana
NRP : 06111550012010
Pembimbing : Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.
Co-Pembimbing : Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.

ABSTRAK

Masalah pencemaran udara memberikan pengaruh penting dalam kualitas lingkungan serta proses kehidupan manusia itu sendiri. Gas polutan seperti, Ozon merupakan gas berbahaya karena terbentuk dari reaksi NO_x dengan senyawa organik lainnya ($VOCs$) yang teremisi dari berbagai sumber. Masalah pencemaran udara dapat dimodelkan dalam bentuk TAPM-CTM (*The Air Pollution Model with Chemical Transport Model*). Model tersebut menunjukkan model konsentrasi polutan di udara yang dipengaruhi oleh koefisien difusi. Metode estimasi digunakan untuk meramalkan konsentrasi polutan di masa yang akan datang dan menjaga stabilitas kualitas udara. Pada penelitian ini, suatu algoritma dikembangkan berdasarkan Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter untuk mengatasi model polutan pada permasalahan pencemaran udara. Fraksional Kalman Filter dikaji untuk orde pertama dan orde kedua. Hasil simulasi yang diperoleh menunjukkan bahwa Fraksional KF lebih baik daripada Kalman Filter, dimana RMSE dari Fraksional KF sedikit lebih kecil daripada Kalman Filter. Sebaliknya untuk waktu komputasinya Fraksional KF lebih lama daripada waktu komputasi Kalman Filter untuk masing-masing waktu iterasi yang berbeda.

Kata kunci : Model polusi udara, Metode Beda Hinga, Kalman Filter, Kalkulus Fraksional, RMSE.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

**THE COMPARISON BETWEEN KALMAN FILTER AND FRACTIONAL KALMAN
FILTER TO ESTIMATE THE POLLUTANT CONCENTRATION OF AIR
POLLUTION PROBLEM**

By : Yessy Vita Oktaviana
Student Identity Number : 06111550012010
Supervisor : Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.
Co-Supervisor : Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.

ABSTRACT

Air pollution problem gives important effect in quality environment and quality of human's life. Air pollution can be caused by nature sources or human activities. Pollutant for example Ozone, a harmful gas formed by NO_x and volatile organic compounds (VOCs) emitted from various sources. The air pollution problem can be modeled by TAPM-CTM (The Air Pollution Model with Chemical Transport Model). The model shows concentration of pollutant in the air. Estimation method can be used for forecast pollutant concentration in future and keep stability of air quality. In this research, an algorithm is developed, based on Kalman Filter and Fractional Kalman Filter to solve the model of air pollution's problem. Fractional Kalman Filter has been examined for first – order difference and second – order difference. The result of simulation are obtained to show Fractional KF is better than Kalman Filter, because RMSE of Fractional KF is slightly smaller than RMSE of Kalman Filter. But, the computational time of Fractional KF is longer than Kalman Filter for each simulation.

Keywords : *Air Pollution Model, Finite Different Method, Kalman Filter, Fractional Calculus, RMSE.*

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirrabbi'lamin, segala puji hanya bagi Allah SWT. Atas limpahan rahmat dan hidayahNya sehingga Tesis ini dapat diselesaikan dengan judul **“PERBANDINGAN ANTARA KALMAN FILTER DAN FRAKSIONAL KALMAN FILTER UNTUK ESTIMASI KONSENTRASI POLUTAN PADA MASALAH POLUSI UDARA”**.

Penulisan tesis ini sering menghadapi masalah dan hambatan, namun demikian banyak masukan dan motivasi yang diberikan kepada penulis, baik materiil, moril, dan dukungan doa sehingga penulisan Tesis ini dapat diselesaikan. Oleh karena itu, penulis ingin menghaturkan rasa terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si, selaku koordinator program studi S2 Matematika FMKSD ITS sekaligus dosen pengajar yang telah membekali penulis berbagai ilmu pengetahuan selama proses belajar mengajar di S2 Matematika.
2. Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si selaku dosen wali yang senantiasa memberikan nasihat dan motivasi selama penulis menuntut ilmu di S2 Matematika.
3. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang senantiasa memberikan nasihat dan motivasi, membekali penulis berbagai ilmu pengetahuan yang sangat berharga selama penulis menuntut ilmu di S2 Matematika, serta memberikan bimbingan dalam menjalani dan menyelesaikan penelitian tesis.
4. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing II yang senantiasa memberikan nasihat dan motivasi, membekali penulis berbagai ilmu pengetahuan yang sangat berharga selama penulis menuntut ilmu di S2 Matematika, serta memberikan bimbingan dalam menjalani dan menyelesaikan penelitian tesis.
5. Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp., Bapak Dr. Hariyanto, M.Si, Ibu Endah RM Putri, S.Si., M.T., Ph.D., selaku dosen penguji yang telah memberi saran dan masukan untuk kebaikan penulisan Tesis ini.
6. Bapak dan Ibu staf dosen departemen Matematika : Bapak Dr. Subiono, M.Si, Bapak Dr. Mukhlas, M.T, Bapak Subchan, M.Sc, Ph.D, Ibu Dr. Dwi Ratna

Sulistyaningrum, S.Si, M.T., Ibu Dr. Dra. Mardlijah, M.T., yang telah mendidik dan membekali penulis wawasan dan ilmu pengetahuan selama menuntut ilmu di S2 Matematika.

7. Seluruh staf pegawai tata usaha yang banyak membantu penulis selama menuntut ilmu di S2 Matematika, khususnya Mbak Angy, Mbak Resti, Mas Aviv, Pak Joko, Pak Agung yang telah banyak direpotkan oleh penulis.
8. Orang tuaku tercinta Bapak Bibit Karmadi dan Ibu Zulistiani yang telah membesarkan dan mendidik penulis dengan penuh kesabaran dan pengorbanan yang tiada terkira. Penulis yakin tesis ini sebagai bukti bahwa doa, cinta, dan kasih sayang mereka senantiasa selalu melekat pada diri penulis sampai saat ini.
9. Teman-teman S2 Matematika angkata 2015 Genap yang telah memberi semangat dan motivasi sehingga Tesis ini dapat diselesaikan.

Penulis menyadari bahwa selama masa penelitian dan penyusunan laporan ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis memohon saran dan kritik dari berbagai pihak yang bersifat membangun sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang. Semoga Tesis ini bermanfaat bagi semua pihak.

Surabaya, Januari 2018

Penulis

Special thank's to :

1. Ayah dan ibuk, kedua orang tuaku tercinta, tersayang dan terkasih terimakasih atas kasih sayang, do'a, nasihat-nasihat, dan motivasi yang tak pernah habis untuk anakmu ini. Tesis ini saya persembahkan kepada Ayah dan Ibuk. Saya akan selalu berusaha membahagiakan dan mewujudkan impian Ayah dan Ibuk. Semoga Ayah dan Ibuk selalu mendapat limpahan rahmat dan balasan dari Alloh Subhanahu Wa ta'ala. Aamiin
2. Saudaraku yang sangat kusayangi, dedek Dimas. Terima kasih sudah mau membantu kakak saat kakak sedang butuh bantuan. Terima kasih sudah mau mengantarkan kakak saat kakak ada keperluan ke suatu tempat. Senyum dan tawamu adalah semangatku. Kelucuan dan kenakalanmu selalu membuatku rindu saat saya. Selalu rajin belajar dan patuhi ayah dan ibu. Selalu semangat ya belajarnya. Semoga apa yang kamu cita-citakan bisa terwujud dan bisa selalu membanggakan Ayah dan Ibuk. Semoga dedek Dimas menjadi anak yang sholeh dan sukses dunia akhirat. Aamiin..
3. Sekali lagi Bu Erna, terima kasih banyak atas bimbingannya selama ini. Berkat bimbingan dan motivasi dari ibu, saya dapat menyelesaikan Tesis ini. Terima kasih banyak atas waktunya sehingga saya mengerti dalam proses pengerjaan penelitian saya. Saya mohon maaf bu jika saya ada yang mengecewakan Bu Erna baik sengaja atau tidak disengaja.
4. Sekali lagi Pak Didik, terima kasih banyak atas bimbingannya selama ini. Berkat bimbingan dan motivasi dari bapak, saya dapat menyelesaikan Tesis ini. Saya mohon maaf pak jika sebelumnya saya kurang menghadap dikarenakan ada keperluan, dan mohon maaf jika saya ada yang mengecewakan Pak Didik baik sengaja atau tidak disengaja.
5. Teman-teman S2 Matematika angkatan 2015 Genap Kak Mei, Mbak Rita, Mbak Nabila, Mbak Meylista, Mas Lalu, Ifah, Nadya, Pingkan, Vimala, Habib, dan Rizky. Terima kasih banyak atas kebersamaannya selama masa perkuliahan S2. Terima kasih atas *sharing* dan diskusi bersama saat mengerjakan tesis di basecamp. Terima kasih atas canda tawa, serta dukungannya selama ini. Mohon maaf jika saya ada salah baik sengaja atau tidak disengaja. Selalu jaga komunikasi ya teman-

teman, walaupun nanti berkarir di tempat yang berbeda-beda. Tetap semangat dan semoga Allah SWT selalu melindungi kita semua. Aamiin.

6. Teman-temanku Sahabat BYLDDS termanis tercantik tersayang Bundo, Lisna, Dian, Dona, Mbak Suhes terimakasih sudah mau mendengarkan curahan-curahan hatiku saat di grup. Terimakasih juga atas dukungannya selama ini. Sahabat BYLDDS aku sayang kalian. Semoga kita bisa sukses mengejar cita-cita dan karir masa depan kita, dan senantiasa selalu dilindungi Allah swt. Aamiin.
7. Shabrina dan Anny, sahabat dari SMP hingga sekarang. Terima kasih ya sista selalu ada waktu senang dan sedihku. Terima kasih sudah mendengarkan keluh kesahku selama menempuh S2 ini. Dan terima kasih kemarin telah menguatkanmu untuk maju mengikuti seminar internasional. Terima kasih juga kemarin telah datang memberikan dukungan saat ujian tesis. Kita sudah seperti saudara kandung walaupun lahir dari ortu yang berbeda. Semoga persahabatan kita awet hingga nanti nenek-nenek. Sukses buat karir kerjamu. Semoga kita semua dilancarkan dan dimudahkan. Aamiin y allah.
8. Filsi, sahabat saat kuliah S1 hingga sekarang. Terima kasih ya selalu ada di waktu senang dan sedihku. Terima kasih sudah mendengarkan keluh kesahku selama menempuh S2 ini. Dan terima kasih kemarin telah menguatkanmu untuk maju mengikuti seminar internasional. Terima kasih juga kemarin telah datang memberikan dukungan saat ujian tesis. Semoga persahabatan kita awet hingga nanti nenek-nenek. Sukses buat karir kerjamu. Semoga kita semua dilancarkan dan dimudahkan. Aamiin y allah.
9. Mas Toni, Heri, Hakam terima kasih atas bantuan ajaran komputasinya. Terima kasih juga atas dukungan dan semangat yang diberikan dalam pengerjaan Tesis ini.
10. Mas Aviv, Mbak resti, dan Mbak angy, terima kasih banyak atas bantuannya selama ini. Sekali lagi saya ucapkan terima kasih atas bantuan dalam persiapan seminar dan sidang Tesis, dan maaf jikalau selama ini saya merepotkan.
11. Seluruh keluarga besar Pasca Sarjana Matematika ITS atas dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis.
12. Teman-temanku angkatan 2011 terimakasih kalian adalah keluargaku selama kuliah S1 dan hingga saat ini selalu menjadi keluargaku. Senang sekali rasanya

memiliki anggota keluarga yang sekarang menjadi orang-orang hebat dan sukses seperti kalian.

13. Tentor-tentor dan semua staf LBB Primagama. Terima kasih atas canda tawa, kebersamaan dan dukungannya selama ini.
14. Tentor-tentor dan semua staf LBB Integral. Terima kasih atas canda tawa, kebersamaan, dan dukungannya selama ini. Terima kasih atas pengertiannya saat saya sedang sibuk mengerjakan Tesis.
15. Murid-muridku baik di LBB Primagama maupun di LBB Integral: Shafa, Diva, Aulia, Alya, Sasha, Nevil, Tata, Sandy, Sakti, Arab, Ima, Sari, Dea, dan masih banyak lagi yang lainnya yang tidak dapat disebutkan satu persatu, terima kasih atas canda tawa dan pengertian kalian saat proses belajar mengajar. Kalian juga menjadi penyemangat saya saat saya sedang bingung dalam pengerjaan Tesis.
16. Seluruh pihak yang turut serta dalam pengerjaan Tesis ini, baik secara langsung maupun tak langsung yang belum disebutkan. Terima kasih banyak dan mohon maaf yang sebesar-besarnya atas segala kesalahan dan kekurangan penulis.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR ISI

	Halaman
LEMBAR PENGESAHAN	i
ABSTRAK	iii
<i>ABSTRACT</i>	v
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR NOTASI	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian.....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Studi Penelitian Terdahulu.....	5
2.2 Model Polusi Udara dengan Chemical Transport Model (TAPM-CTM)	6
2.3 Metode Kalman Filter.....	6
2.4 Kalkulus Fraksional.....	8
2.5 Metode Beda Hingga.....	10
2.6 Norm Matriks Kovarian Error.....	12
BAB III METODA PENELITIAN	
3.1 Studi Literatur.....	15
3.2 Mengkaji Model Polusi Udara.....	15
3.3 Mengkaji Metode Fraksional Kalman Filter	16
3.4 Implementasi Metode Kalman Filter	16

3.5 Implementasi Metode Fraksional Kalman Filter <i>First – Order</i>	17
3.6 Implementasi Metode Fraksional Kalman Filter <i>Second – Order</i>	18
3.7 Simulasi, Analisis Hasil, dan Pembahasan.....	19
3.8 Penarikan Kesimpulan dan Saran	19
3.9 Penyusunan Laporan Hasil Penelitian	19
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	
4.1 Pengkajian Model Polusi Udara.....	21
4.2 Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Tingkat Konsentrasi Polutan.....	22
4.3 Diskritisasi Model.....	24
4.4 Bentuk Umum Persamaan dari Sistem dan Pengukuran.....	27
4.5 Menyusun Algoritma Fraksional Kalman Filter	28
4.5.1 Menyusun Algoritma Fraksional Kalman Filter <i>First – Order</i> ..	29
4.5.2 Menyusun Algoritma Fraksional Kalman Filter <i>Second – Order</i>	35
4.6 Implementasi Metode Kalman Filter pada Model Polusi Udara.....	44
4.7 Implementasi Metode Fraksional Kalman Filter <i>First – Order</i>	45
4.8 Implementasi Metode Fraksional Kalman Filter <i>Second – Order</i>	46
4.9 Simulasi dan Analisis.....	47
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	
5.1 Kesimpulan.....	65
5.2 Saran.....	65
DAFTAR PUSTAKA	67
LAMPIRAN	
1. Listing Program Perbandingan Kalman Filter, Fraksional Kalman Filter <i>First – Order</i> , dan Fraksional Kalman Filter <i>Second – Order</i>	69
2. Perbandingan Nilai RMSE dengan 10 kali percobaan	75
3. Biodata Penulis	77

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Perputaran Algoritma Kalman Filter	7
Gambar 3.1 Diagram Alur Metodologi Penelitian.....	20
Gambar 4.1 Grafik Nilai Konsentrasi KF dan Fraksional KF <i>First – Order</i> dengan iterasi sebanyak $N = 50$	49
Gambar 4.2 Grafik Nilai Konsentrasi KF dan Fraksional KF <i>First – Order</i> dengan iterasi sebanyak $N = 100$	50
Gambar 4.3 Grafik Nilai Konsentrasi KF dan Fraksional KF <i>First – Order</i> dengan iterasi sebanyak $N = 200$	51
Gambar 4.4 Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY dengan Kalman Filter pada 1 sumber	52
Gambar 4.5 Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY dengan Kalman Filter pada 3 sumber	53
Gambar 4.6 Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY dengan Fraksional KF <i>First – Order</i> pada 1 sumber	54
Gambar 4.7 Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY dengan Fraksional KF <i>First – Order</i> pada 3 sumber	55
Gambar 4.8 Grafik Perbandingan Nilai Error KF dan Fraksional KF	56
Gambar 4.9 Grafik Nilai Konsentrasi KF dan Fraksional KF <i>Second –</i> <i>Order</i> hingga waktu ke 50.....	58
Gambar 4.10 Grafik Nilai Konsentrasi KF dan Fraksional KF <i>Second –</i> <i>Order</i> hingga waktu ke 100	59
Gambar 4.11 Grafik Nilai Konsentrasi KF dan Fraksional KF <i>Second –</i> <i>Order</i> hingga waktu ke 200	60
Gambar 4.12 Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY dengan Fraksional KF <i>Second – Order</i> pada 1 sumber	61
Gambar 4.13 Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY dengan Fraksional KF <i>Second – Order</i> pada 3 sumber	62
Gambar 4.14 Grafik Perbandingan Nilai Error KF dan Fraksional KF <i>Second – Order</i>	63

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Algoritma Kalman Filter	8
Tabel 4.1 Algoritma Fraksional Kalman Filter <i>rst – Order</i>	35
Tabel 4.2 Algoritma Fraksional Kalman Filter <i>Second – Order</i>	44
Tabel 4.3 Perbandingan Nilai Rata-rata RMS Error KF dan Fraksional KF <i>First – Order</i>	57
Tabel 4.4 Perbandingan Nilai Rata-rata RMS Error KF dan Fraksional KF <i>Second – Order</i>	64

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR NOTASI

$C(x, y, \sigma, t)$: konsentrasi pada posisi x, y, σ dan pada waktu t (dalam $\frac{kg}{m^3}$)
x, y, σ	: komponen koordinat sistem
t	: waktu (dalam detik)
l	: jarak dari puncak ke medan yang diamati (dalam m)
K_x, K_y, K_σ	: koefisien difusi searah sumbu x, y, σ (dalam $\frac{m^2}{detik}$)
S_C	: emisi polutan (mol/detik/liter)
R_C	: reaksi kimia
$c_{i,j,k}^{n+1}$: konsentrasi pada jarak i, j, k dan waktu $n + 1$
$c_{i,j,k}^n$: konsentrasi pada jarak i, j, k dan waktu n
i	: notasi perubahan untuk sumbu x
j	: notasi perubahan untuk sumbu y
k	: notasi perubahan untuk sumbu σ
$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$: laju dari laju perubahan konsentrasi terhadap posisi sumbu x
$\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$: laju dari laju perubahan konsentrasi terhadap posisi sumbu y
$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2}$: laju dari laju perubahan konsentrasi terhadap posisi sumbu σ
Δl	: jarak dari puncak ke medan yang diamati (dalam m)
$\Delta x, \Delta y, \Delta \sigma$: besarnya limit jarak titik grid terhadap titik grid berikutnya
Δt	: besarnya perubahan waktu
$O(\Delta t)$: akurasi perhitungan
\mathbf{x}_{n+1}	: variabel keadaan pada waktu $n + 1$
\mathbf{x}_n	: variabel keadaan pada waktu n
\mathbf{z}_n	: vektor keluaran atau pengukuran
\mathbf{u}_n	: vektor masukan deterministik pada waktu n
\mathbf{w}_n	: gangguan (<i>noise</i>) pada sistem
\mathbf{v}_n	: gangguan (<i>noise</i>) pada pengukuran
A	: matriks yang nilainya merupakan koefisien variabel \mathbf{x}_n
B	: matriks yang nilainya merupakan koefisien variabel \mathbf{u}_n

H	: matriks yang nilainya merupakan koefisien variabel z_n
P_{x_n}	: kovariansi error state x_n
$P_{x_{n+1}}$: kovariansi error state x_{n+1}
Q_n	: variansi dari <i>noise</i> sistem
R_n	: variansi dari <i>noise</i> pengukuran
K	: koefisien pembobotan atau kalman gain
$\Delta^r x_n$: beda fraksional orde ke r pada variabel x_n
r	: orde fraksional bentuk integer
I	: matriks identitas
$\ x\ $: norm kovariansi error

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
LAMPIRAN 1	69
LAMPIRAN 2	75
LAMPIRAN 3.....	77

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seiring dengan meningkatnya populasi manusia mengakibatkan kebutuhan manusia semakin bertambah juga, terutama kebutuhan dasar manusia seperti makanan, bahan pakaian, dan perumahan. Untuk memenuhi kebutuhan populasi yang terus meningkat, harus diproduksi bahan-bahan kebutuhan dalam jumlah yang besar melalui industri. Karena itu mendorong semakin berkembangnya industri, hal ini menimbulkan akibat antara lain industri mengeluarkan limbah berupa asap pabrik yang menyebabkan pencemaran udara. Masalah pencemaran udara memberikan pengaruh penting dalam kualitas lingkungan yang selanjutnya mempengaruhi proses kehidupan manusia itu sendiri.

Pencemaran udara adalah kehadiran satu atau lebih substansi fisik, kimia, atau biologi di atmosfer dalam jumlah yang dapat membahayakan kesehatan manusia, hewan, dan tumbuhan serta mengganggu estetika dan kenyamanan, atau merusak properti. Pencemaran udara dapat ditimbulkan oleh sumber-sumber alami maupun kegiatan manusia. Sumber polutan yang mencemari udara berupa gas dan asap. Gas dan asap tersebut berasal dari hasil proses pembakaran bahan bakar yang tidak sempurna, yang dihasilkan oleh mesin-mesin pabrik, pembangkit listrik dan kendaraan bermotor (Anonim, 2014).

Banyak peneliti melakukan observasi tentang gas-gas polutan seperti Ozon (O_3), Nitrogen Oksida (NO), Nitrogen Dioksida (NO_2), Sulfur Dioksida (SO_2), Particulate Matter ($PM_{2.5}$ & PM_{10}) guna mengetahui kualitas udara di suatu daerah serta mengontrol stabilitas kualitas udaranya (Santanu, 2014). Proses penelitian dilakukan dengan membentuk pemodelan kualitas udara dan selanjutnya dibentuk alat kendali untuk mengontrol atau mengurangi kadar zat polutan di udara. Karena mahalnya alat kendali tersebut serta besarnya biaya perawatan maka tidak dapat ditempatkan sebanyak mungkin alat untuk mengukur konsentrasi polutan. Oleh karena itu estimasi konsentrasi polutan sangat diperlukan selain untuk meramalkan konsentrasi polutan

pada waktu yang akan datang juga untuk mengestimasi konsentrasi polutan pada daerah yang tidak termasuk radius alat ukur tersebut.

Pada tahun 2013 Santanu Metia dkk melakukan penelitian tentang “*Environmental Time Series Analysis and Estimation with Extended Kalman Filtering*” diketahui bahwa algoritma Extended Kalman Filter dapat diterapkan dalam mengestimasi penyebaran polutan. Algoritma Extended ini dikombinasikan dengan fungsi Matern kovarian untuk mengatasi hilangnya data station akibat ketidakpastian suatu keadaan sistem. Selanjutnya pada tahun 2014, Santanu mengembangkan penelitiannya tentang algoritma Extended yakni “*Air Pollution Prediction Using Matern Function Based Extended Fractional Kalman Filtering*”. Pada penelitian tersebut algoritma yang dikembangkan adalah Extended Fraksional Kalman Filter yang juga dikombinasikan dengan fungsi Matern kovarian. Diperoleh hasil estimasi bahwa prediksi kualitas udara melalui model penyebaran polutan mengalami peningkatan.

Berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya, penulis mengusulkan penelitian lebih lanjut tentang estimasi konsentrasi polutan pada model TAPM-CTM yakni dengan menggunakan algoritma Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter. Hasil estimasi dari kedua metode nantinya akan dibandingkan sehingga bisa diketahui algoritma mana yang lebih akurat dan memiliki tingkat kesalahan estimasi paling kecil.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang ada, permasalahan yang diselesaikan dalam penelitian ini adalah :

1. Bagaimana analisis hasil estimasi konsentrasi polutan dengan menggunakan algoritma Kalman Filter dan algoritma Fraksional Kalman Filter *first – order* ?
2. Bagaimana analisis hasil estimasi konsentrasi polutan dengan menggunakan algoritma Kalman Filter dan algoritma Fraksional Kalman Filter *second – order* ?
3. Bagaimana hasil analisis perbandingan keakuratan metode Kalman Filter dan metode Fraksional Kalman Filter dalam mengestimasi penyebaran konsentrasi polutan di udara ?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang diberikan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Model polusi udara diasumsikan model dinamik TAPM-CTM. Partikel polutan yang diamati adalah ozon (O_3).
2. Orde fraksional yang digunakan adalah *first – order* dan *second – order* .
3. *Software* yang digunakan untuk simulasi adalah MATLAB.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan adalah sebagai berikut :

1. Menganalisis hasil estimasi penyebaran polutan dengan implementasi algoritma Kalman Filter dan algoritma Fraksional Kalman Filter *first – order*.
2. Menganalisis hasil estimasi penyebaran polutan dengan implementasi algoritma Kalman Filter dan algoritma Fraksional Kalman Filter *second – order*.
3. Menganalisis hasil perbandingan keakuratan metode Kalman Filter dan metode Fraksional Kalman Filter dalam mengestimasi penyebaran konsentrasi polutan di udara.

1.5 Manfaat Penelitian

Dari penelitian ini, penulis mengharapkan agar Tesis ini nantinya dapat bermanfaat bagi berbagai kalangan sebagai berikut :

1. Menerapkan metode Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter pada permasalahan polusi udara.
2. Menambah wawasan dan memberi gambaran tentang estimasi konsentrasi polutan dengan menggunakan algoritma Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter pada permasalahan polusi udara.
3. Memberikan informasi untuk penelitian selanjutnya tentang estimasi konsentrasi polutan pada masalah polusi udara dengan menggunakan metode Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter.

1.6 Sistematika Penulisan Tesis

Sistematika penulisan dalam Laporan Tesis ini adalah sebagai berikut:

1. BAB 1 PENDAHULUAN

Pada bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tesis yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan Tesis.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang mendukung penelitian, antara lain tentang model polusi udara, algoritma Kalman Filter, Kalkulus Fraksional, Metode Beda Hingga dan algoritma Norm Kovarian Error.

3. BAB III METODA PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyusunan Tesis ini. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literature, identifikasi model polusi udara. Selanjutnya dilakukan implementasi Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter. Tahap selanjutnya dilakukan simulasi dan analisis hasil. Tahap terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis serta saran.

4. BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan secara detail mengenai model dinamik polusi udara. Selanjutnya akan diperoleh hasil estimasi dari Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter.

5. BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini menjelaskan tentang penarikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai kajian pustaka yang berkaitan dengan penelitian-penelitian sebelumnya dan dasar-dasar teori yang dibutuhkan dalam penelitian ini.

2.1 Studi Penelitian Terdahulu

Penelitian-penelitian terkait yang pernah dilakukan sebelumnya yaitu sebagai berikut :

1. *The Square Root Ensemble Kalman Filter to Estimate the Concentration of Air Pollution* (Erna A. dkk, 2010). Dalam penelitian ini dibahas tentang estimasi konsentrasi polutan dengan menggunakan metode *Square Root Ensemble Kalman Filter*. *Square root Ensemble Kalman Filter* digunakan untuk menjaga stabilitas waktu komputasi. Dengan menggunakan *Ensemble Kalman Filter* dan *Square Root Kalman Filter* diperoleh keakuratan yang hampir sama, sehingga berdasarkan penelitian tersebut disimpulkan bahwa kedua metode dapat digunakan untuk mengestimasi konsentrasi polutan.
2. *Environmental Time Series Analysis and Estimation with Extended Kalman Filtering* (Santanu Metia dkk, 2013). Dalam penelitian ini dibahas estimasi profil polutan di udara dengan menggunakan algoritma *Extended Kalman Filter*. Algoritma *Extended Kalman Filter* digunakan untuk mengestimasi data sementara yang hilang. Berdasarkan penelitian, diperoleh data koefisien korelasi rata-rata dari model EKF adalah sebesar 85%, sedangkan data station sebesar 78%. Ini menunjukkan bahwa perbedaan hasil estimasi dengan data station hanya 7%. Sehingga diperoleh bahwa hasil estimasi metode EKF memberikan kontribusi yang cukup signifikan.
3. *Air Pollution Prediction Using Matern Function Based Extended Fractional Kalman Filtering* (Santanu Metia dkk, 2014). Dalam penelitian ini membahas masalah emisi polutan yang ada di daerah perkotaan dan pinggiran kota dengan menggunakan model polusi udara dan transportasi kimia yang terlibat

didalamnya (TAPM-CTM). Algoritma yang digunakan untuk mengestimasi adalah algoritma *Extended Fraksional Kalman Filter*. Algoritma dikombinasikan dengan fungsi *Matern Kovarian*. Hasil estimasi menunjukkan adanya peningkatan prediksi kualitas udara di wilayah yang diamati.

2.2 Model Polusi Udara dengan Chemical Transport Model (TAPM-CTM)

Model polusi udara TAPM-CTM (*The Air Pollution Model with Chemical Transport Model*) dikembangkan oleh Commonwealth Scientific dan Organisasi Penelitian Industri (CSIRO). Model ini merupakan persamaan 3D prognostik untuk penentuan konsentrasi polutan di udara. (Peter J.Hurley, 2005).

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} (\overline{w'c'}) + S_c + R_c \quad (2.1)$$

dengan

$$(\overline{w'c'}) = -K_\sigma \frac{\partial c}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

2.3 Metode Kalman Filter

Kalman Filter (KF) adalah suatu metode estimasi variabel keadaan dari sistem dinamik stokastik linear diskrit yang meminimumkan kovariansi *error* estimasi. Metode KF pertama kali diperkenalkan oleh Rudolph E. Kalman pada tahun 1960 lewat papernya yang terkenal tentang suatu penyelesaian rekursif pada masalah filtering data diskrit yang linear (Welch & Bishop, 2006). KF merupakan suatu pendekatan teknis untuk menaksir fungsi parameter dalam peramalan deret berkala (*time series*). Keunggulan metode KF adalah kemampuannya dalam mengestimasi suatu keadaan berdasarkan data yang minim. Data minim yang dimaksud adalah data pengukuran (alat ukur) karena KF merupakan suatu metode yang menggabungkan model dan pengukuran. Data pengukuran terbaru menjadi bagian penting dari algoritma KF karena data mutakhir akan berguna untuk mengoreksi hasil prediksi, sehingga hasil estimasinya selalu mendekati kondisi yang sebenarnya (Masduqi, 2008).

Bentuk umum sistem dinamik stokastik

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + G\mathbf{w}_n$$

dengan pengukuran $\mathbf{z}_n \in \mathfrak{R}^p$ yang memenuhi

$$\mathbf{z}_n = H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

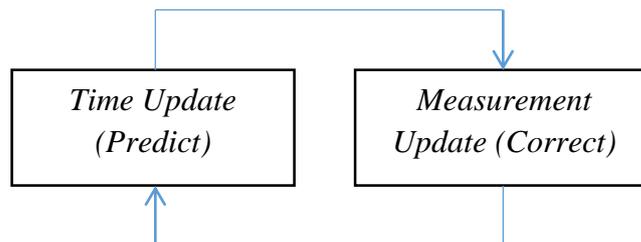
dengan asumsi :

$$\mathbf{x}_0 \sim N(\bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_{x_0}); \mathbf{w}_n \sim N(0, \mathbf{Q}_n); \mathbf{v}_n \sim N(0, \mathbf{R}_n)$$

Variabel $\mathbf{w}_n \sim N(0, \mathbf{Q}_n)$ dan $\mathbf{v}_n \sim N(0, \mathbf{R}_n)$ ini diasumsikan *white* (berdistribusi normal dengan mean 0), tidak berkorelasi satu sama lain maupun dengan nilai estimasi awal $\bar{\mathbf{x}}_0$.

Proses estimasi KF dilakukan dengan dua tahapan, yaitu dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasarkan sistem dinamik yang disebut tahap prediksi (*time update*) dan selanjutnya tahap koreksi (*measurement update*) terhadap data-data pengukuran untuk memperbaiki hasil estimasi.

Tahap prediksi dipengaruhi oleh dinamika sistem dengan memprediksi variabel keadaan dengan menggunakan persamaan estimasi variabel keadaan dan tingkat akurasiya dihitung menggunakan persamaan kovariansi *error*. Pada tahap koreksi hasil estimasi variabel keadaan yang diperoleh pada tahap prediksi dikoreksi menggunakan model pengukuran. Salah satu bagian dari tahap ini yaitu menentukan matriks Kalman Gain yang digunakan untuk meminimumkan kovariansi *error*. Tahap prediksi dan koreksi dilakukan secara rekursif dengan cara meminimumkan kovariansi *error* estimasi ($\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n$). Adapun alur perputaran algoritma kalman filter adalah sebagai berikut :



Gambar 2.1 Perputaran Algoritma Kalman Filter

Sedangkan algoritma KF selengkapnya dapat dilihat pada Tabel 2.1

Tabel 2.1 Algoritma Kalman Filter

Model Sistem dan Pengukuran	<p>Model Sistem : $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + G\mathbf{w}_n$</p> <p>Model Pengukuran : $\mathbf{z}_n = H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$</p> <p>Asumsi :</p> <p>$\mathbf{x}_0 \sim N(\bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_{x_0})$; $\mathbf{w}_n \sim N(0, \mathbf{Q}_n)$; $\mathbf{v}_n \sim N(0, \mathbf{R}_n)$</p>
Inisialisasi	<p>$\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0$</p> <p>$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{x_0}$</p>
Tahap Prediksi (Time Update)	<p>Estimasi : $\hat{\mathbf{x}}_{n+1}^- = A\hat{\mathbf{x}}_n^- + B\mathbf{u}_n$</p> <p>Kovariansi Error : $\mathbf{P}_{n+1}^- = A\mathbf{P}_n A^T + G_n \mathbf{Q}_n G_n^T$</p>
Tahap Koreksi (Measurement Update)	<p>Kalman Gain : $\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1}^- H^T (H_{n+1} \mathbf{P}_{n+1}^- H^T + \mathbf{R}_{n+1})^{-1}$</p> <p>Estimasi : $\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^- + \mathbf{K}_{n+1} (\mathbf{z}_{n+1} - H\hat{\mathbf{x}}_{n+1}^-)$</p> <p>Kovariansi Error : $\mathbf{P}_{n+1} = (I - \mathbf{K}_{n+1} H) \mathbf{P}_{n+1}^- [I - \mathbf{K}_{n+1} H]^T + \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{K}_{n+1}^T$</p>

Pada Tabel 2.1 menunjukkan algoritma KF yang terdiri dari empat bagian, diantaranya bagian pertama mendefinisikan model sistem dan model pengukuran, bagian kedua merupakan nilai awal (inisialisasi), selanjutnya ketiga dan keempat masing-masing tahap prediksi dan koreksi.

2.4 Kalkulus Fraksional

Kalkulus fraksional adalah cabang dari kajian tentang turunan dan integral order bilangan bulat (dinamakan integral dan turunan fraksional). Secara khusus, ini melibatkan gagasan dan metode penyelesaian persamaan diferensial yang melibatkan turunan fraksional dari fungsi yang tidak diketahui yang dinamakan persamaan diferensial fraksional (Dominik Sierociuk dkk, 2006).

Kalkulus fraksional muncul hampir bersamaan dengan kalkulus klasik ditetapkan. Kalkulus fraksional pertama kali diperkenalkan dalam tulisan Leibniz pada l'Hospital tahun 1695, ketika ide untuk semi-turunan disarankan. Setelah itu, banyak ahli matematika yang membangun dasar kalkulus fraksional seperti Liouville, Riemann, Hadamard, Erdelyi-Kober, Griinwald-Letnikov, dan Caputo [Kilbas, 2006].

Definisi turunan diskrit fraksional dikembangkan oleh Griinwald-Letnikov yang selanjutnya diterapkan pada sistem stokastik diskrit (Dominik S., dkk, 2006).

Definisi 2.1.

Beda orde fraksional tipe Griinwald-Letnikov

$$\Delta^r \mathbf{x}_n = \frac{1}{h^r} \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{r}{s} \mathbf{x}_{n-s}$$

dimana $r \in \mathbb{R}$ adalah orde beda fraksional, \mathbb{R} adalah himpunan bilangan real, h adalah *sampling interval* yang diasumsikan bernilai 1, dan n adalah banyaknya sampel yang akan dihitung. Faktor $\binom{r}{s}$ bisa diperoleh dari

$$\binom{r}{s} = \begin{cases} 1 & \text{untuk } s = 0 \\ \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} & \text{untuk } s > 0 \end{cases}$$

Berdasarkan definisi diatas, ini memungkinkan untuk mendapatkan suatu nilai diskrit yang ekuivalen dari turunan (ketika r positif), suatu nilai diskrit yang ekuivalen dengan integrasi (ketika r negatif), atau ketika $r = 0$, kembali ke fungsi aslinya (Dominik Sierociuk dkk, 2006).

Dengan menggunakan Definisi 2.1 dapat diperoleh nilai *first – order* fraksional sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \Delta^1 \mathbf{x}_1 &= \sum_{s=0}^1 (-1)^s \binom{1}{s} \mathbf{x}_{1-s} \\ &= (-1)^0 \binom{1}{0} \mathbf{x}_{1-0} + (-1)^1 \binom{1}{1} \mathbf{x}_{1-1} \\ &= (1) \frac{1!}{0!1!} \mathbf{x}_1 + (-1) \frac{1!}{1!0!} \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

$$\Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) dapat dituliskan kembali menjadi :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_n \tag{2.3}$$

Misalkan diberikan sistem stokastik diskrit linier sebagai berikut :

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \tag{2.4}$$

$$\mathbf{z}_n = H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \tag{2.5}$$

dimana \mathbf{x}_n adalah vektor *state*, \mathbf{u}_n adalah sistem input, \mathbf{z}_n adalah sistem output, \mathbf{w}_n adalah sistem *noise*, \mathbf{v}_n adalah *output noise*.

Dengan menerapkan orde fraksional pada Persamaan (2.3) maka Persamaan (2.4) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_n &= A\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \\ \Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} &= A\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n - \mathbf{x}_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} &= A\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \\ \Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} &= A_d \mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n\end{aligned}\quad (2.6)$$

dimana $\Delta^1 \mathbf{x}_{n+1}$ adalah beda orde pertama untuk sampel \mathbf{x}_n , $A_d = A - I$ dimana I adalah matriks identitas.

Dengan menggunakan formula Persamaan (2.2), (2.5) dan (2.6), maka sistem linier stokastik diskrit dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} &= A_d \mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \\ \Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \\ \mathbf{z}_n &= H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n\end{aligned}\quad (2.7)$$

2.5 Metode Beda Hingga

Persamaan model sistem dinamik TAPM-CTM diatas merupakan persamaan yang kontinu. Untuk mengestimasi suatu sistem dinamik, diperlukan model persamaan dalam bentuk diskrit. Oleh karena itu diperlukan diskritisasi model. Proses diskritisasi dapat dilakukan dengan beberapa cara dan salah satunya adalah dengan metode beda hingga.

Metode beda hingga menggunakan pendekatan ekspansi Taylor di titik acuan x . Jika suatu fungsi $f(x)$ didiferensialkan n kali di dalam interval $[x_0 - h, x_0 + h]$ dimana h cukup kecil, dapat diuraikan dalam bentuk deret pangkat menurut deret Taylor dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}f(x_0 + h) &= f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^n(x_0) \\ f(x_0 - h) &= f(x_0) - \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^n(x_0)\end{aligned}$$

Deret Taylor inilah yang merupakan dasar pemikiran metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik. Pendekatan untuk turunan pertama dilakukan dengan memotong suku-suku berorde h^2 . Hal ini disebabkan, untuk h yang cukup kecil, h^2 jauh lebih kecil sehingga dapat diabaikan.

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

yang dikenal sebagai pendekatan Beda Maju (*Forward Difference*).

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

yang dikenal sebagai pendekatan Beda Mundur (*Backward Difference*).

Ada pula pendekatan yang dikenal sebagai pendekatan Beda Pusat (*Center Difference*), untuk ini digunakan:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)h$$

$$f(x_{i-1}) \approx f(x_i) - f'(x_i)h$$

dan dengan mengurangkan kedua persamaan diatas diperoleh:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

Turunan kedua diperoleh dengan cara yang sama. Disini ditinjau deret Taylor hingga nilai h yang berderajat dua. Pemotongan dilakukan pada h yang berderajat tiga.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3) + \dots$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 - \mathcal{O}(h^3) + \dots$$

Kedua persamaan diatas dijumlahkan sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) = 2f(x_i) + 2\frac{f''(x_i)}{2}h^2$$

atau

$$f''(x_i) = \frac{(f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})))}{h^2}$$

nilai pendekatan untuk turunan ketiga, keempat, dan seterusnya dilakukan dengan cara yang sama.

Untuk fungsi empat variabel, deret Taylor diturunkan secara sebagian-sebagian (parsial) terhadap variabelnya. Jadi, untuk $C = C(x, y, \sigma, t)$ ekspansi deret Taylor terhadap x, y, σ , dan t diberikan sebagai:

$$C(x_{i+1}, y_j, \sigma_k, t_n) = C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n) + \frac{\partial C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots$$

$$C(x_i, y_{j+1}, \sigma_k, t_n) = C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n) + \frac{\partial C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial y^2} \frac{\Delta y^2}{2!} + \dots$$

$$C(x_i, y_j, \sigma_{k+1}, t_n) = C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n) + \frac{\partial C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial \sigma} \Delta \sigma + \frac{\partial^2 C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial \sigma^2} \frac{\Delta \sigma^2}{2!} + \dots$$

$$C(x_i, y_j, \sigma_k, t_{n+1}) = C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n) + \frac{\partial C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots$$

Jadi turunan parsial fungsi terhadap x, y, σ , dan t dengan metode Beda Maju (*Forward Difference*) dituliskan:

$$\frac{\partial C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial x} \approx \frac{C(x_{i+1}, y_j, \sigma_k, t_n) - C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial y} \approx \frac{C(x_i, y_{j+1}, \sigma_k, t_n) - C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial \sigma} \approx \frac{C(x_i, y_j, \sigma_{k+1}, t_n) - C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\Delta \sigma}$$

$$\frac{\partial C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial t} \approx \frac{C(x_i, y_j, \sigma_k, t_{n+1}) - C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\Delta t}$$

dengan Beda Mundur (*Backward Difference*) dituliskan :

$$\frac{\partial C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial x} \approx \frac{C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n) - C(x_{i-1}, y_j, \sigma_k, t_n)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial y} \approx \frac{C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n) - C(x_i, y_{j-1}, \sigma_k, t_n)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial \sigma} \approx \frac{C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n) - C(x_i, y_j, \sigma_{k-1}, t_n)}{\Delta \sigma}$$

$$\frac{\partial C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial t} \approx \frac{C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n) - C(x_i, y_j, \sigma_k, t_{n-1})}{\Delta t}$$

dengan Beda Pusat (*Centered Difference*) dituliskan :

$$\frac{\partial^2 C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial x^2} \approx \frac{C(x_{i+1}, y_j, \sigma_k, t_n) - 2C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n) + C(x_{i-1}, y_j, \sigma_k, t_n)}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial y^2} \approx \frac{C(x_i, y_{j+1}, \sigma_k, t_n) - 2C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n) + C(x_i, y_{j-1}, \sigma_k, t_n)}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial \sigma^2} \approx \frac{C(x_i, y_j, \sigma_{k+1}, t_n) - 2C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n) + C(x_i, y_j, \sigma_{k-1}, t_n)}{(\Delta \sigma)^2}$$

$$\frac{\partial^2 C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n)}{\partial t^2} \approx \frac{C(x_i, y_j, \sigma_k, t_{n+1}) - 2C(x_i, y_j, \sigma_k, t_n) + C(x_i, y_j, \sigma_k, t_{n-1})}{\Delta t^2}$$

2.6 Norm Matriks Kovariansi *Error*

Dalam proses estimasi *Kalman filter* terdapat istilah *norm kovariansi error*. *Norm kovariansi error* itu sendiri berguna untuk mengevaluasi ketelitian hasil estimasi dari *kalman filter* yakni dapat dilihat dari bentuk *norm kovariansi error*nya. Dengan demikian, *norm kovariansi error* digunakan sebagai tolak ukur dalam pengestimasi suatu model pada metode *Kalman Filter*.

Norm matriks pada himpunan S yang memuat matriks-matriks berukuran $N \times N$ yang dituliskan dengan notasi $\|\cdot\|$ atau biasanya sering disebut panjang/besar yang

merupakan fungsi bernilai real dan positif (Purnomo, 2008). Norm matriks didefinisikan sebagai :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

Kovarian dari dua variabel acak x_1 dan x_2 didefinisikan sebagai :

$$cov(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = E[(\mathbf{x}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1)(\mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2)].$$

Sedangkan kovarian dari vektor kolom $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^T$ didefinisikan sebagai :

$$cov(\mathbf{x}) = E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T]$$

yang merupakan matriks simetri $N \times N$ dan definit positif jika tidak ada kebergantungan linier dari komponen \mathbf{x} . Kovarian matriks adalah elemen diagonal merupakan varian yang menunjukkan sebaran \mathbf{x} , elemen selain pada diagonal merupakan kovarian yang juga menunjukkan korelasi atau hubungan antar variabel \mathbf{x} (independen/dependen). Dari definisi diatas dapat mendefinisikan *norm* dari matriks kovariansi *error*. Jadi, matriks kovariansi *error* merupakan hubungan antara *error* dari masing-masing variabel dalam proses estimasi. Kovariansi *error* didefinisikan sebagai \mathbf{P}_k^a , sehingga norm kovariansi *error* dapat dituliskan sebagai $\|\mathbf{P}_k^a\|$ yang merupakan besarnya matriks kovariansi *error*. Nilai dari $\|\mathbf{P}_k^a\|$ sangat mempengaruhi hasil estimasi. Semakin besar nilainya maka semakin besar korelasi antara *error* variabelnya maka *error* yang dihasilkan akan semakin besar juga sehingga hasil estimasinya semakin jauh dari *realnya*, dan begitu pula sebaliknya.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III

METODA PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan bagaimana langkah-langkah yang digunakan dalam mengestimasi konsentrasi polutan dengan menggunakan metode Kalman Filter dan modifikasinya. Tahapan penelitian dalam Tesis ini terdiri atas sembilan tahap, yaitu studi literatur, mengkaji model polusi udara berdasarkan TAPM-CTM, pembentukan algoritma Fraksional Kalman Filter *first – order*, pembentukan algoritma Fraksional Kalman Filter *second – order*, implementasi metode Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter, analisis dan pembahasan, penarikan kesimpulan, dan pembuatan laporan Tesis. Adapun metode penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan studi referensi tentang model polusi udara berdasarkan model TAPM-CPM, algoritma Kalman Filter dan algoritma Fraksional Kalman Filter. Referensi yang digunakan adalah buku, skripsi, tesis, jurnal penelitian sebelumnya dan dari website-website di internet yang berkaitan dengan topik pada Tesis ini.

3.2 Mengkaji Model Polusi Udara

Pada tahap ini akan dilakukan pemahaman mengenai model polusi udara berdasarkan perpindahan zat-zat kimianya. Model TAPM-CPM ini merupakan model dinamik linier yang selanjutnya akan dibentuk model *state space* dan dilakukan pendiskritan. Selanjutnya akan dilakukan estimasi sistem dengan menggunakan Kalman Filter di antaranya pendiskritan yang digunakan sebagai matriks masukan dalam sistem. Setelah itu diolah ke tahap prediksi, koreksi dan simulasi. Selanjutnya akan dilakukan pengkajian mengenai modifikasi Kalman Filter yakni algoritma Fraksional Kalman Filter yang menggunakan dasar dari kalkulus fraksional dan langsung diterapkan ke dalam model polusi udara.

3.3 Mengakaji Metode Fraksional Kalman Filter

Pada tahap ini dilakukan pembentukan algoritma Fraksional Kalman Filter yakni untuk *first – order* dan *second – order*. Penurunan didasarkan pada kalkulus fraksional yang didefinisikan pada Definisi 2.1. Sehingga diperoleh nilai estimasi dan kovariansi *error* dengan *first – order* fraksional, serta nilai estimasi dan kovariansi *error second – order* fraksional. Selanjutnya keseluruhan algoritma Fraksional Kalman Filter *first – order* yang dibentuk ditulis secara ringkas dalam Tabel 4.1. Dan untuk algoritma Fraksional Kalman Filter *second – order* yang dibentuk ditulis secara ringkas dalam Tabel 4.2

3.4 Implementasi Metode Kalman Filter

Metode Kalman Filter digunakan untuk sistem model linier. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk estimasi konsentrasi polutan dalam model TAPM-CTM dengan menggunakan metode Kalman Filter adalah sebagai berikut :

- a. Menentukan model sistem dan model pengukuran

Berdasarkan subbab 2.4 perihal model sistem dan model pengukuran metode Kalman Filter diperoleh model sistemnya dan model pengukuran :

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \quad (3.1)$$

$$\mathbf{z}_n = H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \quad (3.2)$$

dimana A, B, H adalah matriks-matriks yang nilai elemen-elemennya merupakan koefisien variabel masing-masing, \mathbf{w}_n adalah gangguan (*noise*) pada sistem, \mathbf{v}_n adalah gangguan (*noise*) pada pengukuran, \mathbf{x}_{n+1} adalah variabel keadaan pada waktu $n + 1$, \mathbf{x}_n adalah variabel keadaan pada waktu n , \mathbf{u}_n adalah vektor masukan deterministik, \mathbf{z}_n adalah vektor keluaran atau pengukuran.

- b. Pendiskritan

Metode Kalman Filter yang digunakan yaitu algoritma Kalman Filter waktu diskrit (*Discrete-time Kalman Filter*). Oleh karena itu, model polusi udara didiskritisasi dengan menggunakan metode Beda Hingga Maju karena diprediksi satu langkah ke depan.

c. Tahap Prediksi

Pada tahap prediksi ini menghitung kovarian error dan estimasi pada model sistem.

d. Tahap Koreksi

Pada tahap koreksi ini menghitung Kalman Gain, kovarian error pada model pengukuran kemudian diperoleh hasil estimasi. Pada tahap ini, perhitungan dikatakan bagus jika nilai kovarian errornya semakin kecil dan juga perhitungan dikatakan bagus jika nilai errornya semakin kecil pula.

3.5. Implementasi Metode Fraksional Kalman Filter *First – Order*

Metode modifikasi Fraksional Kalman Filter juga digunakan sistem model linier. Langkah-langkah yang dilakukan untuk estimasi model dengan menggunakan metode Fraksional Kalman Filter sama dengan langkah-langkah dalam Kalman Filter yakni diantaranya

a. Menentukan model sistem dan model pengukuran

Model sistem dan pengukuran untuk Fraksional Kalman Filter *first – order* adalah

$$\Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} = A_d \mathbf{x}_n + B \mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_n \quad (3.4)$$

$$\mathbf{z}_n = H \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

dimana A_d, B, H adalah matriks-matriks yang nilai elemen-elemennya merupakan koefisien variabel masing-masing, $A_d = A - I$ dimana I adalah matriks identitas, \mathbf{w}_n adalah gangguan (*noise*) pada sistem, \mathbf{v}_n adalah gangguan (*noise*) pada pengukuran, \mathbf{x}_{n+1} adalah variabel keadaan pada waktu $n + 1$, \mathbf{x}_n adalah variabel keadaan pada waktu n , \mathbf{u}_n adalah vektor masukan deterministic, \mathbf{z}_n adalah vektor keluaran atau pengukuran.

b. Pendiskritan

Metode Fraksional Kalman Filter yang digunakan yaitu algoritma Fraksional Kalman Filter waktu diskrit (*Discrete-time Kalman Filter*). Oleh karena itu, model polusi udara didiskritisasi dengan menggunakan metode Beda Hingga Maju karena diprediksi satu langkah ke depan.

c. Tahap Prediksi

Pada tahap prediksi ini menghitung kovariansi *error* dan nilai estimasi pada model sistem. Dalam hal ini kovariansi error dan nilai estimasi berbeda dengan algoritma Kalman Filter. Karena nilai estimasi dan kovariansi error diperoleh dari penurunan rumus yang didasarkan pada Definisi 2.1.

d. Tahap Koreksi

Pada tahap koreksi ini menghitung Kalman Gain, kovarian error pada model pengukuran kemudian diperoleh hasil estimasi. Pada tahap ini, perhitungan dikatakan bagus jika nilai kovarian errornya semakin kecil dan juga perhitungan dikatakan bagus jika nilai errornya semakin kecil pula.

3.6. Implementasi Metode Fraksional Kalman Filter *Second – Order*

Metode modifikasi Fraksional Kalman Filter *second – order* juga digunakan sistem model linier. Langkah-langkah yang dilakukan untuk estimasi model dengan menggunakan metode Fraksional Kalman Filter *second – order* yakni diantaranya

a. Menentukan model sistem dan model pengukuran

Model sistem dan pengukuran untuk Fraksional Kalman Filter *second – order* adalah

$$\Delta^2 \mathbf{x}_{n+1} = (A^2 - 2A + I)\mathbf{x}_{n-1} + (A - 2I)B\mathbf{u}_{n-1} + (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1} + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \quad (3.5)$$

$$\Delta^2 \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - 2\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{z}_n = H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

b. Pendiskritan

Metode Fraksional Kalman Filter yang digunakan yaitu algoritma Fraksional Kalman Filter waktu diskrit (*Discrete-time Kalman Filter*). Oleh karena itu, model polusi udara didiskritisasi dengan menggunakan metode Beda Hingga Maju karena diprediksi satu langkah ke depan.

c. Tahap Prediksi

Pada tahap prediksi ini menghitung kovariansi *error* dan nilai estimasi pada model sistem. Dalam hal ini kovariansi error dan nilai estimasi berbeda dengan algoritma Fraksional Kalman Filter *first – order*. Karena nilai

estimasi dan kovariansi error diperoleh dari penurunan rumus yang didasarkan pada Definisi 2.1.

d. Tahap Koreksi

Pada tahap koreksi ini menghitung Kalman Gain, kovarian error pada model pengukuran kemudian diperoleh hasil estimasi. Pada tahap ini, perhitungan dikatakan bagus jika nilai kovarian errornya semakin kecil dan juga perhitungan dikatakan bagus jika nilai errornya semakin kecil pula.

3.7. Simulasi, Analisis Hasil dan Pembahasan

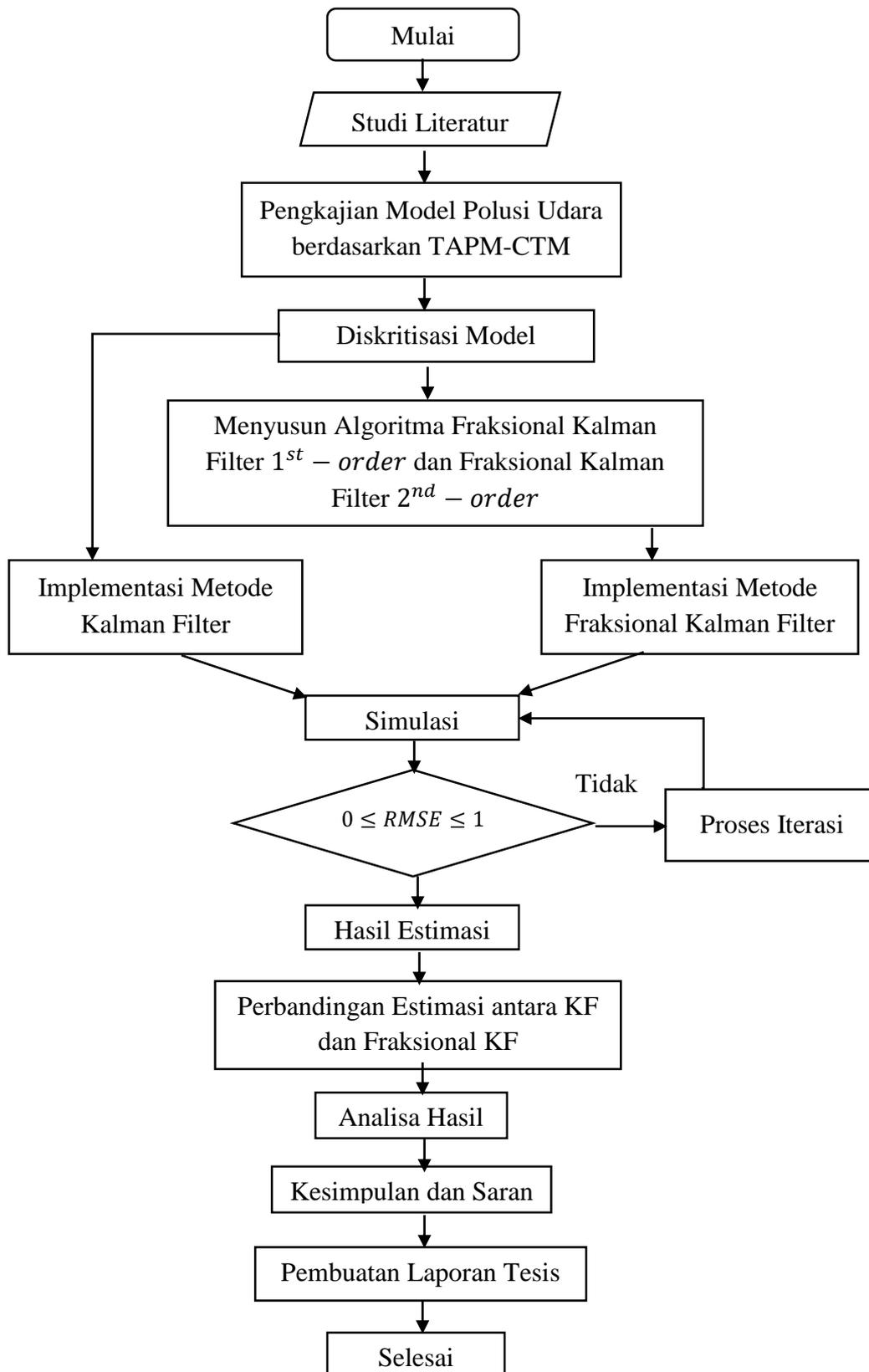
Pada tahap ini dilakukan penerapan model polusi udara dengan algoritma Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter. Selanjutnya dilakukan simulasi dengan menggunakan software MATLAB untuk mengetahui hasil estimasi dan dilakukan analisis terhadap hasil simulasi yang diberikan pada tahap sebelumnya. Kemudian dilakukan perbandingan antara Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter dari kedua metode tersebut, mana yang lebih sensitif pada estimasi pengukuran konsentrasi polutan di udara akan dibahas pada tahap ini. Kesensitifitas metode dilakukan dengan menghitung norm kovariansi erornya.

3.8. Penarikan Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil simulasi dan pembahasan pada tahap sebelumnya. Selanjutnya dari hasil kesimpulan dilakukan penulisan dalam format jurnal sebagai pra syarat sebelum hasil penelitian dibukukan dalam buku Tesis.

3.9. Penyusunan Laporan Hasil Penelitian

Pada tahap ini dilakukan penyusunan laporan berdasarkan analisis dari penelitian yang sudah dilakukan.



Gambar 3.1. Diagram Alir Penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini dijelaskan secara ringkas model polusi udara berdasarkan TAPM-CTM. Karena model polusi udara dalam bentuk kontinu, maka selanjutnya akan didiskritkan sehingga algoritma Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter dapat diimplementasikan dalam bentuk pemrograman dalam Matlab. Model polusi udara yang masih deterministik harus diubah menjadi model stokastik dengan menambahkan *noise* pada sistem dan pengukuran. Selanjutnya akan dibandingkan nilai RMSE antara Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter dengan melakukan beberapa kali simulasi dengan banyak waktu iterasi berbeda.

4.1 Pengkajian Model Polusi Udara

Model polusi udara TAPM-CTM (*The Air Pollution Model with Chemical Transport Model*) dikembangkan oleh Commonwealth Scientific dan Organisasi Penelitian Industri (CSIRO). Model ini merupakan persamaan 3D prognostik untuk penentuan konsentrasi polutan di udara. Model menggunakan persamaan lengkap yang mengatur perilaku atmosfer dan penyebaran polutan. Sebelumnya, pendekatan prognostik yang sudah ada tidak praktis untuk digunakan dalam pemodelan peraturan pada PC karena waktu dan sumber daya komputasi diperlukan, tetapi karena kemajuan dalam daya komputasi sekarang membuat pendekatan ini realistis untuk simulasi perpanjangan periode (hingga simulasi sepanjang tahun) dengan resolusi tinggi (sampai 0,1 km grid polutan). TAPM menggunakan informasi cuaca berskala besar (analisis sinoptik atau, ramalan cuaca) biasanya tersedia di jarak grid horizontal 100 km, sebagai batas kondisi untuk model outer grid. Selanjutnya TAPM memodelkan skala lokal pada resolusi yang lebih baik menggunakan pendekatan bersarang, memprediksi meteorologi skala lokal seperti angin laut dan medan yang menginduksi arus. Pendekatan prognostik menghilangkan kebutuhan untuk memiliki situs yang spesifik tentang data meteorologi dispersi model, namun memungkinkan asimilasi pengamatan jika mereka tersedia.

Untuk membentuk model matematis konsentrasi polutan dalam udara diperlukan pengertian dasar yang harus dipahami, yakni Hukum Fick II yang menjadi dasar pembentukan model polusi udara.

Hukum Fick II menyatakan bahwa laju perubahan konsentrasi zat dalam udara terhadap waktu sebanding dengan laju dari laju perubahan konsentrasi zat dalam udara terhadap posisi. Karena posisi difusi searah sumbu x , maka dapat dinotasikan secara matematis formulanya adalah :

$$\frac{\partial C}{\partial t} \sim \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

dengan :

C adalah konsentrasi zat dalam udara dengan satuan $\frac{kg}{m^3}$, t adalah waktu dalam satuan *detik*, dan K_x adalah tetapan kesebandingan dalam satuan $\frac{m^2}{detik}$.

4.2 Faktor - Faktor yang Mempengaruhi Tingkat Konsentrasi Polutan

Mengukur tingkat polusi udara di suatu daerah berarti mengukur tingkat konsentrasi suatu polutan dalam udara di daerah tersebut. Ada beberapa proses fisis dan kimia utama yang menjadi faktor yang mempengaruhi tingkat konsentrasi polutan dalam udara. Proses-proses tersebut meliputi :

1. Difusi Horizontal

Pada proses ini, zat (polutan) berdifusi dengan arah horizontal. Jika diilustrasikan secara matematis pada R^3 , proses perpindahan zat tersebut searah sumbu x atau sumbu y . Faktor ini mengindikasikan bahwa laju perubahan konsentrasi zat dalam udara terhadap waktu sebanding dengan laju dari laju perubahan konsentrasi zat dalam udara terhadap posisi karena proses difusi pada bidang xy . Secara matematis, pernyataan tersebut dapat dituliskan dengan :

$$\frac{\partial C(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y} \right).$$

2. Difusi Vertikal

Pada proses ini, zat (polutan) berdifusi dengan arah vertikal. Jika diilustrasikan secara matematis pada R^3 , proses perpindahan zat tersebut searah sumbu σ . Faktor ini mengindikasikan bahwa laju perubahan konsentrasi zat dalam udara terhadap waktu

sebanding dengan laju dari laju perubahan konsentrasi zat dalam udara terhadap posisi karena proses difusi searah sumbu σ . Secara matematis, pernyataan tersebut dapat dituliskan dengan :

$$\frac{\partial C(\sigma, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(K_{\sigma} \frac{\partial C(\sigma, t)}{\partial \sigma} \right).$$

3. Pengaruh dari Emisi Polutan

Polutan berasal dari suatu sumber daerah tertentu. Oleh karena itu laju perubahan dari emisi sumber tersebut juga mempengaruhi konsentrasi polutan itu sendiri. Sehingga dapat dituliskan :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = S_C$$

4. Reaksi Kimia

Reaksi kimia dari unsur-unsur atau molekul-molekul kimia yang terkandung dalam udara. Faktor ini mengindikasikan bahwa laju perubahan konsentrasi zat dalam udara terhadap waktu sebanding dengan konsentrasi zat yang akan dicari nilai konsentrasinya. Secara matematis, pernyataan tersebut dapat dinotasikan dengan :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = R(C_1(t), C_2(t), \dots, C_N(t)) = R_C$$

Berdasarkan penjelasan dari seluruh proses fisis dan kimia tersebut, dapat disimpulkan bahwa laju perubahan konsentrasi polutan dalam udara terhadap waktu sebanding dengan laju dari laju perubahan konsentrasi polutan dalam udara terhadap posisi karena proses difusi pada ruang dan sebanding dengan konsentrasi polutan dalam udara yang dihasilkan baik oleh sumber emisi maupun reaksi kimia antara komponen penyusun udara. Laju perubahan konsentrasi polutan dalam udara terhadap waktu tersebut dihambat oleh perubahan konsentrasi polutan dalam udara terhadap posisi karena proses transportasi karena tiupan angin dalam ruang.

Keseluruhan proses tersebut dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial parsial sebagai berikut :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} (\overline{w' C'}) + S_C + R_C \quad (4.1)$$

dengan :

$$\overline{w' C'} = -K_{\sigma} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Persamaan (4.1) menunjukkan bahwa konsentrasi polutan dalam udara bergantung pada waktu (variabel t) dan ruang (variabel x, y , dan σ) atau secara matematis, konsentrasi polutan dalam udara dinotasikan dengan $C(x, y, \sigma, t)$.

4.3 Diskritisasi Model

Model matematika dari model konsentrasi polutan dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &= K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(-K_\sigma \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) + S_C + R_C \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) + S_C + R_C \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 C}{(\partial \sigma)^2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \sigma \partial t}\right) + S_C + R_C \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 C}{(\partial \sigma)^2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) + S_C + R_C \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + K_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 C}{(\partial \sigma)^2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + K_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + S_C + R_C\end{aligned}\quad (4.2)$$

Model (4.2) berbentuk sistem dinamik dengan variabel keadaan yaitu C_t . Karena di dalam model sistem dinamik waktunya adalah kontinu sedangkan metode Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter hanya dapat diimplementasikan untuk sistem dengan waktu diskrit sehingga langkah selanjutnya yang harus dilakukan adalah melakukan pendiskritan dengan variabel perubahan keadaan terhadap waktu diaproksimasikan dengan formula beda maju (*forward difference*) dengan panjang dari grid variabel waktu (Δt).

Untuk menyederhanakan penulisan, sering dituliskan dengan notasi indeks. Indeks *subscript* pertama dan kedua sebagai variabel ruang dan *subscript* ketiga sebagai variabel waktu. Jadi, dapat dituliskan :

$$C(x, y, \sigma, t) \sim C_{i,j,k}^n$$

$$C(x, y, \sigma, t) \sim C(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta \sigma, n\Delta t) \sim C_{i,j,k}^n \text{ dimana } t \approx n\Delta t \text{ dan } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

sehingga diperoleh diskritisasi di titik i, j, k

$$C_t(x, y, \sigma, t) = \left(\frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t}\right)$$

Penerapan Beda Maju terhadap $C_\sigma(x, y, \sigma, t)$ di titik i, j, k (pada waktu n) adalah

$$C_\sigma(x, y, \sigma, t) = \left(\frac{C_{i,j,k+1}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta\sigma} \right)$$

Dengan cara yang sama maka penerapan Beda Pusat pada C_{xx} , C_{yy} , dan $C_{\sigma\sigma}$ adalah sebagai berikut

$$C_{xx}(x, y, \sigma, t) = \frac{C_{i+1,j,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2}$$

$$C_{yy}(x, y, \sigma, t) = \frac{C_{i,j+1,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2}$$

$$C_{\sigma\sigma}(x, y, \sigma, t) = \frac{C_{i,j,k+1}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j,k-1}^n}{\Delta\sigma^2}$$

Sehingga model persamaan polusi udara menjadi :

$$C_t = K_x C_{xx} + K_y C_{yy} + K_\sigma \left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta l} \right) \left(C_{\sigma\sigma} \frac{\Delta\sigma}{\Delta l} + C_\sigma \frac{\Delta\sigma}{\Delta l} \right) + S_C + R_C$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t} &= K_x \left(\frac{C_{i+1,j,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} \right) + K_y \left(\frac{C_{i,j+1,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} \right) + \\ &K_\sigma \left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta l} \right) \left(\left(\frac{C_{i,j,k+1}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j,k-1}^n}{\Delta\sigma^2} \right) \frac{\Delta\sigma}{\Delta l} + \left(\frac{C_{i,j,k+1}^n - C_{i,j,k}^n}{\Delta\sigma} \right) \frac{\Delta\sigma}{\Delta l} \right) + S_C + R_C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n &= K_x \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (C_{i+1,j,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i-1,j,k}^n) + K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (C_{i,j+1,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + \\ &C_{i,j-1,k}^n) + K_\sigma \frac{\Delta t}{\Delta l^2} (C_{i,j,k+1}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j,k-1}^n) + K_\sigma \Delta t \frac{\Delta\sigma}{\Delta l^2} (C_{i,j,k+1}^n - \\ &C_{i,j,k}^n) + \Delta t S_C + \Delta t R_C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{i,j,k}^{n+1} &= C_{i,j,k}^n + K_x \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (C_{i+1,j,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i-1,j,k}^n) + K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (C_{i,j+1,k}^n - \\ &2C_{i,j,k}^n + C_{i,j-1,k}^n) + K_\sigma \frac{\Delta t}{\Delta l^2} (C_{i,j,k+1}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j,k-1}^n) + \\ &K_\sigma \frac{\Delta t}{\Delta l^2} \Delta\sigma (C_{i,j,k+1}^n - C_{i,j,k}^n) + \Delta t S_C + \Delta t R_C \end{aligned} \quad (4.3)$$

Misalkan :

$$A1 = K_x \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$B = K_y \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$$

$$D = K_\sigma \frac{\Delta t}{\Delta l^2}$$

$$E = K_\sigma \frac{\Delta t}{\Delta l^2} \Delta\sigma$$

Sehingga Persamaan (4.3) menjadi

$$C_{i,j,k}^{n+1} = C_{i,j,k}^n + A1(C_{i+1,j,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i-1,j,k}^n) + B(C_{i,j+1,k}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j-1,k}^n) + D(C_{i,j,k+1}^n - 2C_{i,j,k}^n + C_{i,j,k-1}^n) + E(C_{i,j,k+1}^n - C_{i,j,k}^n) + \Delta t S_C + \Delta t R_C$$

$$C_{i,j,k}^{n+1} = C_{i,j,k}^n + A1C_{i+1,j,k}^n - 2A1C_{i,j,k}^n + A1C_{i-1,j,k}^n + BC_{i,j+1,k}^n - 2BC_{i,j,k}^n + BC_{i,j-1,k}^n + DC_{i,j,k+1}^n - 2DC_{i,j,k}^n + DC_{i,j,k-1}^n + EC_{i,j,k+1}^n - EC_{i,j,k}^n + \Delta t S_C + \Delta t R_C$$

$$C_{i,j,k}^{n+1} = C_{i,j,k}^n [1 - 2A1 - 2B - 2D - E] + A1C_{i+1,j,k}^n + A1C_{i-1,j,k}^n + BC_{i,j+1,k}^n + BC_{i,j-1,k}^n + C_{i,j,k+1}^n [D + E] + DC_{i,j,k-1}^n + \Delta t S_C + \Delta t R_C$$

$$C_{i,j,k}^{n+1} = C_{i,j,k}^n [1 - 2A1 - 2B - 2D - E] + A1C_{i+1,j,k}^n + BC_{i,j+1,k}^n + A1C_{i-1,j,k}^n + BC_{i,j-1,k}^n + C_{i,j,k+1}^n [D + E] + DC_{i,j,k-1}^n + \Delta t S_C + \Delta t R_C \quad (4.4)$$

Misalkan $[1 - 2A1 - 2B - 2D - E] = F$ maka Persamaan (4.4) dapat dituliskan kembali menjadi

$$C_{i,j,k}^{n+1} = FC_{i,j,k}^n + A1C_{i+1,j,k}^n + BC_{i,j+1,k}^n + A1C_{i-1,j,k}^n + BC_{i,j-1,k}^n + C_{i,j,k+1}^n [D + E] + DC_{i,j,k-1}^n + \Delta t S_C + \Delta t R_C \quad (4.5)$$

Selanjutnya dilakukan iterasi di titik $i, j, k, n + 1$ dan di titik i, j, k, n .

Untuk $i = 1, j = 1, k = 1$,

$$C_{1,1,1}^{n+1} = FC_{1,1,1}^n + A1C_{2,1,1}^n + BC_{1,2,1}^n + A1C_{0,1,1}^n + BC_{1,0,1}^n + C_{1,1,2}^n [D + E] + DC_{1,1,0}^n + \Delta t S_C + \Delta t R_C$$

Untuk $i = 1, j = 2, k = 1$,

$$C_{1,2,1}^{n+1} = FC_{1,2,1}^n + A1C_{2,2,1}^n + BC_{1,3,1}^n + A1C_{0,2,1}^n + BC_{1,1,1}^n + C_{1,2,2}^n [D + E] + DC_{1,2,0}^n + \Delta t S_C + \Delta t R_C$$

.
.
.

Untuk $i = 1, j = 1, k = 2$,

$$C_{1,1,2}^{n+1} = FC_{1,1,2}^n + A1C_{2,1,2}^n + BC_{1,2,2}^n + A1C_{0,1,2}^n + BC_{1,0,2}^n + C_{1,1,3}^n [D + E] + DC_{1,1,1}^n + \Delta t S_C + \Delta t R_C$$

Untuk $i = 1, j = 2, k = 2$,

$$C_{1,2,2}^{n+1} = FC_{1,2,2}^n + A1C_{2,2,2}^n + BC_{1,3,2}^n + A1C_{0,2,2}^n + BC_{1,1,2}^n + C_{1,2,3}^n [D + E] + DC_{1,2,1}^n + \Delta t S_C + \Delta t R_C$$

.
.
.

Untuk $i = 2, j = 1, k = 1$,

$$C_{2,1,1}^{n+1} = FC_{2,1,1}^n + A1C_{3,1,1}^n + BC_{2,2,1}^n + A1C_{1,1,1}^n + BC_{2,0,1}^n + C_{2,1,2}^n [D + E] + DC_{2,1,0}^n + \Delta t S_C + \Delta t R_C$$

Untuk $i = 2, j = 2, k = 1,$

$$C_{2,2,1}^{n+1} = FC_{2,2,1}^n + A1C_{3,2,1}^n + BC_{2,3,1}^n + A1C_{1,2,1}^n + BC_{2,1,1}^n + C_{2,2,2}^n [D + E] + DC_{2,2,0}^n + \Delta t S_C + \Delta t R_C$$

.
.
.

Untuk $i = 1, j = 1, k = 2,$

$$C_{2,1,2}^{n+1} = FC_{2,1,2}^n + A1C_{3,1,2}^n + BC_{2,2,2}^n + A1C_{1,1,2}^n + BC_{2,0,2}^n + C_{2,1,3}^n [D + E] + DC_{2,1,1}^n + \Delta t S_C + \Delta t R_C$$

Untuk $i = 1, j = 2, k = 2,$

$$C_{2,2,2}^{n+1} = FC_{2,2,2}^n + A1C_{3,2,2}^n + BC_{2,3,2}^n + A1C_{1,2,2}^n + BC_{2,1,2}^n + C_{2,2,3}^n [D + E] + DC_{2,2,1}^n + \Delta t S_C + \Delta t R_C$$

.
.
.

Berdasarkan hasil diskritisasi diatas maka dapat dituliskan dengan menggunakan matriks tridiagonal sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} C_{i,j,1}^{n+1} \\ C_{i,j,2}^{n+1} \\ \vdots \\ C_{i+1,j+1,1}^{n+1} \\ C_{i+1,j+1,2}^{n+1} \\ \vdots \\ C_{u-2,j-2,k-2}^{n+1} \\ C_{u-1,j-1,k-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & B & D+E & 0 & A1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ B & F & 0 & D+E & 0 & A1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ D & 0 & F & B & D+E & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & D & B & F & 0 & D+E & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ A1 & 0 & D & 0 & F & B & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A1 & 0 & 0 & B & F & \dots & D+E & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{i,j,1}^n \\ C_{i,j,2}^n \\ \vdots \\ C_{i+1,j+1,1}^n \\ C_{i+1,j+1,2}^n \\ \vdots \\ C_{u-2,j-2k-2}^n \\ C_{u-1,j-1,k-1}^n \end{bmatrix} + \Delta t S_C + \Delta t R_C \quad (4.6)$$

4.4 Bentuk Umum Persamaan dari Sistem dan Pengukuran

Model matematika dengan waktu diskrit pada Persamaan (4.6) secara umum dapat dituliskan dalam pernyataan sebagai berikut :

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n$$

Model sistem dan model pengukuran polutan pada masalah polusi udara masih dalam bentuk deterministik. Pada kenyataannya ada beberapa asumsi yang tidak masuk ke dalam model. Asumsi tersebut menyebabkan faktor stokastik berbentuk

noise dalam model tersebut perlu dipertimbangkan. Dengan demikian didapatkan model persamaan sistem stokastik diskrit sebagai berikut :

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \quad (4.7)$$

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{H}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \quad (4.8)$$

dengan $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n) + \mathbf{w}_n$

Noise sistem \mathbf{w}_n dan *noise* pengukuran \mathbf{v}_n dalam hal ini dibangkitkan melalui komputer dan biasanya diambil berdistribusi normal yang mempunyai nilai rata-rata atau *mean* nol. Secara umum variansi *noise* sistem dinyatakan dengan \mathbf{Q}_n dan variansi *noise* pengukuran dinyatakan dengan \mathbf{R}_n . Keduanya bergantung pada waktu dan nilainya diasumsikan konstan.

Matriks variansi *noise* sistem berbentuk persegi dan berukuran sesuai dengan ukuran kovariansi eror dari estimasi. Sedangkan matriks variansi *noise* pengukuran berbentuk persegi tetapi berukuran sesuai dengan jumlah baris matriks pengukuran \mathbf{H} yang dipilih. Selanjutnya metode Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter dapat diterapkan pada model stokastik (4.7) dan (4.8) dengan menambahkan beberapa kondisi awal yang diperlukan.

4.5 Menyusun Algoritma Fraksional Kalman Filter

Pendekatan Kalman Filter digunakan dalam sistem jaringan untuk data fusi atau kesalahan deteksi dalam sistem. Tetapi metode ini memiliki keterbatasan dalam mengestimasi variabel state yang tidak diketahui untuk mengetahui keakuratan pada level yg lebih tinggi.

Di sisi lain algoritma Fraksional Kalman Filter telah digunakan untuk mengestimasi variabel keadaan yang tidak diketahui di sistem yang kompleks dimana turunan fraksional dapat digunakan untuk mendeskripsikan keakuratan yang baik.

Dalam penelitian ini, disusun algoritma Fraksional Kalman Fiter dengan beda *first-order* dan beda *second-order*. Diambil orde tertinggi orde kedua, karena model konsentrasi polutan memiliki orde tertinggi dua. Pembentukan algoritma didasarkan pada kalkulus fraksional, yang mana memanfaatkan faktor $\binom{r}{s}$ dengan nilai r positif untuk mendapatkan suatu nilai diskrit dari suatu variabel *state* yang diamati.

4.5.1 Menyusun Algoritma Fraksional Kalman Filter *First-Order*

Metode Fraksional Kalman Filter digunakan untuk sistem linier. Adapun untuk fraksional *first – order* merupakan pengembangan dari metode Kalman Filter yang didasarkan pada pemecahan fraksional yakni orde fraksional itu sendiri. Yang dimaksud dengan *first – order* disini adalah orde beda fraksional dengan tingkat pertama. Dalam pembentukan algoritmanya didasarkan pada Definisi 2.1 tentang kalkulus fraksional. Pada Fraksional Kalman Filter *first – order* ini hanya dibutuhkan satu *state*, yakni variabel *state* \mathbf{x}_n dalam menentukan nilai estimasi pada variabel *state* \mathbf{x}_{n+1} .

4.5.1.1 Tahap Estimasi

Bentuk umum dari sistem dinamik stokastik linier diskrit yang digunakan adalah Persamaan (4.7) dan (4.8) yang dapat dituliskan kembali sebagai berikut :

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n$$

$$\mathbf{z}_n = H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

dengan

\mathbf{x}_{n+1} adalah variabel keadaan pada waktu $n + 1$ dan berdimensi $N \times 1$, \mathbf{x}_n adalah variabel keadaan pada waktu n dan berdimensi $N \times 1$, \mathbf{u}_n adalah vektor masukan deterministik pada waktu n , \mathbf{z}_n adalah vektor keluaran atau pengukuran, A merupakan matriks yang nilai elemennya merupakan koefisien dari variabel \mathbf{x}_{n+1} dengan dimensi matriks $N \times N$, B merupakan matriks yang nilai elemennya merupakan koefisien dari variabel \mathbf{u}_n dengan dimensi matriks $N \times 1$, H merupakan matriks yang nilai elemennya merupakan koefisien dari variabel \mathbf{x}_n dengan dimensi matriks $M \times N$.

Untuk variabel \mathbf{w}_n merupakan variabel *noise* pada sistem yang diasumsikan berdistribusi normal dengan *mean* 0, dan variansi \mathbf{Q}_n . Sedangkan variabel \mathbf{v}_n merupakan variabel *noise* pada pengukuran yang diasumsikan berdistribusi normal dengan *mean* 0, dan variansi \mathbf{R}_n .

Berdasarkan asumsi-asumsi diatas, maka $\bar{\mathbf{w}}_n = 0, \bar{\mathbf{v}}_n = 0, \overline{\mathbf{w}_n \mathbf{w}_n^T} = \mathbf{Q}_n$ dan $\overline{\mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T} = \mathbf{R}_n$. Simbol garis atas (overbar) dalam hal ini menunjukkan pada pengertian nilai ekspektasi atau mean dari suatu variabel random. Variabel *noise* dapat dituliskan menjadi $\mathbf{w}_n \sim N(0, \mathbf{Q}_n)$ dan $\mathbf{v}_n \sim N(0, \mathbf{R}_n)$. Untuk variabel *noise* pada sistem (\mathbf{w}_n) dan

variabel *noise* pada pengukuran (\mathbf{v}_n) diasumsikan *white*, tidak berkorelasi satu sama lain maupun dengan nilai estimasi awal \mathbf{x}_0 serta mempunyai distribusi normal.

Selanjutnya untuk orde pertama fraksional dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \\ &= (A\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n) - \mathbf{x}_n \\ &= A\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \\ &= (A - I)\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \\ &= A_d\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n\end{aligned}$$

dengan $\Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n) + \mathbf{w}_n$

sehingga diperoleh sistem stokastik diskrit linier *first – order* fraksional sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} &= A_d\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \\ \Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\end{aligned}\tag{4.9}$$

$$\mathbf{z}_n = H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

Selanjutnya dapat dituliskan *mean* dari \mathbf{x}_n sebagai berikut

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}_{n+1} &= \overline{A_d\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n} \\ &= A\bar{\mathbf{x}}_n + B\bar{\mathbf{u}}_n + \bar{\mathbf{w}}_n\end{aligned}$$

Karena proses *noise* \mathbf{w}_n adalah *white* maka dipenuhi $\bar{\mathbf{w}}_n = 0$. Sedangkan \mathbf{u}_n adalah vektor masukan deterministik sehingga berlaku $\bar{\mathbf{u}}_n = \mathbf{u}_n$. Dari uraian di atas didapat

$$\bar{\mathbf{x}}_{n+1} = A_d\bar{\mathbf{x}}_n + B\mathbf{u}_n\tag{4.10}$$

Bentuk pada $\bar{\mathbf{x}}_{n+1}$ pada Persamaan (4.10) sekaligus menggambarkan nilai dari variabel estimasi $\hat{\mathbf{x}}_{n+1}$.

Adapun nilai erornya adalah

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1}\tag{4.11}$$

Selanjutnya dari Persamaan (4.11) dapat dicari kovarian *state* \mathbf{x}_{n+1} , yang dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}P_{\mathbf{x}_{n+1}} &= E[\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^T] = E[(\mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1})(\mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_{n+1})^T] \\ &= E\left[\left((A_d\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n) - (A_d\hat{\mathbf{x}}_n + B\mathbf{u}_n)\right)\left((A_d\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n) - (A_d\hat{\mathbf{x}}_n + B\mathbf{u}_n)\right)^T\right] \\ &= E[(A_d(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{w}_n)(A_d(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{w}_n)^T]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[(A_d(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{w}_n) \left((A_d(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n))^T + \mathbf{w}_n^T \right) \right] \\
&= E \left[(A_d(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{w}_n) \left((\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T A_d^T + \mathbf{w}_n^T \right) \right] \\
&= E \left[A_d(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T A_d^T + A_d(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{w}_n^T + \mathbf{w}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T A_d^T + \right. \\
&\quad \left. \mathbf{w}_n\mathbf{w}_n^T \right] \\
&= E \left[A_d(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T A_d^T \right] + E \left[A_d(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{w}_n^T \right] + E \left[\mathbf{w}_n(\mathbf{x}_n - \right. \\
&\quad \left. \hat{\mathbf{x}}_n)^T A_d^T \right] + E \left[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_n^T \right] \\
&= A_d E \left[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T \right] A_d^T + A_d E \left[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{w}_n^T \right] + E \left[\mathbf{w}_n(\mathbf{x}_n - \right. \\
&\quad \left. \hat{\mathbf{x}}_n)^T \right] A_d^T + E \left[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_n^T \right] \\
&= A_d E \left[\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^T \right] A_d^T + A_d E \left[\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\mathbf{w}_n^T \right] + E \left[\mathbf{w}_n\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^T \right] A_d^T + E \left[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_n^T \right] \\
&= A_d \mathbf{P}_{x_n} A_d^T + A_d E \left[\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\mathbf{w}_n^T \right] + E \left[\mathbf{w}_n\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^T \right] A_d^T + \mathbf{Q}_{x_n} \\
&= (A - I)\mathbf{P}_{x_n}(A - I)^T + (A - I)\mathbf{P}_{x_n\mathbf{w}_n} + \mathbf{P}_{\mathbf{w}_n x_n}(A - I)^T + \mathbf{Q}_{x_n}
\end{aligned}$$

Karena \mathbf{w}_n diasumsikan *white noise* tidak berkorelasi satu sama lain dengan \mathbf{x}_n yang berarti bahwa

$$E[\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\mathbf{w}_n^T] = E[\mathbf{w}_n\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^T] = 0, \text{ maka didapat}$$

$$\mathbf{P}_{x_{n+1}} = E[\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^T] = (A - I)\mathbf{P}_{x_n}(A - I)^T + \mathbf{Q}_{x_n} \quad (4.12)$$

Persamaan (4.12) menunjukkan bahwa nilai kovariansi dari *state* \mathbf{x}_{n+1} sama dengan nilai kovarian error *state* \mathbf{x}_{n+1} .

Mean dari pengukuran sebagai *output* dapat dituliskan

$$\bar{\mathbf{z}}_n = \overline{H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n} = H\bar{\mathbf{x}}_n + \bar{\mathbf{v}}_n$$

Karena *noise* \mathbf{v}_n diasumsikan adalah *white* (berdistribusi normal dengan mean 0), maka didapat

$$\bar{\mathbf{z}}_n = H\bar{\mathbf{x}}_n \quad (4.13)$$

Bentuk pada $\bar{\mathbf{z}}_n$ pada Persamaan (4.13) sekaligus menggambarkan nilai dari variabel estimasi $\hat{\mathbf{z}}_n$.

Sehingga untuk mendapatkan kovarian dari pengukuran adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{z_n} &= E[\tilde{\mathbf{z}}_n\tilde{\mathbf{z}}_n^T] = E[(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_n)(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_n)^T] \\
&= E \left[\left((H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n) - H\hat{\mathbf{x}}_n \right) \left((H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n) - H\hat{\mathbf{x}}_n \right)^T \right] \\
&= E \left[\left(H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{v}_n \right) \left((H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n))^T + \mathbf{v}_n^T \right) \right] \\
&= E \left[\left(H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{v}_n \right) \left((\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T + \mathbf{v}_n^T \right) \right] \\
&= E \left[H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T + H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{v}_n^T + \mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T + \mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^T \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T] + E[H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{v}_n^T] + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T] + \\
&\quad E[\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^T] \\
&= HE[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T]H^T + HE[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{v}_n^T] + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T]H^T + \\
&\quad E[\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^T] \\
&= H\mathbf{P}_{z_n}H^T + HE[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{v}_n^T] + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T]H^T + \mathbf{R}_n
\end{aligned}$$

Dengan mengingat asumsi bahwa \mathbf{x}_n dan \mathbf{v}_n tidak berkorelasi sehingga

$$E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{v}_n^T] = E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T] = 0 \text{ maka didapat}$$

$$\mathbf{P}_{z_n} = E[\tilde{\mathbf{z}}_n\tilde{\mathbf{z}}_n^T] = H_n\mathbf{P}_{z_n}H^T + \mathbf{R}_n \quad (4.14)$$

Kovarian antara *state* \mathbf{x}_n dan *output* \mathbf{z}_n adalah

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{x_n z_n} &= E[\tilde{\mathbf{x}}_n\tilde{\mathbf{z}}_n^T] = E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_n)^T] \\
&= E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)((H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n) - H\hat{\mathbf{x}}_n)^T] \\
&= E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)((H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n))^T + \mathbf{v}_n^T)] \\
&= E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)((\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T + \mathbf{v}_n^T)] \\
&= E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T] + E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{v}_n^T] \\
&= E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T]H^T + E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{v}_n^T] \\
&= \mathbf{P}_{x_n}H^T + E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{v}_n^T]
\end{aligned}$$

Dengan mengingat asumsi bahwa \mathbf{x}_n dan \mathbf{v}_n tidak berkorelasi yaitu yang berarti

$E[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{v}_n^T] = 0$ maka diperoleh kovarian antara *state* \mathbf{x}_n dan *output* \mathbf{z}_n sebagai berikut:

$$\mathbf{P}_{x_n z_n} = E[\tilde{\mathbf{x}}_n\tilde{\mathbf{z}}_n^T] = \mathbf{P}_{x_n}H^T \quad (4.15)$$

Sedangkan untuk

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{z_n x_n} &= E[\tilde{\mathbf{z}}_n\tilde{\mathbf{x}}_n^T] = E[(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T] \\
&= E[((H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n) - H\hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T] \\
&= E[(H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{v}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T] \\
&= E[H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T + \mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T] \\
&= E[H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T] + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T] \\
&= HE[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T] + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T] \\
&= H\mathbf{P}_{x_n} + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T]
\end{aligned}$$

Dengan mengingat asumsi bahwa \mathbf{x}_n dan \mathbf{v}_n tidak berkorelasi yaitu yang berarti

$E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T] = 0$, maka diperoleh

$$\mathbf{P}_{z_n x_n} = E[\tilde{\mathbf{z}}_n \tilde{\mathbf{x}}_n^T] = \mathbf{H} \mathbf{P}_{x_n} \quad (4.16)$$

Dari Persamaan (4.13)-(4.16) dengan asumsi bahwa masing-masing variabel berdistribusi normal, maka dapat dituliskan distribusi variabel random gabungan *state* \mathbf{x}_n dan pengukuran \mathbf{z}_n adalah

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{z}_n \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_n \\ \bar{\mathbf{z}}_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x_n} & \mathbf{P}_{x_n z_n} \\ \mathbf{P}_{z_n x_n} & \mathbf{P}_{z_n} \end{bmatrix} \right)$$

atau

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{z}_n \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_n \\ \mathbf{H} \bar{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x_n} & \mathbf{P}_{x_n} \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} \mathbf{P}_{x_n} & \mathbf{H} \mathbf{P}_{x_n} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_n \end{bmatrix} \right)$$

dengan $\bar{\mathbf{x}}_n$ dan \mathbf{P}_{x_n} ditentukan secara rekursif dengan menggunakan Persamaan (4.10) dan (4.12).

Estimasi terbaik untuk *state* \mathbf{x}_n jika data pengukuran \mathbf{z}_n belum diberikan atau hanya informasi *plant* yang digunakan, maka \mathbf{x}_n yang digunakan adalah $\hat{\mathbf{x}}_n$ dengan diberikan nilai $\bar{\mathbf{x}}_0$ dengan menggunakan Persamaan (4.10). Begitu juga dengan nilai kovarian erornya menggunakan kovarian eror dari *state* dalam Persamaan (4.12) atau dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} - \hat{\mathbf{x}}_n$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{A}_d \bar{\mathbf{x}}_n + \mathbf{B} \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_n}^- = \mathbf{A}_d \mathbf{P}_n \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q}_n$$

Sedangkan estimasi linear terbaik untuk variabel *random* \mathbf{x}_n jika diberikan $\bar{\mathbf{x}}_n$, kovarian *state* \mathbf{P}_{x_n} dan pengukuran \mathbf{z}_n adalah

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_n} = (\mathbf{P}_{x_n}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H})^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \bar{\mathbf{x}}_n + \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_n} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{z}_n - \mathbf{H} \bar{\mathbf{x}}_n)$$

Dengan $\hat{\mathbf{x}}_n$ merupakan estimasi untuk \mathbf{x}_n dan $\tilde{\mathbf{x}}_n = (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n)$ adalah error estimasinya.

4.5.1.2. Algoritma Fraksional Kalman Filter *First – Order*

Pada Fraksional Kalman Filter *first – order*, proses estimasi dilakukan sama seperti pada Kalman Filter yakni dengan dua tahapan, dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasar sistem dinamik yang disebut tahap prediksi (*time update*) dan selanjutnya tahap koreksi (*measurement update*) dengan data-data pengukuran untuk memperbaiki hasil estimasi.

Tahap prediksi dipengaruhi oleh dinamika sistem dengan memprediksi variabel keadaan dengan menggunakan persamaan estimasi variabel keadaan dan tingkat akurasiya dihitung menggunakan persamaan kovarian *error*. Pada tahap ini didefinisikan estimate state $\hat{\mathbf{x}}_n^- \in R^p$ pada $n + 1$ yang sering disebut *priori state estimate* kemudian dihubungkan dengan kovariansi error $\mathbf{P}_{x_{n+1}}^-$ (*priori error covariance*).

Pada tahap koreksi, hasil estimasi variabel keadaan yang diperoleh pada tahap prediksi dikoreksi dengan menggunakan model pengukuran. Pada tahap ini akan memberikan suatu correction berdasarkan pada pengukuran \mathbf{z}_{n+1} pada waktu $n + 1$ untuk menghasilkan $\hat{\mathbf{x}}_n^- \in R^p$ dan kovarian error $\mathbf{P}_{x_{n+1}}$ yang masing-masing disebut *posteriori state estimasi* dan *posteriori error covariance*.

Nilai estimasi pada tahap koreksi bergantung pada residual (*measurement innovation*) yang dilambangkan dengan $\tilde{\mathbf{z}}_n$, yaitu:

$$\tilde{\mathbf{z}}_n = (\mathbf{z}_n - H\bar{\mathbf{x}}_n)$$

dan koefisien pembobotan dari residual tersebut biasanya disebut Kalman Gain yang digunakan untuk meminimalisasi suatu *posteriori error covariance* (\mathbf{P}_{x_n}) yang dinyatakan sebagai berikut

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_n} H^T \mathbf{R}_n^{-1}$$

Catatan bahwa jika terjadi kasus $\det(\mathbf{P}_{x_{n+1}}^-) = 0$ pada tahap prediksi maka nilai $(\mathbf{P}_{x_{n+1}}^-)^-$ pada tahap koreksi tidak dapat ditentukan. Oleh karena itu diuraikan bentuk alternatif dari tahap koreksi dengan melibatkan Kalman Gain yaitu:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n &= \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_n} H^T \mathbf{R}_n^{-1} \\ &= \mathbf{P}_n H^T \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T) (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_n (H^T + H^T \mathbf{R}_n^{-1} H \mathbf{P}_n^- H^T) (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_n [(\mathbf{P}_n^-)^{-1} \mathbf{P}_n^- H^T + H^T \mathbf{R}_n^{-1} H \mathbf{P}_n^- H^T] (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_n [(\mathbf{P}_n^-)^{-1} + H^T \mathbf{R}_n^{-1} H] \mathbf{P}_n^- H^T (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_n (\mathbf{P}_n^{-1}) \mathbf{P}_n^- H^T (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_n^- H^T (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1} \end{aligned}$$

Sehingga dari urutan di atas didapatkan:

$$K_n = P_n^- H^T (R_n + H P_n^- H^T)^{-1}$$

$$P_{n+1} = [I - K_{n+1} H] P_{n+1}^-$$

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_{n+1}^- + K_{n+1} (z_{n+1} - H \hat{x}_{n+1}^-)$$

Secara ringkas algoritma Fraksional Kalman Filter *first – order* disajikan dalam Tabel 4.1

Tabel 4.1 Algoritma Fraksional Kalman Filter *first – order*

Model Sistem dan Pengukuran	<p>Model Sistem:</p> $\Delta^1 x_{n+1} = A_d x_n + B u_n + w_n$ $x_{n+1} = \Delta^1 x_{n+1} + x_n$ <p>dengan $A_d = (A - I)$</p> <p>Model Pengukuran : $z_n = H x_n + v_n$</p> <p>Asumsi :</p> $x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}); w_n \sim N(0, Q_n); v_n \sim N(0, R_n)$
Inisialisasi	$\hat{x}_0 = \bar{x}_0$ $P_0 = E[(\hat{x}_0 - x_0)(\hat{x}_0 - x_0)^T]$
Tahap Prediksi (<i>Time Update</i>)	<p>Estimasi : $\hat{x}_{n+1}^- = A_d \hat{x}_n^- + B u_n$</p> <p>Kovariansi Error : $P_{n+1}^- = A_d P_n A_d^T + Q_n$</p>
Tahap Koreksi (<i>Measurement Update</i>)	<p>Kalman Gain : $K_n = P_n^- H^T (R_n + H P_n^- H^T)^{-1}$</p> <p>Estimasi : $\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_{n+1}^- + K_{n+1} (z_{n+1} - H \hat{x}_{n+1}^-)$</p> <p>Kovariansi Error : $P_{n+1} = [I - K_{n+1} H] P_{n+1}^-$</p>

4.5.2 Menyusun Algoritma Fraksional Kalman Filter *Second-Order*

Metode Fraksional Kalman Filter *second – order* merupakan pengembangan dari metode Kalman Filter yang didasarkan pada pemecahan fraksional yakni orde fraksional itu sendiri. Yang dimaksud dengan *second – order* disini adalah orde beda fraksional dengan tingkat atau ordo tertinggi dua. Dalam penelitian tentang estimasi konsentrasi polutan ini diperlukan fraksional *second – order*, dikarenakan bentuk model polutan memiliki tingkat turunan tertinggi dua. Dan untuk pembentukan algoritmanya didasarkan pada Definisi 2.1 tentang kalkulus fraksional. Pada Fraksional Kalman Filter *second – order* ini dibutuhkan dua *state* dalam menentukan nilai estimasi pada waktu berikutnya.

4.5.2.1 Tahap Estimasi

Dalam menentukan nilai estimasi pada waktu ke $n + 1$, maka terlebih dahulu diturunkan rumus untuk fraksional *second – order*.

Dengan menggunakan Definisi 2.1:

$$\Delta^r \mathbf{x}_n = \frac{1}{h^r} \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{r}{s} \mathbf{x}_{n-s}$$

dimana diasumsikan bahwa *sampling interval* h bernilai 1, \mathbf{x}_n adalah state pada waktu ke n , r adalah orde fraksional kedua. Selanjutnya dapat diperoleh *second – order* fraksional sebagai berikut :

Untuk $n = 1$

$$\begin{aligned} \Delta^2 \mathbf{x}_1 &= \sum_{s=0}^1 (-1)^s \binom{2}{s} \mathbf{x}_{1-s} \\ &= (-1)^0 \binom{2}{0} \mathbf{x}_{1-0} + (-1)^1 \binom{2}{1} \mathbf{x}_{1-1} \\ &= (1) \frac{2!}{0!2!} \mathbf{x}_1 + (-1) \frac{2!}{1!1!} \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Untuk $n = 2$

$$\begin{aligned} \Delta^2 \mathbf{x}_2 &= \sum_{s=0}^2 (-1)^s \binom{2}{s} \mathbf{x}_{2-s} \\ &= (-1)^0 \binom{2}{0} \mathbf{x}_{2-0} + (-1)^1 \binom{2}{1} \mathbf{x}_{2-1} + (-1)^2 \binom{2}{2} \mathbf{x}_{2-2} \\ &= (1) \frac{2!}{0!2!} \mathbf{x}_2 + (-1) \frac{2!}{1!1!} \mathbf{x}_1 + (1) \frac{2!}{1!1!} \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

Untuk $n = 3$

$$\begin{aligned} \Delta^2 \mathbf{x}_3 &= \sum_{s=0}^3 (-1)^s \binom{2}{s} \mathbf{x}_{3-s} \\ &= (-1)^0 \binom{2}{0} \mathbf{x}_{3-0} + (-1)^1 \binom{2}{1} \mathbf{x}_{3-1} + (-1)^2 \binom{2}{2} \mathbf{x}_{3-2} + (-1)^3 \binom{2}{3} \mathbf{x}_{3-3} \\ &= (1) \frac{2!}{0!2!} \mathbf{x}_3 + (-1) \frac{2!}{1!1!} \mathbf{x}_2 + (1) \frac{2!}{1!1!} \mathbf{x}_1 + (0) \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_3 - 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

Dari perhitungan diatas dapat dirumuskan bahwa

$$\Delta^2 \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - 2\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1}$$

Untuk model fraksional *second – order* dapat dituliskan sebagai berikut: :

$$\begin{aligned} \Delta^2 \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_{n+1} - 2\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1} \\ &= (\Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_n) - 2\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((A - I)x_n + Bu_n + w_n + x_n) - 2x_n + x_{n-1} \\
&= Ax_n - 2x_n + Bu_n + w_n + x_{n-1} \\
&= (A - 2I)x_n + Bu_n + w_n + x_{n-1} \\
&= (A - 2I)(\Delta^1 x_n + x_{n-1}) + Bu_n + w_n + x_{n-1} \\
&= (A - 2I)((A - I)x_{n-1} + Bu_{n-1} + w_{n-1} + x_{n-1}) + Bu_n + w_n + x_{n-1} \\
&= (A - 2I)(Ax_{n-1} + Bu_{n-1} + w_{n-1}) + Bu_n + w_n + x_{n-1} \\
&= (A - 2I)Ax_{n-1} + (A - 2I)Bu_{n-1} + (A - 2I)w_{n-1} + Bu_n + w_n + x_{n-1} \\
&= (A^2 - 2AI)x_{n-1} + (A - 2I)Bu_{n-1} + (A - 2I)w_{n-1} + Bu_n + w_n + \\
&\quad x_{n-1} \\
&= (A^2 - 2A + I)x_{n-1} + (A - 2I)Bu_{n-1} + (A - 2I)w_{n-1} + Bu_n + w_n \\
&= (A^2 - 2A + I)x_{n-1} + (A - 2I)Bu_{n-1} + (A - 2I)w_{n-1} + Bu_n + w_n
\end{aligned}$$

dengan $\Delta^2 x_{n+1} = f(x_{n-1}, u_{n-1}) + w_{n-1}$

sehingga diperoleh sistem stokastik diskrit linier *second-order* fraksional sebagai berikut :

$$\Delta^2 x_{n+1} = (A^2 - 2A + I)x_{n-1} + (A - 2I)Bu_{n-1} + (A - 2I)w_{n-1} + Bu_n + w_n$$

$$\Delta^2 x_{n+1} = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}$$

$$z_n = Hx_n + v_n$$

Selanjutnya dapat dituliskan *mean* dari x_{n+1} sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{n+1} &= \overline{(A^2 - 2A + I)x_{n-1} + (A - 2I)Bu_{n-1} + (A - 2I)w_{n-1} + Bu_n + w_n} \\
&= (A^2 - 2A + I)\bar{x}_{n-1} + (A - 2I)B\bar{u}_{n-1} + (A - 2I)\bar{w}_{n-1} + B\bar{u}_n + \bar{w}_n
\end{aligned}$$

Karena proses *noise* w_n adalah *white* maka mean $\bar{w}_n = 0$. Sedangkan u_{n-1} adalah vektor masukan deterministik sehingga berlaku $\bar{u}_{n-1} = u_{n-1}$. Dari uraian di atas didapat

$$\bar{x}_{n+1} = (A^2 - 2A + I)\bar{x}_{n-1} + (A - 2I)Bu_{n-1} + Bu_n \quad (4.17)$$

Bentuk pada \bar{x}_{n+1} pada Persamaan (4.17) sekaligus menggambarkan nilai dari variabel estimasi \hat{x}_{n+1} .

Adapun nilai erornya adalah

$$\tilde{x}_{n+1} = x_{n+1} - \hat{x}_{n+1} \quad (4.18)$$

Dari Persamaan (4.18) dapat dicari kovarian *state* x_{n+1} , dapat dituliskan sebagai berikut

$$P_{x_{n+1}} = E[\tilde{x}_{n+1}\tilde{x}_{n+1}^T] = E[(x_{n+1} - \hat{x}_{n+1})(x_{n+1} - \hat{x}_{n+1})^T]$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\left((A^2 - 2A + I)\mathbf{x}_{n-1} + (A - 2I)B\mathbf{u}_{n-1} + (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1} + B\mathbf{u}_n + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \mathbf{w}_n \right) - \left((A^2 - 2A + I)\hat{\mathbf{x}}_{n-1} + (A - 2I)B\mathbf{u}_{n-1} + B\mathbf{u}_n \right) \right] \left((A^2 - 2A + \right. \\
&\quad \left. I)\mathbf{x}_{n-1} + (A - 2I)B\mathbf{u}_{n-1} + (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1} + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n \right) - \left((A^2 - 2A + \right. \\
&\quad \left. I)\hat{\mathbf{x}}_{n-1} + (A - 2I)B\mathbf{u}_{n-1} + B\mathbf{u}_n \right) \left. \right)^T \Big] \\
&= E \left[\left((A^2 - 2A + I)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}) + (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{w}_n \right) \left((A^2 - 2A + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. I)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}) + (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{w}_n \right)^T \right] \\
&= E \left[\left((A^2 - 2A + I)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}) + (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{w}_n \right) \left((A^2 - 2A + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. I)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}) \right)^T + (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1}^T + \mathbf{w}_n^T \right] \\
&= E \left[\left((A^2 - 2A + I)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}) + (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{w}_n \right) \left((\mathbf{x}_{n-1} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T (A^2 - 2A + I)^T + (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1}^T + \mathbf{w}_n^T \right) \right] \\
&= E \left[(A^2 - 2A + I)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T (A^2 - 2A + I)^T + (A^2 - \right. \\
&\quad \left. 2A + I)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})(A - 2I)\mathbf{w}_{n-1}^T + (A^2 - 2A + I)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{w}_n^T + \right. \\
&\quad \left. (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T (A^2 - 2A + I)^T + (A - 2I)(A - \right. \\
&\quad \left. 2I)\mathbf{w}_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}^T + (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1}\mathbf{w}_n^T + \mathbf{w}_n(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T (A^2 - 2A + I)^T + \right. \\
&\quad \left. \mathbf{w}_n(A - 2I)\mathbf{w}_{n-1}^T + \mathbf{w}_n\mathbf{w}_n^T \right] \\
&= E \left[(A^2 - 2A + I)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T (A^2 - 2A + I)^T \right] + \\
&\quad E \left[(A^2 - 2A + I)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})(A - 2I)\mathbf{w}_{n-1}^T \right] + E \left[(A^2 - 2A + I)(\mathbf{x}_{n-1} - \right. \\
&\quad \left. \hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{w}_n^T \right] + E \left[(A - 2I)\mathbf{w}_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T (A^2 - 2A + I)^T \right] + E \left[(A - \right. \\
&\quad \left. 2I)^2\mathbf{w}_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}^T \right] + E \left[(A - 2I)\mathbf{w}_{n-1}\mathbf{w}_n^T \right] + E \left[\mathbf{w}_n(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T (A^2 - \right. \\
&\quad \left. 2A + I)^T \right] + E \left[\mathbf{w}_n(A - 2I)\mathbf{w}_{n-1}^T \right] + E \left[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_n^T \right] \\
&= (A^2 - 2A + I)E \left[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T \right] (A^2 - 2A + I)^T + (A^2 - \right. \\
&\quad \left. 2A + I)(A - 2I)E \left[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{w}_{n-1}^T \right] + (A^2 - 2A + I)E \left[(\mathbf{x}_{n-1} - \right. \\
&\quad \left. \hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{w}_n^T \right] + (A - 2I)E \left[\mathbf{w}_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T \right] (A^2 - 2A + I)^T + (A - \right. \\
&\quad \left. 2I)^2 E \left[\mathbf{w}_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}^T \right] + (A - 2I)E \left[\mathbf{w}_{n-1}\mathbf{w}_n^T \right] + E \left[\mathbf{w}_n(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T \right] (A^2 - \right. \\
&\quad \left. 2A + I)^T + (A - 2I)E \left[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_{n-1}^T \right] + E \left[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_n^T \right] \\
&= (A^2 - 2A + I)E \left[\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^T \right] (A^2 - 2A + I)^T + (A^2 - 2A + I)(A - \right. \\
&\quad \left. 2I)E \left[\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\mathbf{w}_{n-1}^T \right] + (A^2 - 2A + I)E \left[\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\mathbf{w}_n^T \right] + (A - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2I)E[\mathbf{w}_{n-1}\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^T](A^2 - 2A + I)^T + (A - 2I)^2E[\mathbf{w}_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}^T] + (A - \\
& 2I)E[\mathbf{w}_{n-1}\mathbf{w}_n^T] + E[\mathbf{w}_n\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^T](A^2 - 2A + I)^T + (A - 2I)E[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_{n-1}^T] + \\
& E[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_n^T] \\
= & (A^2 - 2A + I)\mathbf{P}_{x_{n-1}}(A^2 - 2A + I)^T + (A^2 - 2A + I)(A - 2I)\mathbf{P}_{x_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}} + \\
& (A^2 - 2A + I)\mathbf{P}_{x_{n-1}\mathbf{w}_n} + (A - 2I)\mathbf{P}_{\mathbf{w}_{n-1}x_{n-1}}(A^2 - 2A + I)^T + (A - \\
& 2I)^2E[\mathbf{w}_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}^T] + (A - 2I)E[\mathbf{w}_{n-1}\mathbf{w}_n^T] + \mathbf{P}_{\mathbf{w}_n x_{n-1}}(A^2 - 2A + I)^T + \\
& (A - 2I)E[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_{n-1}^T] + E[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_n^T]
\end{aligned}$$

Karena diasumsikan \mathbf{x}_{n-1} dan \mathbf{w}_{n-1} tidak berkorelasi yaitu yang berarti

$$\mathbf{P}_{x_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}} = \mathbf{P}_{\mathbf{w}_{n-1}x_{n-1}} = \mathbf{P}_{x_{n-1}\mathbf{w}_n} = \mathbf{P}_{\mathbf{w}_n x_{n-1}} = 0,$$

Serta diasumsikan bahwa \mathbf{w}_{n-1} dan \mathbf{w}_n juga tidak berkorelasi satu sama lain, yang berarti

$$E[\mathbf{w}_{n-1}\mathbf{w}_n^T] = E[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_{n-1}^T] = 0$$

maka didapat

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{x_{n-1}} &= E[\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^T] \\
&= (A^2 - 2A + I)\mathbf{P}_{x_{n-1}}(A^2 - 2A + I)^T + (A - 2I)^2E[\mathbf{w}_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}^T] + \\
& \quad E[\mathbf{w}_n\mathbf{w}_n^T] \\
&= (A^2 - 2A + I)\mathbf{P}_{x_{n-1}}(A^2 - 2A + I)^T + (A - 2I)^2\mathbf{Q}_{x_{n-1}} + \mathbf{Q}_{x_n} \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Persamaan (4.19) menunjukkan bahwa nilai kovariansi dari *state* \mathbf{x}_{n+1} sama dengan nilai kovarian error state \mathbf{x}_{n+1} .

Mean dari pengukuran sebagai *output* dapat dituliskan

$$\bar{\mathbf{z}}_n = \overline{H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n} = H\bar{\mathbf{x}}_n + \bar{\mathbf{v}}_n$$

Karena diasumsikan *noise* \mathbf{v}_n adalah *white* (berdistribusi normal dengan *mean* 0), maka didapat

$$\bar{\mathbf{z}}_n = H\bar{\mathbf{x}}_n \quad (4.20)$$

Bentuk pada $\bar{\mathbf{z}}_n$ pada Persamaan (4.20) sekaligus menggambarkan nilai dari variabel estimasi $\hat{\mathbf{z}}_n$.

Sehingga untuk mendapatkan kovarian dari pengukuran adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{z_n} &= E[\tilde{\mathbf{z}}_n\tilde{\mathbf{z}}_n^T] = E[(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_n)(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_n)^T] \\
&= E\left[\left((H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n) - H\hat{\mathbf{x}}_n\right)\left((H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n) - H\hat{\mathbf{x}}_n\right)^T\right] \\
&= E\left[\left(H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{v}_n\right)\left(\left(H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\right)^T + \mathbf{v}_n^T\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[(H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{v}_n)((\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T + \mathbf{v}_n^T)] \\
&= E[H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T + H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{v}_n^T + \mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T + \mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^T] \\
&= E[H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T] + E[H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{v}_n^T] + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T] + \\
&\quad E[\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^T] \\
&= HE[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T]H^T + HE[(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)\mathbf{v}_n^T] + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T]H^T + \\
&\quad E[\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^T] \\
&= H\mathbf{P}_{z_n}H^T + H\mathbf{P}_{z_nv_n} + \mathbf{P}_{v_nz_n}H^T + \mathbf{R}_n
\end{aligned}$$

Dengan mengingat asumsi bahwa \mathbf{x}_n dan \mathbf{v}_n tidak berkorelasi sehingga

$$\mathbf{P}_{z_nv_n} = \mathbf{P}_{v_nz_n} = 0 \text{ maka didapat}$$

$$\mathbf{P}_{z_n} = E[\tilde{\mathbf{z}}_n\tilde{\mathbf{z}}_n^T] = H\mathbf{P}_{z_n}H^T + \mathbf{R}_n \quad (4.21)$$

Kovarian antara *state* \mathbf{x}_{n-1} dan *output* \mathbf{z}_n adalah

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{x_{n-1}z_n} &= E[\tilde{\mathbf{x}}_{n-1}\tilde{\mathbf{z}}_n^T] = E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_n)^T] \\
&= E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})((H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n) - H\hat{\mathbf{x}}_n)^T] \\
&= E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})((H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n))^T + \mathbf{v}_n^T)] \\
&= E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})((\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T + \mathbf{v}_n^T)] \\
&= E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)^T H^T] + E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{v}_n^T] \\
&= E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})((A_d\mathbf{x}_{n-1} + B\mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1}) - (A_d\hat{\mathbf{x}}_{n-1} + \\
&\quad B\mathbf{u}_{n-1}))^T] H^T + E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{v}_n^T] \\
&= E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})((A_d(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}) + \mathbf{w}_{n-1}))^T] H^T + E[(\mathbf{x}_{n-1} - \\
&\quad \hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{v}_n^T] \\
&= E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})((\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T A_d^T + \mathbf{w}_{n-1}^T)] H^T + E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{v}_n^T] \\
&= E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T A_d^T + (\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{w}_{n-1}^T] H^T + \\
&\quad E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{v}_n^T] \\
&= E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] H^T A_d^T + E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{w}_{n-1}^T] H^T + \\
&\quad E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{v}_n^T] \\
&= \mathbf{P}_{x_{n-1}}H^T A_d^T + \mathbf{P}_{x_{n-1}w_n}H^T + \mathbf{P}_{x_{n-1}v_n}
\end{aligned}$$

Karena diasumsikan \mathbf{x}_{n-1} dan \mathbf{w}_{n-1} serta \mathbf{x}_{n-1} dan \mathbf{v}_n tidak berkorelasi yaitu yang berarti

$$\mathbf{P}_{x_{n-1}w_n} = \mathbf{P}_{x_{n-1}v_n} = 0$$

Sehinga diperoleh

$$\mathbf{P}_{x_{n-1}z_n} = E[\tilde{\mathbf{x}}_{n-1}\tilde{\mathbf{z}}_n^T] = \mathbf{P}_{x_{n-1}}H^T A_d^T \quad (4.22)$$

Sedangkan untuk kovarian antara *output* \mathbf{z}_n dan *state* \mathbf{x}_{n-1} adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{z_n x_{n-1}} &= E[\tilde{\mathbf{z}}_n \tilde{\mathbf{x}}_{n-1}^T] = E[(\mathbf{z}_n - \hat{\mathbf{z}}_n)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] \\ &= E[((H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n) - H\hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] \\ &= E[(H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n) + \mathbf{v}_n)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] \\ &= E[H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T + \mathbf{v}_n(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] \\ &= E[H(\mathbf{x}_n - \hat{\mathbf{x}}_n)(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] \\ &= HE[(A_d \mathbf{x}_{n-1} + B\mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_{n-1}) - (A_d \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + B\mathbf{u}_{n-1})](\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] \\ &= HE[(A_d(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}) + \mathbf{w}_{n-1})(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] \\ &= HE[A_d(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T + \mathbf{w}_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] \\ &= HA_d E[(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] + E[\mathbf{w}_{n-1}(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] + E[\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_{n-1} - \hat{\mathbf{x}}_{n-1})^T] \\ &= HA_d \mathbf{P}_{x_{n-1}} + \mathbf{P}_{w_{n-1}x_{n-1}} + \mathbf{P}_{v_n x_{n-1}} \end{aligned}$$

Karena diasumsikan \mathbf{x}_{n-1} dan \mathbf{v}_{n-1} serta \mathbf{x}_{n-1} dan \mathbf{w}_{n-1} tidak berkorelasi yaitu yang berarti $\mathbf{P}_{v_n x_{n-1}} = 0$, $\mathbf{P}_{w_{n-1}x_{n-1}} = 0$ maka diperoleh

$$\mathbf{P}_{z_n x_{n-1}} = E[\tilde{\mathbf{z}}_n \tilde{\mathbf{x}}_{n-1}^T] = HA_d \mathbf{P}_{x_{n-1}} \quad (4.23)$$

Dari Persamaan (4.20)-(4.23) dengan asumsi bahwa masing-masing variabel berdistribusi normal, maka dapat dituliskan distribusi variabel random gabungan \mathbf{x}_{n-1} dan \mathbf{z}_n adalah

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1} \\ \mathbf{z}_n \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{n-1} \\ \bar{\mathbf{z}}_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x_{n-1}} & \mathbf{P}_{x_{n-1}z_n} \\ \mathbf{P}_{z_n x_{n-1}} & \mathbf{P}_{z_n} \end{bmatrix} \right)$$

atau

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_n \\ \mathbf{z}_n \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{n-1} \\ H\bar{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{x_n} & \mathbf{P}_{x_{n-1}}H^T A_d^T \\ HA_d \mathbf{P}_{x_{n-1}} & H\mathbf{P}_{z_n}H^T + \mathbf{R}_n \end{bmatrix} \right)$$

dengan $\bar{\mathbf{x}}_n$ dan \mathbf{P}_{x_n} ditentukan secara rekursif dengan menggunakan Persamaan (4.17) dan (4.19).

Estimasi terbaik untuk *state* \mathbf{x}_n jika data pengukuran \mathbf{z}_n belum diberikan atau hanya informasi *plant* yang digunakan, maka \mathbf{x}_n yang digunakan adalah $\hat{\mathbf{x}}_n$ dengan diberikan nilai $\bar{\mathbf{x}}_0$ dengan menggunakan Persamaan (4.17). Begitu juga dengan nilai kovarian erornya menggunakan kovarian eror dari *state* dalam Persamaan (4.19) atau dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \Delta^2 \mathbf{x}_{n+1} - 2\hat{\mathbf{x}}_n + \hat{\mathbf{x}}_{n-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = (A^2 - 2A + I)\bar{\mathbf{x}}_{n-1} + (A - 2I)B\mathbf{u}_{n-1} + B\mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_n} = (A^2 - 2A + I)\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{n-1}}(A^2 - 2A + I)^T + (A - 2I)\mathbf{Q}_{n-1} + \mathbf{Q}_n$$

Sedangkan estimasi linear terbaik untuk variabel *random* \mathbf{x}_n jika diberikan $\bar{\mathbf{x}}_n$, $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}_n}$ dan pengukuran z_n adalah

$$\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}_n} = (\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}_n}^{-1} + H^T \mathbf{R}_n^{-1} H)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \bar{\mathbf{x}}_n + \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}_n} H^T \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{z}_n - H\bar{\mathbf{x}}_n)$$

Dengan $\hat{\mathbf{x}}_n$ merupakan estimasi untuk \mathbf{x}_n dan $\tilde{\mathbf{x}}_n = (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n)$ adalah error estimasinya.

4.5.2.2. Algoritma Fraksional Kalman Filter *Second – Order*

Pada Fraksional Kalman Filter *second – order*, proses estimasi dilakukan sama seperti pada Kalman Filter yakni dengan dua tahapan, dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasar sistem dinamik yang disebut tahap prediksi (*time update*) dan selanjutnya tahap koreksi (*measurement update*) dengan data-data pengukuran untuk memperbaiki hasil estimasi.

Tahap prediksi dipengaruhi oleh dinamika sistem dengan memprediksi variabel keadaan dengan menggunakan persamaan estimasi variabel keadaan dan tinglat akurasi dihitung menggunakan persamaan kovarian *error*. Pada tahap ini didefinisikan estimate state $\hat{\mathbf{x}}_n^- \in R^p$ pada $n + 1$ yang sering disebut *priori state estimate* kemudian dihubungkan dengan kovariansi error $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{n+1}}^-$ (*priori error covariance*).

Pada tahap koreksi, hasil estimasi variabel keadaan yang diperoleh pada tahap prediksi dikoreksi dengan menggunakan model pengukuran. Pada tahap ini akan memberikan suatu *correction* berdasarkan pada pengukuran \mathbf{z}_{n+1} pada waktu $n + 1$

untuk menghasilkan $\hat{\mathbf{x}}_n^- \in R^p$ dan kovarian error $\mathbf{P}_{x_{n+1}}$ yang masing-masing disebut *posteriori state estimasi* dan *posteriori error covariance*.

Nilai estimasi pada tahap koreksi bergantung pada residual (*measurement innovation*) yang dilambangkan dengan $\tilde{\mathbf{z}}_n$, yaitu:

$$\tilde{\mathbf{z}}_n = (\mathbf{z}_n - H\bar{\mathbf{x}}_n)$$

dan koefisien pembobotan dari residual tersebut biasanya disebut Kalman Gain yang digunakan untuk meminimalisasi suatu *posteriori error covariance* (\mathbf{P}_{x_n}) yang dinyatakan sebagai berikut

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_n} H^T \mathbf{R}_n^{-1}$$

Catatan bahwa jika terjadi kasus $\det(\mathbf{P}_{x_{n+1}}^-) = 0$ pada tahap prediksi maka nilai $(\mathbf{P}_{x_{n+1}}^-)^-$ pada tahap koreksi tidak dapat ditentukan. Oleh karena itu diuraikan bentuk alternatif dari tahap koreksi dengan melibatkan Kalman Gain yaitu:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n &= \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_n} H^T \mathbf{R}_n^{-1} \\ &= \mathbf{P}_n H^T \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T) (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_n (H^T + H^T \mathbf{R}_n^{-1} H \mathbf{P}_n^- H^T) (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_n [(\mathbf{P}_n^-)^{-1} \mathbf{P}_n^- H^T + H^T \mathbf{R}_n^{-1} H \mathbf{P}_n^- H^T] (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_n [(\mathbf{P}_n^-)^{-1} + H^T \mathbf{R}_n^{-1} H] \mathbf{P}_n^- H^T (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_n (\mathbf{P}_n^{-1}) \mathbf{P}_n^- H^T (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_n^- H^T (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1} \end{aligned}$$

Sehingga dari urutan di atas didapatkan:

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_n^- H^T (\mathbf{R}_n + H \mathbf{P}_n^- H^T)^{-1}$$

$$\mathbf{P}_{n+1} = [I - \mathbf{K}_{n+1} H] \mathbf{P}_{n+1}^-$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^- + \mathbf{K}_{n+1} (\mathbf{z}_{n+1} - H \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^-)$$

Secara ringkas algoritma Fraksional Kalman Filter *second – order* disajikan dalam Tabel 4.2

Tabel 4.2 Algoritma Fraksional Kalman Filter *second – order* (FKF)

Model Sistem dan Pengukuran	<p>Model Sistem:</p> $\Delta^2 \mathbf{x}_{n+1} = (A^2 - 2A + I)\mathbf{x}_{n-1} + (A - 2I)B\mathbf{u}_{n-1} + (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1} + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n$ $\mathbf{x}_{n+1} = \Delta^2 \mathbf{x}_{n+1} + 2\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}$ <p>Model Pengukuran : $\mathbf{z}_n = H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$</p> <p>Asumsi :</p> $\mathbf{x}_0 \sim N(\bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_{x_0}); \mathbf{w}_{n-1} \sim N(0, \mathbf{Q}_{n-1}); \mathbf{w}_n \sim N(0, \mathbf{Q}_n); \mathbf{v}_n \sim N(0, \mathbf{R}_n)$
Inisialisasi	$\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0$ $\mathbf{P}_0 = E[(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)(\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0)^T]$
Tahap Prediksi (Time Update)	<p>Estimasi : $\hat{\mathbf{x}}_{n+1}^- = (A^2 - 2A + I)\hat{\mathbf{x}}_{n-1}^- + (A - 2I)B\mathbf{u}_{n-1} + B\mathbf{u}_n$</p> <p>Kovariansi Error : $\mathbf{P}_{n+1}^- = (A^2 - 2A + I)\mathbf{P}_{n-1} (A^2 - 2A + I)^T + (A - 2I)\mathbf{Q}_{n-1} + \mathbf{Q}_n$</p>
Tahap Koreksi (Measurement Update)	<p>Kalman Gain : $\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_n^- H^T (\mathbf{R}_n + H\mathbf{P}_n^- H^T)^{-1}$</p> <p>Estimasi : $\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^- + \mathbf{K}_{n+1}(\mathbf{z}_{n+1} - H\hat{\mathbf{x}}_{n+1}^-)$</p> <p>Kovariansi Error : $\mathbf{P}_{n+1} = [I - \mathbf{K}_{n+1}H]\mathbf{P}_{n+1}^-$</p>

4.6 Implementasi Metode Kalman Filter pada Model Polusi Udara

Untuk mengestimasi konsentrasi polutan dari model yang ditujukan pada Persamaan (4.2) dengan menggunakan metode Kalman Filter, diperlukan model sistem dan pengukuran.

Dalam algoritma Kalman Filter seperti yang tertuang dalam Tabel (2.1) model stokastik (4.7) disebut model sistem sedangkan model stokastik (4.8) disebut sebagai model pengukuran.

Pertama yang harus dilakukan adalah mendefinisikan \mathbf{x} , yaitu

$$\mathbf{x} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_N]^T$$

Kemudian memberikan nilai awal untuk masing-masing variabel.

- Model sistem

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + B\mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n$$

dengan

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix}^{n+1},$$

$$A = \begin{bmatrix} F & B & D+E & 0 & A1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ B & F & 0 & D+E & 0 & A1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ D & 0 & F & B & D+E & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & D & B & F & 0 & D+E & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ A1 & 0 & D & 0 & F & B & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A1 & 0 & 0 & B & F & \dots & D+E & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix}^n$$

dengan \mathbf{w}_n adalah *noise* sistem yang berdistribusi normal dengan *mean* (rata-rata) nol dan varians \mathbf{Q}_n , $\mathbf{w}_n \sim N(0, \mathbf{Q}_n)$.

- Model pengukuran

$$\mathbf{z}_n = H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

dengan \mathbf{v}_n adalah *noise* pada model pengukuran yang berdistribusi normal dengan *mean* (rata-rata) nol dan varian \mathbf{R}_n , $\mathbf{v}_n \sim N(0, \mathbf{R}_n)$.

4.7 Implementasi Metode Fraksional Kalman Filter *First – Order* pada Model Polusi Udara

Langkah pertama sama seperti pada metode Kalman Filter yakni mendefinisikan \mathbf{x} yaitu $\mathbf{x} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_N]^T$

Kemudian memberikan nilai awal untuk masing-masing variabel.

- Model sistem

$$\Delta^1 \mathbf{x}_{n+1} = A_d \mathbf{x}_n + B \mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n$$

dengan $A_d = A - I$,

$$A = \begin{bmatrix} F & B & D+E & 0 & A1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ B & F & 0 & D+E & 0 & A1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ D & 0 & F & B & D+E & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & D & B & F & 0 & D+E & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ A1 & 0 & D & 0 & F & B & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A1 & 0 & 0 & B & F & \dots & D+E & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix}^{n+1}, \quad \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix}^n$$

dengan \mathbf{w}_n adalah *noise* sistem yang berdistribusi normal dengan *mean* (rata-rata) nol dan varians Q_n , $\mathbf{w}_n \sim N(0, Q_n)$.

- Model pengukuran

$$\mathbf{z}_n = H \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

dengan \mathbf{v}_n adalah *noise* pada model pengukuran yang berdistribusi normal dengan *mean* (rata-rata) nol dan varian R_n , $\mathbf{v}_n \sim N(0, R_n)$.

4.8 Implementasi Metode Fraksional Kalman Filter *Second – Order* pada Model Polusi Udara

Langkah pertama sama seperti pada metode Fraksional Kalman Filter *first – order* yakni mendefinisikan \mathbf{x} yaitu $\mathbf{x} = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_N]^T$. Kemudian memberikan nilai awal untuk masing-masing variabel.

- Model sistem

$$\Delta^2 \mathbf{x}_{n+1} = (A^2 - 2A + I)\mathbf{x}_{n-1} + (A - 2I)B\mathbf{u}_{n-1} + (A - 2I)\mathbf{w}_{n-1} + B\mathbf{u}_n +$$

$$\mathbf{w}_n$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \Delta^2 \mathbf{x}_{n+1} + 2\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} F & B & D+E & 0 & A1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ B & F & 0 & D+E & 0 & A1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ D & 0 & F & B & D+E & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & D & B & F & 0 & D+E & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ A1 & 0 & D & 0 & F & B & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A1 & 0 & 0 & B & F & \dots & D+E & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix}^{n+1}, \quad \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix}^n$$

dengan \mathbf{w}_n adalah *noise* sistem yang berdistribusi normal dengan *mean* (rata-rata) nol dan varians \mathbf{Q}_n , $\mathbf{w}_n \sim N(0, \mathbf{Q}_n)$.

- Model pengukuran

$$\mathbf{z}_n = H\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

dengan \mathbf{v}_n adalah *noise* pada model pengukuran yang berdistribusi normal dengan *mean* (rata-rata) nol dan varian \mathbf{R}_n , $\mathbf{v}_n \sim N(0, \mathbf{R}_n)$.

4.9 Simulasi dan Analisis

Pada subbab ini simulasi dilakukan dengan menerapkan algoritma Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter pada persamaan polusi udara. Hasil simulasi akan dievaluasi dengan cara membandingkan keadaan real dari sistem dan real yang telah ditentukan dengan hasil estimasi Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter.

Model matematika pada persamaan digunakan untuk sistem yang terdifusi secara sempurna di udara. Sedangkan kenyataannya tidak demikian, karena terdapat faktor-faktor yang mempengaruhi penyebaran polutan di udara yang disebut *noise*.

Model sistem dan pengukuran yang digunakan, sebagai berikut:

$$\mathbf{x}_{n+1} = A_n \mathbf{x}_n + B_n \mathbf{u}_n + \mathbf{w}_n$$

$$\mathbf{z}_n = H \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

dengan \mathbf{w}_n adalah *noise* sistem yang timbul akibat proses pembentukan model polusi udara yang tidak sempurna, sedangkan \mathbf{v}_n merupakan *noise* pengukuran. Variansi dari *noise* sistem diasumsikan $\mathbf{Q}_n = 0,002$ dan variansi *noise* pengukuran diasumsikan $\mathbf{R}_n = 0,002$.

H adalah matriks pengukuran dimana alat ukur yang akan dipasang telah ditentukan posisinya. Matriks pengukuran H ditentukan untuk menunjukkan posisi data pengukuran yang diambil atau disimulasikan.

4.9.1 Simulasi Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter *First – Order*

Model akan disimulasikan dengan beberapa nilai parameter awal. Adapun nilai parameter yang digunakan diantaranya :

$$\mathbf{x}_0 = 0.02,$$

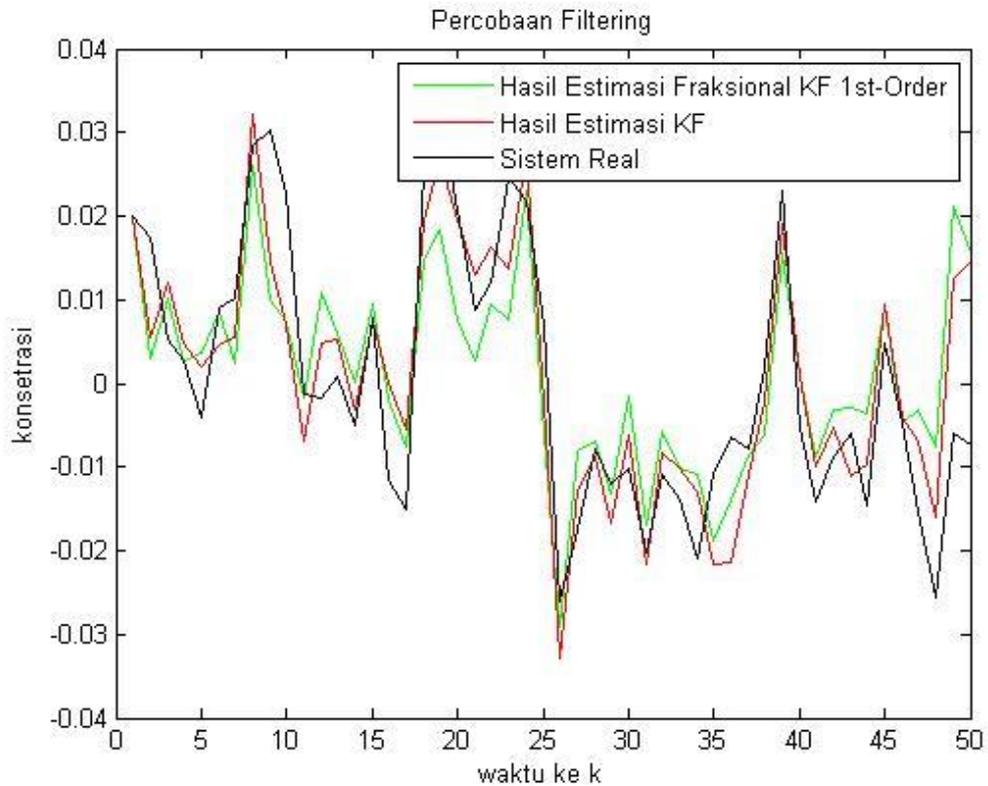
$$K = 0.025$$

$$K_x = K_y = K_z = \min(10, K)$$

$$\Delta t = 0.1$$

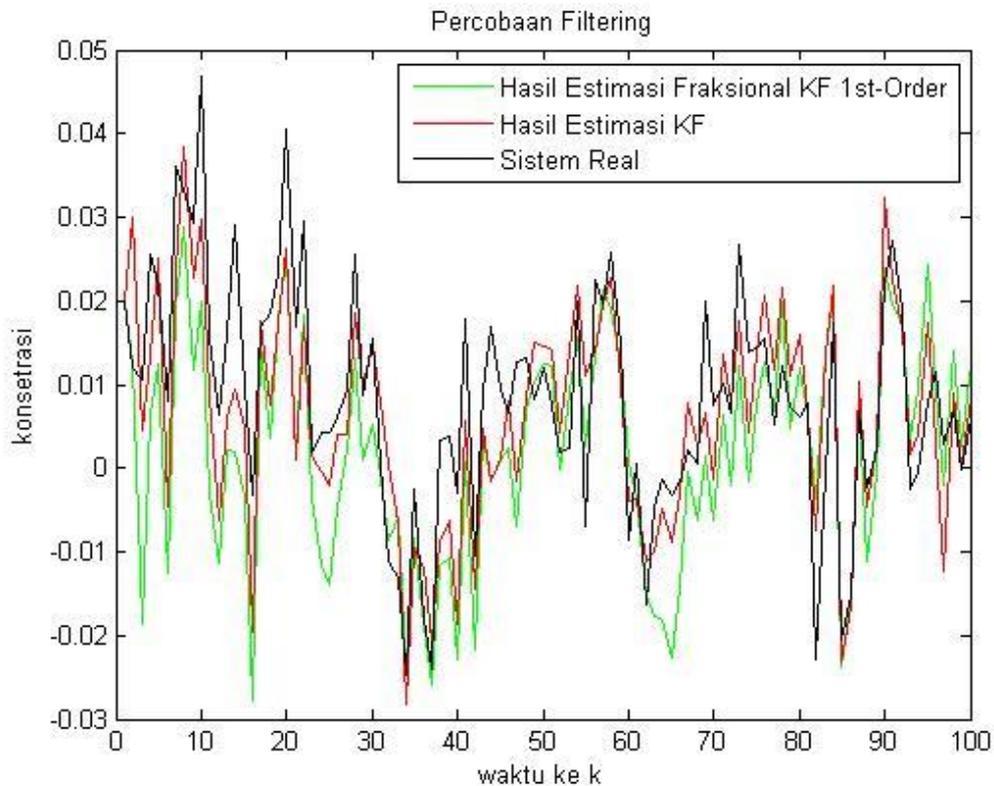
$$S_c = 0.852$$

Hasil simulasi akan dievaluasi dengan cara melakukan beberapa kali simulasi dan dengan banyak iterasi yang berbeda untuk mengetahui nilai error dari masing-masing percobaan simulasi. Serta dapat diketahui waktu komputasi dari program yang telah dijalankan. Nilai RMS Error ditunjukkan pada Tabel 4.3.



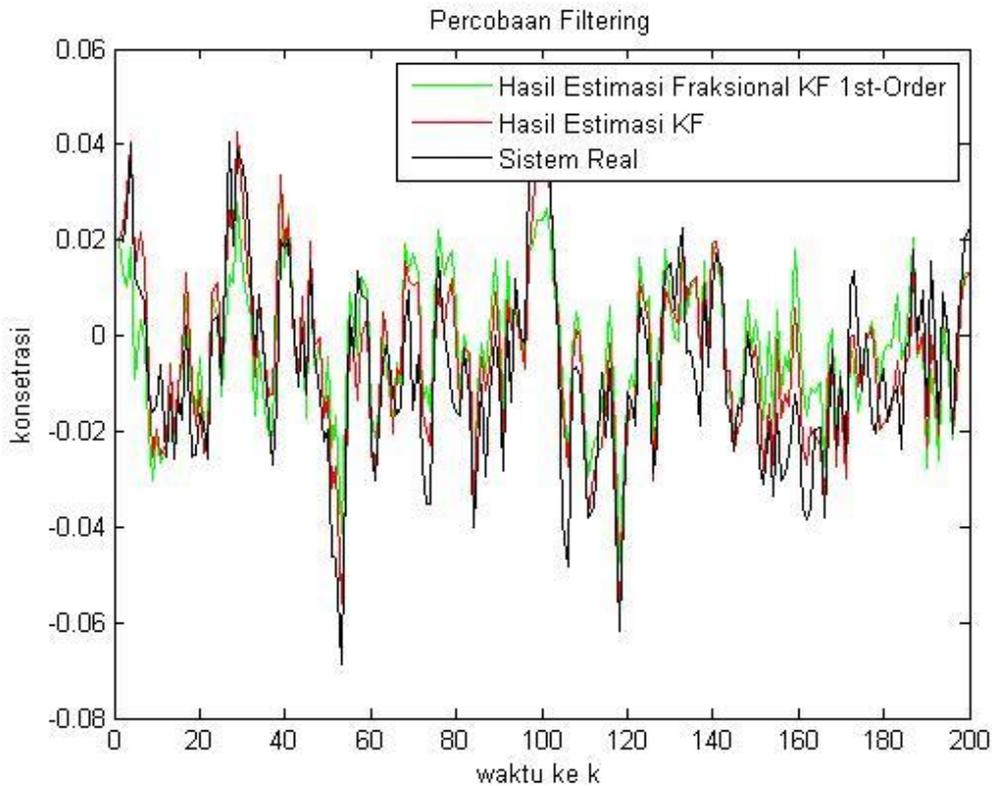
Gambar 4.1 Grafik Nilai Konsentrasi KF dan Frak KF *first – order* dengan iterasi sebanyak $N = 50$

Pada Gambar 4.1 nilai real dan nilai hasil estimasi cenderung bergerak secara menurun berdasarkan banyak langkah waktu yang diberikan. Hal ini dikarenakan faktor-faktor difusi yang mempengaruhi penyebaran polutan di udara. Dapat dilihat bahwa konsentrasi tertinggi terjadi pada langkah waktu ke 10 dengan nilai konsentrasi sekitar $0.03 - 0.035 \frac{kg}{m^3}$. Pada Grafik terlihat pula bahwa selisih jarak Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter *first – order* dengan nilai real tidak terlalu jauh dan masing-masing nilai RMSE terhadap realnya yang kecil, hal ini dapat dilihat di Tabel 4.3.



Gambar 4.2 Grafik Nilai Konsentrasi KF dan Frak KF *first – order* dengan iterasi sebanyak $N = 100$

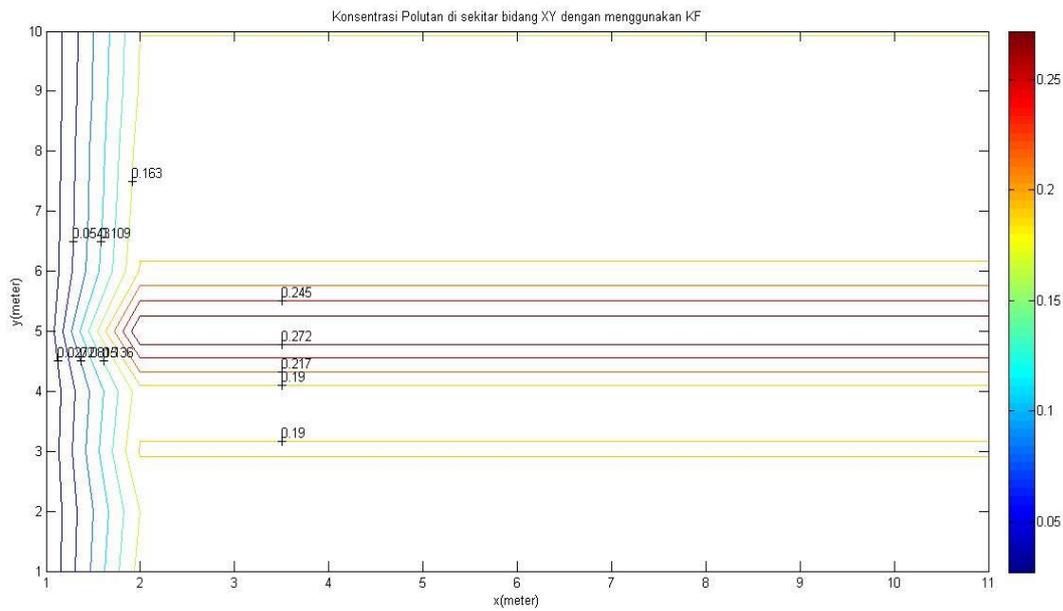
Pada Gambar 4.2 nilai real dan nilai hasil estimasi bergerak secara berubah-ubah namun cenderung menurun. Hal ini dikarenakan faktor-faktor difusi yang mempengaruhi penyebaran polutan di udara. Dapat dilihat bahwa konsentrasi tertinggi terjadi pada langkah waktu ke 10 dengan nilai konsentrasi sekitar $0.04 - 0.048 \frac{kg}{m^3}$. Grafik juga terlihat lebih rapat karena iterasi yang dilakukan juga lebih banyak. Pada Grafik terlihat pula bahwa selisih jarak Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter *first – order* dengan nilai real tidak terlalu jauh dan masing-masing nilai RMSE terhadap realnya yang kecil, hal ini dapat dilihat di Table 4.3.



Gambar 4.3 Grafik Nilai Konsentrasi KF dan Frak KF *first – order* dengan iterasi sebanyak $N = 200$

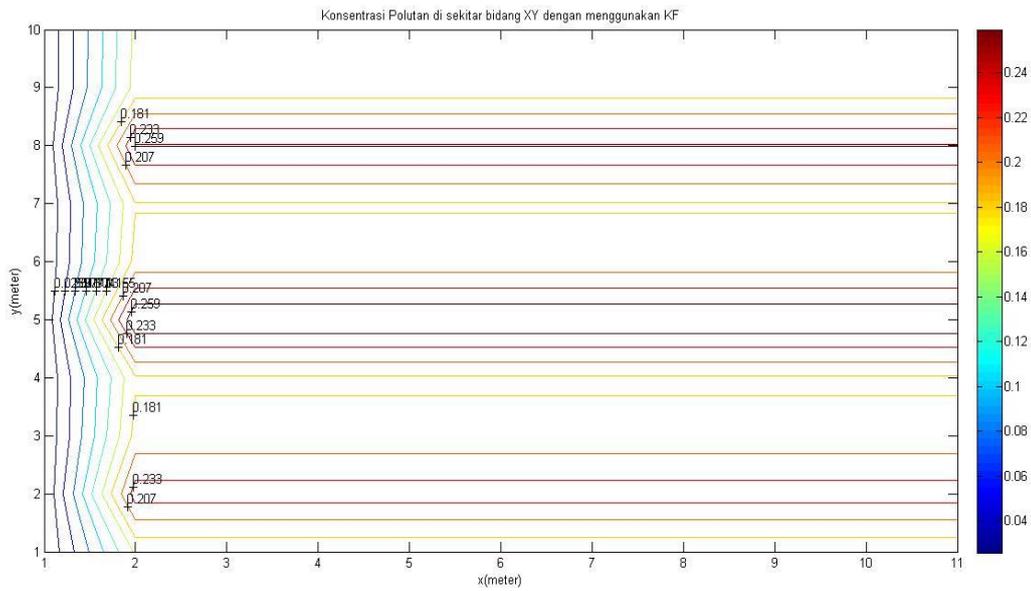
Pada Gambar 4.3 nilai real dan nilai hasil estimasi bergerak secara berubah-ubah. Hal ini dikarenakan faktor-faktor difusi yang mempengaruhi penyebaran polutan di udara. Grafik juga terlihat lebih rapat karena iterasi yang dilakukan lebih banyak. Adapun nilai error yang dihasilkan antara sistem real dan hasil simulasi juga sangat kecil, terlihat pada selisih jarak Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter *first – order* dengan nilai real tidak terlalu jauh dan masing-masing nilai RMSE terhadap realnya yang kecil, hal ini dapat dilihat di Table 4.3.

Adapun untuk pola penyebaran konsentrasi polutan dapat dilihat pada simulasi dengan menggunakan *contour*. Simulasi dilakukan pada bidang XY dengan panjang $X = 10 \text{ meter}$ dan $Y = 10 \text{ meter}$



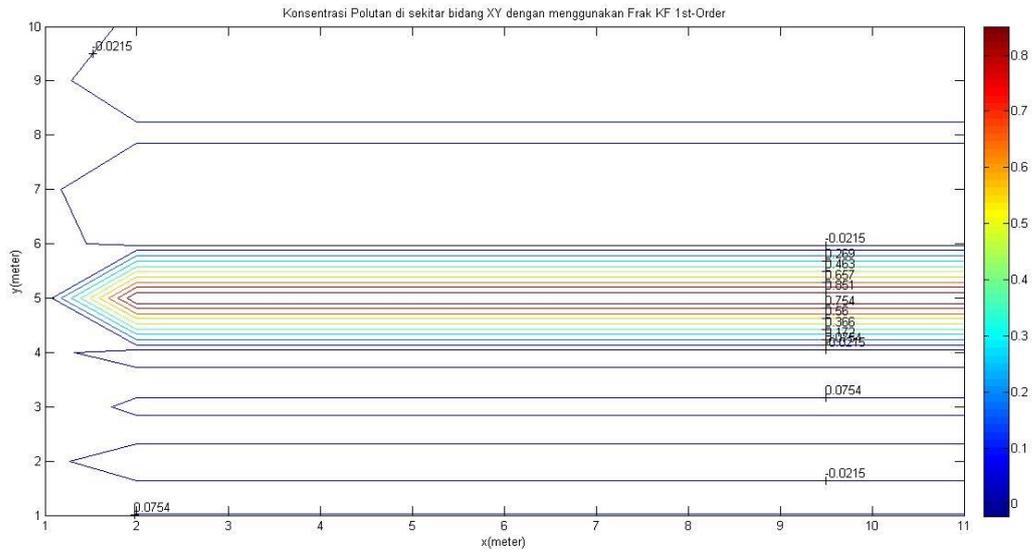
Gambar 4.4. Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY dengan satu sumber

Pada daerah dengan jarak 10 – 11 meter, sumber polutan berada di satu titik yakni pada z_5 , dimana polutan terkonsentrasi dengan nilai konsentrasi sebesar $0.272 \frac{kg}{m^3}$. pada daerah ini polutan masih bersifat pekat. Polutan terus menyebar menjauh sumber. Nilai konsentrasi terkecil polutan saat menjauh dari sumber adalah sebesar $0.023 \frac{kg}{m^3}$. Hal ini menandakan bahwa nilai konsentrasi polutan semakin kecil saat menjauh dari sumber.



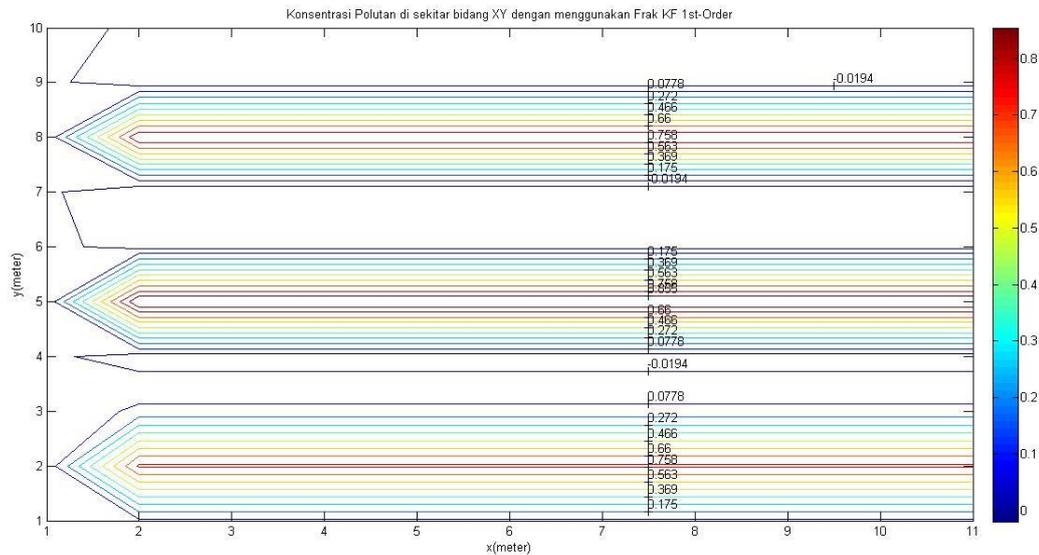
Gambar 4.5. Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY dengan tiga sumber

Pada daerah dengan jarak 10 – 11 *meter*, sumber polutan berada di tiga titik yakni pada z_2 , z_5 , dan z_8 . Nilai konsentrasi polutan pada sumber adalah sebesar $0.259 \frac{kg}{m^3}$. pada daerah ini polutan masih bersifat pekat. Polutan terus menyebar menjauh sumber. Nilai konsentrasi terkecil polutan saat menjauh dari sumber adalah sebesar $0.0223 \frac{kg}{m^3}$. Hal ini menandakan bahwa nilai konsentrasi polutan semakin kecil saat menjauh dari sumber.



Gambar 4.6. Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY dengan satu sumber

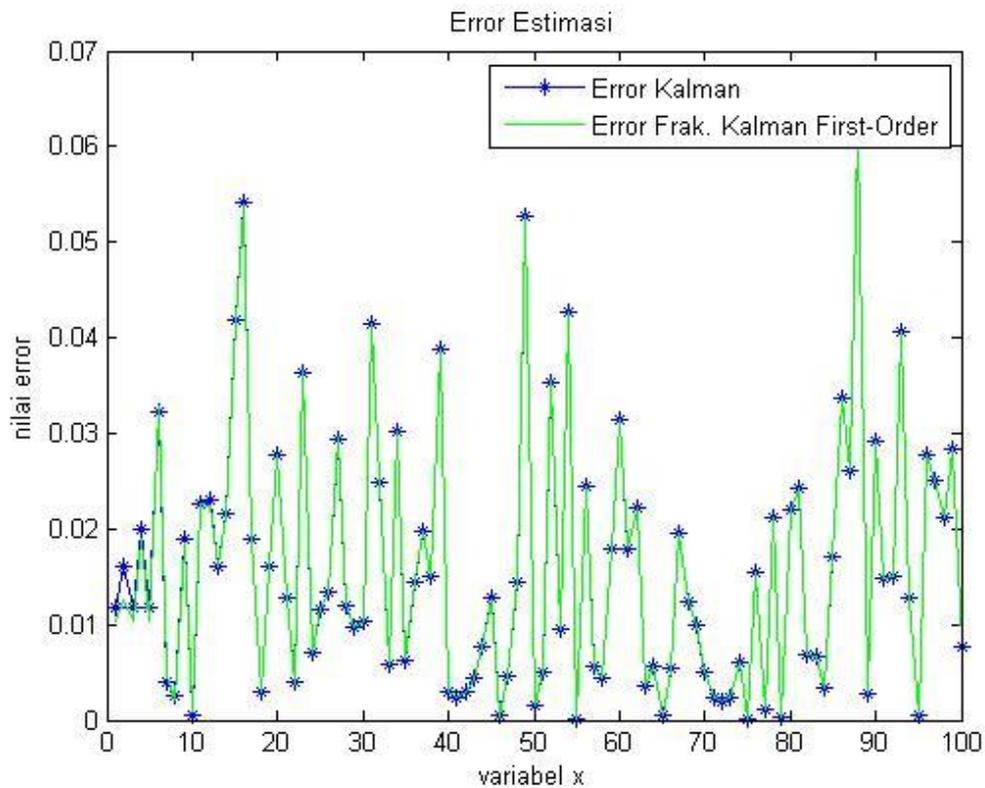
Pada daerah dengan jarak 10 – 11 *meter*, sumber polutan berada di satu titik yakni pada z_5 . Nilai konsentrasi polutan pada sumber adalah sebesar $0.851 \frac{kg}{m^3}$. pada daerah ini polutan masih bersifat pekat. Polutan terus menyebar menjauh sumber. Nilai konsentrasi terkecil polutan saat menjauh dari sumber adalah sebesar $0.0754 \frac{kg}{m^3}$. Hal ini menandakan bahwa nilai konsentrasi polutan semakin kecil saat menjauh dari sumber.



Gambar 4.7. Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY dengan tiga sumber

Pada daerah dengan jarak 10 – 11 *meter*, sumber polutan berada di tiga titik yakni pada z_2 , z_5 , dan z_8 . Nilai konsentrasi polutan pada sumber adalah sebesar $0.856 \frac{kg}{m^3}$. pada daerah ini polutan masih bersifat pekat. Pada sumber lain, konsentrasi polutan bernilai lebih rendah yakni sebesar $0.758 \frac{kg}{m^3}$. Dari grafik diatas, terlihat bahwa polutan terus menyebar secara horizontal menjauhi sumber. Nilai konsentrasi terkecil polutan saat menjauh dari sumber adalah sebesar $0.0778 \frac{kg}{m^3}$. Hal ini menandakan bahwa nilai konsentrasi polutan semakin kecil saat menjauh dari sumber.

Selanjutnya dari implementasi dengan metode Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter *first – order* dapat kita analisis nilai error dari masing-masing hasil estimasi. Adapun grafik nilai error dari kedua metode dapat dilihat pada Gambar 4.8.



Gambar 4.8. Grafik Perbandingan Nilai Error KF dan Fraksional KF *first – order*

Berdasarkan Gambar 4.8. terlihat bahwa error KF dan Fraksional KF *first – order* sangat kecil. Hal ini ditunjukkan pada grafik yang hampir berdekatan satu sama lainnya. Dengan demikian dapat diketahui bahwa nilai error antara metode Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter memiliki selisih yang sangat kecil.

Dalam simulai untuk menghitung nilai error, dilakukan percobaan sebanyak 10 kali untuk melihat rata-rata nilai error dari masing-masing metode. Adapun pada Tabel 4.3 dibahas rata-rata nilai RMSE dari 10 kali percobaan dan waktu simulasinya.

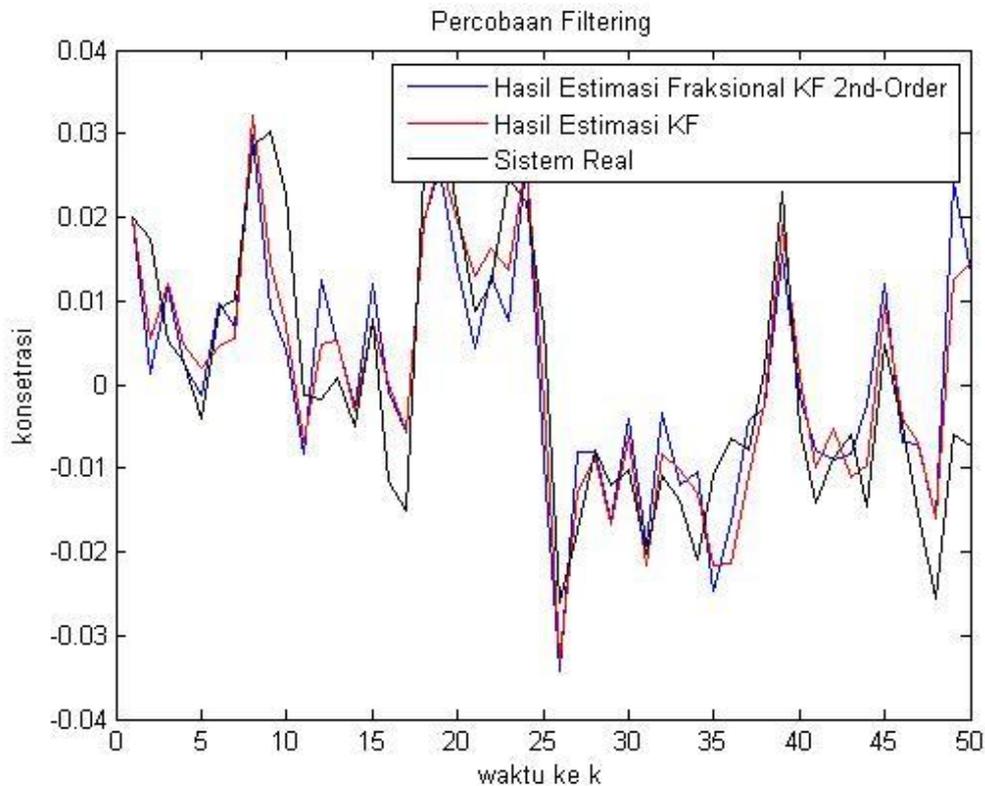
Tabel 4.3 Perbandingan Nilai Rata-Rata RMSE antara Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter *first – order*

Rata-Rata 10 kali percobaan simulasi dengan banyak iterasi (N) berbeda						
Rata-Rata nilai RMSE	N=50		N=100		N=200	
	KF	Fraksional KF 1 st – Order	KF	Fraksional KF 1 st – Order	KF	Fraksional KF 1 st – Order
	0,017289	0,0167837	0,0171377	0,164392	0,0170269	0,0161744
Waktu Komputasi	0,839224	1,2665177	0,8826203	1,3403171	0,9632163	1,3830469

Terlihat dari Tabel 4.3 dimana simulasi dilakukan dengan parameter nilai awal yang sudah ditentukan, dan dilakukan pada beberapa iterasi yang berbeda untuk melihat perubahan grafik nilai konsentrasi dan nilai error dari masing-masing waktu iterasi yang berbeda. Tabel 4.3 merupakan nilai rata-rata RMSE dari 10 kali percobaan. Dari rata-rata nilai RMSE tersebut terlihat bahwa Fraksional Kalman Filter *first – order* lebih baik daripada Kalman Filter dengan rata-rata nilai RMSEnya lebih kecil daripada Kalman Filter. Semakin banyak waktu iterasi, maka rata-rata nilai error yang dihasilkan semakin kecil. Adapun untuk waktu komputasinya cenderung lebih lama metode Fraksional Kalman Filter *first – order* dibandingkan dengan Kalman Filter. Hal ini dikarenakan pada Fraksional Kalman Filter memiliki langkah yang sedikit lebih panjang dibanding Kalman Filter.

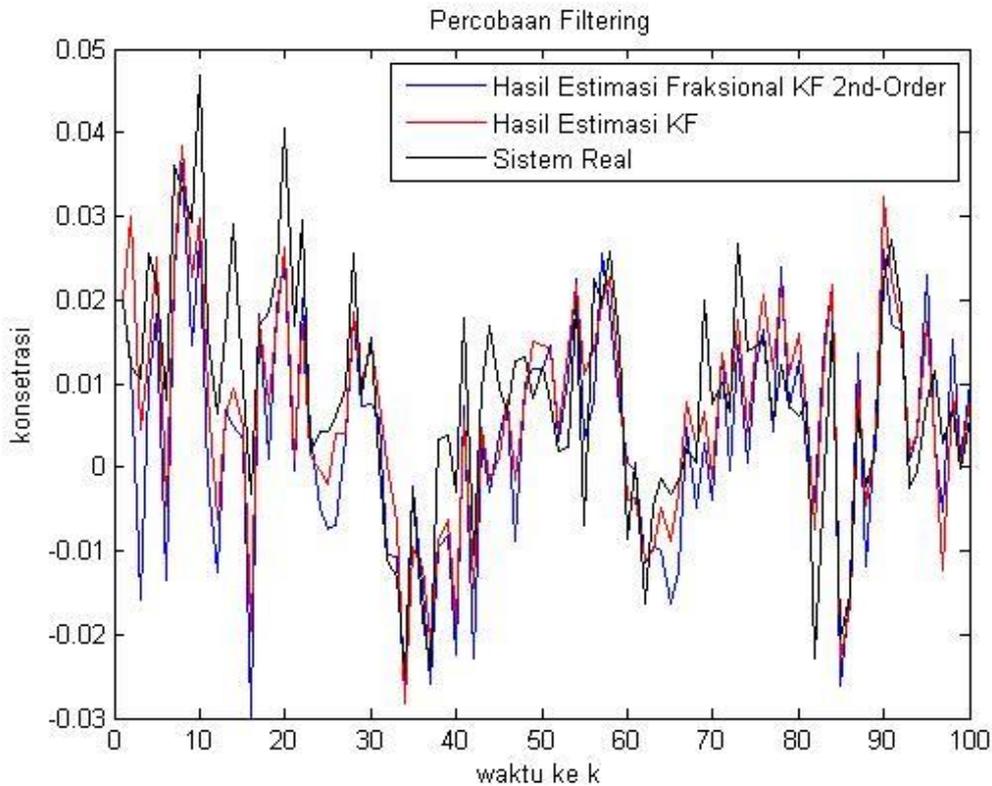
4.9.2 Simulasi Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter *Second – Order*

Model akan disimulasikan dengan beberapa nilai parameter awal. Adapun nilai parameter yang digunakan koefisien difusi $K = 0.025$ dan $K_x = K_y = K_z = \min(10, K)$ serta $\Delta t = 0,01$. Hasil simulasi akan dievaluasi dengan cara melakukan beberapa kali simulasi dan dengan banyak iterasi yang berbeda untuk mengetahui nilai error dari masing-masing percobaan simulasi. Serta dapat diketahui waktu komputasi dari program yang telah dijalankan. Nilai RMS Error ditunjukkan pada Tabel 4.4.



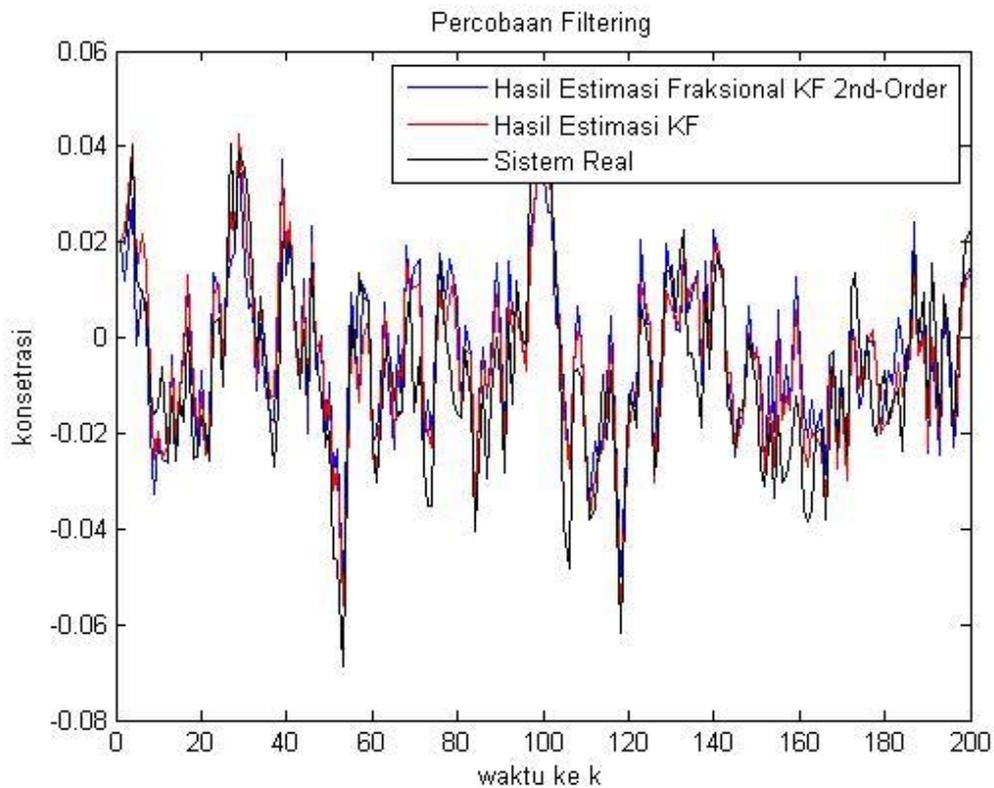
Gambar 4.9 Grafik Nilai Konsentrasi KF dan Frak KF *second – order* dengan iterasi sebanyak $N = 50$

Pada Gambar 4.9 nilai real dan nilai hasil estimasi bergerak secara berubah-ubah. Namun terlihat bahwa nilai konsentrasi cenderung terus menurun. Hal ini dikarenakan faktor-faktor di udara yang mempengaruhi semakin kecilnya nilai konsentrasi polutan. Nilai konsentrasi tertinggi berada pada langkah waktu ke 10 dengan besar nilai konsentrasi antara $0.03 - 0.035 \frac{kg}{m^3}$. Pada Grafik terlihat pula bahwa selisih jarak Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter *second – order* dengan nilai real tidak terlalu jauh dan masing-masing nilai RMSE terhadap realnya yang kecil, hal ini dapat dilihat di Tabel 4.4.



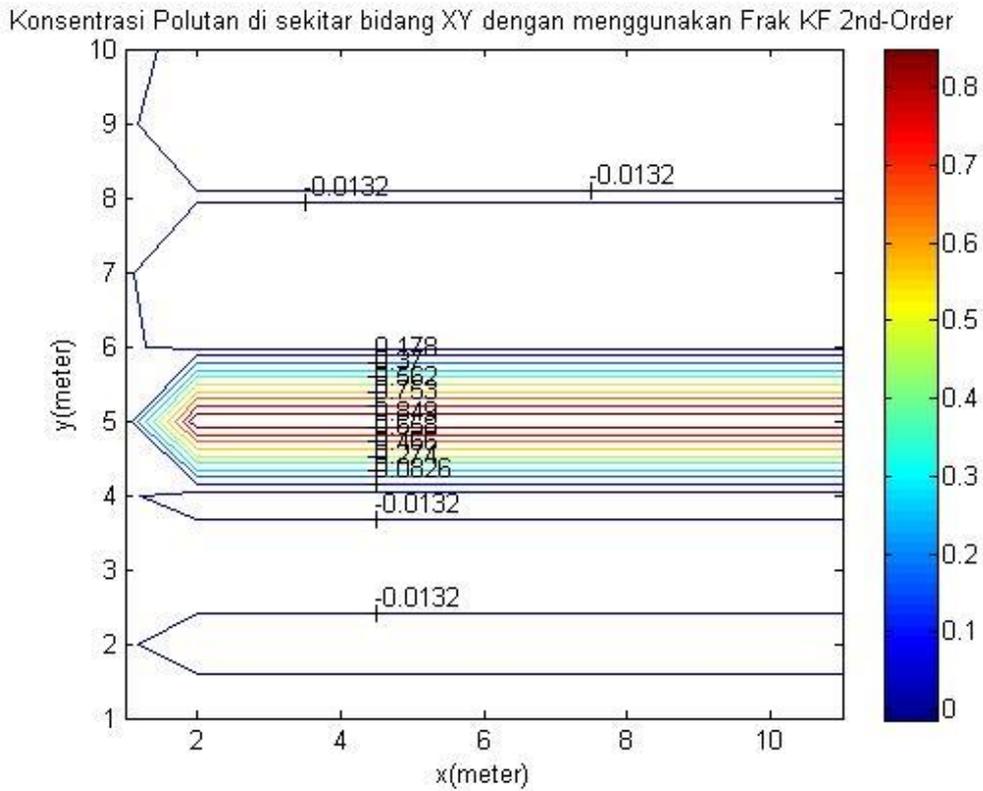
Gambar 4.10 Grafik Nilai Konsentrasi KF dan Frak KF *second – order* dengan iterasi sebanyak $N = 100$

Pada Gambar 4.8 nilai real dan nilai hasil estimasi bergerak secara berubah-ubah. Hal ini dikarenakan faktor-faktor difusi yang mempengaruhi penyebaran polutan di udara. Grafik juga terlihat lebih rapat karena iterasi yang dilakukan juga lebih banyak. Nilai konsentrasi tertinggi berada pada langkah waktu ke 10 dengan besar nilai konsentrasi antara $0.04 - 0.045 \frac{kg}{m^3}$. Pada Grafik terlihat pula bahwa selisih jarak Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter *second – order* dengan nilai real tidak terlalu jauh dan masing-masing nilai RMSE terhadap realnya yang kecil, hal ini dapat dilihat di Tabel 4.4.



Gambar 4.11 Grafik Nilai Konsentrasi KF dan Frak KF 2^{nd} – order dengan iterasi sebanyak $N = 200$

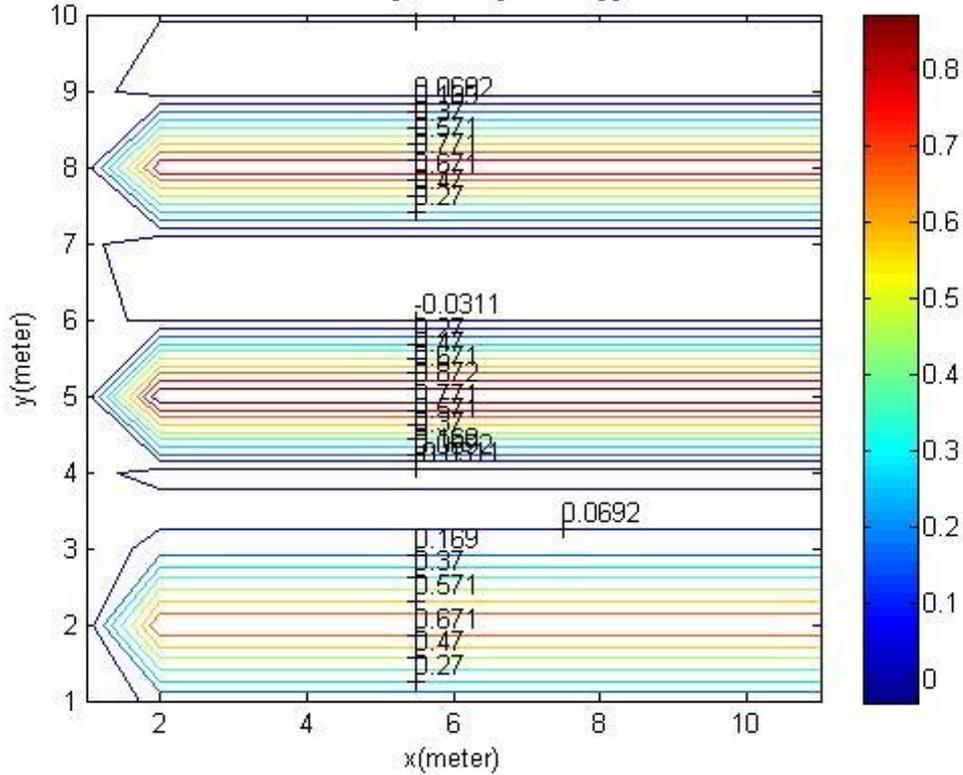
Pada Gambar 4.9 nilai real dan nilai hasil estimasi bergerak secara berubah-ubah. Hal ini dikarenakan faktor-faktor difusi yang mempengaruhi penyebaran polutan di udara. Grafik juga terlihat lebih rapat karena iterasi yang dilakukan lebih banyak. Adapun nilai error yang dihasilkan antara sistem real dan hasil simulasi juga sangat kecil, terlihat pada selisih jarak Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter *second* – order dengan nilai real tidak terlalu jauh dan masing-masing nilai RMSE terhadap realnya yang kecil, hal ini dapat dilihat di Tabel 4.4.



Gambar 4.12 Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY pada satu sumber dengan metode Fraksional Kalman Filter *second – order*

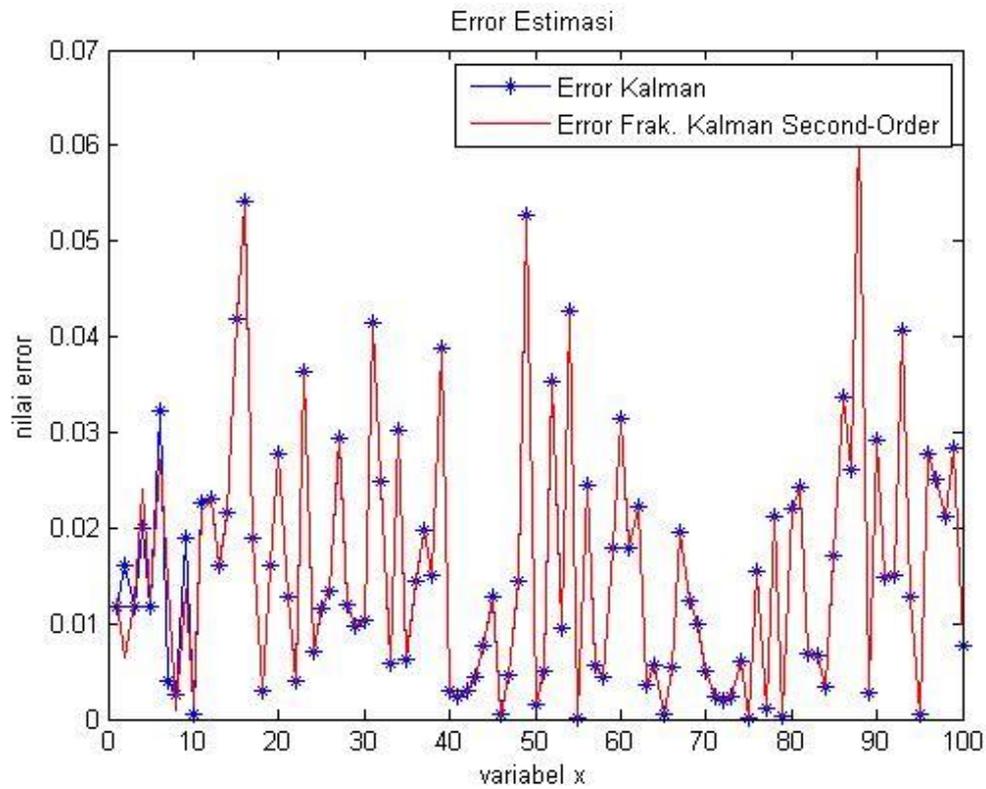
Pada daerah dengan jarak 10 – 11 *meter*, sumber polutan berada di satu titik yakni pada z_5 . Nilai konsentrasi polutan pada sumber adalah sebesar $0.849 \frac{kg}{m^3}$. pada daerah ini polutan masih bersifat pekat. Polutan terus menyebar menjauh sumber. Nilai konsentrasi terkecil polutan saat menjauh dari sumber adalah sebesar $0.0826 \frac{kg}{m^3}$. Hal ini menandakan bahwa nilai konsentrasi polutan semakin kecil saat menjauh dari sumber.

Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY dengan menggunakan Frak KF 2nd-Order



Gambar 4.13 Konsentrasi Polutan di sekitar bidang XY pada tiga sumber dengan metode Fraksional Kalman Filter *second – order*

Pada daerah dengan jarak 10 – 11 *meter*, sumber polutan berada di tiga titik yakni pada z_2, z_5 , dan z_8 . Nilai konsentrasi polutan pada sumber adalah sebesar $0.872 \frac{kg}{m^3}$. pada daerah ini polutan masih bersifat pekat. Polutan terus menyebar menjauh sumber. Nilai konsentrasi terkecil polutan saat menjauh dari sumber adalah sebesar $0.0692 \frac{kg}{m^3}$. Hal ini menandakan bahwa nilai konsentrasi polutan semakin kecil saat menjauh dari sumber.



Gambar 4.14. Grafik Perbandingan Nilai Error KF dan Fraksional KF *second – order*

Berdasarkan Gambar 4.14. terlihat bahwa error KF dan Fraksional KF *second – order* sangat kecil. Hal ini ditunjukkan pada grafik yang hampir berdekatan satu sama lainnya. Dengan demikian dapat diketahui bahwa nilai error antara metode Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter memiliki selisih yang sangat kecil.

Dalam simulai ini juga dilakukan percobaan sebanyak 10 kali untuk melihat rata-rata nilai error dari masing-masing metode. Adapun pada Tabel 4.4 dibahas rata-rata nilai RMSE dari 10 kali percobaan dan waktu simulasinya.

Tabel 4.4 Perbandingan Nilai Rata-Rata RMSE antara Kalman Filter dan Fraksional Kalman Filter *second – order*

Rata-Rata 10 kali percobaan simulasi dengan banyak iterasi (N) berbeda						
Rata-Rata nilai RMSE	N=100		N=200		N=500	
	KF	Fraksional KF 2 nd – Order	KF	Fraksional KF 2 nd – Order	KF	Fraksional KF 2 nd – Order
	0,017289	0,0165785	0,0171377	0,0161622	0,0170269	0,158711
Waktu Komputasi	0,839224	1,7000362	0,8826203	1,7828417	0,9632163	1,8092027

Terlihat dari Tabel 4.4 dimana simulasi dilakukan dengan parameter nilai awal yang sudah ditentukan, dan dilakukan pada beberapa iterasi yang berbeda untuk melihat perubahan grafik nilai konsentrasi serta mengetahui pengaruh dari banyaknya iterasi terhadap nilai error yang dihasilkan kedua metode. Tabel 4.4 merupakan nilai rata-rata RMSE dari 10 kali percobaan. Dari rata-rata nilai RMSE tersebut terlihat bahwa Fraksional Kalman Filter *second – order* lebih baik daripada Kalman Filter dengan rata-rata nilai RMSEnya lebih kecil daripada Kalman Filter. Terlihat pula bahwa semakin banyak waktu iterasi, maka nilai error yang dihasilkan semakin kecil. Adapun untuk waktu komputasinya cenderung lebih lama metode Fraksional Kalman Filter *second – order* dibandingkan dengan Kalman Filter. Hal ini dikarenakan pada Fraksional Kalman Filter memiliki langkah yang sedikit lebih panjang dibanding Kalman Filter dimana pembentukan orde fraksionalnya dengan penurunan dari orde fraksional pertama.

Jika dibandingkan antara Tabel 4.3 dengan Tabel 4.4, dapat diketahui bahwa implementasi dengan metode Fraksional Kalman Filter *second – order* memiliki keakuratan yang lebih baik dibandingkan dengan Fraksional Kalman Filter *first – order*. Hal ini dapat dilihat dari nilai RMSE *second – order* fraksional lebih kecil dibandingkan dengan *first – order* fraksional.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian hasil dan pembahasan yang telah dipaparkan, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Hasil simulasi yang telah dilakukan dengan menggunakan algoritma Fraksional Kalman Filter *first – order* menunjukkan bahwa dapat diimplementasikan pada model polusi udara yang berdasarkan TAPM-CTM. Hal ini terlihat pada nilai RMSE yang relatif kecil, sehingga hasil estimasi mendekati nilai dari sistem realnya.
2. Hasil simulasi yang telah dilakukan dengan menggunakan algoritma Fraksional Kalman Filter *second – order* menunjukkan bahwa algoritma dengan orde fraksional yang lebih tinggi juga dapat diimplementasikan pada model polusi udara yang berdasarkan TAPM-CTM. Hal ini terlihat pada nilai RMSE yang relatif kecil, sehingga hasil estimasi mendekati nilai dari sistem realnya.
3. Perbandingan hasil simulasi antara Kalman Filter dengan Fraksional Kalman Filter diperoleh bahwa Fraksional Kalman Filter lebih baik daripada Kalman Filter, karena nilai RMSE Fraksional Kalman Filter lebih kecil dibandingkan dengan nilai RMSE Kalman Filter. Namun waktu komputasi Fraksional Kalman Filter lebih lama daripada Kalman Filter karena adanya pemecahan fraksional.

5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan pada penelitian selanjutnya antara lain : melakukan estimasi konsentrasi polutan dengan orde fraksional yang lebih tinggi, untuk metode estimasi diharapkan untuk menggunakan metode modifikasi Kalman Filter lainnya sehingga bisa dilakukan perbandingan dengan metode yang sudah dilakukan pada penelitian ini.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR PUSTAKA

- A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. (2006). *“Theory and Applications of Fractional Differential Equations”*. Elsevier Vol. 204.
- Anonim. (2014). *“Pencemaran Udara”*. http://id.wikipedia.org/wiki/Pencemaran_udara.
- Apriliani, E., Arif, D.K., Sanjoyo, B.A. (2010). *“The Square Root Ensemble Kalman Filter to Estimate the Concentration of Air Pollution”*. International Conference on Mathematical Applications in Engineering (ICMAE'10), Kuala Lumpur, Malaysia.
- Hurley, P.J. (2005). *“The Air Pollution Model (TAPM) version 3. Part 1: Technical description”*. <http://www.cmar.csiro.au/research/tapm/docs/>
- Lewis, F. L. (1986). *“Optimal Estimation with An Introduction to Stochastic Control Theory”*. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- Lewis, M. J., dkk. (2006). *“Dynamic Data Assimilation: A Least Squares Approach”*. University Press. Cambridge.
- Masduqi, A., & Apriliani, E. (2008). *“Estimation of Surabaya River Water Quality Using Kalman Filter Algorithm”*. The Journal for Technology and Science, 19(3): 87-91. [serial online]. http://its.ac.id/personal/files/pub/2102-alimasduqiIPTEK_Kalman_Filter.pdf. [1 januari 2012].
- Metia, S., Oduro, S.D., Ha, Q.P. (2013). *“Environmental Time Series Analysis and Estimation with Extended Kalman Filtering”*. IEEE First International Conference on Artificial Intelligence, Modelling & Simulation, pages 202–207, Kota Kinabalu, Sabah, Malaysia.
- Metia, S., Oduro, S.D., Ha, Q.P. (2014). *“Air Pollution Prediction Using Matern Function Based Extended Fractional Kalman Filtering”*. International Conferences and Control, pages 758-763, Marina Bay Sands, Singapore.
- Purnomo, K. D. 2008. *“Aplikasi Metode Ensemble Kalman Filter pada Model Populasi Plankton”*. Tidak Diterbitkan. Tesis. Surabaya: Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Sierociuk, D., Dzieliniski, A. (2006). *“Fractional Kalman Filter Algorithm for The States, Parameters, And Order of Fractional System Estimation”*. International

Journal Applied Mathematics Computation Science. Vol 16, No.1, page 129-140.

Welch, G., Bishop, G. (2006). "*An Introduction to The Kalman Filter*". Chapel Hill: University of North Carolina.

LAMPIRAN

Lampiran 1 : Listing Program Perbandingan Kalman Filter, Fraksional Kalman Filter 1st – order, dan Fraksional Kalman Filter 2nd – order

```
function A = Matriks_A(px,qx,rx,sx,N1)

syms A1 B1 D1 E1;
if N1<5
    return;
end

B2 = [];
for i=1:N1-1
    if mod(i,2)==0
        B2 = [B2 0];
    else
        B2 = [B2 B1];
    end
end
Hasil = diag((1-2*A1-2*B1-2*D1-E1).*ones(N1,1),0)+diag(B2,1)+diag(B2,-1)+...
        diag((D1+E1).*ones(N1-2,1),2)+diag((D1).*ones(N1-2,1),-2)+...
        diag((A1).*ones(N1-4,1),4)+diag((A1).*ones(N1-4,1),-4)

A = double(subs(Hasil,{A1,B1,D1,E1},{px,qx,rx,sx}));

clc; close all; clear all;
% program kalman filter, fraksional kalman filter 1st-order, dan fraksional
% kalman filter 2nd-Order

fprintf('
=====
\n\n');
disp('    Simulasi Hasil Estimasi Nilai Konsentrasi Polutan    ');
fprintf(' Menggunakan KF, Frak KF 1st-Order, dan Frak 2nd-Order \n\n');
fprintf('
=====
\n\n\n');
disp(' Nama Mahasiswa = Yessy Vita Oktaviana ');
disp(' NRP Mahasiswa = 06111550012010 ');
fprintf(' Dosen Pembimbing = 1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. \n');
fprintf('                    = 2. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si. \n\n');
fprintf('
=====
\n\n\n');

%inisial condition
N1 = input('N1 (harus bernilai >4) = ');
```

```

k=0.025;          % input ('koefisien difusi')
kc=min(10,k);
dt=0.1;          % input ('delta t: ')
dx=0.2;          % input ('delta x: ')
dy=0.2;          % input ('delta y: ')
dz=0.2;          % input ('delta z: ')
px=(kc/dx^2)*dt;
qx=(kc/dy^2)*dt;
rx=(kc/dz^2)*dt;
sx=(k/dz)*dt*0.1;

xo=0.02*ones(N1,1);
Po=eye(N1)*0.01;
Q=eye(N1)*0.0002; % input ('Nilai kovariansi model sistem')
R=0.0002;        % input ('Nilai kovariansi model pengukuran')

% Matriks B = matriks koefisien variabel input berukuran sxs
% B=[1;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
B=zeros(N1,1);

A = Matriks_A(px,qx,rx,sx,N1)

disp(['Variabel yang mau di estimasi dari sebanyak ',num2str(N1),' variabel.']);
N_Variabel = input('Banyak variabel yang mau diestimasi = ');
if N_Variabel>N1
    warndlg('Maaf banyak variabel melebihi kapasitas variabel','Error Data!!!');
    return;
end

for i=1:N_Variabel
    Kata = ['Masukkan variabel estimasi ke-',num2str(i),' yaitu : X'];
    Variabel(i) = input(Kata);
    if Variabel(i)>N1
        warndlg('Maaf variabel yang diinputkan melebihi kapasitas variabel','Error
Data!!!');
        return;
    end
end

H = [];
for i=1:N_Variabel
    if Variabel(i)==1
        H = [H; 1 zeros(1,N1-1)];
    elseif Variabel(i)==N1
        H = [H; zeros(1,N1-1) 1];
    else
        H = [H; zeros(1,Variabel(i)-1) 1 zeros(1,N1-Variabel(i))];
    end
end

```

```

    end
end
H

Pcor=Po;
G=eye(N1);
X=xo
Xcor=xo;
u=0.852;
Xo=xo;
N=100
Xcoro=xo
X1 = X;
Xo1 = Xo;
Xcoro1 = Xcoro;
Pcor1 = Pcor;
Xcor1 = Xcor;
Xcoro2 = Xcoro1;
Pcor2 = Pcor1;
Xcor2 = Xcor1;

tic;
for i=1:N
% Sistem Sebenarnya
%% Kalman Filter
Xre=A*X+B*u+sqrt(Q)*randn(N1,1);
Z=H*Xre+sqrt(R)*randn(1,1);
X=Xre;
Xretot=[Xo Xre];
Xo=Xretot;

% Tahap Prediksi
Ppre=A*Pcor*A'+G*Q*G';
Xpre=A*Xcor+B*u

% Tahap Koreksi
K=Ppre*H'*inv(H*Ppre*H'+R);
Pcor=(eye(N1)-K*H)*Ppre;
Xcor=Xpre+K*(Z-H*Xpre);
Xcortot=[Xcoro Xcor];
Xcoro=Xcortot;
err=Xre-Xcor;

%% Fractional Kalman Filter 1st-Order
% Z1=H*X+sqrt(R)*randn(1,1);
% X=Xre;

```

```

% Tahap Prediksi
Ad = A-eye(N1);

Ppre1=Ad*Pcor1*Ad'+Q;
Xprefrak1=Ad*Xcor1+B*u;

% Tahap Koreksi
K1=Ppre1*H'*inv(H*Ppre1*H'+R);
Pcor1=(eye(N1)-K1*H)*Ppre1;
Xcor1=Xprefrak1+K1*(Z-H*Xprefrak1);
Xcortot1=[Xcoro1 Xcor1];
Xcoro1=Xcortot1;
err1=Xre-Xcor1;

%% Fractional Kalman Filter 2nd-Order
% Z2=H*X+sqrt(R)*randn(1,1);
% X=Xre;

Xprefrak2=(A.^2-2*A+eye(N1))*Xcor2+(A-2*eye(N1))*B*u+B*u;
Ppre2=(A.^2-2*A+eye(N1))*Pcor2*(A.^2-2*A+eye(N1))'+(A-2*eye(N1))^2*Q+Q;

% Tahap Koreksi
K2=Ppre2*H'*inv(H*Ppre2*H'+R);
Pcor2=(eye(N1)-K2*H)*Ppre2;
Xcor2=Xprefrak2+K2*(Z-H*Xprefrak2);
Xcortot2=[Xcoro2 Xcor2];
Xcoro2=Xcortot2;
err2=Xre-Xcor2;

% Estimasi RMSK (Root Mean Square Error)
err=abs(Xre-Xcor);
erro=(err.^2);
error=sqrt(mean(erro));

err1=abs(Xre-Xcor1);
erro1=(err1.^2);
error1=sqrt(mean(erro1));

err2=abs(Xre-Xcor2);
erro2=(err2.^2);
error2=sqrt(mean(erro2));

end

disp(['RMS Error using Kalman Filter          = ',num2str(error)]);
disp(['RMS Error using Fraksional Kalman Filter 1st-Order = ',num2str(error1)]);
disp(['RMS Error using Fraksional Kalman Filter 2nd-Order = ',num2str(error2)]);

```

```

%% ---> Grafik Kalman
figure(1)
plot(1:N+1,Xcortot(1,:),'-b',1:N+1,Xretot(1,:),'-g')
xlabel('waktu ke k')
ylabel('konsetrasi')
xlim([0 N])
title('Percobaan Filtering')
legend('Hasil Estimasi KF', 'Sistem real')

figure(2)
error=abs(Xre-Xcor)
plot(error,'-b');
xlabel('variable x')
ylabel('nilai error')
title('Nilai error KF')

toc;

%% ---> Grafik Fractional Kalman Filter 1st-Order
figure(3)
plot(1:N+1,Xcortot1(1,:),'-b',1:N+1,Xretot(1,:),'-g')
xlabel('waktu ke k')
ylabel('konsentrasi')
xlim([0 N])
title('Percobaan Filtering')
legend('Hasil Estimasi Fraksional KF First-Order', 'Sistem real')

figure(4)
error1=abs(Xre-Xcor1)
plot(error1,'-b');
xlabel('variable x')
ylabel('nilai error')
title('Nilai error Fraksional 1st-Order')

toc;

%% ---> Grafik Fractional Kalman Filter 2nd-Order
figure(5)
plot(1:N+1,Xcortot2(1,:),'-b',1:N+1,Xretot(1,:),'-g')
xlabel('waktu ke k')
ylabel('konsentrasi')
xlim([0 N])
title('Percobaan Filtering')
legend('Hasil Estimasi Fraksional KF Second-Order', 'Sistem real')

figure(6)
error2=abs(Xre-Xcor2)
plot(error2,'-b');
xlabel('variable x')

```


Lampiran 2 : Perbandingan Nilai RMSE Kalman Filter, Fraksional Kalman Filter *first – order*, dan Fraksional Kalman Filter *second – order* dengan 10 kali percobaan

N=50

Simulasi	RMSE KF	RMSE Fraksional 1st-Order	RMSE Fraksional 2nd-Order	Waktu Komputasi KF	Waktu Komputasi Fraksional 1st-Order	Waktu Komputasi Fraksional 2nd-Order
1	0,025242	0,024573	0,024205	0,86017	1,285134	1,68938
2	0,014321	0,013617	0,01318	0,850374	1,260065	1,707806
3	0,017566	0,018995	0,018836	0,840409	1,351392	1,814253
4	0,0149	0,013494	0,013075	0,835841	1,256003	1,670873
5	0,018826	0,018805	0,018149	0,858582	1,272534	1,699729
6	0,019224	0,018125	0,018133	0,832672	1,25216	1,71629
7	0,014939	0,013896	0,014682	0,844015	1,238915	1,665783
8	0,019767	0,019994	0,019925	0,814173	1,234502	1,665034
9	0,015131	0,014293	0,013642	0,81742	1,245556	1,66887
10	0,012977	0,012045	0,011958	0,838582	1,268916	1,702344
Rata-Rata	0,0172893	0,0167837	0,0165785	0,8392238	1,2665177	1,7000362

N=100

Simulasi	RMSE KF	RMSE Fraksional	RMSE Fraksional 2nd-Order	Waktu Komputasi KF	Waktu Komputasi Fraksional 1st-Order	Waktu Komputasi Fraksional 2nd-Order
1	0,014798	0,014796	0,014586	0,898634	1,325945	1,756234
2	0,019518	0,018769	0,018566	0,893753	1,312058	1,740978
3	0,012331	0,012757	0,01292	0,87756	1,304319	1,736073
4	0,017865	0,017166	0,016668	0,908158	1,338317	1,774722
5	0,012577	0,010196	0,01014	0,872219	1,274593	1,696022
6	0,020155	0,020139	0,02012	0,867212	1,291195	1,716761
7	0,016608	0,016026	0,01538	0,878714	1,569827	2,009476
8	0,018921	0,018137	0,018129	0,880269	1,315947	1,75079
9	0,026294	0,025224	0,024792	0,876983	1,39315	1,924001
10	0,01231	0,011182	0,010321	0,872701	1,27782	1,72336
Rata-Rata	0,0171377	0,0164392	0,0161622	0,8826203	1,3403171	1,7828417

N=200

Simulasi	RMSE KF	RMSE Fraksional	RMSE Fraksional 2nd-Order	Waktu Komputasi KF	Waktu Komputasi Fraksional 1st-Order	Waktu Komputasi Fraksional 2nd-Order
1	0,013146	0,01335	0,013448	0,957357	1,374964	1,790613
2	0,02121	0,019871	0,019671	1,030257	1,470375	1,887524
3	0,013548	0,013376	0,01316	0,972805	1,38255	1,816367
4	0,018409	0,017292	0,016513	0,949814	1,364555	1,810129
5	0,019198	0,018892	0,018434	0,951546	1,374779	1,803262
6	0,013178	0,012413	0,011989	0,977696	1,421957	1,840912
7	0,014653	0,014595	0,014515	0,967392	1,391042	1,81835
8	0,015917	0,015641	0,015601	0,940297	1,346263	1,768985
9	0,023407	0,019652	0,019195	0,938146	1,347423	1,778031
10	0,017603	0,016662	0,016185	0,946853	1,356561	1,777854
Rata- Rata	0,0170269	0,0161744	0,0158711	0,9632163	1,3830469	1,8092027

BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Yessy Vita Oktaviana lahir di Kediri, 30 Oktober 1992. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu TK Dharma Wanita Sugihwaras (1997-1999), SD Negeri Sugihwaras (1999-2005), SMP Negeri 1 Candi (2005-2008), dan SMA Negeri 4 Sidoarjo (2008-2011). Penulis juga telah menempuh pendidikan S1 di Departemen Matematika ITS melalui jalur SNMPTN Undangan pada tahun 2011 dan lulus pada tahun 2015. Penulis melanjutkan studi S2 di Departemen Matematika FMKSD ITS pada semester Genap tahun ajaran 2015-2016. Pada program Magister S2 Matematika ini, penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan dengan penelitian Tesis berkaitan tentang Asimilasi Data. Penulis juga telah mempresentasikan hasil penelitian dalam Seminar Internasional Matematika di Universitas Jember. Selain menempuh perkuliahan, penulis juga aktif dalam membina intensif kegiatan belajar mengajar Matematika baik di sekolah maupun di lembaga bimbingan yang berlokasi di Sidoarjo. Alhamdulillah penulis telah berhasil menyelesaikan studinya dan mendapat gelar Magister Sains (M.Si.). Kritik, saran, pertanyaan, dan informasi lebih lanjut mengenai penelitian Tesis ini dapat dikirimkan kepada penulis melalui email : yessyvitaoktaviana@gmail.com. Terimakasih.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”