



TESIS-SM 142501

**ESTIMASI SUKU BUNGA MODEL COX INGERSOLL  
ROSS (CIR) MENGGUNAKAN *EXTENDED KALMAN  
FILTER* UNTUK PERHITUNGAN *SUPPLEMENTAL  
COST* PADA PROGRAM Pensiun**

Harmerita  
06111450012003

DOSEN PEMBIMBING  
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
Endah R. M. Putri, S.Si, M.T, Ph.D

**PROGRAM MAGISTER  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI DAN SAINS DATA  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2018**





THESIS-SM 142501

**ESTIMATION INTEREST RATE OF COX INGERSOLL  
ROSS (CIR) MODEL USING EXTENDED KALMAN  
FILTER FOR THE CALCULATION OF  
SUPPLEMENTAL COST IN THE PENSION FUND  
PROGRAM**

Harmerita  
06111450012003

SUPERVISORS  
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
Endah R. M. Putri, S.Si, MT, Ph.D

**MASTER PROGRAM  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTING AND DATA SCIENCES  
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2018**



**Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Sains (M.Si.)  
di  
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

**Oleh:  
HARMERITA  
NRP. 06111450012003**

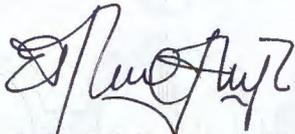
**Tanggal Ujian : 16 Januari 2018  
Periode Wisuda : Maret 2018**

**Disetujui oleh:**



**Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
NIP. 19660414 199102 2 001**

**(Pembimbing I)**



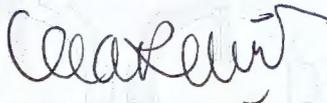
**Endah R. M. Putri, S.Si., M.T., Ph.D  
NIP. 19761213 200212 2 001**

**(Pembimbing II)**



**Prof. Dr. Mohammad Isa Irawan, M.T  
NIP. 19631225 198903 1 001**

**(Penguji)**



**Dr. Dra. Mardlijah, M.T  
NIP. 19670114 199102 2 001**

**(Penguji)**

**Dekan FMKSD,**  
  
**Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
NIP. 19650605 198903 1 002**

**ESTIMASI SUKU BUNGA MODEL COX INGERSOLL ROSS (CIR)  
MENGUNAKAN EXTENDED KALMAN FILTER UNTUK  
PERHITUNGAN SUPPLEMENTAL COST PADA PROGRAM PENSIUN**

Nama Mahasiswa : Harmerita  
NRP : 06111450010203  
Pembimbing : Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
Endah R. M. Putri, S.Si, MT, Ph.D

**ABSTRAK**

Program dana pensiun merupakan suatu sistem yang mengupayakan manfaat pensiun untuk memberikan kesejahteraan kepada peserta atau pegawai suatu perusahaan yang telah memasuki masa pensiun. Perhitungan program dana pensiun membutuhkan asumsi-asumsi aktuarial antara lain asumsi penurunan populasi, asumsi penghasilan yang akan datang, dan asumsi tingkat suku bunga. Pada penelitian ini, tingkat suku bunga yang digunakan mengikuti model CIR yang diestimasi menggunakan metode *Extended Kalman Filter* (EKF). Parameter dari model CIR akan diestimasi menggunakan metode *Conditional Least Square* yang akan digunakan sebagai inputan nilai awal pada metode EKF. Selanjutnya tingkat suku bunga yang dihasilkan akan digunakan pada perhitungan aktuarial sehingga mendapatkan *supplemental cost* pada program dana pensiun dengan menggunakan metode *Accrued Benefit Cost* (ABCM). *Supplemental cost* merupakan biaya yang dikeluarkan oleh pemberi kerja ke dana pensiun jika kekurangan dana (defisit) dalam pendanaan program pensiun manfaat pasti. Pada akhirnya kita mendapatkan perbandingan hasil *supplemental cost* dengan asumsi suku bunga konstan dan estimasi tingkat suku bunga yang mengikuti model CIR menggunakan EKF.

**Kata kunci:** Model CIR, *Conditional Least Square*, *Extended Kalman Filter*, *supplemental cost*, *accrued benefit cost*.



**ESTIMATION INTEREST RATE OF COX INGERSOLL ROSS (CIR)  
MODEL USING EXTENDED KALMAN FILTER FOR THE  
CALCULATION OF SUPPLEMENTAL COST IN THE PENSION FUND  
PROGRAM**

Name : Harmerita  
NRP : 06111450010203  
Supervisors : Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
Endah R. M. Putri, S.Si, MT, Ph.D

**ABSTRACT**

Pension fund program is a system that seek pension benefits to provide welfare to participants or employees of a company who have retired on pension. The calculation of the pension plan requires actuarial assumptions among other assumptions of population decline, future income assumptions, and interest rate assumptions. In this research, the interest rate used follows the CIR (Cox Ingersoll Ross) model. The CIR model will be estimated using Extended Kalman Filter (EKF) method. The parameters of the CIR model would be estimated using the Conditional Least Square method which would be used as an initial value input on the EKF method. Furthermore, the interest rate generated will be used in the actuarial calculation so as to get supplemental cost in the pension program with Accrued Benefit Cost Method (ABCM). Supplemental cost in funding pension plan is a cost to be issued by the employer to the pension fund in case shortage of fund (deficit) in the funding of defined benefit plans. In the end, we get the comparison of supplemental cost results with the assumption of constant interest rate and the estimated interest rate of CIR model using EKF.

**Keywords:** CIR Model, Conditional Least Square, Extended Kalman Filter, supplemental cost, accrued benefit cost.



## **KATA PENGANTAR**

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul

### **Estimasi Suku Bunga Model Cox Ingersoll Ross (CIR) Menggunakan Extended Kalman Filter Untuk Perhitungan Supplemental Cost Pada Program Pensiun**

Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2, Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data (FMKSD) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan bimbingan dalam penyusunan tesis ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si, dan Endah R.M. Putri, S.Si, M.T, Ph.D, selaku dosen pembimbing yang dengan penuh kesabaran membimbing dan meluangkan waktu untuk berbagi ilmu dan berdiskusi sehingga penyusunan tesis ini dapat diselesaikan dengan baik.
2. Prof. Dr. Mohammad Isa Irawan, M.T, Dr. Dra. Mardijah, M.T, dan Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si, selaku dosen-dosen penguji yang telah memberikan saran dan masukan yang membangun terhadap Tesis ini.
3. Dr. Imam Mukhlas, M.T, selaku Ketua Departemen Matematika FMKSD ITS
4. Dr. Mahmud Yunus, M.Si, selaku Ketua Program Studi Pascasarjana Matematika ITS yang memberikan arahan selama menempuh pendidikan di S2 ITS.
5. Dr. Subiono, M.Sc, yang memberikan inspirasi dan semangat sehingga saya termotivasi untuk kembali melanjutkan studi di Pascasarjana Matematika ITS.
6. Bapak dan ibu dosen-dosen pengajar pada program studi Pascasarjana Matematika ITS yang telah memberikan ilmu dan wawasan kepada penulis.
7. Ibunda Effi Haryati dan Ayahanda Hasmil Ilyas, yang tak pernah putus dalam memberi dukungan dan doanya.

8. Suami tercinta, Ayah Davied Fernando, yang selalu setia memberikan dukungan dan doa dalam pengerjaan tesis ini serta kedua anakku tersayang Nabilla Putri F dan Nico Bima Putra F.
9. Rekan bimbingan dan diskusi di ruang Aljabar, Nabilla, Yessy, dan Wardatus Syarifah, serta teman-teman seperjuangan pascasarjana Matematika ITS, Kak Meidy, Vimala, Habib, Pingkan, Rizky, Meylista, Lalu, dan Nadya, yang selalu memberikan informasi yang berguna dalam menempuh studi di ITS.
10. Bu Nurul, Mbak Resty, Mas Joko, dan seluruh staf dan karyawan Departemen Matematika ITS yang telah memberikan bantuan secara langsung maupun tidak langsung selama saya menempuh pendidikan di Matematika ITS.
11. Semua pihak yang telah membantu penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu. Semoga Allah membalas semua kebaikannya.

Penulis menyadari bahwa laporan tesis ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharapkan saran-saran yang membangun demi kebaikan Tesis ini. Akhir kata, semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Januari 2018

**Penulis**

## DAFTAR ISI

	hal
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	<b>i</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	<b>v</b>
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>vii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ix</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>xi</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xv</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	<b>xix</b>
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	<b>xxi</b>
<b>BAB 1 PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan Penelitian.....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	3
1.6 Sistematika Penulisan .....	4
<b>BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI</b> .....	<b>5</b>
2.1 Penelitian Sebelumnya.....	5
2.2 Model Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR).....	6
2.3 Formula Ito.....	7
2.4 Metode <i>Conditional Least Square Estimation</i> .....	7
2.5 Algoritma <i>Extended Kalman Filter</i> .....	8
2.6 Dana Pensiun.....	9
2.7 Program Pensiun .....	10
2.8 Anuitas.....	11
2.9 Tabel Mortalita.....	12
2.10 Asumsi Aktuaria.....	13

2.11 Fungsi Dasar Aktuaria.....	14
2.11.1 Fungsi Kelangsungan Hidup.....	14
2.11.2 Fungsi Bunga.....	15
2.11.3 Fungsi Gaji.....	16
2.11.4 Fungsi Manfaat.....	16
2.12 <i>Present Value of Future Benefit</i> (PVFB).....	17
2.13 Metode Perhitungan Aktuaria.....	17
2.14 Ukuran Kewajiban Pensiun.....	18
2.15 <i>Supplemental Cost</i> .....	19
<b>BAB 3 METODE PENELITIAN.....</b>	<b>21</b>
3.1 Tahapan Penelitian.....	21
3.2 Diagram Alir Penelitian.....	22
<b>BAB 4 ANALISIS DAN PEMBAHASAN.....</b>	<b>25</b>
4.1 Penyelesaian Model Suku Bunga CIR.....	25
4.2 Estimasi Nilai Awal Parameter Model CIR Menggunakan CLSE.....	27
4.3 Estimasi Tingkat Suku Bunga Model CIR Menggunakan Extended Kalman Filter.....	32
4.4 Aproksimasi Tingkat Suku Bunga dengan Jangka Waktu 3 Tahun.....	43
4.5 Program Pendanaan Pensiun.....	48
4.5.1 Perhitungan Anuitas Hidup Mengikuti Tingkat Suku Bunga CIR.....	49
4.5.2 Perhitungan <i>Supplemental Cost</i> Mengikuti Tingkat Suku Bunga CIR.....	50
4.6 Perbandingan <i>Supplemental Cost</i> .....	56
4.7 Studi Kasus Perhitungan SC Pada Perusahaan X.....	58
<b>BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN.....</b>	<b>65</b>
5.1 Kesimpulan.....	65
5.2 Saran.....	66
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>	<b>67</b>
<b>LAMPIRAN.....</b>	<b>69</b>

## DAFTAR GAMBAR

	hal
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian.....	22
Gambar 3.2 Diagram Alir EKF.....	23
Gambar 3.3 Diagram Alir Perhitungan <i>Supplemental Cost</i> .....	24
Gambar 4.1 Hasil Estimasi Parameter $\alpha$ menggunakan EKF.....	36
Gambar 4.2 Hasil Estimasi Parameter $\mu$ menggunakan EKF.....	37
Gambar 4.3 Hasil Estimasi Parameter $\sigma$ menggunakan EKF.....	38
Gambar 4.4 Hasil Estimasi Tingkat Suku Bunga CIR.....	39
Gambar 4.5 Hasil Estimasi Parameter $\alpha$ dengan Nilai Awal $\alpha = 1$ .....	40
Gambar 4.6 Hasil Estimasi Parameter $\mu$ dengan Nilai Awal $\mu = 1$ .....	41
Gambar 4.7 Hasil Estimasi Parameter $\sigma$ dengan Nilai Awal $\sigma = 1$ .....	41
Gambar 4.8 Hasil Estimasi Tingkat Suku Bunga CIR.....	42
Gambar 4.9 Suku Bunga Bulanan Juli 2009 s.d Juli 2016.....	43
Gambar 4.10 Aproksimasi Tingkat Suku Bunga 3 Tahun.....	45
Gambar 4.11 Aproksimasi Tingkat Suku Bunga Aktual Jangka Waktu 3 Tahun.....	46
Gambar 4.12 Aproksimasi Tingkat Suku Bunga 3 Tahun.....	47
Gambar 4.13 Aproksimasi Tingkat Suku Bunga Aktual Jangka Waktu 3 Tahun.....	48
Gambar 4.14 Perbandingan SC dengan Suku Bunga Konstan dan CIR.	57
Gambar 4.15 Alur Proses Program Perhitungan SC.....	58
Gambar 4.16 Tampilan Menu Perhitungan SC.....	60
Gambar 4.17 Tampilan Perhitungan Anuitas.....	61
Gambar 4.18 Tampilan Hasil Perhitungan SC.....	62
Gambar 4.19 Tampilan Hasil Perhitungan SC per Pegawai.....	63



## DAFTAR TABEL

	hal
Tabel 2.1 Algoritma <i>Extended Kalman Filter</i> .....	9
Tabel 4.1 Hasil Estimasi Parameter Model CIR.....	30
Tabel 4.2 Hasil Estimasi Parameter Model CIR.....	44
Tabel 4.3 Tabel Mortalita.....	49
Tabel 4.4 Tabel Perhitungan Anuitas .....	50
Tabel 4.5 Tabel Penurunan Populasi Winklevoss.....	52
Tabel 4.6 Tabel Perhitungan <i>Supplemental Cost</i> .....	55
Tabel 4.7 Tabel Perbandingan <i>Supplemental Cost</i> .....	56



## DAFTAR LAMPIRAN

	hal
Lampiran A. Data <i>BI Rate</i> Tahun 2009 s.d 2016.....	69
Lampiran B. Listing Program Matlab.....	70
Lampiran C. Aproksimasi Estimasi Suku Bunga Jangka Waktu 3 Tahun.....	74
Lampiran D. Aproksimasi Estimasi Suku Bunga Jangka Waktu 3 Tahun.....	75
Lampiran E. Tabel Penurunan Populasi Winklevoss.....	76
Lampiran F. Tabel Mortalita TMI 2011.....	77
Lampiran G. Perhitungan Anuitas Awal Seumur Hidup dengan Suku Bunga CIR .....	79
Lampiran H. Perhitungan <i>Supplemental Cost</i> untuk 1 Orang Pegawai.....	80
Lampiran I. Perbandingan SC 30 Pegawai dengan Asumsi Suku Bunga 7%..	81
Lampiran J. Perbandingan SC 30 Pegawai dengan Asumsi Suku Bunga 6%..	82



## DAFTAR SIMBOL

$r(t)$	: tingkat suku bunga pada waktu $t$
$\alpha$	: kecepatan $r(t)$ kembali menuju $\mu$
$\mu$	: rata-rata tingkat suku bunga jangka panjang
$\sigma$	: volatilitas yang menggambarkan pergerakan dari tingkat suku bunga
$W(t)$	: proses Wiener
$s_{r-1}$	: gaji terakhir karyawan sebelum pensiun pada usia $r - 1$
$s_x$	: gaji karyawan pada usia $x$
$\ddot{a}_r$	: Nilai tunai anuitas awal seumur hidup pada saat usia pensiun $r$ .
${}_n p_x^{(T)}$	: peluang seorang karyawan berusia $x$ akan tetap bekerja untuk $n$ tahun mendatang
${}_{r-x} p_x^{(m)}$	: peluang seorang karyawan usia $x$ akan tetap hidup hingga usia pensiun normal $r$ .
$B_x$	: kumulatif manfaat pensiun pada tahun peserta berusia $x$
$B_r$	: kumulatif manfaat pensiun seorang peserta pada usia pensiun $r$
$k$	: proporsi dari gaji yang dipersiapkan untuk manfaat pensiun ( $0 \leq k \leq 1$ )
$l_x^{(T)}$	: banyaknya karyawan yang masih aktif bekerja pada usia $x$
$l_{x+n}^{(T)}$	: banyaknya karyawan yang masih aktif bekerja pada usia $x + n$

# **BAB 1**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

Tenaga kerja merupakan aset bagi perusahaan. Kemajuan dan kemunduran sebuah perusahaan dipengaruhi oleh produktivitas tenaga kerja pada perusahaan tersebut. Meningkatnya persaingan untuk mendapatkan tenaga kerja yang berkualitas menyadarkan pemerintah dan sektor swasta untuk semakin memperhatikan jaminan kesejahteraan bagi tenaga kerja. Terjaminnya kesejahteraan tenaga kerja akan meningkatkan motivasi dan ketenangan kerja untuk meningkatkan produktivitas.

Pada tahun 70-an, masyarakat Indonesia berlomba-lomba masuk menjadi pegawai negeri dengan tujuan untuk memperoleh pensiun dimasa tuanya. Oleh karena itu, tidak mengherankan, banyak masyarakat Indonesia ingin menjadi pegawai negeri, karena pegawai negeri pada saat itu, memberikan kepastian adanya pensiun. Jika pada era 70-an sampai 80-an belum banyak perusahaan menyediakan dana pensiun bagi pegawainya, maka di era tahun 90-an sebaliknya. Pemerintah menyadari bahwa upaya pemeliharaan kesinambungan penghasilan di hari tua dan jaminan kesejahteraan tenaga kerja perlu mendapat perhatian serius. Sejak dikeluarkannya UU No. 11 tahun 1992 yang mengatur tentang Dana Pensiun, hampir seluruh perusahaan menyelenggarakan program dana pensiun. Program dana pensiun terbagi atas program pensiun iuran pasti dan program pensiun manfaat pasti.

Pada program pensiun iuran pasti, perusahaan setuju untuk berkontribusi pada penyelenggaraan pensiun dengan jumlah tertentu, sesuai formula yang ditetapkan. Sebaliknya, program pensiun manfaat pasti menggambarkan manfaat yang akan karyawan terima saat mereka pensiun. Dalam hal ini metode pendanaan harus menyediakan cukup uang pada saat pensiun untuk memenuhi imbalan pasca kerja.

Iuran dan manfaat pensiun dapat dihitung menggunakan metode penghitungan aktuarial. Terdapat beberapa metode dalam menentukan besarnya

manfaat dan iuran normal. Metode penghitungan aktuarial dapat dibagi menjadi dua kategori besar, yaitu *Accrued Benefit Cost Method (ABCM)* dan *Projected Benefit Cost Method (PBCM)* (SPA-DP, 1998).

Perhitungan program pensiun memerlukan asumsi aktuarial antara lain asumsi penurunan jumlah penduduk, asumsi pendapatan masa depan, dan asumsi tingkat suku bunga. Asumsi tingkat suku bunga yang konstan atau tetap tentunya akan berbeda dengan kondisi riil yang ada dimana tingkat suku bunga selalu berubah-ubah dengan berjalannya waktu. Hal ini akan berpengaruh terhadap perhitungan pendanaan program pensiun.

*Supplemental cost* dalam program pensiun merupakan biaya tambahan yang harus dibayarkan oleh pihak pemberi kerja kepada pihak penyelenggara Dana Pensiun ketika terjadi kekurangan dana (defisit) dari kewajiban aktuarial (Winklevoss,1993). Biaya tambahan digunakan untuk menutupi ketidaksesuaian antara kewajiban dengan manfaat pensiun yang telah ditetapkan.

Berdasarkan latar belakang permasalahan diatas, maka penulis melakukan penelitian tentang Estimasi Tingkat Suku Bunga Model CIR menggunakan *Extended Kalman Filter* Untuk Perhitungan *Supplemental Cost* pada Pendanaan Program Pensiun.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mendapatkan estimasi parameter dari suku bunga model CIR dengan menggunakan metode *Conditional Least Square Estimation (CLSE)*.
2. Bagaimana estimasi parameter dan suku bunga model CIR yang diperoleh dengan menggunakan metode *Extended Kalman Filter* dengan nilai awal parameter yang dihasilkan dengan menggunakan metode CLSE.
3. Bagaimana analisa dan hasil perhitungan *supplemental cost* yang dihasilkan dari hasil estimasi tingkat suku bunga model CIR dan tingkat suku bunga tetap dengan menggunakan metode pendanaan pensiun *Accrued Benefit Cost Method (ABCM)*.

### **1.3 Batasan Masalah**

Pada penelitian ini, batasan masalah yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

1. Tingkat kenaikan gaji per tahun adalah tetap.
2. Tabel Mortalita yang digunakan adalah TMI III 2011.
3. Data tingkat suku bunga yang digunakan adalah *BI rate* tahun 2009 sampai dengan tahun 2016.
4. Pengambilan data kelompok dilakukan pada salah satu perusahaan swasta bidang perbankan, yaitu data pegawai aktif yang belum mencapai usia 50 tahun pada tahun 2016.

### **1.4 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan dari penelitian yang diusulkan ini adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan hasil estimasi parameter model CIR menggunakan menggunakan *Conditional Least Square*.
2. Memperoleh hasil dan analisa estimasi suku bunga model fungsi CIR dengan menggunakan metode *Extended Kalman Filter*.
3. Mendapatkan analisa dan hasil perhitungan *supplemental cost* atas kewajiban aktuarial dengan menggunakan asumsi tingkat suku bunga mengikuti model CIR dan suku bunga tetap menggunakan metode pendanaan pensiun *Accrued Benefit Cost*.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Berdasarkan tujuan penelitian, maka manfaat yang ingin diperoleh diantaranya adalah:

1. Menambah wawasan tentang permasalahan estimasi yang dapat diselesaikan dengan metode *Extended kalman Filter*, serta memberi gambaran tentang estimasi suku bunga model CIR menggunakan algoritma *Extended Kalman Filter*.
2. Mendapatkan hasil analisis sebagai bahan pertimbangan untuk memilih dasar perhitungan kewajiban aktuarial.

3. Memberikan masukan kepada perusahaan atas pencadangan biaya atas dana pensiun terkait dengan *supplemental cost* atas kewajiban aktuarial yang harus dibayarkan oleh perusahaan.

## 1.6. Sistematika Penulisan

Tesis ini disusun dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

### BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tesis yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan Tesis.

### BAB II KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang mendukung penelitian, antara lain tentang suku bunga model CIR (Cox Ingersoll Ross), algoritma *Conditional Least Square*, algoritma *Extended Kalman Filter*, pengertian tentang dana pensiun, program pensiun, fungsi dasar aktuarial, asumsi aktuarial, dan metode perhitungan aktuarial.

### BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tentang tahap-tahap yang dilakukan dalam penyusunan tesis ini.

### BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan tentang tingkat suku bunga model CIR, estimasi parameter dengan menggunakan metode *Conditional Least Square* sebagai nilai inisialisasi awal. Selanjutnya, akan diestimasi menggunakan *Extended Kalman Filter*. Kemudian, hasil dari estimasi digunakan dalam perhitungan *supplemental cost* atas kewajiban aktuarial menggunakan metode ABCM dengan studi kasus pada salah satu perusahaan swasta.

### BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini menjelaskan tentang penarikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

## **BAB 2**

### **KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI**

Pada bagian ini dibahas uraian singkat mengenai kajian pustaka yang berkaitan dengan penelitian-penelitian sebelumnya dan dasar-dasar teori yang dibutuhkan dalam penelitian ini.

#### **2.1 Penelitian Sebelumnya**

Beberapa penelitian sebelumnya yang terkait dengan suku bunga model Cox Ingersoll Ross (CIR) adalah “*Maximum Likelihood Estimation of The Cox-Ingersoll-Ross Process*”, yang memperkirakan tingkat suku bunga menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* dan implementasinya pada Matlab (Kladivko, 2007). Kemudian, “Estimasi Parameter Pada Model Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR) Menggunakan Kalman Filter Untuk Menentukan Harga Zero Coupon Bond”, yang menerapkan model CIR untuk menentukan harga Zero Coupon Bond dengan nilai awal parameter menggunakan metode *Ordinary Least Square* (Apriliani,dkk, 2015). Penelitian yang berkaitan dengan pendanaan program pensiun oleh Arnold F. Shapiro yang berjudul "*Modified Cost Methods For Small Pension Plans*", yang membahas kriteria pemilihan metode penghitungan aktuaria terhadap dana pensiun. Penelitian lainnya, “Implementasi Model Tingkat Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR) Untuk Menentukan Iuran Normal Pensiun Program Manfaat Pasti”, yang membahas estimasi suku bunga model CIR menggunakan metode Milstein dengan nilai awal parameter menggunakan *Conditional Least Square Estimation*, namun pada penerapannya faktor kenaikan gaji hanya dipengaruhi oleh lamanya kerja dan kelompok peserta yang masuk sampai masa pensiun tanpa memperhatikan kemungkinan nilai kenaikan gaji pegawai dimasa yang akan datang (Putri,dkk, 2015).

Penelitian lainnya mengenai kajian dana pensiun (Caraka, 2016), yang berjudul “Kajian Perhitungan Dana Pensiun Menggunakan *Accrued Benefit*”. Dalam penelitiannya, metode *Accrued Benefit* digunakan dalam mengkaji permasalahan dana pensiun pegawai negeri sipil (PNS) dan disimpulkan bahwa perhitungan dana pensiun berdasarkan usia pegawai saat diangkat menjadi PNS,

usia pegawai saat perhitungan dilakukan, batas usia pensiun pegawai, masa kerja pegawai, sisa masa kerja dan gaji awal pegawai dapat dilakukan dengan menggunakan konsep *Accrued Benefit Cost*, namun untuk sistem pembayarannya pemerintah perlu meninjau kembali mengingat harus diperhatikannya nilai suku bunga, besar manfaat pensiun, nilai kewajiban penghentian rencana.

Berdasarkan beberapa penelitian yang telah dilakukan, pada penelitian ini akan membahas tentang estimasi suku bunga yang mengikuti model CIR dengan menggunakan *Extended Kalman Filter* dimana nilai parameter awal diperoleh dengan menggunakan metode CLSE, selanjutnya nilai tingkat suku bunga yang diperoleh akan digunakan dalam perhitungan *supplemental cost* atas kewajiban aktuarial dengan menggunakan metode pendanaan program pensiun *Accrued Benefit Cost*.

## 2.2 Model Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR)

Model tingkat suku bunga CIR merupakan model *equilibrium* yang diperkenalkan oleh Cox, Ingersoll, Ross pada tahun 1985. Model CIR menjamin tingkat suku bunga bernilai positif dan memiliki sifat *mean reversion* atau mempunyai kecenderungan kembali menuju rata-rata. Model ini diperkenalkan pada tahun 1985 oleh John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, Jr., dan Stephen A. Ross. Bentuk dari model CIR adalah sebagai berikut (Apriliani,dkk, 2015):

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \quad (2.1)$$

dengan nilai  $\alpha > 0, \mu > 0$ , dan  $\sigma > 0$

$r(t)$  : tingkat suku bunga pada waktu  $t$

$\mu$  : rata-rata tingkat suku bunga jangka panjang

$\alpha$  : kecepatan  $r(t)$  kembali menuju  $\mu$

$\sigma$  : volatilitas yang menggambarkan pergerakan dari tingkat suku bunga

$W(t)$  : proses Wiener

### 2.3 Formula Ito

Misalkan  $X(t)$  merupakan proses stokastik yang didefinisikan sebagai berikut:

$$dX(t) = \mu_t dt + \sigma_t dW(t) \quad (2.2)$$

dengan  $\mu_t$  merupakan suku *drift*,  $\sigma_t$  merupakan bagian difusi dan  $W(t)$  adalah proses Wiener, maka fungsi  $f(X(t), t)$  juga merupakan proses stokastik yang mempunyai bentuk persamaan diferensial sebagai berikut:

$$df(X(t), t) = \frac{\partial f}{\partial X} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) dapat ditulis dalam bentuk integral sebagai berikut:

$$f(X(t), t) - f(X(0), 0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X} dX(t) + \int_0^t \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \quad (2.4)$$

### 2.4 Metode *Conditional Least Square Estimation* (CLSE)

Metode *conditional least square estimation* (CLSE) adalah suatu metode untuk memperoleh estimator parameter untuk observasi yang saling bergantung (*dependent*) dengan berdasar pada jumlah kuadrat error dari *conditional expectation* (Putri,dkk, 2015). Prinsip metode *conditional least square estimation* sama seperti metode *least square* yaitu tidak membutuhkan asumsi distribusi *error*. Misalkan terdapat fungsi eksptasi bersyarat yaitu:

$$m(r; \theta) = E_{\theta}(r_t | r_1, \dots, r_{t-1}) \quad (2.5)$$

$\theta$  adalah notasi untuk parameter yang dicari maka estimatornya dapat dicari dengan meminimumkan fungsi jumlahan kuadrat bersyarat:

$$f_{\theta}(r_t) = \sum_{t=1}^n (r_t - m(r; \theta))^2 \quad (2.6)$$

Solusi  $\theta$  yang meminimumkan fungsi jumlah kuadrat bersyarat  $f_{\theta}(r_t)$  diperoleh dengan cara menurunkan fungsi  $f_{\theta}(r_t)$  terhadap  $\theta$ .

## 2.5 Algoritma *Extended Kalman Filter*

*Kalman Filter* (KF) adalah suatu metode estimasi variabel keadaan dari sistem dinamik stokastik linear diskrit yang meminimumkan kovariansi *error* estimasi. Metode KF pertama kali diperkenalkan oleh Rudolph E. Kalman pada tahun 1960 lewat papernya yang terkenal tentang suatu penyelesaian rekursif pada masalah filtering data diskrit yang linear (Welch & Bishop, 2006). KF merupakan suatu pendekatan teknis untuk menaksir fungsi parameter dalam peramalan deret berkala (*time series*). Keunggulan metode KF adalah kemampuannya dalam mengestimasi suatu keadaan berdasarkan data yang minim. Data minim yang dimaksud adalah data pengukuran (alat ukur) karena KF merupakan suatu metode yang menggabungkan model dan pengukuran. Data pengukuran terbaru menjadi bagian penting dari algoritma KF karena data mutakhir akan berguna untuk mengoreksi hasil prediksi, sehingga hasil estimasinya selalu mendekati kondisi yang sebenarnya.

*Extended Kalman Filter* (EKF) dapat digunakan untuk sistem yang tak linier dan juga kontinu. Dalam *Extended Kalman Filter* sistem perlu dilinierisasi (apabila sistem tidak linier), pendiskritan sistem (apabila sistem kontinu), dan beberapa tahapan lain. Algoritma *Kalman Filter* dikembangkan untuk nilai estimasi dalam bentuk rekursif dari model linear. Namun demikian, dalam kenyataannya banyak model yang berbentuk nonlinear. Metode *Extended Kalman Filter* (EKF) adalah salah satu metode estimasi yang dikembangkan untuk menyelesaikan model nonlinear. Misalkan diberikan model stokastik nonlinier :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k \quad (2.7)$$

dengan model pengukuran tak linier  $z_k \in \mathfrak{R}^p$  yang memenuhi

$$z_k = h_k x_k + v_k \quad (2.8)$$

yang mana diasumsikan bahwa  $x_0 \sim N(\hat{x}_0, P_{x_0})$ ;  $w_k \sim N(0, Q_k)$ ;  $v_k \sim N(0, R_k)$  memiliki sebaran normal dan diasumsikan *white*, artinya tidak berkorelasi satu sama lain maupun dengan nilai awal  $\hat{x}_0$ .

Sebelum proses estimasi, dilakukan proses linearisasi terlebih dahulu pada sistem tak linier. Proses linierisasi dilakukan dengan mendefinisikan sebagai berikut :

$$x_{k+1}^* = f(\hat{x}_k, u_k) \quad (2.9)$$

$$z_{k+1}^* = h(x_{k+1}^*) \quad (2.10)$$

$$A = [A_{i,j}] = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{x}_k, u_k) \right] \quad (2.11)$$

$$H = [H_{i,j}] = \left[ \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x_{k+1}^*) \right] \quad (2.12)$$

$A$  dan  $H$  adalah matriks Jacobi yang diperoleh dari penurunan  $f$  dan  $h$  terhadap arah  $x$ . Modifikasi dari algoritma Kalman Filter inilah yang disebut algoritma *Extended Kalman Filter* (Lewis, 1986). Algoritma *Extended Kalman Filter* diberikan pada Tabel berikut.

Tabel 2.1 Algoritma *Extended Kalman Filter* (EKF)

Model Sistem dan Pengukuran	Model Sistem: $x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k$ Model Pengukuran : $z_k = h(x_{k+1}) + v_k$ Asumsi : $x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0})$ ; $w_k \sim N(0, Q_k)$ ; $v_k \sim N(0, R_k)$
Inisialisasi	$\hat{x}_0 = \bar{x}_0$ $P_0 = P_{x_0}$
Tahap Prediksi ( <i>Time Update</i> )	$A = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{x}_k, u_k) \right]$ Estimasi : $\hat{x}_{k+1}^- = f(\hat{x}_k, u_k)$ Kovariansi <i>Error</i> : $P_{k+1}^- = AP_k A^T + G_k Q_k G_k^T$
Tahap Koreksi ( <i>Measurement Update</i> )	Kalman Gain : $K_{k+1} = P_{k+1}^- H^T [H_k P_{k+1}^- H^T + R_{k+1}]^{-1}$ Estimasi : $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}(z_{k+1} - H\hat{x}_{k+1}^-)$ Kovariansi <i>Error</i> : $P_{k+1} = (I - K_k H)P_{k+1}^-$

## 2.6 Dana Pensiun

Dana pensiun menurut UU No. 11 Tahun 1992 tentang Dana Pensiun adalah badan hukum yang mengelola dan menjalankan program yang menjanjikan manfaat pensiun. Berdasarkan definisi di atas dana pensiun merupakan lembaga atau badan hukum yang mengelola program pensiun yang dimaksudkan untuk

memberikan kesejahteraan kepada karyawan suatu perusahaan terutama yang telah pensiun. Selanjutnya pengertian pensiun adalah hak seseorang untuk memperoleh penghasilan setelah bekerja sekian tahun dan sudah memasuki usia pensiun atau ada sebab-sebab lain sesuai dengan perjanjian yang telah ditetapkan.

Ada 2 jenis dana pensiun yaitu :

1. Dana Pensiun Pemberi Kerja (DPPK) adalah dana pensiun yang dibentuk oleh orang atau badan yang mempekerjakan karyawan, selaku pendiri, untuk menyelenggarakan Program Pensiun Manfaat Pasti atau Program Pensiun Iuran Pasti, bagi kepentingan sebagian atau seluruh karyawannya sebagai peserta, dan yang menimbulkan kewajiban terhadap pemberi kerja (Pasal 1 ayat 2 UU No. 11 tahun 1992).
2. Dana Pensiun Lembaga Keuangan (DPLK) adalah dana pensiun yang didirikan oleh Bank atau perusahaan asuransi jiwa untuk menyelenggarakan program pensiun iuran pasti bagi perorangan, baik bagi karyawan pemberi kerja maupun pekerja mandiri yang terpisah dari Dana Pensiun Pemberi Kerja bagi karyawan Bank atau Perusahaan Asuransi Jiwa yang bersangkutan ( Pasal 1 Ayat 4 UU No. 11 Tahun 1992).

## **2.7 Program Pensiun**

Berdasarkan UU Nomor 11 Tahun 1992, program pensiun terbagi menjadi dua, yaitu:

1. Program Pensiun Iuran Pasti (*Defined-Contribution Cost*)  
Program pensiun yang iurannya ditetapkan dalam Peraturan Dana Pensiun dan seluruh iuran serta hasil pengembangannya dibukukan pada rekening masing-masing peserta sebagai manfaat pensiun
2. Program Pensiun Manfaat Pasti (*Defined-Benefit Cost*).  
Program pensiun yang manfaatnya ditetapkan dalam peraturan Dana Pensiun, sedangkan iuran berkala ditetapkan berdasarkan perhitungan aktuaris sehingga dana mencukupi untuk membayar manfaat yang telah dijanjikan kepada peserta.

Pensiun manfaat pasti pada dasarnya menjanjikan kompensasi di masa depan, karena itu muncul ketidakpastian besar seputar besarnya kewajiban utama,

pertumbuhan bunga, dan apakah aset program pensiun yang tersedia saat ini akan cukup memenuhi kebutuhan masa depan.

## 2.8 Anuitas

Anuitas adalah pembayaran dalam jumlah tertentu, yang dilakukan dalam selang waktu dan lama tertentu, secara berkelanjutan. Anuitas yang pembayarannya dikaitkan dengan hidup matinya seseorang disebut anuitas hidup (Bower, 1997). Berdasarkan jangka waktu pembayaran, anuitas hidup dibedakan menjadi empat, yaitu:

### a. Anuitas Seumur Hidup

Anuitas seumur hidup adalah suatu anuitas yang pembayarannya dilakukan selama bertanggung masih hidup (Futami, 1993). Misal besar anuitas adalah 1 satuan, maka anuitas awal seumur hidup  $\ddot{a}_x$  adalah serangkaian pembayaran sebesar 1 satuan yang dilakukan pada awal tiap tahun. Sedangkan anuitas akhir seumur hidup  $a_x$  adalah serangkaian pembayaran sebesar 1 satuan yang dilakukan tiap akhir tahun. Adapun rumus perhitungan anuitas awal dan anuitas akhir seumur hidup adalah sebagai berikut:

- Anuitas awal seumur hidup

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \quad (2.13)$$

- Anuitas akhir seumur hidup

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \quad (2.14)$$

### b. *Endowment* Murni

*Endowment* murni adalah suatu pembayaran yang dilakukan pada akhir suatu jangka waktu tertentu bagi seorang anuitan bila dia hidup mencapai akhir jangka waktu tersebut. Nilai tunai suatu *endowment* murni yang dikeluarkan bagi seorang anuitan yang berusia  $x$  selama jangka waktu  $n$  tahun dinyatakan dengan simbol  ${}_nE_x$ . Jika anuitan meninggal sebelum berusia  $x + n$  maka ia tidak akan menerima pembayaran, tetapi jika ia mencapai usia  $x + n$  ia akan menerima pembayaran sebesar 1 satuan pada akhir tahun ke  $x + n$ . Nilai tunai suatu *endowment* murni  ${}_nE_x$  dinyatakan sebagai berikut:

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \quad (2.15)$$

c. Anuitas Hidup Berjangka

Menurut Futami (1993), anuitas berjangka adalah anuitas hidup dimana pembayarannya dilakukan pada suatu jangka waktu tertentu.

- Anuitas awal berjangka  $n$  tahun

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}. \quad (2.16)$$

- Anuitas akhir berjangka  $n$  tahun

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}. \quad (2.17)$$

d. Anuitas Hidup Tunda

Anuitas ditunda adalah anuitas yang pembayarannya ditunda selama  $n$  tahun, sedangkan pembayarannya dapat berlangsung seumur hidup atau hanya dalam jangka waktu tertentu.

- Anuitas seumur hidup ditunda  $n$  tahun
- Anuitas berjangka  $m$  tahun ditunda  $n$  tahun.

## 2.9 Tabel Mortalita

Tabel mortalita merupakan tabel yang menggambarkan tingkat kematian seseorang. Tabel mortalita yang digunakan oleh kalangan aktuaris Indonesia adalah Tabel *Commissioner Standart Ordinary* [CSO]'58, *Group Annuity Mortality* (GAM'71), GAM'80 dan GAT (Laporan Aktuaris, 1999). Dalam melihat interval umur kita dapat membedakan Tabel Mortalita lengkap dengan interval umur satu tahun dan Tabel Mortalita ringkas dengan interval umur lima tahun atau sepuluh tahun.

Tabel mortalita berisi peluang seseorang meninggal menurut dari umur dari kelompok orang yang diasuransikan. Simbol  $l_x$  digunakan untuk menyatakan banyaknya orang yang tepat berusia  $x$ , dan simbol  $d_x$  menyatakan banyaknya orang yang meninggal antara usia  $x$  hingga  $x + 1$ ,

$$\begin{aligned} d_x &= l_x - l_{x+1} \\ {}_nd_x &= l_x - l_{x+n}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Peluang orang berusia  $x$  akan mencapai usia  $x + 1$  dinyatakan dengan simbol  $p_x$ ,

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}. \quad (2.19)$$

Peluang orang berusia  $x$  akan meninggal sebelum usia  $x + 1$  dinyatakan dengan simbol  $q_x$ ,

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}. \quad (2.20)$$

## 2.10 Asumsi Aktuaria

Asumsi aktuaria adalah suatu rangkaian estimasi yang dipergunakan dalam memperhitungkan manfaat pensiun yang berkaitan dengan perubahan pada masa yang akan datang yang mempengaruhi pendanaan program pensiun manfaat pasti. Asumsi yang digunakan dalam pendanaan program pensiun meliputi:

### a. Asumsi Penurunan Populasi

Asumsi penurunan populasi adalah semua kemungkinan yang dapat terjadi pada peserta pensiun. Penurunan populasi dapat disebabkan oleh berbagai hal diantaranya adalah tingkat kematian, tingkat cacat, pensiun normal, dan pensiun dipercepat. Penurunan populasi (tingkat *decrement*) biasa disajikan dalam bentuk tabel *decrement*. Tabel *decrement* adalah sebuah model matematika yang menganggap bahwa sekelompok orang yang menjadi sasaran beberapa penyebab *decrement* yang *independent* yang berlangsung secara terus-menerus. Salah satu contoh tabel *decrement* adalah Tabel Mortalita.

### b. Asumsi Penghasilan yang Akan Datang

Asumsi penghasilan yang akan datang (*salary assumption*) pada perhitungan dana pensiun mempunyai peran untuk menentukan besarnya iuran dan manfaat pensiun. Untuk mengetahui besar penghasilan yang akan datang, dilakukan estimasi terhadap besar gaji peserta pensiun di masa depan. Estimasi tersebut mempertimbangkan tiga komponen, yaitu (Dewi, 2014):

1. Peningkatan gaji karena peningkatan jasa.
2. Peningkatan gaji karena produktivitas keuntungan perusahaan
3. Peningkatan gaji karena adanya inflasi

### c. Asumsi Tingkat Suku Bunga

Asumsi tingkat suku bunga memberi pengaruh yang kuat dalam program dana pensiun, karena asumsi ini digunakan untuk mencari *present value* dari nilai uang di masa depan. Pada realitanya, tingkat suku bunga di masa depan dapat berubah sewaktu-waktu.

## 2.11 Fungsi Dasar Aktuaria

Fungsi dasar aktuaria merupakan seluruh fungsi dasar yang mendukung proses perhitungan aktuaria. Terdapat beberapa fungsi dasar aktuaria yang digunakan dalam perumusan penentuan pendanaan pensiun, diantaranya adalah fungsi kelangsungan hidup, fungsi bunga, fungsi gaji, dan fungsi manfaat (Nurlatifah, 2015).

### 2.11.1 Fungsi Kelangsungan Hidup

Fungsi kelangsungan hidup atau *composite survival function* merupakan fungsi yang menggambarkan peluang seorang karyawan akan tetap bekerja selama masa kerja aktif sampai waktu yang diperbolehkan pensiun (Winklevoss, 1993). Fungsi kelangsungan hidup didefinisikan sebagai berikut:

$${}_n p_x^{(T)} = \frac{l_{x+n}^{(T)}}{l_x^{(T)}}, \quad (2.21)$$

dimana,

${}_n p_x^{(T)}$  = Peluang seorang karyawan berusia  $x$  akan tetap bekerja untuk  $n$  tahun mendatang.

$l_x^{(T)}$  = Banyaknya karyawan yang masih aktif bekerja pada usia  $x$

$l_{x+n}^{(T)}$  = Banyaknya karyawan yang masih aktif bekerja pada usia  $x + n$

Total penyusutan dari peserta aktif sama dengan jumlahan dari setiap penyebab yang digunakan adalah:

$$\begin{aligned} d_x^{(T)} &= d_x^{(m)} + d_x^{(t)} + d_x^{(d)} + d_x^{(r)} \\ d_x^{(T)} &= l_x^{(T)} (q_x^{(m)} + q_x^{(t)} + q_x^{(d)} + q_x^{(r)}), \end{aligned} \quad (2.22)$$

dengan:

$q_x^{(m)}$  = Tingkat kematian (*mortality*)

$q_x^{(t)}$  = Tingkat pengunduran diri (*termination*)

$q_x^{(d)}$  = Tingkat kecacatan (*disability*)

$q_x^{(r)}$  = Tingkat pensiun normal (*retirement*)

$d_x^{(T)}$  = Banyaknya peserta yang keluar dari program pensiun pada usia  $x$

$d_x^{(m)}$  = Banyaknya peserta yang meninggal pada usia  $x$

$d_x^{(t)}$  = Banyaknya peserta yang mengundurkan diri pada usia  $x$

$d_x^{(d)}$  = Banyaknya peserta yang menjadi cacat pada usia  $x$

$d_x^{(r)}$  = Banyaknya peserta yang pensiun normal pada usia  $x$ .

### 2.11.2 Fungsi Bunga

Winklevoss (1993) menyatakan bahwa fungsi bunga digunakan untuk mendiskontokan suatu pembayaran yang akan datang ke waktu sekarang. Jika  $i$  adalah tingkat suku bunga yang diasumsikan untuk  $n$  tahun dengan besar  $i$  tidak berubah untuk setiap tahunnya, maka nilai sekarang dari pembayaran sebesar 1 setelah  $n$  tahun adalah:

$$\frac{1}{(1 + i_1)(1 + i_2) \dots (1 + i_n)} \quad (2.23)$$

dalam bunga majemuk didefinisikan suatu fungsi  $v$  sebagai berikut:

$$v = \frac{1}{(1 + i)} \quad (2.24)$$

maka fungsi bunga dapat disederhanakan menjadi:

$$v^n = \frac{1}{(1 + i)^n} \quad (2.25)$$

$v^n$  adalah nilai sekarang dari pembayaran sebesar 1 satuan yang dilakukan pada  $n$  tahun mendatang.

Pada penelitian ini tingkat suku bunga yang digunakan mengikuti model suku bunga stokastik CIR. Sehingga dapat dituliskan jika  $r_t$  adalah tingkat suku bunga untuk tahun ke- $t$ , maka *present value* dari 1 yang harus dibayar setelah  $n$  tahun adalah sebagai berikut:

$$v^n = \prod_{t=1}^n \left( \frac{1}{1 + r_t} \right) \quad (2.26)$$

dengan  $v^n$  menyatakan *present value* mulai tahun ke-1 sampai tahun ke- $n$ .

### 2.11.3 Fungsi Gaji

Suatu program pensiun mempunyai manfaat yang berkaitan dengan besarnya gaji karyawan, sehingga diperlukan perumusan notasi gaji dan prosedur untuk mengestimasi gaji dimasa mendatang. Kumulatif gaji karyawan dari usia masuk kerja  $y$  sampai usia  $x - 1$ , dinotasikan dengan  $S_x$ , dimana  $x > y$ .

$$S_x = \sum_{t=y}^{x-1} S_t . \quad (2.27)$$

Jika diasumsikan besar tingkat kenaikan gaji karyawan adalah  $s$  per tahun, maka besarnya gaji terakhir karyawan sebelum pensiun pada usia  $r - 1$  berdasarkan gaji pada usia  $x$  (Aitken, 1994) adalah:

$$s_{r-1} = (1 + s)^{r-1-x} S_x , \quad (2.28)$$

dengan:

$s_{r-1}$  = Gaji terakhir karyawan sebelum pensiun pada usia  $r - 1$

$S_x$  = Gaji karyawan pada usia  $x$

sehingga estimasi gaji karyawan pada usia  $x + t$  berdasarkan gaji pada usia  $x$  dapat dirumuskan:

$$S_{x+t} = S_x (1 + s)^t . \quad (2.29)$$

### 2.11.4 Fungsi Manfaat

Fungsi manfaat digunakan untuk menentukan besar manfaat pensiun yang akan diterima peserta ketika tiba saatnya pensiun. Perumusan manfaat pensiun ada tiga, yaitu:

1. Manfaat penghasilan tetap (*flat dollar unit benefit*)

$$B_x = (x - y) b_x . \quad (2.30)$$

2. Rata-rata gaji terakhir (*final average*)

$$B_r = k(r - y) \frac{1}{n} \sum_{t=r-n}^{r-1} S_t . \quad (2.31)$$

3. Rata-rata gaji selama bekerja (*career average*)

$$B_x = k \cdot S_x , \quad (2.32)$$

dengan:

$B_x$  = Kumulatif manfaat pensiun pada tahun peserta berusia  $x$

$B_r$  = Kumulatif manfaat pensiun seorang peserta pada usia pensiun  $r$

$k$  = Proporsi dari gaji yang dipersiapkan untuk manfaat pensiun ( $0 \leq k \leq 1$ ).

### 2.12 *Present Value of Future Benefit (PVFB)*

Nilai sekarang manfaat pensiun atau PVFB adalah nilai sekarang dari manfaat pensiun yang diproyeksikan dan akan diterima oleh peserta program pensiun dimasa yang akan datang (setelah pensiun). PVFB dirumuskan sebagai berikut:

$${}^r(PVFB)_x = B_r v^{r-x} {}_{r-x}p_x^{(T)} \ddot{a}_r , \quad (2.33)$$

dengan:

${}^r(PVFB)_x$  = Nilai sekarang (pada usia  $x$ ) manfaat pensiun (pada usia  $r$ )

$v^{r-x}$  = Faktor diskonto dari usia  $x$  sampai usia pensiun  $r$

${}_{r-x}p_x^{(T)}$  = Peluang seorang karyawan akan tetap bekerja hingga usia pensiun  $r$

$\ddot{a}_r$  = Nilai tunai anuitas awal seumur hidup pada saat usia pensiun  $r$ .

### 2.13 *Metode Perhitungan Aktuaria*

Menurut Standar Praktik Aktuaria Dana Pensiun (SPA-DP) No. 5.01, metode perhitungan aktuaria adalah suatu metode yang digunakan untuk menetapkan besarnya nilai sekarang manfaat pensiun pada suatu periode tertentu dari suatu program pensiun manfaat pasti. Terdapat banyak metode perhitungan aktuaria, namun dalam Standar Praktik Aktuaria Dana Pensiun (SPA-DP) No. 3.01, metode perhitungan aktuaria dibagi menjadi dua kategori besar yaitu metode *Accrued Benefit Cost* dan metode *Projected Benefit Cost*.

#### a. *Metode Accrued Benefit Cost (ABCM)*

Metode biaya manfaat yang disisihkan (*Accrued Benefit Cost*). Metode biaya aktuaria, yaitu iuran dalam satu tahun merupakan nilai sekarang dari tambahan jaminan dalam tahun ini. Metode *Accrued Benefit Cost* ditandai dengan pembagian total manfaat pensiun yang dapat menjadi hak seorang peserta bila

bekerja sampai usia pensiun normal dengan jumlah masa kerja yang telah dan akan dijalankannya sejak mulai bekerja sampai dengan usia pensiun normal tersebut.

**b. Metode *Projected Benefit Cost* (PBCM)**

Metode biaya manfaat yang diproyeksikan (*Projected Benefit Cost*). Metode biaya aktuarial yaitu iuran menggambarkan jaminan yang akan datang dan tingkat besarnya iuran (presentase gaji) sepanjang tahun. Metode *Projected Benefit Cost* diterapkan dengan terlebih dahulu menetapkan nilai sekarang, pada tanggal tertentu, dari total manfaat pensiun yang dapat menjadi hak seorang peserta bila bekerja sampai usia pensiun normal. Nilai sekarang total manfaat pensiun tersebut kemudian dialokasikan ke tiap-tiap masa kerja mulai dari tanggal tersebut sampai dengan tanggal tercapainya usia pensiun normal. Metode *Projected Benefit Cost* menggunakan tanggal perhitungan aktuarial sebagai tanggal penetapan nilai sekarang total manfaat pensiun dan mengalokasikan seluruh nilai sekarang tersebut pada masa kerja setelah tanggal perhitungan aktuarial.

**2.14 Ukuran Kewajiban Pensiun**

Terdapat beberapa ukuran kewajiban dana pensiun yang harus dibayarkan oleh dana pensiun pada peserta pensiun, baik pada saat mengundurkan diri, meninggal, cacat, pensiun dini, maupun ketika pensiun normal.

**1) Kewajiban Penghentian Rencana**

Kewajiban penghentian rencana atau *plan termination liability* (PTL) merupakan kewajiban yang dibayarkan oleh dana pensiun kepada peserta pada saat usia  $x$  dikarenakan mengundurkan diri sebagai peserta aktif dari program pensiun. Fungsi PTL menggunakan peluang tingkat kematian yang dapat mencegah peserta menerima manfaat yang masih harus dibayar pada saat pensiun jika rencana itu dihentikan. Nilai dari PTL didefinisikan sebagai berikut:

$$PTL_x = B_{x:r-x} p_x^{(m)} v^{r-x} \ddot{a}_r \quad (2.34)$$

dengan:

$(PTL)_x$  = Nilai kewajiban seorang peserta yang mengundurkan diri dari program dana pensiun pada usia  $x$

$B_x$  = Kumulatif manfaat pensiun pada tahun peserta berusia  $x$

${}_{r-x}p_x^{(m)}$  = Peluang seorang karyawan usia  $x$  akan tetap hidup hingga usia pensiun normal  $r$ .

## 2) Kewajiban Aktuaria

Kewajiban aktuaria atau *actuarial liability* (AL) adalah kewajiban dana pensiun untuk memberikan manfaat kepada peserta yang telah pensiun. Kewajiban aktuaria merupakan suatu program pensiun pada saat  $x$  adalah besarnya dana program dana pensiun yang seharusnya telah terkumpul pada saat  $x$  untuk pembayaran manfaat pensiun yang akan datang. Kewajiban aktuaria dapat dianalogikan dengan cadangan manfaat.

$$AL_x = B_x v^{r-x} {}_{r-x}p_x^{(T)} \ddot{a}_r = \frac{B_x}{B_r} r (PVFB)_x . \quad (2.35)$$

### 2.15 Supplemental Cost

*Supplemental cost* (SC) merupakan biaya tambahan yang harus dibayarkan oleh pihak pemberi kerja kepada pihak dana pensiun ketika terjadi kekurangan dana (defisit) dari kewajiban aktuaria. *Supplemental cost* digunakan untuk menutupi ketidaksesuaian antara kewajiban dengan manfaat pensiun yang telah ditetapkan. Pada dasarnya *supplemental cost* dirancang untuk membantu biaya iuran normal melunasi biaya *Present Value Future of Benefit* (PVFB).

Pada *supplemental cost* terdapat dua tipe yang digunakan, yaitu:

1. Tipe *Explicit Supplemental Cost* merupakan tipe pendanaan yang terlihat secara langsung dan jelas serta hanya akan terjadi jika terdapat perubahan kewajiban yang tidak didanai dalam jangka waktu yang telah ditentukan.
2. Tipe *Implicit Supplemental Cost* merupakan tipe pada biaya tambahan yang tidak terlihat secara langsung dan digunakan untuk menghitung berbagai metode aktuaria yang berkaitan dengan biaya normal.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

## **BAB 3**

### **METODE PENELITIAN**

Pada bagian ini dibahas mengenai tahapan penelitian yang akan digunakan atau dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian.

#### **3.1 Tahapan Penelitian**

Tahapan penelitian yang dilakukan dalam penelitian yang diusulkan adalah sebagai berikut.

1. Studi Literatur

Pengkajian lebih mendalam tentang tingkat suku bunga model CIR, metode estimasi parameter *Conditional Least Square*, *Extended Kalman Filter*, pendanaan program pensiun dan proses perhitungan aktuarial terutama tentang metode *Accrued Benefit Cost*.

2. Estimasi Parameter Tingkat Suku Bunga Model CIR dengan CLSE

Pada tahap ini dilakukan estimasi parameter tingkat suku bunga mengikuti model CIR menggunakan metode *Conditional Least Square* yang hasilnya akan digunakan sebagai nilai inisialisasi awal parameter dalam estimasi menggunakan metode *Extended Kalman Filter*.

3. Analisa dan Implementasi EKF dalam Estimasi Tingkat Suku Bunga CIR

Pada tahap ini dilakukan estimasi terhadap suku bunga model CIR menggunakan metode *Extended Kalman Filter* dengan nilai parameter yang dihasilkan dari estimasi menggunakan metode *Conditional Least Square*.

4. Analisa dan Implementasi Perhitungan *Supplemental Cost*

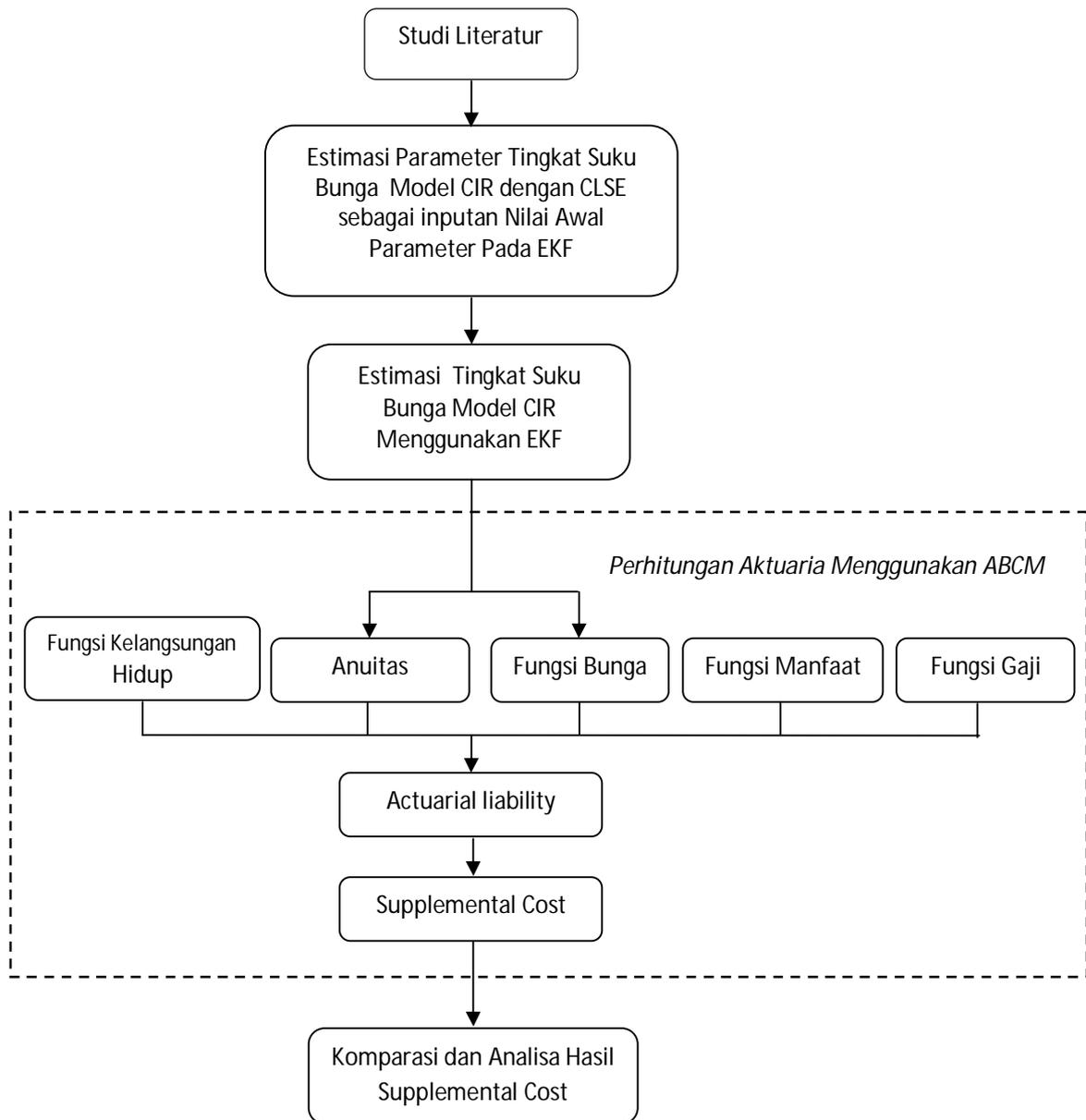
Pada tahap ini dilakukan implementasi perhitungan aktuarial dari hasil estimasi tingkat suku bunga model CIR dengan metode pendanaan program pensiun *Accrued Benefit Cost*.

5. Analisa Hasil dan Kesimpulan

Pada tahap ini dilakukan analisis hasil simulasi. Selanjutnya akan ditarik suatu kesimpulan berdasarkan hasil simulasi dan analisis.

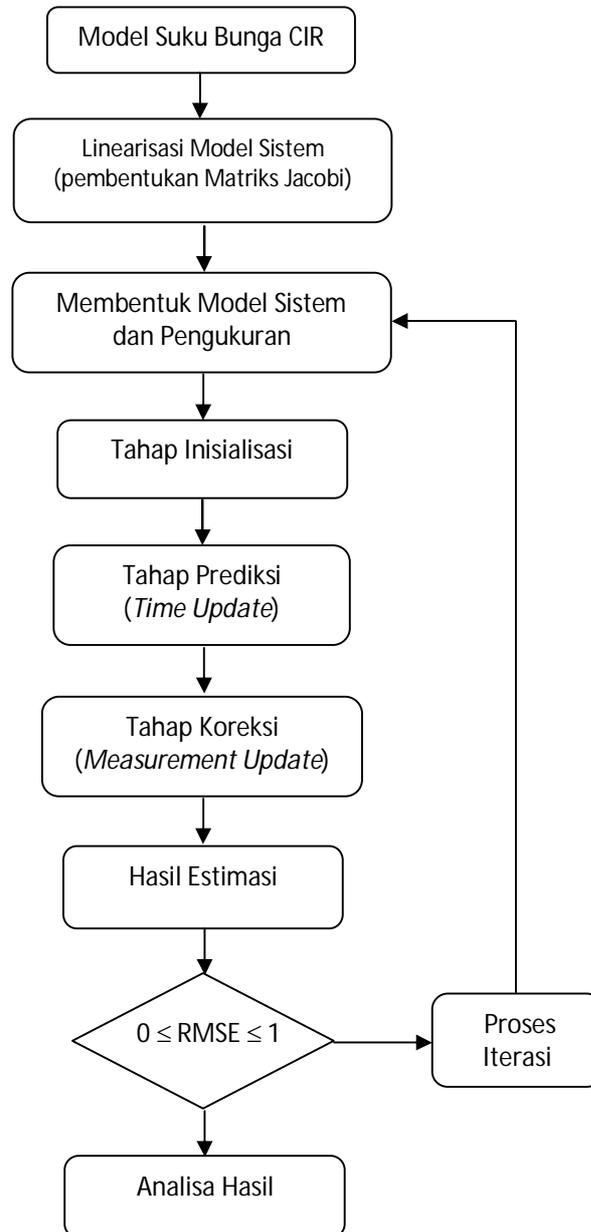
### 3.2 Diagram Alir Penelitian

Secara umum diagram alir dalam menyelesaikan penelitian ini adalah sebagai berikut:



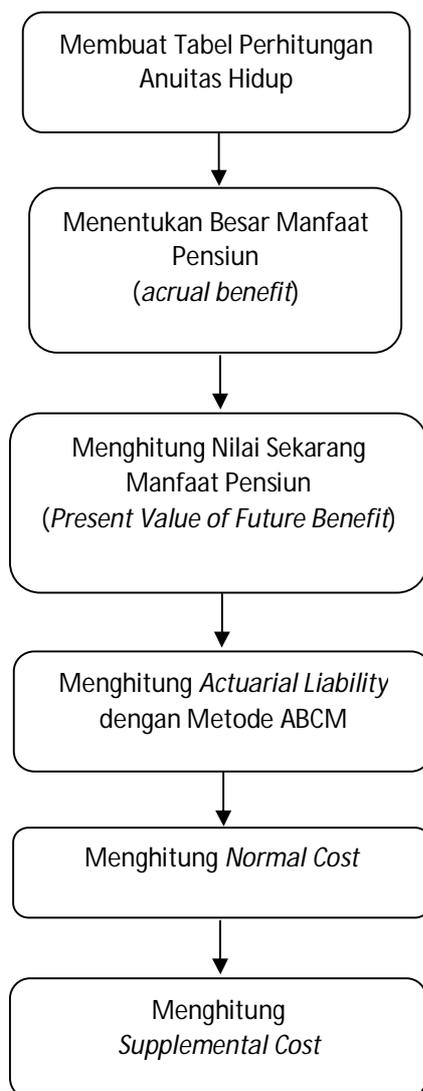
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

Adapun diagram alir algoritma *Extended Kalman Filter* adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2 Diagram Alir EKF

Selanjutnya hasil estimasi suku bunga menggunakan *Extended Kalman Filter* akan digunakan pada proses perhitungan *supplemental cost* dengan tahap perhitungan sebagai berikut:



Gambar 3.3 Diagram Alir Perhitungan *Supplemental Cost*

## BAB 4

### ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai tingkat suku bunga mengikuti model CIR. Parameter dari model CIR diestimasi menggunakan algoritma *Conditional Least Square*. Selanjutnya hasil estimasi digunakan sebagai nilai awal yang akan diestimasi menggunakan algoritma *Extended Kalman Filter*. Hasil dari estimasi tingkat suku bunga akan digunakan dalam perhitungan *supplemental cost* atas kewajiban aktuarial program dana pensiun dengan menggunakan metode *Accrued Benefit Cost*.

#### 4.1 Penyelesaian Model Suku Bunga CIR (Cox Ingersoll Ross)

Model CIR pada perhitungan kewajiban aktuarial digunakan dengan tujuan untuk menentukan faktor diskonto untuk *present value* dari manfaat pensiun yang akan diperoleh di masa pensiun nanti dengan asumsi tingkat suku bunga berubah-ubah sepanjang waktu. Pada Subbab 4.1 ini akan membahas mengenai penyelesaian dari model CIR pada persamaan (2.1). Persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial stokastik, maka digunakan teorema Ito untuk penyelesaiannya. Didefinisikan fungsi sebagai berikut:

$$f(t, r(t)) = e^{\alpha t} r(t) \quad (4.1)$$

berdasarkan teorema Ito, karena  $r(t)$  merupakan proses stokastik, maka fungsi  $f(t, r(t))$  yang mengandung  $r(t)$  juga merupakan proses stokastik. Sehingga rumus Ito untuk fungsi  $f(t, r(t))$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$df(t, r(t)) = f_t(t, r(t))dt + f_r(t, r(t))dr(t) + \frac{1}{2}f_{rr}(t, r(t))dt \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t} r(t)) &= \alpha e^{\alpha t} r(t)dt + e^{\alpha t} dr(t) + \frac{1}{2} \cdot 0 \\ &= \alpha e^{\alpha t} r(t)dt + e^{\alpha t} dr(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$dr(t)$  pada persamaan (4.3) disubstitusikan dengan persamaan (2.1) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
d(e^{\alpha t}r(t)) &= \alpha e^{\alpha t}r(t)dt + \alpha\mu e^{\alpha t}dt - \alpha e^{\alpha t}r(t)dt \\
&\quad + \sigma e^{\alpha t}\sqrt{r(t)}dW(t) \\
d(e^{\alpha t}r(t)) &= \alpha\mu e^{\alpha t}dt + \sigma e^{\alpha t}\sqrt{r(t)}dW(t)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Selanjutnya kedua ruas pada persamaan (4.4) diintegrasikan dari  $t$  sampai  $T$ , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\int_t^T d(e^{\alpha u}r(u)) &= \int_t^T \alpha\mu e^{\alpha u}du + \int_t^T \sigma e^{\alpha u}\sqrt{r(u)}dW(u) \\
e^{\alpha T}r(T) - e^{\alpha t}r(t) &= \alpha\mu \frac{1}{\alpha}e^{\alpha T} - \alpha\mu \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t} + \int_t^T \sigma e^{\alpha u}\sqrt{r(u)}dW(u) \\
e^{\alpha T}r(T) - e^{\alpha t}r(t) &= \mu(e^{\alpha T} - e^{\alpha t}) + \int_t^T \sigma e^{\alpha u}\sqrt{r(u)}dW(u) \\
e^{\alpha T}r(T) &= e^{\alpha t}r(t) + \mu(e^{\alpha T} - e^{\alpha t}) + \int_t^T \sigma e^{\alpha u}\sqrt{r(u)}dW(u)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Kedua ruas pada persamaan (4.5) dikalikan dengan  $e^{-\alpha T}$ , sehingga persamaan (4.5) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r(T) &= e^{-\alpha T}e^{\alpha t}r(t) + \mu e^{-\alpha T}(e^{\alpha T} - e^{\alpha t}) \\
&\quad + e^{-\alpha T} \int_t^T \sigma e^{\alpha u}\sqrt{r(u)}dW(u) \\
&= e^{-\alpha(T-t)}r(t) + \mu(1 - e^{-\alpha(T-t)}) \\
&\quad + \int_t^T \sigma e^{-\alpha(T-u)}\sqrt{r(u)}dW(u)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Persamaan (4.6) adalah penyelesaian dari persamaan (2.1).

Pada model tingkat suku bunga CIR terdapat tiga parameter yang tidak diketahui dan akan diestimasi yaitu  $\alpha$ ,  $\mu$ , dan  $\sigma$ . Parameter pada model CIR merupakan konstanta yang bernilai positif. Pada penelitian ini estimasi parameter menggunakan metode *Conditional Least Square Estimation* (CLSE). Untuk memperoleh parameter tersebut dengan menggunakan metode CLSE, maka perlu diperoleh terlebih dahulu ekspektasi dan variansi bersyarat model CIR.

Dari persamaan (4.6) dapat dicari ekspektasi bersyarat dan variansi bersyarat dari  $r(T)$  bersyarat  $r(t)$  yang telah dibahas oleh Putri, dkk (2015), sebagai berikut:

$$E(r(T)|r(t)) = r(t)e^{-\alpha\Delta t} + \mu(1 - e^{-\alpha\Delta t}) \quad (4.7)$$

$$\text{var}(r(T)|r(t)) = \sigma^2 \left( \frac{\mu}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha\Delta t})^2 + \frac{r(t)}{\alpha} (e^{-\alpha\Delta t} - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) \quad (4.8)$$

dengan  $\Delta t = T - t$ .

Untuk  $r(T) = r_t$  dan  $r(t) = r_{t-1}$ , maka ekspektasi bersyarat model CIR dari persamaan (4.7) menjadi:

$$E(r_t|r_{t-1}) = \mu(1 - e^{-\alpha\Delta t}) + r_{t-1}e^{-\alpha\Delta t} \quad (4.9)$$

$$E(r_t|r_{t-1}) = \gamma_0 + \gamma_1 r_{t-1} \quad (4.10)$$

$\theta$  adalah himpunan parameter yang akan diestimasi menggunakan metode CLSE dengan  $\gamma_0 = \mu(1 - e^{-\alpha\Delta t})$  dan  $\gamma_1 = e^{-\alpha\Delta t}$ . Sehingga *conditional mean function* model CIR adalah :

$$m(r; \theta) = E(r_t|r_{t-1}) = \gamma_0 + \gamma_1 r_{t-1} \quad (4.11)$$

Dan variansi bersyarat model CIR dari persamaan (4.8) menjadi:

$$\begin{aligned} \text{var}(r; \theta) &= \text{var}(r(T)|r(t)) = \text{var}(r_t|r_{t-1}) \\ &= \sigma^2 \left( \frac{\mu}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha\Delta t})^2 + \frac{r(t)}{\alpha} (e^{-\alpha\Delta t} - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

yang merupakan *conditional variance function*. Selanjutnya, dapat diperoleh estimator  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\mu}$  dan  $\hat{\sigma}$  yang akan dibahas pada sub bab 4.2.

## 4.2 Estimasi Nilai Awal Parameter Model CIR Menggunakan CLSE.

Terdapat dua langkah yang dilakukan dalam estimasi model tingkat suku bunga CIR, yaitu dengan *conditional mean function* untuk mengestimasi  $\hat{\alpha}$  dan  $\hat{\mu}$ , dan *conditional variance function* untuk mengestimasi  $\hat{\sigma}$ . Berdasarkan *conditional mean function* maka model CIR untuk waktu diskrit sesuai persamaan (4.6) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$r_t = \gamma_0 + \gamma_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4.13)$$

dengan

$$\varepsilon_t = \int_{t-1}^t e^{-\alpha \Delta t} \sigma \sqrt{r_u} dW_u$$

$\{\varepsilon_t\}$  adalah *martingale increment* yang berdistribusi identik dan *independent (i.i.d)* dan  $E[\varepsilon_t | r_{t-1}] = 0$ .

Estimasi parameter  $\hat{\alpha}$  dan  $\hat{\mu}$  diperoleh dengan cara meminimumkan fungsi jumlah kuadrat bersyarat yaitu:

$$f_{\theta}(r_t) = \sum_{t=1}^n (r_t - E(r_t | r_{t-1}))^2 \quad (4.14)$$

menggunakan turunan pertama  $f_{\theta}(r_t)$  terhadap  $\gamma_0$  dan  $\gamma_1$ , sehingga dapat diperoleh  $\hat{\alpha}$  dan  $\hat{\mu}$ . Penjabaran turunan pertama dari  $f_{\theta}(r_t)$  sebagai berikut:

1) Terhadap  $\gamma_0$

$$\frac{\partial f_{\theta}(r_t)}{\partial \gamma_0} = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n (r_t - \gamma_0 - \gamma_1 r_{t-1})^2}{\partial \gamma_0} = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n (r_t^2 - 2\gamma_0 r_t - 2\gamma_1 r_t r_{t-1} + 2\gamma_0 \gamma_1 r_{t-1} + \gamma_1^2 (r_{t-1})^2)}{\partial \gamma_0} = 0$$

$$-2 \sum_{t=1}^n r_t + 2 \sum_{t=1}^n \hat{\gamma}_1 r_{t-1} + 2\hat{\gamma}_0 = 0$$

$$-2 \sum_{t=1}^n (r_t - \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 r_{t-1}) = 0$$

$$\sum_{t=1}^n r_t - n \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^n r_{t-1} = 0$$

$$n \hat{\gamma}_0 = \sum_{t=1}^n r_t - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^n r_{t-1}$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum_{t=1}^n r_t - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n} \quad (4.16)$$

2) Terhadap  $\gamma_1$

Solusi  $\hat{\gamma}_1$  yang meminimumkan fungsi jumlah kuadrat bersyarat  $f_\theta(r_t)$  diperoleh dengan menyelesaikan persamaan berikut:

$$\frac{\partial f_\theta(r_t)}{\partial \gamma_1} = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n (r_t - \gamma_0 - \gamma_1 r_{t-1})^2}{\partial \gamma_1} = 0$$

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^n (r_t^2 - 2\gamma_0 r_t - 2\gamma_1 r_t r_{t-1} + 2\gamma_0 \gamma_1 r_{t-1} + \gamma_1^2 r_{t-1}^2)}{\partial \gamma_1} = 0$$

$$-2 \sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} + 2 \sum_{t=1}^n \hat{\gamma}_0 r_{t-1} + 2\hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 = 0$$

$$-2 \sum_{t=1}^n (r_t r_{t-1} - \hat{\gamma}_0 r_{t-1} - \hat{\gamma}_1 r_{t-1}^2) = 0$$

$$\sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \hat{\gamma}_0 \sum_{t=1}^n r_{t-1} - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 = 0$$

$$\hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 = \sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \hat{\gamma}_0 \sum_{t=1}^n r_{t-1} \quad (4.18)$$

Persamaan (4.18) disubstitusikan sehingga diperoleh:

$$\sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \left( \frac{\sum_{t=1}^n r_t - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n} \right) \sum_{t=1}^n r_{t-1} - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 = 0$$

$$\sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t \sum_{t=1}^n r_{t-1} + \frac{\hat{\gamma}_1}{n} \sum_{t=1}^n r_{t-1} \sum_{t=1}^n r_{t-1} - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 = 0$$

$$\hat{\gamma}_1 \left[ \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_{t-1} \sum_{t=1}^n r_{t-1} \right] = \sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t \sum_{t=1}^n r_{t-1}$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{\sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_{t-1} \sum_{t=1}^n r_{t-1}}$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{n \sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^n r_t \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 - \sum_{t=1}^n r_{t-1} \sum_{t=1}^n r_{t-1}} \quad (4.19)$$

Dengan menggunakan persamaan tersebut, maka dapat dicari estimator dari  $\alpha$ , yaitu:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_1 &= e^{-\hat{\alpha}\Delta t} = \frac{n \sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^n r_t \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 - \sum_{t=1}^n r_{t-1} \sum_{t=1}^n r_{t-1}} \\ \ln(e^{-\hat{\alpha}\Delta t}) &= \ln \left[ \frac{n \sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^n r_t \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 - \sum_{t=1}^n r_{t-1} \sum_{t=1}^n r_{t-1}} \right] \\ -\hat{\alpha}\Delta t &= \ln \left[ \frac{n \sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^n r_t \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 - \sum_{t=1}^n r_{t-1} \sum_{t=1}^n r_{t-1}} \right] \\ \hat{\alpha} &= -\frac{1}{\Delta t} \ln \left[ \frac{n \sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^n r_t \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n \sum_{t=1}^n r_{t-1}^2 - \sum_{t=1}^n r_{t-1} \sum_{t=1}^n r_{t-1}} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Untuk estimator kuadrat terkecil bersyarat  $\mu$  dapat diperoleh dengan

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_0 &= \hat{\mu}(1 - e^{-\alpha\Delta t}) \\ \hat{\mu} &= \frac{\hat{\gamma}_0}{(1 - e^{-\alpha\Delta t})} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Substitusikan persamaan (4.16) ke persamaan (4.21) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{\frac{\sum_{t=1}^n r_t - \hat{\gamma}_1 \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n}}{(1 - e^{-\alpha\Delta t})} \\ \hat{\mu} &= \frac{\sum_{t=1}^n r_t - e^{-\hat{\alpha}\Delta t} \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n(1 - e^{-\alpha\Delta t})} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dengan demikian didapatkan estimator  $\hat{\alpha}$  dan  $\hat{\mu}$  sebagai berikut:

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{\Delta t} \ln \left[ \frac{n \sum_{t=1}^n r_t r_{t-1} - \sum_{t=1}^n r_t \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n \sum_{t=1}^n (r_{t-1})^2 - (\sum_{t=1}^n r_{t-1})^2} \right] \quad (4.23)$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=1}^n r_t - e^{-\hat{\alpha}\Delta t} \sum_{t=1}^n r_{t-1}}{n(1 - e^{-\hat{\alpha}\Delta t})} \quad (4.24)$$

Untuk estimastor  $\hat{\sigma}^2$  diperoleh dengan menggunakan *conditional variance function*. *Conditional variance function* untuk model CIR adalah persamaan (4.12) sebagai berikut:

$$v(r; \theta) = E[(r_t - E[r_t|r_{t-1}])^2|r_{t-1}] = \text{var}(r_t|r_{t-1})$$

Sehingga dapat dituliskan

$$\begin{aligned} E[(r_t - E[r_t|r_{t-1}])^2|r_{t-1}] &= E[(r_t - m(r; \theta))^2|r_{t-1}] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t - m(r; \theta))^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t - (\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 r_{t-1}))^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Dengan mensubstitusikan  $\hat{\gamma}_0$  dan  $\hat{\gamma}_1$  sehingga persamaan dapat ditulis kembali seperti berikut:

$$E[(r_t - m(r; \theta))^2|r_{t-1}] = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t - (\hat{\mu}(1 - e^{-\hat{\alpha}\Delta t}) + e^{-\hat{\alpha}\Delta t} r_{t-1}))^2 \quad (4.26)$$

Berdasarkan persamaan (4.12) dan (4.26) dapat diperoleh estimator untuk  $\hat{\sigma}^2$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E[(r_t - m(r; \theta))^2|r_{t-1}] &= \hat{\sigma}^2 \left( \frac{\hat{\mu}}{2\hat{\alpha}} (1 - e^{-\hat{\alpha}\Delta t})^2 + \frac{r_t}{\hat{\alpha}} e^{-\hat{\alpha}\Delta t} \right) \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t - (\hat{\mu}(1 - e^{-\hat{\alpha}\Delta t}) + e^{-\hat{\alpha}\Delta t} r_{t-1}))^2 &= \hat{\sigma}^2 \left( \frac{\hat{\mu}}{2\hat{\alpha}} (1 - e^{-\hat{\alpha}\Delta t})^2 + \frac{r_t}{\hat{\alpha}} e^{-\hat{\alpha}\Delta t} \right) \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{(r_t - (\hat{\mu}(1 - e^{-\hat{\alpha}\Delta t}) + e^{-\hat{\alpha}\Delta t} r_{t-1}))^2}{\left( \frac{1}{\hat{\alpha}} r_{t-1} (e^{-\hat{\alpha}\Delta t} - e^{-2\hat{\alpha}\Delta t}) + \frac{\hat{\mu}}{2\hat{\alpha}} (1 - 2e^{-\hat{\alpha}\Delta t} + e^{-2\hat{\alpha}\Delta t}) \right)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

estimator  $\hat{\sigma}$  dapat diperoleh dari  $\sqrt{\hat{\sigma}^2}$ .

Data yang digunakan dalam proses estimasi parameter ini adalah suku bunga BI selama delapan tahun mulai dari Juli 2009 s.d Juli 2016. Dengan bantuan software Matlab, didapatkan hasil estimasi untuk parameter model CIR sebagai berikut:

Tabel 4.1 Hasil Estimasi Parameter Model CIR

Estimasi Parameter	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Hasil	0.0210	0.0659	0.0512

Nilai parameter dari metode CLSE ini akan digunakan sebagai inputan nilai awal pada metode *Extended Kalman Filter*.

### 4.3 Estimasi Parameter dan State Model CIR Menggunakan *Extended Kalman Filter*.

Estimasi state dengan menggunakan metode *Extended Kalman Filter* (EKF) memerlukan sistem diskrit yang linear. Berikut adalah algoritma EKF:

- **Model Sistem dan Pengukuran**

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k$$

$$z_k = Hx_k + v_k$$

dengan  $x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}), w_k \sim N(0, Q_k); v_k \sim N(0, R_k)$

Parameter dan state yang akan diestimasi adalah  $\alpha, \mu, \sigma$  dan nilai suku bunga yang mengikuti model CIR. Karena  $\alpha, \mu,$  dan  $\sigma$  merupakan konstanta, maka persamaan transisi untuk parameter tersebut adalah:

$$\alpha_{t+1} = \alpha_t$$

$$\mu_{t+1} = \mu_t$$

$$\sigma_{t+1} = \sigma_t$$

Sedangkan persamaan transisi untuk tingkat suku bunga model CIR adalah penyelesaian dari model CIR pada persamaan (4.6) , dapat dituliskan sebagai berikut:

$$r(t + 1) = e^{-\alpha((t+1)-t)}r(t) + \mu(1 - e^{-\alpha((t+1)-t)}) + \epsilon(t + 1) \quad (4.28)$$

dengan  $T = t + 1$  dan  $\epsilon(t + 1) = \int_t^T \sigma e^{-\alpha((t+1)-u)} \sqrt{r(u)} dW(u)$ .

Sehingga didapatkan model sistem untuk algoritma *Extended Kalman Filter* sebagai berikut:

$$x_{t+1} = a(x_t, t) + w_t \quad (4.29)$$

dengan

$$x_t = [\alpha_t \quad \mu_t \quad \sigma_t \quad r_t]' \text{ dan} \quad (4.30)$$

$$a(x_t, t) = \begin{bmatrix} \alpha_t \\ \mu_t \\ \sigma_t \\ (1 - e^{-\alpha_t \Delta t})\mu_t + e^{-\alpha_t \Delta t} r_t \end{bmatrix}$$

Adapun model pengukurannya adalah sebagai berikut:

$$r(t + 1) = \mu(1 - e^{-\alpha \Delta t}) + e^{-\alpha \Delta t} r(t) + v_k \quad (4.31)$$

dengan  $v_k \sim N(0, R)$ .

$$r(t + 1) = h(r(t))$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial \alpha} & \frac{\partial h}{\partial \mu} & \frac{\partial h}{\partial \sigma} & \frac{\partial h}{\partial r} \end{bmatrix}$$

$$H = [(\mu - r)\Delta t e^{-\alpha \Delta t} \quad 1 - e^{-\alpha \Delta t} \quad 0 \quad e^{-\alpha \Delta t}] \quad (4.32)$$

Setelah didapatkan model sistem dan pengukuran, selanjutnya adalah tahap inisialisasi.

- **Inisialisasi**

Pada tahap ini diberikan inisialisasi awal untuk estimasi awal  $\hat{x}_0$  dan kovarian awal  $P_0$ . Nilai awal parameter didapatkan dari hasil estimasi menggunakan CLSE. Sedangkan nilai awal untuk  $r_t$  diambil dari data pertama, yakni nilai suku bunga pada Juli 2009. Dengan demikian inisialisasi nilai awal  $\hat{x}_0$  dan kovarians awal  $\hat{P}_0$  sebagai berikut:

$$\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.0210 \\ 0.0659 \\ 0.0512 \\ 0.0650 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_0 = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Selanjutnya untuk variansi dari *noise* sistem ( $Q$ ) dan variansi *noise* pengukuran ( $R$ ) diberikan:

$$Q = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad R = 10^{-6}$$

- **Tahap Prediksi (*Time Update*)**

Pada tahap prediksi, dihitung kovarian *error* dan estimasi model sistem yaitu:

Kovariansi *error* :  $P_{k+1}^- = AP_k A^T + G_k Q_k G_k^T$   
dengan  $A$  adalah matriks Jacobi

Estimasi :  $\hat{x}_{k+1}^- = f(\hat{x}_k, u_k)$

Untuk mendapatkan matriks  $A$  adalah dengan menghitung matriks Jacobian untuk  $a(x_t, t)$ . Matriks Jacobian didapatkan dengan cara menurunkan secara parsial fungsi  $a(x_t, t)$  terhadap masing-masing parameter dan state yang akan diestimasi sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{x}_k, u_k) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_t} & \frac{\partial a_1}{\partial \mu_t} & \frac{\partial a_1}{\partial \sigma_t} & \frac{\partial a_1}{\partial r_t} \\ \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_t} & \frac{\partial a_2}{\partial \mu_t} & \frac{\partial a_2}{\partial \sigma_t} & \frac{\partial a_2}{\partial r_t} \\ \frac{\partial a_3}{\partial \alpha_t} & \frac{\partial a_3}{\partial \mu_t} & \frac{\partial a_3}{\partial \sigma_t} & \frac{\partial a_3}{\partial r_t} \\ \frac{\partial a_4}{\partial \alpha_t} & \frac{\partial a_4}{\partial \mu_t} & \frac{\partial a_4}{\partial \sigma_t} & \frac{\partial a_4}{\partial r_t} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Sehingga didapatkan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\mu - r)\Delta t e^{-\alpha\Delta t} & 1 - e^{-\alpha\Delta t} & 0 & e^{-\alpha\Delta t} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

- **Tahap Koreksi (*Measurement Update*)**

Pada tahap koreksi dihitung Kalman Gain, kovarian *error* dan estimasi melalui model pengukuran, yaitu:

$$\text{Kalman Gain} \quad : \quad K_{k+1} = P_{k+1}^- H^T [H P_{k+1}^- H^T + R_{k+1}]^{-1}$$

$$\text{Kovariansi Error} \quad : \quad P_{k+1} = (I - K_{k+1}H)P_{k+1}^-$$

$$\text{Estimasi} \quad : \quad \hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}(z_{k+1} - H\hat{x}_{k+1}^-)$$

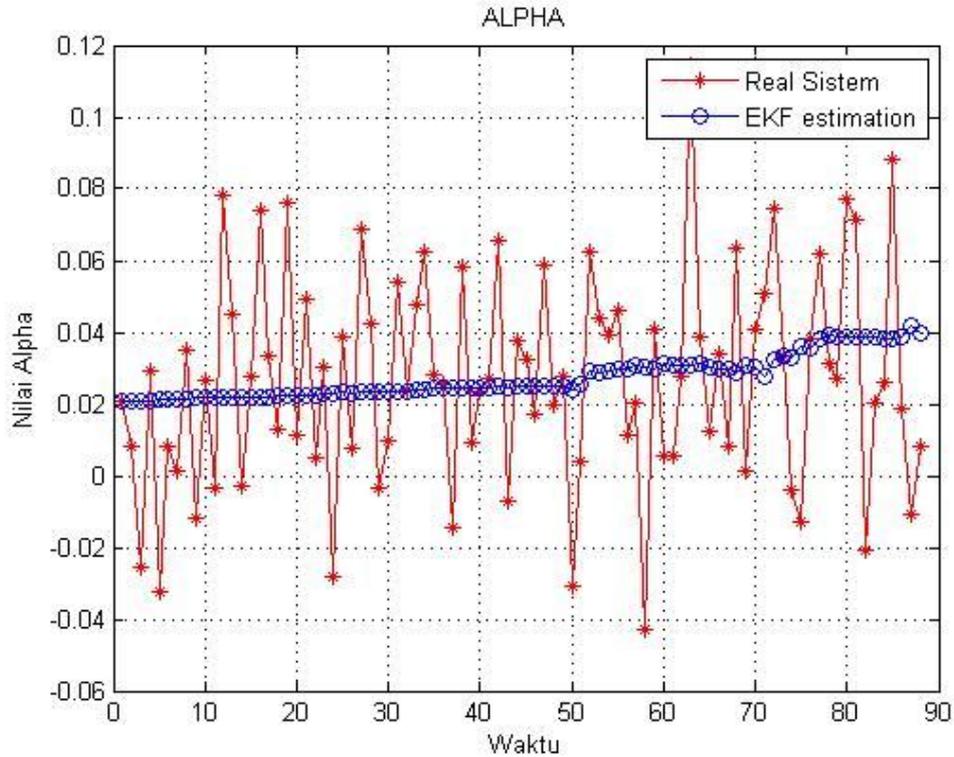
Pada tahap ini akan memberikan suatu koreksi berdasarkan pada pengukuran  $z_{k+1}$  pada waktu  $k + 1$  untuk menghasilkan  $\hat{x}_k^- \in R^n$  dan kovariansi error  $P_{k+1}$ .

Nilai estimasi pada tahap koreksi bergantung pada residual (*measurement innovation*) yang dilambangkan dengan  $\tilde{z}_{k+1}$ , yakni

$$\tilde{z}_{k+1} = (z_{k+1} - H\hat{x}_{k+1}^-)$$

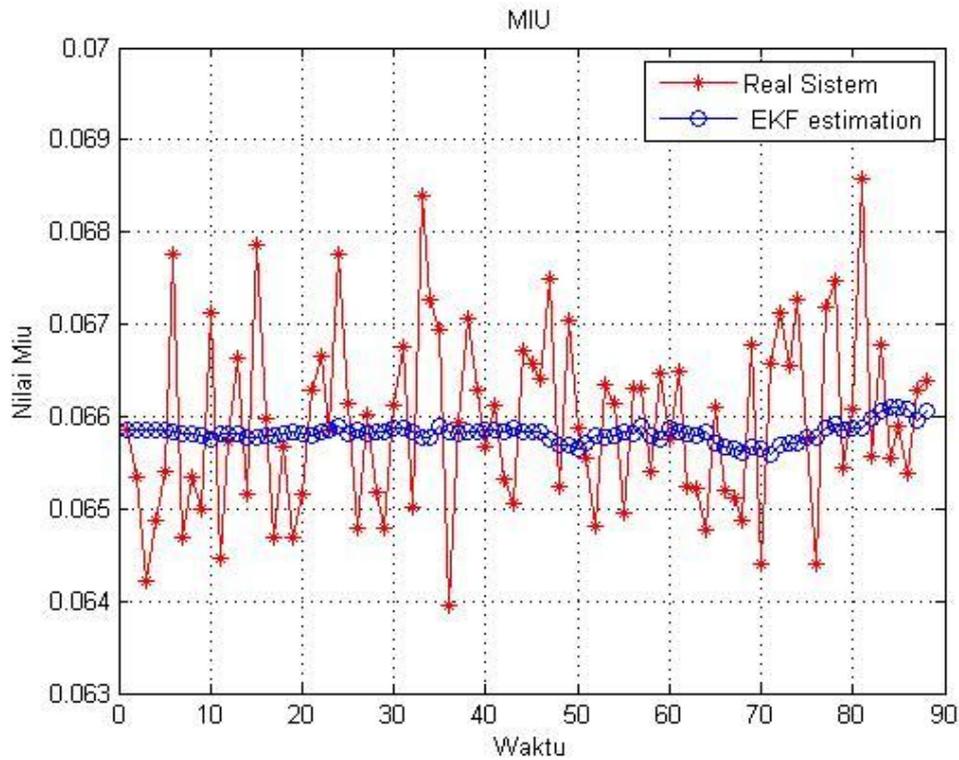
koefisien pembobotan dari residual tersebut yang disebut Kalman Gain, yang digunakan untuk meminimalisasi kovariansi *error* ( $P_k$ ).

Selanjutnya, dengan bantuan software Matlab didapatkan hasil estimasi untuk masing-masing parameter  $\alpha$ ,  $\mu$ , dan  $\sigma$  sebagai berikut:



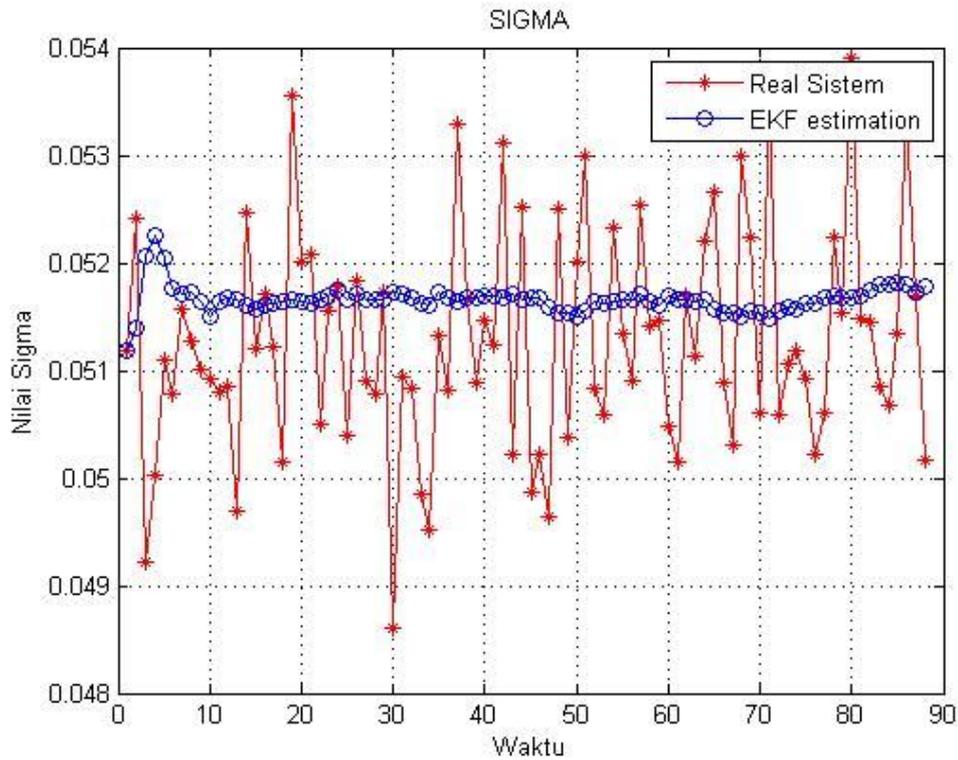
Gambar 4.1 Hasil Estimasi Parameter  $\alpha$  menggunakan EKF

Dilihat dari Gambar 4.1, hasil estimasi parameter  $\alpha$  menggunakan *Extended Kalman Filter* cukup baik, ditunjukkan bahwa simpangan *error* maksimal adalah 0.04 dibandingkan dengan nilai real dari sistem. Dari hasil estimasi ini didapatkan RMSE sebesar 0.0311. Parameter  $\alpha$  menggambarkan laju atau kecepatan suku bunga.



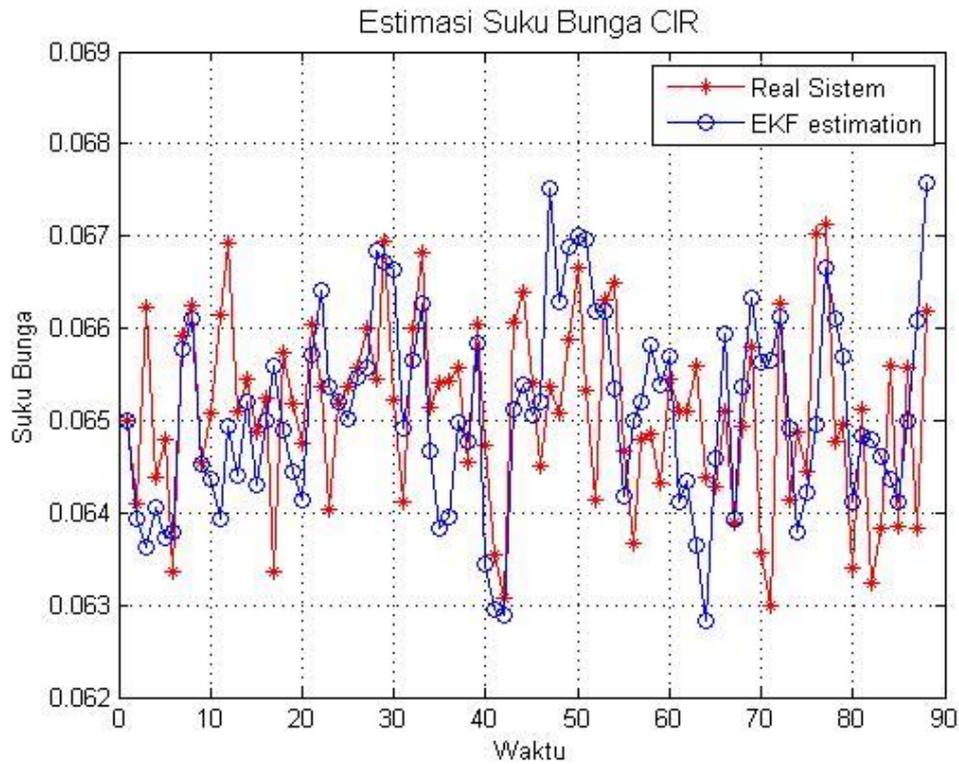
Gambar 4.2 Hasil Estimasi Parameter  $\mu$  menggunakan EKF

Hasil estimasi parameter  $\mu$  menggunakan *Extended Kalman Filter* terlihat lebih baik dibandingkan dengan hasil estimasi parameter  $\alpha$ . Parameter  $\mu$  merupakan *mean reversion* atau rata-rata tingkat suku bunga jangka panjang. Pada Gambar 4.2 ditunjukkan oleh grafik bahwa simpangan *error* dalam  $10^{-4}$  dari nilai real sistem. Dari hasil estimasi ini didapatkan nilai RMSE sebesar  $8.985 \times 10^{-4}$ .



Gambar 4.3 Hasil Estimasi Parameter  $\sigma$  menggunakan EKF

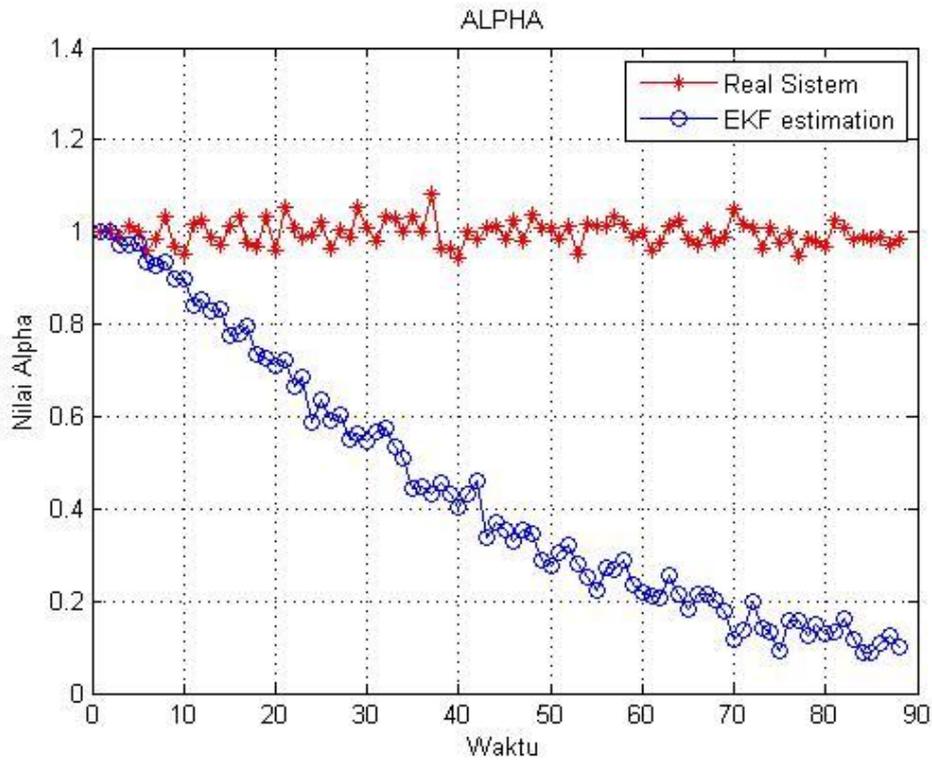
Dari Gambar 4.3, hasil estimasi parameter  $\sigma$  menggunakan *Extended Kalman Filter* juga cukup baik dengan nilai RMSE estimasi sebesar  $9.25 \times 10^{-4}$ . Parameter  $\sigma$  dapat diinterpretasikan sebagai gangguan (*noise*) atau volatilitas dari pergerakan tingkat suku bunga yang berubah-ubah secara tidak pasti. Artinya semakin besar nilai  $\sigma$ , maka volatilitas pergerakan tingkat suku bunga juga semakin besar. Nilai  $\sigma$  yang semakin besar, proses lebih jauh menyimpang dari  $\mu$  yang merupakan *mean reversion* atau rata-rata tingkat suku bunga jangka panjang.



Gambar 4.4 Hasil Estimasi Tingkat Suku Bunga Menggunakan EKF

Dari hasil estimasi parameter dan tingkat suku bunga menggunakan EKF, dapat disimpulkan cukup baik karena tingkat *error* estimasi masih kecil. Terlihat pada Gambar 4.4 diatas bahwa hasil estimasi cenderung mendekati nilai real sistem. Dari hasil estimasi ini, nilai RMSE sebesar  $1.3 \times 10^{-3}$

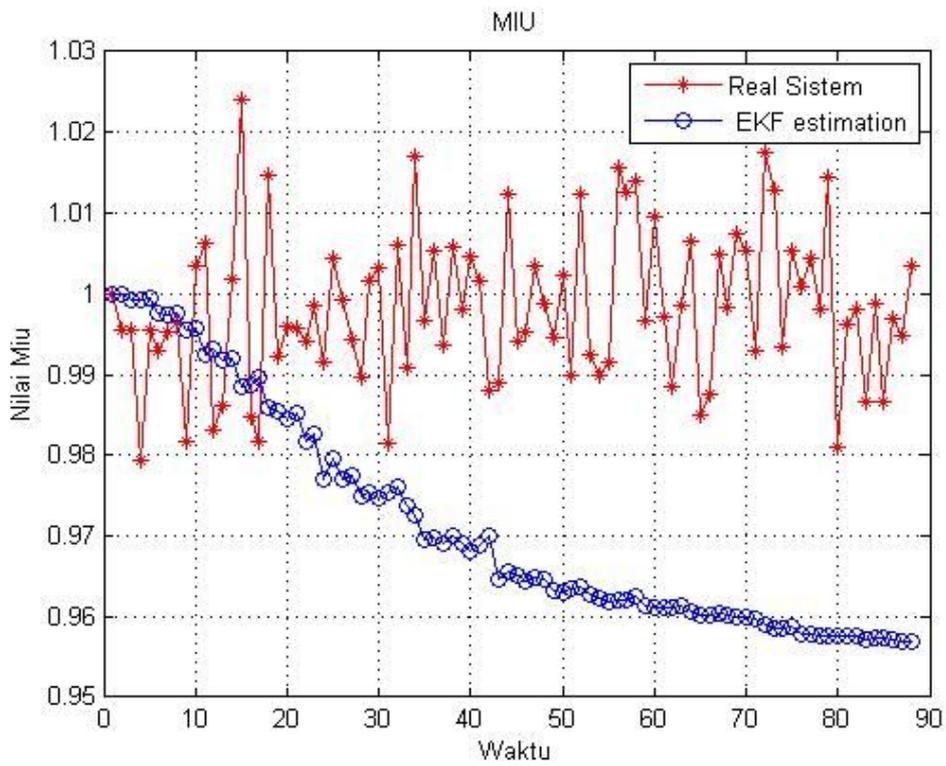
Selanjutnya akan diuji cobakan bilamana nilai awal parameter yang dimasukkan dalam estimasi suku bunga menggunakan EKF adalah suatu konstanta tertentu. Misalkan nilai awal parameter yang dimasukkan adalah  $\alpha = 1$ ,  $\mu = 1$ , dan  $\sigma = 1$ . Dengan nilai  $Q$ ,  $R$ , dan  $P_0$  yang sama dengan sebelumnya dihasilkan estimasi parameter  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\mu}$ , dan  $\hat{\sigma}$  sebagai berikut:



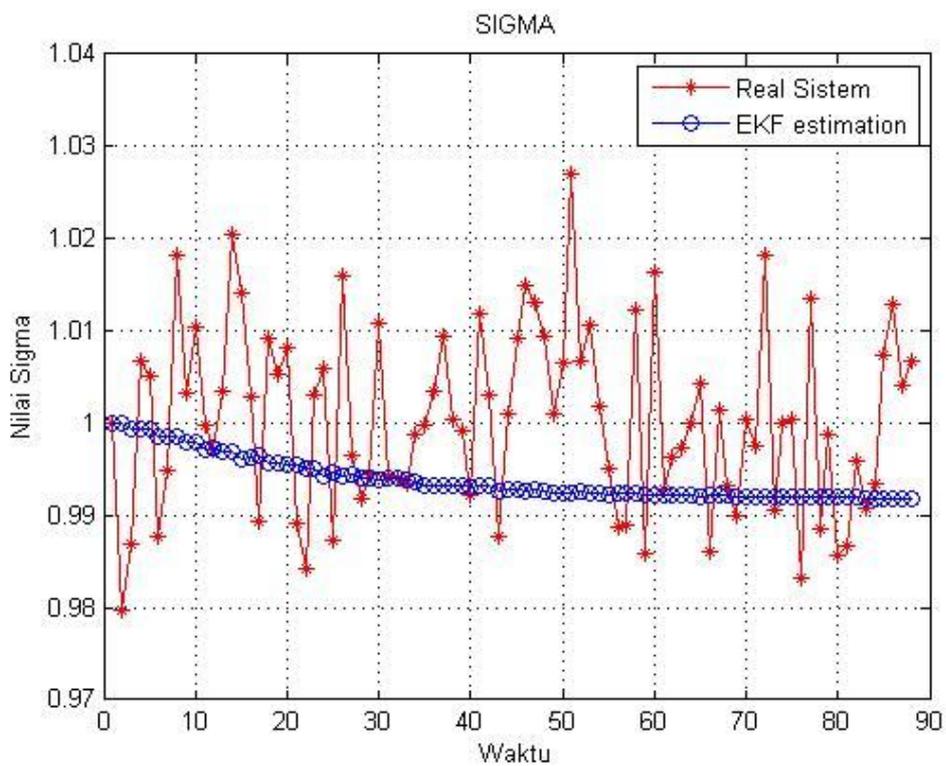
Gambar 4.5 Hasil Estimasi Parameter  $\alpha$  dengan Nilai Awal  $\alpha = 1$

Terlihat dari Gambar 4.5, hasil estimasi parameter  $\alpha$  menggunakan *Extended Kalman Filter* dengan nilai awal  $\alpha = 1$  simpangan *error* maksimal adalah 0.8 dengan RMSE sebesar 0.6247, dibandingkan dengan hasil estimasi sebelumnya yang menggunakan nilai awal dari CLSE bahwa simpangan *error* maksimal adalah 0.04 dan RMSE sebesar 0.0311, maka dapat dikatakan hasil estimasi akan lebih baik dengan adanya estimasi parameter awal berdasarkan data histori sebelumnya.

Adapun hasil estimasi untuk parameter  $\mu$  dan  $\sigma$  ditunjukkan pada gambar berikut:



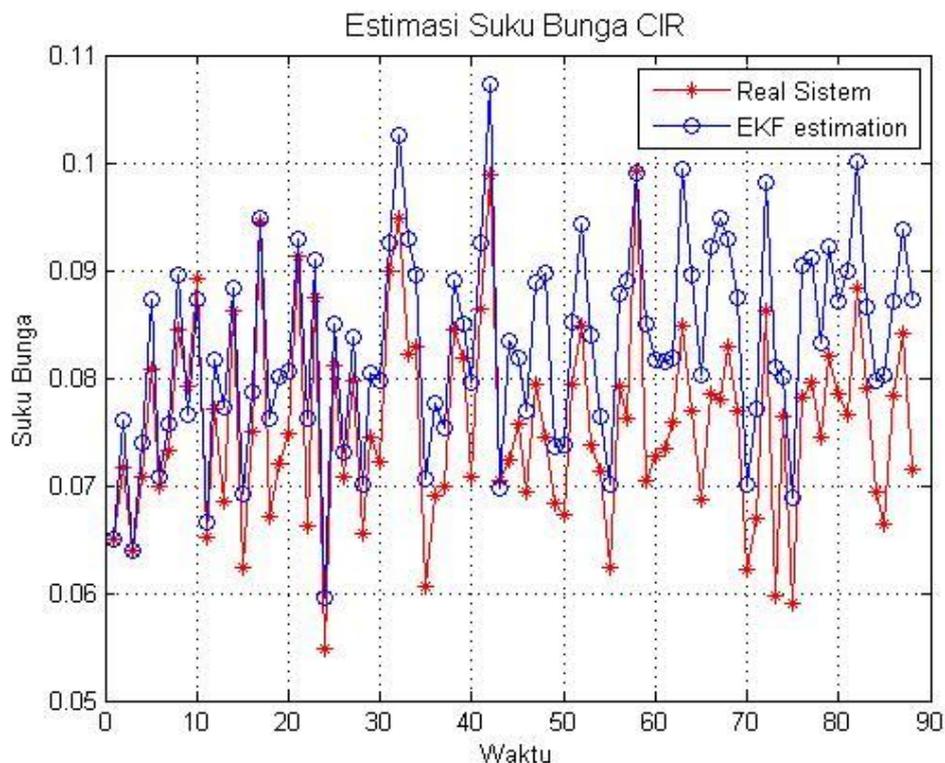
Gambar 4.6 Hasil Estimasi Parameter  $\mu$  dengan Nilai Awal  $\mu = 1$ .



Gambar 4.7 Hasil Estimasi Parameter  $\sigma$  dengan Nilai Awal  $\sigma = 1$ .

Sama halnya dengan hasil dari parameter  $\alpha$ , untuk estimasi parameter  $\mu$  diperoleh RMSE sebesar 0.0319 bila dibandingkan dengan hasil sebelumnya menggunakan nilai awal parameter dari CLSE dengan RMSE sebesar  $8.985 \times 10^{-4}$ . Sedangkan untuk parameter  $\sigma$ , terlihat pada Gambar 4.7, simpangan terbesar adalah 0.08 dengan RMSE sebesar 0.0114 dan bila dibandingkan dengan hasil sebelumnya menggunakan nilai awal dari CLSE dengan RMSE estimasi sebesar  $9.25 \times 10^{-4}$ . Maka dapat disimpulkan hasil estimasi akan lebih baik dengan adanya estimasi parameter awal berdasarkan data yang ada sebelumnya.

Dari hasil estimasi parameter diatas didapatkan estimasi suku bunga sebagai berikut:



Gambar 4.8 Hasil Estimasi Tingkat Suku Bunga

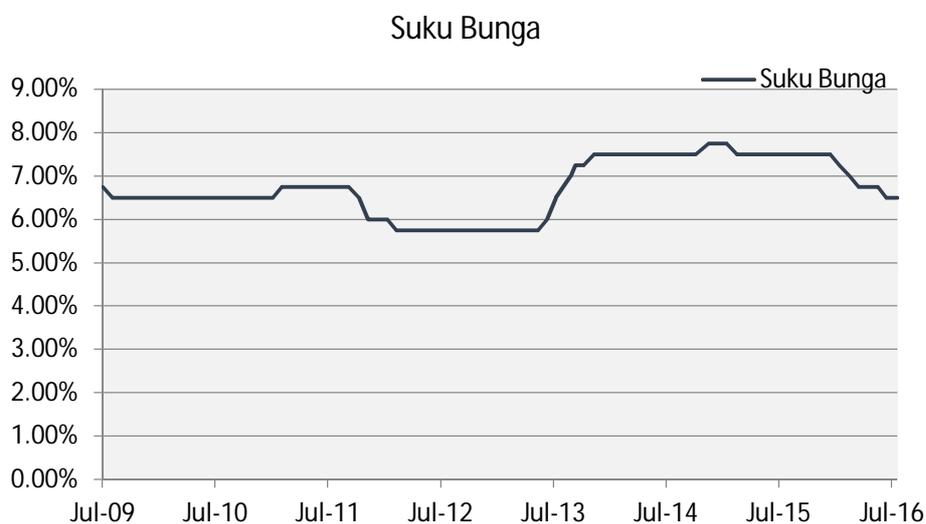
Pada Gambar 4.8 merupakan hasil estimasi suku bunga CIR dengan menggunakan nilai awal parameter percobaan konstanta tertentu tanpa diestimasi menggunakan CLSE. Dari hasil estimasi suku bunga tersebut, diperoleh RMSE sebesar  $8.2 \times 10^{-3}$ , sementara bila dengan menggunakan nilai awal parameter dari CLSE nilai RMSE sebesar  $1.3 \times 10^{-3}$ . Sehingga dapat disimpulkan hasil estimasi suku bunga

menggunakan EKF lebih baik jika menggunakan nilai awal parameter yang dihasilkan dari metode CLS dengan dasar estimasi dari data aktual suku bunga yang diperoleh sebelumnya.

Hasil estimasi dari tingkat suku bunga model CIR yang dihasilkan dengan menggunakan metode *Extended Kalman Filter* ini akan digunakan dalam perhitungan aktuaria. Dalam hal ini ada terdapat dua fungsi aktuaria yang berpengaruh yaitu fungsi bunga dan fungsi anuitas.

#### 4.4 Aproksimasi Tingkat Suku Bunga Dengan Jangka Waktu 3 Tahun

Pada Subbab ini akan dijabarkan mengenai implementasi model CIR untuk mengaproksimasi tingkat suku bunga. Model CIR disini merupakan hasil dari estimasi menggunakan EKF. Langkah pertama yang dilakukan adalah mengumpulkan data tingkat suku bunga yang berlaku di pasar, dalam hal ini adalah data yang sama yang digunakan dalam mengestimasi parameter awal menggunakan CLSE, yaitu data tingkat suku bunga dari Bank Indonesia yaitu *BI rate* mulai Juli 2009 sampai dengan Juli 2016 sebagaimana ditampilkan pada Gambar 4.9.



Gambar 4.9 Suku Bunga Bulanan Juli 2009 s.d Juli 2016

Dalam hal akan mengaproksimasi data tingkat suku bunga jangka waktu 3 tahun, maka diambil data mulai Juli 2009 sampai dengan Juni 2012. Hasil

estimasi parameter  $\alpha, \mu,$  dan  $\sigma$  menggunakan CLSE jangka waktu 3 tahun dimasukkan sebagai nilai awal parameter dalam metode EKF untuk mengestimasi tingkat suku bunga, dimana pada tahap koreksi pengukuran yang digunakan adalah data pengukuran aktual atau sebenarnya. Selanjutnya akan diperbandingkan dengan data aktual suku bunga.

Dengan menggunakan metode CLSE dan data BI *rate* dari Juli 2009 sampai dengan Juni 2012, diperoleh hasil estimasi parameter  $\alpha, \mu,$  dan  $\sigma$  sebagai berikut:

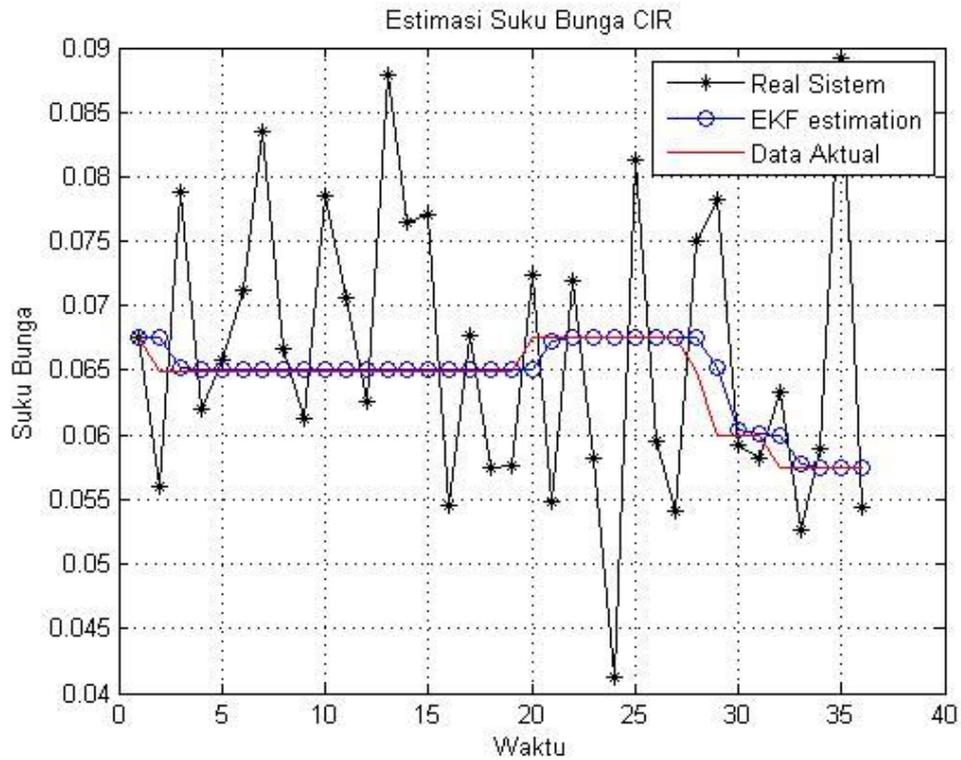
Tabel 4.2 Hasil Estimasi Parameter Model CIR

Estimasi Parameter	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Hasil	0.0159	0.0469	0.1384

Hasil estimasi diatas dimasukkan sebagai nilai parameter awal dalam mengestimasi suku bunga model CIR menggunakan EKF. Dengan menggunakan data pengukuran suku bunga aktual yang digunakan dalam tahap koreksi pada EKF dan nilai variansi dari *noise* sistem ( $Q$ ) dan noise pengukuran ( $R$ ) sebagai berikut:

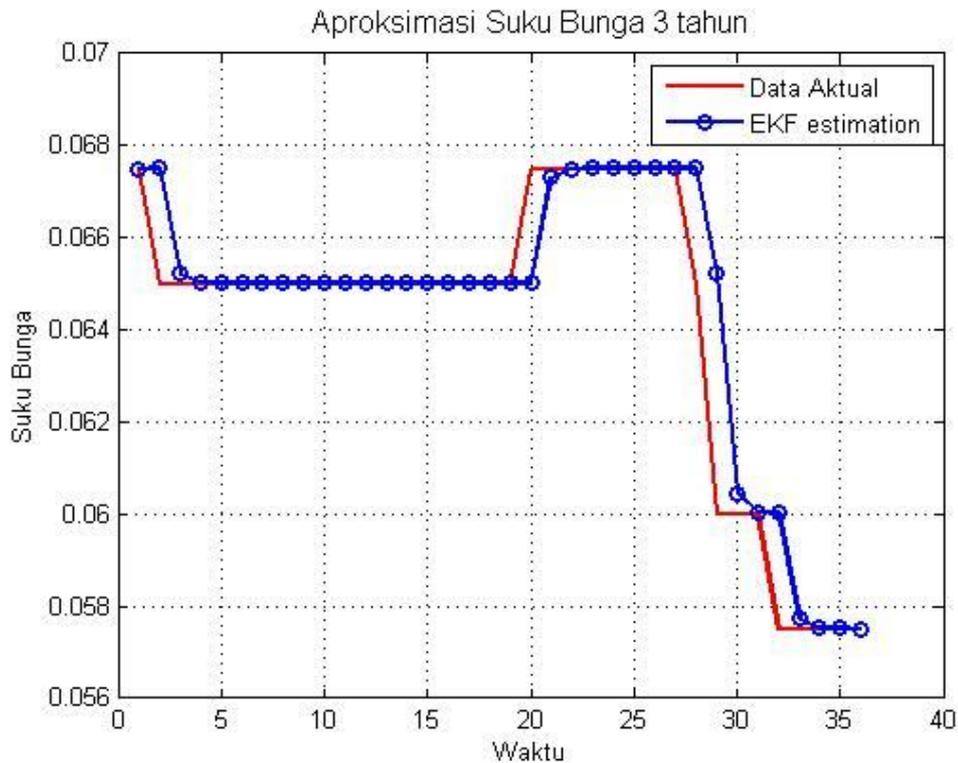
$$Q_1 = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad R = 10^{-6}$$

Hasil aproksimasi suku bunga model CIR terhadap data suku bunga sistem real dan data suku bunga aktual dapat dilihat pada Gambar 4.10 berikut.



Gambar 4.10 Aproksimasi Suku Bunga Jangka Waktu 3 Tahun

Terlihat bahwa hasil estimasi suku bunga menggunakan EKF cenderung mendekati nilai suku bunga aktual daripada suku bunga sistem, dengan RMSE terhadap suku bunga sistem  $1,04 \times 10^{-2}$ . Adapun hasil aproksimasi dari estimasi model CIR menggunakan EKF dengan data suku bunga aktual lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar 4.11.



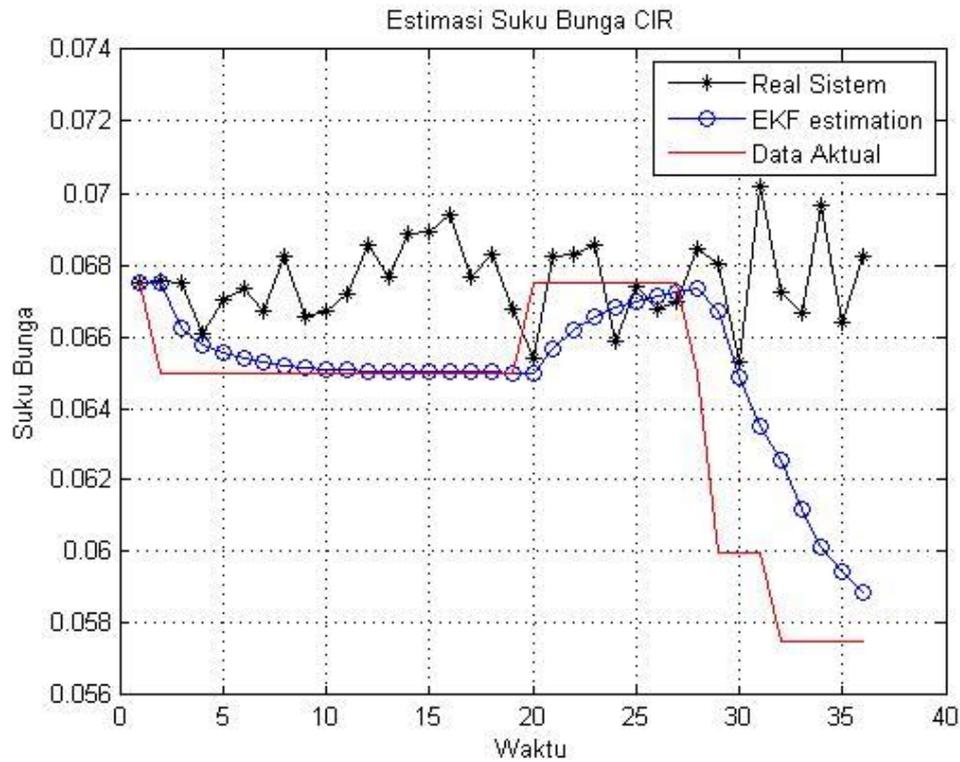
Gambar 4.11 Aproksimasi Suku Bunga Aktual Jangka Waktu 3 Tahun

Berdasarkan Gambar 4.11 diatas, terlihat bahwa pola pergerakan tingkat suku bunga hasil estimasi menggunakan EKF mengikuti pergerakan pola suku bunga sebenarnya dengan RMSE  $1,2 \times 10^{-3}$ .

Percobaan berikutnya akan digunakan nilai variansi dari *noise* sistem ( $Q$ ) dan *noise* pengukuran ( $R$ ) sebagai berikut:

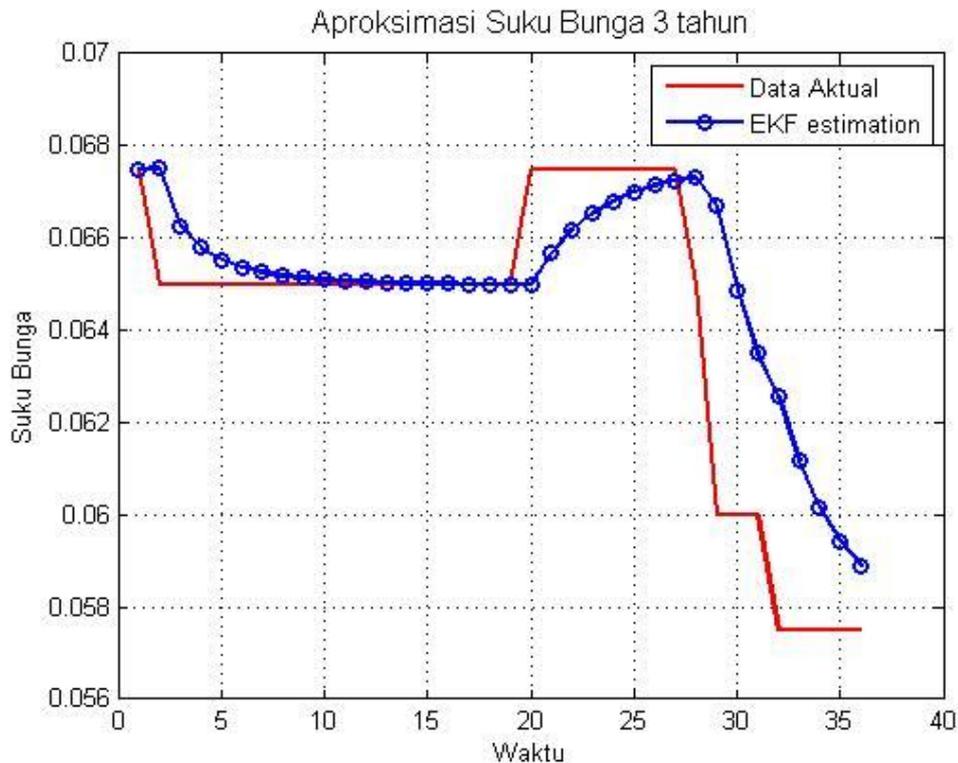
$$Q_2 = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad R = 10^{-6}$$

Hasil aproksimasi suku bunga model CIR terhadap data suku bunga sistem real dan data suku bunga aktual dengan menggunakan *noise* sistem  $Q_2$  dapat dilihat pada Gambar 4.12.



Gambar 4.12 Aproksimasi Suku Bunga Jangka Waktu 3 Tahun

Pada Gambar 4.12, terlihat bahwa hasil estimasi suku bunga menggunakan EKF cenderung mendekati nilai suku bunga aktual daripada suku bunga sistem, dengan RMSE terhadap suku bunga sistem  $3,57 \times 10^{-3}$ . Adapun hasil aproksimasi suku bunga model CIR yang diestimasi menggunakan EKF dengan suku bunga aktual dapat dilihat pada Gambar 4.13 dengan RMSE sebesar  $2,10 \times 10^{-3}$ .



Gambar 4.13 Aproksimasi Suku Bunga Aktual Jangka Waktu 3 Tahun

Hasil estimasi suku bunga menggunakan EKF terhadap data suku bunga aktual yang dihasilkan dengan menggunakan *noise* sistem  $Q_2$  lebih baik dibandingkan dengan menggunakan  $Q_1$ , maka untuk selanjutnya akan digunakan nilai *noise* sistem  $Q_2$ . Sedemikian hingga hasil estimasi suku bunga model CIR yang diperoleh lebih mendekati data suku bunga aktual.

#### 4.5 Program Pendanaan Pensiun

Pada program pendanaan pensiun membutuhkan asumsi-asumsi aktuarial antara lain asumsi penurunan populasi, asumsi penghasilan yang akan datang, dan asumsi tingkat suku bunga. Asumsi tingkat suku bunga yang mengikuti model CIR akan dibandingkan dengan asumsi tingkat suku bunga tetap. Tahap awal tingkat suku bunga yang dihasilkan digunakan untuk mendapat anuitas awal seumur hidup, yang akan dimasukkan dalam proses perhitungan aktuarial selanjutnya.

#### 4.5.1 Perhitungan Anuitas Hidup Mengikuti Tingkat Suku Bunga CIR

Anuitas adalah suatu pembayaran dalam jumlah tertentu, yang dilakukan dalam selang waktu dan lama tertentu, secara berkelanjutan. Anuitas yang pembayarannya dikaitkan dengan hidup matinya seseorang disebut anuitas hidup. Anuitas seumur hidup dapat dihitung sebagai berikut:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t p_x^{(m)} v^t \quad (4.36)$$

dimana  $\ddot{a}_x$  adalah nilai sekarang dari anuitas seumur hidup pada usia  $x$  dan  ${}_t p_x^{(m)}$  adalah probabilitas bahwa seorang karyawan berusia  $x$  akan tetap hidup untuk  $t$  tahun berikutnya.

Tabel perhitungan, berdasarkan Tabel Penurunan Populasi dan Tabel Mortalita Indonesia 2011 dengan asumsi tingkat suku bunga mengikuti model CIR. Nilai  ${}_t p_x^{(m)}$  pada persamaan (4.36) diperoleh dari:

$${}_t p_x^{(m)} = \frac{l_{x+t}^{(m)}}{l_x^{(m)}} \quad (4.37)$$

dengan nilai  $l_{x+t}^{(m)}$  dan  $l_x^{(m)}$  diambil dari Tabel Mortalita TMI 2011, dimana ada untuk laki laki dan perempuan sebagai berikut:

Tabel 4.3. Tabel Mortalita

x	qx (laki-laki)	px	lx	x	qx (perempuan)	Px	lx
0	0,00802	0,99198	100.000,00000	0	0,00370	0,99630	100.000,00000
1	0,00079	0,99921	99.198,00000	1	0,00056	0,99944	99.630,00000
...	...	...	...	...	...	...	...
109	0,67518	0,32482	0,17877	109	0,65996	0,34004	5,46899
110	0,71016	0,28984	0,05807	110	0,70366	0,29634	1,85967
111	1,00000	-	0,01683	111	1,00000	-	0,55110

Selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran F.

Sedangkan untuk nilai  $v^t$  pada persamaan (4.36) didapatkan dari fungsi bunga sebagaimana persamaan (2.22) dimana asumsi tingkat suku bunganya adalah suku bunga mengikuti model CIR.

Untuk usia pensiun normal 58 tahun tabel perhitungan anuitas awal seumur hidup sebagai berikut:

Tabel 4.4 Perhitungan Anuitas Awal Seumur Hidup

$t$	Usia ( $x$ )	$r_t$	$v^t$	$P_x$	$L_x$	$\ddot{a}$
0	58	0,0635	1,00000	1,00000	88.047,68049	1,00000
1	59	0,0663	0,93780	0,98768	86.962,93307	0,9262426
2	60	0,0659	0,87980	0,97462287	85.813,28309	0,8574780
3	61	0,0662	0,82514	0,96081246	84.597,30887	0,7928079
4	62	0,0640	0,77552	0,94619851	83.310,58380	0,7337977
5	63	0,0645	0,72850	0,93069031	81.945,12334	0,6780114
6	64	0,0647	0,68421	0,91418917	80.492,23630	0,6254995
7	65	0,0658	0,64200	0,89658189	78.941,95583	0,5756018
8	66	0,0659	0,60230	0,87775367	77.284,17476	0,5286688
9	67	0,0668	0,56457	0,85767067	75.515,91284	0,4842152
10	68	0,0651	0,53008	0,83634897	73.638,58724	0,4433333
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
44	102	0,0666	0,06252	0,00064686	56,95438	0,0000404
45	103	0,0650	0,05870	0,00033544	29,53484	0,0000197
46	104	0,0636	0,05520	0,00016627	14,64012	0,0000092
47	105	0,0658	0,05179	7,8375E-05	6,90077	0,0000041
48	106	0,0667	0,04855	3,4916E-05	3,07429	0,0000017
49	107	0,0646	0,04560	1,4596E-05	1,28512	0,0000007
50	108	0,0644	0,04285	5,6749E-06	0,49967	0,0000002
51	109	0,0636	0,04028	2,0304E-06	0,17877	0,0000001
52	110	0,0632	0,03789	6,5951E-07	0,05807	0,0000000
Jumlah					11,1032444	

Pada tabel perhitungan di atas terlihat bahwa  $r_t$  mengikuti model CIR yang berubah pada saat  $t$ .

#### 4.5.2 Perhitungan *Supplemental Cost* Mengikuti Tingkat Suku Bunga CIR

Perhitungan *supplemental cost* dilakukan setiap tahun terhadap seluruh pegawai yang mengikuti program pensiun manfaat pasti. Pada penelitian ini, data yang digunakan sebagai contoh penerapan perhitungan *supplemental cost* pada program pensiun manfaat pasti dengan metode *accrued benefit cost* adalah data gaji pegawai yang belum mencapai usia 50 tahun pada tahun 2016. Sebagai contoh perhitungan, akan dilakukan perhitungan terhadap salah satu pegawai berjenis kelamin laki-laki yang berusia 25 tahun ( $x = 25$ ) dan mulai dihitung pensiun pada usia 58 tahun ( $r = 58$ ). Gaji pokok pada tahun pertama yang diterima adalah Rp. 2.456.700,-

1) Perhitungan Manfaat Pensiun

Besar manfaat pensiun yang akan diterima oleh peserta pensiun tergantung pada besar gaji pegawai pada usia  $x$  dan proporsi dari gaji yang dipersiapkan untuk manfaat pensiun. Untuk perhitungan gaji, digunakan tingkat kenaikan gaji berkala sebesar 7,5% per tahun ( $s = 7,5\%$ ). Besarnya gaji pegawai yang akan datang dihitung berdasarkan persamaan, yaitu:

$$S_{x+t} = S_x(1 + s)^t$$

Proporsi gaji yang dipersiapkan untuk manfaat pensiun bagi PNS menurut Undang-undang No.11 Tahun 1969 tentang Pensiun Pegawai dan Pensiun Janda/Duda pegawai adalah  $k = 2,5\%$ . Pada penelitian ini, perhitungan fungsi manfaat pensiun menggunakan rata-rata gaji karyawan dalam satu tahun.

$$b_x = k \cdot S_x$$

$$b_{25} = (0,025) \times \text{Rp.} 29.480.400 = \text{Rp.} 737.010$$

Jadi, *accrual benefit* yang dialokasikan untuk peserta pada saat peserta berusia 25 tahun adalah sebesar Rp. 737.010,-. Berdasarkan kumulatif manfaat pensiun normal 58 tahun adalah Rp. 97.051.968,-.

2) Perhitungan PVFB

Nilai sekarang manfaat pensiun merupakan nilai manfaat pensiun yang telah diproyeksikan dan akan dibayarkan dimasa yang akan datang (pensiun). Nilai sekarang manfaat pensiun dihitung berdasarkan persamaan berikut:

$${}^r(PVFB)_x = B_r v^{r-x} {}_{r-x}p_x^{(T)} \ddot{a}_r$$

dengan menggunakan suku bunga model CIR maka :

$${}^r(PVFB)_x = B_r \left( \prod_{t=25}^{58} \frac{1}{(1 + r_t)} \right) {}_{r-x}p_x^{(T)} \ddot{a}_r$$

Nilai dari  ${}_{r-x}p_x^{(T)}$  diperoleh dari Tabel Penurunan Populasi Winklevoss (Winklevoss, 1993), sebagai berikut:

Tabel 4.5 Penurunan Populasi Winklevoss

x	$l_x^{(T)}$	$d_x^{(m)}$	$d_x^{(t)}$	$d_x^{(d)}$	$d_x^{(r)}$	$d_x^{(T)}$
20	1000000	442	243002	263	0	243708
21	756292	350	169718	201	0	170270
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
58	30020	326	0	203	0	529
59	29491	350	0	235	0	585
60	28907	377	0	281	0	659
61	28248	405	0	348	0	753
62	27495	433	0	436	0	869
63	26626	459	0	549	0	1008
64	25618	485	0	685	0	1170
65	24448	0	0	0	24448	24448

Untuk tabel selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran E.

Nilai sekarang manfaat pensiun peserta berusia 25 tahun adalah:

$$\begin{aligned}
 {}^{58}(PVFB)_{25} &= B_{58} \left( \prod_{t=25}^{58} \frac{1}{(1+r_t)} \right) \frac{l_{58}^{(T)}}{l_{25}^{(T)}} \ddot{a}_{58} \\
 &= \text{Rp. } 97.051.968 \times 0,12546 \times \frac{30020}{309132} \times 11,1032 \\
 &= \text{Rp. } 13.129.170
 \end{aligned}$$

Hal ini berarti nilai sekarang manfaat pensiun peserta pada usia 25 tahun adalah Rp. 13.129.170,-.

### 3) Perhitungan Kewajiban Aktuaria

Sejumlah dana yang harus dimiliki sekarang untuk memenuhi pembayaran pada saat pensiun disebut *actuarial liability*, sehingga nilai kewajiban aktuaria menggunakan metode *Accrued Benefit Cost* disajikan dalam persamaan berikut

$$AL_x = B_x \left( \prod_{t=25}^{58} \frac{1}{(1+r_t)} \right) r-x p_x^{(T)} \ddot{a}_r = \frac{B_x}{B_r} r (PVFB)_x$$

Nilai sekarang manfaat pensiun yang dialokasikan pada usia  $x$  sekarang.

$$(AL)_{25} = \frac{B_{25}}{B_{58}} {}^{58}(PVFB)_{25}$$

$$(AL)_{25} = \frac{\text{Rp. } 0}{\text{Rp. } 97.051.968} \times \text{Rp. } 13.129.170 = \text{Rp. } 0$$

Jadi, besarnya nilai kewajiban aktuarial seorang peserta pada usia 25 tahun menggunakan metode *accrued benefit cost* adalah Rp. 0 dikarenakan diasumsikan tahun pertama masa kerja adalah  $t = 0$ , maka belum ada nilai manfaat yang akan diperoleh. Besarnya nilai kewajiban aktuarial terlihat pada tahun berikutnya yaitu saat  $t = 1$ , sebagai berikut:

$$(AL)_{26} = \frac{\text{Rp. } 737.010}{\text{Rp. } 97.051.968} \times \text{Rp. } 16.693.025 = \text{Rp. } 126.766$$

Jadi, besarnya nilai kewajiban aktuarial seorang peserta menggunakan metode *accrued benefit cost* adalah Rp. 126.766. Besarnya nilai kewajiban aktuarial meningkat seiring dengan bertambahnya usia peserta dan masa kerja peserta. Besarnya nilai kewajiban aktuarial dipengaruhi oleh kumulatif manfaat pensiun yang akan diterima pada tahun perhitungan dilakukan.

#### 4) Perhitungan Iuran Normal Pensiun

Dari hasil perhitungan *accrual benefit*, selanjutnya dapat dihitung besar iuran normal yang harus dibayarkan oleh peserta pensiun untuk mendanai *accrual benefit* tersebut.

Untuk menentukan iuran normal diperlukan *accrual benefit* pada usia 25 tahun, peluang seseorang akan tetap bekerja sampai usia pensiun, anuitas hidup dari usia 58 tahun serta faktor diskonto dengan  $r_t$  yang merupakan tingkat suku bunga pada saat  $t$  mengikuti model CIR. Iuran normal pada usia 25 tahun dihitung dengan menggunakan persamaan berikut sehingga diperoleh:

$$NC_x = b_x v^{r-x} {}_{r-x}p_x^{(T)} \ddot{a}_r$$

$$NC_{25} = \text{Rp. } 737.010 \times \left( \prod_{t=25}^{58} \frac{1}{(1 + r_t)} \right) \times \frac{30020}{309132} \times 11,1032$$

$$= \text{Rp. } 737.010 \times 0,12546 \times \frac{30020}{309132} \times 11,1032$$

$$= \text{Rp. } 99.703$$

Jadi, besar iuran normal pada usia 25 tahun adalah Rp. 99.703,- untuk mendanai *accrued benefit* yang dialokasikan pada tahun tersebut sebesar Rp. 737.010.

Besarnya iuran normal dihitung per tahun saat pegawai masuk menjadi peserta program pensiun sampai setahun sebelum pensiun. Pada usia 57 tahun besarnya iuran adalah Rp. 76.498.657 per tahun untuk mendanai *accrued benefit* sebesar Rp. 7.456.658.

5) Perhitungan *Supplemental Cost* (Biaya Tambahan)

Biaya tambahan atau *supplemental cost* (SC) merupakan biaya yang harus dibayar oleh pihak pemberi kerja kepada pihak penyelenggara dana pensiun ketika terjadi kekurangan dana (defisit) dari kewajiban aktuarial. SC digunakan untuk menutupi ketidaksesuaian antara kewajiban dengan manfaat pensiun yang telah ditetapkan. Perhitungan *supplemental cost* dengan menggunakan metode *accrued benefit cost* didefinisikan sebagai berikut:

$$SC_x = C_n b_x v^{r-x} {}_{r-x}p_x^{(T)} \ddot{a}_r$$

$$SC_{25} = \frac{B_{50}}{B_{58} - B_{50}} b_{25} \left( \prod_{t=25}^{58} \frac{1}{(1 + r_t)} \right) {}_{33}p_{25}^{(T)} \ddot{a}_{58}$$

$$\begin{aligned} SC_{25} &= 1,067064 \times \text{Rp. } 737.010 \times 0,12546 \times \frac{30020}{309132} \times 11,1032 \\ &= \text{Rp. } 106.389 \end{aligned}$$

Hasil perhitungan *supplemental cost* mengikuti suku bunga CIR yang diestimasi menggunakan metode *Extended Kalman Filter* untuk seorang pegawai ditampilkan seperti pada tabel berikut:

Tabel 4.6 Perhitungan SC

t	x	r-x	Sx	bx	Bx	v <sup>-(r-x)</sup>	PVFB	AL	NC	SC
0	25	33	-	737.010	-	0,12546	13.129.170	-	99.703	106.389
1	26	32	29.480.400	792.286	737.010	0,13362	16.693.025	126.766	136.274	145.413
2	27	31	61.171.830	851.707	1.529.296	0,14254	20.935.906	329.897	183.729	196.051
3	28	30	95.240.117	915.585	2.381.003	0,15174	25.835.469	633.829	243.731	260.077
4	29	29	131.863.526	984.254	3.296.588	0,16164	31.499.718	1.069.959	319.455	340.879
5	30	28	171.233.690	1.058.073	4.280.842	0,17196	37.914.154	1.672.346	413.345	441.066
6	31	27	213.556.617	1.137.429	5.338.915	0,18320	45.230.493	2.488.170	530.092	565.642
7	32	26	259.053.764	1.222.736	6.476.344	0,19539	53.513.532	3.570.995	674.205	719.420
8	33	25	307.963.196	1.314.441	7.699.080	0,20796	62.644.375	4.969.544	848.435	905.335
9	34	24	360.540.836	1.413.024	9.013.521	0,22121	72.743.362	6.755.904	1.059.104	1.130.132
10	35	23	417.061.798	1.519.001	10.426.545	0,23512	83.834.331	9.006.540	1.312.126	1.400.122
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
11	36	22	477.821.833	1.632.926	11.945.546	0,25027	96.178.992	11.838.096	1.618.238	1.726.763
12	37	21	543.138.871	1.755.395	13.578.472	0,26646	109.803.350	15.362.509	1.986.032	2.119.223
13	38	20	613.354.686	1.887.050	15.333.867	0,28348	124.695.584	19.701.461	2.424.544	2.587.144
14	39	19	688.836.687	2.028.579	17.220.917	0,30169	141.097.418	25.036.349	2.949.216	3.147.002
15	40	18	769.979.839	2.180.722	19.249.496	0,32176	159.454.670	31.626.582	3.582.888	3.823.171
16	41	17	857.208.727	2.344.276	21.430.218	0,34270	179.452.948	39.625.326	4.334.660	4.625.360
17	42	16	950.979.781	2.520.097	23.774.495	0,36546	201.731.169	49.417.407	5.238.247	5.589.544
18	43	15	1.051.783.665	2.709.104	26.294.592	0,38916	226.033.654	61.240.001	6.309.494	6.732.633
19	44	14	1.160.147.840	2.912.287	29.003.696	0,41431	252.849.288	75.563.269	7.587.376	8.096.215
20	45	13	1.276.639.328	3.130.709	31.915.983	0,44108	282.552.446	92.918.664	9.114.595	9.725.856
21	46	12	1.401.867.677	3.365.512	35.046.692	0,46946	315.439.757	113.909.283	10.938.637	11.672.225
22	47	11	1.536.488.153	3.617.925	38.412.204	0,50039	352.465.242	139.502.238	13.139.279	14.020.451
23	48	10	1.681.205.165	3.889.270	42.030.129	0,53329	393.707.186	170.502.095	15.777.459	16.835.557
24	49	9	1.836.775.952	4.180.965	45.919.399	0,56742	439.048.422	207.732.415	18.914.053	20.182.504
25	50	8	2.004.014.548	4.494.537	50.100.364	0,60443	490.240.236	253.072.810	22.703.332	24.225.907
26	51	7	2.183.796.039	4.831.628	54.594.901	0,64295	546.777.417	307.580.152	27.220.724	29.046.253
27	52	6	2.377.061.142	5.194.000	59.426.529	0,68445	610.461.413	373.795.643	32.670.501	34.861.513
28	53	5	2.584.821.128	5.583.550	64.620.528	0,72972	682.847.425	454.663.232	39.285.267	41.919.892
29	54	4	2.808.163.113	6.002.316	70.204.078	0,77723	763.246.357	552.106.340	47.204.048	50.369.737
30	55	3	3.048.255.746	6.452.490	76.206.394	0,82711	852.579.442	669.455.820	56.683.652	60.485.081
31	56	2	3.306.355.327	6.936.426	82.658.883	0,88091	920.444.744	783.940.156	65.785.344	70.197.169
32	57	1	3.583.812.377	7.456.658	89.595.309	0,93899	995.666.551	919.167.894	76.498.657	81.628.958
33	58	-	3.882.078.705	-	97.051.968	1,00000	1.077.591.717	1.077.591.717	-	-

Pada tabel diatas, pada saat  $t = 2$ , seorang pegawai berusia 27 tahun, kumulatif gaji dari usia 25 sampai dengan usia 27 tahun  $S_x = \text{Rp.} 61.171.830$ . *Accrued benefit* yang didapatkan sebesar Rp 851.707. Untuk dapat mendanai *accrued benefit* sebesar itu dibutuhkan *supplemental cost* Rp.196.051 untuk menutupi ketidaksesuaian antara kewajiban aktuarial dengan manfaat pensiun yang telah ditetapkan.

Selanjutnya, dari hasil perhitungan SC menggunakan suku bunga model CIR diatas akan dibandingkan dengan perhitungan SC dengan asumsi suku bunga konstan atau tetap.

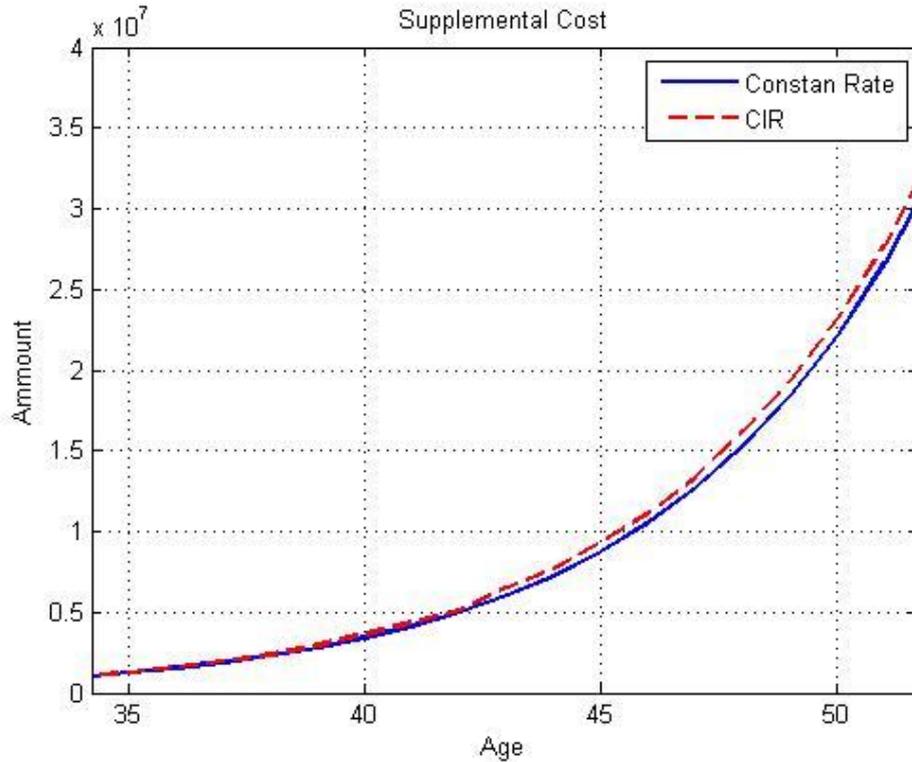
#### 4.6 Perbandingan Supplemental Cost

Pada Subbab ini, akan dibandingkan hasil perhitungan *supplemental cost* antara suku bunga tetap dan suku bunga mengikuti model CIR sebagaimana ditampilkan dalam tabel berikut:

Tabel 4.7 Tabel Perbandingan Perhitungan SC

<b>x</b>	<b>bx</b>	<b>Constan Rate</b>	<b>CIR</b>
25	737.010	106.370	106.389
26	792.286	145.387	145.413
27	851.707	195.687	196.051
28	915.585	259.709	260.077
29	984.254	340.312	340.879
30	1.058.073	440.811	441.066
31	1.137.429	565.134	565.642
32	1.222.736	717.730	719.420
33	1.314.441	903.766	905.335
34	1.413.024	1.129.539	1.130.132
35	1.519.001	1.402.193	1.400.122
...	...	...	...
...	...	...	...
36	1.632.926	1.730.270	1.726.763
37	1.755.395	2.124.096	2.119.223
38	1.887.050	2.595.835	2.587.144
39	2.028.579	3.159.839	3.147.002
40	2.180.722	3.833.373	3.823.171
41	2.344.276	4.637.307	4.625.360
42	2.520.097	5.596.494	5.589.544
43	2.709.104	6.742.060	6.732.633
44	2.912.287	8.110.392	8.096.215
45	3.130.709	9.746.353	9.725.856
46	3.365.512	11.703.933	11.672.225
47	3.617.925	14.046.964	14.020.451
48	3.889.270	16.855.693	16.835.557
49	4.180.965	20.225.433	20.182.504
50	4.494.537	24.272.616	24.225.907
51	4.831.628	29.136.963	29.046.253
52	5.194.000	34.985.162	34.861.513
53	5.583.550	42.023.298	41.919.892
54	6.002.316	50.489.099	50.369.737
55	6.452.490	60.675.198	60.485.081
56	6.936.426	70.414.610	70.197.169
57	7.456.658	81.810.314	81.628.958
58	-	-	-

Perbandingan *supplemental cost* antara suku bunga tetap dan tingkat suku bunga mengikuti model CIR sebagai berikut:



Gambar 4.14 Perbandingan SC dengan Suku Bunga Konstan dan CIR

Hasil *supplemental cost* yang ditunjukkan pada Gambar 4.14 menunjukkan bahwa besarnya *supplemental cost* yang menggunakan tingkat bunga model CIR cenderung lebih besar daripada tingkat bunga konstan. Besarnya *supplemental cost* yang dikeluarkan juga bergantung pada usia pegawai dan masa kerja pegawai sehingga besar SC yang dikeluarkan tiap pegawai akan berbeda-beda. Bilamana di masa depan ada kelebihan atau surplus atas kewajiban aktuarial dalam mendanai program pensiun maka dana tersebut dapat digunakan untuk investasi lainnya. Disisi lain, perhitungan *supplemental cost* dengan menggunakan model tingkat suku bunga model CIR bersifat fluktuatif, tergantung tingkat suku bunga yang diestimasi sehingga lebih menggambarkan situasi sebenarnya dimana tingkat suku bunga selalu berubah-ubah daripada menggunakan suku bunga konstan.

#### 4.7 Studi Kasus Perhitungan *Supplemental Cost* pada Perusahaan X

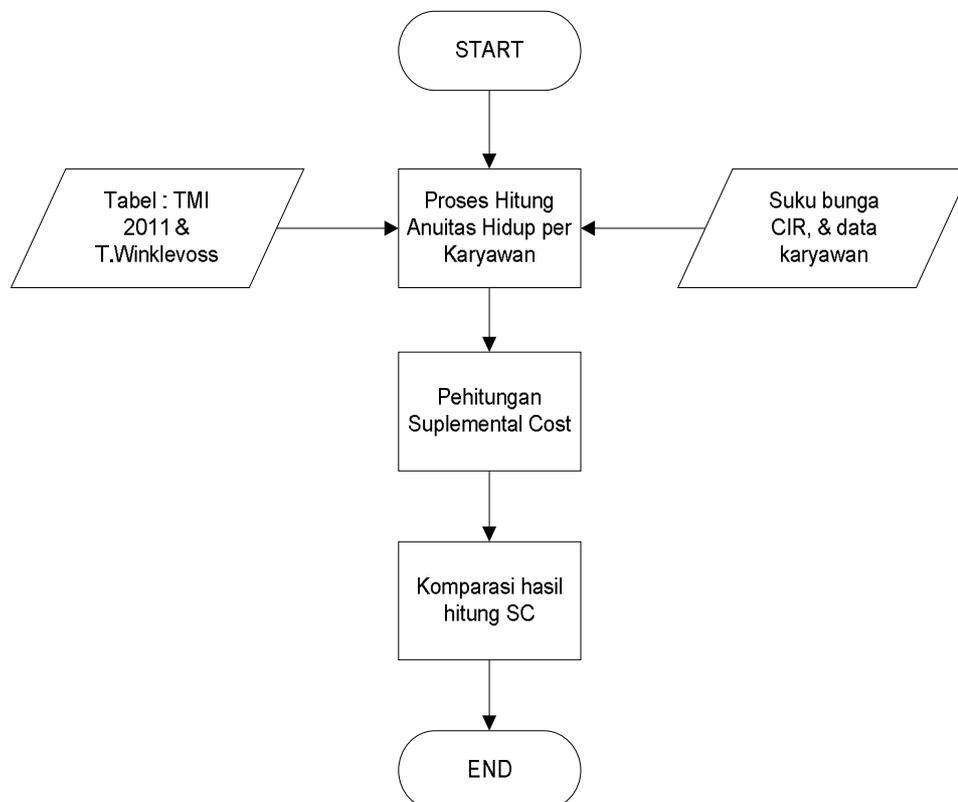
Pada sub bab ini akan disimulasikan melalui sebuah program untuk menghitung SC dengan data kelompok atau data suatu perusahaan. Berikut ditampilkan perhitungan dengan di kasus pada perusahaan swasta dengan data pegawai berupa usia, jenis kelamin, dan gaji pegawai.

Parameter hitung yang ditetapkan sebelumnya adalah sebagai berikut:

- Kenaikan gaji per tahun : 7.5%
- Usia pensiun normal : 58 tahun
- Usia pensiun dini : 50 tahun
- Proporsi gaji untuk pensiun : 2.5%
- Asumsi suku bunga konstan : 7.0%

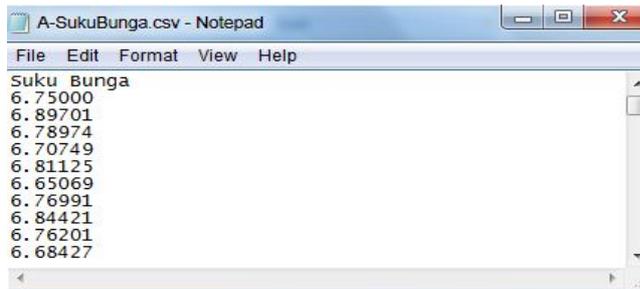
Asumsi suku bunga konstan akan digunakan dalam perhitungan SC sebagai pembanding dengan asumsi suku bunga mengikuti model CIR yang diestimasi menggunakan EKF.

Adapun proses yang dalam implementasi program ditunjukkan sebagai berikut :

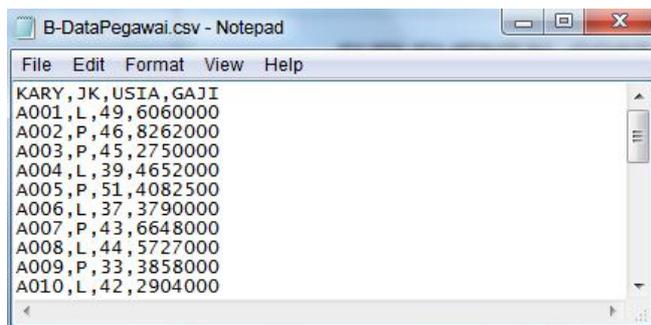


Gambar 4.15 Alur Proses Program

Proses awal adalah memasukkan data, dalam hal ini terdapat 2 data yaitu data estimasi tingkat suku bunga yang dihasilkan sebelumnya dari *output* Matlab, serta data pegawai perusahaan yang disimulasikan. Data inputan yang perlu disiapkan dalam bentuk *csv* sebagai berikut:



Kemudian data pegawai yang juga dalam bentuk *csv* sebagai berikut:



Proses hitung awal akan menghasilkan anuitas hidup per pegawai, serta akan menghasilkan 2 buah *output* hasil perhitungan *supplemental cost* dengan 2 kategori, yaitu :

1. Menurut tingkat suku bunga model CIR
2. Menurut suku bunga tetap atau konstan tiap tahunnya

Berikut adalah *interface* dalam simulasi perhitungan *supplemental cost*:

- 1) Menu Utama ini berupa tampilan awal untuk melakukan *upload* data Suku Bunga hasil permodelan CIR serta penyesuaian parameter-parameter dalam proses perhitungan.

**SUPPLEMENTAL COST PADA PROGRAM PENSIUN MANFAAT PASTI**

Suku Bunga EKF-MATLAB: E:\DATA Rita\AAA S2\1. SEMESTER III\Tesis\KERJAKA 1. File Suku Bunga 3. Upload Data **4. PROSES HITUNG**

Data Karyawan Simulasi: E:\DATA Rita\AAA S2\1. SEMESTER III\Tesis\KERJAKA 2. File Karyawan

PARAMETER HITUNG ...

1. Kenaikan Gaji per Tahun: 7.50 % per tahun  
 2. Usia Pensiun Normal: 58 tahun  
 3. Usia Pensiun Dini: 50 tahun  
 4. Proporsial Gaji u/ Pensiun: 2.50 %  
 5. Suku bunga konstan: 7.0 %

Tabel Winklevoss  
 Tabel TMII 2011  
 Tabel Anuitas

0%

No.	SB (%)	KARY	J/K	USIA	GAJI						
1	6.5	A001	L	49	6.060.000						
2	6.678970842	A002	P	46	8.262.000						
3	6.453026737	A003	P	45	2.750.000						
4	6.526472969	A004	L	39	4.652.000						
5	6.394243905	A005	P	51	4.082.500						
6	6.534335047	A006	L	37	3.790.000						
7	6.654754678	A007	P	43	6.648.000						
8	6.434314066	A008	L	44	5.727.000						
9	6.371211132	A009	P	33	3.858.000						
10	6.287046658										
11	6.441270852										
12	6.471491952										
13	6.38749169										
14	6.423650127										
15	6.649841034										
16	6.509080132										
17	6.642487261										
18	6.48333349										
19	6.462694363										
20	6.462113153										

Gambar 4.16 Tampilan Menu Perhitungan SC

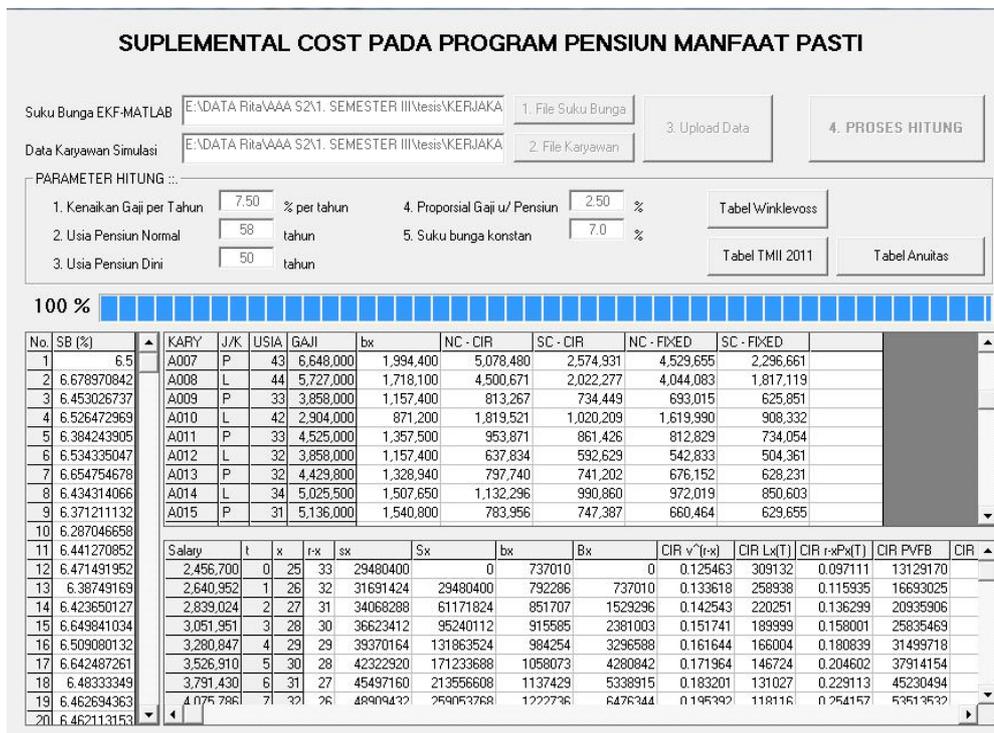
Terdapat 2 buah tabel yang yang digunakan sebagai proses perhitungan, yaitu Tabel Mortalita TMI 2011 dan Tabel Winklevoss yang digunakan untuk menghitung anuitas seumur hidup. Pada proses perhitungan anuitas, dimulai saat usia pensiun pegawai 58 tahun hingga usia 110 tahun sesuai standar Tabel Mortalita TMI 2011 yang digunakan sebagai acuan. Tampilan anuitas hidup sebagai berikut:

**Tabel Anuitas Karyawan ke-30**

x	t	Lx	Px	V CIR	Ar CIR	V FIXD	Ar FIXD	tab
58	0	88047.68049		1	1	1	1	
59	1	86962.93307	0.98768	0.937796	0.926243	0.934579	0.923065	
60	2	85813.28309	0.974623	0.879805	0.857478	0.873439	0.851273	
61	3	84597.30887	0.960812	0.825143	0.792808	0.816298	0.784309	
62	4	83310.5838	0.946199	0.775522	0.733798	0.762895	0.72185	
63	5	81945.12334	0.93069	0.728504	0.678011	0.712986	0.663569	
64	6	80492.2363	0.914189	0.684212	0.625499	0.666342	0.609163	
65	7	78941.95583	0.896582	0.641996	0.575602	0.62275	0.558346	
66	8	77284.17476	0.877754	0.602297	0.528669	0.582009	0.510861	
67	9	75515.91284	0.857671	0.56457	0.484215	0.543934	0.466516	
68	10	73638.58724	0.836349	0.530082	0.443333	0.508349	0.425157	
69	11	71648.87262	0.813751	0.498062	0.405298	0.475093	0.386607	
70	12	69556.00905	0.789981	0.467829	0.369576	0.444012	0.350761	
71	13	67342.73684	0.764844	0.439432	0.336097	0.414964	0.317383	
72	14	65003.92359	0.738281	0.412335	0.304419	0.387817	0.286318	
73	15	62494.1221	0.709776	0.387828	0.275271	0.362446	0.257255	
74	16	59829.37273	0.679511	0.364273	0.247528	0.338735	0.230174	
75	17	57025.17003	0.647662	0.342516	0.221835	0.316574	0.205033	
76	18	54085.52252	0.614275	0.321719	0.197624	0.295864	0.181742	
77	19	51022.11852	0.579483	0.302311	0.175184	0.276508	0.160232	
78	20	47831.19523	0.543242	0.283643	0.154087	0.258419	0.140384	
79	21	44510.75366	0.50553	0.266261	0.134603	0.241513	0.122092	
80	22	41068.29197	0.466432	0.250011	0.116613	0.225713	0.10528	
81	23	37537.65091	0.426333	0.234985	0.100182	0.210947	0.089934	
82	24	33942.67008	0.385503	0.220604	0.085044	0.197147	0.076001	
83	25	30347.12304	0.344667	0.20713	0.071391	0.184249	0.063505	
84	26	26801.66865	0.304399	0.194363	0.059164	0.172195	0.052416	
85	27	23347.4696	0.265168	0.182484	0.048389	0.16093	0.042674	
86	28	20022.55645	0.227406	0.171227	0.038938	0.150402	0.034202	
87	29	16871.40652	0.191617	0.160914	0.030834	0.140563	0.026934	

Gambar 4.17 Tampilan Perhitungan Anuitas

- 2) *Output* dari aplikasi ini adalah hasil perhitungan *supplemental cost* dengan dasar suku bunga tetap, dan estimasi suku bunga model CIR menggunakan EKF.



Gambar 4.18 Tampilan Hasil Perhitungan SC

Tabel bagian sebelah kanan atas merupakan hasil *summary* dari perhitungan SC seluruh pegawai, yang berisikan perbandingan perhitungan dengan menggunakan asumsi suku bunga konstan dan suku bunga mengikuti model CIR. Sedangkan tabel dibawahnya adalah tabel perhitungan *supplemental cost* per pegawai sampai dengan usia pensiun.

Hasil proses hitung per pegawai akan tampil dalam bentuk excel sebagai contoh pada Gambar 4.19 adalah hasil perhitungan pegawai A030 yang merupakan contoh perhitungan yang dibahas pada sub bab 4.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	
1		A030																		
2	JK	L																		
3	Usia		25																	
4	Gaji awal		2456700																	
5	Gaji	t	x	r-x	sx	Sx	bx	Bx	CIR v <sup>t</sup> (r-x)	CIR Lx(T)	CIR r-xPx	CIR PVFB	CIR AL	CIR NC	CIR SC	FIXD v <sup>t</sup> (r-x)	FIXD PVFE	FIXD AL	FIXD NC	FIX
6	2456700	0	25	33	29480400	0	737010	0	0.125463	309132	0.097111	13129170	0	99703	106389	0.107235	10830919	0	82250	
7	2640952	1	26	32	31691424	29480400	792286	737010	0.133618	258938	0.115935	16693025	126766	136274	145413	0.114741	13835577	105067	112947	
8	2839024	2	27	31	34068288	61171824	851707	1529296	0.142543	220251	0.136299	20935906	329897	183729	196051	0.122773	17404396	274250	152737	
9	3051951	3	28	30	36623412	95240112	915585	2381003	0.151741	189999	0.158001	25835469	633829	243731	260077	0.131367	21587845	529621	203659	
10	3280847	4	29	29	39370164	1.32E+08	984254	3296588	0.161644	166004	0.180839	31499718	1069959	319455	340879	0.140563	26437832	898020	268120	
11	3526910	5	30	28	42322920	1.71E+08	1058073	4280842	0.171964	146724	0.204602	37914154	1672346	413345	441066	0.150402	32005676	1411731	348930	
12	3791430	6	31	27	45497160	2.14E+08	1137429	5338915	0.183201	131027	0.229113	45230494	2488170	530092	565642	0.16093	38348744	2109598	449439	
13	4075786	7	32	26	48909432	2.59E+08	1222736	6476344	0.195392	118116	0.254157	53513532	3570994	674205	719420	0.172195	45518400	3037474	573476	
14	4381470	8	33	25	52577640	3.08E+08	1314441	7699080	0.207964	107392	0.279537	62644376	4969544	848435	905334	0.184249	53568264	4249541	725512	
15	4710081	9	34	24	56520972	3.61E+08	1413024	9013521	0.221214	98375	0.305159	72743363	6755904	1059104	1130132	0.197147	62571783	5811238	911011	
16	5063337	10	35	23	60760044	4.17E+08	1519001	10426545	0.235122	90727	0.330883	83834332	9006540	1312126	1400122	0.210947	72595635	7799138	1136225	1
17	5443087	11	36	22	65317044	4.78E+08	1632926	11945546	0.250267	84176	0.356634	96178993	11838097	1618238	1726763	0.225173	83722570	10304910	1408655	1
18	5851319	12	37	21	70215828	5.43E+08	1755396	13578472	0.266463	78503	0.382406	1.1E+08	15362509	1986032	2119223	0.241513	96056854	13439246	1737397	2
19	6290167	13	38	20	75482004	6.13E+08	1887050	15333868	0.283483	73543	0.408197	1.25E+08	19701462	2424544	2587144	0.258419	1.1E+08	17334225	2133222	2
20	6761929	14	39	19	81143148	6.89E+08	2028579	17220918	0.301693	69169	0.434009	1.41E+08	25036350	2949216	3147002	0.276508	1.25E+08	22147393	2608905	2
21	7269073	15	40	18	87228876	7.7E+08	2180722	19249497	0.321755	65276	0.459893	1.59E+08	31626584	3582888	3823171	0.295864	1.42E+08	28069033	3179863	3
22	7814254	16	41	17	93771048	8.57E+08	2344276	21430219	0.342699	61777	0.485941	1.79E+08	39625327	4334660	4625360	0.316574	1.6E+08	35330124	3864802	4
23	8400325	17	42	16	1.01E+09	9.51E+08	2520098	23774495	0.365462	58605	0.512243	2.02E+08	49417408	5238248	5589546	0.338735	1.8E+08	44208500	4686104	5
24	9030348	18	43	15	1.08E+09	1.05E+09	2709104	26294593	0.389157	55695	0.539007	2.26E+08	61240005	6309493	6732633	0.362446	2.03E+08	55050741	5671819	6
25	9707623	19	44	14	1.16E+09	1.16E+09	2912287	29003697	0.414307	53006	0.566351	2.53E+08	75563271	7587375	8096214	0.387817	2.28E+08	68269234	6854975	7
26	10435696	20	45	13	1.25E+09	1.28E+09	3130709	31915984	0.44108	50499	0.594467	2.83E+08	92918666	9114596	9725857	0.414964	2.57E+08	84373476	8276380	8
27	11218373	21	46	12	1.35E+09	1.45E+09	3365517	35046693	0.469464	48145	0.623533	3.15E+08	1.14E+09	10938637	11672225	0.444012	2.88E+08	1.04E+09	9885371	10

Gambar 4.19 Perhitungan SC per Pegawai

Dari hasil simulasi diatas untuk 30 pegawai yang dihitung pada tahun berjalan dengan asumsi suku bunga konstan 7 %, besar SC yang dikeluarkan dengan asumsi suku bunga CIR cenderung lebih besar, yaitu 13.88 % dari asumsi suku bunga konstan (Lampiran I).

Selanjutnya dilakukan kembali simulasi dengan menggunakan asumsi suku bunga konstan 6 %, besar *supplemental cost* yang dikeluarkan bila dihitung menggunakan suku bunga CIR lebih kecil dibandingkan suku bunga konstan, yaitu 12.06 % lebih kecil daripada asumsi suku bunga konstan (Lampiran J).

Berdasarkan hasil perhitungan dengan menggunakan tingkat suku bunga model CIR yang berubah-ubah dan asumsi tingkat suku bunga konstan dapat disimpulkan bahwa jika asumsi tingkat suku bunga konstan yang digunakan lebih tinggi daripada suku bunga yang mengikuti model CIR, maka SC yang diperoleh dengan menggunakan suku bunga model CIR lebih besar dibandingkan dengan asumsi tingkat suku bunga konstan. Hal ini berlaku sebaliknya. Dengan demikian, secara tidak langsung penggunaan suku bunga yang berubah-ubah dalam perhitungan SC akan lebih meminimalisir kerugian bagi pihak pemberi kerja atau

yang mengikuti program dana pensiun, karena tingkat suku bunga pada kondisi riil atau kenyataannya selalu berubah-ubah, sehingga bilamana terjadi defisit ataupun surplus pendanaan dikemudian hari tidak terlalu besar deviasinya bila dibandingkan dengan asumsi tingkat suku bunga konstan.

## **BAB 5**

### **PENUTUP**

Pada bab ini, diberikan kesimpulan dari hasil yang diperoleh dari analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya. Selain itu, juga diberikan saran sebagai bahan pertimbangan untuk penelitian selanjutnya.

#### **5.1 Kesimpulan**

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Estimasi parameter dari suku bunga model CIR dapat dilakukan menggunakan metode *Conditional Least Square Estimation*, dimana hasil estimasi tersebut digunakan sebagai nilai parameter awal untuk estimasi tingkat suku bunga menggunakan metode *Extended Kalman Filter*. Dengan menggunakan data *BI rate* periode 2009 sampai dengan 2016 diperoleh estimasi parameter  $\alpha = 0,0210$ ,  $\mu = 0,0659$  dan  $\sigma = 0,0512$ .
2. Hasil estimasi suku bunga model CIR menggunakan metode *Extended Kalman Filter* cukup baik, hal ini ditunjukkan dengan tingkat RMSE yang kecil yakni  $1.3 \times 10^{-3}$
3. Besarnya *supplemental cost* yang dihasilkan akan lebih besar jika asumsi tingkat suku bunga konstan lebih tinggi daripada rata-rata suku bunga model CIR. Hal ini berlaku sebaliknya. Dengan demikian, secara tidak langsung penggunaan suku bunga yang berubah-ubah dalam perhitungan SC akan lebih meminimalisir kerugian bagi pihak pemberi kerja yang mengikuti program dana pensiun, karena tingkat suku bunga pada kondisi riil atau kenyataannya selalu berubah-ubah, sehingga bilamana terjadi defisit ataupun surplus pendanaan dikemudian hari tidak terlalu besar deviasinya bila dibandingkan dengan asumsi tingkat suku bunga konstan.

## **5.2 Saran**

Pada penelitian ini, permasalahan yang dibahas masih jauh dari sempurna, sehingga untuk memperbaiki penelitian selanjutnya dapat dilakukan saran berikut:

1. Estimasi pada penelitian ini menggunakan EKF, diharapkan dapat menggunakan metode estimasi yang lain sebagai perbandingan hasil yang diperoleh.
2. Manfaat pensiun yang digunakan pada penelitian ini adalah pensiun normal, dapat diterapkan untuk manfaat pensiun yang lain, yaitu manfaat pensiun cacat, manfaat pensiun dipercepat dan manfaat pensiun ditunda.

## DAFTAR PUSTAKA

- Aitken, W.H. (1994), *A Problem Solving Approach to pension Funding and Valuation*, 2<sup>nd</sup> Edition, Actex Publications, Winstead.
- Apriliani, E., Mariana, E. (2015), *Estimasi Parameter Pada Model Suku Bunga Cox Ingersol Ross (CIR) Menggunakan Kalman Filter Untuk Menentukan Harga Zero Coupon Bond*, Tugas Akhir, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Bowers, N.L. (1997), *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Illionis.
- Caraka, R.E. (2016), "Kajian Perhitungan Dana Pensiun Menggunakan Accrued Benefit Cost", *Jurnal Badan Pendidikan dan Pelatihan Keuangan Republik Indonesia*, Vol. 9, No. 2.
- Dewi, A.R. (2014), *Program Dana Pensiun Menggunakan Model Fungsi Gaji Eksponensial Berdasarkan Usia dan Masa Kerja Pada Metode Projected Unit Credit dan Entry Age Normal*, Tesis, Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.
- Farrimond, W., Mayer, D. L., (1999), *Actuarial Cost Methods A Review*, 3<sup>rd</sup> Edition, American Society of Pension Actuaries, Arlington.
- Futami, T. (1993), *Matematika Asuransi Jiwa Bagian I*, Incorporated Foundation, Oriental Life Insurance Cultural Development Center, Tokyo.
- Kladivko, K. (2007), *Maximum Likelihood Estimation of The Cox Ingersoll Ross Process: The Matlab Implementation*, University of Economics, Prague.
- Lewis, F.L.(1986), *Optimal Estimation: With an Introduction To Stochastic Control Theory*, John Wiley & Sons Inc, Canada.
- Nurlatifah, S., Abdul, H. (2015), "Perhitungan Biaya Tambahan Dengan Metode Accrued Benefit Cost Pada Pendanaan Program Pensiun Manfaat Pasti", *Jurnal Gaussian*, Volume 4, No. 3, hal. 679-686.
- Komisi Standard Praktik Aktuaria Dana Pensiun. (1998), *Standar Praktik Aktuaria Dana Pensiun*, Persatuan Aktuaris Indonesia, Jakarta.
- Putri, E.R.M. dan Nastiti, Z.D. (2015), *Implementasi Model Tingkat Suku Bunga Cox Ingersol Ross (CIR) Untuk Menentukan Iuran Normal Pensiun*

*Program Manfaat Pasti*, Tugas Akhir, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Pemerintah Republik Indonesia. (1992), *Undang-Undang No. 11 Tahun 1992 tentang Dana Pensiun*, Menteri Sekretaris Negara Republik Indonesia, Jakarta.

Shapiro, A.F. (1983), "Modified Cost Methods For Small Pension Plans", *Transaction Of Society Of Actuaries*, Vol. 35.

Welch, G., Bishop, G. (2006), *An Introduction to The Kalman Filter*, University of North Carolina, Chapel Hill.

Winklevoss, H. E., (1993), *Pension Mathematics With Numerical Illustration*, 2<sup>th</sup> Edition, University of Pennsylvania Press, Philadelphia.

## LAMPIRAN A

### Data BI Rate Tahun 2009 s.d 2016

Keterangan	BI Rate	Keterangan	BI Rate	Keterangan	BI Rate
21-Jul-16	6.50 %	12-Nov-13	7.50 %	4-Mar-11	6.75 %
16-Jun-16	6.50 %	8-Oct-13	7.25 %	4-Feb-11	6.75 %
19-May-16	6.75 %	12-Sep-13	7.25 %	5-Jan-11	6.50 %
21-Apr-16	6.75 %	29-Aug-13	7.00 %	3-Dec-10	6.50 %
17-Mar-16	6.75 %	11-Jul-13	6.50 %	4-Nov-10	6.50 %
18-Feb-16	7.00 %	13-Jun-13	6.00 %	5-Oct-10	6.50 %
14-Jan-16	7.25 %	14-May-13	5.75 %	3-Sep-10	6.50 %
17-Dec-15	7.50 %	11-Apr-13	5.75 %	4-Aug-10	6.50 %
17-Nov-15	7.50 %	7-Mar-13	5.75 %	5-Jul-10	6.50 %
15-Oct-15	7.50 %	12-Feb-13	5.75 %	3-Jun-10	6.50 %
17-Sep-15	7.50 %	10-Jan-13	5.75 %	5-May-10	6.50 %
18-Aug-15	7.50 %	11-Dec-12	5.75 %	6-Apr-10	6.50 %
14-Jul-15	7.50 %	8-Nov-12	5.75 %	4-Mar-10	6.50 %
18-Jun-15	7.50 %	11-Oct-12	5.75 %	4-Feb-10	6.50 %
19-May-15	7.50 %	13-Sep-12	5.75 %	6-Jan-10	6.50 %
14-Apr-15	7.50 %	9-Aug-12	5.75 %	3-Dec-09	6.50 %
17-Mar-15	7.50 %	12-Jul-12	5.75 %	4-Nov-09	6.50 %
17-Feb-15	7.50 %	12-Jun-12	5.75 %	5-Oct-09	6.50 %
15-Jan-15	7.75 %	10-May-12	5.75 %	3-Sep-09	6.50 %
11-Dec-14	7.75 %	12-Apr-12	5.75 %	5-Aug-09	6.50 %
13-Nov-14	7.50 %	8-Mar-12	5.75 %	3-Jul-09	6.75 %
7-Oct-14	7.50 %	9-Feb-12	5.75 %		
11-Sep-14	7.50 %	12-Jan-12	6.00 %		
14-Aug-14	7.50 %	8-Dec-11	6.00 %		
10-Jul-14	7.50 %	10-Nov-11	6.00 %		
12-Jun-14	7.50 %	11-Oct-11	6.50 %		
8-May-14	7.50 %	8-Sep-11	6.75 %		
8-Apr-14	7.50 %	9-Aug-11	6.75 %		
13-Mar-14	7.50 %	12-Jul-11	6.75 %		
13-Feb-14	7.50 %	9-Jun-11	6.75 %		
9-Jan-14	7.50 %	12-May-11	6.75 %		
12-Dec-13	7.50 %	12-Apr-11	6.75 %		

## LAMPIRAN B

### Listing Program Matlab

```
clc
clear all;
close all;
clc;

% Estimasi Parameter dari Model CIR
% Menggunakan Metode Conditional Least Square Estimation (CLSE)

fprintf('-----\n');
fprintf('Estimasi Parameter Model CIR Menggunakan Conditional LS\n');
fprintf('-----');

data=xlsread('dtBulanan09-16.xlsx');
r=data;
n=length(r);
r=r';
r0=data(1,1);
deltat=1;
sum_rk=sum(r);
r=[r0 r];
sum_rkmin1=sum(r)-r(length(r));
sum_rkmin12=sum_rkmin1^2;
sum1=0; sum2=0; sum3=0;

for k=3:length(r)+1
    sum1=sum1+r(k-1)*r(k-2);
    sum2=sum2+r(k-2)^2;
end
sum1; sum2;

nilai_alpha=(-1/deltat)*log(((n*sum1)-(sum_rk*sum_rkmin1))/((n*sum2)-
sum_rkmin12));
nilai_miu=(sum_rk-(exp(-nilai_alpha*deltat)*sum_rkmin1))/(n*(1-exp(-
nilai_alpha*deltat)));

for k=3:size(r,2)
    sum3=sum3+(r(k-1)-(nilai_miu+(nilai_miu*exp(-
nilai_alpha*deltat))+exp(-nilai_alpha*deltat)*r(k-
2))^2/(((1/nilai_alpha)*r(k-2)*...
(exp(-nilai_alpha*deltat)-exp(-
2*nilai_alpha*deltat))+(nilai_miu/2*nilai_alpha)*...
(1-2*exp(-nilai_alpha*deltat)+exp(-2*nilai_alpha*deltat))));
end
sum3;

nilai_sigma=sqrt(sum3/n);

fprintf('\n Nilai Alpha = %3.4f\n Nilai Miu = %3.4f\n Nilai Sigma =
%3.4f\n\n', nilai_alpha, nilai_miu, nilai_sigma);

% fprintf('-----
--\n');
% fprintf('Estimasi Suku Bunga Model CIR Menggunakan Extended Kalman
Filter\n');
% fprintf('-----
--');
```

```

iterasi=87;

%Estimasi Konstan
% a0=0,01;
% mi0=0.01;
% si0=0.01;
% ro=0.0675;
% dt=1/87;

% Estimasi dari CLSE
a0=nilai_alpha;
mi0=nilai_miu;
si0=nilai_sigma;
ro=0.0650;
dt=1/87;

%Q dan G
G=[1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
Q=[10^-3 0 0 0;
    0 10^-6 0 0;
    0 0 10^-6 0;
    0 0 0 10^-6];

%Model Pengukuran
H=[(mi0-ro)*dt*exp(-a0*dt) 1-exp(-a0*dt) 0 exp(-a0*dt)];
R=10^-5;

%Inisialisasi
xo=[a0;mi0;si0;ro];
a_re=a0;mi_re=mi0;si_re=si0; r_re=ro;
a_kf=a0;mi_kf=mi0;si_kf=si0; r_kf=ro;
xcor_l=xo;
xcor_kf=xo;
xreo=xo;xrea=xo;
xcoro_l=xo;
xcoro_kf=xo;

Po=[10^-2 0 0 0;
    0 10^-4 0 0;
    0 0 10^-4 0;
    0 0 0 10^-4];
Pcor_l=Po;Pcor_2=Po;Pcor_3=Po;Pcor_4=Po;
Pcor_kf=Po;
err_kf=[0;0;0;0];
MSE_kf1=0;MSE_kf2=0;MSE_kf3=0;MSE_kf4=0;

%=== Untuk Aproksimasi Data Aktual 3 Tahun ===
%A=xlsread ('dataaktual3th1.xlsx');
%B=data(:,1);

for i=1:iterasi
    %sistem real (model)
    A_re=[a_re;
          mi_re;
          si_re;
          mi_re*(1-exp(-a_re*dt))+(exp(-a_re*dt)*ro)];
    x_re=A_re+(G*sqrt(Q)*randn(4,1));
    z=H*x_re+sqrt(R)*randn(1,1);
    %z=B(i);
    xreo=x_re;
    xretot=[xrea x_re];
    xrea=xretot;

```

```

are=x_re(1,:);
mire=x_re(2,:);
sire=x_re(3,:);
rre=x_re(4,:);

%Extended Kalman Filter
tic;
akf=[a_kf;
     mi_kf;
     si_kf;
     mi_kf*(1-exp(-a_kf*dt))+(exp(-a_kf*dt)*r_kf)];

A_kf=[1 0 0 0;
      0 1 0 0;
      0 0 1 0;
      (mi_kf-r_kf)*(dt*exp(-a_kf*dt)) 1-exp(-a_kf*dt) 0 exp(-a_kf*dt)];

%Tahap Prediksi Extended Kalman Filter
xpre_kf=akf;
Ppre_kf=A_kf*Pcor_kf*A_kf'+G*Q*transpose(G);

%Tahap Koreksi Extended Kalman Filter
K_kf=Ppre_kf*H'*inv(H*Ppre_kf*H'+R);
Pcor_kf=(eye(4)-K_kf*H)*Ppre_kf;
xcor_kf=xpre_kf+K_kf*(z-H*xpre_kf);
xcortot_kf=[xcoro_kf xcor_kf];
xcoro_kf=xcortot_kf;
wkt_kf(i)=toc;
a_kf=xcor_kf(1,:);
mi_kf=xcor_kf(2,:);
si_kf=xcor_kf(3,:);
r_kf=xcor_kf(4,:);

%Error
err_kf=[err_kf abs(xcor_kf-x_re)];
%MSE Alpha
MSE_kf1=MSE_kf1+(xcor_kf(1,:)-x_re(1,:))^2;
%MSE Miu
MSE_kf2=MSE_kf2+(xcor_kf(2,:)-x_re(2,:))^2;
%MSE Sigma
MSE_kf3=MSE_kf3+(xcor_kf(3,:)-x_re(3,:))^2;
%MSE R
MSE_kf4=MSE_kf4+(xcor_kf(4,:)-x_re(4,:))^2;
end;
xcortot_kf(4,:)
disp('RSME Alpha')
RMSE_kf1=sqrt(MSE_kf1/(iterasi+1))
disp('RSME Miu')
RMSE_kf2=sqrt(MSE_kf2/(iterasi+1))
disp('RSME Sigma')
RMSE_kf3=sqrt(MSE_kf3/(iterasi+1))
disp('RSME R')
RMSE_kf4=sqrt(MSE_kf4/(iterasi+1))
disp('waktu komputasi')
time_kf=sum(wkt_kf)
disp('xre')
x_re
disp('xcor_kf')
xcor_kf

figure(1)
plot(1:iterasi+1,xretot(1,:), 'r--
',1:iterasi+1,xcortot_kf(1,:), 'b', 'LineWidth', 2)

```

```

title('ALPHA')
xlabel('Waktu')
ylabel('Nilai Alpha')
grid on;
legend('Real Sistem','EKF estimation');

figure(2)
plot(1:iterasi+1,xretot(2,:), 'r--',1:iterasi+1,xcortot_kf(2,:), 'b', 'linewidth',2)
title('MIU')
xlabel('Waktu')
ylabel('Nilai Miu')
grid on;
legend('Real Sistem',' EKF estimation');

figure(3)
plot(1:iterasi+1,xretot(3,:), 'r--',1:iterasi+1,xcortot_kf(3,:), 'b', 'linewidth',2)
title('SIGMA')
xlabel('Waktu')
ylabel('Nilai Sigma')
grid on;
legend('Real Sistem','EKF estimation');

figure(4)
plot(1:iterasi+1,xretot(4,:), 'r',1:iterasi+1,xcortot_kf(4,:), 'b-
o', 'linewidth',2)
title('Estimasi Suku Bunga CIR','FontSize',12)
xlabel('Waktu')
ylabel('Suku Bunga')
grid on;
legend('Real Sistem','EKF estimation');

%=== Grafik Untuk Aproksimasi Data Aktual 3 Tahun ===

figure(5)
plot(1:iterasi,B, 'r',1:iterasi,xcortot_kf(4,:), 'b-
o', 'linewidth',2)
title('Aproksimasi Suku Bunga 3 tahun','FontSize',12)
xlabel('Waktu')
ylabel('Suku Bunga')
grid on;
legend('Data Aktual','EKF estimation');

figure(6)
plot(1:iterasi,xretot(4,:), 'k',1:iterasi,xcortot_kf(4,:), 'b-
o',1:iterasi,B, 'r', 'linewidth',2)
title('Estimasi Suku Bunga CIR')
xlabel('Waktu')
ylabel('Suku Bunga')
grid on;
legend('Real Sistem','EKF estimation','Data Aktual');

figure(7)
plot(1:iterasi+1,err_kf(4,:), 'g', 'linewidth',1)
title('Error Estimasi Suku Bunga CIR')
xlabel('Waktu')
ylabel('Error ')
grid on;
legend(' Error Estimasi EKF');

```

## LAMPIRAN C

### Aproksimasi Estimasi Suku Bunga EKF Jangka Waktu 3 Tahun (1)

SUKU BUNGA			TERHADAP SB SISTEM			TERHADAP SB AKTUAL		
Aktual	Estimasi EKF	Sistem	Error thd SB Sistem	Error Kuadrat	Error Relatif	Error thd SB Aktual	Error Kuadrat	Error Relatif
0.0675	0.06750000	0.06750000	-	-	0.00%	-	-	0.00%
0.0650	0.06751696	0.06633757	0.001179	0.000001	1.78%	0.002517	0.0000063	3.87%
0.0650	0.06522579	0.05332676	0.011899	0.000142	22.31%	0.000226	0.0000001	0.35%
0.0650	0.06503408	0.07432538	0.009291	0.000086	12.50%	0.000034	0.0000000	0.05%
0.0650	0.06501798	0.07784047	0.012822	0.000164	16.47%	0.000018	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501663	0.06683023	0.001814	0.000003	2.71%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501652	0.05664991	0.008367	0.000070	14.77%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501651	0.06878713	0.003771	0.000014	5.48%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501651	0.06204868	0.002968	0.000009	4.78%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501651	0.07224746	0.007231	0.000052	10.01%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501651	0.05362467	0.011392	0.000130	21.24%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501651	0.07163346	0.006617	0.000044	9.24%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501650	0.07772436	0.012708	0.000161	16.35%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501650	0.07071419	0.005698	0.000032	8.06%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501650	0.05870085	0.006316	0.000040	10.76%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501650	0.06307144	0.001945	0.000004	3.08%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501650	0.06758777	0.002571	0.000007	3.80%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501650	0.07367127	0.008655	0.000075	11.75%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501650	0.05069819	0.014318	0.000205	28.24%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0675	0.06501650	0.05003898	0.014978	0.000224	29.93%	0.002483	0.0000062	3.68%
0.0675	0.06730736	0.05997822	0.007329	0.000054	12.22%	0.000193	0.0000000	0.29%
0.0675	0.06749968	0.07169654	0.004197	0.000018	5.85%	0.000000	0.0000000	0.00%
0.0675	0.06751582	0.04279609	0.024720	0.000611	57.76%	0.000016	0.0000000	0.02%
0.0675	0.06751718	0.05422775	0.013289	0.000177	24.51%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0675	0.06751729	0.07147259	0.003955	0.000016	5.53%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0675	0.06751730	0.07239523	0.004878	0.000024	6.74%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0675	0.06751730	0.06279149	0.004726	0.000022	7.53%	0.000017	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06751730	0.07279837	0.005281	0.000028	7.25%	0.002517	0.0000063	3.87%
0.0600	0.06522651	0.06352685	0.001700	0.000003	2.68%	0.005227	0.0000273	8.71%
0.0600	0.06045260	0.07035384	0.009901	0.000098	14.07%	0.000453	0.0000002	0.75%
0.0600	0.06005183	0.08005185	0.020000	0.000400	24.98%	0.000052	0.0000000	0.09%
0.0575	0.06001818	0.08296428	0.022946	0.000527	27.66%	0.002518	0.0000063	4.38%
0.0575	0.05772451	0.07641123	0.018687	0.000349	24.46%	0.000225	0.0000001	0.39%
0.0575	0.05753196	0.06500391	0.007472	0.000056	11.49%	0.000032	0.0000000	0.06%
0.0575	0.05751579	0.06364837	0.006133	0.000038	9.64%	0.000016	0.0000000	0.03%
0.0575	0.05751444	0.06654835	0.009034	0.000082	13.57%	0.000014	0.0000000	0.03%
<b>MSE</b>			<b>0.000110</b>			<b>MSE</b>	<b>0.000001</b>	
<b>RMSE</b>			<b>0.010494</b>			<b>RMSE</b>	<b>0.001212</b>	

## LAMPIRAN D

### Aproksimasi Estimasi Suku Bunga EKF Jangka Waktu 3 Tahun (2)

SUKU BUNGA			TERHADAP SB SISTEM			TERHADAP SB AKTUAL		
Aktual	Estimasi EKF	Sistem	Error thd SB Sistem	Error Kuadrat	Error Relatif	Error thd SB Aktual	Error Kuadrat	Error Relatif
0.0675	0.06750000	0.06750000	-	-	0.00%	-	-	0.00%
0.0650	0.06751579	0.06690337	0.000612	0.000000	0.92%	0.002516	0.0000063	3.87%
0.0650	0.06625665	0.06714079	0.000884	0.000001	1.32%	0.001257	0.0000016	1.93%
0.0650	0.06578560	0.06655540	0.000770	0.000001	1.16%	0.000786	0.0000006	1.21%
0.0650	0.06553198	0.06749631	0.001964	0.000004	2.91%	0.000532	0.0000003	0.82%
0.0650	0.06537280	0.06643420	0.001061	0.000001	1.60%	0.000373	0.0000001	0.57%
0.0650	0.06526517	0.06898908	0.003724	0.000014	5.40%	0.000265	0.0000001	0.41%
0.0650	0.06518959	0.06666908	0.001479	0.000002	2.22%	0.000190	0.0000000	0.29%
0.0650	0.06513548	0.06715444	0.002019	0.000004	3.01%	0.000135	0.0000000	0.21%
0.0650	0.06509637	0.06943339	0.004337	0.000019	6.25%	0.000096	0.0000000	0.15%
0.0650	0.06506795	0.06763839	0.002570	0.000007	3.80%	0.000068	0.0000000	0.10%
0.0650	0.06504727	0.06711761	0.002070	0.000004	3.08%	0.000047	0.0000000	0.07%
0.0650	0.06503219	0.06878676	0.003755	0.000014	5.46%	0.000032	0.0000000	0.05%
0.0650	0.06502121	0.06767694	0.002656	0.000007	3.92%	0.000021	0.0000000	0.03%
0.0650	0.06501322	0.06720420	0.002191	0.000005	3.26%	0.000013	0.0000000	0.02%
0.0650	0.06500741	0.06656859	0.001561	0.000002	2.35%	0.000007	0.0000000	0.01%
0.0650	0.06500319	0.06822995	0.003227	0.000010	4.73%	0.000003	0.0000000	0.00%
0.0650	0.06500014	0.06654132	0.001541	0.000002	2.32%	0.000000	0.0000000	0.00%
0.0650	0.06499794	0.06845637	0.003458	0.000012	5.05%	0.000002	0.0000000	0.00%
0.0675	0.06499637	0.06760070	0.002604	0.000007	3.85%	0.002504	0.0000063	3.71%
0.0675	0.06567612	0.06832716	0.002651	0.000007	3.88%	0.001824	0.0000033	2.70%
0.0675	0.06617299	0.06704079	0.000868	0.000001	1.29%	0.001327	0.0000018	1.97%
0.0675	0.06653633	0.06758646	0.001050	0.000001	1.55%	0.000964	0.0000009	1.43%
0.0675	0.06680207	0.06825855	0.001456	0.000002	2.13%	0.000698	0.0000005	1.03%
0.0675	0.06699641	0.06794815	0.000952	0.000001	1.40%	0.000504	0.0000003	0.75%
0.0675	0.06713852	0.06841425	0.001276	0.000002	1.86%	0.000361	0.0000001	0.54%
0.0675	0.06724240	0.06753911	0.000297	0.000000	0.44%	0.000258	0.0000001	0.38%
0.0650	0.06731832	0.06915013	0.001832	0.000003	2.65%	0.002318	0.0000054	3.57%
0.0600	0.06668765	0.06806625	0.001379	0.000002	2.03%	0.006688	0.0000447	11.15%
0.0600	0.06485503	0.06761637	0.002761	0.000008	4.08%	0.004855	0.0000236	8.09%
0.0600	0.06352105	0.06851115	0.004990	0.000025	7.28%	0.003521	0.0000124	5.87%
0.0575	0.06255134	0.06882038	0.006269	0.000039	9.11%	0.005051	0.0000255	8.78%
0.0575	0.06116491	0.06831494	0.007150	0.000051	10.47%	0.003665	0.0000134	6.37%
0.0575	0.06015732	0.07034923	0.010192	0.000104	14.49%	0.002657	0.0000071	4.62%
0.0575	0.05942479	0.06633304	0.006908	0.000048	10.41%	0.001925	0.0000037	3.35%
0.0575	0.05889184	0.06604634	0.007154	0.000051	10.83%	0.001392	0.0000019	2.42%
<b>MSE</b>			<b>0.000013</b>			<b>MSE</b>	<b>0.000004</b>	
<b>RMSE</b>			<b>0.003579</b>			<b>RMSE</b>	<b>0.002108</b>	

## LAMPIRAN E

**Tabel Penurunan Populasi Winklevoss**

x	$i_x^{(r)}$	$d_x^{(m)}$	$d_x^{(t)}$	$d_x^{(d)}$	$d_x^{(r)}$	$d_x^{(r)}$
20	1000000	442	243002	263	0	243708
21	756292	350	169718	201	0	170270
22	586023	286	121314	158	0	121757
23	464265	238	88543	126	0	88907
24	375358	202	65921	103	0	66226
25	309132	176	49933	85	0	50194
26	258938	156	38460	72	0	38688
27	220251	140	30049	62	0	30251
28	189999	129	23814	53	0	23996
29	166004	119	19113	47	0	19280
30	146724	112	15529	56	0	15697
31	131027	107	12754	50	0	12911
32	118116	103	10576	45	0	10725
33	107392	101	8875	41	0	9017
34	98375	99	7510	38	0	7647
35	90727	98	6419	35	0	6552
36	84176	98	5534	41	0	5673
37	78503	99	4816	46	0	4960
38	73543	100	4224	50	0	4374
39	69169	102	3738	54	0	3893
40	65276	104	3338	57	0	3499
41	61777	108	3004	60	0	3172
42	58605	114	2727	69	0	2910
43	55695	123	2491	76	0	2690
44	53006	133	2290	83	0	2506
45	50499	144	2121	89	0	2354
46	48145	156	1969	94	0	2219
47	45926	169	1841	99	0	2108
48	43818	181	1721	107	0	2009
49	41808	194	1616	115	0	1925
50	39884	206	1517	121	0	1845
51	38039	219	1424	127	0	1769
52	36270	230	1335	135	0	1700
53	34570	241	1244	142	0	1628
54	32942	252	1159	148	0	1559
55	31383	267	0	156	0	423
56	30960	286	0	166	0	452
57	30508	305	0	182	0	487
58	30020	326	0	203	0	529
59	29491	350	0	235	0	585
60	28907	377	0	281	0	659
61	28248	405	0	348	0	753
62	27495	433	0	436	0	869
63	26626	459	0	549	0	1008
64	25618	485	0	685	0	1170
65	24448	0	0	0	24448	24448

## LAMPIRAN F

### Tabel Mortalita TMI 2011

x	qx (laki-laki)	px	lx	x	qx (perempuan)	Px	lx
0	0,00802	0,99198	100.000,00000	0	0,00370	0,99630	100.000,00000
1	0,00079	0,99921	99.198,00000	1	0,00056	0,99944	99.630,00000
2	0,00063	0,99937	99.119,63358	2	0,00042	0,99958	99.574,20720
3	0,00051	0,99949	99.057,18821	3	0,00033	0,99967	99.532,38603
4	0,00043	0,99957	99.006,66904	4	0,00028	0,99972	99.499,54035
5	0,00038	0,99962	98.964,09618	5	0,00027	0,99973	99.471,68047
6	0,00034	0,99966	98.926,48982	6	0,00030	0,99970	99.444,82312
7	0,00031	0,99969	98.892,85481	7	0,00031	0,99969	99.414,98967
8	0,00029	0,99971	98.862,19803	8	0,00030	0,99970	99.384,17103
9	0,00028	0,99972	98.833,52799	9	0,00028	0,99972	99.354,35578
10	0,00027	0,99973	98.805,85460	10	0,00025	0,99975	99.326,53656
11	0,00027	0,99973	98.779,17702	11	0,00024	0,99976	99.301,70492
12	0,00026	0,99974	98.752,50665	12	0,00026	0,99974	99.277,87251
13	0,00026	0,99974	98.726,83099	13	0,00028	0,99972	99.252,06027
14	0,00027	0,99973	98.701,16202	14	0,00029	0,99971	99.224,26969
15	0,00029	0,99971	98.674,51270	15	0,00028	0,99972	99.195,49465
16	0,00030	0,99970	98.645,89710	16	0,00025	0,99975	99.167,71991
17	0,00032	0,99968	98.616,30333	17	0,00024	0,99976	99.142,92798
18	0,00036	0,99964	98.584,74611	18	0,00023	0,99977	99.119,13368
19	0,00041	0,99959	98.549,25560	19	0,00024	0,99976	99.096,33628
20	0,00049	0,99951	98.508,85041	20	0,00026	0,99974	99.072,55316
21	0,00059	0,99941	98.460,58107	21	0,00029	0,99971	99.046,79429
22	0,00069	0,99931	98.402,48933	22	0,00033	0,99967	99.018,07072
23	0,00077	0,99923	98.334,59161	23	0,00037	0,99963	98.985,39476
24	0,00083	0,99917	98.258,87397	24	0,00039	0,99961	98.948,77016
25	0,00085	0,99915	98.177,31911	25	0,00042	0,99958	98.910,18014
26	0,00083	0,99917	98.093,86839	26	0,00044	0,99956	98.868,63787
27	0,00079	0,99921	98.012,45048	27	0,00046	0,99954	98.825,13567
28	0,00075	0,99925	97.935,02064	28	0,00048	0,99952	98.779,67611
29	0,00074	0,99926	97.861,56937	29	0,00051	0,99949	98.732,26186
30	0,00076	0,99924	97.789,15181	30	0,00054	0,99946	98.681,90841
31	0,00080	0,99920	97.714,83206	31	0,00057	0,99943	98.628,62018
32	0,00083	0,99917	97.636,66019	32	0,00060	0,99940	98.572,40186
33	0,00084	0,99916	97.555,62176	33	0,00062	0,99938	98.513,25842
34	0,00086	0,99914	97.473,67504	34	0,00064	0,99936	98.452,18020
35	0,00091	0,99909	97.389,84768	35	0,00067	0,99933	98.389,17081
36	0,00099	0,99901	97.301,22292	36	0,00074	0,99926	98.323,25006
37	0,00109	0,99891	97.204,89471	37	0,00084	0,99916	98.250,49086
38	0,00120	0,99880	97.098,94137	38	0,00093	0,99907	98.167,96044
39	0,00135	0,99865	96.982,42264	39	0,00104	0,99896	98.076,66424
40	0,00153	0,99847	96.851,49637	40	0,00114	0,99886	97.974,66451
41	0,00175	0,99825	96.703,31358	41	0,00126	0,99874	97.862,97339
42	0,00196	0,99804	96.534,08279	42	0,00141	0,99859	97.739,66605
43	0,00219	0,99781	96.344,87598	43	0,00158	0,99842	97.601,85312
44	0,00246	0,99754	96.133,88070	44	0,00175	0,99825	97.447,64219
45	0,00279	0,99721	95.897,39136	45	0,00193	0,99807	97.277,10882
46	0,00318	0,99682	95.629,83764	46	0,00214	0,99786	97.089,36400
47	0,00363	0,99637	95.325,73475	47	0,00239	0,99761	96.881,59276
48	0,00414	0,99586	94.979,70234	48	0,00268	0,99732	96.650,04575
49	0,00471	0,99529	94.586,48637	49	0,00299	0,99701	96.391,02363
50	0,00538	0,99462	94.140,98402	50	0,00334	0,99666	96.102,81447

x	qx (laki-laki)	px	lx	x	qx (perempuan)	Px	lx
51	0,00615	0,99385	93.634,50552	51	0,00374	0,99626	95.781,83107
52	0,00699	0,99301	93.058,65331	52	0,00422	0,99578	95.423,60702
53	0,00784	0,99216	92.408,17333	53	0,00479	0,99521	95.020,91940
54	0,00872	0,99128	91.683,69325	54	0,00542	0,99458	94.565,76919
55	0,00961	0,99039	90.884,21144	55	0,00607	0,99393	94.053,22272
56	0,01051	0,98949	90.010,81417	56	0,00669	0,99331	93.482,31966
57	0,01142	0,98858	89.064,80051	57	0,00725	0,99275	92.856,92294
58	0,01232	0,98768	88.047,68049	58	0,00776	0,99224	92.183,71025
59	0,01322	0,98678	86.962,93307	59	0,00826	0,99174	91.468,36466
60	0,01417	0,98583	85.813,28309	60	0,00877	0,99123	90.712,83597
61	0,01521	0,98479	84.597,30887	61	0,00936	0,99064	89.917,28440
62	0,01639	0,98361	83.310,58380	62	0,01004	0,98996	89.075,65861
63	0,01773	0,98227	81.945,12334	63	0,01104	0,98896	88.181,33900
64	0,01926	0,98074	80.492,23630	64	0,01214	0,98786	87.207,81702
65	0,02100	0,97900	78.941,95583	65	0,01334	0,98666	86.149,11412
66	0,02288	0,97712	77.284,17476	66	0,01466	0,98534	84.999,88494
67	0,02486	0,97514	75.515,91284	67	0,01612	0,98388	83.753,78663
68	0,02702	0,97298	73.638,58724	68	0,01771	0,98229	82.403,67559
69	0,02921	0,97079	71.648,87262	69	0,01947	0,98053	80.944,30649
70	0,03182	0,96818	69.556,00905	70	0,02121	0,97879	79.368,32084
71	0,03473	0,96527	67.342,73684	71	0,02319	0,97681	77.684,91876
72	0,03861	0,96139	65.003,92359	72	0,02539	0,97461	75.883,40549
73	0,04264	0,95736	62.494,12210	73	0,02778	0,97222	73.956,72583
74	0,04687	0,95313	59.829,37273	74	0,03042	0,96958	71.902,20798
75	0,05155	0,94845	57.025,17003	75	0,03330	0,96670	69.714,94282
76	0,05664	0,94336	54.085,52252	76	0,03646	0,96354	67.393,43522
77	0,06254	0,93746	51.022,11852	77	0,03991	0,96009	64.936,27057
78	0,06942	0,93058	47.831,19523	78	0,04372	0,95628	62.344,66401
79	0,07734	0,92266	44.510,75366	79	0,04789	0,95211	59.618,95530
80	0,08597	0,91403	41.068,29197	80	0,05247	0,94753	56.763,80353
81	0,09577	0,90423	37.537,65091	81	0,05877	0,94123	53.785,40676
82	0,10593	0,89407	33.942,67008	82	0,06579	0,93421	50.624,43841
83	0,11683	0,88317	30.347,12304	83	0,07284	0,92716	47.293,85660
84	0,12888	0,87112	26.801,66865	84	0,08061	0,91939	43.848,97209
85	0,14241	0,85759	23.347,46960	85	0,08925	0,91075	40.314,30645
86	0,15738	0,84262	20.022,55645	86	0,09713	0,90287	36.716,25460
87	0,17363	0,82637	16.871,40652	87	0,10893	0,89107	33.150,00479
88	0,19110	0,80890	13.942,02420	88	0,12131	0,87869	29.538,97477
89	0,20945	0,79055	11.277,70338	89	0,13450	0,86550	25.955,60174
90	0,22853	0,77147	8.915,58841	90	0,14645	0,85355	22.464,57330
91	0,24638	0,75362	6.878,10899	91	0,15243	0,84757	19.174,63654
92	0,26496	0,73504	5.183,48050	92	0,16454	0,83546	16.251,84670
93	0,28450	0,71550	3.810,06550	93	0,18235	0,81765	13.577,76784
94	0,30511	0,69489	2.726,10187	94	0,20488	0,79512	11.101,86187
95	0,32682	0,67318	1.894,34093	95	0,23305	0,76695	8.827,31241
96	0,34662	0,65338	1.275,23243	96	0,25962	0,74038	6.770,10726
97	0,36770	0,63230	833,21136	97	0,28720	0,71280	5.012,45201
98	0,39016	0,60984	526,83954	98	0,29173	0,70827	3.572,87579
99	0,41413	0,58587	321,28783	99	0,30759	0,69241	2.530,56074
100	0,43974	0,56026	188,23290	100	0,33241	0,66759	1.752,18556
101	0,45994	0,54006	105,45936	101	0,35918	0,64082	1.169,74156
102	0,48143	0,51857	56,95438	102	0,38871	0,61129	749,59379
103	0,50431	0,49569	29,53484	103	0,42124	0,57876	458,21919
104	0,52864	0,47136	14,64012	104	0,45705	0,54295	265,19894
105	0,55450	0,44550	6,90077	105	0,49580	0,50420	143,98976
106	0,58198	0,41802	3,07429	106	0,53553	0,46447	72,59964
107	0,61119	0,38881	1,28512	107	0,57626	0,42374	33,72035
108	0,64222	0,35778	0,49967	108	0,61725	0,38275	14,28866
109	0,67518	0,32482	0,17877	109	0,65996	0,34004	5,46899
110	0,71016	0,28984	0,05807	110	0,70366	0,29634	1,85967
111	1,00000	-	0,01683	111	1,00000	-	0,55110

## LAMPIRAN G

### Perhitungan Anuitas Awal Seumur Hidup dengan Suku Bunga CIR

$t$	Usia ( $x$ )	$r_t$	$v^t$	$p_x$	$L_x$	$\ddot{a}$
0	58	0.0635	1	1	88047.68049	1
1	59	0.0663	0.93780	0.98768	86962.93307	0.9262426
2	60	0.0659	0.87980	0.97462287	85813.28309	0.8574780
3	61	0.0662	0.82514	0.960812464	84597.30887	0.7928079
4	62	0.0640	0.77552	0.946198507	83310.5838	0.7337977
5	63	0.0645	0.72850	0.930690313	81945.12334	0.6780114
6	64	0.0647	0.68421	0.914189174	80492.2363	0.6254995
7	65	0.0658	0.64200	0.89658189	78941.95583	0.5756018
8	66	0.0659	0.60230	0.877753671	77284.17476	0.5286688
9	67	0.0668	0.56457	0.857670667	75515.91284	0.4842152
10	68	0.0651	0.53008	0.836348974	73638.58724	0.4433333
11	69	0.0643	0.49806	0.813750825	71648.87262	0.4052982
12	70	0.0646	0.46783	0.789981163	69556.00905	0.3695764
13	71	0.0646	0.43943	0.764843963	67342.73684	0.3360967
14	72	0.0657	0.41233	0.738280932	65003.92359	0.3044189
15	73	0.0632	0.38783	0.709775905	62494.1221	0.2752707
16	74	0.0647	0.36427	0.67951106	59829.37273	0.2475276
17	75	0.0635	0.34252	0.647662377	57025.17003	0.2218349
18	76	0.0646	0.32172	0.614275381	54085.52252	0.1976239
19	77	0.0642	0.30231	0.579482824	51022.11852	0.1751841
20	78	0.0658	0.28364	0.543241968	47831.19523	0.1540870
21	79	0.0653	0.26626	0.505530111	44510.75366	0.1346029
22	80	0.0650	0.25001	0.466432412	41068.29197	0.1166135
23	81	0.0639	0.23499	0.426333217	37537.65091	0.1001819
24	82	0.0652	0.22060	0.385503285	33942.67008	0.0850436
25	83	0.0650	0.20713	0.344666922	30347.12304	0.0713910
26	84	0.0657	0.19436	0.304399486	26801.66865	0.0591641
27	85	0.0651	0.18248	0.26516848	23347.4696	0.0483891
28	86	0.0657	0.17123	0.227405837	20022.55645	0.0389380
29	87	0.0641	0.16091	0.191616706	16871.40652	0.0308338
30	88	0.0661	0.15094	0.158346297	13942.0242	0.0239010
31	89	0.0647	0.14177	0.12808632	11277.70338	0.0181582
32	90	0.0644	0.13319	0.10125864	8915.588406	0.0134862
33	91	0.0638	0.12520	0.078118003	6878.108988	0.0097801
34	92	0.0649	0.11757	0.05887129	5183.480495	0.0069214
35	93	0.0662	0.11026	0.043272753	3810.065503	0.0047714
36	94	0.0654	0.10350	0.030961655	2726.101868	0.0032045
37	95	0.0652	0.09717	0.021514944	1894.340927	0.0020905
38	96	0.0645	0.09128	0.01448343	1275.232425	0.0013220
39	97	0.0641	0.08578	0.009463184	833.2113619	0.0008117
40	98	0.0662	0.08045	0.005983571	526.8395441	0.0004814
41	99	0.0651	0.07554	0.003649021	321.2878276	0.0002756
42	100	0.0643	0.07097	0.002137852	188.2328996	0.0001517
43	101	0.0643	0.06668	0.001197753	105.4593643	0.0000799
44	102	0.0666	0.06252	0.000646858	56.95438429	0.0000404
45	103	0.0650	0.05870	0.000335441	29.53483506	0.0000197
46	104	0.0636	0.05520	0.000166275	14.64012239	0.0000092
47	105	0.0658	0.05179	7.83754E-05	6.90076809	0.0000041
48	106	0.0667	0.04855	3.49162E-05	3.074292184	0.0000017
49	107	0.0646	0.04560	1.45957E-05	1.285115619	0.0000007
50	108	0.0644	0.04285	5.67495E-06	0.499665804	0.0000002
51	109	0.0636	0.04028	2.03038E-06	0.178770431	0.0000001
52	110	0.0632	0.03789	6.59509E-07	0.058068211	0.0000000
<b>Jumlah</b>						<b>11.1032444</b>

## LAMPIRAN H

### Perhitungan *Supplemental Cost* untuk 1 Orang Pegawai

t	x	r-x	Sx	bx	Bx	$v^{(r-x)}$	PVFB	AL	NC	SC
0	25	33	-	737,010	-	0.11575	12,112,362	-	92,056	98,229
1	26	32	29,480,400	792,286	737,010	0.12356	15,436,360	117,223	120,684	128,777
2	27	31	61,171,830	851,707	1,529,296	0.13208	19,399,404	305,686	168,197	179,477
3	28	30	95,240,117	915,585	2,381,003	0.14105	24,015,105	589,169	229,066	244,428
4	29	29	131,863,526	984,254	3,296,588	0.15051	29,330,006	996,260	292,386	311,995
5	30	28	171,233,690	1,058,073	4,280,842	0.16076	35,444,310	1,563,405	396,180	422,749
6	31	27	213,556,617	1,137,429	5,338,915	0.17145	42,330,224	2,328,623	493,519	526,616
7	32	26	259,053,764	1,222,736	6,476,344	0.18306	50,136,212	3,345,624	617,105	658,490
8	33	25	307,963,196	1,314,441	7,699,080	0.19559	58,916,821	4,673,839	794,714	848,010
9	34	24	360,540,836	1,413,024	9,013,521	0.20882	68,666,237	6,377,249	1,013,248	1,081,200
11	35	23	417,061,798	1,519,001	10,426,545	0.22277	79,431,333	8,533,514	1,226,456	1,308,707
12	36	22	477,821,833	1,632,926	11,945,546	0.23794	91,442,927	11,255,163	1,529,294	1,631,855
13	37	21	543,138,871	1,755,395	13,578,472	0.25406	104,691,978	14,647,380	1,887,277	2,013,845
14	38	20	613,354,686	1,887,050	15,333,867	0.27123	119,306,397	18,849,988	2,276,881	2,429,578
15	39	19	688,836,687	2,028,579	17,220,917	0.28979	135,528,831	24,048,258	2,811,280	2,999,816
16	40	18	769,979,839	2,180,722	19,249,496	0.30943	153,347,183	30,415,210	3,504,565	3,739,595
17	41	17	857,208,727	2,344,276	21,430,218	0.32996	172,780,802	38,152,037	4,177,863	4,458,047
18	42	16	950,979,781	2,520,097	23,774,495	0.35217	194,395,830	47,620,494	4,907,856	5,236,996
19	43	15	1,051,783,665	2,709,104	26,294,592	0.37657	218,723,838	59,259,530	6,245,452	6,664,296
20	44	14	1,160,147,840	2,912,287	29,003,696	0.40130	244,910,674	73,190,837	7,387,712	7,883,161
21	45	13	1,276,639,328	3,130,709	31,915,983	0.42818	274,290,889	90,201,813	8,972,389	9,574,113
22	46	12	1,401,867,677	3,365,512	35,046,692	0.45656	306,770,188	110,778,591	10,690,344	11,407,281
23	47	11	1,536,488,153	3,617,925	38,412,204	0.48719	343,165,109	135,821,338	12,845,753	13,707,240
24	48	10	1,681,205,165	3,889,270	42,030,129	0.51991	383,827,996	166,223,732	15,546,881	16,589,516
25	49	9	1,836,775,952	4,180,965	45,919,399	0.55446	429,015,604	202,985,463	18,563,384	19,808,318
26	50	8	2,004,014,548	4,494,537	50,100,364	0.59172	479,932,879	247,751,925	22,244,842	23,736,669
27	51	7	2,183,796,039	4,831,628	54,594,901	0.63176	537,266,561	302,229,985	26,634,397	28,420,604
28	52	6	2,377,061,142	5,194,000	59,426,529	0.67501	602,040,809	368,639,567	32,000,296	34,146,362
29	53	5	2,584,821,128	5,583,550	64,620,528	0.72153	675,176,938	449,555,959	38,519,710	41,102,994
30	54	4	2,808,163,113	6,002,316	70,204,078	0.77149	757,608,313	548,027,971	46,644,157	49,772,298
31	55	3	3,048,255,746	6,452,490	76,206,394	0.82411	849,490,044	667,029,987	56,596,736	60,392,337
32	56	2	3,306,355,327	6,936,426	82,658,883	0.87839	917,809,360	781,695,606	65,675,050	70,079,478
33	57	1	3,583,812,377	7,456,658	89,595,309	0.93667	993,201,105	916,891,873	76,309,233	81,426,831
34	58	-	3,882,078,705	-	97,051,968	1.00000	1,077,591,717	1,077,591,717	-	-

## LAMPIRAN I

### Perbandingan Perhitungan *Supplemental Cost* 30 Orang Pegawai dengan Asumsi Suku Bunga Konstan 7 %

Peg.	x	r-x	sx	bx	CIR SC	FIXD SC
A001	49	9	72,720,000	1,818,000	734,277	677,604
A002	46	12	99,144,000	2,478,600	2,825,397	2,557,806
A003	45	13	33,000,000	825,000	1,017,201	916,338
A004	39	19	55,824,000	1,395,600	1,429,477	1,256,902
A005	51	7	48,990,000	1,224,750	969,469	898,606
A006	37	21	45,480,000	1,137,000	1,006,030	875,361
A007	43	15	79,776,000	1,994,400	2,574,931	2,296,661
A008	44	14	68,724,000	1,718,100	2,022,277	1,817,119
A009	33	25	46,296,000	1,157,400	734,449	625,851
A010	42	16	34,848,000	871,200	1,020,209	908,332
A011	33	25	54,300,000	1,357,500	861,426	734,054
A012	32	26	46,296,000	1,157,400	592,629	504,361
A013	32	26	53,157,600	1,328,940	741,202	628,231
A014	34	24	60,306,000	1,507,650	990,860	850,603
A015	31	27	61,632,000	1,540,800	747,387	629,655
A016	31	27	46,710,000	1,167,750	520,008	439,896
A017	32	26	28,908,000	722,700	403,079	341,643
A018	29	29	40,710,000	1,017,750	329,130	276,371
A019	34	24	42,912,000	1,072,800	767,993	656,600
A020	30	28	41,124,000	1,028,100	392,555	330,871
A021	29	29	44,544,000	1,113,600	392,285	328,048
A022	28	30	37,944,000	948,600	256,767	214,453
A023	26	32	29,040,000	726,000	143,219	118,043
A024	29	29	29,040,000	726,000	234,781	197,146
A025	30	28	31,740,000	793,500	330,030	277,029
A026	48	10	31,536,000	788,400	551,496	505,780
A027	27	31	29,040,000	726,000	176,611	146,109
A028	36	22	30,222,000	755,550	611,511	529,664
A029	25	33	29,480,400	737,010	115,895	95,210
A030	25	33	29,480,400	737,010	106,389	87,766
<b>Jumlah</b>				<b>34,573,110</b>	<b>23,598,970</b>	<b>20,722,113</b>
<b>Deviasi</b>					<b>13.88%</b>	

## LAMPIRAN J

### Perbandingan Perhitungan *Supplemental Cost* 30 Orang Pegawai dengan Asumsi Suku Bunga Konstan 6 %

Peg.	x	r-x	sx	bx	CIR SC	FIXD SC
A001	49	9	72,720,000	1,818,000	734,277	796,091
A002	46	12	99,144,000	2,478,600	2,825,397	3,117,387
A003	45	13	33,000,000	825,000	1,017,201	1,127,345
A004	39	19	55,824,000	1,395,600	1,429,477	1,622,061
A005	51	7	48,990,000	1,224,750	969,469	1,044,968
A006	37	21	45,480,000	1,137,000	1,006,030	1,151,090
A007	43	15	79,776,000	1,994,400	2,574,931	2,879,081
A008	44	14	68,724,000	1,718,100	2,022,277	2,237,483
A009	33	25	46,296,000	1,157,400	734,449	861,802
A010	42	16	34,848,000	871,200	1,020,209	1,139,664
A011	33	25	54,300,000	1,357,500	861,426	1,010,797
A012	32	26	46,296,000	1,157,400	592,629	695,108
A013	32	26	53,157,600	1,328,940	741,202	873,239
A014	34	24	60,306,000	1,507,650	990,860	1,150,489
A015	31	27	61,632,000	1,540,800	747,387	883,476
A016	31	27	46,710,000	1,167,750	520,008	611,983
A017	32	26	28,908,000	722,700	403,079	474,883
A018	29	29	40,710,000	1,017,750	329,130	391,777
A019	34	24	42,912,000	1,072,800	767,993	895,694
A020	30	28	41,124,000	1,028,100	392,555	464,649
A021	29	29	44,544,000	1,113,600	392,285	469,013
A022	28	30	37,944,000	948,600	256,767	306,870
A023	26	32	29,040,000	726,000	143,219	173,589
A024	29	29	29,040,000	726,000	234,781	279,469
A025	30	28	31,740,000	793,500	330,030	392,370
A026	48	10	31,536,000	788,400	551,496	599,827
A027	27	31	29,040,000	726,000	176,611	212,852
A028	36	22	30,222,000	755,550	611,511	703,072
A029	25	33	29,480,400	737,010	115,895	141,332
A030	25	33	29,480,400	737,010	106,389	129,176
<b>Jumlah</b>				<b>34,573,110</b>	<b>23,598,970</b>	<b>26,836,637</b>
<b>Deviasi</b>				<b>12.06%</b>		

## BIOGRAFI PENULIS



Nama Harmerita, lahir di Samarinda, 9 Desember 1983. Pendidikan Sarjana ditempuh di Jurusan Matematika Bidang Minat Ilmu Komputer di Fakultas MIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, lulus tahun 2007. Mulai tahun 2008, penulis bekerja di perusahaan swasta yang bergerak di bidang Perbankan Syariah. Kemudian, pada tahun 2015 penulis melanjutkan studi Program Magister Matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Dalam studinya, penulis tetap bekerja di perusahaan tersebut hingga saat ini. Saran, kritik, dan masukan yang membangun dapat ditujukan melalui surat elektronik [harmerita@yahoo.com](mailto:harmerita@yahoo.com). Terima kasih.