TESIS – SS142501

MODEL REGRESI *CONDITIONAL BIVARIATE POISSON* PADA DATA BERAT BADAN LAHIR RENDAH DAN KEMATIAN BAYI

(Studi Kasus: Di Kota Surabaya Tahun 2015)

SELLA AJI OKTARIN
NRP. 06211650010003

DOSEN PEMBIMBING :
Dr. Muhammad Mashuri, M.T.
Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI, DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018

THESIS – SS142501

CONDITIONAL BIVARIATE POISSON REGRESSION MODEL ON LOW BIRTH WEIGHT AND INFANT MORTALITY DATA

(Case Study: in Surabaya City 2015)

SELLA AJI OKTARIN
SIN. 06211650010003

SUPERVISORS
Dr. Muhammad Mashuri, M.T.
Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si.

MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF STATISTICS
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTING, AND DATA SCIENCES
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018

MODEL REGRESI *CONDITIONAL BIVARIATE POISSON* PADA DATA BERAT BADAN LAHIR RENDAH DAN KEMATIAN BAYI
(Studi Kasus: Di Kota Surabaya Tahun 2015)

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:
SELLA AJI OKTARIN
NRP. 06211650010003

Tanggal Ujian : 9 Juli 2018
Periode Wisuda : September 2018

Disetujui oleh:

1. **Dr. Muhammad Mashuri, M.T.** **(Pembimbing I)**
   NIP. 19620408 198701 1 001

2. **Dr. Vita Ratnasari, S.Si, M.Si.** **(Pembimbing II)**
   NIP. 19700910 199702 2 001

3. **Dr. Agus Suharsono, M.S.** **(Penguji)**
   NIP. 19580823 198403 1 003

4. **Dr. Kartika Fithriasari, M.Si.** **(Penguji)**
   NIP. 19691212 199303 2 002

Dekan
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
NIP. 19650506 198903 1 002

MODEL REGRESI *CONDITIONAL BIVARIATE POISSON* PADA DATA BERAT BADAN LAHIR RENDAH DAN KEMATIAN BAYI

(Studi Kasus di Kota Surabaya 2015)

Mahasiswa Nama	: Sella Aji Oktarin
NRP	: 06211650010003
Dosen Pembimbing	: Dr. Muhammad Mashuri, M.T.
	Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si.

ABSTRAK

Pemodelan bersama dari dua atau lebih data *count* telah mendapat banyak perhatian dalam beberapa tahun terakhir. Model bivariat *count* digunakan pada kasus dimana dua variabel *count* saling berkorelasi dan memerlukan estimasi secara bersama. Bivariate Poisson merupakan model yang paling banyak digunakan untuk model bivariat *count*. Terdapat pengembangan untuk model *joint bivariate poisson* berdasarkan teori *conditional probability* yaitu Model *conditional bivariate Poisson* (CBP). Model CBP tersebut adalah hasil perkalian dari marginal dan *conditional distribution*. Kematian bayi sebagian besar terjadi pada masa baru lahir (neonatal). Salah satu penyebab kematian neonatal adalah Berat badan lahir rendah (BBLR). BBLR merupakan berat badan saat lahir kurang dari 2500 gram. BBLR meningkatkan risiko penyakit tidak menular seperti diabetes dan penyakit kardiovaskular di kemudiaan hari. Hal tersebut dapat memberikan dampak buruk bagi kehidupan dimasa kedepanya dan negara jika tidak segera ditanggani karena anak merupakan masa depan suatu negara. Dua respon tersebut yaitu jumlah kasus BBLR dan jumlah kematian bayi adalah suatu *conditional*. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis estimasi parameter model *Conditional Bivariate Poisson* (CBP) dan mengaplikasikan model tersebut untuk mengetahui faktor-faktor yang mempengaruhi BBLR dan kematian bayi. Data yang digunakan adalah data profil kesehatan kota Surabaya tahun 2015. Metode yang digunakan dalam estimasi adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) karean hasil persamaan tidak *close form* sehingga menggunakan analisis numerik yaitu iterasi *Newton-Raphson* untuk menyelesaikannya. Hasil yang didapatkan adalah terdapat lima variabel yang signifikan terhadap BBLR dan kematian bayi. Pada model marginal variabel yang berpengaruh signifikan adalah variabel rasio tenaga kesehatan, persentase persalinan oleh tenaga kesehatan, persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3, persentase rumah tangga ber-PHBS, dan ratio puskesmas. Tetapi pada model conditional terdapat satu variabel yang tidak berpengaruh signifikan yaitu ratio tenaga kesehatan.

Kata Kunci: *Conditional Bivariate Poisson, MLE, Newton-Raphson, BBLR, Kematian Bayi.*

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

CONDITIONAL BIVARIATE POISSON REGRESSION MODEL ON LOW BIRTH WEIGHT AND INFANT MORTALITY DATA (Case Study: in Surabaya City 2015)

Name of student	: Sella Aji Oktarin
SIN	: 06211650010003
Supervisors	: Dr. Muhammad Mashuri, MT.
	: Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si.

ABSTRACT

The joint modeling of two or more data counts has gained much attention in recent years. The bivariate count model is used in cases where two count variables are correlated and require joint estimation. Bivariate Poisson is the most widely used model for bivariate count models. There is a development for the joint bivariate Poisson model based on conditional probability theory that is the conditional bivariate Poisson (CBP) model. The CBP model is the product of marginal and conditional distribution. Most infant deaths occur in the newborn (neonatal). One of the causes of neonatal death is low birth weight (LBW). LBW is the weight at birth less than 2500 grams. LBW increases the risk of non-communicable diseases such as diabetes and cardiovascular disease in later life. It can have a devastating impact on life in the future and the country if not immediately handled because the child is the future of a country. Two responses are the number of cases of LBW and the number of infant mortality is conditional. This study aims to analyze the estimated parameters of the Conditional Bivariate Poisson (CBP) model and apply the model to determine factors that influence LBW and infant mortality. The data used is the health profile of the city of Surabaya in 2015. The method used in the estimation is Maximum Likelihood Estimation (MLE) because the equation is not close form so using numerical analysis ie Newton-Raphson iteration to solve it. The results obtained are five variables that are significant for LBW and infant mortality. In the marginal model of variables that have a significant effect are the ratio of health workers, the percentage of the birth attended by a skilled health worker, the percentage of pregnant women getting Fe3 tablets, the percentage of households with PHBS, and the ratio of a public health center. But in the conditional model, there is one variable that has no significant effect is the ratio of health workers.

Keyword : Conditional Bivariate Poisson, MLE, Newton-Raphson, Low Birth Weight, Infant Mortality.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan atas kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah dan kekuatanNya serta shalawat dan salam selalu tercurah pada Nabi Muhammad SAW atas suri tauladannya dalam kehidupan ini sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul **"Model Regresi *Conditional Bivariate Poisson* pada Data Berat badan Lahir Rendah dan Kematian Bayi (Studi Kasus: di Kota Surabaya Tahun 2015)"**. Dalam penyelesaian Tesis ini tidak lepas dari bantuan serta dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Dr. Muhammad Mashuri, M.T dan Dr. Vita Ratnasari, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing yang telah banyak meluangkan waktunya untuk memberikan ilmu, bimbingan, dan arahannya kepada penulis dalam penyelesaian Tesis ini.
2. Dr. Agus Suharsono, M.S dan Dr. Kartika Fithriasari, M.Si selaku dosen penguji yang telah memberi saran dan kritiknya demi kesempurnaan Tesis ini.
3. Dr. Suhartono, M.Sc selaku Ketua Departemen Statistika FMKSD-ITS.
4. Dr.rer.pol. Heri Kuswanto, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Magister Departemen Statistika FMKSD-ITS.
5. Dr.rer.pol. Dedy Dwi Prastyo, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan bimbingan, arahan serta masukkan demi kelancaran dan terselesaikannya studi.
6. Segenap dosen pengajar dan para staff Departemen Statistika FMKSD-ITS yang memberikan bekal ilmu, memfasilitasi dan membantu penulis selama masa perkuliahan.
7. Kedua orang tua yang sangat penulis sayangi dan hormati, Ibu Suryati dan Bapak Wakijo yang tidak pernah lelah mendoakan yang terbaik untuk penulis selama masa perkuliahan penulis.
8. Sahabat (Arlene Henny, Milasari, Zakya Reyhana) dan teman (Kiki, Saidah, Tri, Tete, Mbak Asri, Silvi, Erna) yang selalu memberikan semangat dan dukungan pada penulis saat penulis mengalami kesusahan.

9. Semua teman-teman seperjuangan S2 Statistika ITS angkatan 2016 selama dua tahun ini, dalam Tesis dan semasa perkuliahan, terimakasih atas segala bantuan dan semangatnya.
10. Serta, semua pihak yang telah membantu penulis dan tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa tesis ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, sangat diharapkan kritik dan saran yang membangun. Semoga tesis ini dapat bermanfaat guna memperluas wawasan keilmuan pembacanya.

Surabaya, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR TABEL

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR GAMBAR

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR LAMPIRAN

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Distribusi Poisson merupakan suatu distribusi probabilitas diskrit untuk menghitung banyaknya kejadian yang terjadi secara acak dalam interval waktu atau ruang tertentu. Distribusi Poisson memiliki sifat-sifat yaitu banyaknya percobaan yang satu tidak bergantung dari banyaknya hasil percobaan yang lain, probabilitas hasil percobaan sebanding dengan panjang interval waktu tertentu, dan probabilitas lebih dari satu hasil percoban yang terjadi dalam interval waktu yang singkat dan daerah yang kecil dapat diabaikan. Berdasarkan sifat-sifat pada distribusi Poisson, banyak pemodelan yang menggunakan distribusi Poisson dalam memodelkan suatu data count (cacahan). Data count (cacahan) merupakan data menggambarkan suatu kejadian dalam suatu waktu sehingga dalam pemodelannya bisa menggunakan regresi Poisson.

Pemodelan bersama dari dua atau lebih data *count* telah mendapat banyak perhatian dalam beberapa tahun terakhir. Model bivariat *count* digunakan pada kasus dimana dua variabel *count* saling berkorelasi dan memerlukan estimasi secara bersama. Bivariate Poisson merupakan model yang paling banyak digunakan untuk model bivariat *count*. Model *bivariate Poisson* adalah model yang dapat digunakan dalam perhitungan data berpasangan. Model *bivariate Poisson* memiliki konteks yang luas dalam penerapannya seperti bidang pemasaran, epidemilogi, kesehatan dan ekonometrika. Beberapa contoh model bivariate Poisson yaitu banyaknya orang yang berkunjung ke rumah sakit dalam keadaan darurat dan tidak dalam keadaan darurat, banyaknya klaim asuransi dengan dan tanpa cidera tubuh (AlMuhayfith, Alzaid, & Omair, 2016).

Distribusi *bivariate Poisson* yang berkorelasi pertama kali dibahas oleh Campbell (1934) dan Aitken (1936), penelitian tersebut memberikan model yang berguna untuk menyelidiki variabel acak diskrit dimensi dua dengan korelasi positif dimana distribusi marginal keduanya bersifat Poisson, walaupun memiliki kelemahan bahwa koefisien korelasi terbatas pada *range* (Holgate, 1964).

Holgate (1964) mengusulkan distribusi *bivariate Poisson* dan kemudian diperkenakan oleh Johnson dan Kotz (1969). King (1989) menerapkan model bivariate Poisson pada jumlah veto tahunan presiden dari program kesejahteraan sosial dan program pertahanan, Jung dan Winkelman (1993) pada jumlah perubahan pekerjaan yang secara sukarela dan tidak, dan oleh Ozuna dan Gomez (1994) pada jumlah perjalanan ke tempat rekreasi yang berbeda. Penelitian mereka memodelkan ekspektasi marjinal dari Y_1 dan Y_2 sebagai fungsi log linier dari variabel penjelas. Kelemahan dari model tersebut adalah tidak membolehkan adanya overdispersi/underdispersi atau korelasi negatif, dan oleh karena itu kurang bersifat umum. Untuk kasus data count yang overdispersi, model yang berpotensi digunakan adalah model poisson campuran (mixed poisson) (AlMuhayfith, Alzaid, & Omair, 2016). Beberapa penelitian untuk kasus overdispersi yaitu Berm´udez dan karlis (2012) menerapkan finite mixture dari model regresi *bivariate Poisson* yang digunakan untuk menunjukkan bahwa data yang overdispersi memerlukan lebih banyak struktur, dan model *zero-inflated bivariate Poisson* sederhana tidak sesuai. Model tersebut diterapkan pada data klaim asuransi kendaraan bermotor dan ditunjukkan bahwa pemodelan tersebut dapat ditingkatkan dengan baik. Gurmu dan Elder (2000) mengusulkan model regresi *flexible bivariate count data* yang bersarang regresi *bivariate* negatif binomial dan metode tersebut diterapkan pada permintaan layanan kesehatan.

Penelitian yang memungkinkan adanya korelasi yang bernilai negatif. Berkhout and Plug (2004) memperkenalkan model tersebut berdasarkan distribusi poisson bersyarat yang memungkinkan adanya korelasi positif dan negatif. Model tersebut diterapkan pada perilaku wisatawan. Model Poisson alternatif untuk data count tersebut menggunakan *conditional probabilities*. Model tersebut digunakan untuk mengestimasi dua data count yang saling berkorelasi dan dimungkinkan adanya korelasi negatif dan positif. Model alternatif itu disebut sebagai CPM (conditional Poisson Model). Selanjutnya AlMuhayfith, Alzaid, & Omair (2016) mengembangkan model *Joint Bivariate Poisson* yang diadopsi dari metode reduksi trivariat pada gagasan distribusi oleh Johnson, Kotz, & Balakrishnan (1996) yaitu *joint bivariate Poisson* dengan berdasarkan teori *conditional* *probability* yaitu Model *conditional bivariate Poisson* (CBP). *Joint density* model CBP tersebut adalah hasil perkalian dari marginal dan *conditional distribution*.

Berat badan lahir rendah (BBLR) didefinisikan oleh *World Health Organization* (WHO) yaitu berat badan saat lahir kurang dari 2500 gram. BBLR menjadi masalah kesehatan masyarakat yang signifikan secara global dan berhubungan dengan berbagai konsekuensi jangka pendek maupun jangka panjang. Secara keseluruan, diperkirakan 15% sampai 20% dari seluruh kelahiran didunia mengalami berat badan lahir rendah yang mewakili lebih dari 20 juta kelahiran per tahun. BBLR bukan hanya prediktor utama kematian dan mordibilitas pranatal, tetapi penelitian terbaru menemukan bahwa berat badan lahir rendah juga meningkatkan risiko penyakit tidak menular seperti diabetes dan penyakit kardiovaskular di kemudiaan hari (World Health Organization, 2014).

BBLR termasuk faktor utama dalam peningkatan mortalitas, morbidilitas, disabilitas neonatus serta memberikan dampak jangka panjang terhadap kehidupan dimasa kedepanya. Kelahiran BBLR terus meningkat pertahun dinegara maju seperti Amerika Serikat sedangkan di Indonesia kelahiran BBLR justru di ikuti oleh kematian bayi (Puspitasari, 2011). Berdasarkan data Riskesdas tahun 2013 menunjukan bahwa kejadian BBLR di indonesia memiliki prevalendi sebesar 10,2% dan sebagian besar bayi berat badan lahir rendah (BBLR) yang meninggal pada massa neonatus adalah bayi dengan berat lahir kurang dari 2500 gram (Departemen Kesehatan RI, 2013).

Menurut UNICEF Indonesia (2012), kematian anak sebagian besar terjadi pada masa baru lahir (neonatal) dan bulan pertama kehidupan. Berdasarkan hasil Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia (SDKI) tahun 2012, angka kematian Neoatus (AKN) pada tahun 2012 sebesar 19 per 1000 kelahiran hidup. Angka ini sama dengan AKN berdasarkan SDKI tahun 2007 dan hanya menurunkan 1 poin dibandingkan SDKI tahun 2002-2003 yaitu 20 per1.000 kelahiran hidup. Kematian neonatus terjadi karena neonatus komplikasi. Neonatal dengan komplikasi adalah neonatal dengan penyakit atau kelainan yang dapat menyebabkan kecacatan dan atau kematian. Salah satu komplikasi neonatal adalah BBLR. Menurut Riskesdas tahun 2007 komplikasi yang menjadi penyebab kematian terbanyak salah satunya yaitu berat badan Lahir rendah. Capaian penangganan neonatal dengan komplikasi mengalami penurunan dari tahun 2014 yang sebesar 59,68% menjadi 51,37% pada tahun 2015.

Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia 2007 (SDKI 2007) menunjukkan bahwa baik angka kematian balita maupun angka kematian bayi baru lahir telah meningkat pada kuintil kekayaan tertinggi, tetapi alasanya tidak jelas. Meskipun rumah tangga pedesaan masih memiliki angka kematian balita sepertiga lebih tinggi dari pada angka kematian balita pada rumah tangga perkotaan, tetapi sebuah studi menunjukan di pedesaan penurunan lebih cepat daripada angka kematian diperkotaan, dan bahwa kematian di perkotaan bahkan telah mengalami peningkatan pada masa neonatal. Tren ini tampaknya terkait dengan urbanisai yang cepat, sehingga menyebabkan kepadatan penduduk yang berlebihan, kondisi sanitasi yang buruk pada penduduk miskin perkotaan. Kualitas pelayanan yang kurang optimal didaerah-daerah miskin perkotaan juga merupakan faktor penyebab.

Dua respon tersebut yaitu kejadian jumlah bayi berat badan lahir rendah dan jumlah kematian bayi adalah suatu *conditional* dianalisis secara bivariate dengan menggunan regresi *conditionl bivariate Poisson*. Untuk analisis regresi *conditionl bivariate Poisson* yang memiliki performa sama dengan *joint bivariate Poisson* (AlMuhayfith, Alzaid, & Omair, 2016).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana estimasi parameter untuk model *Conditional Bivatiate Poisson Regression*?
2. Bagaimana hasil pemodelan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jumlah Bayi Berat Badan Lahir Rendah (BBLR) dan Jumlah Kematin Bayi menggunakan model *Conditional Bivatiate Poisson Regression*?

1.3 Tujuan Penelitian

Dari permasalahan di atas maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menganalisis dan mengevaluasi estimasi parameter *Conditional Bivatiate Poisson Regression*.

2. Mendapatkan faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jumlah Bayi Berat Badan Lahir Rendah (BBLR) dan Jumlah Kematin Bayi menggunakan model *Conditional Bivatiate Poisson Regression*.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah memungkinkan menemukan pembaharuan dalam metode tersebut atau memungkinkan menemukan cara menyelesaikan atau mengatasi masalah dalam metode tersebut.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah data yang digunakan merupakan data jumlah kasus bayi dengan Berat Badan Lahir Rendah (BBLR) dan jumlah kasus kematian bayi di Kota Surabaya tahun 2015 dengan unit penelitian yaitu tiap kecamatan. Dalam penelitian ini mengabaikan adanya overdispersi dalam data.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Poisson Univariat

Distribusi Poisson adalah suatu distribusi probabilitas diskrit untuk menghitung kejadian yang terjdi secara acak dalam interval waktu atau ruang tertentu.

Suatu variabel acak ***Y*** dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter λ jika

$$P(Y=y)=f(y)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}, \qquad y=0,1,2,\dots, \quad \lambda>0 \tag{2.1}$$

Dimana y adalah nilai dari variabel acak ***Y***, dengan nilai y = 0,1,2, ... dan dimana λ merupakan parameter distribusi. Mean dan varians dari distribusi Poisson sama yaitu λ. Parameter λ didefinisikan sebagai berikut:

$$\lambda = e^{\mathbf{x}'\boldsymbol{\beta}} \tag{2.2}$$

Dimana parameter β adalah vektor yang menggukur pengaruh dari x terhadap λ. Eksponen memastikan bahwa nilai λ akan selalu bernilai positif. Berikut merupakan fungsi ln-likelihood,

$$\ln L(\boldsymbol{\beta})=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\exp(-\lambda_i)\lambda_i^{y_i}}{y_i!}\right)$$

$$\ln L(\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{\exp(-\lambda_i)\lambda_i^{y_i}}{y_i!}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(e^{-\lambda_i}\right)+\ln\left(\lambda_i^{y_i}\right)-\ln\left(y_i!\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(-\lambda+y_i\ln\left(\lambda_i\right)-\ln\left(y_i!\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}}+y_i\ln\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}}\right)-\ln\left(y_i!\right)\right)$$

$$\ln L(\boldsymbol{\beta})=-\sum_{i=1}^{n}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}}+\sum_{i}^{n}y_i\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln y_i! \tag{2.3}$$

dimana *i =1, 2, ... , n.* Model ini memiliki kelebihan yaitu estimator Poisson maksimum Likelihoodnya *robust* (kuat) terhadap *misspecification,* dan dapat mempertahankan sifat efisiensi tertentu bahkan ketika distribusinya bukan Poisson (Berkhout & Plug, 2004). Kelemahan dari distribusi Poisson adalah hanya memiliki satu parameter yang menentukan semua momen. Oleh karena itu, rasio antar varians dan means sama dengan satu atau bisa disebut sebagai *equidispersion*. Hal tersebut merupakan suatu yang istimewa yang jarang ditemukan dalam data count yang sedang diteliti. Pada kenyataanya data yang tersedia mengandung *underdispersion* (mean lebih besar dari pada varians) atau *overdispersi* (varians lebih besar dari pada mean). Dalam kasus distribusi Poisson, terdapat dua unsur yang menyebabkan adanya missdispersi. Yang pertama adalah pernyataan yang salah yang berkaitan dengan asumsi Poisson yang mendasari bahwa kejadian berturut-turut bersifat independen. Jika tidak, data count akan mengalami underdispersi yang mengakibatkan distribusi Poisson bukanlah alat statistik untuk mendeskripsikan data count dengan benar. Yang kedua adalah heterogenitas yang tidak teramati, dalam hal ini varians lebih besar dari pada mean yang menunjukan overdispersi. (Cameron dan Trivedi, 1986).

2.2 Distribusi *Bivariate Poisson*

Pemodelan multivariat nampaknya lebih tepat jika terjadi kejadian diskrit berbeda yang diamati secara bersamaan. Permasalahannya adalah bahwa distribusi Poisson bivariat yang memungkinkan untuk dependensi tidak tersedia. Beberapa distribusi Poisson telah diusulkan dalam teori statistik, seperti (Kocherlakota & Kocherlakota, Bivariate Discrete Distribution, 1992) tetapi statistik yang diterapkan berfokus pada metode reduksi trivariat yang dijelaskan oleh (Johnson dan Kotz, 1969). Diberikan 3 variabel acak $\mathrm{X_1, X_2, dan\, X_3}$ mengikuti tiga distribusi Poisson yang independen dengan parameter positif $\lambda_1,\ \lambda_2, \text{dan}\, \lambda_3$. Dengan tiga variabel acak tersebut dibangun dua variabel acak baru $\mathrm{Y_1\, dan\, Y_2}$ yaitu

$$Y_1 = X_1 + X_3 \,\text{dan}\; Y_2 = X_2 + X_3$$

dimana $X_1, X_2, \text{dan } X_3$ adalah variabel acak yang berdistribusi Poisson yang saling independen dengan mean secara berurutan $\lambda_1,\ \lambda_2,$ dan λ_3. $Y_1 \text{ dan } Y_2$ secara bersama-sama berdistribusi bivariat Poisson. Fungsi probabilitas bersama diberikan sebagai berikut

$$f_{JBP}\left(y_1, y_2; \lambda_1,\ \ \lambda_2,\ \lambda_3\right) = e^{-\left(\lambda_1 + \ \lambda_2 + \ \lambda_3\right)} \sum_{r=0}^{\min\left(y_1, y_2\right)} \frac{\lambda_1^{\ y_1 - r}\ \lambda_2^{\ y_2 - r}\ \lambda_3^{\ r}}{\left(y_1 - r\right)!\left(y_2 - r\right)! r!}. \qquad (2.4)$$

Nilai ekspektasi dan varians dari variabel acak $Y_1 \text{ dan } Y_2$ masing-masing sebagai berikut

$$E\left(Y_1\right) = Var\left(Y_1\right) = \lambda_1 + \lambda_3$$

$$E\left(Y_2\right) = Var\left(Y_2\right) = \lambda_2 + \lambda_3$$

Setelah mengetahui nilai ekspektasi dari masing-masing variabel acak $Y_1 \text{ dan } Y_2$ maka nilai $E\left(Y_1, Y_2\right)$ adalah

$$E\left(Y_1, Y_2\right) = \left(\lambda_1 + \lambda_3\right)\left(\lambda_2 + \lambda_3\right) + \lambda_3$$

Kovarian antara Y_1 dan Y_2 adalah

$$Cov\left(Y_1, Y_2\right) = Cov\left(X_1 + X_3,\ \ X_2 + X_3\right) = Var\left(X_3\right) = \lambda_3 \qquad (2.5)$$

dengan demikian korelasi antara Y_1 dan Y_2 sama

$$corr\left(Y_1, Y_2\right) = \frac{\lambda_3}{\sqrt{\left(\lambda_1 + \lambda_3\right)\left(\lambda_2 + \lambda_3\right)}} \qquad (2.6)$$

oleh sebab itu, λ_3 merupakan suatu ukuran dari hubungan antara dua variabel acak. Jika $\lambda_3 = 0$ maka dua variabel adalah independen, dan distribusi *bivariate Poisson* mereduksikan hasil dari dua distribusi Poisson yang independen (AlMuhayfith et al, 2015). Dari persamaan (2.6) terlihat bahwa korelasi tersebut lebih dari nol, karena keduanya λ_3 dan penyebutnya lebih dari nol. Jika X_3 mengikuti distribusi Poisson, parameter λ_3 digambarkan sangat positif. Parameter $\lambda_1,\ \lambda_2,$ dan λ_3 didefinisikan sebagai

$$\log \lambda_{i1} = x_i' \beta_1 = \sum_{j=1}^{p} x_{ij} \beta_{j1}, \log \lambda_{i2} = x_i' \beta_2 = \sum_{j=1}^{p} x_{ij} \beta_{j2};\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.7)$$

Dari persamaan (2.6) dapat dilihat bahwa korelasi antara Y_1 dan Y_2 mungkin bervariasi antar individu. Berikut adalah log-likelihood distribusi *bivariate Poisson.*

$$\log L = -\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{i1} + \lambda_{i2} - \lambda_3\right] + \sum_{i=1}^{n}\log\varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right), \tag{2.8}$$

dimana $\varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right)$ sama dengan

$$\varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right) = \sum_{r=0}^{\min\left(y_1, y_2\right)} \frac{\lambda_1^{y_1-r}\,\lambda_2^{y_2-r}\,\lambda_3^{r}}{\left(y_1-r\right)!\left(y_2-r\right)!\,r!}, \tag{2.9}$$

Untuk lebih lengkap dan detail bisa dilihat Jung & Winkelmann (1993) dan King (1989). Kelemahan utama dari model *bivariate Poisson* adalah besarnya korelasi terbatas yaitu tidak mengijinkan adanya korelasi negatif dan nol. Kedua batasan tersebut membuat model kurang dapat dipakai. Ternyata solusi yang diusulkan sehubungan dengan heterogenitas yang tidak teramati menyebabkan masalah komputasi pemrograman yang sulit pada kasus *bivariate*.

2.3 Regresi *Bivariate Poisson*

Regresi *bivariate Poisson* merupakan metode dalam statistika yang digunakan untuk memodelkan sepasang data count yang memiliki suatu korelasi dengan beberapa variabel prediktor (Karlis dan Ntzoufras, 2005). AlMuhayfith, Alzaid, & Omair (2016) mengasumsikan bahwa parameter model bergantung pada variabel penjelas. Pada model regresi *bivariate Poisson* bersama (JBPM), $\lambda_k > 0$ dengan $k = 1,2$ dan 3 dapat dikaitkan dengan berbagai variabel penjelas menggunakan fungsi link eksponensial klasik. Oleh sebab itu, model regresi bivariate Poisson bersama dapat dibentuk sebagai berikut:

$$\left(Y_{1i}, Y_{2i}\right) \sim \boldsymbol{JBP}\left(\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i}\right) \tag{2.10}$$

$$\log\lambda_{ki} = \mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_k, \qquad k = 1,2,3$$

dimana $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah jumlah dari observasi, x_i merupakan vektor variabel penjelas dari *l* panjang untuk observasi ke-*i* untuk parameter ke-*k* dan $\boldsymbol{\beta}_k$ adalah vektor koefisien regresi. Dalam masalah variabel penjelas, ada dua aspek yang harus ditekankan. Yang pertama, kovariat yang berbeda dapat digunakan untuk memodelkan setiap parameter (atau dengan kovariat yang sama), dan yang kedua, kovariat dapat dikenalkan pada model λ_3 untuk lebih lanjut mempelajari pengaruh kovariat pada setiap pasangan variabel (atau untuk lebih memudahkan interpretasi, tidak ada kovariat yang digunakan untuk model λ_3).

2.3.1 Estimasi Parameter Regresi *Bivariate Poisson*

Metode *Maximum likelihood* digunakan untuk mengestimasi parameter regresi *bivariate Poisson* dengan λ_3 suatu konstanta. Mengingat observasi (y_{1i}, y_{2i}) independen, dengan vektor ke-*i* yang memiliki distribusi Poisson bivariat

$$f\left(y_{1i}, y_{2i}\right) = e^{-\left(\lambda_{1i} + \lambda_{2i} + \lambda_3\right)} \varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right)$$

dimana

$$\varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right) = \sum_{r=0}^{\min\left(y_{1i}, y_{2i}\right)} \frac{\lambda_{1i}^{\left(y_{1i}-r\right)} \lambda_{2i}^{\left(y_{2i}-r\right)} \lambda_3^{r}}{\left(y_{1i}-r\right)!\left(y_{2i}-r\right)!r!}.$$

Likelihood dari $\left(\beta_{11}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{p2}, \lambda_3\right)$ adalah sebagai berikut

$$\prod_{i=1}^{n} \left\{ e^{-\left(\lambda_{1i} + \lambda_{2i} + \lambda_3\right)} \varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right) \right\}$$

Untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$. Persamaan penurunan fungsi Log-Likelihood sebagai berikut

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_{1j}} = \sum_i \lambda_{1i} x_{ji} \left[P_{10} - 1\right] = 0, \; j = 1, 2, \ldots, p$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_{2j}} = \sum_i \lambda_{2i} x_{ji} \left[P_{01} - 1\right] = 0, \; j = 1, 2, \ldots, p$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda_3} = n + \sum_i \left[P_{11} - P_{01} - P_{10}\right] = 0$$

dimana

$$P_{qs} = \frac{\varphi\left(y_{1i} - q, y_{2i} - s\right)}{\varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right)}$$

Persamaan diatas diselesaikan dengan menggunakan iterasi *Newton-Raphson*. Untuk itu membutuhkan matriks derivatif kedua. Dengan diberikan matriks $(2p+1) \times (2p+1)$ maka persamaan derivatif kedua sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_{1l} \partial \beta_{1j}} = \sum_i x_{il} x_{ij} \lambda_{1i} \left\{ P_{10} - 1 + \lambda_{1i} \left(P_{20} - P_{10}^2 \right) \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_{1l} \partial \beta_{2j}} = \sum_i x_{il} x_{ij} \lambda_{1i} \lambda_{2i} \left\{ P_{11} - P_{10} P_{01} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_{2l} \partial \beta_{2j}} = \sum_i x_{il} x_{ij} \lambda_{2i} \left\{ P_{01} - 1 + \lambda_{2i} \left(P_{02} - P_{01}^2 \right) \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \lambda_3^2} = \sum_i \left\{ P_{22} + P_{20} + P_{02} + 2\left(P_{11} - P_{21} - P_{12} \right) - \left(P_{10} + P_{01} + P_{11} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_{1j} \partial \lambda_3} = \sum_i x_{ij} \lambda_{1i} \left\{ P_{21} - P_{02} - P_{11} + P_{10} \left(P_{10} + P_{01} + P_{11} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \beta_{2l} \partial \lambda_3} = \sum_i x_{il} \lambda_{2i} \left\{ P_{12} - P_{02} - P_{11} + P_{01} \left(P_{01} + P_{10} + P_{11} \right) \right\}$$

$$l, j = 1, 2, \ldots, l$$

(Kocherlakota & kocherlakota, 2001).

2.3.2 Pengujian Parameter Regresi *Bivariate Poisson*

Sebelum menghitung statistik uji terlebih dahulu menentukan dua buah fungsi likelihood yang berhubungan dengan model regresi yang diperoleh. Fungsi–fungsi tersebut adalah $L(\hat{\Omega})$ dan $L(\hat{\omega})$, dimana $L(\hat{\Omega})$ merupakan nilai *maximum likelihood* untuk model yang melibatkan variabel prediktor. Sedangkan $L(\hat{\omega})$ merupakan merupakan nilai *maximum likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menentukan statistik uji dalam pengujian parameter adalah *maximum likelihood ratio test* (MLRT).

$$D = -2 \ln \left[L(\hat{\omega}) / L(\hat{\Omega}) \right] = -2 \left[\ln L(\hat{\omega}) - \ln L(\hat{\Omega}) \right]$$

Hipotesis yang digunakan adalah:

$H_0 : \beta_{k1} = \beta_{k2} = \ldots = \beta_{kl} = 0$

$H_1 :$ minimal ada satu $\beta_{kj} \neq 0$; $j = 1, 2, \ldots, l; k = 1, 2$

Himpunan parameter dibawah H_0 adalah $\omega = \{\beta_{10}, \beta_{20}\}$, dengan fungsi *likelihood* sebagai berikut:

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_i; \lambda_3; \beta_{10}; \beta_{20}\right)$$

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\left(e^{\beta_{10}} + e^{\beta_{20}} + \lambda_3\right)} \varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right) \right)$$

dimana

$$\varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right) = \sum_{r=0}^{\min\left(y_{1i}, y_{2i}\right)} \frac{\left(e^{\beta_{10}} - \lambda_3\right)^{\left(y_{1i}-r\right)} \left(e^{\beta_{20}} - \lambda_3\right)^{\left(y_{2i}-r\right)} \lambda_3^{\,r}}{\left(y_{1i} - r\right)! \left(y_{2i} - r\right)! r!}$$

$$L(\hat{\omega}) = \max L(\omega)$$

$$L(\hat{\omega}) = \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\left(e^{\hat{\beta}_{10}} + e^{\hat{\beta}_{20}} + \hat{\lambda}_3\right)} \varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right) \right)$$

dimana

$$\varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right) = \sum_{r=0}^{\min\left(y_{1i}, y_{2i}\right)} \frac{\left(e^{\hat{\beta}_{10}} - \hat{\lambda}_3\right)^{\left(y_{1i}-r\right)} \left(e^{\hat{\beta}_{20}} - \hat{\lambda}_3\right)^{\left(y_{2i}-r\right)} \hat{\lambda}_3^{\,r}}{\left(y_{1i} - r\right)! \left(y_{2i} - r\right)! r!}$$

Himpunan parameter dibawah populasi adalah $\Omega = \{\lambda_3, \beta_{k0}, \beta_{k1}, \ldots, \beta_{kr}; k = 1, 2\}$ sehingga fungsi *likelihood*nya sebagai berikut:

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_i; \lambda_3; \boldsymbol{\beta}_1; \boldsymbol{\beta}_2\right)$$

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\left(e^{\mathbf{w}_i^T \boldsymbol{\beta}_1} + e^{\mathbf{w}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} + \lambda_3\right)} \varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right) \right)$$

dimana

$$\varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right) = \sum_{r=0}^{\min\left(y_{1i}, y_{2i}\right)} \frac{\left(e^{x_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \lambda_3\right)^{\left(y_{1i}-r\right)} \left(e^{x_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \lambda_3\right)^{\left(y_{2i}-r\right)} \lambda_3^{\,r}}{\left(y_{1i} - r\right)! \left(y_{2i} - r\right)! r!}$$

$$L\left(\hat{\Omega}\right) = \max L(\Omega)$$

$$L\left(\hat{\Omega}\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(e^{-\left(e^{x_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_1} + e^{x_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_2} + \hat{\lambda}_3\right)} \varphi\left(y_{1i}, y_{2i}\right) \right)$$

dimana

$$\varphi(y_{1i}, y_{2i}) = \sum_{r=0}^{\min(y_{1i}, y_{2i})} \frac{\left(e^{x_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_1} - \hat{\lambda}_3\right)^{(y_{1i}-r)} \left(e^{x_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_2} - \hat{\lambda}_3\right)^{(y_{2i}-r)} \hat{\lambda}_3^{\,r}}{(y_{1i}-r)!(y_{2i}-r)!r!}$$

dengan rumus

$$D = -2\ln\left[L(\hat{\omega})/L(\hat{\Omega})\right] = -2\left[\ln L(\hat{\omega}) - \ln L(\hat{\Omega})\right]$$

$$= 2\left[\left(-\sum_{i=1}^{n} e^{x_i^T \boldsymbol{\beta}_1} - \sum_{i=1}^{n} e^{x_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - \sum_{i=1}^{n} \ln\varphi(y_{1i}, y_{2i})\right) - \left(-\sum_{i=1}^{n} e^{\beta_{10}} - \sum_{i=1}^{n} e^{\beta_{20}} - \sum_{i=1}^{n} \ln\varphi(y_{1i}, y_{2i})\right)\right]$$

D merupakan devians model *bivariate poisson regression* dengan menggunakan pendekatan distribusi *chi-square* dengan derajat bebas v dan tolak H_0 jika $D > \chi^2_{(\alpha,v)}$ (McCullagh dan Nelder, 1989). Pengujian hipotesis secara parsial sebagai berikut :

$H_0 : \beta_{kj} = 0$

$H_1 : \beta_{kj} \neq 0 \;\; ; j = 1, 2, \ldots, l; k = 1, 2$

Statistik uji :

$$z = \frac{\hat{\beta}_{kj}}{se\left(\hat{\beta}_{kj}\right)} \tag{2.11}$$

Keputusan : daerah penolakan H_0 adalah $|z\text{ hitung}|$ lebih besar dari $z_{\alpha/2}$. Nilai $se\left(\hat{\beta}_{kj}\right)$ diperoleh dari diagonal ke (k+1) dari $\text{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$.

2.4 Regresi *Conditional Bivariate Poisson*

Misalkan Y_1 dan Y_2 dua variabel *count* acak dependen. Berdasarkan teori probabilitas bersyarat, kepadatan bersama (2.4) dapat ditulis sebagai perkalian distribusi marginal dan bersyarat (AlMuhayfith, Alzaid, & Omair, 2016).

$$f(y_1, y_2) = f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1)\, f_{Y_1}(y_1), \tag{2.12}$$

Pada umumnya, setiap dekomposisi dari $f(y_1, y_2)$ akan meghasilkan distribusi marginal dan bersyarat yang berbeda. Pada persamaan (2.12), Y_1 merupakan distribusi Poisson dengan parameter $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_3$, dan distribusi bersyarat dari Y_2 diberikan oleh Y_1 dinyatakan sebagai berikut

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1) = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \binom{y_1}{r} p^r{}_1 (1-p_1)^{y_1-r} \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{y_2-r}}{(y_2-r)!}, \quad (2.13)$$

dimana

$$p_1 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_1}.$$

Ekspresi persamaan (2.13) merupakan konvolusi dari variabel Poisson dengan parameter λ_2 dan binomial dengan parameter (y_1, p_1) Kocherlakota & Kocherlakota, Bivariate Discrete Distribution (1992) dalam (AlMuhayfith, Alzaid, & Omair, 2016). Mean dan varians bersyarat diberikan oleh:

$$E(Y_2 \mid Y_1) = \lambda_2 + p_1 y_1,$$

$$Var(Y_2 \mid Y_1) = \lambda_2 + p_1(1-p_1) y_1.$$

Oleh karena itu, joint p.m.f dari model *conditional bivariate poisson* diberikan dalam (2.12) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= f_{Y_2|Y_1}(y_2|y_1)\, f_{Y_1}(y_1) \\ &= \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \binom{y_1}{r} p^r{}_1 (1-p_1)^{y_1-r} \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{y_2-r}}{(y_2-r)!} * \frac{e^{-\mu_1}\mu_1^{y_1}}{y_1!} \\ &= f_{CM}(y_1, y_2; p_1, \lambda_2, \mu_1) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Untuk model ini $Cov(y_1, y_2) = p_1\mu_1$. Karena kovarian bernilai nol jika dan hanya jika $p_1 = 0$ (catatan bahwa $\mu_1 = 0$ sesuai untuk kasus univariat). Catatan bahwa untuk p_1 memiliki peran yang sama seperti λ_3 dalam Joint Bivariate Poisson (JBP) (AlMuhayfith, Alzaid, & Omair, 2016).

2.5 Multikolinieritas

Analisis regresi yang memuat banyak variabel prediktor, sering menimbulkan permasalahan karena adanya hubungan antara dua atau lebih variabel prediktornya. Variabel prediktor yang berkorelasi disebut *multikolinearitas* (Gujarati, 2003 dan Widarjono, 2007). Untuk mendeteksi adanya multikolinieritas dengan melihat nilai *variance inflation factor* (VIF). Secara umum dituliskan dalam persamaan sebagai berikut

$$VIF = \frac{1}{1-R_j^2} \quad (2.15)$$

dimana R_j^2 merupakan koefisien determinasi untuk regresi prediktor ke-j terhadap prediktor-prediktor lainnya. Nilai R_j^2 akan sama dengan nol dan VIF bernilai satu jika variabel prediktor tidak saling linier pada model regresi. Nilai VIF yang lebih dari 10 mengidentifikasikan adanya multikolinieritas diatar variabel-variabel prediktor (Hocking, 1996).

2.6 Koefisien Korelasi

Koefisien korelasi merupakan ukuran hubungan linier antara dua variabel. Bila diberikan dua variabel, Y_1 dan Y_2 maka korelasi antara variabel Y_1 dan Y_2 dapat dinyatakan

$$r_{y_1 y_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{1i}-\bar{y}_1\right)\left(y_{2i}-\bar{y}_2\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{1i}-\bar{y}_1\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{2i}-\bar{y}_2\right)^2}} \qquad (2.16)$$

Besaran koefisien korelasi berkisar antara -1 dan 1. Semakin mendekati $|1|$ maka hubungan antara kedua variabel semakin kuat. Tanda positif menunjukkan hubungan yang berbanding lurus, sedangkan tanda negatif menunjukkan hubungan yang berbanding terbalik. Semakin mendekati nol, menunjukakan hubungan linier kedua variabel yang semakain kecil.

Pengujian koefisien korelasi antara variabel Y_1 dan Y_2 dilakukan dengan hipotesis sebagai berikut:

$\mathrm{H}_0 : \rho = 0$ (tidak terdapat hubungan linier antara Y_1 dan Y_2)

$H_1 : \rho \neq 0$ (terdapat hubungan linier antara Y_1 dan Y_2)

Statistik uji yang digunakan adalah

$$t = \frac{r_{y_1 y_2}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2_{y_1 y_2}}}, \qquad (2.17)$$

Keputusan tolak H_0 jika $|t_{hit}| > t_{\left(n-2,\frac{\alpha}{2}\right)}$.

2.7 Pengujian Distribusi variabel Respon

Pengujian distribusi *bivariate Poisson* dilakukan untuk mengetahui variabel respon (Y_1 dan Y_2) mengikuti distribusi *bivariate Poisson* atau tidak. Loukas dan

Kemp’s (1986) dalam (Best, 1999) melakukan pengujian distribusi *bivariate Poisson* dengan pendekatan *index of dispersion test* (I_B). Hipotesis yang digunakan adalah

$H_0 : F(x) = F_0(x)$ untuk Y_1 dan Y_2 (Y_1 dan Y_2 mengikuti distribusi *bivariate Poisson*)

$H_1 : F(x) \neq F_0(x)$ untuk Y_1 dan Y_2 (Y_1 dan Y_2 tidak mengikuti distribusi *bivariate Poisson*)

Statistik uji yang digunakan adalah

$$I_B = \frac{n\left(\bar{Y}_2 S_{Y_1}^2 - 2m_{11}^2 + \bar{Y}_1 S_{Y_2}^2\right)}{\left(\bar{Y}_1 \bar{Y}_2 - m_{11}^2\right)} \tag{2.18}$$

dengan

n = jumlah data pada variabel respon (Y_1 dan Y_2)

$\bar{Y}_1$ = nilai rata-rata variabel respon (Y_1)

$\bar{Y}_2$ = nilai rata-rata variabel respon (Y_2)

$$S_{Y_1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{1i} - \bar{Y}_1\right)^2}{n} \text{ dan } S_{Y_2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{2i} - \bar{Y}_2\right)^2}{n}$$

$$m_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{1i} - \bar{Y}_1\right)\left(Y_{2i} - \bar{Y}_2\right)}{n}$$

daerah penolakan H_0 adalah $I_B > \chi^2_{(\alpha;2n-3)}$ (Best, 1999)

2.8 AIC (Akaike Information Criterion)

Ketika beberapa model tersedia, seseorang dapat membandingkan kinerja model tersebut berdasarkan beberapa ukuran *likelihood* yang telah dianjurkan dalam literatur statistik. salah satu metode kebaikan model yang paling sering digunakan adalah *Akaike Information Criterion* (AIC).

Besarnya nilai *AIC* sejalan dengan nilai devians dari model. Semakin kecil nilai devians maka akan semakin kecil pula tingkat kesalahan yang dihasilkan model sehingga model yang diperoleh menjadi semakin tepat. Oleh karena itu, model terbaik adalah model yang mempunyai nilai *AIC* terkecil. Penghitungan nilai AIC untuk model regresi dengan multivariat respon sebagai berikut (Johnson & Wichern, 2007)

$$AIC = n \ln\left(\left|\hat{\Sigma}_d\right|\right) - 2mk \tag{2.19}$$

n = banyaknya pengamatan

$$\hat{\Sigma}_d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i$$

m = banyaknya variabel respon

k = banyaknya variabel prediktor

2.9 Berat badan Bayi Lahir Rendah (BBLR)

Berat badan lahir rendah didefinisikan oleh *World Health Organization* (WHO) sebagai berat lahir kurang dari 2500 gram tanpa memandang masa gestasi. Berat lahir adalah berat bayi yang ditimbang dalam 1 jam setelah lahir. Masa gestasi (umur kehamilan) adalah masa sejak konsepsi sampai dengan saat kelahiran, dihitung darai hari pertama haid terakhir. BBLR merupakan prediktor tertinggi angka kematian bayi, terutama dalam satu bulan pertama kehidupan. Berdsarkan studi epidemiologi, bayi dengan berat badan lahir rendah memiliki risiko kematian 20 kali lipat lebih besar di bandingkan dengan bayi yang lahir dengan berat normal. BBLR lebih banyak terjadi di negara berkembang jika dibandingkan dengan negara-negara maju (WHO, 2014).

Berat Bayi Lahir rendah (BBLR) adalah bayi baru lahir yang berat badannya saat lahir kurang dari 2500 gram. BBLR dibedakan dalam dua kategori yaitu berat bayi lahir rendah karena premature (masa gestasi kurang dari 37 minggu) dan berat bayi lahir rendah karena *Intra Uterine Growth Restriction* (IUGR) dalam bahasa indonesia disebut Pertumbuhan Janin Terlambat (PJT) (Depkes RI, 2003). Kedua penyebab tersebut dipengaruhi oleh faktor risiko seperti faktor ibu, plasenta, janin dan lingkungan. Faktor risiko tersebut menyebabkan berkurangnya pemenuhan nutrisi pada janin selama masa gestasi (Prawirohardjo, 2008).

Masalah BBLR terutama pada kelahiran prematur terjadi karena ketidak matangan sistem organ pada bayi tersebut. Bayi berat lahir rendah mempunyai kecenderungan mudah terserang komplikasi dan peningkatan infeksi. (Profil Kesehatan Indonesia, 2014). Berat bayi rendah merupakan salah satu faktor dalam kematian neonatal dan sebagai determinan cukup bermakna bagi kematian bayi dan balita. Berat badan waktu dilahirkan merupakan karakteristik yang dapat digunakan untuk memprediksi kelangsungan hidup bayi. Angka kematian yang tinggi terutama yang sering dijumpai disebabkan oleh komplikasi neonatal. Neonatal dengan komplikasi adalah neonatal dengan penyakit dan atau kelainan yang dapat menyebabkan kecacatan dan atau kematian, seperti asfiksia, ikterus, hiportemia, tetanus neonatorum, infeksi/sepsis, trauma lahir, BBLR, sindrom gangguan pernafasan, dan kelainan kongenital. Komplikasi yang menjadi penyebab kematian terbanyak yaitu asfiksia, bayi berat lahir rendah dan infeksi (Riskesdas, 2007).

2.10 Kematian Bayi

Kematian bayi adalah kematian yang terjadi antara saat setelah bayi lahir sampai bayi belum berusia tepat 1 tahun. Angka kematian bayi (AKB) dapat didefinisikan sebagai banyaknya bayi yang meninggal sebelum mencapai usia 1 tahun yang dinyatakan dalam 1000 kelahiran hidup pada tahu yang sama. Banyak faktor penyebab kematian bayi. Secara garis besar, berdasarkan sisi penyebabnya kematian bayi dibagi menjadi dua macam yaitu endogen dan eksogen. Kematian bayi endogen (kematian neonatal) adalah kematian bayi yang terjadi pada bulan pertama setelah dilahirkan dan umumnya disebabkab oleh faktor-faktor yang dibawa sejak lahir, yang diperoleh dari orang tunya pada saat konsepsi atau didapat selama kehamilan. Kematian bayi eksogen atau kematian post neonatal adalah kematian bayi yang terjadi setelah usia satu bulan sampai menjelang usia satu tahun yang disebabkan faktor-faktor yang bertalian dengan pengaruh lingkungan luar (Profil Dinkes Surabaya, 2015).

2.11 Faktor-Faktor yang Diduga Mempengaruhi Berat Badan Bayi Lahir Rendah (BBLR) dan Kematian Bayi

Faktor-faktor yang mempengaruhi BBLR dan kematian bayi sebagai berikut:.

1. Determinan kontekstual

a. Tingkat pendidikan ibu.

Tingkat pendidikan ibu dapat mempengaruhi kelangsungan hidup anak. Pendidikan secara tidak langsung yaitu peningkatan status sosial dan kedudukan wanita dalam keluarga dan pengambilan kesimpulan serta latar belakang pendidikan ibu juga mempengaruhi sikapnya dalam memilih pelayanan kesehatan dan pola konsumsi makan yang berhubungan juga dengan peningkatan berat badan ibu semasa hamil yang mempengaruhi kondisi perinatal (Sulistiyowati, 2002).

b. Status ekonomi.

Tingkat ekonomi mempunyai hubungan yang signifikan dengan dengan kematian bayi pada bulan pertama. Menurut SDKI 2007 menyatakan bahwa ada hubungan terbalik antara status kekayaan rumah tangga dan tingkat kematian anak, anak yang tinggal didalam rumah tangga yang lebih kaya mempunyai mortalitas yang lebih rendah dari pada anak yang tinggal dirumah tangga yang miskin.

2. Determinan Antara

a. Ibu hamil mendapatkan tablet Fe3

Salah satu komponen pelayanan kesehatan ibu hamil adalah pemberian zt besi sebanyak 90 tablet (Fe3). Zat besi merupakan mikroelemen yang esensial bagi tubuh. Zat ini terutama diperlukan dalam hemopoboesis (pembentukan darah yatu sintesis hemoglobin. Zat besi adalah mineral yang dibutuhkan untuk membentuk sel darah merah (hemoglobin). Selain itu mineral juga berperan sebgai komponen untuk membentuk mioglobin, kolagen serta enzim. Zat besi juga berfungsi dalam sistem pertahanan tubuh. Pada proses haemodilusi yang terjadi pada masa hamil dan meningkatnya kebutuhan ibu dan janin, serta kurangnya asupan zat besi lewat makanan mengakibatkan kadar Hb ibu hamil menurun. Untuk mencegah terjadinya hal tersebut maka kebutuhan ibu dan janin akan tablet besi harus terpenuhi.

Kurangnya asupan zat besi pada kehamilan tidak hanya berdampak pada ibu tetapi juga berdampak buruk pada kesejahteraan janin. Asupan zat besi yang diberikan oleh ibu hamil kepada janinnya melalui plasenta akan digunakan janin untuk kebutuhan tumbuh kembangnya, termasuk untuk perkembangan otaknya, sekaligus menyimpannya dalam hati sebagai cadangan hingga bayi berusia 6 bulan. Terdapat penelitian yang menyatakan bahwa pemberian tablet besi sebelum hamil dapat meningkatkan berat badan lahir bayi.

a. Kunjungan Ibu Hamil K4

Capaian pelayanan ksehatan ibu hamil dapat dinilai dengan indiktor salah satunya cakupan K4. Cakupan K4 adalah jumlah ibu hamil yang telah memperoleh pelayanan antenatal sesuai standar paling sedikit empat kali sesuai jadwal yang dianjurkan dibandingkan jumlah sasaran ibu hamil di satu wilayah kerja pada kurun waktu satu tahun. Pelayanan yang mencakup minimal : (1) Timbang badan dan ukur tinggi badan, (2) Ukur tekanan darah, (3) Nilai status gizi (ukur lingan lengan atas), (4) (ukur) tinggi fundus uteri, (5) Tentukan presentasi janin & denyut jantung janin(DJJ), (6) Skrining status imunisasi tetanus dan pemberian Tetanus Toksoid, (7) Pemberian tablet besi (90 tablet selama kehamilan), (8) Test laboratorium sederhana (Hb, Protein Urine) dan atau berdasarkan indikasi (HbsAg, Sifilis, HIV, Malaria, TBC), (9) Tata laksana kasus, (10) Temu wicara (pemberian komunikasi interpersonal dan konseling (Profil Kesehatan Indonesia, 2014).

b. Pertolongan Persalinan oleh tenaga kesehatan

Upaya lain yang dilakukan untuk menurunkan kematian bayi yaitu dengan mendorong agar setiap persalinan ditolong oleh tenaga kesehatan terlatih yaitu dokter spesialis kebidanan dan kandungan (SpOG), dokter umum, dan bidan, serta diupayakan dilakukan di fasilitas pelayanan kesehatan. Pertolongan persalinan adalah proses pelayanan persalinan yang dimulai pada kala I sampai dengan kala IV persalinan. Keberhasilan program ini diukur melalui indikator persentase persalinan ditolong tenaga kesehatan terlatih (Cakupan PN) dan persentase persalinan di fasilitas pelayanan kesehatan (cakupan PF).

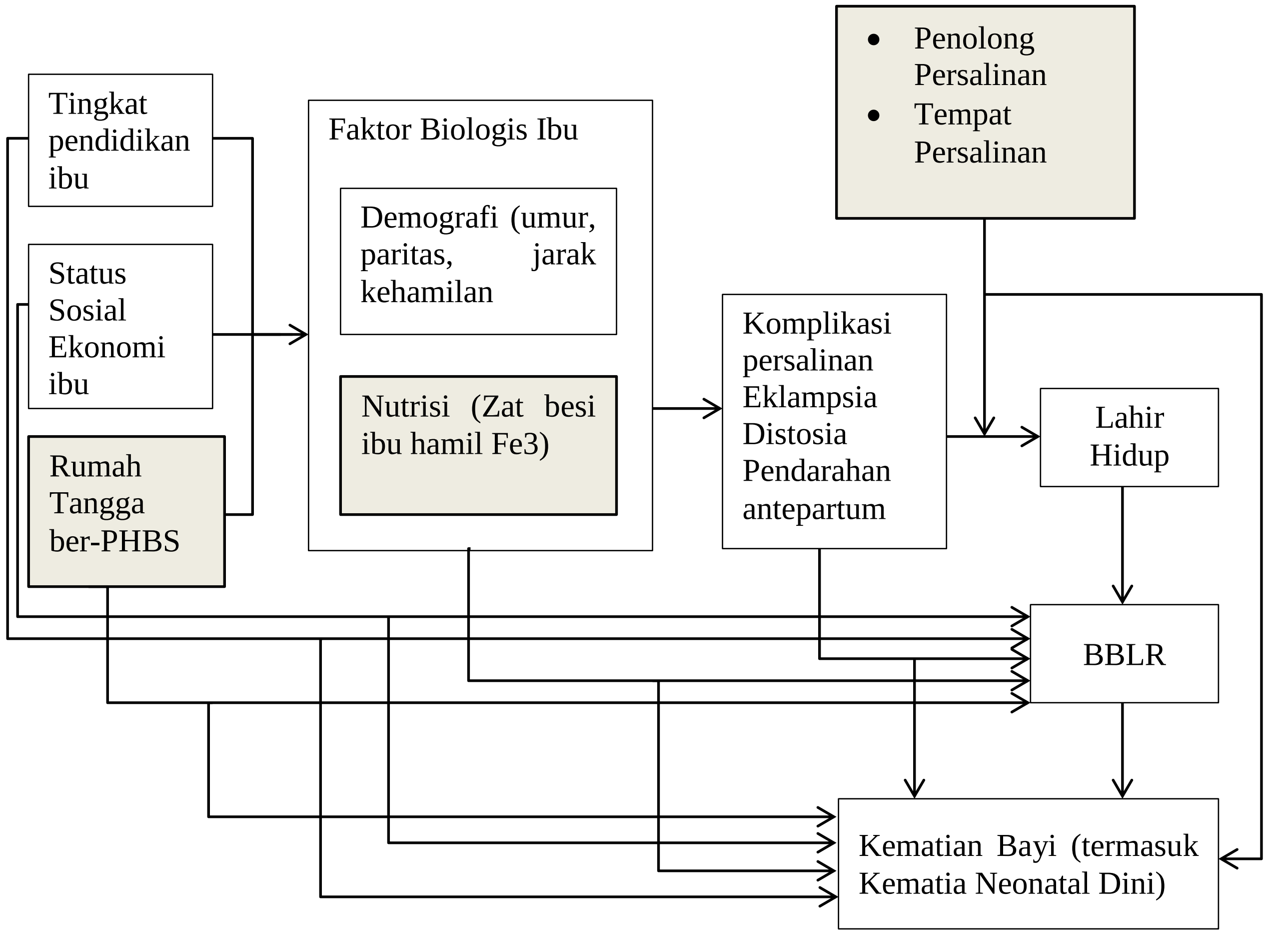
c. Rumah Tangga ber PHBS (Perilaku Hidup Bersih dan Sehat)

Rumah tangga yang seluruh anggotanya berperilaku hidup bersih dan sehat, yang meliputi 10 indikator, yaitu pertolongan persalinan oleh tenaga kesehatan, bayi diberi ASI eksklusif, balita ditimbang setiap bulan, menggunakan air bersih, mencuci tangan dengan air bersih dansabun, menggunakan jamban sehat, memberantas jentik di rumah sekali seminggu, makan sayur dan buah setiap hari, melakukan aktivitas fisik setiap hari, dan tidak merokok di dalam rumah (Kemenkes RI, 2015).

d. Fasilitas Kesehatan

Sarana pelayanan kesehatan adalah sarana yang menyediakan bentuk pelayanan yang sifatnya lebih luas di bidang klinik, bersifat preventif, promotif, dan rehabilitatif. Sarana kesehatan dapat berupa Rumah Sakit, puskesmas, klinik, praktek dokter, praktek bidan baik pemerintah dan swasta. Sarana pelayanan kesehatan sangat penting dalam proses persalinan agar dapat menghindarkan terjadinya infeksi dan bila terjadi komplikasi dalam proses persalinan dapat segera ditanggulangi sehingga tidak berakibat fatal (Noviani, 2011).

Kerangka konsep determinan hubungan berat badan lahir rendah (BBLR) dan kematian bayi seperti terlihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Determinan Hubungan Berat Bayi Lahir Rendah (BBLR) dan Kematian Bayi dengan Faktor-Faktor yang Mempengaruhi

Keterangan:

Variabel yang diteliti

Variabel yang tidak diteliti

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 3
METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang diperoleh dari Profil Kesehatan Kota Surabaya tahun 2015. Data yang digunakan yaitu jumlah kasus Berat Badan Bayi Lahir Rendah (BBLR) dan kematian bayi serta faktor-faktor yang mempengaruhinya. Unit pengamatan yang diambil adalah kecamatan yang ada di Kota Surabaya yang berjumlah 31 kecamatan.

3.2 Variabel Penelitian

Variabel penelitian yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari dua yaitu variabel respon (Y) dan variabel prediktor (X). Variabel respons terdiri atas jumlah kasus BBLR dan jumlah kasus kematian bayi. Adapun variabel respon yang digunakan pada penelitian di jelaskan melalui tabel sebagai berikut.

Tabel 3.1 Variabel Respon Penelitian

Variabel	Nama Variabel	Tipe Data
Y_1	Jumlah Bayi Berat Badan Lahir Rendah (BBLR)	Diskrit
Y_2	Jumlah Kematian Bayi	Diskrit

Sedangkan variabel prediktor yang digunakan dalam pemodelan adalah lima variabel, yaitu terdiri dari beberapa faktor yang mempengaruhi BBLR dan jumlah kematian bayi. Adapun variabel prediktor yang digunakan dalam pemodelan akan dijelaskan pada tabel berikut :

Tabel 3.2 Variabel Prediktor Penelitian

Variabel	**Keterangan**
$\mathbf{X_1}$	Rasio Tenaga Kesehatan
$\mathbf{X_2}$	Persentase Persalinan oleh Tenaga Kesehatan
$\mathbf{X_3}$	Persentase Ibu Hamil Mendapatkan Tablet Fe3
$\mathbf{X_4}$	Persentase Rumah Tangga ber-PHBS
$\mathbf{X_5}$	Rasio Puskesmas

3.3 Definisi Operasional Variabel Penelitian

Adapun definisi operasional dari variabel-variabel yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Jumlah Bayi Berat Badan Lahir Rendah

   Jumlah Berat Badan Lahir Rendah (BBLR) adalh jumlah bayi dengan berat lahir kurang dari 2500 gram tanpa memandang usia gestasi.

b. Jumlah kematian Bayi

   Jumlah kematian bayi adalah jumlah kematian yang terjadi antara saat setelah bayi lahir sampai bayi berumur kurang dari satu tahun.

c. Rasio Tenaga Kesehatan

   Rasio tenaga kesehatan adalah jumlah tenaga kesehatan setiap kecamatan dibagi jumlah penduduk di tiap kecamatan tersebut dikali 100%.

d. Persentase persalinan oleh tenaga kesehatan

   Persentase persalinan oleh tenaga kesehatan adalah jumlah ibu bersalin yang ditolong oleh tenaga kesehatan yang memiliki kompetensi kebidanan (dokter kandungan dan kebidanan, dokter umum, dan bidan) di satu wilayah kerja pada kurun waktu tertentu dibagi dengan jumlah ibu bersalin di satu wilayah kerja pada kurun waktu yang sama dikali 100%.

e. Persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3

   Persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 adalah jumlah ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 selam periode kehamilanya pada wilayah dan kurun waktu tertentu dibagi jumlah ibu hamil pada wilayah dan kurun waktu yang sama dikali 100%.

f. Persentase rumah tangga Ber-PHBS

   Persentase Rumah tangga Ber-PHBS adalah jumlah rumah tangga yang berperilaku melaksanakan 10 indikator PHBS pada kurun waktu tertentu dibagi dengan jumlah tangga yang diperiksa pada kurun waktu yang sama pada kecamatan di Kota Surabaya dikali dengan 100%.

g. Rasio Puskesmas

   Rasio puskesmas adalah jumlah puskesmas tiap kecamatan dibagi dengan jumlah penduduk di tiap kecamatan tersebut dikali 100%.

3.4 Struktur Data

Dalam penelitian ini struktur data yang digunakan adalah data dengan variabel respon dan variabel prediktor diuraikan dalam tabel 3.3.

Tabel 3.3 Struktur Data Penelitian

	Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	$y_{1,1}$	$y_{2,1}$	$x_{1,1}$	$x_{2,1}$	$x_{3,1}$	$x_{4,1}$	$x_{5,1}$
2	$y_{1,2}$	$y_{2,2}$	$x_{1,2}$	$x_{2,2}$	$x_{3,2}$	$x_{4,2}$	$x_{5,2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
31	$y_{1,31}$	$y_{2,31}$	$x_{1,31}$	$x_{2,31}$	$x_{3,31}$	$x_{4,31}$	$x_{5,31}$

3.5 Langkah-Langkah Penelitian

Untuk menjawab tujuan penelitian maka secara umum langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut :

3.5.1 Penaksiran parameter model *Conditional Bivariate Poisson Regression* (CBPR)

Langkah-langkah untuk mendapatkan taksiran parameter model CBPR dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) sebagai berikut :

a. Mengambil n sampel random

$\left(Y_{1i}, Y_{2i}, X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{5i}\right)$ dengan $i = 1, 2, \ldots, 31$

b. Menentukan fungsi *likelihood* dari p.m.f untuk populasi

$$L\left(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_{1i}, y_{2i}; p_{1i}, \lambda_{2i}, \mu_{1i}\right)$$

$$L\left(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{r=0}^{\min(y_1, y_2)} \binom{y_{1i}}{r} p^{r}{}_{1i} \left(1 - p_{1i}\right)^{y_{1i} - r} \frac{e^{-\lambda_{2i}} \lambda_{2i}^{y_{2i} - r}}{\left(y_{2i} - r\right)!} \frac{e^{-\mu_{1i}} \mu_{1i}^{y_{1i}}}{y_{1i}!} \right)$$

Dengan mendefinisikan nilai

$$\mu_{1i} = \lambda_1 + \lambda_3 \text{ dan } p_{1i} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}$$

c. Membentuk model λ_3 yang merupakan fungsi dari variabel bebas

$$\lambda_3 = \exp\left(\alpha_{00} + \alpha_{01} x_1 + \ldots + \alpha_{0k} x_i\right)$$

d. Melakukan trasnformasi kedalam bentuk persamaan

$$\lambda_{2i}+\lambda_3=e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}+e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}$$

$$\mu_{1i}=\lambda_1+\lambda_3=e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}$$

$$p_{1i}=\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3}=\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}$$

terhadap fungsi ln *likelihood.*

e. Membuat logaritma natural $(\ln)$ dari fungsi *likelihood*

$$Q=\ln L\left(\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right)$$

$$Q=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\binom{y_{1i}}{r}p^r{}_{1i}\left(1-p_{1i}\right)^{y_{1i}-r}\frac{e^{-\lambda_{2i}}\lambda_{2i}{}^{y_{2i}-r}}{\left(y_{2i}-r\right)!}\frac{e^{-\mu_{1i}}\mu_{1i}{}^{y_{1i}}}{y_{1i}!}\right)\right)$$

$$Q=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\frac{y_{1i}!}{\left(y_{1i}-r\right)!r!}p^r{}_{1i}\left(1-p_{1i}\right)^{y_{1i}-r}\frac{e^{-\lambda_{2i}}\lambda_{2i}{}^{y_{2i}-r}}{\left(y_{2i}-r\right)!}\frac{e^{-\mu_{1i}}\mu_{1i}{}^{y_{1i}}}{y_{1i}!}\right)\right)$$

$$Q=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\frac{\left(1-p_{1i}\right)^{y_{1i}-r}\lambda_{2i}{}^{y_{2i}-r}}{\left(y_{1i}-r\right)!\left(y_{2i}-r\right)!}\frac{p_{1i}{}^r}{r!}\,e^{-\lambda_{2i}}e^{-\mu_{1i}}\mu_{1i}{}^{y_{1i}}\right)\right)$$

Dengan memisalkan

$$W_i=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\frac{\left(1-p_{1i}\right)^{y_{1i}-r}\lambda_{2i}{}^{y_{2i}-r}}{\left(y_{1i}-r\right)!\left(y_{2i}-r\right)!}\frac{p_{1i}{}^r}{r!}\quad \text{dan}\quad \text{memisalkan}\quad W_i=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}W_{1i}.W_{2i}$$

dengan penjabaran sebagai berikut

$$W_{1i}=\frac{\left(1-p_{1i}\right)^{y_{1i}-r}}{\left(y_{1i}-r\right)!},\ W_{2i}=\frac{\lambda_{2i}{}^{y_{2i}-r}}{\left(y_{2i}-r\right)!}\frac{p_{1i}{}^r}{r!}\ .$$

Sehingga didapatkan

$$Q=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(W_i\,e^{-\lambda_{2i}}e^{-\mu_{1i}}\mu_{1i}{}^{y_{1i}}\right)\right)$$

$$Q=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(W_i\,e^{-\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}e^{-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^{y_{1i}}\right)\right)$$

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\ln W_i-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)-\sum_{i=1}^{n}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+\sum_{i=1}^{n}y_{1i}\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1$$

Dengan

$$W_i = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} W_{1i}.W_{2i} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{\left[1-\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!} \frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{(y_{2i}-r)!r!} \right)$$

$$W_{1i} = \frac{(1-p_{1i})^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!} = \frac{\left[1-\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!}$$

$$W_{2i} = \frac{\lambda_{2i}^{\;y_{2i}-r}}{(y_{2i}-r)!}\frac{p_{1i}^{\;r}}{r!} = \frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{(y_{2i}-r)!r!}$$

f. Membuat turunan pertama dari logaritma natural $(\ln)$ dari fungsi likelihood pada model CBPR terhadap parameter $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ dan hasil turunan pertama disamadengankan nol. syarat perlu sebagai berikut

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_j} = 0 \text{ dan } \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} = 0$$

Misalkan $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0^T & \boldsymbol{\beta}_1^T & \boldsymbol{\beta}_2^T \end{bmatrix}^T$.

Syarat cukup $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right) = \left.\dfrac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\theta}\, \partial \boldsymbol{\theta}^T}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}}$ merupan definit negatif sehingga $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$ memaksimumkan Q atau meminimumkan Q.

g. Turunan pertama fungsi ln likelihood merupakan fungsi yang tidak eksplisit. Solusi untuk menduga parameter tersebut yaitu dengan analisis numerik salah satunya iterasi *Newton-Raphson*. Algoritma iterasi *Newton-Raphson* dilakukan dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$$

Dimana

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0^T & \boldsymbol{\beta}_1^T & \boldsymbol{\beta}_2^T \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{g}^T\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)=\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^T \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\right)^T \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\right)^T\right)^T_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{(m)}}$$

$$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\alpha}_0^T} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \\ & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \\ simetris & & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}}$$

Adapun langkah-langkah penaksiran parameter dengan iterasi *Newton-Raphson* sebagai berikut:

1. Menentukan nilai taksiran awalan untuk parameter

   $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}=\left[\boldsymbol{\alpha}_{0(0)}^T \quad \boldsymbol{\beta}_{1(0)}^T \quad \boldsymbol{\beta}_{2(0)}^T\right]^T$.

2. Menentukan vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$ dengan menggunakan turunan pertama fungsi ln lielihood parameter yang ingin diduga $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$

   $$\mathbf{g}^T\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)=\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^T \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\right)^T \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\right)^T\right)^T_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{(m)}}$$

3. Menentukan matriks Hessian $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$ dengan menggunakan turunan kedua fungsi ln like lihood terhadap parameter yang ingin diduga $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$

   $$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\alpha}_0^T} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \\ & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \\ simetris & & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \end{bmatrix}$$

4. Memasukan nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ kedalam elemen-elemen vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$ dan matriks Hessian $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$ sehingga diperoleh vektor $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$ dan matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$.
5. Melakukan iterasi mulai dari $m = 0$ pada persamaan

   $$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{j}(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{j}(m)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$$

   Nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$ merupakan kumpulan penaksir parameter yang konvergen saat iterasi ke-*m*.
6. Jika belum mendapatkan penaksir parameter yang konvergen, maka kembali ke langkah 5. Iterasi akan berhenti apabila nilai dari $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right\| \le \varepsilon$, ε adalah suatu nilai yang sangat kecil.

3.5.1 Pengujian hipotesis secara serentak pada model CBPR

Melakukan pengujian signifikansi parameter model dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan hipotesis

   $H_0 : \alpha_{0k} = \beta_{j1} = \beta_{j3} = \ldots = \beta_{jl} = 0$ dengan $j = 1, 2$ dan $k = 1, 2, \ldots, l$

   H_1: paling sedikit ada satu $\beta_{jk} \neq 0;\ j = 1, 2; k = 1, 2, 3, \ldots, l$
2. Menentukan himpunan parameter dibawah populasi adalah:

   $$\Omega = \left\{\alpha_{0k}, \beta_{j0}, \beta_{j1}, \ldots, \beta_{jl};\ \mathrm{j} = 1, 2;\ k = 0, 1, 2, \ldots, l\right\}$$
3. Membuat fungsi *likelihood* dibawah populasi $L(\Omega)$.

   $$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_1, y_2; \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2\right)$$

   $$L\left(\hat{\Omega}\right) = \max_{\Omega} L(\Omega)$$

   $L\left(\hat{\Omega}\right)$ merupakan nilai *maximum likelihood* untuk model lengkap yang melibatkan variabel penjelas..
4. Menentukan himpunan parampeter dibawah H_0 benar ω adalah :

$\omega = \{\alpha_{00}, \beta_{10}, \beta_{20}\}$

5. Membuat fungsi likelihood dibawah H_0 benar $L(\omega)$

$$L(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f(y_1, y_2; \alpha_{00}, \beta_{10}, \beta_{20})$$

$$L(\hat{\omega}) = \max_{\Omega} L(\omega)$$

$L(\hat{\omega})$ merupakan nilai *maximum likelihood* untuk model tanpa melibatkan variabel penjelas.

6. Menentukan statistik uji dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT)

$$G^2 = -2\ln\left[\frac{L(\hat{\Omega})}{L(\hat{\omega})}\right]$$

$$= 2\left[\ln L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega})\right]$$

7. Menentukan kreiteri daerah penolakan H_0.

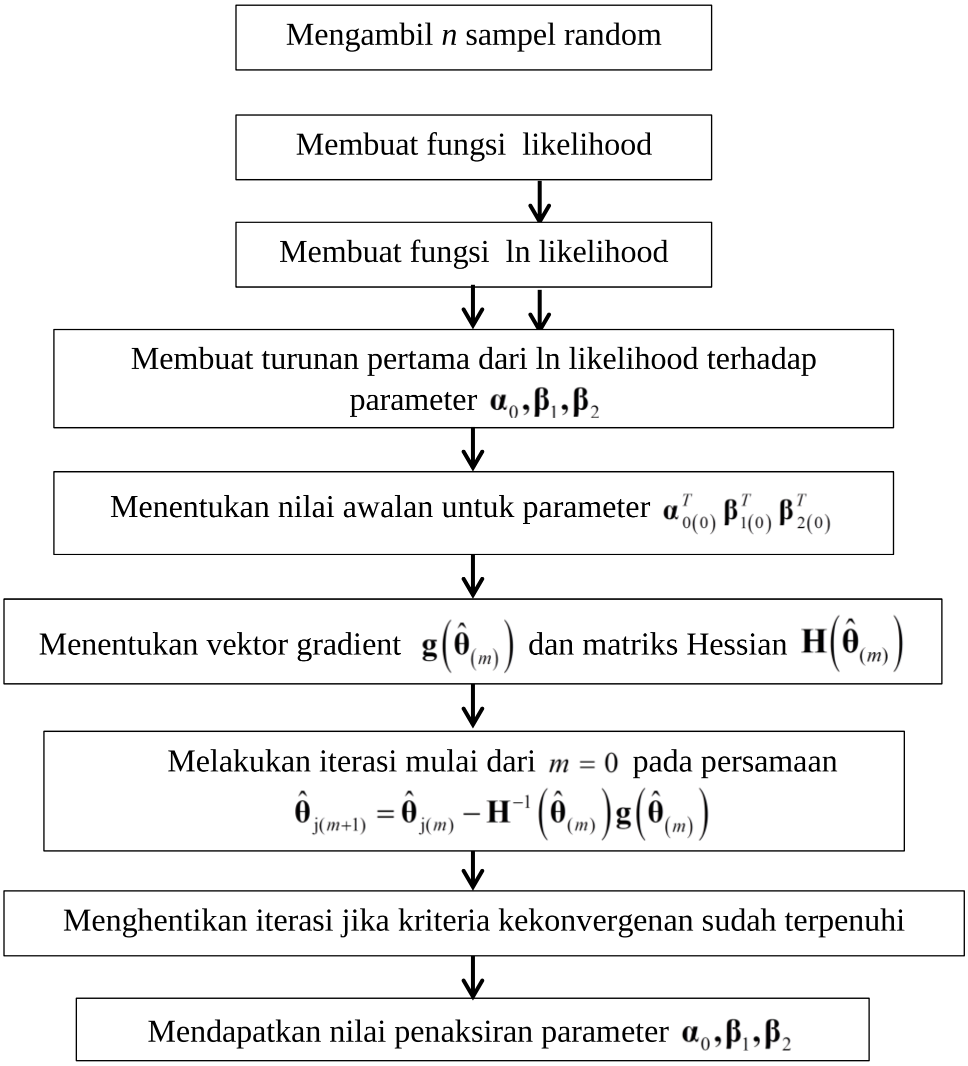
Kriteria penolakan H_0 adalah jika $G^2_{hitung} > \chi^2_{(\alpha;v)}$. Jika pengujian hipotesis menolak H_0 dengan derajat bebas v dengan v adalah banyaknya parameter model dibawah populasi dikurangi banyaknya parameter dibawah H_0.

3.5.3 Penentuan Faktor-Faktor Yang Mempengaruhi Berat Badan Lahir Rendah (BBLR) Dan Jumlah Kematian Bayi Dengan Model CBPR.

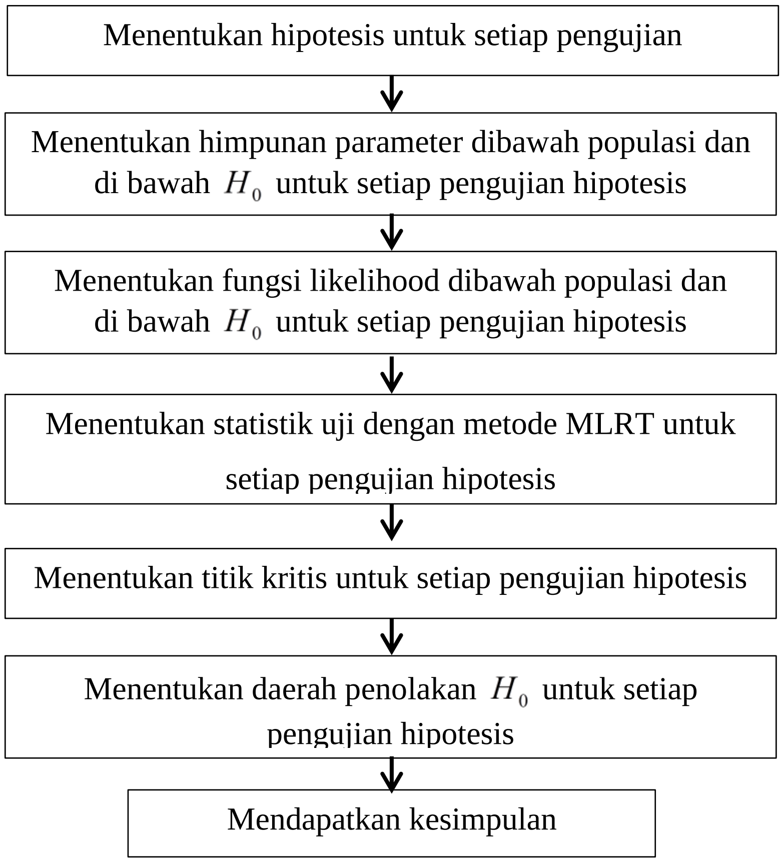
adapun langkah-langkah untuk mendapatkan faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap BBLR dan jumlah kematian bayi di kota Surabya tahun 2015 sebagai berikut:

a. Melakukan analisis statistik deskriptif untuk semua variabel.
b. Menganalisis korelasi antar variabel respon.
c. Melakukan pengujian distribusi bivariate Poisson.
d. Melakukan pemeriksaan multikolinieritas antar variabel penjelas dengan menggunakan nilai *Variance Inflation Factor* (VIF).

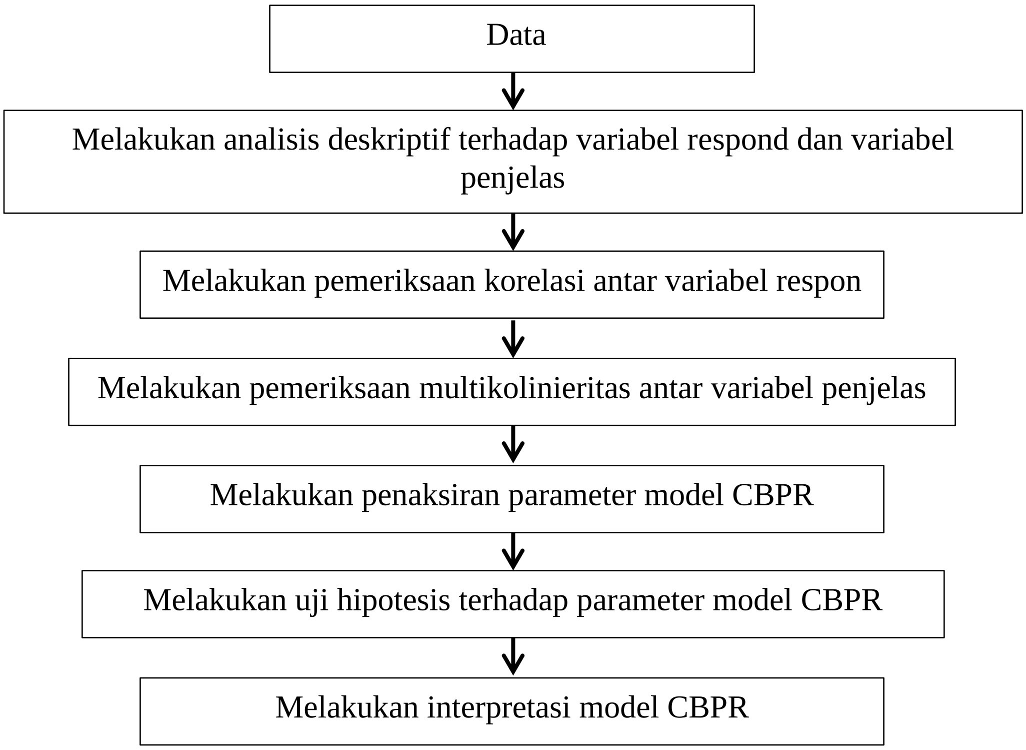
e. Mendapatkan model untuk CBPR pada pemodelan BBLR dan jumlah kematian bayi di Kota Surabaya pada tahun 2015 dengan langkah-langkah sebagi berikut
    1. Melakukan penaksiran parameter model dengan menggunakan metode MLE dengan analisis numerik yaitu iterasi *Newton-Rapshon*.
    2. Melakukan uji hipotesis terhadap parameter model yang dilakukan secara serentak dan parsial.
f. Melakukan interpretasi model CBPR yang diperoleh.



Gambar 3.1 Langkah-langkah Penaksiran Parameter CBPR



Gambar 3.2 Langkah-langkah Pengujian Hipotesis Model CBPR



Gambar 3.3 Langkah-Langkah Menentukan Factor-Faktor yang Mempengaruhi Jumlah Kasus BBLR dan Kematian Bayi

BAB 4
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Penaksir parameter *Conditional Bivariate Poisson Regression*

Berdasarkan AlMuhayfith, Alzaid, & Omair (2016) model *Conditional Bivariate Poisson* merupakan model alternatif dari model *joint bivariate Poisson* dengan berdasarkan teori *conditional probability*. *Joint density* model *conditional bivariate Poisson* dapat ditulis sebagai hasil perkalian dari marginal dan *conditional distribution.* Sehingga *likelihood* dari model *conditional bivariate poisson* dapat ditulis sebagai perkalian dari model *conditional* dan model marginal. Untuk model marginalnya, memisalkan $\mu_{1i} = \lambda_1 + \lambda_3$ sebagai mean dari $Y_{1i}, i = 1, 2, \ldots, n$. Sehingga menggunakan model regresi Poisson standar sebagai berikut:

$$\log \mu_{1i} = \beta_{10} + \sum_{k=1}^{l} \beta_{1k} x_{ki}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Untuk Conditional density (2.13) dari $Y_{2i} \mid Y_{1i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dengan melibatkan parameter p_{1i} dan λ_{2i} dengan menggunakan fungsi link sebagai berikut :

$$\log \lambda_{2i} = \beta_{20} + \sum_{k=1}^{l} \beta_{2k} x_{ki}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \text{ dimana } p_{1i} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}.$$

Penaksiran parameter pada model *Conditional Bivariate Poisson* menggunakan metode *maximum likelihood estimation* (MLE). Parameter yang diduga $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$. Metode MLE dilakukan dengan mengambil *n* sampel random terlebih dahulu, $(Y_{1i}, Y_{2i}, \mathrm{X}_{1i}, \mathrm{X}_{2i}, \ldots, \mathrm{X}_{5i})$ dengan $i = 1, 2, \ldots, 31$. Pada penelitian ini digunakan model λ_3 merupakan fungsi dari variabel bebas sehingga persamaanya sebagai berikut

$$\lambda_3 = \exp\left(\alpha_{00} + \alpha_{01} x_1 + \ldots + \alpha_{0k} x_i\right)$$

Langkah berikutnya adalah menentukan fungsi *likelihood* model regresi *Conditional Bivariate Poisson* sebagai berikut.

$$L\left(p_1,\ \lambda_2,\mu_1\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(f_{Y_2|Y_1}\left(y_{2i}|y_{1i}\right)f_{Y_1}\left(y_{1i}\right)\right)$$

$$L\left(p_{1i},\lambda_{2i},\mu_{1i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\binom{y_{1i}}{r}p^r{}_{1i}\left(1-p_{1i}\right)^{y_{1i}-r}\frac{e^{-\lambda_{2i}}\lambda_{2i}{}^{y_{2i}-r}}{\left(y_{2i}-r\right)!}\frac{e^{-\mu_{1i}}\mu_{1i}{}^{y_{1i}}}{y_{1i}!}\right) \qquad (4.1)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\frac{y_{1i}!}{\left(y_{1i}-r\right)!r!}p^r{}_{1i}\left(1-p_{1i}\right)^{y_{1i}-r}\frac{e^{-\lambda_{2i}}\lambda_{2i}{}^{y_{2i}-r}}{\left(y_{2i}-r\right)!}\frac{e^{-\mu_{1i}}\mu_{1i}{}^{y_{1i}}}{y_{1i}!}\right)$$

$$L\left(p_{1i},\lambda_{2i},\mu_{1i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\frac{\left(1-p_{1i}\right)^{y_{1i}-r}\lambda_{2i}{}^{y_{2i}-r}}{\left(y_{1i}-r\right)!\left(y_{2i}-r\right)!}\frac{p_{1i}{}^r}{r!}e^{-\lambda_{2i}}e^{-\mu_{1i}}\mu_{1i}{}^{y_{1i}}\right) \qquad (4.2)$$

Misalkan

$$W_i=\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\frac{\left(1-p_{1i}\right)^{y_{1i}-r}\lambda_{2i}{}^{y_{2i}-r}}{\left(y_{1i}-r\right)!\left(y_{2i}-r\right)!}\frac{p_{1i}{}^r}{r!}$$

$$W_i=\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}W_{1i}.W_{2i}$$

dengan penjabaran sebagai berikut

$$W_{1i}=\frac{\left(1-p_{1i}\right)^{y_{1i}-r}}{\left(y_{1i}-r\right)!},\ W_{2i}=\frac{\lambda_{2i}{}^{y_{2i}-r}}{\left(y_{2i}-r\right)!}\frac{p_{1i}{}^r}{r!}\ .$$

sehingga diperoleh fungsi likelihood yang sebagai dari persamaan (4.2) berikut:

$$L\left(p_{1i},\lambda_{2i},\mu_{1i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(W_i\,e^{-\lambda_{2i}}e^{-\mu_{1i}}\mu_{1i}{}^{y_{1i}}\right)$$

Selanjutnya ditransformasi dengan

$$\lambda_{2i}=\lambda_{2i}+\lambda_3=e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}+e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}$$

$$\mu_{1i}=\lambda_1+\lambda_3=e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}$$

$$p_{1i}=\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_3}=\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}$$

sehingga diperoleh fungsi likelihood yang baru sebagai berikut:

$$L\left(\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(W_i-\exp\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)-\exp\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)\right)^{y_{1i}}\right)$$

Dengan

$$W_i = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} W_{1i}.W_{2i} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!} \frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{(y_{2i}-r)!r!} \right)$$

$$W_{1i} = \frac{(1-p_{1i})^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!} = \frac{\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!} \tag{4.3}$$

$$W_{2i} = \frac{\lambda_{2i}^{\;y_{2i}-r}}{(y_{2i}-r)!}\frac{p_{1i}^{\;r}}{r!} = \frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{(y_{2i}-r)!r!} \tag{4.4}$$

Sehingga fungsi ln-likelihood sebagai berikut

$$\mathrm{Q} = \ln L(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$$

$$Q = \ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(W_i - \exp\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right) - \exp\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)\right)^{y_{1i}}\right)\right)$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\ln W_i - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right) - \sum_{i=1}^{n}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} + \sum_{i=1}^{n}y_{1i}\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1 \tag{4.5}$$

Untuk mendapatkan estimasi parameter model CBP, maka fungsi pada persamaan Q diturunkan masing-masing terhadap parameter $\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ dan disamakan dengan nol.

Turunam pertama Q terhadap parameter $\boldsymbol{\alpha}_0$ sebagai berikut

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\ln W_i - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right) - \sum_{i=1}^{n}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1} + \sum_{i=1}^{n}y_{1i}\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} + \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i \tag{4.6}$$

Pertama akan dicari terlebih dahulu yaitu penurunan W_i terhadap $\boldsymbol{\alpha}_0$ sebagai berikut

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}$$

Dimana $W_i = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} W_{1i}.W_{2i}$ sehingga akan menurunkan terlebih dahulu W_{1i}, W_{2i} diturunkan terhadap $\boldsymbol{\alpha}_0$ sebagai beikut

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} = \frac{\partial \left(\dfrac{\left[1 - \left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right) \right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!} \right)}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}$$

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} = \frac{(y_{1i}-r)\left[1 - \left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right) \right]^{y_{1i}-r-1} \left[-\left(\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2} \right) \right]}{(y_{1i}-r)!} . \qquad (4.7)$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} \left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r} \left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)^r}{(y_{2i}-r)!\,r!} \right)$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} = \left(\frac{(y_{2i}-r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-1} \left(-e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{(y_{2i}-r)!} \right) \left(\frac{\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)^r}{r!} \right) +$$

$$\left(\frac{r \left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)^{r-1} \left[\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2} \right]}{r!} \right) \left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}}{(y_{2i}-r)!} \right)$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}=\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{(y_{2i}-r)!r!}\left(\frac{(y_{2i}-r)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}+\frac{r\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right) \quad (4.8)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (4.3), (4.4), (4.7), dan (4.8) didapatkan turunan W_i terhadap $\boldsymbol{\alpha}_0$ sebagai berikut

$$\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}W_{2i}+\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}W_{1i}\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{(y_{1i}-r)!(y_{2i}-r)!r!}\times\right.$$

$$\left.\left[\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]+\left(\frac{(y_{2i}-r)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}+\frac{r\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right)\right]\right) \quad (4.9)$$

Sehingga didapatkan turunan persamaan (4.6) dengan mensubtitusi persamaan (4.9) sebagai berikut

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!}\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{(y_{2i}-r)!r!}\right)}\times$$

$$\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1} \left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r}}{(y_{1i}-r)!(y_{2i}-r)!r!}\times \right.$$

$$\left.\left[\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]+\left(\frac{(y_{2i}-r)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}+\frac{r\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right)\right]\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i$$

$$=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]+\left(\frac{(y_{2i}-r)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}+\frac{r\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right)\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i \qquad (4.10)$$

Turunan pertama Q terhadap parameter $\boldsymbol{\beta}_1$

$$\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}=\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\ln W_i-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)-\sum_{i=1}^{n}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+\sum_{i=1}^{n}y_{1i}\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i+\sum_{i=1}^{n}y_{1i}\mathbf{x}_i \qquad (4.11)$$

Pertama akan dicari terlebih dahulu yaitu penurunan W_i terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai berikut

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}$$

Dimana $W_i=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}W_{1i}.W_{2i}$ sehingga akan menurunkan terlebih dahulu W_{1i},W_{2i} diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai beikut

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \frac{\partial \left(\frac{\left[1 - \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right) \right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!} \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}$$

$$= \frac{(y_{1i}-r)\left[1 - \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right) \right]^{y_{1i}-r-1} \left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2} \right]}{(y_{1i}-r)!} \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r} \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)^r}{(y_{2i}-r)!\,r!} \right)$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \frac{r\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)^{r-1} \left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2} \right) \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}}{(y_{2i}-r)!\,r!} \tag{4.13}$$

Dengan mensubtitusi persamaan (4.3), (4.4), (4.12), dan (4.13) didapatkan turunan W_i terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai berikut

$$\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} W_{2i} + \frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} W_{1i} \right)$$

$$= \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{\left[1 - \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right) \right]^{y_{1i}-r} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r} \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)^r}{(y_{1i}-r)!\,(y_{2i}-r)!\,r!} \right) \left(\frac{(y_{1i}-r)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2} \right]}{\left(1 - \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right) \right)} \right.$$

$$
\left.\left.+\frac{\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right)\right) \tag{4.14}
$$

Sehingga didapatkan turunan persamaan (4.11) dengan mensubtitusi persamaan (4.14) sebagai berikut

$$
\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(y_{1i}-r)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}+\frac{\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n}y_{1i}\mathbf{x}_i \tag{4.15}
$$

Turunan pertama Q terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$

$$
\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}=\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\ln W_i-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)-\sum_{i=1}^{n}e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}+\sum_{i=1}^{n}y_{1i}\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}
$$

$$
\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i \tag{4.16}
$$

Pertama akan dicari terlebih dahulu yaitu penurunan W_i terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ sebagai berikut

$$
\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}
$$

Dimana $W_i=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}W_{1i}.W_{2i}$ sehingga akan menurunkan terlebih dahulu W_{1i},W_{2i} diturunkan terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ sebagai beikut

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \frac{\partial \left(\frac{\left[1 - \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right) \right]^{y_{1i} - r}}{(y_{1i} - r)!} \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = 0 \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0} \right)^{y_{2i} - r} \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)^r}{(y_{2i} - r)!\, r!} \right)$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \frac{(y_{2i} - r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0} \right)^{y_{2i} - r - 1} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} \right) \mathbf{x}_i \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)^r}{(y_{2i} - r)!\, r!} \tag{4.18}$$

Dengan mensubtitusi persamaan (4.3), (4.4), (4.17), dan (4.18) didapatkan turunan W_i terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \sum_{r=0}^{\min(y_1, y_2)} \left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} W_{2i} + \frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} W_{1i} \right)$$

$$= \sum_{r=0}^{\min(y_1, y_2)} \left(\frac{\left[1 - \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right) \right]^{y_{1i} - r} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0} \right)^{y_{2i} - r} \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)^r}{(y_{1i} - r)!(y_{2i} - r)!\, r!} \left(\frac{(y_{2i} - r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} \right) \mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0} \right)} \right) \right) \tag{4.19}$$

Sehingga didapatkan turunan persamaan (4.16) dengan mensubtitusi persamaan (4.19).

$$\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} = \sum_{r=0}^{\min(y_1, y_2)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(y_{2i} - r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} \right) \mathbf{x}}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0} \right)} \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} \right) \mathbf{x}_i \tag{4.20}$$

Turunan kedua persamaan (4.6) terhadap $\boldsymbol{\alpha}_0$ sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\alpha}_0^T} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\alpha}_0^T}\right) - \left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}\frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0^T}\right)\right] + \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \qquad (4.21)$$

Turunan kedua W_i terhadap parameter $\boldsymbol{\alpha}_0$

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\alpha}_0^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1, y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\alpha}_0^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} + \frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\alpha}_0^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}\right) \qquad (4.22)$$

Turunan kedua W_{1i} terhadap parameter $\boldsymbol{\alpha}_0$ sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\alpha}_0^T} = \frac{\partial\left(\dfrac{(y_{1i}-r)\left[1-\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left[-\left(\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]}{(y_{1i}-r)!}\right)}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0^T}$$

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\alpha}_0^T} = \frac{(y_{1i}-r-1)(y_{1i}-r)\left[1-\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r-2}\left(-\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)\left(-\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)}{(y_{1i}-r)!} +$$

$$\frac{(y_{1i}-r)\left(-\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)\left[1-\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1}}{(y_{1i}-r)!} \qquad (4.23)$$

Turunan kedua W_{2i} terhadap parameter $\boldsymbol{\alpha}_0$.

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\alpha}_0^T}$$

$$= \frac{\partial\left(\left(\dfrac{(y_{2i}-r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(-e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{(y_{2i}-r)!}\right)\left(\dfrac{\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{r!}\right)\right)}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0^T}$$

$$+\frac{\partial\left(\left(\frac{r\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-1}\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{r!}\right)\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}}{\left(y_{2i}-r\right)!}\right)\right)}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0^T}$$

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\alpha}_0^T}=\frac{\left(y_{2i}-r-1\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-2}\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

$$+\frac{2\left(\left(y_{2i}-r\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i r\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-1}\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\right)}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

$$+\frac{r\left(r-1\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-2}\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}}{\left(y_{2i}-r\right)!r!} \qquad (4.24)$$

Turunan kedua pada persamaan (4.22) dengan mensubtitusi persamaan (4.7), (4.8), (4.24), dan (4.23).

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\alpha}_0^T}=\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\alpha}_0^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0}+\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\alpha}_0^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0}\right)$$

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\alpha}_0^T}=W_i\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\left(\frac{\left(y_{1i}-r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)^2\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}\right.$$

$$
+\frac{\left(y_{1i}-r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)r\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)^2\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)^2}
$$

$$
+\frac{\left(y_{2i}-r-1\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^2\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}
$$

$$
+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}
$$

$$
+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}
$$

$$
\left.+\frac{r\left(r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^2}\right) \qquad (4.25)
$$

Turunan kedua Q terhadap $\boldsymbol{\alpha}_0$

$$
\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\alpha}_0^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\alpha}_0^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0^T}\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T
$$

$$
=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{W_i}W_i\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{(y_{1i}-r-1)(y_{1i}-r)(y_{2i}-r)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)^2\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}\right.\right.
$$

$$
+\frac{(y_{1i}-r-1)(y_{1i}-r)r\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)^2\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)^2}
$$

$$
+\frac{(y_{2i}-r-1)(y_{2i}-r)(y_{1i}-r)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^2\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}
$$

$$
+\frac{r(y_{1i}-r)(y_{2i}-r)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}
$$

$$
+\frac{r(y_{1i}-r)(y_{2i}-r)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}
$$

$$
+\frac{r\left(r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}\right)\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^2}\Bigg)
$$

$$
-\left(\frac{1}{W_i^2}W_i\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\left(-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)+\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}+\frac{r\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right)\right.
$$

$$
W_i\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\left(-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)+\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}+\frac{r\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right)\Bigg)\Bigg]
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T \qquad (4.26)
$$

Dimana

$$
W_i=\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r}}{\left(y_{1i}-r\right)!\left(y_{2i}-r\right)!r!}
$$

Turunan kedua Q terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$

$$
\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T \qquad (4.27)
$$

Turunan kedua W_i terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1, y_2)} \left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} + \frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \right)$$

Turunan kedua W_{1i} terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{\partial \left(\dfrac{(y_{1i} - r)\left[1 - \left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i} - r - 1} \left[\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{(y_{1i} - r)!} \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}$$

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = u'v + v'u$$

$$= \frac{(y_{1i} - r - 1)\left[1 - \left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i} - r - 2} \left[\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{(y_{1i} - r)!} \left((y_{1i} - r)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right] \right)$$

$$+ (y_{1i} - r)\left(-\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right] \right) \left(\frac{\left[1 - \left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i} - r - 1}}{(y_{1i} - r)!} \right)$$

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{(y_{1i} - r - 1)(y_{1i} - r)\left[1 - \left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i} - r - 2} \left(-\left[\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right] \right) \left[\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{(y_{1i} - r)!}$$

$$+ \frac{(y_{1i} - r)\left[1 - \left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i} - r - 1} \left(-\left[\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right] \right)}{(y_{1i} - r)!} \qquad (4.28)$$

Turunan kedua W_{2i} terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{\partial \left(\frac{r\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-1} \left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}}{(y_{2i}-r)!r!} \right)}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}$$

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{(r-1)r\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-2}\left(-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right)\left(-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right)}{(y_{2i}-r)!r!}$$

$$+\frac{r\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-1}\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{(y_{2i}-r)!r!} \qquad (4.29)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (4.12), (4.13), (4.28), dan (4.29) didapatkan turunan sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} + \frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\right)$$

$$= W_i \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\left(\frac{r(y_{1i}-r-1)(y_{1i}-r)\left(-\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)^2\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right.\right.$$

$$\left.\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left(-\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\right)\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right)$$

$$+\left(\frac{\left(r-1\right)r\left(y_{1i}-r\right)\left(-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right)\left(-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)^2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}\right)\right) \qquad (4.30)$$

Maka dengan mensubtitusi persamaan (4.30) dan (4.14) didapatkan hasil dari turunan kedua Q terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}W_i\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\left(\frac{r\left(y_{1i}-r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(-\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)^2\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right.\right.\right.$$

$$
\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left(-\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\right)\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}
$$

$$
+\frac{(r-1)r\left(y_{1i}-r\right)\left(-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right)\left(-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^2}
$$

$$
\left.+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}\right)
$$

$$
-\left(\frac{1}{W_i^2}W_i\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\left(y_{1i}-r\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}+\frac{\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right)\right)
$$

$$
\left.W_i\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\left(y_{1i}-r\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}+\frac{\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right)\right)\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T \tag{4.31}
$$

Dimana

$$W_i = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \frac{\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r}}{(y_{1i}-r)!(y_{2i}-r)!r!}$$

Turunan kedua Q terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T \qquad (4.31)$$

Turunan kedua W_i terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}+\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_2}\right)$$

Untuk

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\partial^2\left(\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = 0 \qquad (4.32)$$

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\partial\left(\frac{(y_{2i}-r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r}}{(y_{2i}-r)!r!}\right)}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}$$

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_2\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{(y_{2i}-r-1)(y_{2i}-r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-2}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i}{(y_{2i}-r)!}\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r}}{r!}\right)$$

$$+\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r}}{r!}\left(\frac{(y_{2i}-r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-1}}{(y_{2i}-r)!}\right) \qquad (4.33)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (4.32) dan (4.33), maka didapatkan hasil turunan sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} + \frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = 0 \qquad (4.34)$$

subtitusi persamaan (4.34) dan (4.19) didapatkan Turunan kedua Q terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{W_i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) - \left(\frac{1}{W_i^2} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) \right] - \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} \right) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\left(\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{(y_{2i}-r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)} \right) \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{(y_{2i}-r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)} \right) \right) \right]$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} \right) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \qquad (4.35)$$

Dimana

$$W_i = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \frac{\left[1 - \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)\right]^{y_{1i}-r} \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0} \right)^{y_{2i}-r} \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)^{r}}{(y_{1i}-r)!(y_{2i}-r)!r!}$$

Turunan kedua Q terhadap $\boldsymbol{\alpha}_0$ dan $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{W_i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) - \left(\frac{1}{W_i^2} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) \right] \qquad (4.36)$$

Turunan kedua W_i terhadap $\boldsymbol{\alpha}_0$ dan $\boldsymbol{\beta}_2$. Penjabaran secara terperinci dapat dilihat pada Lampiran 1.

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} + \frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right)$$

Akan dicari terlebih dahulu turunan

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T}$$

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\left(\frac{\left(y_{1i}-r\right)\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]}{\left(y_{1i}-r\right)!} \right) = 0 \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\left(\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{\left(y_{2i}-r\right)!r!} \right.$$

$$\left. + \frac{r\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-1}\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(y_{2i}-r\right)!r!} \right)$$

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\left(y_{2i}-r-1\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-2}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

$$+\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^T\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r\left(y_{2i}-r\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-1}}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

$$+\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i r\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-1}\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(y_{2i}-r\right)!r!} \quad (4.38)$$

Maka dengan mensubtitusi persamaan (4.37) dan (4.38) didapatkan turunan sebgai berikut

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}+\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right)$$

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = 0 \qquad (4.39)$$

Sehingga turunan kedua Q terhadap $\boldsymbol{\alpha}_0$ dan $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{W_i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) - \left(\frac{1}{W_i^2} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[- \left(\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\left[- \left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right) \mathbf{x}_i \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2} \right) \right] + \frac{(y_{2i} - r)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right) \mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)} + \frac{r \left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right) \mathbf{x}_i \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2} \right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)} \right) \right.\right.$$

$$\left.\left. \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{(y_{2i} - r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2}\right) \mathbf{x}}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)} \right) \right] \qquad (4.40)$$

turunan kedua Q terhadap $\boldsymbol{\alpha}_0$ dan $\boldsymbol{\beta}_1$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{W_i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) - \left(\frac{1}{W_i^2} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) \right]$$

Terlebih dahulu mencari turunan

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} + \frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \frac{\partial W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right)$$

Setelah itu mencari turunan

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \left(\frac{(y_{1i} - r)\left[1 - \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}} \right)\right]^{y_{1i} - r - 1} \left[- \left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right) \mathbf{x}_i \left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2} \right) \right]}{(y_{1i} - r)!} \right)$$

$$= \frac{(y_{1i}-r-1)(y_{1i}-r)\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r-2}\left(-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right)\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]}{(y_{1i}-r)!}$$

$$+\frac{(y_{1i}-r)\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{(y_{1i}-r)!} \qquad (4.41)$$

Selanjutnya dicari turunan

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\left(\frac{(y_{2i}-r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{(y_{2i}-r)!r!}\right.$$

$$\left.+\frac{r\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-1}\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{(y_{2i}-r)!r!}\right)$$

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\beta}_1^T} = \frac{r\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-1}(y_{2i}-r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{(y_{2i}-r)!r!}$$

$$+\frac{r(r-1)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-2}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{(y_{2i}-r)!r!}$$

$$+\frac{\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)r\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-1}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}}{\left(y_{2i}-r\right)!r!} \tag{4.42}$$

Maka didapatkan turunan sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}+\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\right)$$

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}=W_i\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{r\left(y_{1i}-r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)^2}\right.$$

$$\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)$$

$$+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}$$

$$+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}$$

$$+\frac{r\left(r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^2}$$

$$+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]}\Bigg) \tag{4.43}$$

Dimana

$$W_i=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{\left(y_{1i}-r\right)!\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

Sehingga turunan kedua Q terhadap $\boldsymbol{\alpha}_0$ dan $\boldsymbol{\beta}_1$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\alpha}_0}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1^T}\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}W_i\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{r\left(y_{1i}-r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)^2}\right.\right.\right.$$

$$\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)$$

$$+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}$$

$$
+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}
$$

$$
+\frac{r\left(r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^2}
$$

$$
\left.+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\left[1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]}\right)\right)
$$

$$
-\left(\frac{1}{W_i^2}W_i\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\left(\left[-\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\right]+\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)}+\frac{r\left(\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\mathbf{x}_i\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right)\right)
$$

$$
\left.\left.\left.W_i\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\left(\frac{\left(y_{1i}-r\right)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{\left(1-\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)}+\frac{\left(-\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)}\right)\right)\right)\right]
\qquad (4.44)
$$

Dimana

$$W_i = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \frac{\left[1-\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^r}{(y_{1i}-r)!(y_{2i}-r)!r!}$$

turunan kedua Q terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ dan $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1}\frac{\partial W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\right)\right] \qquad (4.45)$$

Terlebih dahulu mencari turunan

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}+\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\right)$$

Untuk

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\left(\frac{(y_{1i}-r)\left[1-\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left[\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right]}{(y_{1i}-r)!}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\left(\frac{r\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-1}\left(-\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}}{(y_{2i}-r)!r!}\right)$$

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{r(y_{2i}-r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}-e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r-1}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}_i\left(-\dfrac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)^2}\right)}{(y_{2i}-r)!r!}$$

maka

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}+\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_1\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial\boldsymbol{\beta}_2^T}\right)$$

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(0 \frac{\partial W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} + \frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} 0 \right) = 0$$

Sehingga turunan kedua Q terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ dan $\boldsymbol{\beta}_2$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{W_i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) - \left(\frac{1}{W_i^2} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_1} \frac{\partial W_i}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{(y_{1i} - r)\left[\frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2} \right]}{\left(1 - \left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right)} + \frac{\left(- \frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)\mathbf{x}_i}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}\right)^2} \right)}{\left(\frac{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_1}}\right)} \right) \right.$$

$$\left. \left(\frac{(y_{2i} - r)\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2}\right)\mathbf{x}}{\left(e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\alpha}_0}\right)} \right) \right] \quad (4.47)$$

karena hasil turunan pertama fungsi *ln-likelihood* terhadap parameter yang ingin diduga menghasilkan persamaan yang eksplisit sehingga diperlukan iterasi *Newton-Raphson* untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Langkah-langkah dalam melakukan iterasi sebagai berikut.

1. Menentukan nilai taksiran awal parameter $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ dengan $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)} = \left[\boldsymbol{\alpha}_{0(0)}^T \; \boldsymbol{\beta}_{1(0)}^T \; \boldsymbol{\beta}_{2(0)}^T \right]^T$ dengan menggunakan distribusi poisson univariat.
2. Membentuk vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$

$$\mathbf{g}^T\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right) = \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0}\right)^T \left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1}\right)^T \left(\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2}\right)^T \right)^T_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{(m)}}$$

3. Membentuk matriks Hessian $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\alpha}_0^T} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\alpha}_0 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \\ & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \\ simetris & & \frac{\partial^2 Q}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \end{bmatrix}$$

4. Memasukan nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(0)}$ kedalam elemen-elemn vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$ dan matriks Hessian $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$ sehingga diperoleh vektor $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$ dan matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$.
5. Lakukan iterasi mulai dari $m=0$ pada persamaan

   $$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{j}(m+1)}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{j}(m)}-\mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right)$$

   Nilai $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}$ merupakan kumpulan penaksir parameter yang konvergen saat iterasi ke-*m*.
6. Jika belum mendapatkan penaksir parameter yang konvergen, maka kembali ke langkah 5. Iterasi akan berhenti apabila nilai dari $\left\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m+1)}-\hat{\boldsymbol{\theta}}_{(m)}\right\|\leq\varepsilon$, ε adalah suatu nilai yang sangat kecil.

4.2 Pengujian Parameter *Conditional Bivariate Poisson Regression*

Pengujian hipotesis secara serentak terhadap parameter *Conditional Bivariate Poisson* menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT). Metode ini melibatkan dua fungsi *likelihood* yaitu $L\left(\hat{\Omega}\right)$ yang merupakan nilai *maximum likelihood* untuk model yang lebih lengkap dengan melibatkan varabel prediktor dan $L\left(\hat{\omega}\right)$ merupakan nilai *maximum likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor.

Pengujian hipotesis terhadap parameter secara serentak dilakukan untuk mengetahui signifikansi parameter $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ secara bersama-sama. Hipotesis dari pengujian serentak sebagai berikut:

$H_0 : \alpha_{0k} = \beta_{j1} = \beta_{j2} = \ldots = \beta_{jl} = 0$

H_1: paling sedikit ada satu $\beta_{jk} \neq 0;\ j = 1,2; k = 1,2,3,\ldots,l$

Himpunan parameter dibawah populasi adalah

$\Omega = \left\{\alpha_{0k}, \beta_{j0}, \beta_{j1}, \ldots, \beta_{jl}\ ;\ \mathrm{j} = 1,2\ ; k = 0,1,2,\ldots,l\right\}$.

Fungsi *likelihood* dibawah populasi $L\left(\hat{\Omega}\right)$ sebagai berikut:

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_{1i}, y_{2i}; p_{1i}, \lambda_{2i}, \mu_{1i}\right)$$

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n} f\left(y_{1i}, y_{2i}; \boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2\right)$$

$$L(\Omega) = \prod_{i=1}^{n}\left(W_i - \exp\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right) - \exp\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}\right)\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1\right)\right)^{y_{1i}}\right)$$

Dengan

$$W_i = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \frac{\left[1 - \left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{\left(y_{1i}-r\right)!} \frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\alpha}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\boldsymbol{\beta}_1}}\right)^{r}}{\left(y_{2i}-r\right)!\,r\,!}$$

$$L\left(\hat{\Omega}\right) = \max_{\Omega} L(\Omega)$$

$$L\left(\hat{\Omega}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(W_i - \exp\left(e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0}\right) - \exp\left(e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_1}\right)\left(\exp\left(\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_1\right)\right)^{y_{1i}}\right)$$

dengan

$$W_i = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \frac{\left[1 - \left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_1}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{\left(y_{1i}-r\right)!} \frac{\left(e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0}\right)^{y_{2i}-r}\left(\dfrac{e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0}}{e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_1}}\right)^{r}}{\left(y_{2i}-r\right)!\,r\,!}$$

Sehingga didapatkan fungsi ln likelihood dibawah populasi $l\left(\hat{\Omega}\right)$ sebagai berikut:

$$l\left(\hat{\Omega}\right) = \ln L\left(\hat{\Omega}\right) = \sum_{i=1}^{n}\ln W_i - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0}\right) - \sum_{i=1}^{n} e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_1} + \sum_{i=1}^{n} y_{1i}\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$$

Nilai $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0, \hat{\boldsymbol{\beta}}_1, \hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ adalah nilai penaksir parameter yang diperoleh dari hasil penaksir (4.1) dengan menggunakan iterasi Newton-Raphson. Sedangkan untuk fungsi ln likelihood model yang tidak melibatkan variabel penjelas dibentuk pada himpunan dibawah H_0. Himpunan parameter dibawah $H_0\left(\hat{\omega}\right)$ adalah $\omega=\{\alpha_{00},\beta_{10},\beta_{20}\}$. Fungsi ln *likelihood* dibawah H_0, $l(\omega)$ sebagai berikut:

$$L(\omega)=\prod_{i=1}^{n} f\left(y_{1i},y_{2i};p_{1i},\lambda_{2i},\mu_{1i}\right)$$

$$L(\omega)=\prod_{i=1}^{n} f\left(y_{1i},y_{2i};\alpha_{00},\beta_{10},\beta_{20}\right)$$

$$L(\omega)=\prod_{i=1}^{n}\left(W_i-\exp\left(e^{\beta_{20}}-e^{\beta_0}\right)-\exp\left(e^{\beta_{10}}\right)\left(\exp\left(\beta_{10}\right)\right)^{y_{1i}}\right)$$

Dengan

$$W_i=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{\left(y_{1i}-r\right)!}\frac{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

$$L(\hat{\omega})=\max_{\Omega}L(\omega)$$

$$L(\hat{\omega})=\prod_{i=1}^{n}\left(W_i-\exp\left(e^{\hat{\beta}_{20}}-e^{\hat{\beta}_0}\right)-\exp\left(e^{\hat{\beta}_{10}}\right)\left(\exp\left(\hat{\beta}_{10}\right)\right)^{y_{1i}}\right)$$

Dengan nilai W_i sebagai berikut:

$$W_i=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\hat{\alpha}_{00}}}{e^{\hat{\beta}_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{\left(y_{1i}-r\right)!}\frac{\left(e^{\hat{\beta}_{20}}-e^{\hat{\alpha}_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\hat{\alpha}_{00}}}{e^{\hat{\beta}_{10}}}\right)^{r}}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

fungsi ln *likelihood* dibawah H_0, $l\left(\hat{\omega}\right)$ sebagai berikut:

$$l(\hat{\omega})=\ln L(\hat{\omega})=\sum_{i=1}^{n}\ln W_i-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\hat{\beta}_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)-\sum_{i=1}^{n}e^{\hat{\beta}_{10}}+\sum_{i=1}^{n}y_{1i}\hat{\beta}_{10}$$

Nilai $\hat{\alpha}_{00},\hat{\beta}_{10},\hat{\beta}_{20}$ didapatkan dari hasil penaksir sebagai berikut:

Fungsi ln *likelihood* dibawah H_0, $l(\boldsymbol{\omega})$ sebagai berikut:

$$l(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\ln W_i-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)-\sum_{i=1}^{n}e^{\beta_{10}}+\sum_{i=1}^{n}y_{1i}\beta_{10}$$

Dengan

$$W_i = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} W_{1i}.W_{2i} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!} \frac{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\beta_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^r}{(y_{2i}-r)!r!} \right)$$

$$W_{1i} = \frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!}$$

$$W_{2i} = \frac{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\beta_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^r}{(y_{2i}-r)!r!}$$

Turunan pertama $l(\boldsymbol{\omega})$ terhadap α_{00} sebagai berikut

$$\frac{\partial l(\omega)}{\partial \alpha_{00}} = \frac{\partial}{\partial \alpha_{00}} \left(\sum_{i=1}^{n} \ln W_i - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right) - \sum_{i=1}^{n} e^{\beta_{10}} + \sum_{i=1}^{n} y_{1i}\beta_{10} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_{00}} + \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\alpha_{00}}\right) \tag{4.48}$$

Untuk $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_{00}}$

W_{1i}, W_{2i} diturunkan terhadap α_{00}

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_{00}} = \frac{\partial}{\partial \alpha_{00}} \left(\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!} \right)$$

$$= \frac{(y_{1i}-r)\left[1-\left(\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left[-\left(\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^2}\right)\right]}{(y_{1i}-r)!} \tag{4.49}$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_{00}} = \frac{\partial}{\partial \alpha_{00}} \left(\frac{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\beta_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^r}{(y_{2i}-r)!r!} \right)$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_{00}} = u'v + v'u$$

$$= \left(\frac{\left(y_{2i} - r\right)\left(e^{\beta_{20}} - e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(-e^{\alpha_{00}}\right)}{\left(y_{2i} - r\right)!} \right) \left(\frac{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}} \right)^{r}}{r!} \right) +$$

$$\left(\frac{r\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}} \right)^{r-1} \left[\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^{2}} \right]}{r!} \right) \left(\frac{\left(e^{\beta_{20}} - e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}}{\left(y_{2i} - r\right)!} \right)$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_{0}} = \frac{\left(e^{\beta_{20}} - e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r} \left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}} \right)^{r}}{\left(y_{2i} - r\right)!\, r!} \left(\frac{\left(y_{2i} - r\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)}{\left(e^{\beta_{20}} - e^{\alpha_{00}}\right)} + \frac{r\left(\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^{2}} \right)}{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}} \right)} \right) \qquad (4.50)$$

Subtitusi persamaan (4.49) dan (4.50), sehingga didapatkan penurunan sebagai berikut.

$$\frac{\partial W_{i}}{\partial \alpha_{0}} = \sum_{r=0}^{\min\left(y_1, y_2\right)} \left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_{0}} W_{2i} + \frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_{0}} W_{1i} \right)$$

$$= \sum_{r=0}^{\min\left(y_1, y_2\right)} \left(\frac{\left[1 - \left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}} \right) \right]^{y_{1i}-r} \left(e^{\beta_{20}} - e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r} \left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}} \right)^{r}}{\left(y_{1i} - r\right)!\left(y_{2i} - r\right)!\, r!} \left(\frac{\left(y_{1i} - r\right)\left[-\left(\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^{2}} \right) \right]}{\left[1 - \left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}} \right) \right]} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \left(\frac{\left(y_{2i} - r\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)}{\left(e^{\beta_{20}} - e^{\alpha_{00}}\right)} + \frac{r\left(\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^{2}} \right)}{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}} \right)} \right) \right) \right) \qquad (4.51)$$

Sehingga didapatkan turunan pada persamaan (4.48) dengan subtitusi persamaan (4.51).

$$\frac{\partial l(\omega)}{\partial \alpha_{00}} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_{1i}-r)\left[-\left(\frac{(e^{\alpha_{00}})(e^{\beta_{10}})}{(e^{\beta_{10}})^2}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]} + \left(\frac{(y_{2i}-r)(-e^{\alpha_{00}})}{(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}})} + \frac{r\left(\frac{(e^{\alpha_{00}})(e^{\beta_{10}})}{(e^{\beta_{10}})^2}\right)}{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(e^{\alpha_{00}}) \qquad (4.52)$$

Turunan pertama $l(\boldsymbol{\omega})$ terhadap β_{10} sebagai berikut

$$\frac{\partial l(\omega)}{\partial \beta_{10}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{10}}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln W_i - \sum_{i=1}^{n}(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}) - \sum_{i=1}^{n}e^{\beta_{10}} + \sum_{i=1}^{n}y_{1i}\beta_{10}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \beta_{10}} - \sum_{i=1}^{n}(e^{\beta_{10}}) + \sum_{i=1}^{n}y_{1i} \qquad (4.53)$$

Untuk $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \beta_{10}}$

W_{1i}, W_{2i} diturunkan terhadap β_{10}

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \beta_{10}} = \frac{\partial\left(\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!}\right)}{\partial \beta_{10}}$$

$$= \frac{(y_{1i}-r)\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left[\frac{(e^{\alpha_{00}})(e^{\beta_{10}})}{(e^{\beta_{10}})^2}\right]}{(y_{1i}-r)!} \qquad (4.54)$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \beta_{10}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{10}}\left(\frac{(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}})^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}}{(y_{2i}-r)!\,r!}\right)$$

$$= \frac{r\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-1}\left(-\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^2}\right)\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}}{\left(y_{2i}-r\right)!r!} \qquad (4.55)$$

Dengan subtitusi persamaan (4.54) dan (4.55) diapatkan turunan sebagai berikut.

$$\frac{\partial W_i}{\partial \beta_{10}} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \beta_{10}}W_{2i} + \frac{\partial W_{2i}}{\partial \beta_{10}}W_{1i}\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}}{\left(y_{1i}-r\right)!\left(y_{2i}-r\right)!r!}\left(\frac{\left(\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^2}\right)}{\left(1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}+\frac{r\left(-\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}\right) \qquad (4.56)$$

Sehingga didapatkan hasil pada persamaan (4.53) dengan subtitusi persamaan (4.56) sebagai berikut

$$\frac{\partial l(\omega)}{\partial \beta_{10}} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^2}\right)}{\left(1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}+\frac{r\left(-\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^2}\right)}{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta_{10}}\right)+\sum_{i=1}^{n}y_{1i} \qquad (4.57)$$

Turunan pertama $l(\boldsymbol{\omega})$ terhadap β_{20} sebagai berikut

$$\frac{\partial l(\omega)}{\partial \beta_{20}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{20}}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln W_i - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)-\sum_{i=1}^{n}e^{\beta_{10}}+\sum_{i=1}^{n}y_{1i}\beta_{10}\right)$$

$$\frac{\partial l(\omega)}{\partial \beta_{20}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \beta_{20}} - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta_{20}}\right) \qquad (4.58)$$

Untuk $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \beta_{20}}$

W_{1i}, W_{2i} diturunkan terhadap β_{20}

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \beta_{20}} = \frac{\partial\left(\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{(y_{1i}-r)!}\right)}{\partial \beta_{20}} = 0$$

$$\frac{\partial W_{2i}}{\partial \beta_{20}} = \frac{\partial}{\partial \beta_{20}}\left(\frac{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}}{(y_{2i}-r)!r!}\right)$$

$$= \frac{(y_{2i}-r)\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(e^{\beta_{20}}\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}}{(y_{2i}-r)!r!}$$

$$\frac{\partial W_{i}}{\partial \beta_{20}} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \beta_{20}}W_{2i} + \frac{\partial W_{2i}}{\partial \beta_{20}}W_{1i}\right)$$

$$= \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}}{(y_{1i}-r)!(y_{2i}-r)!r!}\left(\frac{(y_{2i}-r)\left(e^{\beta_{20}}\right)}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)}\right)\right) \quad (4.59)$$

Sehingga didapatkan hasil pada persamaan (4.58) dengan subtitusi persamaan (4.59) sebagai berikut

$$\frac{\partial l(\omega)}{\partial \beta_{20}} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(y_{2i}-r)\left(e^{\beta_{20}}\right)}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta_{20}}\right) \quad (4.60)$$

Turunan kedua persamaan (4.48) terhadap α_{00} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 l(\omega)}{\partial \alpha_{00}\partial \alpha_{00}^T} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial \alpha_{00}\partial \alpha_{00}^T}\right) - \left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_{00}}\frac{\partial W_i}{\partial \alpha_{00}^T}\right)\right] + \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\alpha_{00}}\right) \quad (4.61)$$

Sebelum mendapatkan turunan persamaan (4.48), akan dicari terlebih dahulu turunan kedua W_i terhadap α_{00}.

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \alpha_{00}\partial \alpha_{00}^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial \alpha_{00}\partial \alpha_{00}^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial \alpha_{00}^T} + \frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial \alpha_{00}\partial \alpha_{00}^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial \alpha_{00}^T}\right)$$

Untuk

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\alpha_{00}\partial\alpha_{00}^T}=\frac{\partial}{\partial\alpha_{00}^T}\left(\frac{(y_{1i}-r)\left[1-\left(\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left[-\left(\frac{(e^{\alpha_{00}})(e^{\beta_{10}})}{(e^{\beta_{10}})^2}\right)\right]}{(y_{1i}-r)!}\right)$$

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\alpha_{00}\partial\alpha_{00}^T}=\frac{(y_{1i}-r-1)(y_{1i}-r)\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r-2}\left(-\left(\frac{(e^{\alpha_{00}})(e^{\beta_{10}})}{(e^{\beta_{10}})^2}\right)\right)\left[-\left(\frac{(e^{\alpha_{00}})(e^{\beta_{10}})}{(e^{\beta_{10}})^2}\right)\right]}{(y_{1i}-r)!}$$

$$+\frac{(y_{1i}-r)\left[-\left(\frac{(e^{\alpha_{00}})(e^{\beta_{10}})}{(e^{\beta_{10}})^2}\right)\right]\left[1-\left(\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)\right]^{y_{1i}-r-1}}{(y_{1i}-r)!} \qquad (4.62)$$

Turunan kedua W_{2i} terhadap α_{00} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\alpha_{00}\partial\alpha_{00}^T}=\frac{\partial}{\partial\alpha_{00}^T}\left(\frac{(y_{2i}-r)\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^r}{(y_{2i}-r)!r!}\right.$$

$$\left.+\frac{r\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-1}\left[\frac{(e^{\alpha_{00}})(e^{\beta_{10}})}{(e^{\beta_{10}})^2}\right]}{(y_{2i}-r)!r!}\right)$$

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\alpha_{00}\partial\alpha_{00}^T}=\frac{(y_{2i}-r)(y_{2i}-r-1)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^r\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r-2}\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)}{(y_{2i}-r)!\mathrm{r}!}$$

$$+\frac{\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}\left(y_{2i}-r\right)\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r-1}}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

$$+\frac{r\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-1}\left(y_{2i}-r\right)\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}e^{\beta_{10}}}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^{2}}\right)}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

$$+\frac{r\left(r-1\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-2}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}e^{\beta_{10}}}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^{2}}\right)\left[\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^{2}}\right]}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

$$+\frac{r\left(y_{2i}-r\right)\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-1}\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

$$+\frac{r\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-1}}{\left(y_{2i}-r\right)!r!} \qquad (4.63)$$

Sehingga didapatkan turunan kedua dengan mensubtitusi persamaan (4.62) dan (4.63)

$$\frac{\partial^{2}W_{i}}{\partial\alpha_{00}\partial\alpha_{00}^{T}}=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^{2}W_{1i}}{\partial\alpha_{00}\partial\alpha_{00}^{T}}\frac{\partial W_{2i}}{\partial\alpha_{00}^{T}}+\frac{\partial^{2}W_{2i}}{\partial\alpha_{00}\partial\alpha_{00}^{T}}\frac{\partial W_{1i}}{\partial\alpha_{00}^{T}}\right)$$

$$\frac{\partial^{2}W_{i}}{\partial\alpha_{00}\partial\alpha_{00}^{T}}=W_{i}\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\left(y_{1i}-r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)^{2}}\right.$$

$$+\frac{r\left(y_{1i}-r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{2}}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{2}}+\frac{\left(y_{1i}-r\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}$$

$$+\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(y_{2i}-r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]\left(e^{\alpha_{00}}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^2}$$

$$+\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)}+\frac{r\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}$$

$$\left.+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}+\frac{r\left(r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}\right)\left(4.64\right)$$

Dimana

$$W_{i\omega}=\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^r}{\left(y_{1i}-r\right)!\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

Sehingga turunan kedua $l\left(\omega\right)$ terhadap α_{00} dengan mensubtitusi persamaan (4.64) sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 l\left(\omega\right)}{\partial\alpha_{00}\partial\alpha_{00}^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\alpha_{00}\partial\alpha_{00}^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial W_i}{\partial\alpha_{00}}\frac{\partial W_i}{\partial\alpha_{00}^T}\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\alpha_{00}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_{i\omega}}W_{i\omega}\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\left(\frac{\left(y_{1i}-r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)\left(1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)^2}\right.\right.\right.$$

$$+\frac{r\left(y_{1i}-r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{2}}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{2}}+\frac{\left(y_{1i}-r\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}$$

$$+\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(y_{2i}-r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]\left(e^{\alpha_{00}}\right)^{2}}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{2}}$$

$$+\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(y_{1i}-r\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)}+\frac{r\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left(y_{2i}-r\right)\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}$$

$$\left.\left.+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}+\frac{r\left(r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}\right)\right)$$

$$-\left(\frac{1}{W_{i\omega}{}^{2}}W_{i\omega}\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\left(\frac{\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}+\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)}+r\right)\right.$$

$$\left.\left.\left.W_{i\omega}\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\left(\frac{\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}+\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)}+r\right)\right)\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(4.65\right)$$

Dimana

$$W_i=\sum_{r=0}^{\min\left(y_1,y_2\right)}\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}}{\left(y_{1i}-r\right)!\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

Turunan kedua persamaan (4.53) terhadap β_{10} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 l(\omega)}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial\beta_{10}}\frac{\partial W_i}{\partial\beta_{10}^T}\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta_{10}}\right) \qquad (4.66)$$

Turunan kedua W_i terhadap β_{10} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial\beta_{10}^T}+\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial\beta_{10}^T}\right)$$

Turunan kedua W_{1i} terhadap β_{10} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}=\frac{\partial\left(\dfrac{(y_{1i}-r)\left[1-\left(\dfrac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left[\dfrac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^2}\right]}{(y_{1i}-r)!}\right)}{\partial\beta_{10}^T}$$

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}=\frac{(y_{1i}-r-1)(y_{1i}-r)\left[1-\left(\dfrac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r-2}\left(-\left(\dfrac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)\left(\dfrac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{(y_{1i}-r)!}$$

$$+\frac{(y_{1i}-r)\left[1-\left(\dfrac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left(-\left(\dfrac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}{(y_{1i}-r)!}$$

Turunan kedua W_{2i} terhadap β_{10} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}=\frac{\partial\left(\dfrac{r\left(\dfrac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-1}\left(-\dfrac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^2}\right)\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}}{(y_{2i}-r)!r!}\right)}{\partial\beta_{10}^T}$$

$$=\frac{(r-1)r\left(\dfrac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-2}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\dfrac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^2+r\left(\dfrac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-1}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\dfrac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{(y_{2i}-r)!r!}$$

Turunan kedua W_i terhadap β_{10} dengan penjabaran secara terperinci dapat dilihat pada Lampiran 2.

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial\beta_{10}^T}+\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial\beta_{10}^T}\right)$$

$$=W_i\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{r(y_{1i}-r-1)(y_{1i}-r)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^2}+\frac{(y_{1i}-r)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}+\frac{(r-1)r\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}\right.$$

$$\left.+\frac{r(y_{1i}-r)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}\right) \qquad (4.67)$$

Dimana

$$W_i=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^r}{(y_{1i}-r)!(y_{2i}-r)!r!}$$

Sehingga turunan kedua $l(\omega)$ terhadap β_{10} dengan mensubtitusi persamaan (4.67) sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 l(\omega)}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial\beta_{10}}\frac{\partial W_i}{\partial\beta_{10}^T}\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta_{10}}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}W_i\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{r(y_{1i}-r-1)(y_{1i}-r)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^2}+\frac{(y_{1i}-r)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}+\frac{(r-1)r\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}\right.\right.\right.$$

$$+\frac{r\left(y_{1i}-r\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}\Bigg)\Bigg)-\left(\frac{1}{W_i^2}W_i\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left(1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}+\frac{r\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}\right)\right.$$

$$\left.W_i\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left(1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}+\frac{r\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}\right)\right)\Bigg]-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta_{10}}\right) \qquad (4.68)$$

Dimana

$$W_i=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}}{\left(y_{1i}-r\right)!\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

Turunan kedua persamaan (4.60) terhadap β_{20} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 l(\omega)}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial\beta_{20}}\frac{\partial W_i}{\partial\beta_{20}^T}\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\beta_{20}}\right) \qquad (4.69)$$

Turunan kedua W_i terhadap β_{20} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T}=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial\beta_{20}^T}+\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial\beta_{20}^T}\right)$$

Turunan kedua W_{1i} terhadap β_{20} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T}=\frac{\partial^2\left(\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}}{\left(y_{1i}-r\right)!}\right)}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T}=0 \qquad (4.70)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (4.70) turunan kedua W_i terhadap β_{20} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T}=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(0\frac{\partial W_{2i}}{\partial\beta_{20}^T}+\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T}0\right)$$

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T}=0 \qquad (4.71)$$

Maka dengan mensubtitusi persamaan (4.71) turunan kedua persamaan (4.60) terhadap β_{20} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 l(\omega)}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_{i\omega}}0\right)-\left(\frac{1}{W_{i\omega}{}^2}W_{i\omega}\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{(y_{2i}-r)(e^{\beta_{20}})}{(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}})}\right)W_{i\omega}\right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{(y_{2i}-r)(e^{\beta_{20}})}{(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}})}\right)\right)\right]-\sum_{i=1}^{n}(e^{\beta_{20}})$$

$$\frac{\partial^2 l(\omega)}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T}=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{(y_{2i}-r)(e^{\beta_{20}})}{(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}})}\right)^2\right]-\sum_{i=1}^{n}(e^{\beta_{20}}) \qquad (4.72)$$

Dimana

$$W_{i\omega}=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}}{(y_{1i}-r)!(y_{2i}-r)!r!}$$

Turunan kedua persamaan (4.48) terhadap β_{20} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 l(\omega)}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{20}^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{20}^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial\alpha_{00}}\frac{\partial W_i}{\partial\beta_{20}^T}\right)\right] \qquad (4.73)$$

Turunan W_i terhadap β_{20}

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{20}^T}=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{20}^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial\beta_{20}^T}+\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{20}^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial\beta_{20}^T}\right)$$

Dicari terlebih dahulu turunan

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{20}^T}=\frac{\partial\left(\dfrac{(y_{1i}-r)\left[1-\left(\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left[-\left(\frac{(e^{\alpha_{00}})(e^{\beta_{10}})}{(e^{\beta_{10}})^2}\right)\right]}{(y_{1i}-r)!}\right)}{\partial\beta_{20}^T}=0 \qquad (4.74)$$

Dengan mensubtitusi persamaan (4,74) turunan kedua W_i terhadap β_{20} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{20}^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(0 \frac{\partial W_{2i}}{\partial\beta_{20}^T} + \frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{20}^T} 0 \right)$$

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{20}^T} = 0 \qquad (4.75)$$

Maka dengan mensubtitusi persamaan (4.75). Turunan kedua persamaan (4.73) sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 l(\omega)}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{20}^T} = -\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{(y_{1i}-r)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]} + \frac{(y_{2i}-r)(-e^{\alpha_{00}})}{(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}})} + r \right) \left(\frac{(y_{2i}-r)(e^{\beta_{20}})}{(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}})} \right) \right] \qquad (4.76)$$

Turunan kedua persamaan (4.48) terhadap β_{10} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 l(\omega)}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{10}^T} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{W_i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{10}^T} \right) - \left(\frac{1}{W_i^2} \frac{\partial W_i}{\partial\alpha_{00}} \frac{\partial W_i}{\partial\beta_{10}^T} \right) \right] \qquad (4.78)$$

Turunan kedua W_i terhadap β_{10} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{10}^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{10}^T} \frac{\partial W_{2i}}{\partial\beta_{10}^T} + \frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{10}^T} \frac{\partial W_{1i}}{\partial\beta_{10}^T} \right)$$

Turunan kedua W_{1i} terhadap α_{00} dan β_{10}

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{10}^T} = \frac{\partial \left(\frac{(y_{1i}-r)\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1} \left[-\left(\frac{(e^{\alpha_{00}})(e^{\beta_{10}})}{(e^{\beta_{10}})^2}\right)\right]}{(y_{1i}-r)!} \right)}{\partial\beta_{10}^T}$$

$$=\frac{\left(y_{1i}-r-1\right)\left(y_{1i}-r\right)\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r-2}\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)\left[-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}{\left(y_{1i}-r\right)!}$$

$$+\frac{\left(y_{1i}-r\right)\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left(y_{1i}-r\right)!} \qquad (4.79)$$

Turunan kedua $W_{2i\omega}$ terhadap α_{00} dan β_{10} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{10}^T}=\frac{\partial}{\partial\beta_{10}^T}\left(\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(-e^{\alpha_{00}}\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}\right.$$

$$\left.+\frac{r\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-1}\left[\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^{2}}\right]}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}\right)$$

$$\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{10}^T}=\frac{r\left(y_{2i}-r\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-1}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r-1}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

$$+\frac{r\left(r-1\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-2}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

$$+\frac{r\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r-1}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}{\left(y_{2i}-r\right)!r!} \qquad (4.80)$$

subsitusi dengan persamaan (4.79) dan (4.80) sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{10}^T}=W_i\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{r(y_{1i}-r-1)(y_{1i}-r)\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^2\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^2}+\frac{r(y_{1i}-r)\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}\right.$$

$$\left.+\frac{r(y_{2i}-r)(y_{1i}-r)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)}+\frac{r(r-1)(y_{1i}-r)\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}+\frac{r(y_{1i}-r)\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}\right)$$

Dimana

$$W_i=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}}{(y_{1i}-r)!(y_{2i}-r)!r!}$$

Turunan kedua persamaan (4.48) terhadap β_{10} dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 l(\omega)}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{10}^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}W_i\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{r(y_{1i}-r-1)(y_{1i}-r)\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^2\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^2}\right.\right.\right.$$

$$+\frac{r(y_{1i}-r)\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}+\frac{r(y_{2i}-r)(y_{1i}-r)\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)}+\frac{r(r-1)(y_{1i}-r)\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}$$

$$\left.\left.+\frac{r(y_{1i}-r)\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}\right)\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}W_i\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{(y_{1i}-r)\left[-\left(\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^2}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}\right.\right.$$

$$+\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)}+\frac{r\left(\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^{2}}\right)}{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}\Bigg) W_i \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\left(y_{1i}-r\right)\left[-\left(\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^{2}}\right)\right]}{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(y_{2i}-r\right)\left(-e^{\alpha_{00}}\right)}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)}+\frac{r\left(\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^{2}}\right)}{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg] \tag{4.81}$$

Dimana

$$W_i=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\frac{\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r}\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)^{y_{2i}-r}\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)^{r}}{\left(y_{1i}-r\right)!\left(y_{2i}-r\right)!r!}$$

Turunan kedua persamaan (4.53) terhadap β_{10} dan β_{20} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 l(\omega)}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{20}^T}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{W_i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{20}^T}\right)-\left(\frac{1}{W_i^2}\frac{\partial W_i}{\partial\beta_{10}}\frac{\partial W_i}{\partial\beta_{20}^T}\right)\right] \tag{4.82}$$

Turunan kedua W_i terhadap β_{10} dan β_{20} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{20}^T}=\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)}\left(\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{20}^T}\frac{\partial W_{2i}}{\partial\beta_{20}^T}+\frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{20}^T}\frac{\partial W_{1i}}{\partial\beta_{20}^T}\right)$$

Turunan kedua W_{1i} terhadap β_{10} dan β_{20} sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 W_{1i}}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{20}^T}=\frac{\partial\left(\frac{\left(y_{1i}-r\right)\left[1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right]^{y_{1i}-r-1}\left[\frac{\left(e^{\alpha_{00}}\right)\left(e^{\beta_{10}}\right)}{\left(e^{\beta_{10}}\right)^{2}}\right]}{\left(y_{1i}-r\right)!}\right)}{\partial\beta_{20}^T}=0 \tag{4.83}$$

Dengan mensubtitusi persamaan (4.83) didapatkan turunan kedua W_i terhadap β_{10} dan β_{20} sebgai berikut

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{20}^T} = \sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \left(0\frac{\partial W_{2i}}{\partial\beta_{20}^T} + \frac{\partial^2 W_{2i}}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{20}^T} 0 \right)$$

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{20}^T} = 0 \qquad (4.84)$$

Turunan kedua persamaan (4.53) terhadap β_{10} dan β_{20} dengan mensubtitusi persamaan (4.84) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 l(\omega)}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{20}^T} = -\sum_{r=0}^{\min(y_1,y_2)} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)}{\left(1-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)} + \frac{r\left(-\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)\right)}{\left(\frac{e^{\alpha_{00}}}{e^{\beta_{10}}}\right)} \right) \left(\frac{(y_{2i}-r)\left(e^{\beta_{20}}\right)}{\left(e^{\beta_{20}}-e^{\alpha_{00}}\right)} \right) \right]$$

Turunan pertama fungsi ln likelihood terhadap $\alpha_{00}, \beta_{10}, \beta_{20}$ merupakan persamaan yang tidak eksplisit sehingga digunakan analisis numeril yaitu iterasi *Newton-Raphson* untuk menduga parameter dibawah H_0 dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)}\right)$$

dimana

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \left[\alpha_{00}^{\mathrm{T}}\ \beta_{10}^{\mathrm{T}}\ \beta_{20}^{\mathrm{T}}\right]^T$$

$$\mathbf{g}^T\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)}\right) = \left(\left(\frac{\partial l(\hat{\boldsymbol{\omega}})}{\partial\alpha_{00}}\right)^T \left(\frac{\partial l(\hat{\boldsymbol{\omega}})}{\partial\beta_{10}}\right)^T \left(\frac{\partial l(\hat{\boldsymbol{\omega}})}{\partial\beta_{20}}\right)^T \right)^T_{\hat{\boldsymbol{\omega}}=\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)}}$$

$$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\hat{\boldsymbol{\omega}})}{\partial\alpha_{00}\partial\alpha_{00}^T} & \frac{\partial^2 l(\hat{\boldsymbol{\omega}})}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{10}^T} & \frac{\partial^2 l(\hat{\boldsymbol{\omega}})}{\partial\alpha_{00}\partial\beta_{20}^T} \\ & \frac{\partial^2 l(\hat{\boldsymbol{\omega}})}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{10}^T} & \frac{\partial^2 l(\hat{\boldsymbol{\omega}})}{\partial\beta_{10}\partial\beta_{20}^T} \\ \textit{simetris} & & \frac{\partial^2 l(\hat{\boldsymbol{\omega}})}{\partial\beta_{20}\partial\beta_{20}^T} \end{bmatrix}$$

Adapun langkah-langkah penaksiran parameter dengan iterasi *Newton-Raphson* sebagai berikut:

1. Menentukan nilai awalan untuk parameter $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(0)} = \left[\alpha_{00(0)}^{\mathrm{T}}\ \beta_{10(0)}^{\mathrm{T}}\ \beta_{20(0)}^{\mathrm{T}} \right]^{T}$.
2. Membentuk vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)}\right)$

$$\mathbf{g}^{T}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)}\right) = \left(\left(\frac{\partial l\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\right)}{\partial \alpha_{00}}\right)^{T} \left(\frac{\partial l\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\right)}{\partial \beta_{10}}\right)^{T} \left(\frac{\partial l\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\right)}{\partial \beta_{20}}\right)^{T} \right)^{T}_{\hat{\boldsymbol{\omega}}=\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)}}$$

3. Membentuk matriks Hessian $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 l\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\right)}{\partial \alpha_{00} \partial \alpha_{00}^{T}} & \dfrac{\partial^2 l\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\right)}{\partial \alpha_{00} \partial \beta_{10}^{T}} & \dfrac{\partial^2 l\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\right)}{\partial \alpha_{00} \partial \beta_{20}^{T}} \\ & \dfrac{\partial^2 l\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\right)}{\partial \beta_{10} \partial \beta_{10}^{T}} & \dfrac{\partial^2 l\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\right)}{\partial \beta_{10} \partial \beta_{20}^{T}} \\ \textit{simetris} & & \dfrac{\partial^2 l\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}\right)}{\partial \beta_{20} \partial \beta_{20}^{T}} \end{bmatrix}$$

4. Memasukan nilai $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(0)}$ kedalam elemen-elemn vektor gradien $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(0)}\right)$ dan matriks Hessian $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(0)}\right)$ sehingga diperoleh vektor $\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(0)}\right)$ dan matriks $\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(0)}\right)$.
5. Lakukan iterasi mulai dari $m = 0$ pada persamaan

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m+1)} = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)} - \mathbf{H}^{-1}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)}\right)\mathbf{g}\left(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)}\right)$$

   Nilai $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)}$ merupakan kumpulan penaksir parameter yang konvergen saat iterasi ke-*m*.
6. Jika belum mendapatkan penaksir parameter yang konvergen, maka kembali ke langkah 5. Iterasi akan berhenti apabila nilai dari $\left\| \hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m+1)} - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{(m)} \right\| \le \varepsilon$, ε adalah suatu nilai yang sangat kecil.

Setelah nilai $\hat{\alpha}_{00}, \hat{\beta}_{10}, \hat{\beta}_{20}$ diperoleh, maka perhitunggan statistik uji parameter sebagai berikut

$$G^2 = -2\ln\left[\frac{L(\hat{\Omega})}{L(\hat{\omega})}\right]$$

$$= 2\left[\ln L(\hat{\Omega}) - \ln L(\hat{\omega})\right]$$

$$G^2 = 2\left[\sum_{i=1}^{n}\ln W_i - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_2} - e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\alpha}}_0}\right) - \sum_{i=1}^{n} e^{\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_1} + \sum_{i=1}^{n} y_{1i}\mathbf{x}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{n}\ln W_i - \sum_{i=1}^{n}\left(e^{\hat{\beta}_{20}} - e^{\alpha_{00}}\right) - \sum_{i=1}^{n} e^{\hat{\beta}_{10}} + \sum_{i=1}^{n} y_{1i}\hat{\beta}_{10}\right]$$

G^2 merupakan devians model regresi *conditioanal bivariate Poisson* dengan menggunakan pendekatan dari distribusi *Chi-square* (χ^2) dengan derajat bebas v. v adalah banyaknya parameter model dibawah populasi dikurangi banyaknya parameter dibawah H_0. Kriteria penolakan H_0 adalah jika $G^2_{hitung} > \chi^2_{(\alpha;v)}$. Jika pengujian hipotesis menolak H_0 maka kesimpulan yang diperoleh adalah variabel penjelas berpengaruh signifikan terhadap variable respon secara bersama-sama.

4.3 Aplikasi Model *Conditional Bivariate Poisson Regression* (CBPR)

Model *Conditional Bivariate Poisson Regression* (CBPR) merupakan model alternatif dari model *joint bivariate poisson* dengan berdasarkan teori *conditional probability*. *Joint density* model *conditional bivariate poisson* dapat ditulis sebagai hasil perkalian dari marginal dan *conditional distribution*. Model tersebut memiliki performa sama dengan *joint bivariate Poisson.* Pada penelitian ini, model *Conditional Bivariate Poisson Regression* (CBPR) akan diaplikasikan pada jumlah kasus Berat Badan Bayi Lahir rendah (BBLR) dan kematian bayi di Kota Surabaya tahun 2015.

4.3.1 Karakteristik Variabel Respon dan Variabel Penjelas

Variabel respon yang digunakan dalam penelitian adalah jumlah kematian bayi dan jumlah berat badan bayi lahir rendah (BBLR) di Kota Surabaya tahun 2015. Statistika deskriptif dari variabel respon disajikan pada Tabel 4.1

Tabel 4.1 Statistika Deskriptif Variabel Respon

Variabel Respon	Median	koefisien variansi	Minimum	Maksimum
Jumlah kasus BBLR (Y_1)	34,00	76,04	0,00	114,00
Jumlah kasus kematian bayi (Y_2)	8,00	58,68	2,00	21,00

Pada Tabel 4.1 diatas menyajikan statistika deskriptif dari dua varaibel respon. Median dari jumlah kasus BBLR di setiap kecamatan di Kota Surabaya sebesar 34 artinya setengah dari kecamatan memiliki jumlah kasus BBLR diatas 34 setengahnya lagi dibawah 34 kasus. Sedangakan median jumlah kematian bayi di setiap kecamatan memiliki kasus sebesar 8 yang artinya setengah dari kecamatan memiliki jumlah kasus kematian bayi diatas 8 dan setengahnya lagi dibawah 8 kasus. Nilai koefisien variasi jumlah kasus BBLR sebesar 76,04 dan nilai koefisien variansi kasus kematian bayi sebesar 58,68. Hal tersebut menunjukkan bahwa jumlah kasus BBLR lebih bervariasi dari pada jumlah kasus kematian bayi. Jumlah kasus BBLR tertinggi sebesar 114 terjadi di kecamatan Semampir. Jumlah kasus kematian bayi tertinggi sebesar 21bayi terjadi di kecamatan Suko-manunggal.

Tabel 4.2 Statistika Deakriptif variabel Penjelas

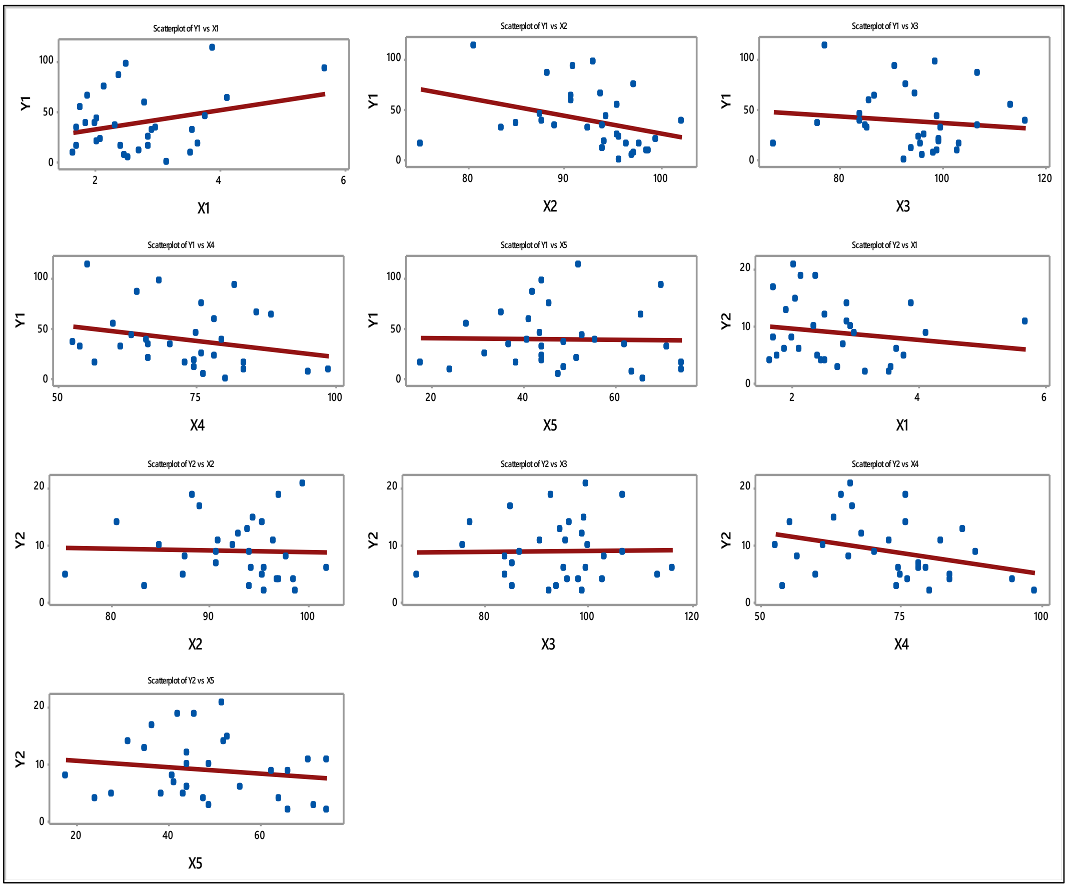
Variabel Penjelas	Rata-rata	Standar Deviasi	Minimum	Maksimum
Rasio Tenaga Kesehatan	2,711	0,9	1,65	5,7
Persentase Persalinan oleh Tenaga kesehatan	92,61	5,9	75,18	102,07
Persentase Ibu Hamil Mendapatkan Tablet Fe3	94,30	10,66	67,09	116,45
Persentase Rumah Tangga ber-PHBS	73,00	11,62	52,67	98,66
Rasio Puskesmas	48,63	14,72	17,57	74,66

Tabel 4.2 menunjukkan bahwa rata-rata rasio tenga kesehatan pada setiap kecamatan sebesar 2,711. Nilai standar deviasi sebesar 0,9 menunjukkan bahwa rasio tenaga medis antar kecamatan tidak cukup berbeda. Kecamatan Genteng memiliki rasio terendah yaitu 1,65 sedangkan kecamtan Tambaksari memiliki rasio tertinggi yaitu 5,7. Rata-rata persentase persalinan oleh tenaga kesehatan

pada setiap kecamatan sebesar 92,61%. Nilai standar deviasi sebesar 5,9% menunjukkan bahwa persentase persalinan oleh tenaga medis antar kecamatan cukup berbeda. Kecamatan Bulak memiliki persentase terendah sebesar 75,18% sedangkan kecamatan Benowo memiliki persentase tertinggi sebesar 102,07%. Rata-rata persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 pada setiap kecamatan sebesar 94,3%. Nilai standar deviasi sebesar 10,66% menunjukkan bahwa persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 antar kecamatan cukup berbeda. Kecamatan Bulak memiliki persentase ibu hamil mendapatkan tabet Fe3 terendah sebesar 67,09% sedngkan kecamatan Benowo memiliki persentase tertinggi sebesar 116,45%. Rata-rata persentase rumah tangga ber-PHBS pada setiap kecamatan sebesar 73%. Nilai standar deviasi sebesar 11,62% menunjukkan bahwa persentase rumh tangga ber-PHBS antar kecamatan cukup berbeda. Kecamatan Pakal memiliki persentase terendah sebesar 52,67% sedangkan kecamatan Tenggilis memiliki persentase tertinggi sebesar 98,66%. Rata-rata rasio puskesmas pada setiap kecamatan sebesar 48,63. Nilai standar deviasi sebesar 14,72 menunjukkan bahwa rasio puskesmas antar kecamatan cukup berbeda. Kecamatan Lakarsantri memiliki rasio terendah sebesar 17,57 dan kecamatan Karang pilang memiliki rasio tertinggi sebesar 74,66.

4.3.2 Pola Hubungan Variabel Respon dengan Variabel Penjelas

Pola hubungan variabel respon denagn variabel penjelas dapat dilihat pada Gambar 4.1. Berdasarkan Gambar 4.1 rasio tenaga kesehatan $\left(X_1\right)$ memiliki hubungan positif dengan jumlah kasus Berat Badan Lahir Rendah (BBLR) yang berarti bahwa apabila rasio tenaga kesehatan meningkat maka jumlah kasus BBLR ikut meningkat. Namun rasio tenaga kesehatan $\left(X_1\right)$ memiliki hubungan negatif dengan jumlah kematian bayi yang berarti bahwa apabila rasio tenaga kesehatan $\left(X_1\right)$ meningkat maka jumlah kematian bayi menurun. Hal tersebut dikarenakan semakin banyak tenaga kesehatan maka akan semakin banyak pula bayi yang ditimbang dan tercatat. Sehingga jumlah kasus BBLR semakin meningkat di setiap kecamatan.



Gambar 4.1 Diagram Pencar antar Variabel Respon dan Variabel Penjelas

Persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_2) memiliki hubungan negatif dengan jumlah kasus BBLR dan kematian bayi yang berarti bahwa apabila persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_2) meningkat maka jumlah kasus BBLR dan kematian bayi menurun. Persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 (X_3) memiliki hubungan negatif dengan jumlah kasus BBLR yang berarti bahwa apabila persentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe3 (X_3) meningkat maka jumlah BBLR dan kematian bayi menurun. Persentase rumah tangga ber-PHBS (X_4) memiliki hubungan negatif dengan jumlah kasus BBLR dan kematian bayi yang berarti bahwa apabila persentase rumah tangga ber-PHBS (X_4) meningkat maka jumlah kasus BBLR dan kematian bayi menurun. Rasio puskesmas (X_5) memiliki hubungan negatif dengan jumlah kasus BBLR dan kematian bayi yang berarti bahwa apabila rasio puskesmas (X_5) meningkat maka jumlah kasus BBLR dan kematian bayi menurun.

4.3.3 Pemeriksaan Korelasi Antar Variabel Respon

Variabel respon pada analisis regresi *bivariate* harus memiliki korelasi. Berdasarkan studi epidemiologi, bayi Berat Badan Lahir Rendah (BBLR) memiliki risiko kematian 20 kali lipat lebih besar di bandingkan dengan bayi lahir dengan berat badan normal (WHO UNICEF, 2004). Penelitian ini menggunakan data jumlah kasus Berat Badan Lahir Rendah (BBLR) (Y_1) dan jumlah kasus kematian bayi (Y_2) sebagai variabel respon. Korelasi antar variabel respon sebesar 0,522 dapat dilihat dilampiran 4. Hipotesis yang digunakan dalam pengujian adalah sebagai berikut:

$H_0 : \rho_{12} = 0;$ tidak terdapat hubungan antara Y_1 dan Y_2

$H_1 : \rho_{12} \neq 0;$ terdapat hubungan anatara Y_1 dan Y_2

Berdasarkan persamaan (2.16), statistik uji t yang digunakan dalam pengujian sebagai berikut:

$$t_{hit} = \frac{0,522\sqrt{31-2}}{\sqrt{1-(0,522)^2}} = 3,296$$

Nilai t yang diperoleh sebesar 3,296 lebih besar daripada $t_{\frac{0.05}{2},29} = 2,045$ sehingga keputusan yang diperoleh adalah tolak H_0. Kesimpulannya adalah terdapat korelasi antara jumlah kasus BBLR dan jumlah kasus kematian bayi di Kota Surabaya tahun 2015.

4.3.4 Pengujian Distribusi Variabel Respon

Variabel respon pada model regresi *conditional bivariate Poisson* harus memiliki distribusi *bivariate Poisson* oleh karena itu dilakukan pengujian distibusi terhadap variabel respon. Hipotesis yang digunakan sebagai berikut:

$H_0 : F(x) = F_0(x)$ untuk Y_1 dan Y_2 mengikuti distribusi *bivariate poisson*

$H_1 : F(x) \neq F_0(x)$ untuk Y_1 dan Y_2 tidak mengikuti distribusi *bivariate poisson*

Berdasarkan persamaan (2.18), statistik uji yang digunakan sebagai berikut:

$$I_B = \frac{\left[31(9,097\times 872,38)-\left(2\times(80,92)^2\right)+(39,484\times 27,57)\right]}{(39,484\times 9,097)-(80,92)^2}$$
$$= 20,3958$$

nilai I_B yang diperoleh sebesar 20,3958. Nilai tersebut lebih kecil dari $\chi^2_{0,05;59} = 42,339$, maka keputusan yang diperoleh gagal tolak H_0. Kesimpulannya jumlah kasus Berat Badan Bayi Lahir Rendah (BBLR) (Y_1) dan jumlah kasus kematian bayi (Y_2) berdistribusi *bivariate Poisson* pada derajat kesalahan 5%.

4.3.5 Pemeriksaan Multikolinieritas

Pemeriksaan multikolinieritas dilakukan untuk mengetahui ada atau tidaknya korelasi antar variabel penjelas secara bersama-sama. Ada beberapa cara untuk mendeteksi adanya multikolinieritas yaitu dengan menggunakan matriks koefisien korelasi dan nilai *Variance Inflation Factor* (VIF). Jika nilai VIF lebih besar dari 10, maka ada multikolinieritas antar variabel penjelas. Berikut ini merupakan matriks koefisien korelasi antar variabel penjelas. Adanya multikolinieritas dapat dilihat dari koefisien korelasi pearson jika nilainya lebih besar dari 0,95.

Tabel 4.3 Koefisien Korelasi Antar Variabel Prediktor

Variabel Prediktor	X_1	X_2	X_3	X_4
X_2	-0,282			
X_3	-0,290	0,803		
X_4	0,188	0,331	0,063	
X_5	0,600	0,014	-0,086	0,273

Berdasarkan Tabel 4.3 semua koefisien korelasi antar variabel penjelas kurang dari 0,95 maka tidak adanya multikolinieritas pada data yang digunakan. Kriteria lainya yang dapat digunakan untuk mendeteksi adanya multikolinieritas adalah nilai VIF. Berikut merupakan nilai VIF masing-masing varibel penjelas.

Tabel 4.4 Nilai VIF dari Variabel Penjelas

Variabel	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
VIF	1,861	3,920	3,267	1,422	1,693

Berdasarkan Tabel 4.4 nilai VIF masing-masing variabel penjelas menunjukan nilai tidak lebih dari 10. Hal tersebut menunjukkan bahwa tidak terjadi multikolinieritas anatar variabel penjelas, sehingga dapat dilanjutkan ke pemodelan regresi *condotional bivariate Poisson*.

4.3.6 Pemodelan Berat badan Bayi Lahir Rendah (BBLR) dan Kematian Bayi di Kota Surabaya Tahun 2015 dengan Regresi Poisson Univariat

Pemodelan jumlah kasus berat badan lahir rendah (BBLR) dengan regresi poisson univariate dan dilakukan pengujian secara serentak. Pengujian hipotesis secara serentak terhadap parameter dilakukan untuk mengetahui variabel penjelas mempengaruhi variabel respon atau tidak. Hipotesis yang digunakan sebagai berikut:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_l = 0$

H_1: paling sedikit ada satu $\beta_j \neq 0;\ j = 1, 2, ..., k$

Dari pemodelan regresi Poisson univariate menunjukkan bahwa nilai $D\left(\hat{\beta}\right)=686,10$. Nilai tersebut dibandingkan dengan nilai $\chi^2_{(5;0,05)}$ yaitu 11,070. Nilai $D\left(\hat{\beta}\right)$ lebih besar dari nilai $\chi^2_{(5;0,05)}$ sehingga keputusan yang dihasilkan adalah tolak H_0 yang berarti paling sedikit ada satu variabel yang berpengaruh signifikan dalam model.

Setelah pengujian hipotesis secara serentak terhadap parameter dilakukan pengujian secara parsial. Berikut merupakan nilai estimasi parameter dan pengujian secara parsial untuk jumlah kasus berat badan lahir rendah (BBLR). Berdasarkan Tabel 4.5 menunjukkan bahwa nilai-p model BBLR dari semua variabel prediktor kurang dari $\alpha\left(0,05\right)$, sehingga keputusan yang diambil adalah tolak H_0. Keputusan tersebut menunjukkan bahwa variabel prediktor yang berpengaruh signifikan terhadap jumlah kasus BBLR pada taraf nyata 5% adalah variabel rasio tenaga kesehatan, persentase persalinan oleh tenaga kesehatan, persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3, presentase rumah tangga ber-PHBS, dan rasio puskesmas.

Tabel 4.5 Estimasi Parameter Regresi Poisson Univariat BBLR

Parameter	Estimasi	Standar Error	Z Hitung	Nilai-p
β_0	7,21984	0,50413	14,32	< 2e-16
β_1	0,33001	0,03972	8,31	< 2e-16
β_2	-0,0634	0,00913	-6,94	3,80E-12
β_3	0,02703	0,00459	5,89	3,90E-09
β_4	-0,00854	0,00302	-2,83	0,0047
β_5	-0,0118	0,00265	-4,44	8,80E-06

Nilai AIC yang diperoleh yaitu 660,1. Model jumlah kasus BBLR ditunjukkan sebagai berikut:

$$\hat{\mu} = \exp\left(7,21984 + 0,330X_1 - 0,0634X_2 + 0,02703X_3 - 0,00854X_4 - 0,0118X_5\right)$$

Interpretasi yang dapat dijelaskan dari model adalah sebagai berikut.

1. Setiap kenaikan 1 satuan rasio tenaga kesehatan (X_1) maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar sebesar $1,391$ kali dari rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap. Pola hubungan yang diperoleh dari pendugaan parameter telah sesuai dengan pola hubungan yang diperoleh pada Gambar 4.1 tetapi tidak sesuai dengan teori. Hal tersebut dimungkinkan karena semakin banyak jumlah tenaga kesehatan maka jumlah kasus BBLR yang tercatat semakin banyak pula.
2. Setiap kenaikan 1% persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_2) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $0,9386$ kali dari rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.
3. Setiap kenaikan 1% persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 (X_3) maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $1,0274$ kali dari rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap. Pola hubungan yang diperoleh pada
4. Setiap kenaikan 1% persentase rumah tangga ber-PHBS (X_4) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $0,9915$ kali dari rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.

5. Setiap kenaikan 1 satuan rasio puskesmas (X_5) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $0,9883$ kali rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.

Pemodelan jumlah kasus kematian bayi dengan regresi poisson univariat dan dilakukan pengujian secara serentak. Dari hasil analisis didapatkan hasil perhitungan $D(\hat{\beta}) = 93,347$. Nilai $D(\hat{\beta})$ lebih besar dari nilai $\chi^2_{(5;0,05)}$ yaitu 11,070 sehingga keputusan yang dihasilkan adalah tolak H_0 yang berarti paling sedikit ada satu variabel yang berpengaruh signifikan dalam model. Setelah pengujian hipotesis secara serentak terhadap parameter dilakukan pengujian secara parsial. Berikut merupakan nilai estimasi parameter dan pengujian secara parsial untuk jumlah kematian bayi.

Tabel 4.6 Estimasi Parameter Regresi Poisson Univariat Kematian Bayi

Parameter	Estimasi	Standar Error	Z Hitung	Nilai-p
β_0	2,79333	1,19367	2,34	0,0193*
β_1	-0,04477	0,09818	-0,46	0,6484
β_2	0,0166	0,02039	0,81	0,4155
β_3	-0,00623	0,00988	-0,63	0,5283
β_4	-0,01889	0,00639	-2,96	0,0031*
β_5	-0,00119	0,0053	-0,23	0,8216

*) signifikan dengan taraf signifikansi 5%

Berdasarkan Tabel 4.6 menunjukkan bahwa nilai-p model kematian bayi yang kurang dari $\alpha(0,05)$ adalah variabel prediktor persentase rumah tangga ber-PHBS, sehingga keputusan yang diambil adalah tolak H_0. Keputusan tersebut menunjukkan bahwa variabel prediktor persentase rumah tangga berPHBS mempengaruhi jumlah kasus kematian bayi pada taraf nyata 5%. Nilai AIC yang diperoleh yaitu 213,2. Model jumlah kasus kematian bayi sebagai berikut:

$$\hat{\mu} = \exp(2,7933 - 0,04477X_1 + 0,0166X_2 - 0,0062X_3 - 0,01889X_4 - 0,00119X_5)$$

Interpretasi yang dapat dijelasakan dengan melihat variabel yang signifikan terhadap model adalah bahwa setiap kenaikan 1% persentase rumah tangga ber-

PHBS (X_4) maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $0,9813$ kali dari rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.

4.3.7 Pemodelan Berat Badan Bayi Lahir Rendah (BBLR) dan Kematian Bayi di Kota Surabaya Tahun 2015 dengan *Conditional Bivariate Poisson Regression*

Pemodelan jumlah kasus berat badan bayi lahir rendah (BBLR) dan jumlah kasus kematian bayi di Kota Surabaya dilakukan dengan menggunakan regresi *conditional bivariate Poisson.* Untuk estimasi parameter regresi *conditional bivariate Poisson* dengan nilai λ_3 adalah suatu persamaan dari variabel prediktornya diperoleh dengan menggunakan *maximum likelihood estimation* (MLE) dan menggunkan analisis numerik yaitu iterasi *Newton-Raphson* untuk mengatasi hasil persamaan yang tidak ekplisit. Pengujian hipotesis secara serentak (simultan) terhadap parameter dilakukan untuk mengetahui variabel penjelas secara bersama-sama mempengaruhi variabel respon atau tidak. Hipotesis yang digunakan sebagai berikut:

$H_0 : \alpha_{0k} = \beta_{j1} = \beta_{j2} = \ldots = \beta_{jl} = 0$

H_1: paling sedikit ada satu $\beta_{jk} \neq 0;\ j = 1,2; k = 1,2,3,\ldots,l$

Statistik uji G^2 yang diperoleh sebesar 47121, Nilai G^2 lebih besar dari $\chi^2_{(0.05;15)}$ yaitu 25,00. Sehingga keputusan yang diambil adalah tolak H_0 yang berarti minimal ada satu variabel yang berpengaruh signifikan terhadap variabel respon. Dengan kata lain model CBPR yang diperoleh layak pada derajat kesalahan 5%. Selanjutnya akan dilakukan pengujian parameter secara parsial. Dalam regresi *conditional bivariate Poisson* akan terbentuk dua model yaitu μ_1 adalah model untuk jumlah kasus BBLR, model λ_2 adalah model untuk jumlah kasus kematian bayi, estimasi parameter model regresi *conditional bivariate Poisson* ditampilkan dalam Tabel 4.7.

Dari Tabel 4.7 menunjukkan bahwa nilai-p dari semua variabel prediktor kurang dari $\alpha(0,05)$, sehingga keputusan yang diambil adalah tolak H_0. Keputusan tersebut menunjukkan bahwa variabel prediktor yang mempengaruhi jumlah kasus BBLR pada taraf nyata 5% diantaranya adalah variabel rasio tenaga kesehatan (X_1), persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_2), persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 (X_3), persentase rumah tangga ber-PHBS (X_4), dan ratio puskesmas (X_5).

Tabel 4.7 Estimasi Parameter dan pengujian Hipotesis Parsial parameter CBPR untuk jumlah kasus BBLR di Kota Surabaya Tahun 2015

Parameter	Estimasi	Standar Error	Z Hitung	Nilai-p
β_{10}	7,4987	0,0656	114,3579	0,0000
β_{11}	0,2982	0,0058	51,6484	0,0000
β_{12}	-0,0594	0,0044	-13,6089	1,77E-42
β_{13}	0,0237	0,0037	6,3396	1,15E-10
β_{14}	-0,0094	0,0014	-6,4801	4,58E-11
β_{15}	-0,0156	0,0015	-10,5466	2,63E-26

Persamaan model CBPR untuk jumlah kasus berat badan bayi lahir rendah (BBLR) di Kota Surabaya Tahun 2015 sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_1 = \exp\left(7,4987 + 0,2982X_1 - 0,0594X_2 + 0,0237X_3 - 0,009386X_4 - 0,0156X_5\right)$$

Interpretasi yang dapat dijelaskan dari persamaan model regresi diatas berdasarkan eksponensial dari koefisien yang dihasilkan adalah

1. Setiap kenaikan 1 satuan ratio tenaga kesehatan (X_1) maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $1,347$ kali dari rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap. Pola hubungan yang diperoleh dari pendugaan parameter telah sesuai dengan pola hubungan yang diperoleh pada Gambar 4.1 tetapi tidak sesuai dengan teori. Hal tersebut dimungkinkan karena semakin banyak jumlah tenaga kesehatan maka jumlah kasus BBLR yang tercatat semakin banyak pula.
2. Setiap kenaikan 1% persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_2) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $0,9423$ kali dari semula jika variabel prediktor lainnya tetap.

3. Setiap kenaikan 1% persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 (X_3) maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $1,024$ kali dari rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.
4. Setiap kenaikan 1% persentase rumah tangga ber-PHBS (X_4) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $0,9907$ kali rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.
5. Setiap kenaikan 1 satuan ratio puskesmas (X_5) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $0,9845$ kali rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.

Berikut adalah nilai estimasi parameter dan pengujian secara parsial untuk jumlah kasus kematian bayi.

Tabel 4.8 Nilai Estimasi dan Pengujian Hipotesis Parsial Parameter CBPR untuk jumlah kasus kematian bayi di Kota Surabaya Tahun 2015

Parameter	Estimasi	Standar Error	Z Hitung	Nilai-p
β_{20}	2,8727	0,1421	20,2191	0,0000*
β_{21}	-0,0099	0,0626	-0,1580	0,4372
β_{22}	0,0166	0,0000	1270,6910	0,0000*
β_{23}	-0,0055	0,0000	-1004,6200	0,0000*
β_{24}	-0,0210	0,0001	-204,1740	0,0000*
β_{25}	-0,0031	0,0004	-7,2841	0,0000*

*) signifikan dengan taraf signifikansi 5%

Dari Tabel 4.8 menunjukkan bahwa nilai-p dari bebapa variabel prediktor kurang dari $\alpha(0,05)$, sehingga keputusan yang diambil adalah tolak H_0. Keputusan tersebut menunjukkan bahwa variabel prediktor yang mempengaruhi jumlah kasus kematian bayi pada taraf nyata 5% diantaranya adalah persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_2), persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 (X_3), persentase rumah tangga ber-PHBS (X_4), dan ratio puskesmas (X_5). Terdapat satu variabel prediktor yang tidak berpengaruh signifikan yaitu rasio tenaga kesehatan (X_1). Persamaan model CBPR untuk jumlah kasus berat kematian bayi di Kota Surabaya Tahun 2015 sebagai berikut:

$$\hat{\lambda}_2 = \exp\left(2,8727 - 0,0099X_1 + 0,0166X_2 - 0,0055X_3 - 0,0210X_4 - 0,0031X_5\right).$$

Interpretasi yang dapat dijelaskan dari persamaan model regresi diatas berdasarkan eksponensial dari koefisien yang berpengaruh signifikan adalah

1. Setiap kenaikan 1% persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_2) maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $1,0167$ kali rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.
2. Setiap kenaikan 1% persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 (X_3) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $0,9945$ kali rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.
3. Setiap kenaikan 1% persentase rumah tangga ber-PHBS (X_4) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $0,9792$ kali dari rata-rata semula jika variabel lainnya tetap.
4. Setiap kenaikan 1 satuan ratio puskesmas (X_5) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $0,9969$ kali dari rata-rata semula jika variabel lainnya tetap.

Dikarenakan nilai λ_3 adalah suatu persamaan, maka didapatkan penaksiran λ_3 sebagai berikut.

Tabel 4.9 Nilai Estimasi model λ_3 adalah persamaan

Parameter	Estimasi	Standar Error	Z Hitung	Nilai-p
α_{00}	0,00000	0,14123	0,00000	0,50000
α_{01}	0,74987	0,06260	11,97928	0,00000*
α_{02}	0,00000	0,00489	0,00000	0,50000
α_{03}	0,00000	0,00491	0,00000	0,50000
α_{04}	0,00000	0,00022	0,00000	0,50000
α_{05}	0,00000	0,00045	0,00000	0,50000

*) signifikan dengan taraf signifikansi 5%

Berdasarkan Tabel 4.9 dapat dilihat bahwa variabel yang berpengaruh terhadap variabel respon (jumlah BBLR dan kematian bayi) adalah variabel rasio tenaga kesehatan (X_1) karena memiliki nilai-p kurang dari $\alpha(0,05)$. Sedangkan variabel yang lainya tidak berpengaruh secara signifikan terhadap variabel respon (jumlah BBLR dan kematian bayi). Interpretasi yang dapat dijelasakan dengan melihat variabel yang signifikan terhadap model adalah bahwa setiap kenaikan 1 satuan rasio tenaga kesehatan (X_1) maka akan meningkatkan rata-rata (jumlah BBLR dan kematian bayi) sebesar $2,1167$ dari sebelumnya.

Model yang didapatkan dari hasil penaksiran parameter regresi *Conditional Bivariate Poisson* diperlihatkan persamaan sebagai berikut:
untuk model berat badan lahir rendah (BBLR)

$$\begin{aligned}\hat{Y}_1 = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3 = \hat{\mu}_1 = \exp\big(&7,4987 + 0,2982X_1 - 0,0594X_2 + 0,0237X_3 \\ &-0,009386X_4 - 0,0156X_5\big)\end{aligned}$$

interpretasi dapat dijelaskan dari model adalah

1. Setiap kenaikan 1 satuan ratio tenaga kesehatan (X_1) maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $1,347$ kali dari rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap. Pola hubungan yang diperoleh dari pendugaan parameter telah sesuai dengan pola hubungan yang diperoleh pada Gambar 4.1 tetapi tidak sesuai dengan teori. Hal tersebut dimungkinkan karena semakin banyak jumlah tenaga kesehatan maka jumlah kasus BBLR yang tercatat semakin banyak pula.
2. Setiap kenaikan 1% persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_2) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $0,9423$ kali dari semula jika variabel prediktor lainnya tetap.
3. Setiap kenaikan 1% persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 (X_3) maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $1,024$ kali dari rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.
4. Setiap kenaikan 1% persentase rumah tangga ber-PHBS (X_4) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $0,9907$ kali rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.
5. Setiap kenaikan 1 satuan ratio puskesmas (X_5) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus BBLR sebesar $0,9845$ kali rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.

Untuk model kematian bayi:

$$\hat{Y}_2 = \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3$$

$$\hat{Y}_2 = \exp\left(2,8727 - 0,0099X_1 + 0,0166X_2 - 0,0055X_3 - 0,0210X_4 - 0,0031X_5\right) + \exp\left(0,74987X_1\right)$$

interpretasi dapat dijelaskan dari model adalah:

1. Setiap kenaikan 1 satuan rasio tenaga kesehatan (X_1) maka akan meningkatkan rata-rata kematian bayi sebesar $2,1167$ kali dari rata-rata sebelumnya.
2. Setiap kenaikan 1% persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_2) maka akan meningkatkan rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $1,0167$ kali rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.
3. Setiap kenaikan 1% persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 (X_3) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $0,9945$ kali rata-rata semula jika variabel prediktor lainnya tetap.
4. Setiap kenaikan 1% persentase rumah tangga ber-PHBS (X_4) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $0,9792$ kali dari rata-rata semula jika variabel lainnya tetap.
5. Setiap kenaikan 1 satuan ratio puskesmas (X_5) maka akan menurunkan rata-rata jumlah kasus kematian bayi sebesar $0,9969$ kali dari rata-rata semula jika variabel lainnya tetap.

Beberapa interpretasi penaksiran parameter tidak sesuai dengan teori mengenai BBLR dan kematian bayi. Hal tersebut disebabkan struktur data yang digunakan dalam penelitian ini bersifat agregat selama setahun. Struktur data yang lebih cocok digunakan adalah data individual sehingga dapat melihat lebih jelas variabel-variabel prediktor yang berpengaruh secara signifikan terhadap variabel respon. Oleh karena itu model CBPR kurang dapat memodelkan dengan baik jumlah kasus BBLR dan kematian bayi. Nilai AIC yang didapatkan pada model CBPR adalah sebesar $155,6$.

4.3.8 Kriteria kebaikan Model

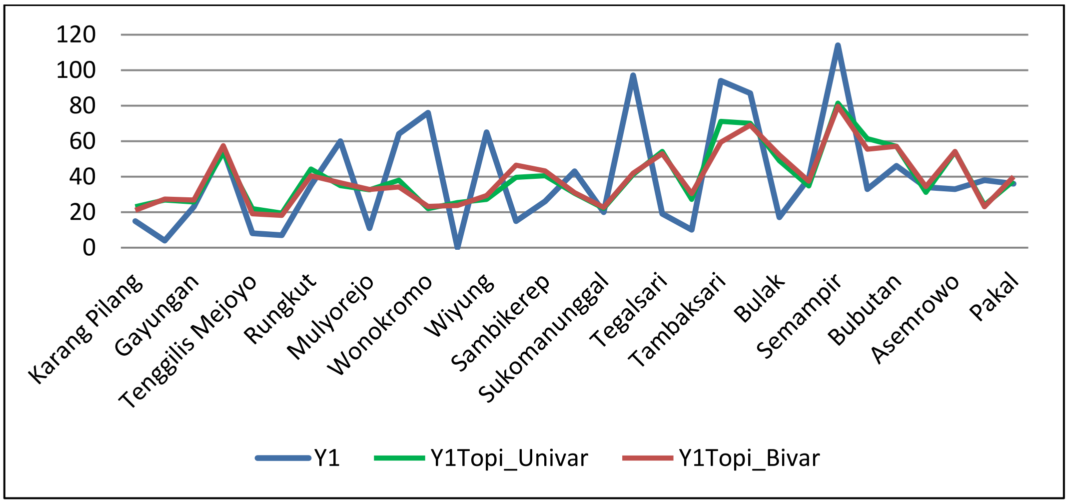
Kriteria kebaikan model digunakan untuk mendapatkan model terbaik yaitu dengan menggunakan kriteria AIC yag dihasilkan oleh setiap model. Berdasarkan hasil dari analisi regresi poisson univarit dan hasil dari analisis regresi *conditional bivariate Poisson* menghasilkan nilai AIC sebagai berikut.

Tabel 4.10 Perbandingan Nilai AIC Model

Model	AIC
Regresi Poisson Univariat BBLR	660,7
Regresi Poisson Univariat Kematian Bayi	213,2
Regresi *Conditional Bivariate Poisson*	155,6

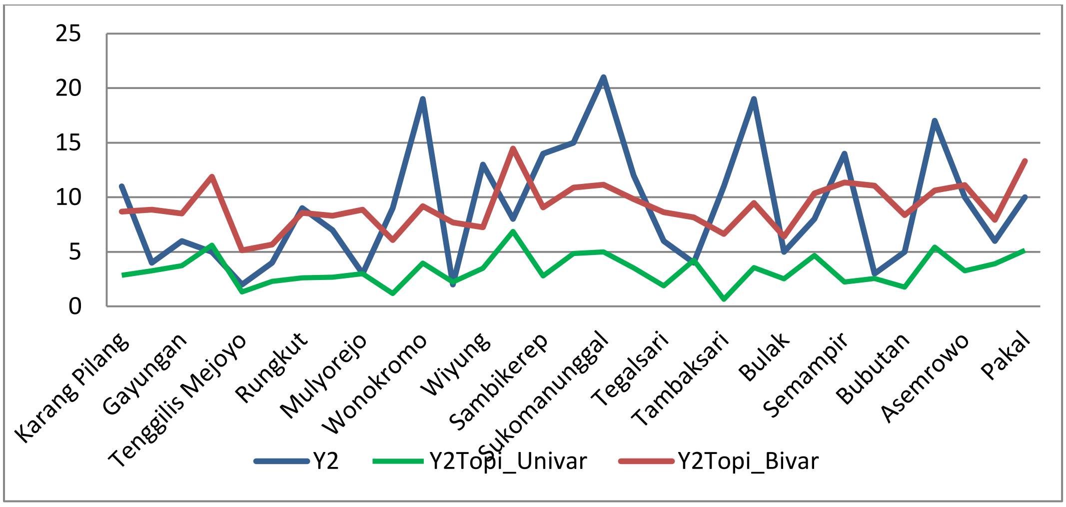
Tabel 4.10 menunjukkan bahwa terdapat perbedaan nilai AIC yang dihasilkan oleh kedua model. Model yang baik merupakan model dengan nilai AIC semakin kecil. Nilai AIC yang paling kecil ditunjukkan oleh model regresi *conditional bivariate Poisson* (CBP) yaitu sebesar 148,3915. Sehingga model regresi CBP lebih baik dalam memodelan jumlah bayi berat badan lahir rendah (BBLR) dan kematian bayi di Surabaya tahun 2015 daripada model regresi poisson univariat. Grafik data rediksi dan data asli jumlah kasus BBLR dan kematian bayi di setiap kecamatan di Surabaya sebagai berikut.

Gambar 4.2 diatas menunjukkan bahwa hasil prediksi dari model regresi poisson univariate dan regresi *conditional bivariate Poisson* pada jumlah kasus BBLR, keduanya cenderung mengikuti data asli dan berfluktuasi.



Gambar 4.2 Perbandingan Nilai prediksi dari Model Jumlah kasus BBLR

Nilai prediksi pada jumlah kasus kematian bayi berbeda antar metode. Berikut merupakan grafik perbandinga nilai prediksi model regresi poisson univariat dan regresi *conditional bivariate Poisson* terhadap jumlah kasus kematian bayi yang terjadi di Surabaya.



Gambar 4.3 Perbandingan Nilai prediksi dari Model Jumlah kasus Kematian Bayi

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa hasil prediksi jumlah kasus kematian bayi menggunkan model regresi *conditional bivariate Poisson* lebih berfluktuasi, cenderung mengikuti data asli tetapi memiliki selisih yang besar terhadap data asli dibandingkan dengan model regresi poisson univariat. jika dilihat dari grafik, nilai prediksi dan nilai data asli jumlah kasus BBLR maupun kematian bayi memiliki selisih yang besar terhadap data asli hal tersebut diduga data variabel respon yang digunakan mengalami *over/under* dispersi.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Penaksiran parameter model *Conditional Bivariate Poisson Regression* (CBPR) menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), Persamaan yang diperoleh dengan metode tersebut merupakan persamaan yang tidak eksplisit (*close form*) sehingga estimasi parameter diselesaikan dengan analisis numerik yaitu iterasi *Newton-Raphson*.
2. Model *conditional bivariate Poisson regression* (CBPR) kurang dapat memodelkan dengan baik jumlah kasus berat badan bayi lahir rendah (BBLR) dan jumlah kasus kematian bayi dikarenakan struktur data yang digunakan dalam penelitian ini bersifat agregat selama setahun. Sehingga menyebabkan beberapa interpretasi yang dihasilkan dalam model menjadi tidak sesuai dengan teori dan konsep.

   Model marginal BBLR regresi bivariate Poisson:

   $$\hat{Y}_1 = \exp\big(7,4987 + 0,2982X_1 - 0,0594X_2 + 0,0237X_3 \\ -0,009386X_4 - 0,0156X_5\big)$$

   Model bivariate Poisson kematian bayi dan BBLR dengan *conditional* BBLR :

   $$\hat{Y}_2 = \exp\big(2,8727 - 0,0099X_1 + 0,0166X_2 - 0,0055X_3 - 0,0210X_4 \\ -0,0031X_5\big) + \exp\big(0,74987X_1\big)$$

3. Berdasarkan interpretasi yang dihasilkan dalam model bahwa apabila ingin menurunkan rata-rata jumlah kasus BBLR maka harus meningkatkan persentase persalinan oleh tenaga kesehatan (X_2), persentase rumah tangga ber-PHBS (X_4), dan ratio puskesmas (X_5). Dan untuk kematian bayi adalah variabel persentase ibu hamil mendapatkan tablet Fe3 (X_3), persentase rumah tangga ber-PHBS (X_4), dan ratio puskesmas (X_5).

5.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya untuk menganalisis terlebih dahulu struktur data yang digunakan agar sesuai dengan model. Menganalisis *over/under* pada regresi *conditional bivariate Poisson* serta menyelesaikan permasalahan tersebut. Dan juga diharapkan menggunakan metode iterasi yang berbeda seperti algoritma *Expectation Maximuzation* (EM) atau menggunakan metode estimasi lainnya seperti bayesian.

DAFTAR PUSTAKA

Aitken, A. C. (1936). A further note on multivariate selection. *Proc. Edinb. Math. Soc, 5*, 37-40.

AlMuhayfith, F. E., Alzaid, A. A., & Omair, M. A. (2016). On bivariate Poisson regression models. *Journal of King Saud University-Science, 28*, 178-189.

Badan Pusat Statistik. (2007). *Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia (SDKI)* . Jakarta: Badan Pusat Statistik.

Badan Pusat Statistik. (2012). *Survei Demografi dan Kesehatan Indonesia (SDKI).* Jakarta: Badan Pusat Statistik.

Berkhout, P., & Plug, E. (2004). A bivariate Poisson count data model using conditional probabilities. *Statistica Neerlandica, 58,* 349-364.

Berm´udez, L. (2009). Apriori ratemaking using bivariate Poisson regression models. *Insurance: Mathematics and Economics, 44,* 135-141.

Berm´udez, L., & Karlis, L. (2012). A finite mixture of bivariate Poisson regression models with an application to insurance ratemaking. *Computasi Statistics Data Analysis, 56*, 3988-3999.

Best, D. (1999). *Tests of Fit and Other Nonparametric Data Analysis.* New South Wales: University of Wollongong.

Cameron, A. C., & Trivedi, P. L. (1986). econometric models based on count data: comparisons and applications of some estimators and tests. *journal of applied econometrics, 1,* 29-53.

Campbell, J. T. (1934). The Poisson correlation function. *Proc. Edinb. Math. Soc, 4*, 18-26.

Departemen Kesehatan RI. (2007). *Laporan Nasionak Riset Kesehatan Dasar (Riskesdas).* Jakarta: Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan Depkes RI.

Departemen Kesehatan RI. (2013). *Laporan Nasional Riset Kesehatan Dasar (Riskesdas).* Jakarta: Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan Depkes RI.

Dinas Kesehatan Kota Surabaya. (2016). *Profil Kesehatan Kota Surabaya Tahun 2015*. Surabaya: Dinas kesehatan Kota Surabaya.

Drapper, N. R., & Smith, H. (1992). *Applied regression Analysis.* New York: John wiley & Sons.

Gujarati, D. N. (2003). *Basic Econometrics.* New York: McGraw-Hill Companies, Inc.

Gurmu, S., & Elder, J. (2000). Generalized bivariate count dat regression models. *Economics Letters, 68*, 31-36.

Hocking, R. (1996). *Method and Aplication of linear models.* New York: John Wiley & Sons.

Holgate, P. (1964). Estimating for bivariate Poisson distribution. *Biometrika, 51*, 241-245.

Johnson, N. L., Kemp, A. W., & Kotz, S. (1969). *Univariate Discrete Distribution Third edition.* New York: John Wiley & Sons.

Johnson, N. L., Kotz, S., & Balakrishnan, N. (1996). *Discrete Multivariate Distributions.* New York: John Wiley & Sons, INC.

Johnson, R., & Wichern, D. (2007). *Applied Multivariate Statistical Analysis* . New Jersey: Pearson Education, Inc.

Jung, R. C., & Winkelmann, R. (1993). Two Aspect of Labor Mobulity: Bivariate Poisson Regression Approach. *Empirical Economics, 18*, 543-556.

Karlis, D., & Ntzoufras, I. (2005). Bivariate Poisson and Diagonal Inflanted Bivariate Poisson Regression Models in R. *Journal of Statistical Software, 14*(10), 1-26.

Karlis, D., & Tsiamyrtzis, P. (2008). Exact Bayesian Modelinf for bivariate Poisson data and extensions. *Stat Comput, 18*, 27-40.

Kementerian Kesehatan RI. (2015). *Profil Kesehatan Indonesia Tahun 2014.* Jakarta: Kementerian Kesehatan Republik Indonesia.

Kementrian Kesehatan Republik Indonesia. (2015). *Profil Kesehatan Indonesia.* Jakarta: Departemen Kesehatan.

King, G. (1989). A seemingly unrelated Poisson regression model. *Sociological Methods and Research*, *17*, 235-255.

Kocherlakota, S., & Kocherlakota, K. (1992). *Bivariate Discrete Distribution.* New York: Marcel Dekker.

Kocherlakota, S., & Kocherlakota, K. (2001). Regression in The Bivariate Poisson Distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods,* 815-825.

Noviani. (2011). *Hubungan berat badan bayi lahir rendah (BBLR) dengan kejadian kematian neonatal dini di Indonesia Tahun 2010.* Depok: Universitas Indonesia.

Prawirohardjo, S. (2008). *Ilmu Kebidanan.* Jakarta: PT Bina Pustaka.

Puspitasari, C., Anasari, T., & Fajarsari, D. (2011). Hubungan antara Kenaikan Berat Badan Selama Kehamilan Dengan Berat Bayi Baru lahir di Wilayah Kerja Puskesmas Rawalo Kabupaten Banyumas Tahun 2009-2010. *Bidan Prada: Jurnal ilmiah Kebidanan*, 54-67.

Sulistiyowati, n. (2003). kematian perinatal hubungannya dengan faktor praktek kesehatan ibu selama kehamilan di Kota Bekasi tahun 2001. *jurnal ekologi kesehatan*(Vol 2 No 1), 192-199.

UNICEF Indonesia. (2012). *Ringksan Kajian Kesehatan Ibu dan Anak.* Jakarta: UNICEF Indonesia.

Walpole, R. E. (1992). *Pengantar Statistika.* Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

WHO. (2014). *Global nutrition targets 2025: low birth weight policy brief.* Geneva: World Health Organization.

WHO, & UNICEF. (2004). *Low birth weight country regional and global estimates.* New York: UNICEF.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Jumlah Berat Badan Bayi lahir Rendah dan Kematian Bayi serta Faktor-Faktor yang mempengaruhi di Kota Surabya Tahun 2015

Kecamatan	Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Karang Pilang	15	11	2,87	96,46	95,78	72,93	74,66
Jambangan	4	4	2,52	96,94	96,06	76,35	47,81
Gayungan	23	6	2,10	95,65	95,54	78,21	44,00
Wonocolo	55	5	1,76	95,45	113,48	59,85	27,56
Tenggilis	8	2	3,55	98,7	98,99	98,66	74,65
Gunung Anyar	7	4	2,46	97,12	98,25	94,96	63,98
Rungkut	35	9	2,97	94,02	106,91	70,44	62,37
Sukolilo	60	7	2,81	90,76	85,60	78,19	41,16
Mulyorejo	11	3	2,71	94	93,90	74,43	48,79
Gubeng	64	9	4,12	90,74	86,78	88,45	65,99
Wonokromo	76	19	2,14	97,11	92,87	76,04	45,74
Dukuh Pakis	0	2	3,15	95,65	92,53	80,12	66,18
Wiyung	65	13	1,89	93,83	94,6	86,01	35,01
Lakarsantri	15	8	1,70	97,80	103,19	56,57	17,57
Sambikerep	26	14	2,86	95,40	96,49	76,03	31,47
Tandes	43	15	2,04	94,4	99,19	63,19	53,08
Sukomanunggal	20	21	2,03	99,49	99,56	66,24	51,81
Sawahan	97	12	2,51	93,02	98,79	68,20	43,94
Tegalsari	19	6	3,67	94,19	99,53	74,61	44,09
Genteng	10	4	1,65	98,59	102,94	83,62	23,97
Tambaksari	94	11	5,70	90,91	90,86	81,96	70,32
Kenjeran	87	19	2,37	88,25	106,82	64,40	42,08
Bulak	17	5	2,40	75,18	67,09	83,66	38,33
Simokerto	39	8	1,99	87,58	83,9	65,91	40,84
Semampir	114	14	3,90	80,56	77,18	55,27	52,00
Pabean Cantikan	33	3	3,57	83,39	85,52	53,95	71,50
Bubutan	46	5	3,78	87,4	84,02	74,82	43,51
Krembangan	34	17	1,69	88,95	84,96	66,34	36,62
Asemrowo	33	10	2,93	92,35	99,88	61,31	43,99
Benowo	38	6	1,86	102,07	116,45	79,61	55,76
Pakal	36	10	2,33	84,91	75,76	52,67	48,83

Lampiran 2. Statistika Deskriptif Variabel Respon dan Variabel Penjelas Kota Surabaya Tahun 2015

Descriptive Statistics: bblr, akb

Variable	N	N*	CoefVar	Minimum	Median	Maximum
bblr	31	0	76,04	0,00	34,00	114,00
akb	31	0	58,68	2,000	8,000	21,000

Descriptive Statistics: X1, X2, X3, X4, X5

Variable	N	N*	Mean	StDev	Minimum	Maximum
X1	31	0	2,711	0,900	1,650	5,700
X2	31	0	92,61	5,90	75,18	102,07
X3	31	0	94,30	10,66	67,09	116,45
X4	31	0	73,00	11,62	52,67	98,66
X5	31	0	48,63	14,72	17,57	74,66

Lampiran 3. Koefisien Korelasi Variabel Respon dan Variabel Prediktor

Correlation: bblr, akb, X1, X2, X3, X4, X5

	bblr	akb	X1	X2	X3	X4
akb	0,522					
	0,003					
X1	0,297	-0,162				
	0,105	0,385				
X2	-0,351	-0,031	-0,282			
	0,053	0,870	0,125			
X3	-0,118	0,012	-0,290	0,803		
	0,528	0,948	0,113	0,000		
X4	-0,252	-0,337	0,188	0,331	0,063	
	0,171	0,064	0,312	0,069	0,738	
X5	-0,027	-0,152	0,600	0,014	-0,086	0,273
	0,885	0,414	0,000	0,941	0,644	0,137

Cell Contents: Pearson correlation
P-Value

Lampiran 4. Pengujian Distribusi Variabel Respon

```
macro
coba y1 y2
mconstant n y1bar y2bar c f h m11 i j Ib v pp pvalue
mcolumn y1 y2 a b d e g
let n=count(y1)
let y1bar=mean(y1)
let y2bar=mean(y2)
let a=y1-y1bar
let b=(y1-y1bar)**2
let c=(sum(b))/n
let d=y2-y2bar
let e=(y2-y2bar)**2
let f=(sum(e))/n
let g=a*d
let h=sum(g)
let m11=h/n
let i=((y2bar*c)-(2*(m11**2))+(y1bar*f))*n
let j=(y1bar*y2bar)-(m11**2)
let Ib=i/j
let v=3*n-2
cdf Ib pp;
chis v.
let pvalue=1-pp
print Ib pvalue
endmacro
```

#cara memanggil

```
MTB > %"E:\uji poisson bivariat.txt" C1 C2
Executing from file: E:\uji poisson bivariat.txt
```

Data Display

```
Ib        20.3958
pvalue    1.00000
```

Lampiran 5. Matriks Korelasi

```
Matrix CORR3

 1,00000  -0,28180  -0,29029  0,18754   0,59989
-0,28180   1,00000   0,80332  0,33092   0,01382
-0,29029   0,80332   1,00000  0,06270  -0,08647
 0,18754   0,33092   0,06270  1,00000   0,27312
 0,59989   0,01382  -0,08647  0,27312   1,00000
```

Lampiran 6. Pemeriksaan Multikolinieritas dengan nilai VIF Variabel Prediktor

```
Matrix inverse CORR3

 1,86085   0,73774  -0,12517  -0,29677  -1,05626
 0,73774   3,92049  -2,90200  -1,13418  -0,43789
-0,12517  -2,90200   3,26675   0,72441   0,19981
-0,29677  -1,13418   0,72441   1,42159  -0,13193
-1,05626  -0,43789   0,19981  -0,13193   1,69300
```

Lampiran 7. Output *Syntax* Regresi Poisson Univariat

```
> data1=read.csv('datasella.csv',header=TRUE)
> data=data1
>regresiBBLR<-
glm(Y1~X1+X2+X3+X4+X5,family=poisson(log),data=data)
> summary(regresiBBLR)

Call:
glm(formula = Y1 ~ X1 + X2 + X3 + X4 + X5, family = poisson(log),
    data = data)

Deviance Residuals:
   Min      1Q  Median      3Q     Max
-7.123  -3.607  -0.542   2.328   8.958

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  7.21984    0.50413   14.32  < 2e-16 ***
X1           0.33001    0.03972    8.31  < 2e-16 ***
X2          -0.06338    0.00913   -6.94  3.8e-12 ***
X3           0.02703    0.00459    5.89  3.9e-09 ***
X4          -0.00854    0.00302   -2.83   0.0047 **
X5          -0.01180    0.00265   -4.44  8.8e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 686.10  on 30  degrees of freedom
Residual deviance: 490.99  on 25  degrees of freedom
AIC: 660.7

Number of Fisher Scoring iterations: 5

>regresiAKB<-glm(Y2~X1+X2+X3+X4+X5,family=poisson(log),data=data)
> summary(regresiAKB)

Call:
glm(formula = Y2 ~ X1 + X2 + X3 + X4 + X5, family = poisson(log),
    data = data)

Deviance Residuals:
   Min      1Q  Median      3Q     Max
-2.817  -1.398  -0.658   1.102   2.817

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  2.79333    1.19367    2.34   0.0193 *
X1          -0.04477    0.09818   -0.46   0.6484
X2           0.01660    0.02039    0.81   0.4155
```

```
X3          -0.00623    0.00988   -0.63   0.5283
X4          -0.01889    0.00639   -2.96   0.0031 **
X5          -0.00119    0.00530   -0.23   0.8216
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 93.347  on 30  degrees of freedom
Residual deviance: 80.778  on 25  degrees of freedom
AIC: 213.2

Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

Lampiran 8. Output Pogram Penaksiran Parameter CBPR

```
Estimate Std. Error    Z value   P-value
(Intercept)  7.498651  6.557e-02   114.3579 0.000e+00
X1           0.298203  5.774e-03    51.6484 0.000e+00
X2          -0.059399  4.365e-03   -13.6089 1.772e-42
X3           0.023721  3.742e-03     6.3396 1.152e-10
X4          -0.009386  1.448e-03    -6.4801 4.583e-11
X5          -0.015581  1.477e-03   -10.5466 2.634e-26
(Intercept)  2.872671  1.421e-01    20.2191 3.325e-91
X1          -0.009885  6.258e-02    -0.1579 4.372e-01
X2           0.016615  1.308e-05  1270.6906 0.000e+00
X3          -0.005459  5.434e-06 -1004.6161 0.000e+00
X4          -0.021019  1.029e-04  -204.1743 0.000e+00
X5          -0.003137  4.307e-04    -7.2840 1.620e-13
             0.000000  1.412e-01     0.0000 5.000e-01
             0.749865  6.260e-02    11.9793 2.281e-33
             0.000000  4.889e-03     0.0000 5.000e-01
             0.000000  4.909e-03     0.0000 5.000e-01
             0.000000  2.186e-04     0.0000 5.000e-01
             0.000000  4.464e-04     0.0000 5.000e-01
Convergence = TRUE, iteration convergence
MLRT :
G^2 = 47121 , pvalue_G^2 = 0
AIC = 155.6
```

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BIOGRAFI PENULIS

Sella Aji Oktarin lahir di Banyuwangi pada tanggal 28 Oktober 1992. Penulis merupakan anak dari pasangan Bapak Wakijo dan Ibu Suryati. Pendidikan formal yang pernah ditempuh penulis diawali di TK Perwanida II. Pendidikan dasar diperoleh di SD Negeri 04 Tapanrejo (1999-2005). Selanjutnya pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 1 Srono (2005-2008) dan menempuh pendidikan menengah atas di SMA Negeri 1 Genteng (2008-2011). Setelah lulus SMA penulis melanjutkan studinya di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember dan memperoleh gelar sarjana sains (S.Si) pada tahun 2015. Penulis melanjutkan studi program magister di Departemen Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember pada tahun 2016. Jika ada kritik dan saran yang berhubungan dengan tesis ini dapat disampaikan melalui email penulis sellaaji@gmail.com.

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini, mahasiswi Jurusan Statistika FMKSD ITS.

Nama	: Sella Aji Oktarin
NRP	: 062116 5001 0003
Program Studi	: S2

menyatakan bahwa data yang digunakan dalam Tesis ini merupakan data sekunder yang diambil dari publikasi lainnya yaitu :

Sumber	: Dinas Kesehatan Kota Surabaya
Keterangan	: Data Publikasi Profil Kesehatan Kota Surabaya Tahun 2015

Surat pernyataan ini dibuat dengan sebenar-benarnya. Apabila terdapat pemalsuan data maka saya siap menerima sanksi sesuai aturan yang berlaku.

Mengetahui

Pembimbing Tugas Akhir

Dr. Muhammad Mashuri, M.T.

NIP. 19620408 198701 1 001

Surabaya, Juli 2018

Sella Aji Oktarin

NRP. 062116 5001 0003