



TUGAS AKHIR - SM141501

ANALISIS KESTABILAN DAN SOLUSI NUMERIK PADA MODEL TRANSMISI PENYAKIT MENULAR DENGAN VAKSINASI DAN PENGOBATAN

BELLA PUTRI PERTIWI
NRP 1211 100 088

Dosen Pembimbing
Drs. Mohammad Setijo Winarko, M.Si
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015



FINAL PROJECT - SM141501

**STABILITY ANALYSIS AND NUMERICAL SOLUTION
ON COMMUNICABLE DISEASE TRANSMISSION
MODELS WITH VACCINATION AND TREATMENT**

BELLA PUTRI PERTIWI
NRP 1211 100 088

Supervisor
Drs. Mohammad Setijo Winarko, M.Si
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN

**ANALISIS KESTABILAN DAN SOLUSI NUMERIK PADA
MODEL TRANSMISI PENYAKIT MENULAR DENGAN
VAKSINASI DAN PENGOBATAN**
*STABILITY ANALYSIS AND NUMERICAL SOLUTION ON
COMMUNICABLE DISEASE TRANSMISSION MODELS
WITH VACCINATION AND TREATMENT*

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

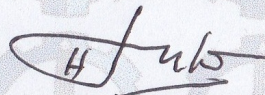
Oleh :

BELLA PUTRI PERTIWI
NRP. 1211 100 088

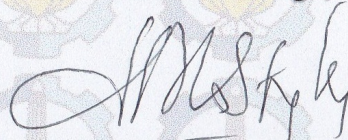
Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,



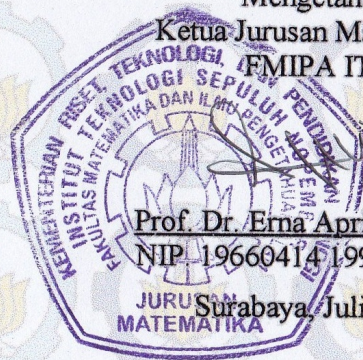
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc
NIP. 19640624 198803 1 001



Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
NIP. 19640920 199002 1 002

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS



Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Surabaya, Juli 2015

ANALISIS KESTABILAN DAN SOLUSI NUMERIK PADA MODEL TRANSMISI PENYAKIT MENULAR DENGAN VAKSINASI DAN PENGobatan

Nama Mahasiswa : Bella Putri Pertiwi
NRP : 1211 100 088
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : 1. Drs. M. Setijo Winarko, M.Si.
2. Drs. Lukman Hanafi, M. Sc.

Abstrak

Terdapat beberapa model epidemik untuk menganalisis penyebaran penyakit menular, salah satunya adalah model epidemik SIRS. Epidemik merupakan suatu kejadian berjangkitnya penyakit menular dalam suatu populasi yang menimbulkan kerugian. Oleh karena itu dibutuhkan upaya untuk mencegah meluasnya penyebaran penyakit, yaitu dengan vaksinasi dan pengobatan. Tingkat penyebaran penyakit dapat diketahui melalui parameter tertentu yaitu bilangan reproduksi dasar. Dalam tugas akhir ini, model epidemik dianalisis berdasarkan titik kesetimbangan, kestabilan sistem, dan bifurkasi, selain itu dilakukan penyelesaian numerik untuk model dengan metode Runge Kutta orde empat. Hasil analisis yang didapatkan adalah terdapat eksistensi bifurkasi mundur pada model epidemik SIRS dengan vaksinasi dan pengobatan karena ketidakefektifan kapasitas vaksin dan pengobatan yang diberikan sehingga masih terdapat titik kesetimbangan endemik pada saat bilangan reproduksi dasar kurang dari 1. Sedangkan dari simulasi numerik diperoleh titik kesetimbangan yang dapat dilihat dari nilai bilangan reproduksi dasar.

Kata kunci: model epidemik, bifurkasi mundur, metode Runge-Kutta, vaksinasi, pengobatan

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

**STABILITY ANALYSIS AND NUMERICAL SOLUTION ON
COMMUNICABLE DISEASE TRANSMISSION MODELS
WITH VACCINATION AND TREATMENT**

Name : Bella Putri Pertiwi
NRP : 1211 100 088
Department : Mathematics
Supervisor : 1. Drs. M. Setijo Winarko, M.Si.
2. Drs. Lukman Hanafi, M. Sc.

Abstract

There are several models to analyze the spread of epidemic infectious diseases, one of which is SIRS epidemic models. Epidemic is an outbreak of infectious disease incidence in a population that result in losses. Therefore it takes an effort to prevent the spread of the disease, namely with vaccination and treatment. Rate of spread of the disease can be detected through certain parameters, namely the basic reproduction number. In this thesis, epidemic models analyzed based on the point of equilibrium, stability systems, and bifurcation, besides performed numerical solution for the model with a Runge Kutta method of order four. The analytical results obtained are contained existence of bifurcation backward SIRS epidemic model with vaccination and treatment because of the ineffectiveness of vaccines and treatment capacity given that there are still endemic equilibrium point when the basic reproduction number less than 1. While numerical simulations obtained from the equilibrium point which can be seen of the value of the basic reproduction number.

Keywords: *epidemic models, backward bifurcation, Runge-Kutta method, vaccination, treatment*

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'aalamiin, rasa syukur tak terkira penulis panjatkan kehadiran Dzat Yang Maha Segalanya, Allah SWT. Tiada detik yang berlalu tanpa pertolongan dan petunjuk-Nya, yang senantiasa memberi keyakinan dan kepercayaan hingga penulis mampu menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **“Analisis Kestabilan dan Solusi Numerik pada Model Transmisi Penyakit Menular dengan Vaksinasi dan Pengobatan”** sebagai syarat kelulusan dalam menempuh program S-1 Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya.

Dalam proses pembuatan Tugas Akhir ini, penulis mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Ibu Prof. Dr. Dra. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA-ITS.
2. Bapak Drs. M. Setijo Winarko, M.Si. dan Bapak Drs. Lukman Hanafi, M. Sc. sebagai dosen pembimbing Tugas Akhir atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan pada penulis.
3. Ibu Dr. Dra. Mardijah, M.T. , Bapak Drs. Daryono Budi U., M.Si, dan Bapak Drs. Sadjidon, M.Si selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan untuk perbaikan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Dr. Chairul Imron, M.Ikomp. selaku Koordinator Tugas Akhir.
5. Bapak dan Ibu dosen serta seluruh staf Tata Usaha dan Laboratorium Jurusan Matematika FMIPA-ITS.

Penulis menyadari bahwa selama masa penelitian dan penyusunan laporan ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis memohon saran dan kritik sebagai bahan perbaikan dimasa yang akan datang. Semoga tugas akhir ini bermanfaat bagi semua pihak.

Surabaya, Juli 2015
Penulis

Spesial thanks to :

1. Mama Ana Moedjiastuti yang telah melahirkan dan membesarkan aku di dunia yang indah namun penuh dengan cobaan.
2. Mama Ana Moedjiastuti yang tiada henti-hentinya memanjatkan doa untuk untuk aku dalam segala hal khususnya ketika menyelesaikan kuliah dan mengerjakan Tugas Akhir ini.
3. Mama Ana Moedjiastuti yang telah mencintai dan menyayangi aku dengan sepenuh hati, jiwa, dan raga tanpa terhitung dan tanpa mengharapkan imbalan apapun. Terimakasih Mama ☺
4. Papa Muhammad Yasin, cinta pertama dan cinta sejatiku. Terimakasih telah membiayai semua kebutuhanku dari kecil hingga saat ini, terimakasih karena selalu berusaha membahagiakan aku bagaimanapun caranya, terimakasih karena selalu melindungiku dan membelaku. Aku sayang papa ☺
5. Muhammad Firman Jayadilaga. Terimakasih sudah menjadi kakak, sahabat, dan ustadz yang paling baik buat aku. Semoga bisa terus membimbing aku sampai kapanpun, dan semoga didekatkan jika berjodoh. Aamiin ☺

DAFTAR ISI

JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
<i>ABSTRACT</i>	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan.....	3
1.5 Manfaat.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penyakit Menular, Vaksinasi, dan Pengobatan.....	5
2.2 Sistem Kompartemen.....	6
2.3 Bilangan Reproduksi Dasar.....	6
2.4 Kestabilan Titik Tetap.....	6
2.5 Stabil Asimtotik Lokal.....	7
2.6 Bifurkasi.....	8
2.7 Metode <i>Runge-Kutta</i>	9

BAB III METODOLOGI PENELITIAN	11
3.1 Studi Literatur.....	11
3.2 Kajian Model Epidemik SIRS dengan Vaksinasi dan Pengobatan.....	11
3.3 Tahap Menganalisis Kestabilan Lokal.....	11
3.4 Analisis Terjadinya Bifurkasi Mundur.....	12
3.5 Simulasi Numerik.....	12
3.6 Kesimpulan dan Saran.....	12
3.7 Diagram Alir.....	12
 BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN	 15
4.1 Model Epidemik Transmisi Penyakit Menular dengan Vaksinasi dan Pengobatan.....	15
4.2 Daerah Penyelesaian Model	19
4.3 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	21
4.4 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	22
4.5 Titik Keseimbangan Endemik.....	27
4.6 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Endemik.....	34
4.7 Kurva Bifurkasi.....	39
4.8 Analisis Bifurkasi.....	41
4.9 Simulasi Numerik <i>Runge-Kutta</i>	48
 BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	 59
5.1 Kesimpulan.....	59
5.2 Saran.....	60
 DAFTAR PUSTAKA	 61
LAMPIRAN	63
A. <i>Listing</i> program M- Bifurkasi.....	63
B. <i>Listing</i> program M- <i>Runge-Kutta</i>	64
C. Tampilan GUI.....	67
D. Biodata Penulis.....	69

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Daftar Nilai Beberapa Parameter pada Model Penyebaran Penyakit Menular dengan Vaksinasi dan Pengobatan.....	47
Tabel 4.2	Nilai Parameter Bebas Penyakit.....	52
Tabel 4.3	Nilai Awal dari Masing- Masing Sub Populasi.....	52
Tabel 4.4	Nilai Parameter Endemik.....	55

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.2	Bifurkasi Maju.....	9
Gambar 2.3	Bifurkasi Mundur	9
Gambar 3.1	Diagram Alir Penyelesaian Model Epidemik Transmisi Penyakit Menular dengan Vaksinasi dan Pengobatan.....	13
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model Epidemik Tipe SIRS dengan Vaksinasi dan Pengobatan.....	17
Gambar 4.2	Bifurkasi Mundur pada Model SIRS dengan Vaksinasi dan Pengobatan.....	41
Gambar 4.3	Kurva Bifurkasi Mundur dengan nilai parameter $\alpha = 12, \mu = 0.1, \gamma = 0.3, \eta =$ $0.1, \sigma = 0.2, \varphi = 3, \psi = 5, \theta = 0.5, K =$ $3, \beta = 26$	44
Gambar 4.4	Kurva Bifurkasi Maju dengan nilai parameter $\alpha = 12, \mu = 0.1, \gamma = 0.3, \eta =$ $0.1, \sigma = 0.2, \varphi = 3, \psi = 5, \theta = 0.5, K =$ $3, \beta = 13$	45
Gambar 4.5	Kurva Bifurkasi Mundur dengan nilai parameter $\alpha = 12, \mu = 0.1, \gamma = 0.3, \eta =$ $0.1, \sigma = 0.2, \varphi = 3, \psi = 5, \theta = 0.5, K =$ $3, \beta = 35$	46
Gambar 4.6	Grafik Kestabilan Bebas Penyakit ketika $R_\varphi = 0.0800 < 1, N = 300,$ $h = 0.1$	53
Gambar 4.7	Grafik Kestabilan Bebas Penyakit ketika $R_\varphi = 0.0800 < 1, N = 1000,$ $h = 0.1$	54
Gambar 4.8	Grafik Kestabilan Endemik ketika $R_\varphi =$ $1.4294 > 1, N = 300, h = 0.1$	56
Gambar 4.9	Grafik Kestabilan Endemik ketika $R_\varphi =$ $1.4294 > 1, N = 1000, h = 0.1$	57

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
$S(t)$	Kumpulan individu yang rentan terhadap penyakit
$V(t)$	Kumpulan individu <i>susceptible</i> yang divaksinasi
$I(t)$	Kumpulan individu yang terjangkit
$T(t)$	Kumpulan individu yang mendapatkan pengobatan
$R(t)$	Kumpulan individu yang sembuh dari penyakit
Λ	Laju pertambahan populasi
β	Koefisien transmisi yang merupakan konstanta yang menunjukkan tingkat kontak sehingga terjadi penularan penyakit
μ	Laju kematian alami
α	Laju perpindahan individu <i>infected</i> menjadi <i>recovered</i>
ψ	Laju perpindahan individu <i>recovered</i> menjadi <i>susceptible</i>
φ	Laju perpindahan individu <i>susceptible</i> menjadi individu <i>vaccinated</i>
σ	Tingkat ketidakefektifan vaksin
γ	Laju perpindahan individu <i>infected</i> menjadi <i>treated</i>
η	Laju kesembuhan individu yang mendapatkan pengobatan
J	Matriks <i>Jacobian</i>
λ	Akar karakteristik

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai latar belakang dari permasalahan yang dibahas pada tugas akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan dari tugas akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Dewasa ini penyebaran penyakit dalam lingkungan masyarakat sangat mudah terjadi. Hal ini tentunya menimbulkan keresahan karena dapat membahayakan kesehatan masyarakat dan mengakibatkan laju kematian karena terinfeksi suatu penyakit meningkat. Salah satu penyakit yang menjadi ancaman bagi kelompok masyarakat adalah penyakit menular. Penyakit menular adalah sebuah penyakit yang dapat berpindah dari satu orang ke orang yang lain, baik secara langsung maupun tidak langsung.

Dari kejadian di atas diperlukan tindakan pengobatan sebagai upaya menanggulangi penyebaran penyakit menular yang bertujuan untuk memberikan pertolongan medis kepada penderita agar sembuh dan mencegah agar mereka tidak menjadi sumber penularan terhadap individu lain [1]. Untuk hasil yang lebih optimal, tindakan pengobatan akan ditambah dengan tindakan vaksinasi. Vaksinasi adalah tindakan yang dengan sengaja memberikan suatu bahan yang mengandung zat antigenik yang mampu menimbulkan kekebalan aktif pada manusia [2]. Penelitian sebelumnya telah dilakukan oleh Mohammad Djasuli yaitu eksistensi bifurkasi mundur pada model penyebaran penyakit makroparasitis dan didapatkan bahwa penyakit menular yang menimbulkan fenomena bifurkasi mundur lebih berbahaya daripada penyakit menular yang tidak menyebabkan terjadinya bifurkasi mundur ditinjau dari sisi kesembuhan dan bebasnya penderita awal [3].

Dalam tugas akhir ini yang dianalisis adalah kestabilan dari setiap titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, terjadinya bifurkasi pada nilai suatu parameter tertentu,

dan bilangan reproduksi dasar (R_0). Bilangan reproduksi dasar R_0 menyatakan banyaknya rata-rata individu infeksi sekunder akibat tertular individu infeksi primer yang berlangsung di dalam populasi *susceptible*. Di mana individu infeksi primer adalah individu yang terinfeksi pertama kali disaat penyebaran penyakit terjadi, dan individu infeksi sekunder adalah individu yang terjangkit karena tertular oleh individu infeksi primer.

Selanjutnya bifurkasi mundur pada model epidemik SIRS dikembangkan dengan vaksinasi dan pengobatan dan dirumuskan penyelesaian numerik dari model tersebut dengan metode *Runge-Kutta* orde empat serta membuat simulasinya. Eksistensi bifurkasi mundur dianalisis dengan cara memperhatikan perubahan arah pada kurva titik kesetimbangan endemik. Analisis bifurkasi mundur tidak secara langsung dapat mengendalikan penyebaran penyakit, melainkan hanya sebagai salah satu bahan pertimbangan dalam bidang kesehatan.

1.2 Rumusan Masalah

Berkaitan dengan latar belakang yang ada, permasalahan yang dibahas pada tugas akhir ini antara lain :

1. Bagaimana menentukan bilangan reproduksi dasar, kestabilan dari setiap titik kesetimbangan bebas penyakit, dan titik kesetimbangan endemik?
2. Bagaimana menentukan bifurkasi dan mensimulasikan model epidemik SIRS dengan vaksinasi dan pengobatan berdasarkan analisis yang telah dilakukan?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada tugas akhir ini dibatasi pada analisis model epidemik SIRS dengan kompartemen vaksinasi dan pengobatan serta menggunakan metode *Runge-Kutta* untuk menyelesaikan solusi numerik pada transmisi penyakit menular dengan proses penularan secara langsung.

1.4 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam tugas akhir, yaitu:

1. Mendapatkan bilangan reproduksi dasar, kestabilan dari setiap titik kesetimbangan bebas penyakit, dan titik kesetimbangan endemik.
2. Mendapatkan bifurkasi dan simulasi model epidemik SIRS dengan vaksinasi dan pengobatan berdasarkan analisis yang telah dilakukan.

1.5 Manfaat

1. Untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit menular dengan vaksinasi dan pengobatan.
2. Sebagai referensi bagi pihak medis atau badan pemerintahan yang terkait dalam menyelesaikan masalah penyebaran penyakit menular dengan vaksinasi dan pengobatan.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas akhir ini secara keseluruhan terdiri dari lima bab dan lampiran. Secara garis besar masing-masing bab akan membahas hal-hal sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang permasalahan, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan, dan manfaat penulisan serta sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini memaparkan dasar teori yang digunakan penulis dalam mengerjakan tugas akhir.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan alur kerja dan metode yang digunakan penulis dalam mengerjakan tugas akhir.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini menyajikan analisis kestabilan lokal dari model transmisi penyakit menular dengan vaksinasi dan pengobatan beserta simulasi numeriknya.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari penulis mengenai analisis kestabilan lokal dari model epidemik transmisi penyakit menular dengan vaksinasi dan pengobatan.

LAMPIRAN

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam tugas akhir ini diperlukan tinjauan pustaka yang dapat menunjang metode yang digunakan dalam pembahasan tugas akhir.

2.1 Penyakit Menular, Vaksinasi, dan Pengobatan

Penyakit adalah suatu keadaan abnormal dari tubuh atau pikiran yang menyebabkan ketidaknyamanan, disfungsi, atau kesukaran terhadap orang yang dipengaruhinya. Penyakit menular adalah jenis penyakit yang disebabkan oleh agen penyakit spesifik atau produk yang ditransmisikan dari orang yang terinfeksi, hewan, atau reservoir benda mati kepada individu rentan, melalui tumbuhan atau hewan perantara, vektor, atau lingkungan mati, baik langsung maupun tidak langsung [5].

Vaksinasi adalah cara untuk mencegah terkena berbagai macam penyakit infeksi. Vaksinasi dapat dibedakan menjadi dua, yaitu vaksinasi secara aktif dan pasif. Vaksinasi secara aktif artinya pemberian vaksin yang berisi virus/bakteri yang sudah dimatikan. Tujuan pemberian vaksin secara aktif adalah untuk memacu tubuh kita mengenali virus/bakteri tersebut sehingga tubuh membentuk antibodi. Sedangkan vaksinasi pasif adalah vaksinasi yang dilakukan dengan cara memasukkan serum yang sudah mengandung antibodi untuk melawan jenis penyakit tertentu dalam konsentrasi tinggi [6].

Saat ini, vaksinasi saja dirasa kurang cukup untuk membantu menekan laju kematian karena infeksi oleh penyakit menular. Oleh karena itu, dikembangkan metode lain untuk membantu mengoptimalkan daya tahan tubuh suatu individu, yaitu dengan cara melakukan pengobatan kepada individu yang terinfeksi. Sehingga individu tersebut mempunyai kesempatan yang besar untuk sembuh dari infeksi [1].

2.2 Sistem Kompartemen

Sistem kompartemen adalah sebuah susunan kerja atau proses yang menunjukkan aliran individu dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya seperti saat individu itu sehat, tertular penyakit atau sembuh dari penyakit [5].

2.3 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar (*Basic Reproduction Number*) atau biasa disebut R_0 adalah suatu parameter yang digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit disebabkan oleh satu individu infeksi. Kondisi yang akan timbul adalah satu diantara tiga kemungkinan berikut.

- a. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang dalam populasi.
- b. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap dalam populasi.
- c. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah dalam populasi.

Bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh dengan menentukan nilai *eigen* (nilai karakteristik) dari matriks *Jacobian* yang dihitung pada titik kesetimbangan bebas penyakit [7].

2.4 Kestabilan Titik Tetap

Pandang persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Sebuah titik (\bar{x}_0, \bar{y}_0) merupakan titik kesetimbangan dari persamaan (2.1) jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ dan $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$. Oleh karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka

sepasang fungsi konstan $x(t) = \bar{x}_0$ dan $y(t) = \bar{y}_0$ adalah penyelesaian kesetimbangan dari persamaan diferensial (2.1) untuk semua t [8].

2.5 Stabil Asimtotik Lokal

Stabil asimtotik lokal adalah kestabilan dari sistem linear atau kestabilan dari linearisasi sistem tak linear. Kestabilan asimtotik lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem.

Diberikan definisi akar-akar persamaan karakteristik

Definisi 2.5.1. [10] *Jika J adalah matriks yang berukuran $n \times n$ maka vektor tak-nol dinamakan vektor karakteristik dari J jika memenuhi :*

$$Jx = \lambda x \quad (2.2)$$

untuk skalar λ . Skalar λ disebut nilai karakteristik dari J dan x disebut vektor karakteristik (vektor eigen) yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai karakteristik matriks J yang berukuran $n \times n$, maka Persamaan (2.2) dapat ditulis:

$$(\lambda I - J)x = 0 \quad (2.3)$$

mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika

$$|\lambda I - J| = 0 \quad (2.4)$$

Jika matriks didefinisikan dengan

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

dan

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka persamaan (2.4) dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} = 0$$

Teorema 2.5.2. [10] *Jika J adalah matriks segitiga (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) berukuran $n \times n$, maka determinan dari J adalah perkalian dari diagonal utama matriks tersebut yaitu $\det(J) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.*

Teorema 2.5.3. [11] *Titik setimbang (\bar{x}_0, \bar{y}_0) stabil asimtotik jika dan hanya jika nilai karakteristik dari*

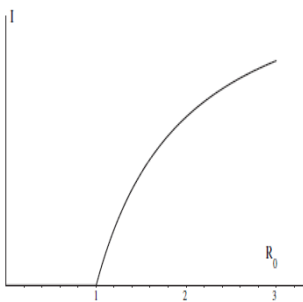
$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

mempunyai tanda negatif pada bagian real-nya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

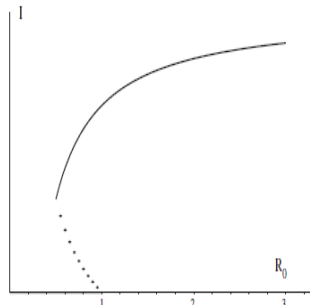
2.6 Bifurkasi

Pada sistem dinamik non linear sering dijumpai kestabilan di sekitar titik kesetimbangan suatu sistem persamaan yang akan membantu dalam analisis bifurkasi. Bifurkasi secara umum adalah perubahan kualitatif yang meliputi perubahan stabilitas dan perubahan banyaknya titik kesetimbangan karena perubahan nilai - nilai parameter. Dalam epidemiologi, fenomena bifurkasi berhubungan dengan parameter ambang batas, yang paling umum merupakan bilangan reproduksi dasar yang disimbolkan dengan R_0 . Ada dua jenis bifurkasi dalam model penyebaran penyakit menular yaitu bifurkasi maju dan bifurkasi mundur. Eksistensi bifurkasi maju dan bifurkasi mundur pada model penyebaran penyakit ditunjukkan oleh diagram bifurkasi dalam gambar 2.2

dan gambar 2.3 dengan R_0 sebagai parameter bifurkasi dan I adalah populasi individu terinfeksi dalam kondisi setimbang. Fenomena bifurkasi maju terjadi pada saat $R_0 > 1$ di mana hanya ada satu titik kesetimbangan endemik. Sedangkan fenomena bifurkasi mundur terjadi pada saat $R_0 < 1$ dan mempunyai dua titik kesetimbangan endemik [6].



Gambar 2.2 Bifurkasi Maju



Gambar 2.3 Bifurkasi Mundur

2.7 Metode Runge-Kutta

Metode *Runge-Kutta* merupakan pengembangan dari metode Euler, di mana perhitungan penyelesaian dilakukan *step* demi *step*. Untuk fungsi dari persamaan diferensial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Dengan titik pendekatan awal x_0, y_0 , berdasarkan metode *Euler* nilai fungsi penyelesaian diperoleh dengan:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n(x_n, y_n)$$

h adalah langkah waktu.

2.7.1 Metode Runge-Kutta orde 2

Metode *Runge-Kutta* membuat *step* yang lebih kecil dari perubahan nilai dengan membagi nilai perubahan setiap *step* menjadi sejumlah bagian yang ditentukan, bentuk paling

sederhana dari metode *Runge-Kutta* ini adalah membagi bagian perubahan menjadi dua bagian sehingga :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{aligned}$$

2.7.2 Metode *Runge-Kutta* orde 4

Apabila pada metode *Runge-Kutta* orde 2, nilai koefisien perbaikannya adalah dua buah, maka pada metode ini menggunakan empat nilai koefisien perbaikan.

Diberikan persamaan diferensial:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, t) \end{aligned}$$

penyelesaian:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

dengan

$$\begin{aligned} k_{1,x} &= hf(t_n, x_n) \\ k_{2,x} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{1,x}}{2}\right) \\ k_{3,x} &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_{2,x}}{2}\right) \\ k_{4,x} &= hf(t_n + h, x_n + k_{3,x}) \end{aligned}$$

dan

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y})$$

dengan

$$\begin{aligned} k_{1,y} &= hg(t_n, y_n) \\ k_{2,y} &= hg\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{1,y}}{2}\right) \\ k_{3,y} &= hg\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_{2,y}}{2}\right) \\ k_{4,y} &= hg(t_n + h, y_n + k_{3,y}) \end{aligned}$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian digunakan sebagai acuan sehingga penelitian dapat berjalan secara sistematis. Pada bab ini akan diuraikan metode yang digunakan dalam penelitian ini secara rinci, antara lain :

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan analisis model dengan mempelajari literatur-literatur yang terkait seperti jurnal, *paper*, dan buku-buku yang berhubungan dengan model epidemik transmisi penyakit menular dengan vaksinasi dan pengobatan, metode numerik *Runge-Kutta*, dan terjadinya bifurkasi mundur.

3.2 Mengkaji Model Epidemik SIRS dengan Vaksinasi dan Pengobatan

Tahap menganalisis model epidemik transmisi penyakit menular dengan vaksinasi dan pengobatan dilakukan untuk memahami model epidemik tersebut dengan cara membuat model kompartemen yang terdiri dari 5 kelompok individu, yaitu individu *Susceptible* (individu yang rentan terhadap penyakit), *Vaccinated* (individu *susceptible* yang divaksinasi), *Infected* (individu yang terjangkit yang dapat menularkan penyakit), *Treated* (individu *infected* yang mendapatkan pengobatan), *Recovered* (individu yang sembuh dari penyakit).

3.3 Tahap Menganalisis Kestabilan Lokal

Pada tahap ini dilakukan analisis model epidemik transmisi penyakit menular dengan vaksinasi dan pengobatan sehingga didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit dan juga titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya akan dicari kestabilan lokal dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik dengan memasukkan nilai kesetimbangan ke dalam

matriks *Jacobian*, sehingga didapatkan nilai akar-akar karakteristik dari matriks *Jacobiannya*

3.4 Analisis Terjadinya Bifurkasi Mundur

Eksistensi bifurkasi mundur pada model akan dinalisis dengan cara memperhatikan perubahan arah pada kurva titik setimbang endemik.

3.5 Simulasi Numerik

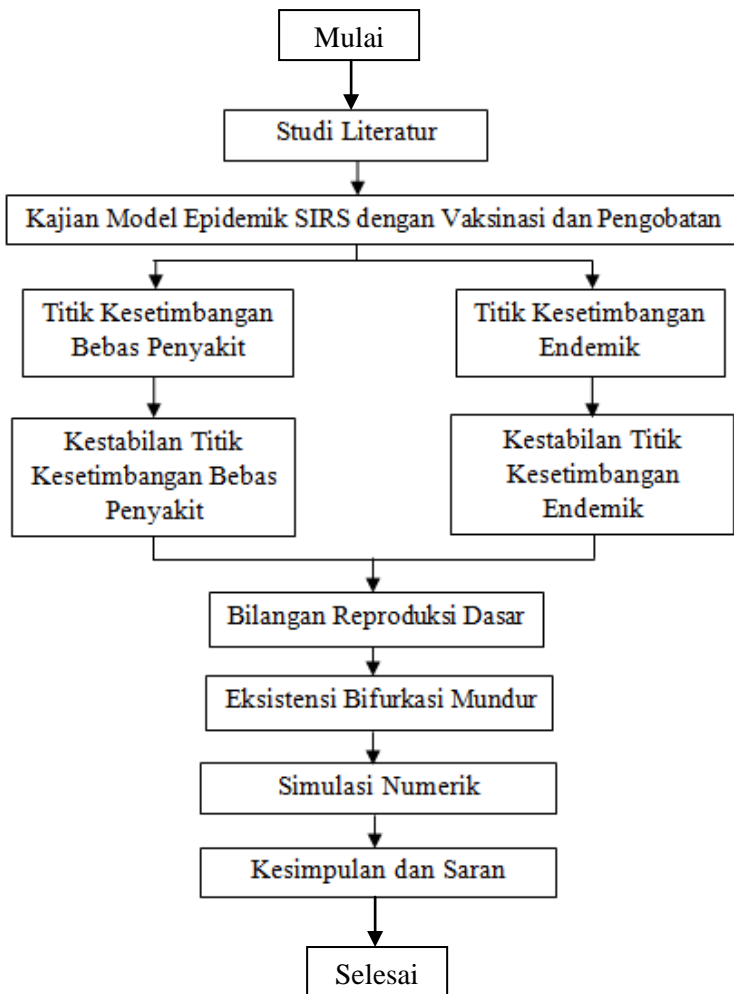
Tahap simulasi numerik *Runge-Kutta* orde 4 dilakukan menggunakan *software* MATLAB untuk menggambarkan grafik kestabilan dan penyelesaian numerik model epidemik transmisi penyakit menular dengan vaksinasi dan pengobatan.

3.6 Kesimpulan dan Saran

Setelah dilakukan analisis dan pembahasan maka dapat ditarik suatu kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

3.7 Diagram Alir

Diagram alir dimaksudkan untuk memudahkan dalam pengerjaan tugas akhir agar lebih sistematis. Diagram alir yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Diagram Alir Penyelesaian Model Epidemik Transmisi Penyakit Menular dengan Vaksinasi dan Pengobatan

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan ditentukan bilangan reproduksi dasar, titik setimbang bebas penyakit, titik setimbang endemik, dan ditentukan kestabilan lokal dari titik setimbang bebas penyakit dan titik setimbang endemik berdasarkan model epidemik tipe SIRS yang ditambah dengan kompartemen vaksinasi dan pengobatan, serta akan ditentukan analisis eksistensi bifurkasi mundur model dengan memperhatikan perubahan arah pada kurva titik setimbang endemik sekaligus akan ditentukan penyelesaian numerik dari model tersebut dan membuat simulasinya.

4.1 Model Epidemik Transmisi Penyakit Menular dengan Vaksinasi dan Pengobatan

Model epidemik yang akan dianalisis menggambarkan penyebaran penyakit dengan tindakan vaksinasi dan pengobatan pada tipe SIRS dalam suatu populasi. Dinamika pada populasi dituliskan dalam suatu sistem persamaan diferensial. Jumlah individu pada populasi *susceptible*, *vaccinated*, *infected*, *treated* dan *recovered* pada waktu t masing-masing dinyatakan dengan $S(t), V(t), I(t), T(t)$ dan $R(t)$. Jumlah populasi N diasumsikan tetap (konstan) terhadap waktu t , artinya tidak ada populasi *susceptible* baru karena pengaruh kelahiran, kematian maupun migrasi. Oleh karena itu, model tersebut dapat dinyatakan dengan $S(t) + V(t) + I(t) + T(t) + R(t) = N(t)$.

Model epidemik tipe SIRS dengan vaksinasi dan pengobatan mempunyai asumsi-asumsi sebagai berikut:

a. Populasi dibagi menjadi 5 kelompok yaitu:

S adalah populasi *Susceptible* (kumpulan individu yang rentan terhadap penyakit).

V adalah individu *Vaccinated* (kumpulan individu *susceptible* yang divaksinasi)

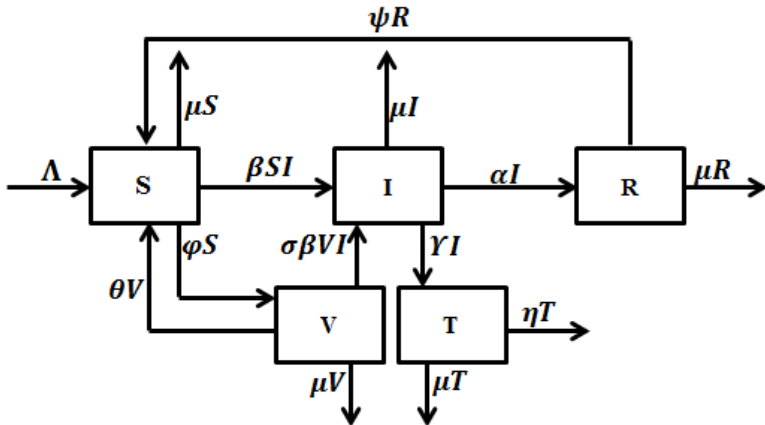
I adalah populasi *Infected* (kumpulan individu yang terjangkit penyakit)

T adalah populasi *Treated* (kumpulan individu yang mendapatkan pengobatan)

R adalah populasi *Recovered* (kumpulan individu yang sembuh dari penyakit).

- b. Λ adalah laju pertambahan populasi. Jumlah populasi yang lahir dalam suatu populasi tiap satuan waktu selalu konstan. Jumlah populasi tersebut akan memasuki kelompok S (*susceptible*). βSI adalah laju besarnya populasi *susceptible* yang terinfeksi dengan β merupakan konstanta yang menunjukkan tingkat kontak sehingga terjadi penularan penyakit. Diasumsikan bahwa populasi *susceptible* divaksinasi (*vaccinated*) dengan laju konstan φ dan vaksin berkurang dengan laju konstan θ sehingga populasi *vaccinated* kembali menjadi *susceptible*. Dalam hal ini tingkat ketidakefektifan vaksin dinyatakan dengan σ . Selanjutnya $\sigma\beta VI$ adalah laju besarnya populasi *vaccinated* yang terinfeksi suatu penyakit. μ adalah laju kematian alami yang terjadi pada setiap populasi. Diasumsikan bahwa penyakit yang menyebar dalam suatu populasi adalah penyakit yang tidak mematikan sehingga dalam model ini tidak ada kematian yang disebabkan oleh penyakit. Jumlah populasi yang mati pada setiap kelompok proporsional dengan jumlah populasi pada masing-masing kelompok. Oleh karena itu, jumlah kematian pada setiap kelompok S , V , I , T , dan R masing-masing sebesar μS , μV , μI , μT dan μR .
- c. α adalah laju populasi *infected* yang menjadi populasi *recovered*. ψ adalah laju populasi *recovered* yang kembali menjadi populasi *susceptible*. γ adalah laju populasi *infected* yang mendapatkan tindakan pengobatan dan berkurang dengan laju konstan η sehingga berubah menjadi laju kesembuhan.

Dari asumsi-asumsi tersebut didapatkan diagram kompartemen model epidemik tipe SIRS dengan vaksinasi dan pengobatan sebagai berikut:



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Epidemik Tipe SIRS dengan Vaksinasi dan Pengobatan

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.1 diperoleh model epidemik tipe SIRS dengan vaksinasi dan pengobatan sebagai berikut :

1. Besarnya laju populasi yang rentan (*susceptible*) dipengaruhi oleh penambahan populasi, sedangkan populasi akan menurun karena populasi yang rentan terinfeksi oleh virus, kematian alami populasi, dan banyaknya populasi yang mendapatkan vaksinasi. Kemudian populasi akan bertambah karena adanya populasi yang kembali rentan setelah sembuh, dan populasi yang kembali rentan setelah mendapatkan vaksinasi.

$$S' = \Lambda - \beta SI - (\mu + \varphi)S + \psi R + \theta V$$

2. Besarnya laju populasi yang mendapatkan vaksinasi (*vaccinated*) akan bertambah saat terdapat populasi rentan yang divaksinasi, sedangkan populasi akan menurun dengan adanya beberapa kejadian, antara lain populasi divaksinasi yang kembali terinfeksi penyakit, kematian

alami populasi tervaksinasi, dan populasi tervaksinasi yang kembali menjadi populasi rentan.

$$V' = \varphi S - \sigma\beta VI - (\mu + \theta)V$$

3. Besarnya laju populasi yang terinfeksi (*infected*) dipengaruhi oleh populasi rentan yang terinfeksi penyakit dan akan bertambah karena adanya populasi tervaksinasi yang kembali terjangkit. Sedangkan populasi akan menurun karena kematian alami populasi tervaksinasi, adanya populasi terinfeksi yang sembuh, dan populasi terinfeksi yang mendapatkan pengobatan.

$$I' = \beta SI + \sigma\beta VI - (\mu + \alpha + \gamma)I$$

4. Besarnya laju populasi yang mendapatkan pengobatan (*treated*) akan bertambah saat terdapat populasi terinfeksi yang mendapatkan pengobatan. Sedangkan populasi akan menurun apabila ada kematian alami populasi yang mendapatkan pengobatan dan populasi yang sembuh karena mendapatkan pengobatan.

$$T' = \gamma I - (\mu + \eta)T$$

5. Besarnya laju populasi yang sembuh (*recovered*) dipengaruhi oleh populasi terinfeksi yang sembuh. Sedangkan populasi akan menurun karena kematian alami populasi yang sembuh dan populasi yang kembali menjadi rentan setelah sembuh dari penyakit.

$$R' = \alpha I - (\mu + \psi)R$$

Dari penjelasan di atas maka sistem persamaan model transmisi penyakit menular dengan vaksinasi dan pengobatan dapat ditulis sebagai berikut:

$$S' = \Lambda - \beta SI - (\mu + \varphi)S + \psi R + \theta V \quad (4.1)$$

$$V' = \varphi S - \sigma \beta VI - (\mu + \theta)V \quad (4.2)$$

$$I' = \beta SI + \sigma \beta VI - (\mu + \alpha + \gamma)I \quad (4.3)$$

$$T' = \gamma I - (\mu + \eta)T \quad (4.4)$$

$$R' = \alpha I - (\mu + \psi)R \quad (4.5)$$

4.2 Daerah Penyelesaian Model

Diasumsikan bahwa nilai parameter pada sistem persamaan model (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), dan (4.5) adalah positif.

Misal daerah penyelesaian Ω didefinisikan sebagai berikut:

$$\Omega = \left\{ (S, V, I, T, R) \in R_+^5 \mid \begin{array}{l} S + V + I + T + R = N, \\ S \geq 0, V \geq 0, I \geq 0, T \geq 0, R \geq 0 \end{array} \right\} \\ \text{dan } N(0) = N_0 > 0.$$

Ω menyatakan daerah invarian dari model (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), dan (4.5) dengan nilai awal $S(0), V(0), I(0), T(0)$ dan $R(0)$ di dalam Ω sehingga $S(t), V(t), I(t), T(t)$ dan $R(t)$ akan berada di dalam Ω untuk semua $t > 0$. Sehingga dari model (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), dan (4.5) diperoleh:

$$\begin{aligned} N' &= S' + V' + I' + T' + R' \\ &= \Lambda - \beta SI - (\mu + \varphi)S + \psi R + \theta V + \varphi S - \sigma \beta VI - (\mu + \theta)V \\ &\quad + \beta SI + \sigma \beta VI - (\mu + \alpha + \gamma)I + \gamma I - (\mu + \eta)T \\ &\quad + \alpha I - (\mu + \psi)R \\ &= \Lambda - \mu(S + V + I + T + R) \\ &= \Lambda - \mu N \end{aligned} \quad (4.6)$$

N merupakan jumlah dari semua populasi.

Persamaan (4.6) berbentuk persamaan diferensial linear tingkat satu, maka penyelesaian dari persamaan tersebut adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} N' &= \Lambda - \mu N \\ \frac{dN}{dt} &= \Lambda - \mu N \\ \int \frac{dN}{\Lambda - \mu N} &= \int dt \end{aligned} \quad (4.7)$$

misal : $u = \Lambda - \mu N$

$$du = -\mu dN$$

$$dN = -\frac{1}{\mu} du$$

Bentuk Persamaan (4.7) selanjutnya menjadi

$$\int \left(\frac{1}{u}\right) du = \int -\mu dt$$

$$\ln u = -\mu t + \ln C$$

$$\ln u - \ln C = -\mu t$$

$$\ln \left|\frac{u}{C}\right| = -\mu t$$

$$u = C e^{-\mu t}$$

Substitusi $u = \Lambda - \mu N$

$$\Lambda - \mu N = C e^{-\mu t}$$

$$N(t) = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{C}{\mu} e^{-\mu t}$$

Di sini nilai $N(t)$ berubah terhadap t . Artinya semakin besar nilai t maka nilai $C e^{-\mu t}$ semakin kecil.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $N(t) \rightarrow \frac{\Lambda}{\mu} = K$ untuk $t \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\Lambda}{\mu} - \frac{C}{\mu} e^{-\mu t} \right) \\ &= \frac{\Lambda}{\mu} \\ &= K \end{aligned}$$

Sehingga untuk selang $0 < N(t) \leq K$ jumlah populasi terbatas.

4.3 Titik Kestimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit model dapat diperoleh dengan substitusi $R = N - S - V - I - T$ dengan $N \rightarrow K = \frac{\Lambda}{\mu}$ ke Persamaan (4.1), sehingga Persamaan (4.1), (4.2), (4.3), dan (4.4) menjadi:

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - \beta SI - (\mu + \varphi)S + \psi R + \theta V \\ &= \mu K - \beta SI - (\mu + \varphi)S + \psi(K - S - V - I - T) + \theta V \\ &= \mu K - \beta SI - \mu S + \varphi S + \psi K - \psi S - \psi V - \psi I - \psi T + \theta V \\ &= (\mu + \psi)K - \beta SI - (\mu + \varphi + \psi)S \\ &\quad - (\psi - \theta)V - \psi I - \psi T \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$V' = \varphi S - \sigma \beta VI - (\mu + \theta)V \tag{4.9}$$

$$I' = \beta SI + \sigma \beta VI - (\mu + \alpha + \gamma)I \tag{4.10}$$

$$T' = \gamma I - (\mu + \eta)T \tag{4.11}$$

Selanjutnya dengan mengambil $S' = 0, V' = 0, I' = 0$, dan $T' = 0$ akan didapat:

$$\begin{aligned} (\mu + \psi)K &= \beta SI + (\mu + \varphi + \psi)S \\ &\quad + (\psi - \theta)V + \psi I + \psi T \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\varphi S = \sigma \beta VI + (\mu + \theta)V \tag{4.13}$$

$$\beta I(S + \sigma V) = (\mu + \alpha + \gamma)I \tag{4.14}$$

$$(\mu + \eta)T = \gamma I \tag{4.15}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah suatu keadaan di mana tidak terjadi penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi sehingga $I = 0$. Dari Persamaan (4.12), (4.13), (4.14), dan (4.15) serta substitusi nilai $I = 0$ maka Persamaan (4.14) dan (4.15) terpenuhi, sedangkan Persamaan (4.12) dan (4.13) menjadi:

$$\begin{aligned}
 (\mu + \psi)K &= \beta SI + (\mu + \varphi + \psi)S + (\psi - \theta)V + \psi I + \psi T \\
 \Leftrightarrow (\mu + \psi)K &= 0 + (\mu + \varphi + \psi)\left(\frac{\mu + \theta}{\varphi}\right)V + (\psi - \theta)V + 0 + 0 \\
 \Leftrightarrow (\mu + \psi)\varphi K &= (\mu + \varphi + \psi)(\mu + \theta)V + (\psi - \theta)\varphi V \\
 \Leftrightarrow (\mu + \psi)\varphi K &= (\mu^2 + \mu\varphi + \mu\psi + \mu\theta + \varphi\theta + \psi\theta + \psi\varphi - \theta\varphi)V \\
 \Leftrightarrow (\mu + \psi)\varphi K &= (\mu^2 + \mu\varphi + \mu\psi + \mu\theta + \psi\theta + \psi\varphi)V \\
 \Leftrightarrow (\mu + \psi)\varphi K &= (\mu + \psi)(\mu + \theta + \varphi)V \\
 \Leftrightarrow \varphi K &= (\mu + \theta + \varphi)V \\
 \Leftrightarrow V &= \frac{\varphi}{\mu + \theta + \varphi} K \\
 \Leftrightarrow V &= \frac{\varphi}{\mu + \theta + \varphi} \frac{\Lambda}{\mu} \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusi Persamaan (4.16) ke Persamaan (4.13) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}
 \varphi S &= \sigma\beta VI + (\mu + \theta)V \\
 \Leftrightarrow \varphi S &= 0 + (\mu + \theta)\frac{\varphi}{\mu + \theta + \varphi}\frac{\Lambda}{\mu} \\
 \Leftrightarrow S &= \frac{\mu + \theta}{\mu + \theta + \varphi}\frac{\Lambda}{\mu}
 \end{aligned}$$

Jadi titik kesetimbangan bebas penyakit pada model adalah:

$$S_0 = \frac{\mu + \theta}{\mu + \theta + \varphi}\frac{\Lambda}{\mu}, \quad V_0 = \frac{\varphi}{\mu + \theta + \varphi}\frac{\Lambda}{\mu}.$$

4.4 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit model ditentukan oleh nilai *eigen* matriks *Jacobian* dari Persamaan (4.8), (4.9), (4.10), dan (4.11).

Misal:

$$D = (\mu + \psi)K - \beta SI - (\mu + \varphi + \psi)S - (\psi - \theta)V - \psi I$$

$$L = \varphi S - \sigma \beta VI - (\mu + \theta)V$$

$$G = \beta SI + \sigma \beta VI - (\mu + \alpha + \gamma)I$$

$$H = \gamma I - (\mu + \eta)T$$

Sehingga didapat matriks *Jacobian* sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial S} & \frac{\partial D}{\partial V} & \frac{\partial D}{\partial I} & \frac{\partial D}{\partial T} \\ \frac{\partial L}{\partial S} & \frac{\partial L}{\partial V} & \frac{\partial L}{\partial I} & \frac{\partial L}{\partial T} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial V} & \frac{\partial G}{\partial I} & \frac{\partial G}{\partial T} \\ \frac{\partial H}{\partial S} & \frac{\partial H}{\partial V} & \frac{\partial H}{\partial I} & \frac{\partial H}{\partial T} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(\mu + \varphi + \psi) & (\theta - \psi) & -\beta S - \psi & -\psi \\ \varphi & -(\mu + \theta) & -\sigma \beta V & 0 \\ 0 & 0 & \beta S + \sigma \beta V - (\mu + \alpha + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \eta) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya matriks *Jacobian* di titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu $E_0 = (S_0, V_0, I_0, T_0)$ menjadi

$$\begin{bmatrix} -(\mu + \varphi + \psi) & (\theta - \psi) & -\beta S_0 - \psi & -\psi \\ \varphi & -(\mu + \theta) & -\sigma \beta V_0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta S_0 + \sigma \beta V_0 - (\mu + \alpha + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \eta) \end{bmatrix}$$

Untuk mencari persamaan karakteristiknya, matriks J akan diubah ke dalam bentuk matriks segitiga atas dengan cara Operasi Baris Elementer (OBE) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -(\mu + \varphi + \psi) & (\theta - \psi) & -\beta S_0 - \psi & -\psi \\ \varphi & -(\mu + \theta) & -\sigma\beta V_0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta S_0 + \sigma\beta V_0 - (\mu + \alpha + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \eta) \end{bmatrix}$$

$$\sim B_4 - \frac{\gamma}{\beta S_0 + \sigma\beta V_0 - (\mu + \alpha + \gamma)} B_3$$

$$\sim B_2 - \frac{\varphi}{-(\mu + \varphi + \psi)} B_1$$

$$\begin{bmatrix} -(\mu + \varphi + \psi) & (\theta - \psi) & -\beta S_0 - \psi & -\psi \\ 0 & -(\mu + \theta) + \frac{\varphi(\theta - \psi)}{\mu + \varphi + \psi} & -\sigma\beta V_0 - \frac{\varphi(\beta S_0 + \psi)}{\mu + \varphi + \psi} & \frac{-\varphi\psi}{\mu + \varphi + \psi} \\ 0 & 0 & \beta S_0 + \sigma\beta V_0 - (\mu + \alpha + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu + \eta) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari persamaan karakteristik dari matriks *Jacobian* di atas tersebut dengan cara menggunakan

$$|\lambda I - J| = 0$$

Sehingga matriks *Jacobian* menjadi

$$\begin{bmatrix} \lambda + (\mu + \varphi + \psi) & (\theta - \psi) & -\beta S_0 - \psi & -\psi \\ 0 & \lambda + (\mu + \theta) - \frac{\varphi(\theta - \psi)}{\mu + \varphi + \psi} & -\sigma\beta V_0 - \frac{\varphi(\beta S_0 + \psi)}{\mu + \varphi + \psi} & \frac{-\varphi\psi}{\mu + \varphi + \psi} \\ 0 & 0 & \lambda - \beta S_0 - \sigma\beta V_0 + (\mu + \alpha + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + (\mu + \eta) \end{bmatrix} = 0$$

Kemudian dari matriks *Jacobian* tersebut akan didapatkan persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\begin{aligned} & [\lambda + (\mu + \varphi + \psi)] \left[\lambda + (\mu + \theta) - \frac{\varphi(\theta - \psi)}{\mu + \varphi + \psi} \right] [\lambda - \beta S_0 - \sigma\beta V_0 \\ & + (\mu + \alpha + \gamma)] [\lambda + (\mu + \eta)] = 0 \end{aligned}$$

Sehingga akan didapatkan nilai *eigen* dari akar-akar karakteristiknya sebagai berikut

$$\lambda_1 = -(\mu + \varphi + \psi)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -(\mu + \theta) + \frac{\varphi(\theta - \psi)}{\mu + \varphi + \psi} \\ &= \frac{-(\mu + \theta)(\mu + \varphi + \psi) + \varphi(\theta - \psi)}{\mu + \varphi + \psi} \\ &= \frac{-\mu^2 - \theta\mu - \mu\varphi - \theta\varphi - \mu\psi - \theta\psi + \theta\varphi - \varphi\psi}{\mu + \varphi + \psi} \\ &= \frac{-(\mu^2 + \theta\mu + \mu\varphi + \mu\psi + \theta\psi + \varphi\psi)}{\mu + \varphi + \psi} \end{aligned}$$

$$\lambda_3 = (\beta S_0 + \sigma\beta V_0 - (\mu + \alpha + \gamma))$$

$$\lambda_4 = -(\mu + \eta)$$

Dari penjelasan di atas didapatkan nilai $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, dan $\lambda_4 < 0$ sedangkan untuk $\lambda_3 = (\beta S_0 + \sigma\beta V_0 - (\mu + \alpha + \gamma))$ belum dapat ditentukan tandanya. Artinya dapat bernilai positif ataupun negatif. Sehingga selanjutnya akan dicari bilangan reproduksi dasar model epidemik SIRS dengan vaksinasi dan pengobatan (R_φ) terlebih dahulu. Dalam kasus ini, bilangan reproduksi dasar dibutuhkan untuk mengetahui bagaimana dinamika penyebaran penyakit yang akan dianalisis lebih lanjut. Kemudian berdasarkan nilai eigen λ_3 dapat dilakukan analisis sebagai berikut

$$\lambda_3 = (\beta S_0 + \sigma\beta V_0 - (\mu + \alpha + \gamma))$$

karena

$$S_0 = \frac{\mu + \theta}{\mu + \theta + \varphi} \frac{\Lambda}{\mu} \quad V_0 = \frac{\varphi}{\mu + \theta + \varphi} \frac{\Lambda}{\mu}$$

λ_3 akan bernilai negatif jika

$$\begin{aligned}
 & (\beta S_0 + \sigma \beta V_0 - (\mu + \alpha + \gamma)) < 0 \\
 \Leftrightarrow & \beta S_0 + \sigma \beta V_0 < (\mu + \alpha + \gamma) \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{\beta S_0}{(\mu + \alpha + \gamma)} + \frac{\sigma \beta V_0}{(\mu + \alpha + \gamma)} \right) < 1 \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{\beta \frac{\mu + \theta}{\mu + \theta + \varphi} K}{(\mu + \alpha + \gamma)} + \frac{\sigma \beta \frac{\varphi}{\mu + \theta + \varphi} K}{(\mu + \alpha + \gamma)} \right) < 1 \\
 \Leftrightarrow & \left(\beta \frac{\mu + \theta}{\mu + \theta + \varphi (\mu + \alpha + \gamma)} K + \sigma \beta \frac{\varphi}{\mu + \theta + \varphi (\mu + \alpha + \gamma)} K \right) < 1 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\beta K (\mu + \theta + \sigma \varphi)}{(\mu + \theta + \varphi)(\mu + \alpha + \gamma)} < 1
 \end{aligned}$$

Jadi bilangan reproduksi dasar (R_φ) adalah:

$$\frac{\beta K (\mu + \theta + \sigma \varphi)}{(\mu + \theta + \varphi)(\mu + \alpha + \gamma)}$$

Dari nilai R_φ , maka diperoleh nilai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 sebagai berikut:

a. Jika nilai $R_\varphi < 1$, atau dapat dituliskan dengan

$$\frac{\beta K (\mu + \theta + \sigma \varphi)}{(\mu + \theta + \varphi)(\mu + \alpha + \gamma)} < 1$$

maka akan diperoleh nilai eigen $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$, dan $\lambda_4 < 0$, sehingga berdasarkan sifat stabilitas titik kesetimbangan $E_0 = (S_0, V_0, I_0, T_0) = \left(\frac{\mu + \theta}{\mu + \theta + \varphi} \frac{\Lambda}{\mu}, \frac{\varphi}{\mu + \theta + \varphi} \frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$ stabil asimtotik lokal.

b. Jika nilai $R_\varphi > 1$, atau dapat dituliskan dengan

$$\frac{\beta K (\mu + \theta + \sigma \varphi)}{(\mu + \theta + \varphi)(\mu + \alpha + \Upsilon)} > 1$$

Maka akan diperoleh nilai eigen $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$, dan $\lambda_4 < 0$, sehingga berdasarkan sifat stabilitas titik kesetimbangan $E_0 = (S_0, V_0, I_0, T_0) = \left(\frac{\mu + \theta}{\mu + \theta + \varphi} \frac{\Lambda}{\mu}, \frac{\varphi}{\mu + \theta + \varphi} \frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$ tidak stabil asimtotik lokal.

4.5 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik merupakan suatu keadaan di mana terjadi infeksi penyakit di dalam suatu populasi tertentu. Dalam hal ini, titik kesetimbangan endemik bisa didapatkan dengan mengambil nilai $\frac{dV}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dT}{dt} = 0$ dari Persamaan (4.9), (4.10), dan (4.11).

Dari Persamaan (4.9)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \varphi S - \sigma \beta VI - (\mu + \theta)V &= 0 \\ \Leftrightarrow S &= \frac{\sigma \beta VI + (\mu + \theta)V}{\varphi} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dari Persamaan (4.10)

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta SI + \sigma \beta VI - (\mu + \alpha + \gamma)I &= 0 \\ \Leftrightarrow S &= \frac{(\mu + \alpha + \gamma) - \sigma \beta V}{\beta} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (4.17) dan Persamaan (4.18), akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\sigma\beta VI + (\mu + \theta)V}{\varphi} = \frac{(\mu + \alpha + \gamma) - \sigma\beta V}{\beta} \\
&\Leftrightarrow \beta(\sigma\beta VI + (\mu + \theta)V) = \varphi((\mu + \alpha + \gamma) - \sigma\beta V) \\
&\Leftrightarrow \sigma\beta^2 VI + \beta V(\mu + \theta) + \sigma\varphi\beta V = \varphi(\mu + \alpha + \gamma) \\
&\Leftrightarrow \beta V(\sigma\beta I + \mu + \theta + \sigma\varphi) = \varphi(\mu + \alpha + \gamma) \\
&\Leftrightarrow V^* = \frac{\varphi(\mu + \alpha + \gamma)}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Setelah memperoleh nilai V^* , selanjutnya akan dilakukan substitusi nilai V^* ke Persamaan (4.10). Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
&\frac{dI}{dt} = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta SI + \sigma\beta V^* I - (\mu + \alpha + \gamma)I = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta S + \sigma \frac{\varphi(\mu + \alpha + \gamma)}{[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} - (\mu + \alpha + \gamma) = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta S = (\mu + \alpha + \gamma) - \sigma \frac{\varphi(\mu + \alpha + \gamma)}{[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\
&\Leftrightarrow \beta S = \frac{(\mu + \alpha + \gamma)[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I] - \sigma(\varphi(\mu + \alpha + \gamma))}{[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\
&\Leftrightarrow \beta S = \frac{(\mu + \alpha + \gamma)[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I - \sigma\varphi]}{[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\
&\Leftrightarrow S^* = \frac{(\mu + \alpha + \gamma)[(\mu + \theta) + \sigma\beta I]}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Setelah memperoleh nilai S^* , selanjutnya akan dicari nilai T^* dengan menggunakan Persamaan (4.11), seperti berikut ini:

$$\begin{aligned}
&\frac{dT}{dt} = 0 \\
&\Leftrightarrow \gamma I - (\mu + \eta)T = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow T &= \frac{\gamma}{(\mu + \eta)} I \\
\Leftrightarrow \beta T &= \beta \frac{\gamma}{(\mu + \eta)} I \\
\Leftrightarrow T^* &= \beta \frac{\gamma}{\beta(\mu + \eta)} I
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Setelah memperoleh nilai S^*, V^* , dan T^* selanjutnya Persamaan (4.19), (4.20), dan (4.21) akan disubstitusikan ke Persamaan (4.12), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
(\mu + \psi)K &= \beta SI + (\mu + \varphi + \psi)S + (\psi - \theta)V + \psi I + \psi T \\
\Leftrightarrow (\mu + \psi)K &= \beta S^* I + (\mu + \varphi + \psi)S^* + (\psi - \theta)V^* + \psi I + \psi T^* \\
\Leftrightarrow (\mu + \psi)K &= \beta \frac{(\mu + \alpha + \gamma)[(\mu + \theta) + \sigma\beta I]}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} I \\
&\quad + (\mu + \varphi + \psi) \frac{(\mu + \alpha + \gamma)[(\mu + \theta) + \sigma\beta I]}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\
&\quad + (\psi - \theta) \frac{\varphi(\mu + \alpha + \gamma)}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} + \psi I + \psi \frac{\gamma}{(\mu + \eta)} I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 0 = & \beta \frac{(\mu + \alpha + \gamma)[(\mu + \theta) + \sigma\beta I]}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} I \\
& + \frac{(\mu + \varphi + \psi)(\mu + \alpha + \gamma)[(\mu + \theta) + \sigma\beta I]}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\
& + \frac{(\psi - \theta)\varphi(\mu + \alpha + \gamma)}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} + \psi I \frac{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\
& + \psi\gamma I \frac{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]}{(\mu + \eta)\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\
& - (\mu + \psi)K \frac{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 0 = & \{\beta(\mu + \eta)(\mu + \alpha + \gamma)[(\mu + \theta) + \sigma\beta I]I \\
& + (\mu + \eta)(\mu + \varphi + \psi)(\mu + \alpha + \gamma)[(\mu + \theta) + \sigma\beta I] \\
& + (\mu + \eta)(\psi - \theta)\varphi(\mu + \alpha + \gamma) \\
& + \psi I(\mu + \eta)\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I] \\
& + \psi\gamma I\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I] \\
& - (\mu + \psi)K(\mu + \eta)\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) \\
& + \sigma\beta I]\} \frac{1}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 0 = & \{\sigma\beta^2((\mu + \eta)(\mu + \alpha + \gamma) + \psi(\mu + \eta) + \psi\gamma)\}I^2 \\
& + \{(\mu + \eta)(\mu + \varphi + \psi)(\mu + \alpha + \gamma)\sigma\beta \\
& + \psi\beta(\mu + \eta)(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \psi\gamma\beta(\mu + \theta + \sigma\varphi) \\
& - (\mu + \psi)K(\mu + \eta)\sigma\beta^2\}I \\
& + \{(\mu + \eta)(\mu + \varphi + \psi)(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \theta) \\
& + (\mu + \eta)(\psi - \theta)\varphi(\mu + \alpha + \gamma) \\
& - (\mu + \psi)K(\mu + \eta)\beta(\mu + \theta \\
& + \sigma\varphi)\} \frac{1}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 0 = & \{\sigma\beta[\psi(\mu + \eta + \gamma) + (\mu + \eta)(\mu + \alpha + \gamma)]\}I^2 \\
& + \{\psi(\mu + \eta + \gamma)(\mu + \theta + \sigma\varphi) \\
& + \sigma(\mu + \eta)(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \varphi + \psi) \\
& + (\mu + \eta)(\mu + \theta)(\mu + \alpha + \gamma) - \sigma\beta(\mu + \eta)(\mu + \psi)K\}I \\
& + \left\{ \frac{(\mu + \eta)(\mu + \psi)(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \theta + \varphi)}{\beta} \right. \\
& \left. - (\mu + \theta + \sigma\varphi)(\mu + \eta)(\mu + \psi)K \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{atau } g(I) = AI^2 + BI + C = 0 \quad (4.22)$$

dengan

$$A = \sigma\beta[\psi(\mu + \eta + \gamma) + (\mu + \eta)(\mu + \alpha + \gamma)]$$

$$B = \psi(\mu + \eta + \gamma)(\mu + \theta + \sigma\varphi)$$

$$+ \sigma(\mu + \eta)(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \varphi + \psi)$$

$$+ (\mu + \eta)(\mu + \theta)(\mu + \alpha + \gamma) - \sigma\beta(\mu + \eta)(\mu + \psi)K$$

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{(\mu + \eta)(\mu + \psi)(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \theta + \varphi)}{\beta} \\
 &\quad - (\mu + \theta + \sigma\varphi)(\mu + \eta)(\mu + \psi)K \\
 &= \frac{(\mu + \eta)(\mu + \psi)(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \theta + \varphi)}{\beta} [1 - R_\varphi] \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Penyelesaian dari Persamaan (4.22) adalah :

$$I = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

a. Jika $R_\varphi > 1$ maka $C < 0$

i. Karena $C < 0$ maka $\sqrt{B^2 - 4AC} > 0$ dan $\sqrt{B^2 - 4AC} > B$
maka $\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} > 0$ untuk sebarang B .

ii. Misalkan

• $B > 0$ maka

$$-B < 0 \text{ dan } -\sqrt{B^2 - 4AC} < 0$$

$$\text{sehingga } \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0.$$

• $B = 0$ maka

$$\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{0 - \sqrt{4AC}}{2A}$$

$$\text{sehingga } \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0.$$

• $B < 0$ maka

$$-B = \sqrt{B^2} \text{ dan } \sqrt{B^2} < \sqrt{B^2 - 4AC}$$

$$\text{sehingga } \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0.$$

Dari pemisalan di atas dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0 \text{ untuk sebarang nilai } B.$$

Jadi untuk $R_\varphi > 1$ didapatkan satu penyelesaian yang positif.

b. Jika $R_\varphi = 1$ maka $C = 0$

Persamaan (4.22) menjadi

$$AI^2 + BI = 0$$

$$I(AI + B) = 0$$

$$I = 0 \text{ atau } I = -B/A.$$

Jadi untuk $R_\varphi = 1$, Persamaan (4.22) mempunyai penyelesaian tunggal $I = -\frac{B}{A}$ yang bernilai positif jika $B < 0$.

c. Jika $R_\varphi < 1$ maka $C > 0$,

Agar Persamaan (4.22) mempunyai penyelesaian maka

$$B^2 - 4AC \geq 0$$

$$(B - 2\sqrt{AC})(B + 2\sqrt{AC}) \geq 0$$

daerah penyelesaiannya adalah

$$B \leq -2\sqrt{AC} \text{ dan } B \geq 2\sqrt{AC}$$

i. Apabila $B \leq -2\sqrt{AC}$,

maka B bernilai negatif, maka $-B > 0$ dan $\sqrt{B^2 - 4AC} > 0$.

Sehingga $\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} > 0$ untuk $B \leq -2\sqrt{AC}$.

- Karena B bernilai negatif maka $-B$ bernilai positif,

$$\text{maka } -B = \sqrt{B^2}$$

- Karena $\sqrt{B^2} > \sqrt{B^2 - 4AC}$,

$$\text{maka } -B > \sqrt{B^2 - 4AC}.$$

Sehingga $\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} > 0$ untuk $B \leq -2\sqrt{AC}$.

ii. Apabila $B \geq 2\sqrt{AC}$,

maka B bernilai positif, maka $-B < 0$ dan $-\sqrt{B^2 - 4AC} < 0$.

Sehingga $\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0$ untuk $B \geq 2\sqrt{AC}$.

- Perhatikan bahwa

$$B = \sqrt{B^2}$$

$$-B = -\sqrt{B^2}$$

dan

$$\sqrt{B^2} > \sqrt{B^2 - 4AC}$$

$$-\sqrt{B^2} < -\sqrt{B^2 - 4AC}$$

maka

$$-B < -\sqrt{B^2 - 4AC}.$$

$$\text{Sehingga } \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0 \text{ untuk } B \geq 2\sqrt{AC}.$$

Jadi jika $R_\varphi < 1$ maka $C > 0$ dan jika $B \leq -2\sqrt{AC}$, Persamaan (4.22) mempunyai 2 penyelesaian yang positif. Dan jika $B \geq 2\sqrt{AC}$, Persamaan (4.22) tidak mempunyai penyelesaian yang positif.

4.6 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Pada titik kesetimbangan endemik, matriks *Jacobiannya* adalah sebagai berikut:

$$J^* = \begin{bmatrix} -\beta I - (\mu + \varphi + \psi) & (\theta - \psi) & -\beta S - \psi & -\psi \\ \varphi & -\sigma\beta I - (\mu + \theta) & -\sigma\beta V & 0 \\ \beta I & \sigma\beta I & \beta S + \sigma\beta V - (\mu + \alpha + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \eta) \end{bmatrix}$$

$$\sim B_3 - \frac{\beta I}{\varphi} B_2$$

$$= \begin{bmatrix} -\beta I - (\mu + \varphi + \psi) & (\theta - \psi) & -\beta S - \psi & -\psi \\ \varphi & -\sigma\beta I - (\mu + \theta) & -\sigma\beta V & 0 \\ 0 & \sigma\beta I + Z & \beta S + M & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \eta) \end{bmatrix}$$

dengan

$$Z = \frac{\sigma\beta^2 I^2}{\varphi} + \frac{(\mu + \theta)\beta I}{\varphi}, \quad M = \sigma\beta V - (\mu + \alpha + \gamma) + \frac{\beta I}{\varphi}\sigma\beta V$$

OBE selanjutnya

$$\sim B_3 - \frac{\sigma\beta I + Z}{-\sigma\beta I - (\mu + \theta)} B_2$$

$$= \begin{bmatrix} -\beta I - (\mu + \varphi + \psi) & (\theta - \psi) & -\beta S - \psi & -\psi \\ \varphi & -\sigma\beta I - (\mu + \theta) & -\sigma\beta V & 0 \\ 0 & 0 & \beta S + M + O & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\mu + \eta) \end{bmatrix}$$

dengan

$$O = -\frac{\sigma\beta I + Z}{\sigma\beta I + (\mu + \theta)}\sigma\beta V$$

OBE selanjutnya

$$\sim B_4 - \frac{\gamma}{\beta S + M + O} B_3$$

$$= \begin{bmatrix} -\beta I - (\mu + \varphi + \psi) & (\theta - \psi) & -\beta S - \psi & -\psi \\ \varphi & -\sigma\beta I - (\mu + \theta) & -\sigma\beta V & 0 \\ 0 & 0 & \beta S + M + O & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu + \eta) \end{bmatrix}$$

OBE selanjutnya

$$\sim B_2 - \frac{\varphi}{-\beta I - (\mu + \varphi + \psi)} B_1$$

$$= \begin{bmatrix} -\beta I - (\mu + \varphi + \psi) & (\theta - \psi) & -\beta S - \psi & -\psi \\ 0 & -\sigma\beta I - (\mu + \theta) + W & -\sigma\beta V - X & -Y \\ 0 & 0 & \beta S + M + O & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mu + \eta) \end{bmatrix}$$

dengan

$$W = \frac{\varphi(\theta - \psi)}{\beta I + (\mu + \varphi + \psi)}; \quad X = \frac{\varphi(\beta S + \psi)}{\beta I + (\mu + \varphi + \psi)}; \quad Y = \frac{\varphi\psi}{\beta I + (\mu + \varphi + \psi)}$$

Selanjutnya akan dicari persamaan karakteristik dari matriks *Jacobian* di atas tersebut dengan cara menggunakan

$$|\lambda I - J| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \beta I + (\mu + \varphi + \psi) & (\theta - \psi) & -\beta S - \psi & -\psi \\ 0 & \lambda + \sigma\beta I + (\mu + \theta) - W & -\sigma\beta V & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - (\beta S + M + O) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + (\mu + \eta) \end{vmatrix} = 0$$

Dari matriks *Jacobian* tersebut maka akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$[\lambda + \beta I + (\mu + \varphi + \psi)][\lambda + \sigma\beta I + (\mu + \theta) - P][\lambda - (\beta S + M + N)][\lambda + (\mu + \eta)] = 0$$

$$\Leftrightarrow [\lambda + \beta I + (\mu + \varphi + \psi)] \left[\lambda + \sigma\beta I + (\mu + \theta) - \frac{\varphi(\theta - \psi)}{\beta I + (\mu + \varphi + \psi)} \right]$$

$$\left[\lambda - \left(\beta S + \sigma\beta V - (\mu + \alpha + \gamma) + \frac{\beta I}{\varphi} \sigma\beta V - \frac{\sigma\beta I + \frac{\sigma\beta^2 I^2}{\varphi} + \frac{(\mu + \theta)\beta I}{\varphi}}{\sigma\beta I + (\mu + \theta)} \sigma\beta V \right) \right]$$

$$[\lambda + (\mu + \eta)] = 0$$

Sehingga akan diperoleh nilai *eigen* dari akar karakteristiknya sebagai berikut:

$$\lambda_1 + \beta I + (\mu + \varphi + \psi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -\beta I - (\mu + \varphi + \psi)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -[\beta I + (\mu + \varphi + \psi)]$$

maka $\lambda_1 < 0$

$$\lambda_2 + \sigma\beta I + (\mu + \theta) - \frac{\varphi(\theta - \psi)}{\beta I + (\mu + \varphi + \psi)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{-\sigma\beta I(\beta I + \mu + \varphi + \psi) - (\mu + \theta)(\beta I + \mu + \varphi + \psi) + \varphi(\theta - \psi)}{\beta I + (\mu + \varphi + \psi)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2$$

$$= \frac{-\sigma\beta^2 I^2 - \mu\sigma\beta I - \varphi\sigma\beta I - \psi\sigma\beta I - \mu\beta I - \theta\beta I - \mu^2 - \theta\mu - \mu\varphi - \theta\varphi - \mu\psi - \theta\psi + \varphi\theta - \varphi\varphi}{\beta I + (\mu + \varphi + \psi)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2$$

$$= \frac{-(\sigma\beta^2 I^2 + \mu\sigma\beta I + \varphi\sigma\beta I + \psi\sigma\beta I + \mu\beta I + \theta\beta I + \mu^2 + \theta\mu + \mu\varphi + \mu\psi + \theta\psi + \varphi\varphi)}{\beta I + (\mu + \varphi + \psi)}$$

maka $\lambda_2 < 0$

$$\lambda_3 - \left(\beta S + \sigma\beta V - (\mu + \alpha + \gamma) + \frac{\beta I}{\varphi} \sigma\beta V - \frac{\sigma\beta I + \frac{\sigma\beta^2 I^2}{\varphi} + \frac{(\mu + \theta)\beta I}{\varphi}}{\sigma\beta I + (\mu + \theta)} \sigma\beta V \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lambda_3 &= \frac{(\mu + \alpha + \gamma)[(\mu + \theta) + \sigma\beta I]}{[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} + \sigma \frac{\varphi(\mu + \alpha + \gamma)}{[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\ &\quad - (\mu + \alpha + \gamma) + \frac{\beta I}{\varphi} \sigma \frac{\varphi(\mu + \alpha + \gamma)}{[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\ &\quad - \frac{\sigma\beta I + \frac{\sigma\beta^2 I^2}{\varphi} + \frac{(\mu + \theta)\beta I}{\varphi}}{\sigma\beta I + (\mu + \theta)} \sigma \frac{\varphi(\mu + \alpha + \gamma)}{[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lambda_3 &= \frac{(\mu + \alpha + \gamma)[\mu + \theta + \sigma\beta I]}{[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} + \frac{\sigma\varphi(\mu + \alpha + \gamma)}{[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\ &\quad - (\mu + \alpha + \gamma) + \frac{\sigma\beta I(\mu + \alpha + \gamma)}{[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\ &\quad - \frac{[\sigma\varphi\beta I + \sigma\beta^2 I^2 + (\mu + \theta)\beta I][\sigma(\mu + \alpha + \gamma)]}{[\sigma\beta I + \mu + \theta][\mu + \theta + \sigma\varphi + \sigma\beta I]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \lambda_3 &= \frac{(\mu + \alpha + \gamma)[\mu + \theta + \sigma\beta I][\sigma\beta I + \mu + \theta]}{[\sigma\beta I + \mu + \theta][(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\
&+ \frac{[\sigma\beta I + \mu + \theta][\sigma\varphi(\mu + \alpha + \gamma)]}{[\sigma\beta I + \mu + \theta][(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\
&- \frac{(\mu + \alpha + \gamma)[\sigma\beta I + \mu + \theta][\mu + \theta + \sigma\varphi + \sigma\beta I]}{[\sigma\beta I + \mu + \theta][\mu + \theta + \sigma\varphi + \sigma\beta I]} \\
&+ \frac{\sigma\beta I(\mu + \alpha + \gamma)[\sigma\beta I + \mu + \theta]}{[\sigma\beta I + \mu + \theta][(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\
&- \frac{[\sigma\varphi\beta I + \sigma\beta^2 I^2 + (\mu + \theta)\beta I][\sigma(\mu + \alpha + \gamma)]}{[\sigma\beta I + \mu + \theta][\mu + \theta + \sigma\varphi + \sigma\beta I]} \\
\Leftrightarrow \lambda_3 &= \frac{(\mu + \alpha + \gamma)}{[\sigma\beta I + \mu + \theta][(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \{[\mu + \theta + \sigma\beta I][\sigma\beta I + \mu \\
&+ \theta] + [\sigma\beta I + \mu + \theta]\sigma\varphi - [\sigma\beta I + \mu + \theta][\mu + \theta + \sigma\varphi + \sigma\beta I] \\
&+ \sigma\beta I[\sigma\beta I + \mu + \theta] - [\sigma\varphi\beta I + \sigma\beta^2 I^2 + (\mu + \theta)\beta I]\sigma\} \\
\Leftrightarrow \lambda_3 &= \frac{(\mu + \alpha + \gamma)}{[\sigma\beta I + \mu + \theta][(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \{[\mu + \theta + \sigma\beta I][\sigma\beta I + \mu \\
&+ \theta] - [\sigma\beta I + \mu + \theta][\mu + \theta + \sigma\beta I] + \sigma\beta I[\sigma\beta I + \mu + \theta] \\
&- [\sigma\varphi\beta I + \sigma\beta^2 I^2 + (\mu + \theta)\beta I]\sigma\} \\
\Leftrightarrow \lambda_3 &= \frac{(\mu + \alpha + \gamma)}{[\sigma\beta I + \mu + \theta][(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \{\sigma\beta I[\sigma\beta I + \mu + \theta] \\
&- [\sigma\varphi\beta I + \sigma\beta^2 I^2 + (\mu + \theta)\beta I]\sigma\} \\
\Leftrightarrow \lambda_3 &= \frac{(\mu + \alpha + \gamma)}{[\sigma\beta I + \mu + \theta][(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \{-[\sigma\varphi\beta I]\sigma\} \\
\Leftrightarrow \lambda_3 &= \frac{(\mu + \alpha + \gamma)}{[\sigma\beta I + \mu + \theta][(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \{-\sigma^2\beta I\} \\
\Leftrightarrow \lambda_3 &= -\frac{\sigma^2\beta I(\mu + \alpha + \gamma)}{[\sigma\beta I + \mu + \theta][(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]} \\
\text{maka } \lambda_3 &< 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_4 + (\mu + \eta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_4 &= -(\mu + \eta) \\ \text{maka } \lambda_4 &< 0\end{aligned}$$

Karena nilai eigen ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4) bernilai negatif pada bagian *real*nya, maka berdasarkan akar karakteristik (nilai eigen λ), titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal.

4.7 Kurva Bifurkasi

Untuk menggambar suatu kurva bifurkasi, diasumsikan β sebagai variabel dengan parameter $\alpha, \mu, \gamma, \eta, \sigma, \varphi, \psi, \theta, K$ bernilai konstan. β dipandang sebagai variabel karena β menentukan besar kecilnya penyebaran penyakit pada suatu populasi.

Diferensial implisit dari (4.22) terhadap β adalah

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\beta}(AI^2 + BI + C) &= \frac{d}{d\beta}(0) \\ \Leftrightarrow 2AI \frac{dI}{d\beta} + \frac{dA}{d\beta} I^2 + B \frac{dI}{d\beta} + \frac{dB}{d\beta} I + \frac{dC}{d\beta} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2AI + B) \frac{dI}{d\beta} &= - \left(I^2 \frac{dA}{d\beta} + I \frac{dB}{d\beta} + \frac{dC}{d\beta} \right) \\ \Leftrightarrow (2AI + B) \frac{dI}{d\beta} &= -I^2 \frac{dA}{d\beta} - I \frac{dB}{d\beta} - \frac{dC}{d\beta} \\ \Leftrightarrow (2AI + B) \frac{dI}{d\beta} &= -I \left(I \frac{dA}{d\beta} + \frac{dB}{d\beta} \right) - \frac{dC}{d\beta}\end{aligned}$$

dari Persamaan (4.23) diperoleh $\frac{dC}{d\beta} < 0$, oleh karena itu $\frac{dI}{d\beta}$ dan $(2AI + B)$ bertanda sama jika $I \frac{dA}{d\beta} + \frac{dB}{d\beta} < 0$, sehingga kurva bifurkasi memiliki kemiringan positif jika $2AI + B > 0$ atau $I > -B/2A$, dan memiliki kemiringan negatif jika $2AI + B < 0$ atau $I < -B/2A$.

Dari pernyataan di atas dapat disimpulkan bahwa:

- Jika $I > -B/2A$ maka kemiringan kurva $dI/d\beta$ positif sehingga titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik lokal.
- Jika $I < -B/2A$ maka kemiringan kurva $dI/d\beta$ negatif sehingga titik kesetimbangan endemik tidak stabil asimtotik lokal.

Berdasarkan kurva bifurkasi mundur pada gambar 4.2 tersebut, ketika $B > -2\sqrt{AC}$ tidak terdapat titik setimbang endemik. Bifurkasi mundur terjadi saat $R_\varphi < 1$. Jelas terlihat bahwa ketika $B < -2\sqrt{AC}$ dan $C > 0$ terdapat dua titik setimbang endemik, yang stabil saat $I > \frac{-B}{2A}$ digambar dengan garis padat dan tidak stabil saat $I < \frac{-B}{2A}$ digambar dengan garis putus-putus. Saat $R_\varphi > 1$ hanya ada satu titik kesetimbangan endemik.

Untuk $I = \frac{-B}{2A}$ maka dari Persamaan (4.22) diperoleh

$$AI^2 + BI + C = 0$$

$$\Leftrightarrow A\left(\frac{-B}{2A}\right)^2 + B\left(\frac{-B}{2A}\right) + C = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A} + C = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{B^2 - 2B^2 + 4AC}{4A} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-B^2 + 4AC}{4A} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-D}{4A} = 0$$

sehingga diperoleh

$$D = 0$$

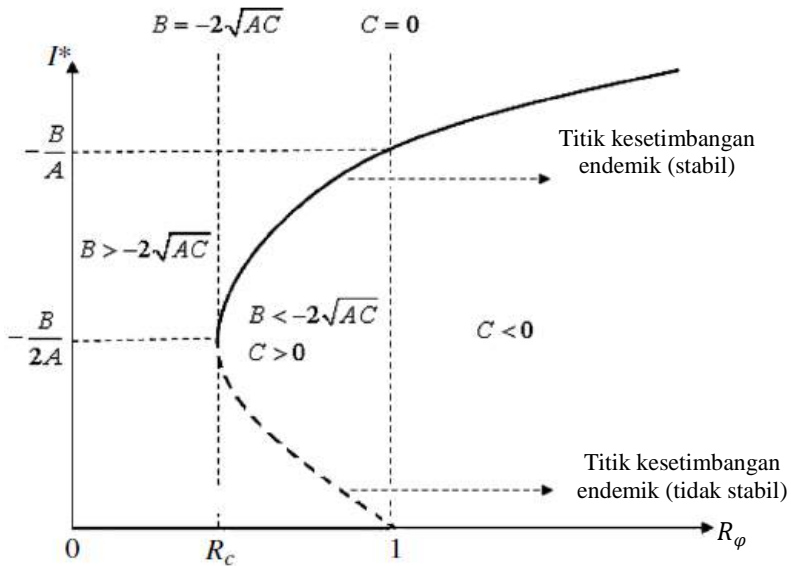
$$\Leftrightarrow B^2 - 4AC = 0$$

$$\Leftrightarrow B^2 - 4AC'(1 - R_\varphi) = 0 \text{ dengan } c' = \frac{(\mu+\eta)(\mu+\psi)(\mu+\alpha+\gamma)(\mu+\theta+\varphi)}{\beta}$$

$$\Leftrightarrow (1 - R_\varphi) = \frac{-B^2}{-4AC'}$$

$$\Leftrightarrow -R_\phi = \frac{-B^2}{-4AC'} - 1$$

$$\Leftrightarrow R_c = \frac{-B^2 + 4AC'}{4AC'}$$



Gambar 4.2 Bifurkasi Mundur pada Model SIRS dengan Vaksinasi dan Pengobatan

4.8 Analisis Bifurkasi

Kurva bifurkasi dalam tugas akhir ini digambar dengan menggunakan titik kesetimbangan endemik $g(I)$. Diketahui titik kesetimbangan endemik sebagai berikut:

$$g(I) = AI^2 + BI + C = 0$$

dengan

$$A = \sigma\beta[\psi(\mu + \eta + \gamma) + (\mu + \eta)(\mu + \alpha + \gamma)]$$

$$\begin{aligned}
 B &= \psi(\mu + \eta + \gamma)(\mu + \theta + \sigma\varphi) \\
 &\quad + \sigma(\mu + \eta)(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \varphi + \psi) \\
 &\quad + (\mu + \eta)(\mu + \theta)(\mu + \alpha + \gamma) - \sigma\beta(\mu + \eta)(\mu + \psi)K \\
 C &= \frac{(\mu + \eta)(\mu + \psi)(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \theta + \varphi)}{\beta} [1 - R_\varphi] \\
 R_\varphi &= \frac{\beta K (\mu + \theta + \sigma\varphi)}{(\mu + \theta + \varphi)(\mu + \alpha + \gamma)}
 \end{aligned}$$

Dalam hal ini koefisien A selalu memiliki nilai positif. Sedangkan untuk koefisien C bergantung pada nilai R_φ . Apabila $R_\varphi < 1$, maka $C > 0$, selanjutnya jika $R_\varphi > 1$, maka $C < 0$. Jika $R_\varphi = 1$, maka nilai $C = 0$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 g(I) &= AI^2 + BI + C = 0 \\
 &= AI^2 + BI + C'(1 - R_\varphi) \text{ dengan } C' = \frac{(\mu + \eta)(\mu + \psi)(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \theta + \varphi)}{\beta} \\
 &= AI^2 + BI + C'(1 - 1) \\
 &= AI^2 + BI
 \end{aligned}$$

karena $g(I) = 0$, maka

$$\begin{aligned}
 0 &= AI^2 + BI \\
 0 &= I(AI + B)
 \end{aligned}$$

karena $I \neq 0$, maka $AI + B = 0$, sehingga

$$\begin{aligned}
 AI + B &= 0 \\
 AI &= -B \\
 I &= \frac{-B}{A}
 \end{aligned}$$

Agar $I > 0$, maka haruslah $B < 0$ sehingga

$$\begin{aligned}
 &\psi(\mu + \eta + \gamma)(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma(\mu + \eta)(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \varphi + \psi) \\
 &\quad + (\mu + \eta)(\mu + \theta)(\mu + \alpha + \gamma) - \sigma\beta(\mu + \eta)(\mu + \psi)K < 0
 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \beta >$

$$\left(\frac{\psi(\mu + \eta + \gamma)(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma(\mu + \eta)(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \varphi + \psi)}{\sigma(\mu + \eta)} \right. \\ \left. \frac{+(\mu + \eta)(\mu + \theta)(\mu + \alpha + \gamma)}{(\mu + \psi)K} \right)$$

misal

$$\left(\frac{\psi(\mu + \eta + \gamma)(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma(\mu + \eta)(\mu + \alpha + \gamma)(\mu + \varphi + \psi)}{\sigma(\mu + \eta)} \right. \\ \left. \frac{+(\mu + \eta)(\mu + \theta)(\mu + \alpha + \gamma)}{(\mu + \psi)K} \right) = \beta_0$$

Jika $I > 0$ maka $\beta > \beta_0$.

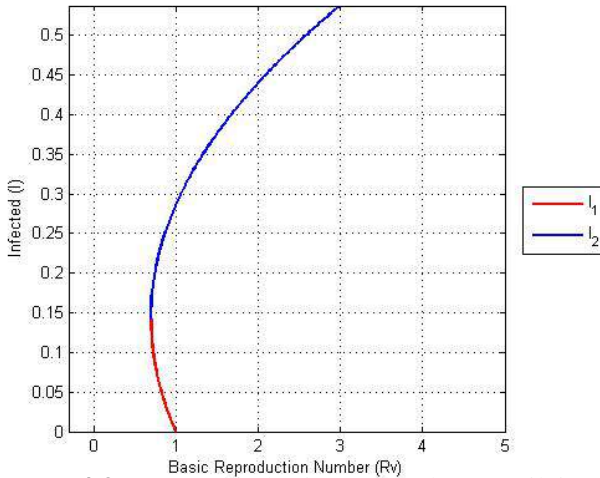
Selanjutnya pada persamaan $g(I)$ akan terjadi bifurkasi mundur pada saat $R_\varphi = 1$ jika dan hanya jika $A > 0$ dan $B < 0$ sehingga $B^2 - 4AC > 0$. Karena $R_\varphi = 1$ maka $C = 0$ sehingga $B^2 > 0$. Ketika terjadi bifurkasi mundur, terdapat dua titik kesetimbangan endemik dan $g(I) = 0$ sehingga diperoleh

$$I_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$I_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

dengan I_1 dan I_2 masing-masing memiliki sifat stabil dan tidak stabil. Sehingga, persamaan $g(I)$ memiliki dua penyelesaian positif, yang artinya terdapat dua titik kesetimbangan endemik jika dan hanya jika $C > 0$ atau $R_\varphi < 1$ dan $B < 0$, $A > 0$, serta $B^2 > 4AC$. Dengan terjadinya bifurkasi mundur, menunjukkan bahwa penyakit menular semakin sulit untuk diberantas. Jika $C > 0$ dan $B \geq 0$ atau $B^2 < 4AC$, maka persamaan $g(I)$ menghasilkan penyelesaian tak *real* dan tidak terdapat titik kesetimbangan endemik. Perilaku dari model dinamik dapat digambarkan dengan persamaan $g(I)$ yang menunjukkan bifurkasi mundur pada model transmisi penyakit menular dengan

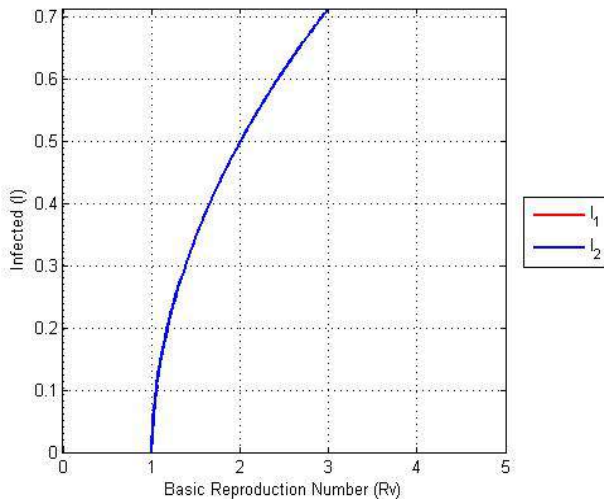
vaksinasi dan pengobatan. Parameter yang digunakan untuk menyatakan bifurkasi dalam tugas akhir ini yaitu parameter β , di mana nilai $\beta > \beta_0$ untuk $I > 0$ sehingga dengan menggunakan nilai parameter $\alpha = 12, \mu = 0.1, \gamma = 0.3, \sigma = 0.2, \varphi = 3, \psi = 5, \theta = 0.5, K = 3$, dan mengambil nilai $\beta = 14$, didapatkan saat nilai β di bawah 14 akan terjadi bifurkasi maju, dan pada saat nilai β di atas 14 akan terjadi bifurkasi mundur. Parameter ini hanya berlaku untuk nilai-nilai tertentu dengan nilai parameter $\eta = 0.1$ ditentukan sendiri, dan nilai parameter yang lain didapatkan dari data sekunder jurnal [2] dan jurnal [4]. Di bawah ini adalah kurva bifurkasi yang dihasilkan dari proses simulasi.



Gambar 4.3 Kurva Bifurkasi Mundur dengan nilai parameter $\alpha = 12, \mu = 0.1, \gamma = 0.3, \eta = 0.1, \sigma = 0.2, \varphi = 3, \psi = 5, \theta = 0.5, K = 3, \beta = 26$

Pada gambar 4.3 dapat dilihat bahwa telah terjadi bifurkasi mundur ketika $R_\varphi < 1$ sehingga didapat tiga titik tetap, yang masing-masing terdiri dari titik setimbang bebas penyakit, titik setimbang endemik stabil, dan titik setimbang endemik tidak stabil. Selanjutnya ketika $R_\varphi = 1$ terjadi bifurkasi transkritikal, sedangkan pada titik 0.6976 terjadi bifurkasi *Saddle Node*. Ketika

$R_\varphi < 0.6976$ tidak terjadi penyebaran penyakit atau dalam keadaan bebas penyakit, sedangkan ketika $0.6976 < R_\varphi < 1$ terdapat dua titik kesetimbangan endemik, yang pertama adalah satu titik bersifat stabil (biru) dan yang kedua adalah titik yang bersifat tidak stabil (merah) serta satu titik kesetimbangan bebas penyakit yang bersifat stabil. Ketika $R_\varphi > 1$ titik kesetimbangan endemik sangat besar sehingga penularan sulit diatasi dan terdapat juga titik kesetimbangan bebas penyakit yang bersifat tidak stabil.

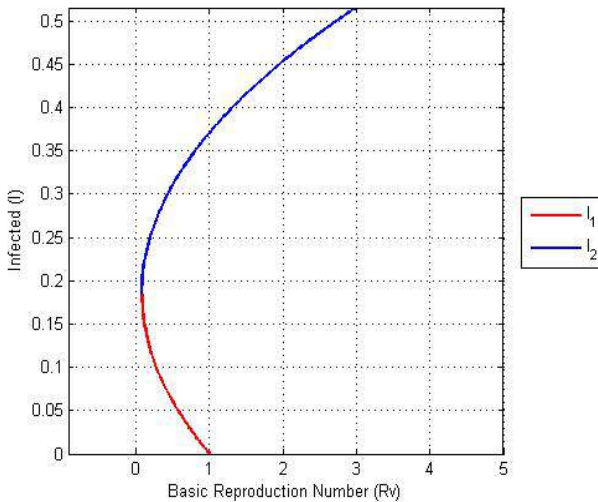


Gambar 4.4 Kurva Bifurkasi Maju dengan nilai *parameter* $\alpha = 12, \mu = 0.1, \gamma = 0.3, \eta = 0.1, \sigma = 0.2, \varphi = 3, \psi = 5, \theta = 0.5, K = 3, \beta = 13$

Gambar 4.4 memperlihatkan kurva bifurkasi maju dengan nilai $R_\varphi > 1$. Pada gambar tersebut terdapat satu titik setimbang endemik. Ketika $R_\varphi = 1$ terjadi bifurkasi Transkritikal. Ketika $R_\varphi < 1$ tidak terjadi penyebaran penyakit atau disebut bebas penyakit, sedangkan ketika $R_\varphi > 1$ terdapat titik endemik stabil. Pada Gambar 4.4 memperlihatkan telah terjadi bifurkasi maju

dengan nilai $R_\varphi > 1$ dan mengakibatkan nilai $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$.

Pada kasus ini perubahan bifurkasi dapat terjadi karena perubahan nilai R_φ yang berakibat nilai A , B , dan C berubah sehingga nilai titik puncaknya juga ikut berubah. Dengan mengubah nilai parameter dari $\beta = 26$ menjadi $\beta = 13$ pada Gambar 4.4, maka pada kurva bifurkasi memperlihatkan nilai R_φ yang semakin kecil. Ini menunjukkan bahwa telah terjadi perubahan dari bifurkasi mundur menjadi bifurkasi maju yang disebabkan oleh pemberian tindakan vaksinasi dan pengobatan yang kurang efektif sehingga dapat mengakibatkan ancaman penularan penyakit pada individu yang terinfeksi. Oleh karena itu tindakan pencegahan perlu diberikan supaya vaksinasi dan pengobatan pada penyakit dapat efektif.



Gambar 4.5 Kurva Bifurkasi Mundur dengan nilai parameter $\alpha = 12, \mu = 0.1, \gamma = 0.3, \eta = 0.1, \sigma = 0.2, \varphi = 3, \psi = 5, \theta = 0.5, K = 3, \beta = 35$

Selanjutnya bifurkasi mundur juga terlihat pada Gambar 4.5. Ini terjadi karena ada individu yang belum terlepas dari penularan

penyakit oleh individu lain yang terinfeksi. Pada saat interaksi terjadi antar individu dalam populasi semakin besar, maka dengan tindakan vaksinasi dan pengobatan yang berkapasitas kecil mengakibatkan hasil yang kurang efektif sehingga masih terdapat individu yang terjangkit penyakit.

Dengan menganalisis beberapa nilai parameter yang terdapat pada Tabel 4.1, diketahui kondisi kapan terjadi bifurkasi maju dan mundur dengan melihat perubahan pada nilai-nilai parameter. Beberapa input nilai parameter dan terjadinya bifurkasi maju dan mundur tercantum pada tabel di bawah ini

Tabel 4.1 Daftar Nilai Parameter dengan $\alpha = 12, \mu = 0.1, \gamma = 0.3, \eta = 0.1, \sigma = 0.2, \varphi = 3, \psi = 5, \theta = 0.5, K = 3$ pada Model Penyebaran Penyakit Menular dengan Vaksinasi dan Pengobatan

No	β	Keterangan
1	35	Bifurkasi Mundur
2	33.5	Bifurkasi Mundur
3	32	Bifurkasi Mundur
4	30.5	Bifurkasi Mundur
5	28	Bifurkasi Mundur
6	26	Bifurkasi Mundur
7	25.5	Bifurkasi Mundur
8	13	Bifurkasi Maju
9	11	Bifurkasi Maju
10	10	Bifurkasi Maju

Dari tabel 4.1 dapat dilihat bahwa perilaku dinamik dari model penyebaran penyakit menular sangat erat hubungannya dengan parameter ambang batas yaitu nilai R_φ atau bilangan reproduksi dasar. Banyaknya individu yang terinfeksi akan meningkat pada saat nilai R_φ lebih besar dari 1(satu). Ini mengakibatkan bahwa pengendalian penyakit pada individu yang terinfeksi semakin sulit. Sehingga pada saat $R_\varphi = 1$, berarti hanya terdapat satu orang yang terinfeksi penyakit, maka

diperlukan tindakan pencegahan atau pemberantasan berupa vaksinasi dan pengobatan secara efektif dan intensif.

Fenomena bifurkasi maju terjadi pada saat $R_\varphi > 1$, ini menunjukkan bahwa individu yang terinfeksi diberikan kapasitas vaksinasi dan pengobatan yang kurang efektif dan tidak cukup untuk menangani daya infeksi penyakit yang tinggi, sehingga mengakibatkan jumlah individu yang terinfeksi sedikit demi sedikit akan semakin meningkat dan penyakit akan menjadi endemik. Tetapi ketika $R_\varphi < 1$, menunjukkan bahwa jumlah individu yang terinfeksi sedikit demi sedikit akan semakin berkurang sehingga penyakit akan menghilang dalam kurun waktu tertentu.

4.9 Simulasi Numerik *Runge-Kutta*

Pada pembahasan yang sebelumnya telah didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik, serta kestabilan asimtotik lokal titik kesetimbangan bebas penyakit dan kestabilan asimtotik lokal titik kesetimbangan endemik. Proses selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk memudahkan analisis model. Penyelesaian numerik yang digunakan adalah metode *Runge-Kutta* orde empat. Metode *Runge-Kutta* orde empat adalah satu dari metode yang banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Metode ini memiliki suatu galat pemotongan h^4 . h adalah langkah waktu (*step size*).

Sebelumnya nilai awal dapat dimisalkan sebagai berikut :

$$S(t_0) = S_0$$

$$V(t_0) = V_0$$

$$I(t_0) = I_0$$

$$T(t_0) = T_0$$

Integrasi numerik dari Persamaan (4.8) – (4.11) dengan menggunakan metode *Runge-Kutta* orde empat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{6}(k_{1,S} + 2k_{2,S} + 2k_{3,S} + k_{4,S}) \\
V_{n+1} &= V_n + \frac{1}{6}(k_{1,V} + 2k_{2,V} + 2k_{3,V} + k_{4,V}) \\
I_{n+1} &= I_n + \frac{1}{6}(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I}) \\
T_{n+1} &= T_n + \frac{1}{6}(k_{1,T} + 2k_{2,T} + 2k_{3,T} + k_{4,T})
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
k_{1,S} &= h f(t_n, S_n, V_n, I_n, T_n) \\
&= h ((\mu + \psi)K - \beta S_n I_n - (\mu + \varphi + \psi)S_n - (\psi - \theta)V_n - \\
&\quad \psi I_n - \psi T_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,V} &= h f(t_n, S_n, V_n, I_n, T_n) \\
&= h (\varphi S_n - \sigma \beta V_n I_n - (\mu + \theta)V_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,I} &= h f(t_n, S_n, V_n, I_n, T_n) \\
&= h (\beta S_n I_n + \sigma \beta V_n I_n - (\mu + \alpha + \gamma)I_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,T} &= h f(t_n, S_n, V_n, I_n, T_n) \\
&= h (\gamma I_n - (\mu + \eta)T_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,S} &= h f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_{1,S}}{2}, V_n + \frac{k_{1,V}}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, T_n + \frac{k_{1,T}}{2}\right) \\
&= h \left((\mu + \psi)K - \beta \left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}\right) \left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - (\mu + \varphi + \psi) \left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2}\right) - (\psi - \theta) \left(V_n + \frac{k_{1,V}}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - \psi \left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right) - \psi \left(T_n + \frac{k_{1,T}}{2}\right) \right)
\end{aligned}$$

$$k_{2,V} = h f\left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_{1,S}}{2}, V_n + \frac{k_{1,V}}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, T_n + \frac{k_{1,T}}{2}\right)$$

$$= h \left(\varphi \left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2} \right) - \sigma \beta \left(V_n + \frac{k_{1,V}}{2} \right) \left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2} \right) - (\mu + \theta) \left(V_n + \frac{k_{1,V}}{2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} k_{2,I} &= h f \left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_{1,S}}{2}, V_n + \frac{k_{1,V}}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, T_n + \frac{k_{1,T}}{2} \right) \\ &= h \left(\beta \left(S_n + \frac{k_{1,S}}{2} \right) \left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2} \right) + \sigma \beta \left(V_n + \frac{k_{1,V}}{2} \right) \left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2} \right) - (\mu + \alpha + \gamma) \left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{2,T} &= h f \left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_{1,S}}{2}, V_n + \frac{k_{1,V}}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, T_n + \frac{k_{1,T}}{2} \right) \\ &= h \left(\gamma \left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2} \right) - (\mu + \eta) \left(T_n + \frac{k_{1,T}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{3,S} &= h f \left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_{2,S}}{2}, V_n + \frac{k_{2,V}}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, T_n + \frac{k_{2,T}}{2} \right) \\ &= h \left((\mu + \psi)K - \beta \left(S_n + \frac{k_{2,S}}{2} \right) \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2} \right) - (\mu + \varphi + \psi) \left(S_n + \frac{k_{2,S}}{2} \right) - (\psi - \theta) \left(V_n + \frac{k_{2,V}}{2} \right) - \psi \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2} \right) - \psi \left(T_n + \frac{k_{2,T}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$k_{3,V} = h f \left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_{2,S}}{2}, V_n + \frac{k_{2,V}}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, T_n + \frac{k_{2,T}}{2} \right)$$

$$= h \left(\varphi \left(S_n + \frac{k_{2,S}}{2} \right) - \sigma \beta \left(V_n + \frac{k_{2,V}}{2} \right) \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2} \right) - (\mu + \theta) \left(V_n + \frac{k_{2,V}}{2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} k_{3,I} &= h f \left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_{2,S}}{2}, V_n + \frac{k_{2,V}}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, T_n + \frac{k_{2,T}}{2} \right) \\ &= h \left(\beta \left(S_n + \frac{k_{2,S}}{2} \right) \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2} \right) + \sigma \beta \left(V_n + \frac{k_{2,V}}{2} \right) \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2} \right) - (\mu + \alpha + \gamma) \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{3,T} &= h f \left(t_n + \frac{h}{2}, S_n + \frac{k_{2,S}}{2}, V_n + \frac{k_{2,V}}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, T_n + \frac{k_{2,T}}{2} \right) \\ &= h \left(\gamma \left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2} \right) - (\mu + \eta) \left(T_n + \frac{k_{2,T}}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{4,S} &= h f(t_n, S_n + k_{3,S}, V_n + k_{3,V}, I_n + k_{3,I}, T_n + k_{3,T}) \\ &= h \left((\mu + \psi)K - \beta(S_n + k_{3,S})(I_n + k_{3,I}) - (\mu + \varphi + \psi)(S_n + k_{3,S}) - (\psi - \theta)(V_n + k_{3,V}) - \psi(I_n + k_{3,I}) - \psi(T_n + k_{3,T}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{4,V} &= h f(t_n, S_n + k_{3,S}, V_n + k_{3,V}, I_n + k_{3,I}, T_n + k_{3,T}) \\ &= h \left(\varphi(S_n + k_{3,S}) - \sigma \beta(V_n + k_{3,V})(I_n + k_{3,I}) - (\mu + \theta)(V_n + k_{3,V}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{4,I} &= h f(t_n, S_n + k_{3,S}, V_n + k_{3,V}, I_n + k_{3,I}, T_n + k_{3,T}) \\ &= h \left(\beta(S_n + k_{3,S})(I_n + k_{3,I}) + \sigma \beta(V_n + k_{3,V})(I_n + k_{3,I}) - (\mu + \alpha + \gamma)(I_n + k_{3,I}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{4,T} &= h f(t_n, S_n + k_{3,S}, V_n + k_{3,V}, I_n + k_{3,I}, T_n + k_{3,T}) \\
 &= h \left(\gamma(I_n + k_{3,I}) - (\mu + \eta)(T_n + k_{3,T}) \right)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya parameter yang digunakan untuk keadaan bebas penyakit beserta nilai awal pada setiap populasi ditunjukkan pada tabel berikut ini:

Tabel 4.2 Nilai Parameter Bebas Penyakit

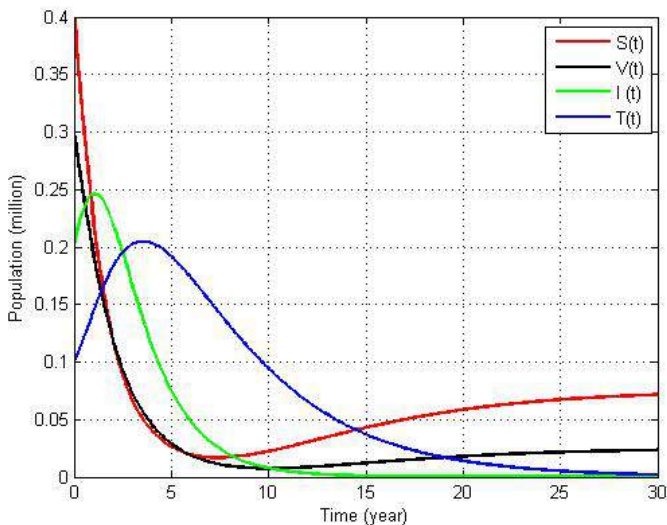
No	Parameter	Nilai Parameter
1	α	0.1000
2	μ	0.1000
3	β	2.0000
4	γ	0.3000
5	η	0.1000
6	σ	0.2000
7	φ	0.2000
8	ψ	0.1000
9	θ	0.5000
10	K	0.1000

Tabel 4.3 Nilai Awal dari Masing-Masing Sub Populasi

No	Sub populasi ketika $t = 0$	Nilai awal (juta jiwa)
1	S	40
2	V	30
3	I	20
4	T	10

Selanjutnya dengan memasukkan nilai parameter serta nilai awal yang terdapat pada Tabel 4.2 dan Tabel 4.3 diperoleh nilai $R_\varphi = 0.0800$. Dengan nilai yang diperoleh, akan dianalisis

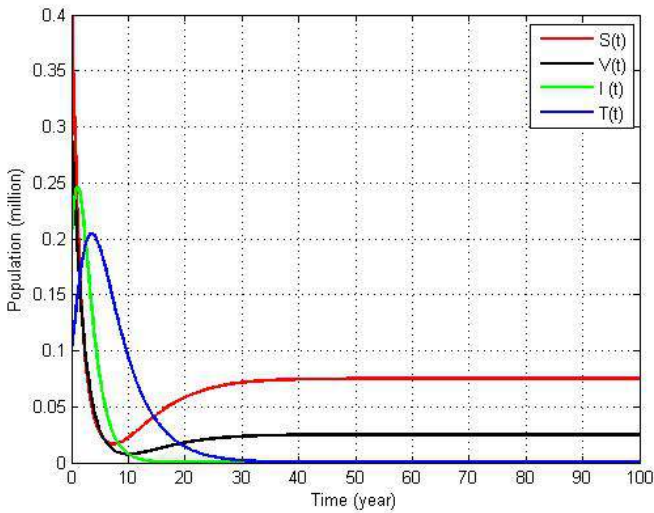
apakah dapat menghasilkan titik kesetimbangan sesuai dengan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya yaitu jika $R_\phi < 1$ maka titik kesetimbangan pada saat bebas penyakit. Populasi *Susceptible*, *Vaccinated*, *Infected*, dan *Treated* berturut-turut dalam keadaan bebas penyakit adalah $(0.0750, 0.0250, 0, 0)$ pada saat $t \rightarrow \infty$. Simulasi dalam model ini menggunakan metode *Runge-Kutta*. Sehingga didapatkan grafik seperti yang terlihat di bawah ini :



Gambar 4.6 Grafik Kestabilan Bebas Penyakit ketika $R_\phi = 0.0800 < 1$, $N = 300$, $h = 0.1$

Pada gambar 4.6 dapat dilihat bahwa ketika $0 \leq t \leq 30$ grafik populasi *Susceptible*, *Vaccinated*, *Infected*, dan *Treated* belum menuju ke arah titik setimbang. Laju pertumbuhan populasi *Susceptible* mengalami penurunan. Turunnya populasi *Susceptible* ini disebabkan laju kelahirannya lebih kecil dari laju infeksi yang menyebabkan individu rentan menjadi individu terinfeksi.

Laju pertumbuhan populasi *Vaccinated* mengalami penurunan seiring dengan turunnya populasi *Susceptible*, dan kemudian naik bersama-sama kembali hingga akhirnya stabil di satu titik. Ini karena kapasitas vaksinasi yang diberikan kepada populasi *Susceptible* kurang efektif. Laju pertumbuhan populasi *Infected* awalnya naik, hal ini disebabkan oleh berkurangnya populasi *Susceptible* dan menjadi populasi *Infected*. Namun selanjutnya laju *Infected* kembali menurun karena laju perpindahan menuju *Treated* lebih besar daripada laju pertumbuhan populasi *Infected*. Kemudian setelah mengalami kenaikan, laju populasi *Treated* kembali menurun. Ini menunjukkan bahwa kapasitas pengobatan yang diberikan kepada populasi *Infected* kurang efektif.



Gambar 4.7 Grafik Kestabilan Bebas Penyakit ketika $R_\phi = 0.0800 < 1$, $N = 1000$, $h = 0.1$

Pada Gambar 4.7 nilai t diperpanjang sampai 100 tahun, dengan nilai $N = 1000, h = 0.1$. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa populasi *Susceptible*, *Vaccinated*, *Infected*, dan

Treated menunjukkan ke arah titik setimbang dan sudah stabil pada titik tersebut. Untuk populasi *Susceptible*, grafik populasi ini menuju satu titik yaitu $S = 0,0750$ dan stabil pada titik tersebut. Hal ini berarti pada titik populasi tersebut sudah tidak terjadi penyebaran penyakit yang menginfeksi populasinya. Kestabilan laju *Susceptible* diikuti juga oleh kestabilan laju populasi *Vaccinated* di titik $V = 0,0250$. Pada populasi *Infected*, grafik populasi menuju satu titik yaitu 0 dan konstan pada titik tersebut. Hal yang sama juga ditunjukkan oleh laju populasi *Treated* yang konstan pada titik 0. Ini artinya populasi *Infected* dan *Treated* semakin lama akan semakin habis.

Dari Gambar 4.6 dan Gambar 4.7 didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit dan grafik ketika populasi tersebut menuju titik setimbangnya. Berdasarkan hasil numerik tersebut, tidak terdapat penyebaran penyakit menular karena tidak ada individu dalam masing-masing populasi yang terinfeksi. Sehingga dari analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa grafik ini stabil jika menggunakan $h = 0.1$ dengan metode *Runge-Kutta*. Selanjutnya setelah dilakukan analisis numerik, ternyata hasil yang didapatkan sama dengan pembahasan sebelumnya yaitu untuk titik kesetimbangan bebas penyakit $E^0 = (0.0750, 0.250, 0, 0)$ akan stabil asimtotik lokal ketika $R_\phi < 1$ dan tidak stabil untuk nilai yang lainnya.

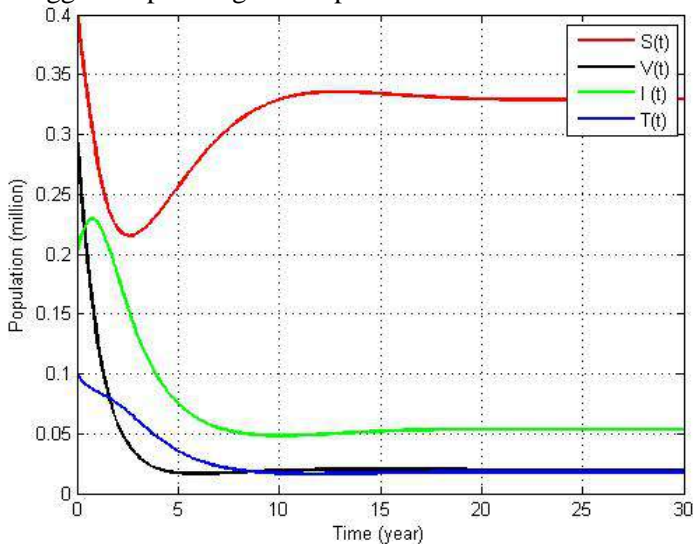
Selanjutnya parameter yang digunakan untuk keadaan endemik dalam setiap populasi ditunjukkan pada tabel berikut ini:

Tabel 4.4 Nilai Parameter Endemik

No	Parameter	Nilai Parameter
1	α	0.4000
2	μ	0.3000
3	β	3.0000
4	γ	0.3000
5	η	0.6000
6	σ	0.2000

7	φ	0.0500
8	ψ	0.1000
9	θ	0.5000
10	K	0.5000

Simulasi pada keadaan endemik dilakukan dengan cara memasukkan nilai parameter untuk kondisi endemik pada setiap populasi dengan metode numerik *Runge-Kutta* dengan nilai $h = 0.1$. Dengan nilai parameter dan nilai awal dari Tabel 4.4 dan Tabel 4.3 didapatkan $R_\varphi = 1.4294$, diharapkan menghasilkan titik kesetimbangan yang sesuai dengan pembahasan sebelumnya yaitu ketika $R_\varphi > 1$ maka titik kesetimbangan pada saat endemik. Sehingga didapatkan grafik seperti dibawah ini :

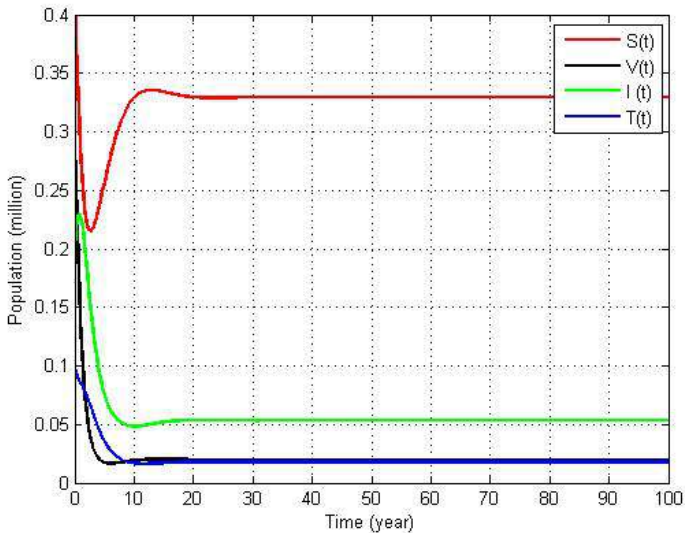


Gambar 4.8 Grafik Kestabilan Endemik

ketika $R_\varphi = 1.4294 > 1$, $N = 300$, $h = 0.1$

Pada gambar 4.8 dapat dilihat bahwa ketika $0 \leq t \leq 30$ grafik populasi *Susceptible*, *Vaccinated*, *Infected*, dan *Treated* belum menuju ke arah titik setimbang. Laju

pertumbuhan populasi *Susceptible* dan *Vaccinated* mengalami penurunan kemudian naik kembali. Ini menunjukkan keadaan tidak stabil karena pengaruh pemberian vaksinasi yang kurang efektif. Laju pertumbuhan populasi *Infected* dan *Treated* awalnya naik kemudian turun, hal ini menunjukkan bahwa kapasitas pengobatan yang diberikan kepada populasi *Infected* juga kurang efektif.



Gambar 4.9 Grafik Kestabilan Endemik
ketika $R_\phi = 1.4294 > 1$, $N = 1000$, $h = 0.1$

Pada Gambar 4.9 menunjukkan bahwa laju pertumbuhan populasi *Susceptible* awalnya menurun dan selanjutnya naik. Setelah mulai bergerak naik, grafik populasi ini mulai bergerak naik turun, ini menunjukkan bahwa masih terdapat penyebaran penyakit. Laju populasi *Susceptible* mulai mendekati satu titik setimbang yaitu **0.3243** dan stabil pada titik tersebut. Sedangkan untuk populasi *Vaccinated* mulai mendekati ke arah titik setimbang yaitu **0.0140**, sedangkan untuk *Infected* mulai

mendekati titik setimbang yaitu **0.523** serta stabil pada titik setimbang tersebut dan grafik populasi *Treated* mencapai **0.0144** serta stabil pada titik setimbang tersebut, pada kurun waktu yang tidak lebih dari 30 tahun. Berdasarkan hasil numerik tersebut, terdapat penyebaran penyakit menular karena masih terdapat individu pada setiap populasi yang rentan, tervaksinasi, terobati maupun populasi yang terinfeksi.

Sehingga dari analisis yang telah dilakukan di atas, dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan metode *Runge-Kutta*, grafik ini stabil jika menggunakan nilai $h = 0.1$. Pada saat $R_\phi > 1$ akan terjadi penyebaran penyakit, hal ini dikarenakan terdapat individu pada populasi *Infected* yang menyebarkan penyakit. Titik kesetimbangan endemik akan stabil pada titik tersebut untuk masing-masing populasi *Susceptible*, *Vaccinated*, *Infected*, dan *Treated*. Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk $R_\phi > 1$ titik kesetimbangan endemik dari masing-masing populasi akan stabil asimtotik lokal dan tidak stabil untuk nilai yang lainnya.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini disimpulkan hasil analisis model epidemik bertipe SIRS dan solusi numerik dari transmisi penyakit menular yang ditambahkan dengan kompartemen vaksinasi dan pengobatan. Selain itu juga diberikan saran atau rekomendasi sebagai bahan pertimbangan untuk pengembangan pada penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis model epidemik beserta simulasinya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Dari model epidemik transmisi penyakit menular bertipe SIRS dengan vaksinasi dan pengobatan yang telah dikaji, didapatkan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan yaitu
 - a. Bilangan reproduksi dasar (R_φ)

$$\frac{\beta K (\mu + \theta + \sigma \varphi)}{(\mu + \theta + \varphi)(\mu + \alpha + \gamma)}$$

- b. Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$S_0 = \frac{\mu + \theta}{\mu + \theta + \varphi} \frac{\Lambda}{\mu}, \quad V_0 = \frac{\varphi}{\mu + \theta + \varphi} \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Stabil asimtotik lokal terpenuhi jika $R_\varphi < 1$ dan tidak terpenuhi jika $R_\varphi > 1$. Artinya ketika R_φ kurang dari 1, maka tidak terjadi penyebaran penyakit.

- c. Titik kesetimbangan endemik

$$S^* = \frac{(\mu + \alpha + \gamma)[(\mu + \theta) + \sigma \beta I]}{\beta[(\mu + \theta + \sigma \varphi) + \sigma \beta I]}$$

$$V^* = \frac{\varphi(\mu + \alpha + \gamma)}{\beta[(\mu + \theta + \sigma\varphi) + \sigma\beta I]}$$

$$T^* = \beta \frac{\gamma}{\beta(\mu + \eta)} I$$

stabil asimtotik lokal terpenuhi jika

$$R_\varphi > 1.$$

2. Fenomena bifurkasi mundur terjadi ketika nilai $R_\varphi = 1$ di mana terdapat satu titik kesetimbangan endemik jika $R_\varphi \geq 1$ dan terdapat dua titik kesetimbangan endemik jika $R_\varphi < 1$. Terjadinya bifurkasi mundur menunjukkan bahwa pada saat $R_\varphi < 1$ kapasitas vaksinasi dan pengobatan yang diberikan kurang efektif sehingga mengakibatkan masih terdapat individu yang terinfeksi dan penyakit akan berubah menjadi endemik. Selanjutnya simulasi model transmisi penyakit menular dengan vaksinasi dan pengobatan menggunakan metode numerik *Runge-Kutta* menghasilkan grafik dari kesetimbangan bebas penyakit dan kesetimbangan endemik jika nilai $h = 0.1$, di mana h adalah langkah waktu.

5.2 Saran

Pada penelitian ini tidak dibahas mengenai analisis kestabilan global dari model transmisi penyakit menular dengan vaksinasi dan pengobatan. Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca agar pada penelitian selanjutnya menyertakan analisis global dari model transmisi penyakit menular dengan vaksinasi dan pengobatan.

LAMPIRAN A

LISTING PROGRAM M- BIFURKASI

Bifurkasi:

```

A=Sigma*Beta*(Psi*(Miu+Eta+Gamma)+(Miu+Eta)*(Miu
+Alpha+Gamma));
B=Psi*(Miu+Eta+Gamma)*(Miu+Theta+Sigma*Phi)+Sigma
a*(Miu+Eta)*...

(Miu+Alpha+Gamma)*(Miu+Phi+Psi)+(Miu+Eta)*(Miu+T
heta)*...
(Miu+Alpha+Gamma)-
Sigma*Beta*(Miu+Eta)*(Miu+Psi)*K;

r_0=(-
B^2+4*A*((Miu+Eta)*(Miu+Psi)*(Miu+Alpha+Gamma)*
...
(Miu+Theta+Phi))/Beta))/(4*A*((Miu+Eta)*(Miu+Ps
i)*...
(Miu+Alpha+Gamma)*(Miu+Theta+Phi))/Beta));
R_0=r_0:(1-r_0)/100:1;

for i=1:1:101

C=((Miu+Eta)*(Miu+Psi)*(Miu+Alpha+Gamma)*(Miu+T
heta+Phi))/Beta)*...
(1-R_0(i));
I_1(i)=(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A);
I_2(i)=(-B-sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A);

end
plot(R_0,I_2,'r',R_0,I_1,'b', 'LineWidth',2);
R_a=1:(3-1)/100:3;
for i=1:1:101

```

```

C=(( (Miu+Eta)*(Miu+Psi)*(Miu+Alpha+Gamma)*(Miu+T
heta+Phi))/Beta)*...
    (1-R_a(i));
    I_3(i)=(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A);
end
hold on
plot(R_a,I_3,'b', 'LineWidth',2);
hold off
xlabel('Bilangan Reproduksi Dasar (Rv)')
ylabel('Populasi (I)')
legend('I_1','I_2',20,'location','eastoutside');
grid on
axis([r_0-1,R_a(101)+2,0,I_3(101)]);

```

LAMPIRAN B

LISTING PROGRAM M- RUNGE-KUTTA

```

x = zeros(4,N+1);
x(1,1)=0.4;
x(2,1)=0.3;
x(3,1)=0.2;
x(4,1)=0.1;

R0 =
(Beta*Ka*(Miu+Theta+Sigma*Phi))/(Miu+Theta+Phi)*
(Miu+Alpha+Gamma);
K1_x(1,1)= h*KS(1,x)
for i=1:N
    K1_x(1,i)= h*KS(i,x);
    K1_x(2,i)= h*KV(i,x);
    K1_x(3,i)= h*KI(i,x);
    K1_x(4,i)= h*KT(i,x);

    x(1,i+1)=x(1,i)+(K1_x(1,i)/2);
    x(2,i+1)=x(2,i)+(K1_x(2,i)/2);
    x(3,i+1)=x(3,i)+(K1_x(3,i)/2);
    x(4,i+1)=x(4,i)+(K1_x(4,i)/2);

```

```

K2_x(1,i)= h*KS(i+1,x);
K2_x(2,i)= h*KV(i+1,x);
K2_x(3,i)= h*KI(i+1,x);
K2_x(4,i)= h*KT(i+1,x);

x(1,i+1)=x(1,i)+(K2_x(1,i)/2);
x(2,i+1)=x(2,i)+(K2_x(2,i)/2);
x(3,i+1)=x(3,i)+(K2_x(3,i)/2);
x(4,i+1)=x(4,i)+(K2_x(4,i)/2);
K3_x(1,i)= h*KS(i+1,x);
K3_x(2,i)= h*KV(i+1,x);
K3_x(3,i)= h*KI(i+1,x);
K3_x(4,i)= h*KT(i+1,x);

x(1,i+1)=x(1,i)+K3_x(1,i);
x(2,i+1)=x(2,i)+K3_x(2,i);
x(3,i+1)=x(3,i)+K3_x(3,i);
x(4,i+1)=x(4,i)+K3_x(4,i);
K4_x(1,i)= h*KS(i+1,x);
K4_x(2,i)= h*KV(i+1,x);
K4_x(3,i)= h*KI(i+1,x);
K4_x(4,i)= h*KT(i+1,x);

x(1,i+1) = x(1,i) + (1/6)*(K1_x(1,i) +
2*K2_x(1,i) + 2*K3_x(1,i) + K4_x(1,i))
x(2,i+1) = x(2,i) + (1/6)*(K1_x(2,i) +
2*K2_x(2,i) + 2*K3_x(2,i) + K4_x(2,i))
x(3,i+1) = x(3,i) + (1/6)*(K1_x(3,i) +
2*K2_x(3,i) + 2*K3_x(3,i) + K4_x(3,i))
x(4,i+1) = x(4,i) + (1/6)*(K1_x(4,i) +
2*K2_x(4,i) + 2*K3_x(4,i) + K4_x(4,i))
end

t = 0:h:N*h;
figure(1)
plot(t,x(1,:), 'r',t,x(2,:), 'k',t,x(3,:), 'g',t,x(
4,:), 'b', 'LineWidth', 2);
xlabel('Time (year)');
ylabel('Populated (million)');

```



```
legend('S(t)', 'V(t)', 'I(t)', 'T(t)');
grid on
```

KS

```
function [K_S] = KS(t,x)
    global Miu Psi Ka Beta Phi Theta
    K_S= (Miu+Psi)*Ka-Beta*x(1,t)*x(3,t)-
    (Miu+Phi+Psi)*x(1,t)-(Psi-Theta)*x(2,t)-
    Psi*x(3,t)-Psi*x(4,t);
end
```

KV

```
function [ K_V ] = KV( t,x )
    global Phi Sigma Beta Miu Theta
    K_V= Phi*x(1,t)-Sigma*Beta*x(2,t)*x(3,t)-
    (Miu+Theta)*x(2,t);
end
```

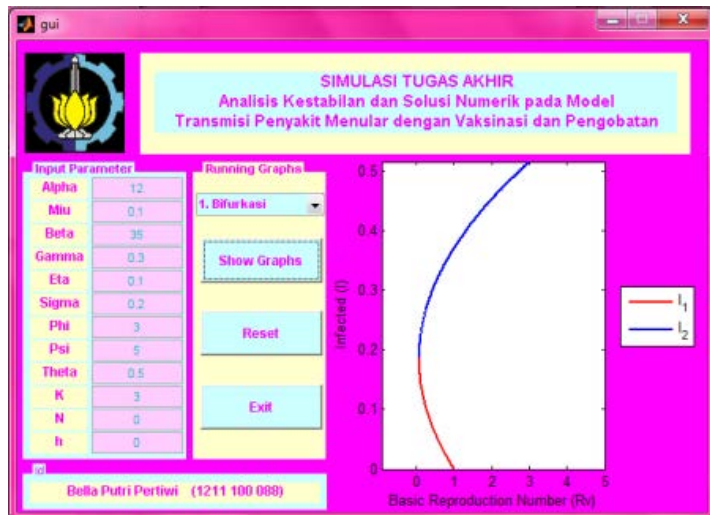
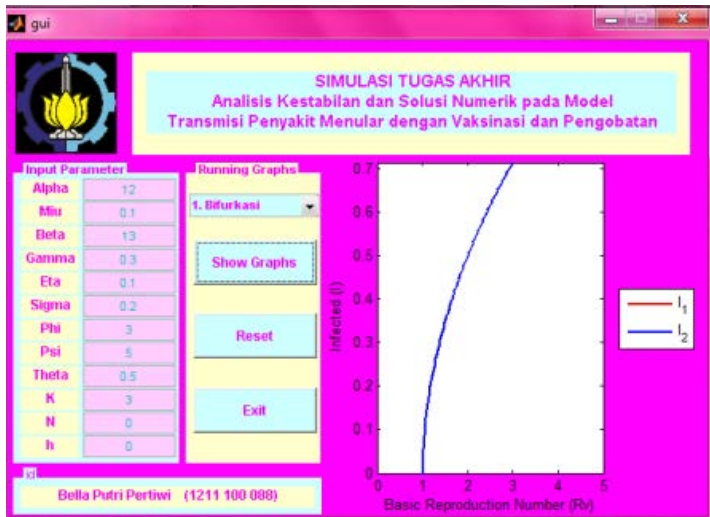
KI

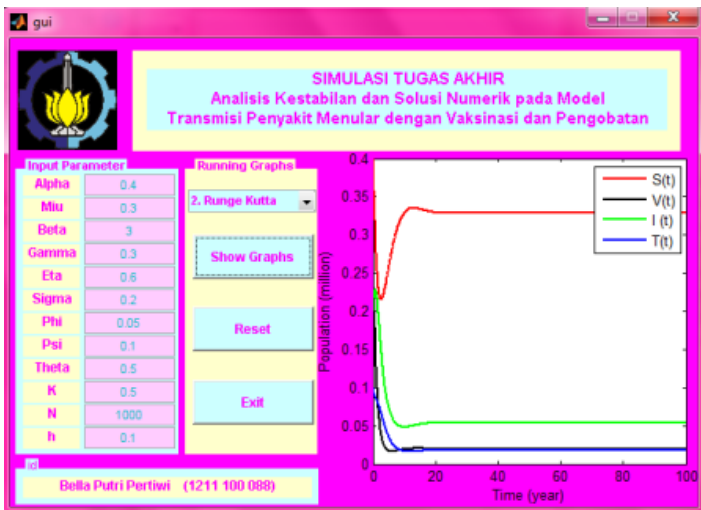
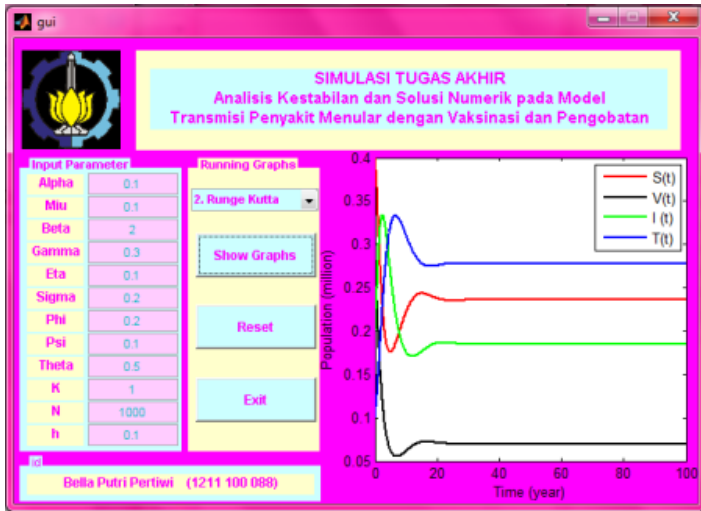
```
function [ K_I ] = KI( t,x )
    global Beta Sigma Miu Alpha Gamma
    K_I=
    Beta*x(1,t)*x(3,t)+Sigma*Beta*x(2,t)*x(3,t)-
    (Miu+Alpha+Gamma)*x(3,t);
end
```

KT

```
function [ K_T ] = KT( t,x )
    global Gamma Miu Eta
    K_T=Gamma*x(3,t)-(Miu+Eta)*x(4,t);
End
```

LAMPIRAN C TAMPILAN GUI





DAFTAR PUSTAKA

- [1] F, Brauer. (2011). "Backward Bifurcations in Simple Vaccination/ treatment Models". **Journal of Biological Dynamics Vol. 5, No.5**, Hal. 410-418.
- [2] X, Jorge, C.M. Kribs-Zaleta, Velasco-Hernández. (2000). "A Simple Vaccination Model with Multiple Endemic States", **Mathematical. Biosciences**. Hal.183–201.
- [3] Djasuli, M. (2009). "Eksistensi Bifurkasi Mundur pada Model Penyebaran Penyakit Makroparasitis". Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, **Tugas Akhir S2 Jurusan Matematika ITS Surabaya**.
- [4] F. Brauer (2004), "Backward Bifurcations in Simple Vaccination Models", **J. Math. Anal. Appl.** **298**, Hal. 418–431.
- [5] Rahmalia, D. (2010). *Pemodelan Matematika dan Analisis Stabilitas dari Penyebaran Penyakit Flu Burung*. **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya**.
- [6] Chengjun. S dan Wei, Y. (2010). "Global Results for an SIRS Model with Vaccination and Isolation". **Nonlinear Analysis**. Hal. 418-431.
- [7] Sun, Changjun, Hsieh, Ying-Hen. (2010). "Global Analysis of an SEIR Model with Varying Population Size and Vaccination". **Applied Mathematical Modelling**.
- [8] Thieme HR.(1992)."*Epidemic and Demographic Interaction in The Spread of Potentially Fatal Diseases in Growing Population*". **Math Biosci**.
- [9] Anton H., Rorres C. 2005. **Elementary Linear Algebra 9th edition**. John Wiley & Sons, Inc.
- [10] Subiono. 2013. *Sistem linear dan Kontrol Optimal*. Surabaya. Subiono Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

LAMPIRAN D

BIODATA PENULIS



Penulis dilahirkan di Kediri, 18 Agustus 1993, merupakan anak tunggal di keluarga. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu SDN Banjaran IV Kediri (1999-2005), SMPN 1 Kediri (2005-2008), SMAN 2 Kediri (2008-2011). Penulis kemudian melanjutkan pendidikan S1 Jurusan Matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember melalui Jalur SNMPTN tahun 2011 dan terdaftar dengan NRP 1211 100 088. Di Jurusan Matematika ini penulis mengambil Bidang Studi Matematika Terapan. Penulis aktif di beberapa organisasi intra kampus diantaranya : Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) sebagai staf Departemen Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa periode 2012-2013, Ketua Divisi Kepemanduan Departemen Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa periode 2013-2014, dan SC Padamu Himatika 2013. Penulis juga aktif dalam berbagai kegiatan pelatihan kemahasiswaan, diantaranya LKMM Pra TD FMIPA ITS 2011, LKMM TD Himatika ITS 2012, PP LKMM FMIPA ITS 2012, LKMM TM FMIPA ITS 2013, dan LKMM TL ITS 2014. Disamping itu, di semester 8 penulis dipercaya menjadi asisten dosen matakuliah Wawasan Teknologi dan Komunikasi Ilmiah.

Informasi mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke alamat email bellajayadilaga@gmail.com