TESIS - KM 185401

KENDALI HALUAN KAPAL DENGAN MENGGUNAKAN MODIFIKASI MODEL PREDICTIVE CONTROL-KALMAN FILTER

AHMAD MAULANA SYAFII
NRP 06111750010009

DOSEN PEMBIMBING:
Subchan, Ph.D.
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

PROGRAM MAGISTER
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI DAN SAINS DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2019

THESIS - KM 185401

SHIP HEADING CONTROL USING MODIFIED MODEL PREDICTIVE CONTROL-KALMAN FILTER

AHMAD MAULANA SYAFII
NRP 06111750010009

SUPERVISORS:
Subchan, Ph.D.
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTATION AND DATA SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2019

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:
AHMAD MAULANA SYAFII
NRP. 06111750010009

Tanggal Ujian : 18 Januari 2019
Periode Wisuda : Maret 2019

Disetujui oleh:

Subchan, Ph.D.
NIP 19710513 199702 1 001 (Pembimbing I)

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.
NIP 19830517 200812 1 003 (Pembimbing II)

Dr. Dra. Mardlijah, S.Si, M.T.
NIP 19670114 199102 2 001 (Penguji)

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.
NIP 19660414 199102 2 001 (Penguji)

Dekan FMKSD,

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

Scanned by CamScanner

KENDALI HALUAN KAPAL DENGAN MENGGUNAKAN MODIFIKASI *MODEL PREDICTIVE CONTROL-KALMAN FILTER*

Nama Mahasiswa	:	Ahmad Maulana Syafii
NRP	:	06111750010009
Pembimbing	:	1. Subchan, Ph.D.
		2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

ABSTRAK

Pada tesis ini dibahas algoritma Modifikasi Model Predictive Control-Kalman Filter (MPC-KF) untuk menyelesaikan permasalahan kendali haluan kapal. Noise yang melekat pada model sistem dipertimbangkan sehingga permasalahan MPC menjadi permasalahan stokastik dengan kendala berbentuk probabilistik. Kalman Filter digunakan untuk menggantikan prediksi yang dilakukan oleh Model Predictive Control. Selanjutnya kendala probabilistik diubah menjadi deterministik sehingga dapat diselesaikan dalam metode Modifikasi MPC-KF. Pada permasalahan ini, rudder digunakan untuk mengendalikan sudut hadap kapal sehingga mencapai sudut hadap yang diinginkan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pengendali Modifikasi MPC-KF mampu membuat sudut hadap kapal mendekati sudut referensi yang diberikan. Dari 10 *kali percobaan didapatkan performansi terbaik pada saat* N_p *adalah 15 yang ditinjau dari Root Mean Square Error (RMSE).*

Kata-kunci: Model Predictive Control (MPC), Kalman Filter, Kendala Probabilistik, Kendali Haluan Kapal

SHIP HEADING CONTROL USING MODIFIED MODEL PREDICTIVE CONTROL-KALMAN FILTER

Name	:	Ahmad Maulana Syafii
NRP	:	06111750010009
Supervisors	:	1. Subchan, Ph.D.
		2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

ABSTRACT

In this thesis, modified Model Predictive Control-Kalman Filter (MPC-KF) algorithm is proposed to solve the ship heading control problem by considering the presence of noise in the system. Noise attached to the system model is considered so that the MPC problem becomes a stochastic problem with probabilistic constraints. Kalman Filter is used to replace predictions made by the Model Predictive Control. Probabilistic constraints are changed to deterministic constraints so that they can be solved in the MPC-KF Modification method. In this problem, rudder angle is used to control the ship heading angle so that it reaches the desired angle. Simulation results show that the modified MPC-KF controller is able to drive teh ship heading angle to the reference angle. From the 10 *experiments, the best performance is obtained when* N_p *is 15 according to Root Mean Square Error (RMSE) criteria.*

Key-words: Model Predicitve Control (MPC), Kalman Filter, Probabilistic Constrain, Ship Heading Control

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis diberikan suatu kesempatan untuk menyelesaikan tesis yang berjudul

Kendali Haluan Kapal dengan Menggunakan Modifikasi *Model Predictive Control-Kalman Filter*

tesis ini dibuat untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar Magister Program Magister Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. oleh karena itu, pada kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih kepada pihak-pihak tersebut diantaranya:

1. Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

2. Dekan Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

3. Kepala Departemen Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

4. Kepala Program Studi Magister Matematika, Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

5. Subchan, Ph.D. dan Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing dalam penyelesaian tesis.

6. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si., dan Dr. Dra. Mardlijah, S.Si., M.T. selaku dosen penguji dalam penyelesaian tesis ini.

7. Dr. Mahmud Yunus, M.Si. selaku dosen wali selama menempuh program studi Magister Matematika.

8. Kedua orang tua tercinta yang selalu memberikan do'a serta dukungan selama menempuh program studi Magister Matematika. Semoga beliau diberikan kesehatan dan limpahan rahmat-Nya, aamiin ya robbal 'alamiin.

9. Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing ketiga yang banyak membantu saya dalam penyelesaian tesis ini.

10. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Magister Matematika. Terimakasih banyak atas segala sesuatunya yang telah diberikan selama menjalani perkuliahan Magister Matematika.

11. Apriliya Putri Arnida yang berada di Samarinda. Terima Kasih banyak selalu mendukung selama menempuh perkuliahan di program studi Magister Matematika. Semoga dimudahkan skripsi yang sedang diambil dan dapat lulus tahun 2019.

12. Staf Pasca Sarjana Matematika, Mbak Resty dan Mas Afif. Terimakasih banyak atas bantuan dalam menginformasikan keperluan administrasi dan bersedia menampung keluh kesah penulis selama proses penyelesaian tesis hingga kelulusan.

Penulis menyadari bahwa dalam tesis ini masih terdapat kelemahan dan kekurangan, oleh karena itu penulis sangat terbuka menerima saran dan ide demi kesempurnaan penulisan selanjutnya. Penulis berharap semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi pembaca, dan semua yang telah dikerjakan ini mendapat ridho dari Allah SWT.

Surabaya, Februari 2019

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i

LEMBAR PENGESAHAN v

ABSTRAK vii

ABSTRACT ix

KATA PENGANTAR xi

DAFTAR ISI xiii

DAFTAR GAMBAR xvii

DAFTAR TABEL xix

BAB 1 PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 4

1.3 Batasan Penelitian 5

1.4 Tujuan Penelitian 5

1.5 Manfaat Penelitian 5

BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI 7

2.1 Penelitian-Penelitian Terkait 7

2.2 Model Matematika Dinamika Kapal 9

2.3 Keterkontrolan dan Keteramatan Sistem 15

2.4 Kalman Filter 15

2.5 *Model Predictive Control* (MPC) 16

2.5.1 Desain MPC 18

BAB 3 METODE PENELITIAN 23

3.1 Studi Literatur 23

3.2 Formulasi Modifikasi MPC-KF 23

3.3 Desain Kendali Modifikasi MPC-KF pada Permasalahan Kendali Haluan Kapal 24

3.4 Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi 24

3.5 Penulisan Laporan Tesis 24

BAB 4 ANALISIS DAN PEMBAHASAN 27
4.1 Model Matematika Dinamika Kapal 27
4.1.1 Uji Keterkontrolan dan Keteramatan 32
4.1.2 Diskritisasi Model 33
4.2 Desain Sistem Kendali MPC pada Permasalahan Kendali Haluan Kapal 34
4.2.1 Prediksi Variabel Keadaan dan Keluaran pada MPC . . 35
4.2.2 Formulasi Fungsi Obyektif pada MPC 37
4.2.3 Formulasi Kendala 38
4.3 Formulasi Modifikasi MPC-KF 41
4.3.1 Penggabungan Kalman Filter pada Proses MPC 45
4.3.2 Pengubahan Kendala Probabilistik Variabel Keadaan ke dalam Bentuk Determinsitik 47
4.3.3 Pengubahan Fungsi Obyektif ke dalam bentuk determinsitik 53
4.4 Desain Sistem Kendali Modifikasi MPC-KF pada Permasalahan Kendali Haluan Kapal 57
4.4.1 Prediksi Variabel Keadaan dan Keluaran pada Modifikasi MPC-KF 57
4.4.2 Formulasi Fungsi Objektif pada Modifikasi MPC-KF . . 59
4.4.3 Formulasi Kendala Variabel Keadaan pada Modifikasi MPC-KF 61
4.5 Algoritma Model Predictive Control dengan dan tanpa mempertimbangkan keberadaan *noise* 64
4.6 Simulasi dan Analisis Penerapan Modifikasi *Model Predictive Control-Kalman Filter* (MPC-KF) dan Modifikasi Model Predictive Control (MPC) pada Kendali Haluan Kapal 67
4.6.1 Simulasi Standar MPC pada kendali haluan kapal 69
4.6.2 Simulasi Standar MPC pada kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan keberadaan *noise* 70
4.6.3 Simulasi MPC-KF pada kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan keberadaan *noise* 71
4.6.4 Simulasi Modifikasi MPC-KF pada kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan keberadaan *noise* . . . 73
4.6.5 Simulasi Penerapan Modifikasi MPC-KF pada Permasalahan Kendali Haluan Kapal 79

BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN 87
5.1 Kesimpulan 87
5.2 Saran 88
DAFTAR PUSTAKA 89
BIODATA PENULIS 93

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Enam Gerak Kapal. 9
Gambar 2.2 Diagram blok MPC 17
Gambar 2.3 Skema MPC. 18

Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian. 25
Gambar 3.2 Diagram Alir Modifikasi MPC-KF. 26

Gambar 4.1 Distribusi Normal Standar dengan batas atas. 48
Gambar 4.2 Distribusi Normal Standar dengan batas atas dan bawah. 51
Gambar 4.3 Prediksi Kalman Filter Sebanyak Waktu Horizon Prediksi N. 55
Gambar 4.4 Simulasi Modifikasi MPC-KF dengan Variasi Prediksi Horizon. 68
Gambar 4.5 Simulasi Standar MPC tanpa mempertimbangkan *noise* 70
Gambar 4.6 Simulasi Standar MPC dengan mempertimbangkan *noise* 70
Gambar 4.7 Simulasi MPC-KF dengan mempertimbangkan *noise* . . . 71
Gambar 4.8 Simulasi Perbandingan Standar MPC dan MPC-KF dengan mempertimbangkan keberadaan *noise* 72
Gambar 4.9 Simulasi Modifikasi MPC-KF dengan mempertimbangkan *noise* 74
Gambar 4.10 Simulasi Perbandingan Standar MPC dan Modifikasi MPC-KF dengan mempertimbangkan *noise* 74
Gambar 4.11 Simulasi Modifikasi MPC-KF pada pengujian pertama . 75
Gambar 4.12 Simulasi Modifikasi MPC-KF pada pengujian kedua . . . 76
Gambar 4.13 Simulasi Modifikasi MPC-KF pada pengujian ketiga . . . 77
Gambar 4.14 Simulasi Modifikasi MPC-KF pada pengujian keempat . 77
Gambar 4.15 Respon Simulasi Sudut *Yaw* dengan Variasi Nilai Referensi 78
Gambar 4.16 Respon Simulasi Sudut *Yaw* dengan Variasi Nilai Awal . 79
Gambar 4.17 Sudut *yaw* pada skenario 1 80
Gambar 4.18 Kecepatan *yaw* pada skenario 1 81
Gambar 4.19 Sudut *rudder* pada skenario 1 82
Gambar 4.20 Kecepatan *sway* pada skenario 1 82

Gambar 4.21 Sudut *yaw* pada Skenario 2 83
Gambar 4.22 Kecepatan *yaw* pada Skenario 2 84
Gambar 4.23 Sudut *rudder* pada Skenario 2 85
Gambar 4.24 Kecepatan *sway* pada Skenario 2 85

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Notasi pada Dinamika Kapal 9
Tabel 2.2 Variabel Normalisasi Sistem Prime I 13

Tabel 4.1 Data Parameter KRI Corvet Kelas Sigma 28
Tabel 4.2 Koefisien Hidrodinamika Kapal. 30
Tabel 4.3 Algoritma Standar MPC dengan dan tanpa *noise*. 65
Tabel 4.4 Algoritma MPC-KF dan Modifikasi MPC-KF 66
Tabel 4.5 Pengaruh Prediksi Horizon pada Respon Sistem. 69
Tabel 4.6 Perbandingan RMSE Standar MPC dan MPC-KF. 73

BAB 1
PENDAHULUAN

Pada bab ini dipaparkan mengenai hal-hal yang melatarbelakangi munculnya permasalahan yang dibahas pada penelitian Tesis ini. Selanjutnya permasalahan tersebut disusun ke dalam suatu rumusan masalah. Kemudian dijelaskan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh.

1.1 Latar Belakang

Model Predictive Control (MPC) atau *Receding Horizon Control* merupakan salah satu metode kontrol yang populer digunakan untuk *advanced control* (Heirung,dkk., 2018). MPC memiliki kemampuan untuk mengatasi permasalahan sistem multivariable serta mampu menangani kendala pada state dan kontrol input (Li, P., dkk., 2002). Pada MPC, sebuah model sistem digunakan untuk memprediksi keadaan yang akan datang sebanyak prediksi horizon yang ditentukan. Hasil prediksi ini menghasilkan barisan urutan kontrol selama waktu kontrol horizon. Berdasarkan hukum receding horizon pada MPC, hanya elemen pertama dari urutan kontrol ini yang akan diterapkan pada sistem (Yan dan Bitmead, 2005). Keuntungan MPC ialah dapat mempertimbangkan semua informasi yang tersedia sehingga dapat mengantisipasi situasi yang tidak diinginkan di masa depan pada tahap awal (Zheng dan Negenborn, 2014).

MPC telah banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang, salah satunya adalah penggunaan MPC pada masalah *ship heading control* (kendali haluan kapal). *Ship heading kontrol* merupakan salah satu masalah kontrol untuk aplikasi kelautan dan telah menarik perhatian besar dari komunitas kontrol (Li dan Sun, 2012). *Ship heading control*, juga dikenal sebagai *course keeping* yaitu sistem kendali autopilot pada kapal tanpa awak. Kapal tanpa awak sering digunakan untuk berbagai aplikasi seperti survei lingkungan atau geografis, akuisisi informasi cuaca, penyelamatan, militer dan platform penelitian murni (Zheng dan Negenborn, 2014).

Pada umumnya kapal mempunyai enam macam gerakan ketika melaju, gerakan tersebut yaitu *sway*, *surge*, *heave*, *roll*, *pitch* dan *yaw*. Pergerakan ini berpusat pada tiga sumbu utama, antara lain: sumbu longitudinal (dari buritan ke depan), sumbu transversal (samping), dan sumbu normal bumi(dari atas ke bawah). Pada masing-masing sumbu terdapat gerak translasi dan rotasi (Fossen, 1999). Kapal juga membutuhkan sistem navigasi, panduan, dan kontrol yang mampu mengarahkan kapal untuk bergerak ke sudut hadap yang diinginkan (Subchan dan Zbikowski, 2009). Adapun alat yang digunakan untuk mengontrol sudut hadap kapal dinamakan *rudder*.

Beberapa penelitian terkait penggunaan MPC sebagai metode kontrol pada sistem kendali kapal telah banyak dilakukan. (Li, Z., dkk., 2009) membahas permasalahan kendali haluan kapal sehingga kapal dapat mengikuti lintasan yang diberikan. Pada penelitian ini *noise* dan *disturbance* diasumsikan kecil sehingga dianggap tidak ada. Metode kontrol MPC digunakan untuk mengontrol sistem kendali kapal dan hasilnya ialah kapal dapat mengikuti lintasan sesuai dengan kendala yang diberikan. Selanjutnya penelitian mengenai masalah kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan *disturbance* menggunakan MPC telah dilakukan oleh (Subchan, dkk., 2014). Hasil simulasi menunjukkan bahwa pengontrol mampu mencapai *yaw rate* yang tepat dengan kendala yang diberikan. Kemudian (Li dan Sun, 2012) juga melakukan penelitian tentang permasalahan kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan adanya gangguan lingkungan seperti gelombang. Pada penelitiannya ini diusulkan algoritma baru yaitu algoritma Disturbance Compensating-MPC untuk mengatasi masalah gangguan lingkungan sehingga kapal dapat dikendalikan sesuai kendala yang ditetapkan.

Dalam beberapa penelitian yang telah dilakukan, terlihat bahwa metode MPC dapat memberikan hasil yang memuaskan untuk diterapkan pada sistem kendali kapal. Salah satu alasan utama keberhasilan metode MPC adalah kemampuannya dalam mengatasi berbagai jenis kendala pada sistem. Akan tetapi, sewaktu-waktu penyelesaian MPC menjadi *infeasible* karena adanya ketidakcocokan model atau *disturbance* atau *noise* (Li dan Sun, 2012). Hal ini mengakibatkan tidak adanya solusi yang dapat ditemukan untuk memenuhi semua kendala. Terdapat perbedaan yang jelas antara *disturbance* dan *noise*. *Disturbance* adalah gangguan yang pada sistem yang bersifat deterministik yaitu diketahui seberapa besar nilai gangguan yang diberikan dan bersifat tetap. Seperti pada penelitian (Li dan Sun, 2012) dan (Subchan, dkk., 2014), metode MPC maupun DC-MPC masih dapat digunakan untuk menyelesaikan

permasalahan tersebut sesuai dengan kendala yang diberikan. Berbeda halnya dengan *noise*, yaitu gangguan yang bersifat acak atau stokastik. Keberadaan *noise* dalam sistem mengakibatkan perlunya untuk mengajukan masalah optimisasi yang dibatasi dalam bentuk stokastik (Yan dan Bitmead, 2002). Sistem stokastik menyebabkan adanya perubahan kendala pada MPC dari bentuk deterministik menjadi probabilistik. Metode standar MPC belum mampu menyelesaikan permasalahan ini dengan memenuhi sesuai kendala yang ditetapkan. Masalah utamanya adalah ketika *noise* yang melekat pada sistem diperhatikan, maka estimasi state akan berbeda dengan state aktual. Ada dua sumber kesalahan yang akan terjadi yaitu kesalahan antara estimasi state yang digunakan dan state aktual pada waktu awal interval optimasi, dan kesalahan state masa depan sepanjang waktu prediksi horizon(Yan dan Bitmead, 2005).

Beberapa penelitian yang membahas penggunaan kontrol pada sistem dengan mempertimbangkan keberadaan *noise* telah banyak dikembangkan. Dalam penelitian (Yan dan Bitmead, 2002) diusulkan penggabungan algoritma Kalman Filter ke dalam Model Predictive Control untuk menyelesaikan permasalahan optimisasi yang dibatasi dalam bentuk stokastik. Kalman filter digunakan untuk menggantikan prediksi yang dilakukan oleh MPC. Selanjutntya ide penelitiannya tersebut kembali dikembangkan pada tahun 2005. Pada penelitian ini diperkenalkan *closed-loop covariance* untuk mengurangi kesalahan yang terjadi pada pemenuhan kendala probabilistik sepanjang waktu prediksi horizon. Adapun kedua penelitiannya ini diterapkan pada permasalahan *network traffic control*(Yan dan Bitmead, 2005). Kemudian (Oldewurtel, dkk., 2014) memberikan alternatif metode lain dalam mengatasi permasalahan ketidakpastian gangguan (*noise*). Pada penelitian ini dibahas mengenai penerapan algoritma Stochastic Model Predictive Control (SMPC) dengan memperhitungkan prediksi cuaca pada masalah *building climate control* dengan tujuan untuk meningkatkan efisiensi energi sehingga tetap memberi kenyamanan kepada penghuni.

Ketidakpastian model serta ketidakpastian gangguan (*noise*) merupakan sifat sistem dalam aplikasi teknik kontrol(Li, P., dkk., 2000), sehingga sudah sewajarnya jika keberadaan *noise* harus dipertimbangkan. Berdasarkan penelitian-penelitian yang telah dijabarkan, pada Tesis ini penulis tertarik untuk membahas masalah kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan keberadaan *noise* yang melekat pada sistem. Dalam permasalahan ini standar MPC tidak dapat selalu menjamin pemenuhan kendala state atau *output*

dalam sistem yang nyata (Yan dan Bitmead, 2005), sehingga dibutuhkan strategi MPC yang kuat untuk menyelesaikan permasalahan ini (van Hessen,Bosgra, 2002). Oleh karena itu, pada Tesis ini algoritma modifikasi Model Predictive Control-Kalman Filter (MPC-KF) digunakan untuk menyelesaikan permasalahan kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan keberadaan *noise* yang melekat pada sistem. Algoritma modifikasi MPC-KF merupakan sistem kendali MPC yang mengikutsertakan sebuah estimator untuk mengurangi kesalahan keluaran akibat gangguan yang bersifat stokastik (*noise*). Pada Tesis ini, Kalman Filter digunakan sebagai estimator karena jenis filter ini bekerja dengan sangat baik dalam praktiknya sehingga sering diterapkan untuk estimasi dan prediksi sebuah model matematika atau sekumpulan data agar mengetahui data berikutnya. Kalman Filter digunakan untuk menggantikan proses prediksi yang dilakukan oleh MPC. Model kapal yang digunakan ialah model kapal Davidson dan Schiff. Model kapal Davidson dan Schiff hanya mempertimbangkan dua derajat kebebasan kapal, yaitu *sway* dan *yaw*. Model kapal Davidson dan Schiff merupakan model dengan sistem yang linier sehingga modifikasi MPC-KF dapat diterapkan pada model tersebut. Pada Tesis ini *noise* yang melekat pada sistem diasumsikan sebagai *white noise gaussian*. Selanjutnya sudut *rudder* digunakan sebagai *input*/kontrol pegendali haluan kapal agar kapal dapat menuju sesuai referensi yang diinginkan. Kemudian dilakukan simulasi dan analisis untuk mendapatkan keakuratan dari metode modifikasi MPC-KF pada permasalahan kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan keberadaan *noise*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan di atas, rumusan masalah untuk penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana formulasi modifikasi Model Predictive Control-Kalman Filter?
2. Bagaimana penerapan modifikasi Model Predictive Control-Kalman Filter pada permasalahan kendali haluan kapal?
3. Bagaimana simulasi dan analisis hasil modifikasi Model Predictive Control-Kalman Filter pada permasalahan kendali haluan kapal?

1.3 Batasan Penelitian

Di dalam rencana penelitian ini, batasan masalah diberikan sebagai berikut.

1. Model kapal yang digunakan ialah model Davidson dan Schiff yang hanya mempertimbangkan dua derajat kebebasan, yaitu *sway* dan *yaw*.
2. Gangguan lingkungan diabaikan karena diasumsikan sangat kecil.
3. Data parameter kapal yang digunakan pada simulasi adalah data kapal perang Corvet kelas Sigma.
4. Kontrol yang dirancang tidak dilakukan uji *disturbance*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam perencanaan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Untuk mengetahui bagaimana formulasi modifikasi Model Pedictive Control-Kalman Filter.
2. Untuk mengetahui bagaimana penerapan modifikasi Model Pedictive Control-Kalman Filter pada permasalahan kendali haluan kapal.
3. Untuk mengetahui bagaiman simulasi dan analisis hasil modifikasi Model Predictive Control-Kalman Filter pada permasalahan kendali haluan kapal.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian pada ini adalah memberikan metode alternatif pada permasalahan kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan *noise* menggunakan metode modifikasi Model Predictive Control-Kalman Filter.

BAB 2
KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Dalam bab ini dibahas mengenai kajian pustaka dan dasar teori yang berkaitan dengan topik penelitian tesis. Selain itu juga diuraikan mengenai model dinamik gerak kapal, keterkontrolan dan keteramatan sistem, metode Kalman Filter (KF) dan model predictive control (MPC).

2.1 Penelitian-Penelitian Terkait

Penelitian-penelitian terkait topik Tesis yang pernah dilakukan sebelumnya adalah sebagai berikut.

1. ***Ship Heading Control Of Corvette-Sigma With Disturbances Using Model Predictive Control*** (Subchan, dkk., 2014). Penelitian ini menjelaskan mengenai kendali haluan kapal yang mengalami gangguan alam berupa gelombang dan besarnya nilai rata-rata *yaw* yang terjadi dapat menimbulkan gerakan lain yaitu *roll* dan *sway*. Algoritma MPC digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pengontrol yang dibuat mampu mengatasi kendali kapal dengan gangguan alam dan mencapai tingkat *yaw* yang tepat.

2. ***Disturbance Compensating Model Predictive Control With Application to Ship Heading Control*** (Li dan Sun, 2012). Pada penelitian ini gangguan lingkungan/*disturbance* dipertimbangkan dalam permasalahan kendali haluan kapal. Dalam menyelesaikan permasalahan ini dibutuhkan strategi MPC yang kuat. Kemudian penulis mengusulkan algoritma DC-MPC untuk menyelesaiakan masalah ini. Pada penelitian ini algoritma DC-MPC dibandingkan dengan algoritma MPC yang telah ada sebelumnya dalam menyelesaikan masalah kendali haluan kapal. Hasil dari penelitian ini, algoritma DC-MPC dapat mengatasi masalah gangguan lingkungan sehingga gerakan kapal dapat dikendalikan sesuai dengan kendala yang telah ditetapkan. Hasil simulasi juga menunjukkan bahwa metodo DC-MPC memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan metode standar MPC.

3. ***Model Predictive Control And State Estimation: A Network Example*** (Yan dan Bitmead, 2002). Pada penelitian ini penggabungan metode estimasi berupa Kalman Filter ke dalam proses MPC diusulkan untuk menyelesaikan permasalahan MPC dengan mempertimbangkan ketidakpastian gangguan/*noise* dalam sistem dengan kendala berbentuk probabilistik. Keberadaan *noise* menyebabkan permasalahan MPC menjadi permasalahan stokastik sehingga masih sulit diselesaikan menggunakan standar MPC. Penggabungan state estimasi berupa Kalman Filter ke dalam MPC bertujuan untuk menggantikan prediksi yang dilakukan proses MPC. Pada penelitian ini kendala probabilistik dari permasalahan stokastik tersebut diubah menjadi determinisitik. Kovarians error prediksi yang didapatkan dari metode Kalman Filter digunakan untuk memodifikiasi kendala probabilistik yang telah diubah dalam bentuk deterministik. Pada penelitian ini metode tersebut diterapkan dalam permasalahan *network traffic control*.

4. ***Incorporating state estimation into model predictive control and its application to network traffic control*** (Yan dan Bitmead, 2005). Penelitian ini merupakan lanjutan dari penelitian sebelumnya (Yan dan Bitmead, 2002). Pada penelitian (Yan dan Bitmead, 2002), semakin besar nilai prediksi horizon maka membuat solusi permasalahan menjadi *infeasible*. Untuk mengatasi hal ini, dikembangkan ide tentang penggabungan state estimasi ke dalam prose MPC dengan memanfaatkan *closed-loop covariance*. *closed-loop covariance* digunakan untuk mengurangi kesalahan yang terjadi pada pemenuhan kendala probabilistik yang diberikan sepanjang waktu prediksi horizon sehingga.

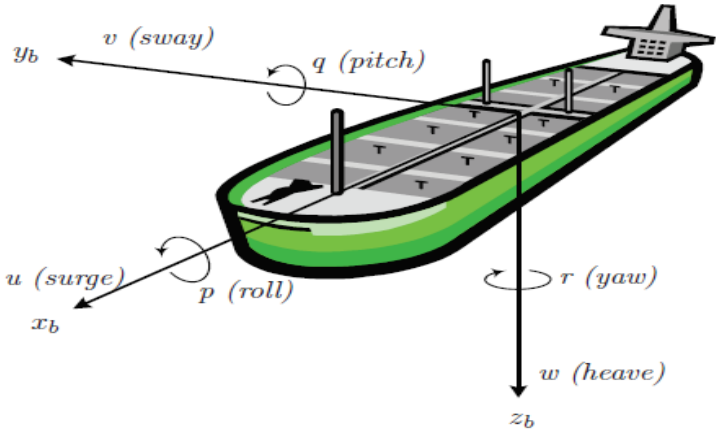
5. ***Stochastic Model Predictive Control for Building Climate Control*** (Oldewurtel, dkk., 2014). Pada penelitian ini dibahas mengenai permasalahan *building climate control*. Permasalahan ini memiliki tujuan untuk meminumkan energi yang digunakan dengan tetap memberikan kenyamanan kepada penghuni ruangan. Algoritma Stochastic Model Predictive Control (SMPC) digunakan untuk mengatasi permasalahan *building climate control* dengan memperhatikan ketidakpastian prediksi cuaca. Hasil penelitiannya ialah SMPC dapat mengatasi masalah ketidakpastian prediksi cuaca sehingga penggunaan energi dapat diminimumkan dengan tetap memberikan kenyamanan kepada penghuni ruangan.

2.2 Model Matematika Dinamika Kapal

Pada prinsipnya dinamika kapal dibagi dalam enam derajat kebebasan, yaitu : *surge*, *sway*, *yaw*, *heave*, *roll* dan *pitch*. Keenam gerakan tersebut dapat diklasifikasikan menjadi dua gerak, yaitu gerak translasi dan gerak rotasi. Gerakan translasi terdiri dari tiga gerak yaitu *surge*(maju/mundur), *sway*(kanan/kiri) dan *heave*(atas/bawah). Gerak rotasi juga dibagi menjadi tiga yaitu *roll*(berputar), *pitch*(mengangguk) dan *yaw*(menggeleng). Enam derajat kebebasan ini juga disebut sebagai komponen gerak dari kapal saat bermanuver (Fossen, 1999). Enam komponen gerak tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.1 dan Gambar 3.1:

Tabel 2.1: Notasi pada Dinamika Kapal

DOF	Gerakan	Gaya dan Momen	Kecepatan linear dan angular	Posisi Sudut Euler
1	Gerak arah-x (*surge*)	X	u	x
2	Gerak arah-Y (*sway*)	Y	v	y
3	Gerak arah-Z (*heave*)	Z	w	z
4	Rotasi arah-x (*roll*)	K	p	Φ
5	Rotasi arah-y (*pitch*)	M	q	θ
6	Rotasi arah-z (*yaw*)	N	r	ψ



Gambar 2.1: Enam Gerak Kapal.
(Fossen, 2011)

Persamaan dinamika kapal dengan enam derajat kebebasan (DOF) dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
I_x\dot{p} + (I_z - I_y)qr + m[y_G(\dot{w} - uq + vp) - z_G(\dot{v} - wp + ur)] &= K \\
I_y\dot{q} + (I_x - I_z)rp + m[z_G(\dot{u} - vr + wq) - x_G(\dot{w} - uq + vp)] &= M \\
I_z\dot{r} + (I_y - I_x)pq + m[x_G(\dot{v} - wp + ur) - y_G(\dot{u} - vr + wq)] &= N \\
m[\dot{u} - vr + wq - x_G(q^2 + r^2) + y_G(pq - \dot{r}) + z_G(pr + \dot{q}) &= X \\
m[\dot{v} - wp + ur - y_G(r^2 + p^2) + y_G(qr - \dot{p}) + x_G(qp + \dot{r}) &= Y \\
m[\dot{w} - uq + vp - z_G(p^2 + q^2) + x_G(rp - \dot{q}) + y_G(rq + \dot{p}) &= Z \quad (2.1)
\end{aligned}$$

Persamaan sistem kemudi dari kapal yang digunakan akan sesuai berdasarkan asumsi berikut:

1. Distribusi massa homogen dan bidang xz simetris ($I_{xy} = I_{yz} = 0$).

2, Koordinat pusat diletakkan di tengah kapal ($y_G = 0$).

3. Gerakan *heave*, *roll* dan *pitch* tidak diperhitungkan ($w = p = q = 0$). Berdasarkan asumsi tersebut persamaan 2.1 menjadi:

$$\begin{cases}
surge : m(\dot{u} - vr - x_G r^2) = X \\
sway : m(\dot{v} + ur + x_G\dot{r}) = Y \\
yaw : I_z\dot{r} + mx_G(v + ur) = N
\end{cases} \quad (2.2)$$

4. Kecepatan *sway* v, kecepatan *yaw* r dan sudut *rudder* δ kecil.

Hal ini menunjukkan bahwa gerak *surge* dapat dipisahkan dari gerak *sway* dan *yaw* dengan asumsi kecepatan u_0 adalah konstan untuk gaya dorong yang juga konstan. Dengan cara yang sama, diasumsikan pada *sway* dan *yaw* $v_0 = r_0 = 0$. Dengan demikian

$$u = u_0 + \Delta U; v = \Delta v; r = \Delta r$$
$$X = X_0 + \Delta X; Y = \Delta Y; N = \Delta N$$

dimana $\Delta u, \Delta v, \Delta r$ adalah gangguan kecil dari ilai u_0, v_0 dan r_0 dan $\Delta X, \Delta Y, \Delta N$ adalah gangguan kecil dari nilai nominal X_0, Y_0, N_0 sehingga

Persmaan 2.2 dapat ditulis:

$$\begin{cases} m\Delta\dot{u} = X_0 + \Delta X \\ m(\Delta\dot{v} + u_0\Delta r + x_G\Delta\dot{r}) = \Delta Y \\ I_z\Delta\dot{r} + mx_G(\Delta\dot{v} + u_0\Delta r) = \Delta N \end{cases} \tag{2.3}$$

dengan keadaan dimana persamaan sistem kemudi kapal telah terpisah dari persamaan kecepatan, dengan menggunakan Persamaan 2.2, Persamaan 2.3 menjadi:

$$\begin{cases} m\dot{u} = X \\ m(\dot{v} + u_0 r + x_G\dot{r}) = Y \\ I_z\dot{r} + mx_G(\dot{v} + u_0 r) = N \end{cases} \tag{2.4}$$

Persamaan kendali pada gerak manuver kapal 3 DOF memuat variabel keadaan v, r, ψ dan kontrol masukkan δ. Berdasarkan Persamaan 2.4 persamaan kendali dinamika kapal dituliskan:

$$\begin{aligned} (\dot{v} + u_0 r + x_G\dot{r}) &= Y \\ I_z\dot{r} + mx_G(\dot{v} + u_0 r) &= N \end{aligned}$$

teori linier Davidson dan Schiff (1946) menjelaskan bahwa gaya dan momen hidrodinamika dapat dimodelkan sebagai:

$$\begin{aligned} Y &= Y_{\dot{v}}\dot{v} + Y_{\dot{r}}\dot{r} + Y_v v + Y_r r + Y_\delta\delta_R \\ N &= N_{\dot{v}}\dot{v} + N_{\dot{r}}\dot{r} + N_v v + N_r r + N_\delta\delta_R \end{aligned}$$

dimana $Y_{\dot{v}}$ adalah turunan gaya arah *sway* terhadap $\dot{v}$, $Y_{\dot{r}}$ adalah turunan gaya *sway* terhadap $\dot{r}$, Y_v adalah turunan gaya arah *sway* terhadap v, Y_r adalah turunan gaya arah *yaw* terhadap r, $N_{\dot{v}}$ adalah turunan momen arah *sway* terhadap $\dot{v}$, $N_{\dot{r}}$ adalah turunan momen *sway* terhadap $\dot{r}$, N_v adalah turunan momen *sway* terhadap v, N_r adalah turunan momen *yaw* terhadap r, Y_δ dan N_δ adalah turunan gaya dan momen *sway* terhadap sudut *rudder* (Fossen, 1999).

Dengan menggunakan pendekatan Davidson dan Schiff , bentuk umum persamaan model dinamik kapal dengan 2 derajat kebebasan ialah

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{N}(u_0)\mathbf{v} = \mathbf{b}\delta_R \tag{2.5}$$

dimana $\mathbf{v} = [v, r]^T$ adalah vektor keadaan, δ_R adalah sudut *rudder* dan

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m - Y_{\dot{v}} & mx_G - Y_{\dot{r}} \\ mx_G - N_{\dot{v}} & I_z - N_{\dot{r}} \end{bmatrix} \\
\mathbf{N}(u_0) &= \begin{bmatrix} -Y_v & mu_0 - Y_r \\ -N_v & mx_G u_0 - N_r \end{bmatrix} \\
\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} Y_\delta \\ N_\delta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dan

$$u_0^{'} = \frac{u_0}{U} = \frac{u_0}{\sqrt{(u_0 + \Delta u)^2} + \Delta v^2} \approx 1$$

Selanjutnya dipilih matrik inersia $\mathbf{M} \neq \mathbf{M}^T$. Model ruang keadaan yang bersesuaian didapatkan dengan memilih $\mathbf{x} = [v, r]^T$ sebagai vektor keadaan dan $\mathbf{u} = \delta_R$ sehingga

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

dengan

$$\mathbf{A} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

dimana

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{(I_z - N_r)Y_v - (mx_G - Y_{\dot{r}})N_v}{det(M)} \\
a_{12} &= \frac{(I_z - N_r)(Y_v - mu_0) - (mx_G - Y_{\dot{r}})(N_r - mx_G u_0)}{det(M)} \\
a_{21} &= \frac{(m - Y_v)N_v - (mx_G - Y_v)N_v}{det(M)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{22} &= \frac{(m - Y_v)(N_r - mx_G u_0) - (mx_G - N_v)(Y_r - mu_0)}{det(M)} \\
b_1 &= \frac{(I_z - N_r)Y_\delta - (mx_G - Y_{\dot{r}})N_\delta}{det(M)} \\
b_2 &= \frac{(m - Y_v)N_\delta - (mx_G - N_{\dot{v}})Y_\delta}{det(M)}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya Persamaan 2.5 diubah kedalam bentuk nondimensional yang diturunkan dengan Sistem Prime I (Fossen, 1999). Untuk memperoleh besaran gaya dikalikan dengan $\frac{1}{2}\rho U^2 L^2$, momen dikalikan dengan $\frac{1}{2}\rho U^2 L^3$, besaran massa dikalikan dengan $\frac{1}{2}\rho L^3$, besaran momen inersia dikalikan dengan $\frac{1}{2}\rho L^5$. Dimana ρ = massa jenis air laut ($1024 kg/m^3$, L = *Lenght between perpendicular* = panjang kapal, U = kecepatan servis kapal, B = lebar kapal, T = kealaman/tinggi kapal, C_B = koefisien blok. Berikut adalah Variabel normalisasi Sistem Prime I ditunjukkan pada Tabel 2.2 (Fossen, 1999):

Tabel 2.2: Variabel Normalisasi Sistem Prime I

Unit	Sitem Prime I
Lenght	L
Mass	$\frac{1}{2}\rho L^3$
Inertia moment	$\frac{1}{2}\rho L^5$
Time	$\frac{L}{U}$
Reference area	L^2
Position	L
Angle	I
Linier velocity	U
Angular velocity	$\frac{U}{L}$
Linier acceleration	$\frac{U^2}{L}$
Angular acceleration	$\frac{U^2}{L^2}$
Force	$\frac{1}{2}\rho U^2 L^2$
Moment	$\frac{1}{2}\rho U^2 L^3$

Selanjutnya dengan menerapkan transformasi menggunakan Sistem Prime I, diperoleh variabel non dimensional sebagai berikut(Fossen, 1999):

$$
\begin{aligned}
v &= Uv' \\
r &= \frac{U}{L}r' \\
\delta &= \delta'_R \\
x_G &= x'_G L
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m &= m^{'}\frac{\rho}{2}L^3 \\
I_z &= I_z^{'}\frac{\rho}{2}
\end{aligned}
$$

sehingga Persamaan 2.5 menjadi

$$\mathbf{M}^{'}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{N}^{'}(u_0)\mathbf{v} = \mathbf{b}^{'}\delta_R^{'} \tag{2.8}$$

dengan

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}^{'} &= \begin{bmatrix} m^{'} - Y_{\dot{v}}^{'} & m^{'}x_G^{'} - Y_{\dot{r}}^{'} \\ m^{'}x_G^{'} - N_{\dot{v}}^{'} & I_z^{'} - N_{\dot{r}}^{'} \end{bmatrix} \\
\mathbf{N}(u_0)^{'} &= \begin{bmatrix} -Y_v^{'} & m^{'}u_0 - Y_r^{'} \\ -N_v^{'} & m^{'}x_G^{'}u_0 - N_r^{'} \end{bmatrix} \\
\mathbf{b}^{'} &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Kuantitas non dimensional dinyatakan dengan tanda ($'$). Bentuk normalisasi yang digunakan untuk persamaan gerak *steering* kapal adalah Sistem Prime I dari SNAME tahun 1950 (Fossen, 1999). Selanjutnya persamaan turunan koefisien hidrodinamika kapal oleh Clarke (1928) diberikan sebagai berikut (Dian, E.W., 2018) :

$$\frac{-Y_{\dot{v}}^{'}}{\pi(T/L)^2} = 1 + 0,16\frac{C_B B}{T} - 5,1(\frac{B}{L})^2 \tag{2.10}$$

$$\frac{-Y_{\dot{r}}^{'}}{\pi(T/L)^2} = 0,67(\frac{B}{T}) - 0,0033(\frac{B}{L})^2 \tag{2.11}$$

$$\frac{-N_{\dot{v}}^{'}}{\pi(T/L)^2} = 1,1(\frac{B}{L}) - 0,041(\frac{B}{T}) \tag{2.12}$$

$$\frac{-N_{\dot{r}}^{'}}{\pi(T/L)^2} = \frac{1}{12} + 0,017\frac{C_B B}{T} - 0,33(\frac{B}{L}) \tag{2.13}$$

$$\frac{-Y_{v}^{'}}{\pi(T/L)^2} = 1 + 0,4\frac{C_B B}{T} \tag{2.14}$$

$$\frac{-Y_{r}^{'}}{\pi(T/L)^2} = -\frac{1}{2} + 2,2(\frac{B}{L}) - 0,008(\frac{B}{T}) \tag{2.15}$$

$$\frac{-N_{v}^{'}}{\pi(T/L)^2} = \frac{1}{2} + 2,4\frac{T}{L} \tag{2.16}$$

$$\frac{-N_{r}^{'}}{\pi(T/L)^2} = \frac{1}{4} + 0,039(\frac{B}{T}) - 0,56(\frac{B}{L}) \tag{2.17}$$

2.3 Keterkontrolan dan Keteramatan Sistem

Sistem linier invarian-waktu diberikan sebagai berikut(Subiono, 2013):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Jika $\mathbf{x}(t)$ merupakan vektor berukuran $n \times 1$ maka sistem tersebut dikatakan terkontrol jika matriks keterkontrolan $\mathbf{M}_c$ memiliki nilai rank sama dengan n dengan

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

sedangkan suatu sistem dikatakan teramati jika matriks keteramatan $\mathbf{M}_o$ memiliki nilai rank sama dengan n dengan

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

2.4 Kalman Filter

Secara umum, algoritma Kalman Filter untuk sistem dinamik linier waktu diskrit adalah sebagai berikut(Grewal, M.S., Andrews, A.P., 2001).
Model sistem dan pengukuran:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k + \mathbf{G}_k\mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \\ \mathbf{x}_0 \sim N(\bar{\mathbf{x}}_0, \mathbf{P}_{\mathbf{x}_0}); \mathbf{w}_k &\sim N(0, \mathbf{Q}_k); \mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k) \end{aligned}$$

dengan $\mathbf{x}_k$ adalah vektor variabel keadaan *state* pada waktu k dan berukuran $n \times 1$ dengan vektor nilai awalnya yaitu $\mathbf{x}_0$ yang mempunyai *mean* $\bar{\mathbf{x}}_0$ dan kovarian awal $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_0}$. $\mathbf{u}_k$ adalah vektor input deterministik pada waktu k dan berukuran $m \times 1$. $\mathbf{w}_k$ adalah vektor *noise* pada sistem dengan *mean* $\bar{\mathbf{w}}_k = 0$ dan kovarian $\mathbf{Q}_k$. $\mathbf{z}_k$ adalah vektor variabel pengukuran dan berukuran $p \times 1$. $\mathbf{v}_k$ adalah *noise* pada pengukuran dengan *mean* $\bar{\mathbf{v}}_k = 0$ dan kovarian $\mathbf{R}_k$.
Diberikan nilai insialisasi awal $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_0} = 0$ dan $\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0$.

Tahap Prediksi:
Estimasi

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k$$

Kovarian error:

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1}^{-} = \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^T + \mathbf{G}_k\mathbf{Q}_k\mathbf{G}_k^T$$

Tahap koreksi:
Kalman Gain:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \bar{\mathbf{P}}_{k+1}^{-}\mathbf{H}_{k+1}^T(\mathbf{H}_{k+1}\bar{\mathbf{P}}_{k+1}^{-}\mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1}$$

Estimasi:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^{-})$$

Kovarian error:

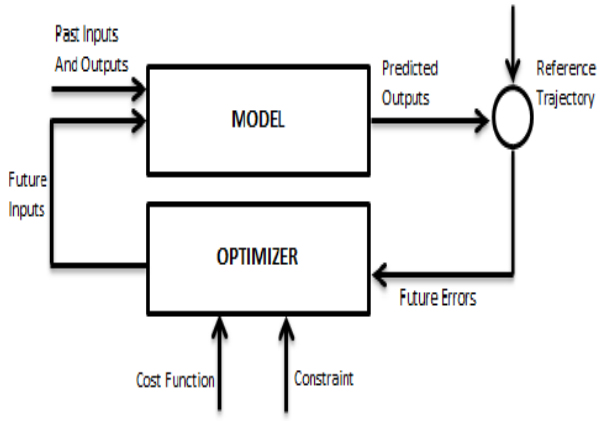
$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{H}_{k+1})\mathbf{P}_{k+1}^{-}.$$

Pada penelitian ini algoritma Kalman Filter digunakan untuk menggantikan prediksi yang dilakukan oleh metode Model Predictive Control.

2.5 *Model Predictive Control* (MPC)

Model Predictive Control atau MPC adalah suatu metode proses kontrol lanjutan yang banyak diterapkan pada proses industri. MPC juga dikenal sebagai *receding horizon control*, merupakan metode kontrol yang banyak digunakan untuk *advanced* kontrol dari sistem multivariabel dengan kendala pada variabel keadaan dan *input* kontrol. Dari sekian banyak algoritma *multivariable control*, MPC adalah salah satunya (Bordons, C., Camacho,E.F., 1999).

Langkah kerja dari MPC seperti yang terlihat pada Gambar 2.2 dapat diilustrasikan sebagai berikut. Awalnya, sistem telah memiliki model dan sistem. Data *input* dan *output* sebelumnya masuk melalui *port input* MPC. Dari *input* dan *output* ini dilakukan estimasi berdasarkan model sistem yang telah didefinisikan sebelumnya. Estimasi ini menghasilkan *output* yang disebut



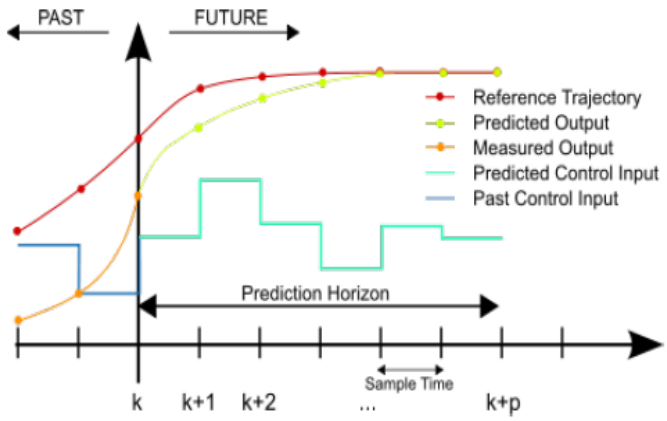
Gambar 2.2: Diagram blok MPC

predicted output yang kemudian nilainya dibandingkan dengan *reference trajectory* atau target nilai *output* (Putri, dkk., 2018).

Hasil perbandingan ini menghasilkan nilai galat yang disebut *future error*. *Future error* ini kemudian masuk ke dalam blok optimizer yang bekerja di dalam rentang kendala yang diberikan dengan tujuan untuk meminimalkan *cost function*. *Cost function* merupakan fungsi kriteria yang dibentuk dari fungsi kuadratik error antara nilai *predicted output* dengan *reference trajectory*.

MPC kemudian mengambil keputusan untuk meminimalkan *future error* tersebut dengan keputusan yang masih berada dalam kendala yang telah ditetapkan. Hasil dari blok ini disebut *future input* yang dikembalikan bersama-sama dengan data *input* dan *output*sebelumnya untuk di estimasi kembali. Perhitungan ini berlangsung seterusnya dan berulang-ulang. Karena adanya koreksi *input* berdasarkan *output* terprediksi inilah yang membuat MPC mampu bekerja menghasilkan respon yang semakin mendekati *reference trajectory* (Bordons, C., Camacho,E.F., 1999).

Keluaran proses dan pengendali terprediksi pada MPC menggunakan konsep *prediction horizon*, yaitu seberapa jauh prediksi ke depan yang diharapkan. Hal ini dapat diilustrasikan pada Gambar 2.3. Gambar 2.3 menunjukkan respon sistem saat diberi pengendali MPC. Dapat dilihat bahwa respon mampu menghasilkan nilai yang semakin baik, hal ini dikarenakan sinyal kendali yang mengalami perubahan setiap waktu berdasarkan error yang terjadi.



Gambar 2.3: Skema MPC.

2.5.1 Desain MPC

Permasalahan MPC pada umumnya berbentuk deterministik yang diberikan sebagai berikut:

$$\min_{u} J = \mathbf{x}_{k+N}^{T}\mathbf{S}_{N}\mathbf{x}_{k+N} + \sum_{j=1}^{N}(\mathbf{x}_{k+j}^{T}\mathbf{Q}_{j}\mathbf{x}_{k+j} + \mathbf{u}_{k+j-1}^{T}\mathbf{R}_{j}\mathbf{u}_{k+j-1}) \tag{2.18}$$

dengan kendala

$$\mathbf{x}_{k+j} = f(\mathbf{x}_{k+j-1}, \mathbf{u}_{k+j-1}) \tag{2.19}$$

$$\mathbf{x}_{k+j} \in \mathbf{X}_{j}(j = 1, ..., N) \tag{2.20}$$

$$\mathbf{u}_{k+j-1} \in \mathbf{U}_{j}(j = 1, ..., N) \tag{2.21}$$

Fungsi obyektif pada Persamaan 2.18 ialah mendapatkan nilai kontrol $\mathbf{u}$ yang optimal (*minimum*) untuk meminumkan nilai state $\mathbf{x}_{k+N}$ sekecil mungkin pada waktu akhir serta meminimumkan nilai state $\mathbf{x}_{k+j}$ dan input $\mathbf{u}_{k+j}$ sepanjang waktu horizon yang ditentukan. Pada persamaan 2.18, nilai *prediction horizon* (N_P) diasumsikan sama dengan nilai *control horizon* (N_C) yang didenotasikan dengan $N = N_P = N_C$. Adapun $\mathbf{S}$ dan $\mathbf{Q}$ pada Persamaan 2.18 merupakan matriks bobot error pada variabel state yang bersifat semidefinit positif, sedangkan $\mathbf{R}$ adalah matriks bobot pada kontrol *input* yang bersifat positif. Pada permasalahan ini diasumsikan bahwa matriks $\mathbf{S}$, $\mathbf{Q}$ dan $\mathbf{R}$ adalah simetris.

Selanjutnya Persamaan 2.19-2.21 menjelaskan tentang kendala pada variabel keadaan dan kontrol *input*. Persamaan 2.19 merupakan model sistem yang digunakan MPC untuk memprediksi perilaku masa depan suatu sistem. Dalam hal ini, prediksi akan dilakukan sebanyak nilai *prediction horizon* yang telah ditetapkan. Pada permasalahan tersebut, model sistem pada Persamaan 2.19 ialah model sistem non-linier dan berbentuk deterministik, artinya perilaku sistem kedepannya dapat diprediksi secara tepat. Operasi-operasi (*input*/*output*) yang terjadi didalamnya dapat ditentukan/ diketahui dengan pasti. Persamaan 2.20 merupakan kendala *state* yaitu nilai *state* $\mathbf{x}_{k+j}$ harus berada di dalam himpunan $\mathbf{X}_j$. Selanjutnya Persamaan 2.21 mendeksripsikan tentang kendala *input* pada permasalahan MPC dimana nilai input $\mathbf{u}_{k+j}$ harus berada di dalam himpunan $\mathbf{U}_j$ yang telah ditentukan.

Metode MPC merupakan metode yang mampu menyelesaikan permasalahan dengan model sistem linier diskrit. Model sistem yang digunakan pada Persamaan 2.19 masih berbentuk sistem non-linier. Oleh karena itu, model sistem pada Persamaan 2.19 harus diubah terlebih dahulu menjadi model sistem linier diskrit yang secara umum diberikan sebagai berikut (Wang, L., 2009)::

$$\mathbf{x}(k+1|k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k|k) \tag{2.22}$$

$$\mathbf{y}(k|k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k|k) \tag{2.23}$$

dengan

$\mathbf{x}(k\|k)$	:	vektor ruang keadaan berdimensi $n \times 1$ saat ke k
$\mathbf{y}(k\|k)$	:	vektor keluaran berdimensi n
$\mathbf{u}(k\|k)$	:	vektor masukan berdimensi $m \times 1$saat ke k
$\mathbf{A}$	:	matriks keadaan berdimensi $n \times n$
$\mathbf{B}$	:	matriks masukan berdimensi $n \times m$
$\mathbf{C}$	:	matriks keluaran berdimensi $n \times n$

$\mathbf{a}(m|n)$ menyatakan nilai $\mathbf{a}$ saat m yang diprediksi ketika dalam tahap n. Dalam penyederhanaan tulisan, $\mathbf{x}(k|k)$ dapat ditulis dalam bentuk $\mathbf{x}(k)$.

Dengan demikian permasalahan MPC dengan model sistem linier diskrit diberikan sebagai berikut:

$$\min_{u} J = \mathbf{x}_{k+N}^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_{k+N} + \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_{k+j}^T \mathbf{Q}_j \mathbf{x}_{k+j} + \mathbf{u}_{k+j-1}^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{k+j-1}) \tag{2.24}$$

dengan kendala

$$\mathbf{x}_{k+j|k} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+j-1|k} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k+j-1} \tag{2.25}$$

$$\mathbf{x}_{k+j} \in \mathbf{X}_j (j = 1, ..., N) \tag{2.26}$$

$$\mathbf{u}_{k+j-1} \in \mathbf{U}_j (j = 1, ..., N) \tag{2.27}$$

Persamaan 2.25 merupakan model sistem linier diskrit yang digunakan untuk memprediksi keadaan yang akan datang. Penyelesaian masalah MPC pada Persamaan 2.24-2.27 dimulai pada waktu k dengan nilai insialisasi state $\mathbf{x}_k$ dan akan menghasilkan barisan solusi nilai kontrol $\mathbf{u}$ yang optimal sebanyak N untuk waktu k:

$$\mathbf{u}_k^{k+N-1} = \{\mathbf{u}_k^*, \mathbf{u}_{k+1}^*, \cdots, \mathbf{u}_{k+N-1}^*\}.$$

dengan menggunakan prinsip receding horizon pada MPC, yakni nilai kontrol optimal yang digunakan pada model sistem adalah vektor awal dari penyelesaian optimalnya, sehingga nilai kontrol yang diberikan pada keluaran sistem adalah $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k^*$.

Selanjutnya jika terdapat lebih dari satu input, maka kendali dispesifikan msaing-masing input. Kendala-kendala tersebut yaitu:

1. Kendala pada variasi pertambahan variabel kendali ΔU_{max} dan batas bawah ΔU_{min} maka constrain dispesifikan dalam bentuk

$$\Delta U_{min} \leq \Delta U \leq \Delta U_{max}$$

2. Kendala pada amplitude variabel kendali u

$$U_{min} \leq U \leq U_{max}$$

3. Kendala output

$$Y_{min} \leq Y \leq Y_{max}$$

Penyelesaian masalah sistem dengan kendala berupa pertidaksamaan linier menggunakan metode *quadratic programming* sehingga diperoleh fungsi objektif dalam bentuk lain, yaitu:
minimum

$$J = \frac{1}{2}x^T Ex + x^T F$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} Px &\leq h \\ Yj &= b \end{aligned}$$

dengan matriks E, F, P, h, Y dan b merupakan matriks dan vektor yang cocok dalam masalah *quadratic programming*.

BAB 3
METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan tahapan tahapan sistematis yang dilakukan dalam pengerjaan Tesis. Tahapan penelitian dalam Tesis ini terdiri atas enam tahap, yaitu studi literatur; formulasi modifikasi MPC-KF; desain kendali menggunakan modifikasi MPC-KF; simulasi dan analisis hasil simulasi; penarikan kesimpulan; penulisan laporan Tesis.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan studi referensi mengenai model gerak kapal, metode kalman filter, metode model predictive control, kendala probabilistik. Referensi yang digunakan adalah buku-buku, tesis dan paper-paper dalam jurnal ilmiah yang berkaitan dengan topik pada Tesis ini.

3.2 Formulasi Modifikasi MPC-KF

Pada tahap ini dilakukan beberapa langkah dalam formulasi algoritma modifikasi MC-KF. Langkah-langkah tersebut diberikan sebagai berikut:

1. Penerapan Kalman Filter pada proses prediksi MPC
   Pada tahap ini Kalman Filter digunakan untuk menggantikan prediksi yang dilakukan oleh MPC. Adapun kovarians yang didapat dari Kalman Filter akan berpengaruh pada kendala batas probabilistik yang telah diubah ke dalam bentuk deterministik.

2. Pengubahan kendala variabel keadaan dari bentuk probabilistik menjadi deterministik
   Keberadaan *noise* pada sistem menyebabkan perubahan model dari deterministik menjadi stokastik, sehingga kendala batas pada MPC akan memiliki bentuk probabilistik. Pada tahap ini, kendala probabilistik tersebut akan diubah ke dalam bentuk deteministik berdasarkan paper. Hal ini dilakukan agar permasalahan stokastik tersebut tetap dapat diselesaikan menggunakan MPC.

3. Pengubahan fungsi obyektif dari bentuk ekspektasi menjadi deterministik

   Pada tahap ini dilakukan pembentukan fungsi obyektif secara umum pada permasalahan deterministik MPC, yaitu meminumkan error antara keluaran sistem dan referensi yang diberikan serta meminimumkan nilai variabel kendali. Model sistem berbentuk stokastik menyebabkan perubahan fungsi obyektif menjadi sebuah ekspektasi. Selanjutnya dilakukan pengubahan fungsi obyektif dari bentuk ekspektasi ke dalam bentuk deterministik sehingga dapat diselesaikan dalam modifikasi MPC-KF.

3.3 Desain Kendali Modifikasi MPC-KF pada Permasalahan Kendali Haluan Kapal

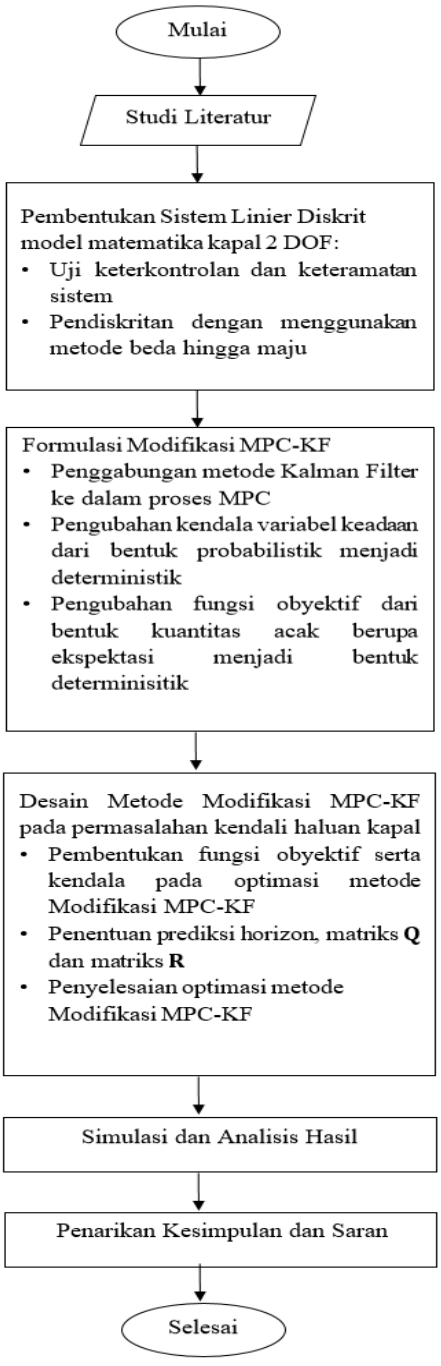
Pada tahap ini dilakukan beberapa langkah dalam penerapan desain kendali modifikasi MPC-KF pada masalah kendali haluan kapal. Langkah pertama ialah pengkajian penurunan model dinamik kapal dari Davidson dan Schiff. Selanjutnya dilakukan pendiskritan model gerak kapal menggunakan metode beda hingga maju. Setelah itu langkah yang dilakukan adalah penentuan fungsi objektif yang akan digunakan dalam penerapan modifikasi MPC-KF sebagai fungsi tujuan dan penentuan kendala batas yang akan digunakan dalam penerapan masalah kendali haluan kapal. Penentuan fungsi objektif pada tesis ini adalah meminimumkan error antara keluaran sistem berupa sudut *yaw* dan referensi sudut haluan yang diberikan. Langkah selanjutnya adalah penyusunan fungsi objektif dan kendala batas yang ditentukan sebelumnya ke dalam bentuk *quadratic programming*. Kendala batas yang disusun terdiri dari kendala batas pertidaksamaan dan persamaan.

3.4 Simulasi dan Analisis Hasil Simulasi

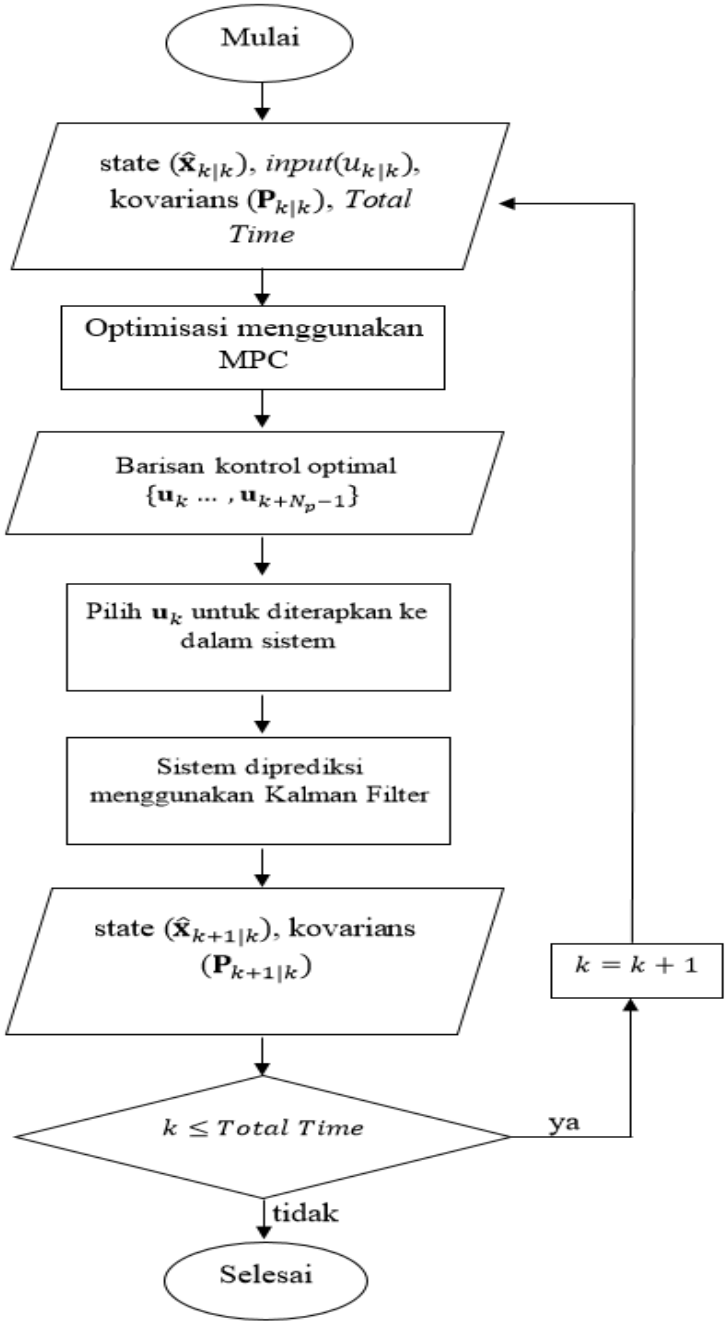
Pada tahap ini dilakukan simulasi hasil penerapan modifikasi MPC-KF pada model dinamik gerak kapal yang diperoleh dengan menggunakan software MATLAB dan menganalisis hasil simulasi yang diperoleh.

3.5 Penulisan Laporan Tesis

Pada tahap ini dilakukan penulisan laporan Tesis setelah melakukan simulasi dan menjawab permasalahan yang ada pada topik Tesis.



Gambar 3.1: Diagram Alir Penelitian.



Gambar 3.2: Diagram Alir Modifikasi MPC-KF.

BAB 4
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai penerapan modifikasi MPC-KF pada permasalahan kendali haluan kapal. Pembahasan diawali dengan pengkajian model matematika kapal 2 DOF dengan gaya eksternal berupa *rudder*. Kemudian dilakukan uji keterkontrolan dan keteramatan dari sistem linier untuk mengetahui bahwa sistem dapat dikontrol oleh *rudder* sebagai *input*. Selanjutnya dilakukan penurunan formulasi algoritma modifikasi MPC-KF sehingga dapat diterapkan pada permasalahan sistem stokastik secara umum. Tahap terakhir dari bab ini yaitu dilakukan perancangan sistem kendali MPC dan modifikasi MPC-KF untuk selanjutnya dilakukan simulasi dan analisis dari respon sistem untuk model linier stokastik setelah diberikan sistem kendali. Penyelesaian penerapan modifikasi MPC-KF disimulasikan menggunakan *software* MATLAB.

4.1 Model Matematika Dinamika Kapal

Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini adalah model kapal Davidson dan Schiff seperti pada Persamaan 2.8 dengan koefisien hidrodinamika pada Persamaan 2.10-2.17. Model kapal Davidson dan Schiff merupakan model kapal 2 DOF dengan sistem yang linier dan hanya memperhatikan gerak *sway* dan *yaw* pada kapal (Fossen, 1999). Adapun pada Persamaan 2.8 dipertimbangkan bahwa gaya eksternal dipengaruhi oleh *rudder*. Dalam Tesis ini, data kapal yang digunakan sebagai model adalah KRI Corvet Kelas Sigma. Adapun data parameternya dapat dilihat pada Tabel 4.1.

Berdasarkan parameter yang terdapat pada Tabel 4.1 maka didapatkan nilai koefisien hidrodinamika kapal pada Persamaan 2.10-2.17 yang telah berbentuk non-dimensional. Berikut merupakan cara perhitungan untuk mendapatka massa tambahan dan momen inersia menggunakan *Theory Strip* (Fossen, 1999).

Tabel 4.1: Data Parameter KRI Corvet Kelas Sigma

Nama	Simbol	Ukuran
Lenght the Ship	L	$101,07$
Breadth	B	14
Draft Depth	T	$3,7$
Mass of Ship	m	2423000
Velocity	U	$15,4$
Coefficient Block	C_B	$0,65$
Nominal x coordinate of Gravity	x_G	$5,25$
Rudder Area	A_δ	1024
Sea Water Density	ρ	$5,7224$

Sumber : (Dian, E.W., 2018)

$Y_{\dot{v}}^{'}$ dari Persamaan 2.10 didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{-Y_{\dot{v}}^{'}}{\pi(T/L)^2} &= 1 + 0,16\frac{C_B B}{T} - 5,1(\frac{B}{L})^2 \\
\frac{-Y_{\dot{v}}^{'}}{3,14(3,7/101,07)^2} &= 1 + 0,16\frac{0,65(14)}{3,7} - 5,1(\frac{14}{101,07})^2 \\
-Y_{\dot{v}}^{'} &= 5,45505886 \times 10^{-3} \\
Y_{\dot{v}}^{'} &= -5,45505886 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

$Y_{\dot{r}}^{'}$ dari Persamaan 2.11 didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{-Y_{\dot{r}}^{'}}{\pi(T/L)^2} &= 0,67(\frac{B}{T}) - 0,0033(\frac{B}{L})^2 \\
\frac{-Y_{\dot{r}}^{'}}{3,14(3,7/101,07)^2} &= 0,67(\frac{14}{101,07}) - 0,0033(\frac{14}{3,7})^2 \\
-Y_{\dot{r}}^{'} &= 0,04556080 \times 0,00420812 \\
Y_{\dot{r}}^{'} &= -1,918227595 \times 10^{-4}
\end{aligned}$$

Mendapatkan $Y_{v}^{'}$ dari Persamaan 2.14 dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{-Y_{v}^{'}}{\pi(T/L)^2} &= 1 + 0,4\frac{C_B B}{T} \\
\frac{-Y_{v}^{'}}{3,14(3,7/101,07)^2} &= 1 + 0,4\frac{0,65(14)}{3,7} \\
-Y_{v}^{'} &= 0,00420812 \times 1,98378378 \\
Y_{v}^{'} &= -8,35224307 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

$Y_r^{'}$ dari Persamaan 2.15 didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{-Y_r^{'}}{\pi(T/L)^2} &= -\frac{1}{2} + 2,2(\frac{B}{L}) - 0,008(\frac{B}{T}) \\
\frac{-Y_r^{'}}{3,14(3,7/101,07)^2} &= -\frac{1}{2} + 2,2(\frac{14}{101,07}) - 0,08(\frac{14}{3,7}) \\
-Y_r^{'} &= 0,00420812 \times (-0,22553098) \\
Y_r^{'} &= 2,0965548 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Mendapatkan $N_{\dot{v}}^{'}$ dari Persamaan 2.12 dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{-N_{\dot{v}}^{'}}{\pi(T/L)^2} &= 1,1(\frac{B}{L}) - 0,041(\frac{B}{T}) \\
\frac{-N_{\dot{v}}^{'}}{3,14(3,7/101,07)^2} &= 1,1(\frac{14}{101,07}) - 0,041(\frac{14}{3,7}) \\
-N_{\dot{v}}^{'} &= 0,00420812 \times (-0,00276549) \\
N_{\dot{v}}^{'} &= 1,16434299 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

$N_{\dot{r}}^{'}$ dari Persamaan 2.13 didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{-N_{\dot{r}}^{'}}{\pi(T/L)^2} &= \frac{1}{12} + 0,017\frac{C_B B}{T} - 0,33(\frac{B}{L}) \\
\frac{-N_{\dot{r}}^{'}}{3,14(3,7/101,07)^2} &= \frac{1}{12} + 0,017\frac{0,65(14)}{3,7} - 0,33(\frac{14}{101,07}) \\
-N_{\dot{r}}^{'} &= 0,00420812 \times (-0,82943325) \\
N_{\dot{r}}^{'} &= 3,344345406 \times 10^{-4}
\end{aligned}$$

Mendapatkan $N_v^{'}$ dari Persamaan 2.16 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{-N_v^{'}}{\pi(T/L)^2} &= \frac{1}{2} + 2,4\frac{T}{L} \\
\frac{-N_v^{'}}{3,14(3,7/101,07)^2} &= \frac{1}{2} + 2,4\frac{3,7}{101,07} \\
-N_v^{'} &= 0,58785990 \times 0,00420812 \\
N_v^{'} &= -2,4750422 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

$N_r^{'}$ dari Persamaan 2.17 didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{-N_r^{'}}{\pi(T/L)^2} &= \frac{1}{4} + 0,039(\frac{B}{T}) - 0,56(\frac{B}{L}) \\
\frac{-N_r^{'}}{3,14(3,7/101,07)^2} &= \frac{1}{4} + 0,039(\frac{14}{3,7}) - 0,56(\frac{14}{101,07}) \\
-N_r^{'} &= 0,00420812 \times 0,31999757 \\
N_r^{'} &= -1,34727256 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Tabel 4.2: Koefisien Hidrodinamika Kapal.

Koefisien-N	**Koefisien-Y**
$N_{\dot{v}}^{'} = 1,16434299 \times 10^{-5}$	$Y_{\dot{v}}^{'} = -5,45505886 \times 10^{-3}$
$N_{\dot{r}}^{'} = 3,344345406 \times 10^{-4}$	$Y_{\dot{r}}^{'} = -1,918227595 \times 10^{-4}$
$N_v^{'} = -2,4750422 \times 10^{-3}$	$Y_v^{'} = -8,35224307 \times 10^{-3}$
$N_r^{'} = -1,34727256 \times 10^{-3}$	$Y_r^{'} = 2,0965548 \times 10^{-3}$

Hasil dari perhitungan koefisien hidrodinamika kapal dapat dilihat pada Tabel 4.2. Berdasarkan hasil perhitungan koefisien hidrodinamika kapal dalam Tabel 4.2, serta dengan mensubstitusikan nilai massa kapal yang telah nondimensional yaitu $m^{'} = 4,58370500 \times 10^{-3}$ dan pusat massa kapal yang telah nondimensional adalah $x_G^{'} = 5,44177303 \times 10^{-2}$, serta Inersia kapal terhadap sumbu z adalah $I_z^{'} = 8,42437900 \times 10^{-5}$, dapat diperoleh koefisien matriks dinamika kapal model Davidson dan Schiff yaitu $\mathbf{M}^{'}$,$\mathbf{N}^{'}$ dan $\mathbf{b}^{'}$ pada Persamaan 2.9. Koefisien matriks $\mathbf{M}^{'}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{'} &= \begin{bmatrix} m^{'} - Y_{\dot{v}}^{'} & m^{'}x_G^{'} - Y_{\dot{r}}^{'} \\ m^{'}x_G^{'} - N_{\dot{v}}^{'} & I_z^{'} - N_{\dot{r}}^{'} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}^{'} &= \begin{bmatrix} 0,00933706 & 0,00044117 \\ 0,00023780 & 0,00433280 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Selanjutnya koefisien matriks $\mathbf{N}^{'}$ didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^{'} &= \begin{bmatrix} -Y_v^{'} & m^{'}u_0 - Y_r^{'} \\ -N_v^{'} & m^{'}x_G^{'}u_0 - N_r^{'} \end{bmatrix} \\
\mathbf{N}^{'} &= \begin{bmatrix} -0,00834800 & 0,00363465 \\ -0,00247379 & 0,00159603 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Selanjutnya menghitung koefisien matriks $\mathbf{b}^{'}$ didapatkan sebagai berikut:

$$\mathbf{b}^{'} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Setelah didapatkan koefisien matriks dinamika kapal yaitu $\mathbf{M}^{'}$,$\mathbf{N}^{'}$ dan $\mathbf{b}^{'}$, model dinamika kapal Davidson dan Schiff yang telah berbentuk nondimensional pada Persamaan 2.8 dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{M}^{'-1}\mathbf{N}^{'}(u_0)\mathbf{v} + \mathbf{M}^{'-1}\mathbf{b}^{'}\delta_R^{'} \\ \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,00933706 & 0,00044117 \\ 0,00023780 & 0,00433280 \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} -0,00834800 & 0,00363465 \\ -0,00247379 & 0,00159603 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0,00933706 & 0,00044117 \\ 0,00023780 & 0,00433280 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta_R \end{aligned} \tag{4.1}$$

Berdasarkan Persamaan 4.1 diperoleh ruang keadaan untuk model dinamik gerak kapal yaitu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c\mathbf{x} + \mathbf{B}_c\mathbf{u}$ dengan $\mathbf{x} = [v, r]^T$, $\mathbf{u} = \delta_R$ sehingga Persamaan 4.1 dapat dituliskan sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0,6137 & -0,1018 \\ -5,0967 & -3,4086 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -95,5 \\ 2228,9 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

Tujuan permasalahan pada Tesis ini ialah mengendalikan sudut hadap kapal sehingga mampu mengikuti sudut referensi, sehingga dibutuhkan gerak rotasi pada model dinamik gerak kapal. Pada Tesis ini diasumsikan hanya memperhatikan sudut *yaw* kapal yang dinotasikan sebagai ψ. Laju perubahan sudut *yaw* dinotasikan dengan $\dot{\psi} = r$ dimana r adalah kecepatan sudut *yaw* kapal, sehingga ruang keadaan pada model gerak kapal menjadi $\mathbf{x} = [v, r, \psi]^T$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,6137 & -0,1018 & 0 \\ -5,0967 & -3,4086 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ r \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -95,5 \\ 2228,9 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -0,6137 & -0,1018 & 0 \\ -5,0967 & -3,4086 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -95,5 \\ 2228,9 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \end{aligned} \tag{4.2}$$

dengan *output* sistem diberikan sebagai berikut:

$$y = \mathbf{C}_c\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{4.3}$$

4.1.1 Uji Keterkontrolan dan Keteramatan

Sebelum melakukan kendali pada sistem yang direpresentasikan oleh model, sistem harus diketahui terlebih dahulu keterkontrolan dan keteramatanya. Keterkontrolan dan keteramatan mempunyai peran penting dalam perancangan pengendali, uji keterkontrolan dan keteramatan ini menentukan bisa tidaknya dilanjutkan perancangan sistem kendali.

1. Uji keterkontrolan dilakukan dengan cara menghitung jumlah *rank* dari pasangan matriks $\mathbf{A}_c$ dan $\mathbf{B}_c$ pada sistem Persamaan 4.2. Suatu sistem dikatakan terkontrol ketika *rank* dari matriks keterkontrolannya sama dengan jumlah variabel keadaan sistem tersebut (Subiono, 2013).

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c\mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c^2\mathbf{B}_c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -95,4545 & -168,2723 & 827,0105 \\ 2228,8927 & -7110,8309 & 25095,3687 \\ 0 & 2228,8927 & -7110,8309 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Matriks pada Persamaan 4.4 merupakan matriks keterkontrolan dari sistem dinamik linier gerak kapal. Dapat diketahui bahwa $rank(\mathbf{M}_c) = 3$, maka sistem pada Persamaan 4.2 dalam keadaan terkontrol oleh *rudder*.

2. Uji keteramatan dilakukan dengan cara menghitung jumlah *rank* dari pasangan matriks $\mathbf{A}_c$ dan $\mathbf{C}_c$ pada sistem Persamaan 4.2 dan 4.3. Suatu sistem dikatakan teramati ketika *rank* dari matriks keteramatannya sama dengan jumlah variabel keadaan sistem tersebut (Subiono, 2013).

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c\mathbf{A}_c \\ \mathbf{C}_c\mathbf{A}_c^2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5,0967 & -3,4086 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Matriks pada Persamaan 4.6 merupakan matriks keteramatan dari sistem dinamik linear gerak kapal. Dapat diketahui bahwa $rank(\mathbf{M}_o) = 3$, maka sistem dalam keadaan teramati. Dengan demikian dapat dilakukan perancangan sistem kendali pada model sistem gerak kapal.

4.1.2 Diskritisasi Model

Model yang digunakan pada permasalahan MPC adalah model linier diskrit sehingga model gerak kapal pada Persamaan 4.2 harus didiskritkan terlebih dahulu. Pada Tesis ini pendiskritan dilakukan menggunakan metode beda hingga maju. Adapun hasil diskritisasi Persamaan 4.2 diberikan sebagai beikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1(k+1)-x_1(k)}{\Delta t} \\ \frac{x_2(k+1)-x_2(k)}{\Delta t} \\ \frac{x_3(k+1)-x_3(k)}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6137 & -0,1018 & 0 \\ -5,0967 & -3,4086 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -95,5 \\ 2228,9 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1)-x_1(k) \\ x_2(k+1)-x_2(k) \\ x_3(k+1)-x_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6137\Delta t & -0,1018\Delta t & 0\Delta t \\ -5,0967\Delta t & -3,4086\Delta t & 0\Delta t \\ 0\Delta t & 1\Delta t & 0\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -95,5\Delta t \\ 2228,9\Delta t \\ 0\Delta t \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6137\Delta t+1 & -0,1018\Delta t & 0\Delta t \\ -5,0967\Delta t & -3,4086\Delta t+1 & 0\Delta t \\ 0\Delta t & 1\Delta t & 0\Delta t+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -95,5\Delta t \\ 2228,9\Delta t \\ 0\Delta t \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

Dengan mengambil waktu sampling $\Delta t = 0,1$ dan pembulatan maksimal 4 angka dibelakang koma, didapatkan persamaan diskrit model matematika gerak kapal sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9386 & -0,0102 & 0 \\ -0,5097 & 0,6591 & 0 \\ 0 & 0,1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9.550 \\ 222.89 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \tag{4.7}$$

dengan *output* sistem

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \tag{4.8}$$

Sistem Persamaan 4.7 dan 4.8 merupakan model sistem gerak kapal yang ideal karena keberadaan *noise* yang melekat pada model sistem tidak dipertimbangkan. Pada Tesis ini *noise* yang melekat pada model sistem dan *output* sistem dipertimbangkan sehingga model gerak kapal menjadi sebagai berikut:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}_k \tag{4.9}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}_k \tag{4.10}$$

Model gerak kapal dan *output* sistem pada Persamaan 4.9 dan 4.10 merupakan model sistem berbentuk stokastik. Variabel keadaan $\mathbf{x}$ pada Persamaan 4.9 diasumsikan berdistribusi Normal dengan *mean* $\hat{\mathbf{x}}$ dan *kovarians* $\mathbf{P}$. Pada Persamaan 4.9 dan 4.10 juga diperhatikan *noise* model sistem dan *noise* pengukuran yang diasumsikan berdistribusi *white noise gaussian*. *Noise* model sistem dinotasikan sebagai $\mathbf{w}_k$ yang berdistribusi Normal dengan *mean* 0, *kovarians* τ dan *noise* pengukuran dinotasikan sebagai $\mathbf{v}_k$ yang berdistribusi Normal dengan *mean* 0 dan *kovarians* Λ. Pada Tesis ini, model diskrit stokastik pada Persamaan 4.9 dan *output* sistem pada Persamaan 4.10 digunakan dalam permasalahan kendali haluan kapal menggunakan metode modifikasi MPC-KF.

4.2 Desain Sistem Kendali MPC pada Permasalahan Kendali Haluan Kapal

Pada sub bab ini dijelaskan mengenai formulasi fungsi obyektif dan kendala batas dalam bentuk kuadratik programming pada sistem kendali MPC yang diterapkan pada permasalahan kendali haluan kapal dengan model sistem gerak kapal berbentuk deterministik. Setelah diperoleh bentuk kuadratik programing, dicari penyelesaian fungsi obyektif beserta kendala batas menggunakan *software* MATLAB. *Toolbox* MATLAB yang digunakan untuk menyelesaikan bentuk kuadratik *programming* adalah *quadprog*.

4.2.1 Prediksi Variabel Keadaan dan Keluaran pada MPC

Dalam desain MPC pada permasalahan kendali haluan kapal, prediksi variabel keadaan dan keluaran dilakukan pada model sistem linier diskrit seperti pada Persamaan 4.7 dan 4.8. Asumsi bahwa pada waktu k, vektor variabel keadaan $\mathbf{x}(k)$ didapat melalui pengukuran, variabel keadaan $\mathbf{x}(k)$ memberikan informasi *plant* saat ini. Trayektori prediksi *input* dinotasikan oleh

$$\{\mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k+1), \cdots, \mathbf{u}(k+N_C-1)\}$$

dimana N_C adalah kontrol horizon. Dengan diberikan informasi $\mathbf{x}(k)$, prediksi variabel keadaan dapat diprediksi sebanyak prediksi horizon N_P. Dinotasikan prediksi variabel keadaan sebagai

$$\{\mathbf{x}(k+1|k), \mathbf{x}(k+2|k), \cdots, \mathbf{x}(k+N_P|k)\}$$

dimana $\mathbf{x}(k+m|k)$ adalah prediksi variabel keadaan pada $k+m$ dengan diberikan informasi *plant* saat ini $\mathbf{x}(k)$. Berdasarkan model ruang keadaan pada Persamaan 4.7 dengan matriks keadaan $\mathbf{A}$, matriks *input* $\mathbf{B}$ dan matriks *output* $\mathbf{C}$ dan dipilih $N_C = N_P$, maka prediksi variabel keadaan dihitung menggunakan himpunan prediksi *input* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\
\mathbf{x}(k+2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\
&= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\
&\vdots \\
\mathbf{x}(k+N_P) &= \mathbf{A}^{N_P}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^{N_P-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{A}^{N_P-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\
&+ \cdots + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+N_P-1)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Kemudian prediksi keluaran dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(k+1) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k+1) \\
&= \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)) \\
&= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}(k+2) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k+2) \\
&= \mathbf{C}(\mathbf{A}^2\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1)) \\
&= \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\
&\vdots \\
\mathbf{y}(k+N_P) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k+N_P) \\
&= \mathbf{C}(\mathbf{A}^{N_P}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}^{N_P-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{A}^{N_P-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) + \cdots + \\
&\quad \mathbf{B}\mathbf{u}(k+N_P-1)) \\
&= \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_P}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_P-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_P-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) + \cdots + \\
&\quad \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+N_P-1)) \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya untuk membentuk formula kuadratik *programming*, maka didefinisikan vektor keluaran dan *input* sistem sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k+1) & \mathbf{y}(k+2) & \cdots & \mathbf{y}(k+N_P) \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) & \mathbf{u}(k+1) & \cdots & \mathbf{u}(k+N_P-1) \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

ukuran dari $\mathbf{Y}$ dan $\mathbf{U}$ berturut-turut adalah $m_1 \cdot N_P \times 1$ dan $n_1 \cdot N_P \times 1$ dimana m_1 adalah jumlah variabel keluaran dan n_1 adalah jumlah variabel *input* atau kontrol. Berdasarkan Persamaan 4.11 dan 4.12, maka $\mathbf{Y}$ dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks berikut:

$$
\mathbf{Y} = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \Phi\mathbf{U} \qquad (4.13)
$$

dengan

$$
\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_P} \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{B} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_P-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_P-2}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_P-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{B} \end{bmatrix}
$$

Selanjutnya prediksi keluaran pada Persamaan 4.13 disubstitusikan ke dalam fungsi obyektif yang dibahas pada sub bab selanjutnya.

4.2.2 Formulasi Fungsi Obyektif pada MPC

Sebagaimana yang telah dijelaskan sebelumnya pada sub bab 4.2, maka formulasi fungsi obyektif digunakan untuk mencari nilai optimum (minimum) dari fungsi tujuan MPC. Pada sub bab ini dibahas tentang formulasi untuk menentukan fungsi obyektif yang digunakan untuk merancang desain kontrol pada permasalahan kendali haluan kapal. Pada Tesis ini sinyal kontrol bertujuan untuk meminimumkan error dari selisih antara sudut referensi dengan keluaran sistem berupa sudut *yaw* dan juga untuk meminumkan sinyal kontrol yang dihasilkan. Tujuan ini dapat dituliskan dalam bentuk persamaan matematika sebagai berikut:

$$J(k) = \sum_{j=1}^{N_p} \quad [(\mathbf{y}_r(k+j|k) - \mathbf{y}(k+j|k))^T \mathbf{Q}_j (\mathbf{y}_r(k+j|k) - \mathbf{y}(k+j|k)) \\ + \mathbf{u}(k+j-1|k)^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}(k+j-1|k)] \tag{4.14}$$

dengan $\mathbf{y}(k+j|k)$ adalah prediksi *internal plant output* dimana sistem ini masih menggunakan model sistem deterministik pada Persamaan 4.7, $\mathbf{y}_r(k+j|k)$ adalah sudut referensi yang diinginkan, kemudian $\mathbf{u}(k+j|k)$ adalah variabel *input* pada waktu kedepan, dengan $k+j|k$ mengartikan bahwa dilakukan prediksi ke-$k+j$ menggunakan pada waktu ke-k. Kemudian $\mathbf{Q}_j$ dan $\mathbf{R}_j$ adalah matriks simetri definit positif.

Selanjutnya bentuk umum fungsi obyektif pada Persamaan 4.14 dapat dituliskan menjadi persamaan berikut:

$$J = (\mathbf{R}_s - \mathbf{Y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{R}_s - \mathbf{Y}) + \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U} \tag{4.15}$$

dimana

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_r(k+1) \\ \mathbf{y}_r(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_r(k+N_P) \end{bmatrix}; \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{Q}_{N_P} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{R}_{N_P} \end{bmatrix}$$

dengan mensubstitusikan Persamaan 4.13 ke dalam Persamaan 4.15, maka diperoleh

$$\begin{aligned} J &= (\mathbf{R}_s - [\mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \Phi\mathbf{U}])^T\mathbf{Q}(\mathbf{R}_s - [\mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \Phi\mathbf{U}]) + \mathbf{U}^T\mathbf{R}\mathbf{U} \\ &= (\mathbf{R}_s - \mathbf{F}\mathbf{x}(k) - \Phi\mathbf{U})^T\mathbf{Q}(\mathbf{R}_s - \mathbf{F}\mathbf{x}(k) - \Phi\mathbf{U}) + \mathbf{U}^T\mathbf{R}\mathbf{U} \\ &= \mathbf{R}_s^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s - \mathbf{R}_s^T\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{x}(k) - \mathbf{R}_s^T\mathbf{Q}\Phi\mathbf{U} - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{F}^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s + \\ &\quad \mathbf{x}^T(k)\mathbf{F}^T\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{F}^T\mathbf{Q}\Phi\mathbf{U} - \mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s + \mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \\ &\quad \mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\Phi\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{R}\mathbf{U} \\ &= \mathbf{R}_s^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s - 2\mathbf{x}^T(k)\mathbf{F}^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s - 2\mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{F}^T\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \\ &\quad 2\mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{U}^T(\Phi^T\mathbf{Q}\Phi + \mathbf{R})\mathbf{U} \end{aligned}$$

Selanjutnya suku-suku yang tidak mengandung variabel $\mathbf{U}$ dapat dihilangkan dari proses optimasi, sehingga diperoleh nilai J sebagai berikut:

$$\begin{aligned} J &= -2\mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s + 2\mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{U}^T(\Phi^T\mathbf{Q}\Phi + \mathbf{R})\mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^T(2\Phi^T\mathbf{Q}[\mathbf{F}\mathbf{x}(k) - \mathbf{R}_s]) + \frac{1}{2}\mathbf{U}^T(2[\Phi^T\mathbf{Q}\Phi + \mathbf{R}])\mathbf{U} \end{aligned}$$

dengan memisalkan $\mathbf{f} = 2\Phi^T\mathbf{Q}[\mathbf{F}\mathbf{x}(k) - \mathbf{R}_s]$ dan $\mathbf{H} = 2[\Phi^T\mathbf{Q}\Phi + \mathbf{R}]$, maka diperoleh

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{H}\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{f} \tag{4.16}$$

4.2.3 Formulasi Kendala

Pada sub bab ini dijelaskan formulasi kendala yang diberikan pada permasalahan kendali haluan kapal. Secara umum, kendala dapat dibedakan menjadi dua macam yakni kendala pada *input* dan kendala pada variabel keadaan. Pada permasalahan kendali haluan kapal, kendala pada *input* dan kendala pada variabel keadaan yang diberikan mempunyai batas minimum dan maksimum yang harus dipenuhi sebagai berikut:

$$\mathbf{u}^{min} \leqslant \mathbf{u}(k+j-1) \leqslant \mathbf{u}^{max} \tag{4.17}$$

$$\Delta\mathbf{u}^{min} \leqslant \Delta\mathbf{u}(k+j-1) \leqslant \Delta\mathbf{u}^{max} \tag{4.18}$$

$$\mathbf{x}^{min} \leqslant \mathbf{x}(k+j) \leqslant \mathbf{x}^{max}, j = 1, 2, 3, \cdots, N_P \tag{4.19}$$

kendala-kendala 4.17, 4.18, 4.19 akan diformulasikan menjadi kendala dalam bentuk quadratik *programming*.

4.2.3.1 Formulasi Kendala Input

Kendala *input* pada Persamaan 4.17 dapat dijabarkan dalam dua pertidaksamaan berikut:

$$-\mathbf{u}(k+j-1) \leqslant -\mathbf{u}^{min} \tag{4.20}$$

$$\mathbf{u}(k+j-1) \leqslant \mathbf{u}^{max} \tag{4.21}$$

Persamaan 4.20 dan 4.21 dapat diubah menjadi bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k+j-1) \leqslant \begin{bmatrix} -\mathbf{u}^{min} \\ \mathbf{u}^{max} \end{bmatrix}; j = 1, 2, 3, \cdots, N_P \tag{4.22}$$

Dibentuk menjadi seperti Persamaan 2... , maka diperoleh matriks berikut:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\mathbf{u}^{min} \\ \mathbf{u}^{max} \end{bmatrix}$$

untuk $j = 1, 2, 3, \cdots, N_P$ maka diperoleh bentuk kendala kuadratik programming dari 4.83.

$$\mathbf{S}_1\mathbf{U} \leqslant \mathbf{T}_1 \tag{4.23}$$

dimana

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{S} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{S} \end{bmatrix}; \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

4.2.3.2 Formulasi Kendala Increment *Input*

Pada beberapa penelitian tentang MPC, formulasi kendala increment *input* digunakan untuk mengetahui perubahan nilai *input* dari waktu ke waktu. Kendala pada Persamaan 4.18 dapat diekspresikan dalam dua pertidaksamaan berikut:

$$-\Delta\mathbf{u}(k+j-1) \leqslant -\Delta\mathbf{u}^{min} \tag{4.24}$$

$$\Delta\mathbf{u}(k+j-1) \leqslant \Delta\mathbf{u}^{max} \tag{4.25}$$

Kemudian kendala pada Persamaan 4.24 dan 4.25 diiterasi untuk $j = 1, 2, 3, \cdots, N_P$ sehingga diperoleh bentuk berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(k) &\leqslant \Delta\mathbf{u}^{max} + \mathbf{u}(k-1) \\
-\mathbf{u}(k) &\leqslant -\Delta\mathbf{u}^{min} - \mathbf{u}(k-1) \\
\mathbf{u}(k+1) - \mathbf{u}(k) &\leqslant \Delta\mathbf{u}^{max} \\
-\mathbf{u}(k+1) + \mathbf{u}(k) &\leqslant -\Delta\mathbf{u}^{min} \\
&\vdots \\
\mathbf{u}(k+N_P-1) - \mathbf{u}(k+N_P-2) &\leqslant \Delta\mathbf{u}^{max} \\
-\mathbf{u}(k+N_P-1) + \mathbf{u}(k+N_P-2) &\leqslant -\Delta\mathbf{u}^{min}
\end{aligned}$$

atau dapat dituliskan dalam bentk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-\mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-\mathbf{I} & \mathbf{I} & \cdots & 0 & 0 \\
\mathbf{I} & -\mathbf{I} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \mathbf{I} & -\mathbf{I}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{u}(k+1) \\ \mathbf{u}(k+2) \\ \mathbf{u}(k+3) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+N_P-1)
\end{bmatrix}
\leqslant
\begin{bmatrix}
\Delta\mathbf{u}^{max} + \mathbf{u}(k-1) \\
-\Delta\mathbf{u}^{min} - \mathbf{u}(k-1) \\
\Delta\mathbf{u}^{max} \\
-\Delta\mathbf{u}^{min} \\
\vdots \\
-\Delta\mathbf{u}^{min}
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_1\mathbf{U} \leqslant \mathbf{F}_1 \tag{4.26}$$

4.2.3.3 Formulasi Kendala Variabel Keadaan pada MPC

Kendala pada Persamaan 4.19 dapat diekspresikan dalam dua pertidaksamaan berikut:

$$-\mathbf{x}(k+j) \leq -\mathbf{x}^{min} \tag{4.27}$$

$$\mathbf{x}(k+j) \leq \mathbf{x}^{max}; j = 1, 2, 3, \cdots, N_P \tag{4.28}$$

Persamaan 4.27 dan 4.28 dibentuk menjadi bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k+j) \leq \begin{bmatrix} -\mathbf{x}^{min} \\ \mathbf{x}^{max} \end{bmatrix}; j = 1, 2, 3, \cdots, N_P \tag{4.29}$$

Dari persamaan 4.29 dapat diperoleh matriks berikut:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{x}^{min} \\ \mathbf{x}^{max} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bentuk kendala *input* pada Persamaan 4.29 akan disesuaikan dengan optimasi fungsi tujuan 4.16 dengan $\mathbf{C}_1$ dan $\mathbf{D}_1$ seperti pada Persamaan 4.30. Untuk $j = 1, 2, 3, \cdots, N_P$ dan merujuk pada prediksi variabel keadaan 4.11 dan 4.12, maka kendala dari optimasi kuadratik programming pada Persamaan 4.16 adalah

$$\Psi \mathbf{U} \leq \mathbf{D} - \mathbf{K}\mathbf{x}(k) \tag{4.30}$$

dimana

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}; \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{A} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^{N_P} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{B} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}_1\mathbf{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}_1\mathbf{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^{N_P-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}_1\mathbf{A}^{N_P-2}\mathbf{B} & \mathbf{C}_1\mathbf{A}^{N_P-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}_1\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Permasalahan kendali MPC telah dibawa ke dalam bentuk kuadratik programming. Selanjutnya permasalahan ini diselesaikan menggunakan *toolbox quadprog* pada MATLAB dengan diberikan fungsi obyektif 4.16 dengan kendala-kendala 4.23, 4.26 dan 4.30.

4.3 Formulasi Modifikasi MPC-KF

Permasalahan MPC secara umum dapat dilihat pada Persamaan 2.18-2.21. Diketahui bahwa model sistem pada Persamaan 2.19 ialah model sistem dengan kondisi ideal yaitu sistem tidak mempertimbangkan keberadaan *noise* yang melekat pada sistem, sedangkan ketidakpastian model serta ketidakpastian gangguan (*noise*) merupakan sifat sistem dalam aplikasi teknik kontrol (Li, P., dkk., 2000). Keberadaan *noise* yang melekat pada model sistem menyebabkan model sistem pada Persamaan 2.19 menjadi bentuk stokastik. Adapun model sistem diskrit stokastik diberikan sebagai berikut:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \tag{4.31}$$

$$\mathbf{y}_k = g(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) \tag{4.32}$$

dimana Persamaan 4.31-4.32 mempresentasikan model sistem $\mathbf{x}_{k+1}$ dan model pengukuran $\mathbf{y}_k$ dengan *noise* sistem $\mathbf{w}_k$ dan *noise* pengukuran $\mathbf{v}_k$ secara bertutut-turut.

Sistem stokastik ialah sistem yang perilaku kedepannya tidak dapat diprediksi secara pasti karena adanya unsur probabilitas. Oleh karena itu, ketika model stokastik digunakan untuk menggambarkan dinamika sistem yang tidak pasti, masalah kontrol optimal pada MPC juga harus dimodifikasi untuk memperhitungkan sifat probabilistik dari prediksi model sistem. Hal ini mengakibatkan adanya perubahan pada nilai variabel $\mathbf{x}_k$ yang awalnya adalah sebuah nilai yang pasti, namun sekarang $\mathbf{x}_k$ merupakan sebuah variabel acak yang memiliki distribusi. Dengan demikian kendala variabel keadaan pada Persamaan 2.20 harus diubah ke dalam bentuk probabilistik untuk mencerminkan bahwa $\mathbf{x}_k$ merupakan variabel acak yang disebabkan karena adanya *noise*.

Perubahan model sistem menjadi stokastik juga menyebabkan fungsi obyektif pada Persamaan 2.18 mengalami perubahan dimana nilai $J(N, \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^{k+N-1})$ akan menjadi kuantitas acak, sehingga harus diubah dengan beberapa sifat statistik. Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk meminimumkan sebuah variabel acak $\mathbf{x}_k$ yang berdistribusi ialah dengan meminimumkan nilai ekspektasi/rata-ratanya sehingga fungsi obyektif pada Persamaan 2.18 akan berbentuk sebuah ekspektasi $E[J(N, \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^{k+N-1})]$.

Selanjutnya dimisalkan E dan P_r adalah sebuah ekspektasi dan probabilitas sehingga permasalahan MPC yang baru didapatkan sebagai berikut:

$$\min_u J = E[\mathbf{x}_{k+N}^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_{k+N} + \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_{k+j}^T \mathbf{Q}_j \mathbf{x}_{k+j} + \mathbf{u}_{k+j-1}^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{k+j-1})] \quad (4.33)$$

dengan kendala

$$\mathbf{x}_{k+j+1} = f(\mathbf{x}_{k+j}, \mathbf{u}_{k+j}, \mathbf{w}_{k+j}) \quad (4.34)$$

$$\mathbf{y}_{k+j} = g(\mathbf{x}_{k+j}, \mathbf{u}_{k+j}, \mathbf{v}_{k+j}) \quad (4.35)$$

$$P_r(\mathbf{x}_{k+j} \in \mathbf{X}_j) \geq p_j (j = 1, ..., N) \quad (4.36)$$

$$\mathbf{u}_{k+j} \in \mathbf{U}_j (j = 1, ..., N-1) \quad (4.37)$$

Fungsi obyektif 4.33 pada permasalahan MPC telah berubah menjadi sebuah ekspekatasi dari fungsi kuadratik dari $\mathbf{x}_k$ dan $\mathbf{u}_k$. Ekspektasi $E[J(N, \mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^{k+N-1})]$ bergantung pada informasi pengukuran yang digunakan untuk mendeduksi status sistem yaitu, melalui estimasi keadaan tanpa adanya pengukuran status lengkap, pengetahuan yang diperlukan untuk menginisialisasi masalah optimal control pada setiap waktu sampling k. Dengan meminimumkan fungsi obyektif pada Persamaan 4.33 akan didapatkan nilai kontrol yang minimum sehingga fungsi obyektif dapat diselesaikan seperti yang diinginkan. Selanjutnya Persamaan 4.34-4.35 menjelaskan model sistem dan model pengukuran dengan memperhatikan *noise* yang melekat pada model sistem dan model pengukuran. Adapun model sistem pada Persamaan 4.34 merupakan model sistem stokastik yang selanjutnya digunakan oleh MPC untuk memprediksi perilaku sistem.

Perubahan model sistem menjadi stokastik membuat kendala variabel keadaan juga mengalami perubahan dari deterministik 2.20 menjadi bentuk probabilistik 4.36. Ketika model sistem berbentuk deterministik, variabel keadaan $\mathbf{x}_{k+j}$ merupakan sebuah nilai yang pasti dan dapat ditentukan, namun ketika model sistem berubah menjadi model sistem stokastik maka variabel keadaan $\mathbf{x}_{k+j}$ berubah menjadi sebuah variabel acak yang berdistribusi dimana nilainya hanya bisa ditentukan dengan probabilitas. Hal inilah yang menyebabkan kendala variabel keadaan pada Persamaan 4.36 berbentuk probabilitas. Adapun Persamaan 4.36 menjelaskan bahwa peluang variabel keadaan $\mathbf{x}_{k+j}$ berada di dalam himpunan $\mathbf{X}_j$ adalah lebih besar samadengan p_j dimana p_j adalah nilai peluang yang memungkinkan untuk $\mathbf{x}_{k+j}$ berada di dalam himpunan $\mathbf{X}_j$. Dengan adanya probabilitas, dapat diartikan pula bahwa penyelesaian kendala pada variabel keadaan $\mathbf{x}_{k+j}$ juga memiliki probabilitas untuk dilanggar karena nilai probabilitas $\mathbf{x}_{k+j}$ berada di dalam himpunan $\mathbf{X}_j$ tidaklah 1, sehingga kendala pada variabel keadaan mungkin akan dilanggar tetapi hanya dengan spesifikasi yang rendah. Adapun kendala variabel kontrol pada Persamaan 4.37 adalah tetap deterministik karena variabel kontrol merupakan variabel bebas sehingga tidak dibutuhkan untuk memberikan probabilitas pada variabel kontrol.

Model sistem permasalahan MPC pada Persamaan 4.33-4.37 masih merupakan model sistem stokastik non-linear. MPC merupakan metode kontrol yang mampu menyelesaikan permasalahan dengan model sistem linier diskrit. Oleh karena itu, model sistem pada Persamaan 4.34 diubah ke dalam bentuk model sistem yang lebih mudah diselesaikan yaitu model stokastik linier, sehingga permasalahan MPC dengan sistem linier stokastik diskrit diberikan sebagai berikut:

$$\min_u J = E[\mathbf{x}_{k+N}^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_{k+N} + \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_{k+j}^T \mathbf{Q}_j \mathbf{x}_{k+j} + \mathbf{u}_{k+j-1}^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{k+j-1})] \quad (4.38)$$

dengan kendala sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+j+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k+j} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k+j} + \mathbf{G}\mathbf{w}_{k+j} && (4.39) \\ \mathbf{y}_{k+j} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_{k+j} + \mathbf{D}\mathbf{v}_{k+j} && (4.40) \\ P_r(x_{k+j}^i &\leq \beta_j^i) \geq p_j^i; (j = 1, ..., N), (i = 1, ..., n) && (4.41) \\ \mathbf{u}_{k+j} &\leq \mu_j; (j = 1, ..., N-1) && (4.42) \end{aligned}$$

Permasalahan MPC pada Persamaan 4.38-4.42 kini menggunakan model sistem linier stokastik yang dapat dilihat pada Persamaan 4.39. Persamaan 4.39-4.40 mendeskripsikan tentang model sistem $\mathbf{x}_{k+j}$ yang berdimensi-n dan model pengukuran $\mathbf{y}_{k+j}$ dengan mempertimbangkan keberadaan *noise* sistem $\mathbf{w}_{k+j}$ serta *noise* pengukuran $\mathbf{v}_{k+j}$ secara beruturut-turut. Pada Persamaan 4.39 $\mathbf{x}_k$ diasumsikan sebagai sebuah variabel acak yang berdistribusi normal dengan mean $\hat{\mathbf{x}}_k$ dan kovarians $\mathbf{P}_k$ dan diasumsikan pula bahwa *noise* sistem dan *noise* pengukuran berdistribusi *white noise gaussian* dengan $w_k \sim N(0, \tau_k)$ dan $v_k \sim N(0, \Lambda_k)$.

Selanjutnya pada Persamaan 4.41 menjelaskan kendala variabel keadaan yang berbentuk probabilistik. β_j^i adalah batas kendala pada variabel keadaan dan p_j^i nilai probabilitas terpenuhinya kendala batas pada variabel keadaan $\mathbf{x}_{k+j}$. x_{k+j}^i adalah elemen ke-i dari variabel keadaan $\mathbf{x}_{k+j}$. Persamaan 4.42 mendeskripsikan kendala vektor *input* $\mathbf{u}_{k+j}$ yang berdimensi m. μ_j adalah batas kendala yang diberikan pada variabel *input*. $\mathbf{A}$ merupakan matriks ruang keadaan berdimensi $n \times n$, $\mathbf{B}$ merupakan matriks *input* berdimensi $n \times m$, $\mathbf{C}$ merupakan matriks pengukuran berdimensi $n \times n$, $\mathbf{G}$ matriks koefisien dari *noise* sistem yang berdimensi $n \times n$ dan $\mathbf{D}$ merupakan matriks koefisien dari *noise* pengukuran yang berdimensi $n \times n$.

Permasalahan MPC pada Persamaan 4.38-4.42 merupakan permasalahan dengan sistem linier stokastik dan kendala variabel keadaan berupa probabilistik, sehingga penyelesaian ini masih sangat sulit untuk diselesaikan. Hal ini disebabkan karena variabel keadaan pada sistem stokastik bukan lagi sebuah nilai yang pasti, melainkan berupa sebuah variabel acak berdistribusi normal sehingga penentuan nilainya harus melihat probabilitas yang diberikan. Dalam hal ini metode MPC masih belum mampu untuk menyelesaikan permasalahan sistem yang berbentuk stokastik, sehingga permasalahan pada Persamaan 4.38-4.42 harus diubah terlebih dahulu ke dalam bentuk deterministik untuk bisa diterapkan dalam metode MPC. Adapun beberapa langkah yang harus dilakukan agar permasalahan 4.38-4.42 dapat diselesaikan menggunakan metode MPC ialah sebagai berikut:

1. Penggabungan metode Kalman Filter ke dalam proses MPC untuk melakukan prediksi pada model sistem stokastik pada Persamaan 4.39.

2. Mengubah kendala variabel keadaan pada Persamaan 4.41 dari bentuk probabilistik menjadi bentuk deterministik.

3. Mengubah fungsi obyektif pada Persamaan 4.38 dari bentuk kuantitas acak berupa ekspektasi menjadi bentuk determinsitik.

4.3.1 Penggabungan Kalman Filter pada Proses MPC

Pada subbab ini dibahas mengenai proses penggabungan Kalman Filter kedalam proses MPC. Pada Persamaan 4.39 terlihat bahwa model sistem yang digunakan ialah model sistem stokastik. Pada MPC, model sistem digunakan untuk memprediksi perilaku sebuah sistem namun hanya dapat dilakukan pada model sistem deterministik. Untuk mengatasi permasalahan model sistem stokastik, prediksi pada MPC akan digantikan oleh metode Kalman Filter yang telah dikenal dapat mengatasi hal ini. Berikut tahap-tahap yang dilakukan pada metode Kalman Filter:
Estimasi tahap koreksi:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \tag{4.43}$$

Estimasi tahap prediksi:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \tag{4.44}$$

Kovarian error tahap koreksi:

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{P}_{k|k-1} \tag{4.45}$$

Kovarian error tahap prediksi:

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k|k}\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\tau_k\mathbf{G}^T \tag{4.46}$$

Kalman Gain:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T + \Lambda_k)^{-1} \tag{4.47}$$

Persamaan 4.43-4.47 merupakan langkah-langkah yang dilakukan pada metode Kalman Filter. Ada dua tahap pada metode Kalman Filter yaitu tahap prediksi dan tahap koreksi. Pada Tesis ini estimasi tahap prediksi $\hat{\mathbf{x}}_{k+j|k}$ digunakan untuk menggantikan proses prediksi yang dilakukan oleh MPC. Dalam Kalman Filter juga terdapat kovarian error prediksi untuk melihat seberapa besar error prediksi yang didapatkan. Oleh sebab itu $\mathbf{P}_{k+j|k}$ juga akan dipertimbangkan dalam proses MPC.

Selanjutnya diasumsikan bahwa rata-rata error estimasi prediksi state pada kondisi awal ialah nol dengan notasi $\tilde{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0}$. Error ini didapatkan dari selisih antara filter dan prediksi. Adapun $\tilde{\mathbf{x}}_{k+j|k} = \mathbf{x}_{k+j} - \hat{\mathbf{x}}_{k+j|k}$ diasumsikan berdistribusi gaussian dengan rata-rata nol dan varians $\mathbf{P}_{k+j|k}$ yaitu $\tilde{\mathbf{x}}_{k+j|k} \sim N(0, \mathbf{P}_{k+j|k})$. Berikut diberikan prediksi dan kovarian error prediksi yang dihitung melalui kondisi awal $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}$ menggunakan open loop predictor sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+j|k} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k+j-1|k} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k+j-1} \tag{4.48}$$

$$\mathbf{P}_{k+j|k} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k+j-1|k}\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\tau_k\mathbf{G}^T \tag{4.49}$$

Dengan menggunakan Persamaan 4.48 dan 4.49 maka prediksi pada proses MPC untuk permasalahan model sistem stokastik dapat diselesaikan. Pada Persamaan 4.49 terlihat bahwa kovarian error prediksi tidak bergantung pada *input* kontrol.

4.3.2 Pengubahan Kendala Probabilistik Variabel Keadaan ke dalam Bentuk Determinsitik

Pada sub bab ini kendala variabel keadaan pada Persamaan 4.41 yang berbentuk probabilistik diubah ke dalam bentuk deterministik. Hal ini dilakukan karena pada umumnya metode MPC hanya mampu menyelesaikan permasalahan berbentuk deterministik. Ide pengubahan kendala variabel keadaan dari probabilistik menjadi deterministik ialah dengan menggunakan asumsi awal bahwa variabel keadaan $\mathbf{x}_k$ berdistribusi normal dengan mean $\hat{\mathbf{x}}_k$ dan kovarians $\mathbf{P}_k$. Misal diberikan variabel acak $\xi^i_{k+j} = \frac{x^i_{k+j|k} - \hat{x}^i_{k+j|k}}{(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}}$ untuk $i = 1, ..., n$. $(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}$ adalah elemen baris ke-i dan kolom ke-i dari matriks kovarian error prediksi. Dengan demikian dapat dicari *mean* dan varians dari variabel acak ξ^i_{k+j} sebagai berikut:

Mean dari ξ^i_{k+j} ialah

$$\begin{aligned} E(\xi^i_{k+j}) &= E\left(\frac{x^i_{k+j|k} - \hat{x}^i_{k+j|k}}{(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}}\right) \\ &= \frac{1}{(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}}(E(x^i_{k+j|k}) - \hat{x}^i_{k+j|k}) \\ &= \frac{1}{(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}}(\hat{x}^i_{k+j|k} - \hat{x}^i_{k+j|k}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Varians dari ξ^i_{k+j} ialah

$$\begin{aligned} Var(\xi^i_{k+j}) &= Var\left(\frac{x^i_{k+j|k} - \hat{x}^i_{k+j|k}}{(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}}\right) \\ &= \frac{1}{P^{ii}_{k+j|k}} Var(x^i_{k+j|k} - \hat{x}^i_{k+j|k}) \\ &= \frac{1}{P^{ii}_{k+j|k}} Var(x^i_{k+j|k}) \\ &= \frac{1}{P^{ii}_{k+j|k}} P^{ii}_{k+j|k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

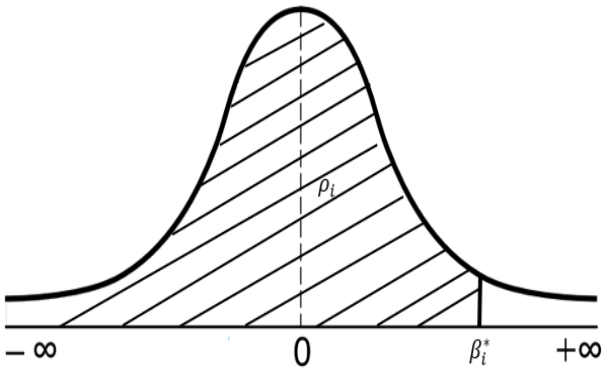
Dengan demikian didapatkan bahwa variabel acak ξ^i_{k+j} memiliki distribusi normal Standar dengan mean 0 dan varians 1 yaitu $\xi^i_{k+j} \sim N(0,1)$. Dengan pengetahuan ini maka kendala pada Persamaan 4.41 dapat diubah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_r(x^i_{k+j} \leq \beta^i_j) &\geq p^i_j \\ P_r\left(\frac{x^i_{k+j} - \hat{x}^i_{k+j|k}}{(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}} \leq \frac{\beta^i_j - \hat{x}^i_{k+j|k}}{(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}}\right) &\geq p^i_j \\ P_r\left(\frac{\tilde{x}^i_{k+j|k}}{(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}} \leq \frac{\beta^i_j - \hat{x}^j_{k+j|k}}{(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}}\right) &\geq p^i_j \\ P_r(\xi^i_{k+j} \leq \hat{\beta}^i_j) &\geq p^i_j \end{aligned} \tag{4.50}$$

dengan $\hat{\beta}^i_j = \frac{\beta^i_j - \hat{x}^i_{k+j|k}}{(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}}$. Dengan demikian Persamaan 4.41 ekivalen dengan Persamaan 4.50 yaitu

$$P_r(x^i_{k+j} \leq \beta^i_j) \geq p^i_j \Leftrightarrow P_r(\xi^i_{k+j} \leq \hat{\beta}^i_j) \geq p^i_j \tag{4.51}$$

Karena diketahui bahwa ξ^i_{k+j} berdistribusi normal standar, maka untuk setiap p^i_j yang diberikan pada Persamaan 4.51 akan berkorespondensi dengan $(\beta^i_j)^*$ yang dapat ditemukan pada Tabel distribusi normal standar. $(\beta^i_j)^*$ dinotasikan sebagai solusi dari fungsi $\Phi((\beta^i_j)^*) = p^i_j$, dimana $\Phi(.)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal standar.



Gambar 4.1: Distribusi Normal Standar dengan batas atas.

Gambar 4.1 menjelaskan luas daerah dibawah kurva pada distribusi normal standar. $\Phi(\beta_j^i)^*) = p_j^i$ memiliki pengertian bahwa luas daerah dibawah kurva untuk $P_r(\xi_{k+j}^i \leq (\beta_j^i)^*)$ adalah samadengan p_j^i. Diketahui bahwa $\hat{\beta}_j^i = (\beta_j^i)^*$, sehingga agar luas daerah dibawah kurva adalah lebih besar samadengan p_j^i maka $\hat{\beta}_j^i$ harus lebih besar atau samadengan $(\beta_j^i)^*$.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_j^i &\geq (\beta_j^i)^* \\ \frac{\beta_j^i - \hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} &\geq (\beta_j^i)^* \\ \hat{x}_{k+j|k}^i &\leq \beta_j^i - (P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}(\beta^i)_j^* \end{aligned}$$

Selanjutnya Persamaan 4.51 dapat diubah menjadi

$$\frac{\beta_j^i - \hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \geq (\beta_j^i)^* \Leftrightarrow \hat{x}_{k+j|k}^i \leq \beta_j^i - (P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}(\beta^i)_j^* \tag{4.52}$$

Dengan demikian kendala probabilistik variabel keadaan pada Persamaan 4.41 ekivalen dengan Persamaan 4.52 yaitu:

$$P_r(x_{k+j}^i \leq \beta_j^i) \geq p_j^i \Leftrightarrow \hat{x}_{k+j|k}^i \leq \beta_j^i - (P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}(\beta_j^i)^* \tag{4.53}$$

Kendala variabel keadaan pada Persamaan 4.41 yang berbentuk probabilistik kini telah menjadi kendala variabel keadaan yang berbentuk deterministik seperti pada Persamaan 4.53. Pada Persamaan 4.53 terlihat bahwa nilai kovarian error prediksi mempengaruhi batasan pada kendala variabel keadaan yang dapat dihitung melalui Persamaan 4.49.

Selanjutnya pada kasus yang lain, ketika permasalahan kendala variabel keadaan probabilistik memiliki batasan maksimum dan minimum yang simetri

$$P_r(-\beta_j^i \leq x_{k+j}^i \leq \beta_j^i) \geq p_j^i \tag{4.54}$$

dalam kasus ini kendala probabilistik variabel keadaan pada Persamaan 4.54 dapat diubah ke dalam bentuk deterministik dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P_r(-\beta_j^i \leq x_{k+j}^i \leq \beta_j^i) &\geq p_j^i \\ P_r\left(-\frac{(\beta_j^i - \hat{x}_{k+j|k}^i)}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{x_{k+j}^i - \hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{\beta_j^i - \hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}\right) &\geq p_j^i \end{aligned}$$

$$P_r\left(-\frac{(\beta_j^i-\hat{x}_{k+j|k}^i)}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{\tilde{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{\beta_j^i-\hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}\right) \geq p_j^i$$

$$\left\{P_r\left(\frac{\tilde{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{\beta_j^i-\hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}\right) - P_r\left(\frac{\tilde{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq -\frac{\beta_j^i-\hat{x}_{k+j|k}^i}{P(_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}\right)\right\} \geq p_j^i$$

$$\left\{P_r\left(\frac{\tilde{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{\beta_j^i-\hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}\right) - (1-P_r\left(\frac{\tilde{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{\beta_j^i-\hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}\right)\right\} \geq p_j^i$$

$$2P_r\left(\frac{\tilde{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{\beta_j^i-\hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}\right) \geq p_j^i+1$$

$$P_r\left(\frac{\tilde{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{\beta_j^i-\hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}\right) \geq \frac{p_j^i+1}{2}$$

$$P_r(\xi_{k+j}^i \leq \hat{\beta}_j^i) \geq \frac{p_j^i+1}{2}$$

dengan $\xi_{k+j}^i = \frac{\tilde{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}$ dan $\hat{\beta}_j^i = \frac{\beta_j^i-\hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}$ sehingga Persamaan 4.54 ekivalen dengan

$$P_r(-\beta_j^i \leq x_{k+j}^i \leq \beta_j^i) \geq p_j^i \Leftrightarrow P_r(\xi_{k+j}^i \leq \hat{\beta}_j^i) \geq \frac{p_j^i+1}{2} \tag{4.55}$$

Karena diketahui bahwa ξ_{k+j}^i berdistribusi normal standar, sehingga pada Persamaan 4.55, untuk setiap $\frac{p_j^i+1}{2}$ yang diberikan akan berkorespondensi dengan $(\beta_j^i)^*$ yang dapat ditemukan pada Tabel distribusi normal standar. $(\beta_j^i)^*$ dinotasikan sebagai solusi dari fungsi $\Phi((\beta_j^i)^*) = \frac{p_j^i+1}{2}$, dimana $\Phi(.)$ adalah cumulatif distibusi function dari distribusi normal standar. Dengan demikian Persamaan 4.55 dapat diubah menjadi

$$\frac{\beta_j^i-\hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \geq (\beta_j^i)^* \Leftrightarrow \hat{x}_{k+j|k}^i \leq \beta_j^i - (P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}(\beta_j^i)^* \tag{4.56}$$

Dengan demikian kendala probabilistik state pada Persamaan 4.54 ekivalen dengan Persamaan 4.56 yaitu:

$$P_r(-\beta_j^i \leqslant x_{k+j}^i \leqslant \beta_j^i) \geqslant p_j^i \Leftrightarrow \hat{x}_{k+j|k}^i \leqslant \beta_j^i - (P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}(\beta_j^i)^* \tag{4.57}$$

Pengubahan kendala variabel keadaan yang berbentuk probabilistik pada Persamaan 4.54 menjadi deterministik pada Persamaan 4.57 hanya dapat dilakukan ketika batas atas dan bawah yang diberikan simetri. Pada Persamaan 4.57 penyelesaian kendala variabel keadaan hanya memenuhi

untuk batas kendala atas sehingga batas kendala bawah menjadi tidak dipertimbangkan. Untuk mengatasi hal ini maka digunakan cara lain sehingga batas atas dan bawah tetap diperhitungkan. Misal diberikan kendala probabilistik variabel keadaan dengan batas atas dan bawah sebagai berikut:

$$P_r\left((\beta_j^i)^{min} \leq x_{k+j}^i \leq (\beta_j^i)^{max}\right) \geq p_j^i \tag{4.58}$$

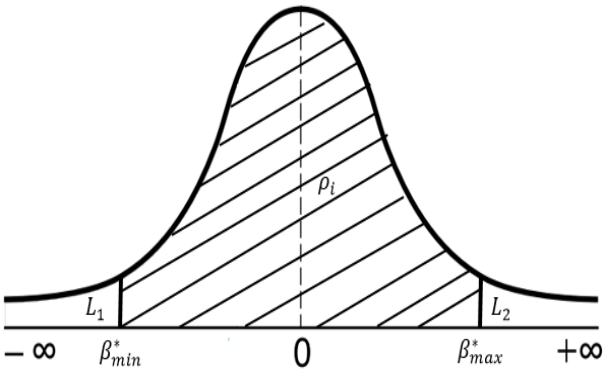
dalam kasus ini kendala probabilistik variabel keadaan pada Persamaan 4.54 dapat diubah ke dalam bentuk deterministik dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
P_r\left((\beta_j^i)^{min} \leq x_{k+j}^i \leq (\beta_j^i)^{max}\right) &\geq p_j^i \\
P_r\left(\frac{(\beta_j^i)^{min} - \hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{x_{k+j}^i - \hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{(\beta_j^i)^{max} - \hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}\right) &\geq p_j^i \\
P_r\left(\frac{(\beta_j^i)^{min} - \hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{\tilde{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}} \leq \frac{(\beta_j^i)^{max} - \hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}\right) &\geq p_j^i \\
P_r\left((\hat{\beta}_j^i)^{min} \leq \xi_{k+j}^i \leq (\hat{\beta}_j^i)^{max}\right) &\geq p_j^i
\end{aligned} \tag{4.59}$$

dengan $(\hat{\beta}_j^i)^{min} = \frac{((\beta_j^i)^{min} - \hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}$ dan $(\hat{\beta}_j^i)^{max} = \frac{(\beta_j^i)^{max} - \hat{x}_{k+j|k}^i}{(P_{k+j|k}^{ii})^{1/2}}$. Dengan demikian Persamaan 4.58 ekivalen dengan Persamaan 4.59 yaitu

$$P_r\left((\beta_j^i)^{min} \leq x_{k+j}^i \leq (\beta_j^i)^{max}\right) \geq p_j^i \Leftrightarrow P_r\left((\hat{\beta}_j^i)^{min} \leq \xi_{k+j}^i \leq (\hat{\beta}_j^i)^{max}\right) \geq p_j^i$$

Karena diketahui bahwa ξ_{k+j}^i berdistribusi normal standar, maka untuk setiap p_j^i yang diberikan pada Persamaan 4.59 akan berkorespondensi dengan β_{min}^* dan β_{max}^* yang dapat ditemukan pada Tabel distribusi normal standar.



Gambar 4.2: Distribusi Normal Standar dengan batas atas dan bawah.

Gambar 4.2 menjelaskan luas daerah pada distribusi normal standar. Pada Gambar 4.2 diasumsikan bahwa $L_1 = L_2$ yaitu $L_1 = \frac{1-p_j^i}{2} = L_2$. β^*_{min} dinotasikan sebagai solusi dari fungsi $\Phi(\beta^*_{min}) = \frac{1-p_j^i}{2}$, dimana $\Phi(.)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal standar. $\Phi(\beta^*_{min}) = \frac{1-p_j^i}{2}$ memiliki pengertian bahwa luas daerah dibawah kurva untuk $P_r(\xi^i_{k+j} \leq \beta^*_{min})$ adalah samadengan $\frac{1-p_j^i}{2}$. Diketahui bahwa $(\beta^i_j)^{min} = \beta^*_{min}$, sehingga agar luas daerah dibawah kurva adalah lebih besar atau sama dengan p^i_j maka $\hat{\beta}^i_j$ harus lebih kecil atau samadengan β^*_{min}.

$$\begin{aligned} (\beta^i_j)^{min} &\leq \beta^*_{min} \\ \frac{(\beta^i_j)^{min} - \hat{x}^i_{k+j|k}}{(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}} &\leq \beta^*_{min} \\ -\hat{x}^i_{k+j|k} &\leq -(\beta^i_j)^{min} + (P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}\beta^*_{min} \end{aligned} \tag{4.60}$$

Selanjutnya berdasarkan Gambar 4.2 juga didapatkan β^*_{max} yang dinotasikan sebagai solusi dari fungsi $\Phi(\beta^*_{max}) = \frac{1+p_j^i}{2}$. $\Phi(\beta^*_{max}) = \frac{1+p_j^i}{2}$ memiliki maksud bahwa luas daerah dibawah kurva untuk $P_r(\xi^i_{k+j} \leq \beta^*_{max})$ adalah samadengan $\frac{1+p_j^i}{2}$. Diketahui bahwa $(\beta^i_j)^{max} = \beta^*_{max}$, sehingga agar luas daerah dibawah kurva adalah lebih besar atau sama dengan p^i_j maka $\hat{\beta}^i_j$ harus lebih besar atau samadengan β^*_{max}.

$$\begin{aligned} (\beta^i_j)^{max} &\geq \beta^*_{max} \\ \frac{(\beta^i_j)^{max} - \hat{x}^i_{k+j|k}}{(P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}} &\geq \beta^*_{max} \\ \hat{x}^i_{k+j|k} &\leq (\beta^i_j)^{max} - (P^{ii}_{k+j|k})^{1/2}\beta^*_{max} \end{aligned} \tag{4.61}$$

Dengan demikian kendala probabilistik variabel keadaan pada Persamaan 4.58 kini telah menjadi kendala variabel keadaan berbentuk deterministik yang dapat dilihat pada Persamaan 4.35 dan 4.61 secara berturut-turut. Pada Persamaan 4.60 dan 4.61 terlihat bahwa nilai kovarian error prediksi mempengaruhi batasan pada kendala state yang dapat dihitung melalui Persamaan 4.49.

4.3.3 Pengubahan Fungsi Obyektif ke dalam bentuk determinsitik

Selanjutnya adalah mengubah fungsi obyektif pada Persamaan 4.38 dari bentuk conditional ekspektasi ke dalam bentuk fungsi deterministik.

$$\begin{aligned} J &= E[\mathbf{x}_{k+N}^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_{k+N} + \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{x}_{k+j}^T \mathbf{Q}_j \mathbf{x}_{k+j} + \mathbf{u}_{k+j-1}^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{k+j-1})] \\ &= E[tr(\mathbf{x}_{k+N}^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_{k+N}] + \sum_{j=1}^{N} \{E[tr(\mathbf{x}_{k+j}^T \mathbf{Q}_j \mathbf{x}_{k+j})] + \mathbf{u}_{k+j-1}^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{k+j-1}] \\ &= tr[E(\mathbf{x}_{k+N} \mathbf{x}_{k+N}^T) \mathbf{S}_N] + \sum_{j=1}^{N} \{tr[E(\mathbf{x}_{k+j} \mathbf{x}_{k+j}^T) \mathbf{Q}_j] + \mathbf{u}_{k+j-1}^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{k+j-1}\} \end{aligned} \tag{4.62}$$

Berdasarkan teori probabilitas (Sahoo, P., 2013), misal diberikan X ialah variabel acak dengan mean μ_X. Varians dari X dinotasikan dengan $Var(X)$ dapat dicari sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E([X - \mu_X]^2) \\ &= E(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu_X E(X) + (\mu_X)^2 \\ &= E(X^2) - (\mu_X)^2 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Pada Persamaan 4.62 diketahui bahwa $\mathbf{x}_k$ merupakan variabel acak berdistribusi normal dengan *mean* $\hat{\mathbf{x}}_k$ dan varians $\mathbf{P}_k$) sehingga Persamaan 4.62 dapat diturunkan dengan menggunakan sifat pada Persamaan 4.63 yang diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} J &= tr[E(\mathbf{x}_{k+N} \mathbf{x}_{k+N}^T) \mathbf{S}_N] + \sum_{j=1}^{N} \{tr[E(\mathbf{x}_{k+j} \mathbf{x}_{k+j}^T) \mathbf{Q}_j] + \mathbf{u}_{k+j-1}^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{k+j-1}\} \\ &= tr[(\mathbf{P}_{k+N|n} + \hat{\mathbf{x}}_{k+N|k} \hat{\mathbf{x}}_{k+N|k}^T) \mathbf{S}_N] + \sum_{j=1}^{N} \{tr[(\mathbf{P}_{k+j|k} + \hat{\mathbf{x}}_{k+j|k} \hat{\mathbf{x}}_{k+j|k}^T) \mathbf{Q}_j] \\ &\quad + \mathbf{u}_{k+j-1}^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{k+j-1}\} \\ &= tr(\mathbf{P}_{k+N|k} \mathbf{S}_N) + \sum_{j=1}^{N} tr(\mathbf{P}_{k+j|k} \mathbf{Q}_j) + \hat{\mathbf{x}}_{k+N|k}^T \mathbf{S}_N \hat{\mathbf{x}}_{k+N|k} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} (\hat{\mathbf{x}}_{k+j|k}^T \mathbf{Q}_j \hat{\mathbf{x}}_{k+j|k} + \mathbf{u}_{k+j-1}^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{k+j-1}) \end{aligned} \tag{4.64}$$

Fungsi obyektif pada Persamaan 4.64 kini telah berubah menjadi bentuk determinsitik yang bergantung pada $\hat{\mathbf{x}}_{k+j|k}, \mathbf{u}_{k+j|k}$ dan $\mathbf{P}_{k+j|k}$. Kovarians error prediksi $\mathbf{P}_{k+j|k}$ pada Persamaan 4.49 tidak dipengaruhi oleh nilai *input* kontrol. Dalam optimal kontrol, ketika suatu state tidak berpengaruh pada *input* kontrol yang didapatkan, maka hasil yang didapatkan tidak akan terlalu berpengaruh walaupun state tersebut dihilangkan. Dengan demikian fungsi obyektif pada Persamaan 4.64 dapat ditulis sebagai berikut:

$$\min_u J = \hat{\mathbf{x}}_{k+N|k}^T \mathbf{S}_N \hat{\mathbf{x}}_{k+N|k} + \sum_{j=1}^{N} (\hat{\mathbf{x}}_{k+j|k}^T \mathbf{Q}_j \hat{\mathbf{x}}_{k+j|k} + \mathbf{u}_{k+j-1}^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{k+j-1}). \quad (4.65)$$

Beberapa langkah untuk membawa permasalahan MPC ke dalam bentuk deterministik telah dilakukan, sehingga permasalahan determinsitik MPC yang baru diberikan sebagai berikut:

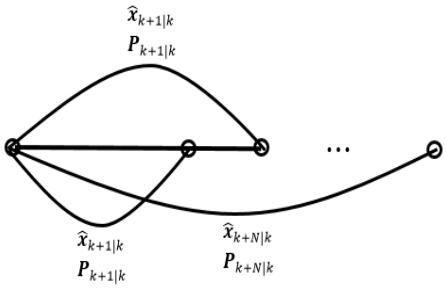
$$\min_u J = \hat{\mathbf{x}}_{k+N|k}^T \mathbf{S}_N \hat{\mathbf{x}}_{k+N|k} + \sum_{j=1}^{N} (\hat{\mathbf{x}}_{k+j|k}^T \mathbf{Q}_j \hat{\mathbf{x}}_{k+j|k} + \mathbf{u}_{k+j-1}^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{k+j-1}) \quad (4.66)$$

dengan kendala sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k+j|k} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k+j-1|k} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k+j-1} (j = 1, ..., N) && (4.67)\\
\hat{x}_{k+j|k}^i &\leq \beta_j^i - (P_{k+j|k}^{ii})^{1/2} (\beta_j^i)^* (j = 1, ..., N), (i = 1, \cdots, n) && (4.68)\\
\mathbf{u}_{k+j} &\leq \mu_j (j = 0, ..., N-1). && (4.69)
\end{aligned}$$

dimana N adalah horizon prediksi dan *subscript* $k+j|n$ menyatakan nilai dari sebuah variabel pada waktu ke-$k+j$ yang diprediksi berdasarkan pengetahuan sistem pada waktu k.

Pada Persamaan 4.66 terlihat bahwa nilai fungsi obyektif bukan lagi sebuah kuantitas acak sehingga optimasi metode MPC dapat dilakukan. Selanjutnya pada Persamaan 4.68 terlihat bahwa nilai kovarian error prediksi P_{k+j}^{ii} untuk $j = 1, ..., N, i = 1, ..., n$ akan mempengaruhi batasan pada kendala state. Pada kondisi j yang terus meningkat, maka akan menyebabkan nilai kovarian menjadi semakin besar. Hal ini dikarenakan jarak prediksi dengan pengetahuan sistem yang terlalu jauh menyebabkan error yang didapat juga akan semakin besar, akibatnya kovarian error prediksi juga akan semakin besar. Hal ini dapat dilihat pada ilustrasi Gambar 4.3 berikut:



Gambar 4.3: Prediksi Kalman Filter Sebanyak Waktu Horizon Prediksi N.

Berdasarkan Gambar 4.3 terlihat bahwa prediksi oleh metode Kalman Filter dilakukan sebanyak waktu horizon prediction N. Hal ini merupakan salah satu kelebihan metode MPC yaitu dapat memprediksi suatu sistem hingga horizon prediksi N yang telah ditentukan dengan diketahui nilai pada waktu ke-k. Karena prediksi yang dilakukan menggunakan metode Kalman Filter $\hat{\mathbf{x}}_{k+j|k}$, maka setiap prediksi akan didapatkan kovarian error prediksi $\mathbf{P}_{k+j|k}$ yang juga harus dipertimbangkan. Gambar 4.3 menjelaskan bahwa prediksi $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ dilakukan dengan menggunakan infromasi data $\hat{\mathbf{x}}_k$, begitu pula untuk mendapatkan prediksi $\hat{\mathbf{x}}_{k+2|k}$ hingga $\hat{\mathbf{x}}_{k+N|k}$ akan tetap menggunakan informasi data $\hat{\mathbf{x}}_k$. Dari prediksi tersebut maka didapatkan kovarians error prediksi $\mathbf{P}_{k+1|k}$ hingga $\mathbf{P}_{k+N|k}$. Berdasarkan Gambar 4.3 terlihat bahwa semakin jauh jarak prediksi dengan nilai yang diketahui, maka akan membuat kovarian error prediksi juga semakin besar. Hal ini dapat dituliskan dalam bentuk matematika sebagai berikut:

$$\mathbf{P}_{k+1|k} \leq \mathbf{P}_{k+2|k} \leq \cdots \leq \mathbf{P}_{k+N|k}$$

Diketahui bahwa kovarian $P^{ii}_{k+i|k}$ berpengaruh dalam memodifikasi kendala state pada Persamaan 4.68. Dalam Persamaan 4.68 terlihat bahwa jika nilai kovarian $P^{ii}_{k+j|k}$ semakin besar dengan $(\beta^i_j)^* > 0$ maka akan membuat batasan pada kendala state menjadi lebih sempit. Hal ini akan berakibat pada solusi daerah penyelesaian nilai $\hat{x}^i_{k+j|k}$ menjadi lebih susah untuk didapatkan, bahkan solusi mungkin tidak dapat ditemukan untuk nilai horizon prediksi N yang sangat besar. Kejadian ini tidak sesuai dengan dengan keunggulan dari metode MPC dimana jika horizon prediksi N semakin besar maka hasil yang akan didapatkan menjadi lebih baik.

Untuk mengatasi permasalahan ini maka kovarians yang digunakan dalam memodifikasi kendala 4.68 hanyalah vektor pertama pada barisan kovarian error pada Persamaan 4.49. Hal ini bertujuan agar batasan kendala state menjadi tidak terlalu sempit sehingga solusi untuk nilai $\hat{x}^i_{k+j|k}$ dapat ditemukan. Adapun kendala state pada Persamaan 4.68 dapat diubah sebagai berikut:

$$\hat{x}^i_{k+j|k} \leq \beta^i_j - (P^{ii}_{k+1|k})^{1/2}(\beta^i_j)^*(j = 1, ..., N), (i = 1, ..., n) \tag{4.70}$$

Ide pada Persamaan 4.70 diambil sesuai dengan strategi receding horizon pada MPC dimana hanya vektor pertama pada barisan kovarian yang digunakan untuk mendapatkan hasil optimasi menjadi lebih optimal. Berdasarkan penjabaran diatas maka Permasalahan MPC yang baru didapatkan sebagai berikut:

$$\min_u J = \hat{\mathbf{x}}^T_{k+N|k}\mathbf{S}_N\hat{\mathbf{x}}_{k+N|k} + \sum_{j=1}^{N}(\hat{\mathbf{x}}^T_{k+j|k}\mathbf{Q}_j\hat{\mathbf{x}}_{k+j|k} + \mathbf{u}^T_{k+j-1}\mathbf{R}_j\mathbf{u}_{k+j-1}) \tag{4.71}$$

dengan kendala sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k+j|k} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k+j-1|k} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k+j-1}(j = 1, ..., N) && (4.72)\\
\mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k|k}\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\tau_k\mathbf{G}^T && (4.73)\\
\hat{x}^i_{k+j|k} &\leq \beta^i_j - (P^{ii}_{k+1|k})^{1/2}(\beta^i_j)^*(j = 1, ..., N), (i = 1, ..., n) && (4.74)\\
u_{k+j} &\leqslant \mu_j(j = 0, ..., N-1). && (4.75)
\end{aligned}$$

Nilai fungsi obyektif pada Persamaan 4.71 akan lebih kecil atau sama dengan dari Persamaan 4.66. Hal ini dikarenakan pembatasan pada nilai state menggunakan nilai kovarian error yang kecil sehingga memungkinan nilai yang didapat bisa menjadi lebih minimum. Karena bisa jadi harusnya terdapat penyelesaian nilai $\hat{\mathbf{x}}$ yang mampu membuat hasil menjadi paling minimum, namun karena adanya pembatasan yang sangat sempit akan menyebabkan penyelesaian kendala $\hat{\mathbf{x}}$ menjadi tidak dapat ditemukan.

4.4 Desain Sistem Kendali Modifikasi MPC-KF pada Permasalahan Kendali Haluan Kapal

Pada sub bab ini dijelaskan mengenai desain sistem kendali modifikasi MPC-KF pada permasalahan kendali haluan kapal dengan menerapkan formulasi yang telah didapatkan pada subbab (4.3). Perbedaan antara desain kendali Modifikasi MPC-KF dan MPC pada permasalahan kendali haluan kapal terletak pada prediksi variabel keadaan, formulasi fungsi obyektif dan formulasi kendala variabel keadaan. Untuk formulasi kendala *input* dan increment *input* pada desain kendali modifikasi MPC-KF ialah sama seperti desain kendali MPC pada sub bab (4.2.3). Pada Tesis ini penyelesaian kendali modifikasi MPC-KF dibawa ke dalam permasalahan kuadratik programming dan selanjutnya diselesaikan menggunakan *software* MATLAB. *Toolbox* MATLAB yang digunakan untuk menyelesaikan bentuk kuadratik *programming* adalah *quadprog*.

4.4.1 Prediksi Variabel Keadaan dan Keluaran pada Modifikasi MPC-KF

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada sub bab sebelumnya, prediksi variabel keadaan dan keluaran pada MPC dilakukan pada model sistem linier diskrit determinsitik. Namun dalam desain kendali Modifikasi MPC-KF, prediksi variabel keadaan dan keluaran dilakukan pada model sistem stokastik diskrit seperti yang diberikan pada Persamaan 4.9. Metode MPC masih belum cukup akurat dalam memprediksi sistem yang berbentuk stokastik. Untuk mengatasi hal ini, digunakan Kalman Filter untuk memprediksi model sistem pada proses MPC. Sebagaimana yang telah dijelaskan dalam sub bab 4.3.1, dengan menggunakan Persamaan 4.48 maka prediksi pada proses MPC untuk permasalahan model sistem stokastik dapat diselesaikan.

Asumsi bahwa pada waktu-k, vektor variabel keadaan $\hat{\mathbf{x}}(k)$ didapat melalui pengukuran, variabel keadaan $\hat{\mathbf{x}}(k)$ memberikan informasi *plant* saat ini. Trayektori prediksi *input* dinotasikan oleh

$$\{\mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k+1), \cdots, \mathbf{u}(k+N_C-1)\}$$

dimana N_C adalah kontrol horizon. Dengan diberikan informasi $\hat{\mathbf{x}}(k)$, prediksi variabel keadaan dapat diprediksi sebanyak prediksi horizon N_P. Dinotasikan prediksi variabel keadaan sebagai

$$\{\hat{\mathbf{x}}(k+1|k), \hat{\mathbf{x}}(k+2|k), \cdots, \hat{\mathbf{x}}(k+N_P|k)\}$$

dimana $\hat{\mathbf{x}}(k+m|k)$ adalah prediksi variabel keadaan pada $k+m$ dengan diberikan informasi *plant* saat ini $\hat{\mathbf{x}}(k)$. Berdasarkan model ruang keadaan pada Persamaan 4.48 dengan matriks keadaan $\mathbf{A}$, matriks *input* $\mathbf{B}$ dan matriks *output* $\mathbf{C}$ dan dipilih $N_C = N_P$, maka prediksi variabel keadaan dihitung menggunakan himpunan prediksi *input* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\
\hat{\mathbf{x}}(k+2) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k+1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\
&= \mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\
&\vdots \\
\hat{\mathbf{x}}(k+N_P) &= \mathbf{A}^{N_P}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{A}^{N_P-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{A}^{N_P-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\
&+ \cdots + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+N_P-1)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Selanjutnya, prediksi keluaran dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{y}}(k+1) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+1) \\
&= \mathbf{C}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)) \\
&= \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\
\hat{\mathbf{y}}(k+2) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+2) \\
&= \mathbf{C}(\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1)) \\
&= \mathbf{C}\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) \\
&\vdots \\
\hat{\mathbf{y}}(k+N_P) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+N_P) \\
&= \mathbf{C}(\mathbf{A}^{N_P}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{A}^{N_P-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{A}^{N_P-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) + \cdots + \\
&\quad \mathbf{B}\mathbf{u}(k+N_P-1)) \\
&= \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_P}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_P-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{N_P-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) + \cdots + \\
&\quad \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+N_P-1))
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Selanjutnya untuk membentuk formula kuadratik programming, maka didefinisikan vektor keluaran dan *input* sistem sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}(k+1) & \hat{\mathbf{y}}(k+2) & \cdots & \hat{\mathbf{y}}(k+N_P) \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) & \mathbf{u}(k+1) & \cdots & \mathbf{u}(k+N_P-1) \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

Ukuran dimensi dari $\mathbf{Y}$ dan $\mathbf{U}$ berturut-turut adalah $m_1 \cdot N_P \times 1$ dan $n_1 \cdot N_P \times 1$ dimana m_1 adalah jumlah variabel keluaran dan n_1 adalah jumlah variabel *input* atau kontrol. Berdasarkan Persamaan 4.76 dan 4.77, maka $\mathbf{Y}$ dapat dituliskan ke dalam bentuk matriks berikut:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \Phi\mathbf{U} \tag{4.78}$$

dengan

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{N_P} \end{bmatrix}; \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{CA}^{N_P-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N_P-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N_P-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CB} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya prediksi keluaran pada Persamaan 4.78 disubstitusikan ke dalam fungsi obyektif yang dibahas pada subbab selanjutnya.

4.4.2 Formulasi Fungsi Objektif pada Modifikasi MPC-KF

Fungsi obyektif pada Tesis ini ialah mengoptimalkan nilai *input* kontrol dengan tujuan untuk meminimumkan error dari selisih antara sudut hadap referensi dengan keluaran sistem berupa sudut *yaw*. Bentuk dari fungsi objektif permasalahan kendali haluan kapal diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} J(k) = \sum_{j=1}^{N_p} \quad & [(\mathbf{y}_r(k+j|k) - \mathbf{y}(k+j|k))^T \mathbf{Q}_{(j)} (\mathbf{y}_r(k+j|k) - \mathbf{y}(k+j|k)) \\ & + \mathbf{u}(k+j-1|k)^T \mathbf{R}_{(j)} \mathbf{u}(k+j-1|k)] \end{aligned} \tag{4.79}$$

dengan $\mathbf{y}(k+j|k)$ adalah prediksi *internal plat output* dimana model sistem telah berbentuk stokastik, $\mathbf{u}(k+j-1|k)$ adalah variabel *input* kedepan. Pada permasalahan ini model sistem yang digunakan berbentuk stokastik seperti pada Persamaan 4.9. Akibatnya bentuk fungsi obyektif pada Persamaan 4.79 menjadi sebuah kuantitas acak yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} J(k) \quad &= \quad E[\sum_{j=1}^{N_p} [(\mathbf{y}_r(k+j|k) - \mathbf{y}(k+j|k))^T \mathbf{Q}_{(j)} (\mathbf{y}_r(k+j|k) - \mathbf{y}(k+j|k)) \\ &+ \quad \mathbf{u}(k+j-1|k)^T \mathbf{R}_{(j)} \mathbf{u}(k+j-1|k)] \end{aligned} \tag{4.80}$$

Dalam optimasi MPC, fungsi obyektif harus berbentuk deterministik sehingga fungsi obyektif pada Persamaan 4.80 belum dapat diselesaikan. Untuk mengatasi permasalahan ini, sebagaimana yang telah dijelaskan dalam sub bab (4.3.3), maka fungsi obyektif pada Persamaan 4.80 dapat diubah sebagai berikut:

$$J(k) = \sum_{j=1}^{N_p} \quad [(\mathbf{y}_r(k+j|k) - \hat{\mathbf{y}}(k+j|k))^T \mathbf{Q}_{(j)} (\mathbf{y}_r(k+j|k) - \hat{\mathbf{y}}(k+j|k)) + \mathbf{u}(k+j-1|k)^T \mathbf{R}_{(j)} \mathbf{u}(k+j-1|k)] \tag{4.81}$$

Perbedaan fungsi obyektif pada Persamaan 4.79 dan 4.81 ialah pada prediksi keluaran sistem $\hat{\mathbf{y}}(k+j|k)$. Pada Persamaan 4.79 prediksi keluaran sistem masih menggunakan model sistem yang berbentuk stokastik, namun pada Persamaan 4.81 prediksi keluaran sistem telah menggunakan Persamaan 4.48 yang diprediksi menggunakan metode Kalman Filter.

Selanjutnya berdasarkan bentuk umum fungsi objektif pada Persamaan 4.81, maka dapat dituliskan kembali menjadi persamaan berikut:

$$J = (\mathbf{R}_s - \mathbf{Y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{R}_s - \mathbf{Y}) + \mathbf{U}^T \mathbf{R} \mathbf{U} \tag{4.82}$$

dimana

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_r(k+1) \\ \mathbf{y}_r(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_r(k+N_P) \end{bmatrix}; \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{Q}_{N_P} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{R}_{N_P} \end{bmatrix}$$

dengan mensubstitusikan Persamaan 4.78 ke dalam Persamaan 4.82, maka diperoleh

$$\begin{aligned} J &= (\mathbf{R}_s - [\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \Phi\mathbf{U}])^T\mathbf{Q}(\mathbf{R}_s - [\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \Phi\mathbf{U}]) + \mathbf{U}^T\mathbf{R}\mathbf{U} \\ &= (\mathbf{R}_s - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) - \Phi\mathbf{U})^T\mathbf{Q}(\mathbf{R}_s - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) - \Phi\mathbf{U}) + \mathbf{U}^T\mathbf{R}\mathbf{U} \\ &= \mathbf{R}_s^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s - \mathbf{R}_s^T\mathbf{Q}\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{R}_s^T\mathbf{Q}\Phi\mathbf{U} - \hat{\mathbf{x}}^T(k)\mathbf{F}^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s + \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}^T(k)\mathbf{F}^T\mathbf{Q}\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{x}}^T(k)\mathbf{F}^T\mathbf{Q}\Phi\mathbf{U} - \mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s + \mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \\ &\quad \mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\Phi\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{R}\mathbf{U} \\ &= \mathbf{R}_s^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s - 2\hat{\mathbf{x}}^T(k)\mathbf{F}^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s - 2\mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s + \hat{\mathbf{x}}^T(k)\mathbf{F}^T\mathbf{Q}\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \\ &\quad 2\mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{U}^T(\Phi^T\mathbf{Q}\Phi + \mathbf{R})\mathbf{U} \end{aligned}$$

Selanjutnya suku-suku yang tidak mengandung variabel $\mathbf{U}$ dapat dihilangkan dari proses optimasi, sehingga diperoleh nilai J yang baru sebagai berikut:

$$\begin{aligned} J &= -2\mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_s + 2\mathbf{U}^T\Phi^T\mathbf{Q}\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{U}^T(\Phi^T\mathbf{Q}\Phi + \mathbf{R})\mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^T(2\Phi^T\mathbf{Q}[\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{R}_s]) + \frac{1}{2}\mathbf{U}^T(2[\Phi^T\mathbf{Q}\Phi + \mathbf{R}])\mathbf{U} \end{aligned}$$

dengan memisalkan $\mathbf{f} = 2\Phi^T\mathbf{Q}[\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{R}_s]$ dan $\mathbf{H} = 2[\Phi^T\mathbf{Q}\Phi + \mathbf{R}]$, maka diperoleh

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{H}\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{f} \tag{4.83}$$

4.4.3 Formulasi Kendala Variabel Keadaan pada Modifikasi MPC-KF

Kendala pada Persamaan 4.19 merupakan kendala variabel keadaan pada saat sistem berbentuk determinsitik. Dalam kendali Modifikasi MPC-KF, keberadaan *noise* yang melekat pada sistem dipertimbangkan sehingga model sistem berbentuk stokastik dan memberikan perubahan juga pada kendala variabel keadaan. Sebagaimana yang telah dijelaskan dalam subbab (4.3), kendala variabel keadaan pada Persamaan 4.19 kini berbentuk probabilitas seperti pada Persamaan 4.58 sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &P_r(x_i^{min} \leq x_i(k+j) \leqslant x_i^{max}) \geq p_i \\ &j = 1, 2, 3, \cdots, N_P, i = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{4.84}$$

dimana $x_i(k+j)$ adalah elemen ke-i dari state $\mathbf{x}(k+j)$, x_i^{min} dan x_i^{max} adalah batas atas dan bawah pada kendala state $x_i(k+j)$ serta p_i adalah nilai probabilitas terpenuhinya kendala state dalam batas yang diberikan. Selanjutnya kendala probabilistik variabel keadaan pada Persamaan 4.84 diubah ke dalam bentuk deterministik sehingga optimasi pada MPC dapat dilakukan. Adapun langkah-langkah dalam mengubah kendala probabilistik menjadi deterministik telah dijelaskan dalam sub bab (4.3.2) pada Persamaan 4.60 dan 4.61 sehingga Persamaan 4.84 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{x}_i(k+j) \leq x_i^{max} - (P_{ii}^{1/2}(k+j))a_i^* \tag{4.85}$$

$$-\hat{x}_i(k+j) \leq -x_i^{min} + (P_{ii}^{1/2}(k+j))b_i^* \tag{4.86}$$

dimana $\hat{x}_i(k+j|k)$ merupakan prediksi variabel keadaan pada Persaman 4.48 yang diprediksi menggunakan metode Kalman Filter. $P_{ii}(k+j|k)$ ialah elemen dari baris ke-i dan kolom ke-i dari kovarian prediksi pada Persamaan 4.49. a_i^* adalah solusi dari fungsi $\Phi(x_i^*) = \frac{1-p_i}{2}$ dimana $\Phi(.)$ adalah cumulatif distibusi function dari distribusi normal standar, sehingga untuk setiap $\frac{1-p_i}{2}$ yang diberikan akan berkorespondensi dengan a_i^* yang dapat ditemukan pada Tabel distribusi normal standar. Begitu pula dengan b_i^* adalah solusi dari fungsi $\Phi(x_i^*) = \frac{1+p_i}{2}$ dimana $\Phi(.)$ adalah cumulatif distibusi function dari distribusi normal standar, sehingga untuk setiap $\frac{1+p_i}{2}$ yang diberikan akan berkorespondensi dengan b_i^* yang dapat ditemukan pada Tabel distribusi normal standar.

Selanjutnya pada Persamaan 4.85 dan 4.86 terlihat bahwa nilai $P_{ii}(k+j|k)$ akan semakin besar untuk j yang terus meningkat. Hal ini akan berakibat pada solusi daerah penyelesaian nilai $\hat{x}_i(k+j|k)$ menjadi lebih susah untuk didapatkan, bahkan solusi mungkin tidak dapat ditemukan untuk nilai horizon prediksi N_P yang sangat besar. Untuk mengatasi permasalahan ini maka nilai $P_{ii}(k+j|k)$ yang digunakan dalam Persamaan 4.85 dan 4.86 hanyalah vektor pertama barisan kovarian error pada Persamaan 4.49 sebagaimana yang telah dijelaskan dalam subbab (4.3.3). Dengan demikian kendala deterministik variabel keadaan pada Persamaan 4.85 dan 4.86 dapat diubah sebagai berikut:

$$\hat{x}_i(k+j) \leq x_i^{max} - (P_{ii}^{1/2})(k+1)a_i^* \tag{4.87}$$

$$-\hat{x}_i(k+j) \leq -x_i^{min} + (P_{ii}^{1/2}(k+1))b_i^* \tag{4.88}$$

$$j = 1, 2, 3, \cdots, N_P, i = 1, \cdots, n$$

Dengan menggunakan Persamaan 4.87 4.88 maka kendala variabel keadaan telah menjadi deterministik dan dapat digunakan dalam optimasi MPC-KF. Selanjutnya Persamaan 4.85 dibentuk menjadi bentuk matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+j|k) \leq \begin{bmatrix} x_i^{max} \\ -x_i^{min} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{ii}^{1/2}(k+1|k) \\ P_{ii}^{1/2}(k+1|k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i^* \\ b_i^* \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Dari persamaan 4.89 dapat diperoleh matriks berikut:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} x_i^{max} \\ -x_i^{min} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} P_{ii}^{1/2}(k+1|k) \\ P_{ii}^{1/2}(k+1|k) \end{bmatrix}; \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} a_i^* \\ b_i^* \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk $j = 1, 2, 3, \cdots, N_P$ dan merujuk pada prediksi variabel keadaan 4.76 dan 4.77, maka kendala state dari optimasi kuadratik *programming* pada Persamaan 4.83 adalah

$$\Phi_1 \mathbf{U} \leq \mathbf{D} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}k - \mathbf{JWL} \quad (4.90)$$

dimana

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}; \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{A} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^{N_P} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1\mathbf{B} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}_1\mathbf{B} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{C}_1\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{C}_1\mathbf{B} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}^{N_P-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}_1\mathbf{A}^{N_P-2}\mathbf{B} & \mathbf{C}_1\mathbf{A}^{N_P-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{C}_1\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{J}_1 \end{bmatrix}; \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_1 \end{bmatrix}; \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{W}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{W}_1 \end{bmatrix}$$

Permasalahan kendali modifikasi MPC-KF telah dibawa ke dalam bentuk kuadratik *programming*. Selanjutnya permasalahan ini diselesaikan menggunakan toolbox *quadprog* pada MATLAB dengan diberikan fungsi obyektif 4.83 serta kendala-kendala 4.22, 4.26 dan 4.90.

4.5 Algoritma Model Predictive Control dengan dan tanpa mempertimbangkan keberadaan *noise*

Pada sub bab ini dijelaskan beberapa algoritma metode MPC dalam mengatasi permasalahan yang mempertimbangkan keberadaan *noise*. Diberikan empat algoritma metode MPC yang berbeda bergantung pada permasalahan yang dihadapi yaitu algoritma metode standar MPC tanpa mempertimbangkan keberadaan *noise*, metode standar MPC dengan mempertimbangkan keberadaan *noise*, metode MPC-KF dengan mempertimbangkan keberadaan *noise* dan metode Modifikasi MPC-KF. Perbedaan masing-masing algoritma terletak pada bentuk model sistem dan kendala variabel keadaan yang digunakan dan dijelaskan sebagai berikut:

1. Dalam algoritma metode standar MPC tanpa mempertimbangkan keberadaan *noise*, model sistem yang digunakan ialah model sistem deterministik dengan kendala variabel keadaan berbentuk deterministik.

2. Dalam algoritma standar MPC dengan mempertimbangkan keberadaan *noise*, model sistem yang digunakan ialah model sistem stokastik dengan kendala variabel keadaan berbentuk deterministik. Pada algoritma ini prediksi horizon yang dilakukan dalam proses optimasi MPC juga memperhatikan faktor *noise* pada model sistem.

3. Dalam algoritma MPC-KF dengan mempertimbangkan keberadaan *noise*, model sistem yang digunakan ialah model sistem stokastik dengan kendala variabel keadaan deterministik. Pada metode ini Kalman Filter digunakan untuk menggantikan proses prediksi yang dilakukan oleh MPC untuk mengatasi *noise* yang diberikan pada model sistem.

4. Pada algortima modifikasi MPC-KF, model sistem yang digunakan berbentuk stokastik dengan kendala pada variabel keadaan berbentuk probabilistik. Pada algoritma ini Kalman Filter digunakan untuk memprediksi model sistem stokastik dan kovarian error prediksi pada algoritma Kalman Filter juga digunakan untuk memodifikasi kendala pada variabel keadaan sehingga penyelesaian modifikasi MPC-KF dapat memenuhi kendala yang diberikan.

Tabel 4.3: Algoritma Standar MPC dengan dan tanpa *noise*.

	Standar MPC tanpa *noise*	Standar MPC dengan *noise*
Model Sistem	$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k)$	$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k)$ $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)$
Fungsi Objektif	$J = \sum_{j=1}^{N_p}[(\mathbf{y}_r(k+j\|k) - \mathbf{y}(k+j\|k))^T$ $\mathbf{Q}_j(\mathbf{y}_r(k+j\|k) - \mathbf{y}(k+j\|k))$ $+\mathbf{u}^T(k+j-1\|k)\mathbf{R}_j\mathbf{u}(k+j-1\|k)]$	$J = \sum_{j=1}^{N_p}[(\mathbf{y}_r(k+j\|k) - \mathbf{y}(k+j\|k))^T$ $\mathbf{Q}_j(\mathbf{y}_r(k+j\|k) - \mathbf{y}(k+j\|k))$ $+\mathbf{u}^T(k+j-1\|k)\mathbf{R}_j\mathbf{u}(k+j-1\|k)]$
Kendala	$\bullet\mathbf{x}(k+j\|k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k+j-1\|k)$ $+\mathbf{B}\mathbf{u}(k+j-1\|k)$ $\bullet\mathbf{C}_1\mathbf{x}(k+j\|k) \leq \mathbf{D}_1$ $\bullet\mathbf{S}\mathbf{u}(k+j-1\|k) \leq \mathbf{T}$ $\bullet\mathbf{S}\Delta\mathbf{u}(k+j-1\|k) \leq \mathbf{V}$	$\bullet\mathbf{x}(k+j\|k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k+j-1\|k)$ $+\mathbf{B}\mathbf{u}(k+j-1\|k) + \mathbf{w}(k+j\|k)$ $\bullet\mathbf{C}_1\mathbf{x}(k+j\|k) \leq \mathbf{D}_1$ $\bullet\mathbf{S}\mathbf{u}(k+j-1\|k) \leq \mathbf{T}$ $\bullet\mathbf{S}\Delta\mathbf{u}(k+j-1\|k) \leq \mathbf{V}$
Algoritma	**1)** Pada waktu ke-k, lakukan optimasi MPC pada fungsi objektif dan kendala yang diberikan dengan insialisasi variabel keadaan $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k\|k)$ untuk mendapatkan barisan barisan kontrol optimal $\{\mathbf{u}(k), ..., \mathbf{u}(k+N_p-1)\}$. **2)** Pilih $\mathbf{u}(k)$ untuk diterapkan ke dalam model sistem sehingga didapatkan prediksi model sistem $\mathbf{x}(k+1)$. **3)** Iterasi waktu ke-k ditambah 1, ulangi dari langkah 1.	**1)** Pada waktu ke-k, lakukan optimasi MPC pada fungsi objektif dan kendala yang diberikan dengan insialisasi variabel keadaan $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k\|k)$ untuk mendapatkan barisan kontrol optimal $\{\mathbf{u}(k), ..., \mathbf{u}(k+N_p-1)\}$. **2)** Pilih $\mathbf{u}(k)$ untuk diterapkan diterapkan ke dalam model sistem sehingga didapatkan prediksi model sistem $\mathbf{x}(k+1)$ dengan menggenerate *noise* pada model sistem. **3)** Iterasi waktu ke-k ditambah 1, ulangi dari langkah 1.

Perbedaan setiap metode dapat dilihat lebih jelas pada Tabel 4.3 dan Tabel 4.4. Pada metode standar MPC tanpa *noise*, model sistem yang digunakan berbentuk deterministik, namun pada metode Standar MPC dengan *noise*, model sistem dan *output* sistem menggenerate *noise* sistem dan pengukuran yang berdistribusi *white noise gaussian*. Selanjutnya pada metode MPC-KF, Kalman Filter digunakan untuk menggantikan proses prediksi MPC. Adapun perbedaannya dengan modifikasi MPC-KF terletak pada kendala variabel keadaan. Pada metode modifikasi MPC-KF, kovarians error prediksi pada Kalman Filter digunakan untuk memodifikasi kendala variabel keadaan.

Tabel 4.4: Algoritma MPC-KF dan Modifikasi MPC-KF

	MPC-KF	Modifikasi MPC-KF
Model Sistem	$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k)$ $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)$	$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k)$ $\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)$
Fungsi Objektif	$J = \sum_{j=1}^{N_p}[(\mathbf{y}_r(k+j\|k) - \hat{\mathbf{y}}(k+j\|k))^T\mathbf{Q}_j$ $(\mathbf{y}_r(k+j\|k) - \hat{\mathbf{y}}(k+j\|k))$ $+\mathbf{u}^T(k+j-1\|k)\mathbf{R}_j\mathbf{u}(k+j-1\|k)]$	$J = \sum_{j=1}^{N_p}[(\mathbf{y}_r(k+j\|k) - \hat{\mathbf{y}}(k+j\|k))^T\mathbf{Q}_j$ $(\mathbf{y}_r(k+j\|k) - \hat{\mathbf{y}}(k+j\|k))$ $+\mathbf{u}^T(k+j-1\|k)\mathbf{R}_j\mathbf{u}(k+j-1\|k)]$
Kendala	$\bullet\hat{\mathbf{x}}(k+j\|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k+j-1\|k)$ $+\mathbf{B}\mathbf{u}(k+j-1\|k)$ $\bullet\mathbf{C}_1\mathbf{x}(k+j\|k) \leq \mathbf{D}_1$ $\bullet\mathbf{S}\mathbf{u}(k+j\|k) \leq \mathbf{T}$ $\bullet\mathbf{S}\Delta\mathbf{u}(k+j\|k) \leq \mathbf{V}$	$\bullet\hat{\mathbf{x}}(k+j\|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k+j-1\|k)$ $+\mathbf{B}\mathbf{u}(k+j-1\|k)$ $\bullet\mathbf{P}(k+1\|k) = \mathbf{A}\mathbf{P}(k\|k)\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\tau_k\mathbf{G}^T$ $\bullet\mathbf{S}\mathbf{u}(k+j\|k) \leq \mathbf{T}$ $\bullet\mathbf{S}\Delta\mathbf{u}(k+j\|k) \leq \mathbf{V}$ $\bullet\hat{x}^i_{k+j\|k} \leq \beta^i_j - (P^{ii}_{k+1\|k})^{1/2}(\beta^i_j)^*$
Algoritma	**1)**Pada waktu ke-k, lakukan optimasi MPC pada fungsi objektif dan kendala untuk mendapatkan barisan kontrol optimal $\{\mathbf{u}(k), ..., \mathbf{u}(k+N_p-1)\}$. **2)** Pilih $\mathbf{u}(k)$ untuk diterapkan ke dalam model sistem sehingga didapatkan prediksi model sistem $\mathbf{x}(k+1)$. **3)** Lakukan kembali prediksi menggunakan Kalman Filter untuk mendapatkan estimasi tahap koreksi $\hat{\mathbf{x}}(k+1\|k)$. **4)** Iterasi waktu ke-k ditambah 1, ulangi dari langkah 1.	**1)** Pada waktu ke-k, substitusikan kovarians error $\mathbf{P}(k\|k)$ ke dalam kendala variabel keadaan. **2)**Lakukan optimasi MPC pada fungsi objektif dan kendala untuk mendapatkan barisan kontrol optimal $\{\mathbf{u}(k), ..., \mathbf{u}(k+N_p-1)\}$. **3)** Pilih $\mathbf{u}(k)$ untuk diterapkan ke dalam model sistem sehingga didapatkan prediksi model sistem $\mathbf{x}(k+1)$. **4)** Lakukan kembali prediksi menggunakan Kalman Filter untuk mendapatkan estimasi tahap koreksi $\hat{\mathbf{x}}(k+1\|k)$ dan kovarian error koreksi $\mathbf{P}(k+1\|k)$ **5)** Iterasi waktu ke-k ditambah 1, ulangi dari langkah 1.

4.6 Simulasi dan Analisis Penerapan Modifikasi *Model Predictive Control-Kalman Filter* (MPC-KF) dan Modifikasi Model Predictive Control (MPC) pada Kendali Haluan Kapal

Pada bagian ini menjelaskan tentang hasil simulasi yang dilakukan dan analisis dari performansi sistem kendali haluan kapal dengan menggunakan kendali Standar MPC, Standar MPC dengan mempertimbangkan *noise*, MPC-KF dengan mempertimbangkan oise dan Modifikasi MPC-KF dengan mempertimbangkan *noise*. Selanjutnya simulasi kendali modifikasi MPC-KF dilakukan dengan variansi pertimbangan nilai *noise* yang melekat pada sistem. Hal ini dilakukan untuk mengetahui respon metode modifikasi MPC-KF dalam mengatasi *noise* yang dipertimbangkan tersebut.

Simulasi kendali Modifikasi MPC-KF dan MPC dilakukan melalui model sistem linier diskrit yang telah didapatkan sebelumnya. Model sistem linier diskrit yang digunakan dalam permasalahan kendali haluan kapal dapat dilihat pada Persamaan 4.7 dimana matriks **A**, **B** dan **C** diberikan sebagai berikut:

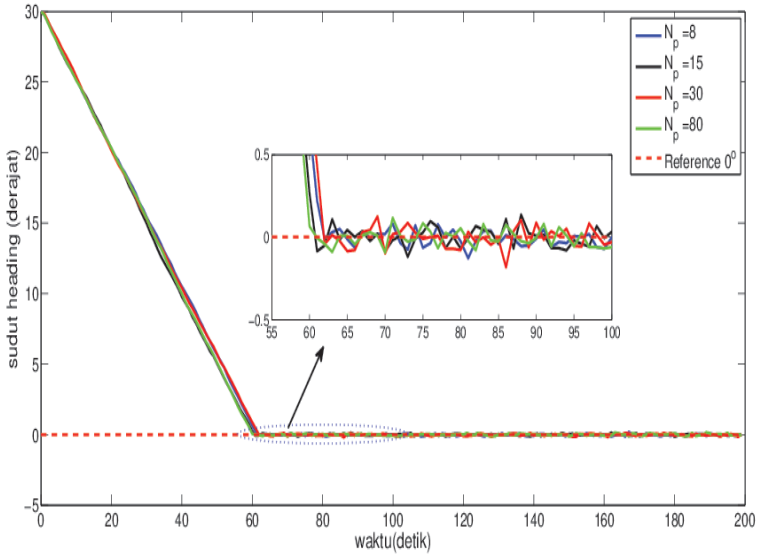
$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0,9386 & -0,0102 & 0 \\ -0,5097 & 0,6591 & 0 \\ 0 & 0,1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} -9,550 \\ 222,89 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Pada Tesis ini satuan sudut *yaw* yang terbentuk adalah radian (rad), sehingga diasumsikan *noise* sistem yang terjadi pada sudut sebesar $0,001$ rad atau sekitar $0,057$ derajat. Selanjutnya satuan kecepatan sudut *yaw* adalah rad/s, diketahui bahwa batas maksimal kecepatan sudut *yaw* pada kapal adalah $0,0932$ rad/s, sehingga diasumsikan nilai *noise* pada kecepatan sudut *yaw* adalah $0,00001$ rad/s. Kemudian satuan kecepatan *sway*diketahui bahwa gangguan pada kondisi lingkungan diasumsikan sangat kecil sehingga kecepatan *sway*adalah m/s, diasumsikan kapal bergerak dengan kecepatan $0,2$ m/s karena gangguan lingkungan diasumsikan sangat kecil sehingga dapat diabaikan, sehingga *noise* pada kecepatan *sway* diasumsikan sebesar $0,001$ m/s.

Selanjutnya dalam simulasi ini, diberikan kendala sudut *rudder* $\mid \delta \mid \leq 35$ derajat, kendala perubahan sudut *rudder* $\mid \Delta\delta \mid \leq 5$ derajat dan *yaw rate* $\mid r \mid \leq 0,0932$ rad/s $(0,34$ derajat/s$)$. Untuk kendala variabel keadaan diasumsikan memiliki peluang yang besar untuk dipenuhi yaitu $p_j^i = 0,9505$, sehingga didapatkan $a_i^* = 1,95$ dan $b_i^* = -1,95$. Adapun matriks yang bersesuaian dengan $\mathbf{C}_1$,$\mathbf{D}_1$,$\mathbf{S}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{L}_1$ dan $\mathbf{W}_1$ (4.23, 4.27, 4.30 dan 4.90) diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0,0932 \\ 0,0932 \end{bmatrix} \\
\mathbf{L}_1 &= \begin{bmatrix} 1,95 \\ -1,95 \end{bmatrix}; \mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 35\pi/180 \\ 35\pi/180 \end{bmatrix}; \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 5\pi/180 \\ 5\pi/180 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Pada Tesis ini, simulasi skema MPC dilakukan dengan variasi nilai prediksi horizon yaitu 8, 15, 30, dan 80 dimana $N_c = N_p$. Simulasi yang dilakukan menggunakan nilai koefisien bobot $Q = 1$ dan $R = 0.1$. Hasil simulasi dapat dilihat pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4: Simulasi Modifikasi MPC-KF dengan Variasi Prediksi Horizon.

Berdasarkan Gambar 4.4 terlihat bahwa perbedaan nilai prediksi horizon mempengaruhi respon sistem menuju referensi yang diberikan. Nilai *Root Mean Square Error* (RMSE) diusulkan untuk mengetahui kuantitas respon sistem dari prediksi horizon. Dalam simulasi ini dilakukan 10 kali percobaan untuk kemudian dilakukan rata-rata. Hal ini dikarenakan nilai *noise* yang selalu mengalami perubahan sehingga perlu dilakukan beberapa kali percobaan hingga didapatkan kesimpulan. Adapun pengaruh pemberian prediksi horizon N_p pada respon sistem dapat dilihat pada Tabel 4.5. Berdasarkan Tabel 4.5 terlihat bahwa nilai RMSE terkecil diberikan oleh prediksi hotizon $N_p = 15$. Untuk selanjutnya, nilai prediksi horizon tersebut yang digunakan dalam simulasi baik untuk metode Modifikasi MPC-KF maupun metode MPC.

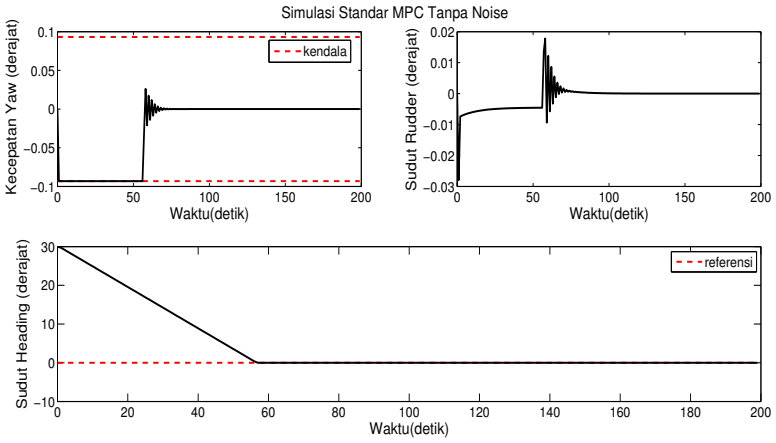
Tabel 4.5: Pengaruh Prediksi Horizon pada Respon Sistem.

Percobaan	RMSE			
	$N_p = 5$	$N_p = 15$	$N_p = 30$	$N_p = 80$
1	0, 1608211	0, 1609355	0, 1609151	0, 1610472
2	0, 1608646	0, 1608301	0, 1610391	0, 1609669
3	0, 1610343	0, 1609869	0, 1610703	0, 1608934
4	0, 1610702	0, 1609292	0, 1609228	0, 1608315
5	0, 1609159	0, 1609564	0, 1609010	0, 1609861
6	0, 1608118	0, 1608245	0, 1609093	0, 1609349
7	0, 1607672	0, 1608628	0, 1609466	0, 1610277
8	0, 1611351	0, 1609306	0, 1609351	0, 1609594
9	0, 1608143	0, 1610289	0, 1608553	0, 1610875
10	0, 1611623	0, 1609428	0, 1610429	0, 1610496
Rata-rata	0, 1609397	0, 1609391	0, 1609537	0, 1609784

4.6.1 Simulasi Standar MPC pada kendali haluan kapal

Dalam simulasi ini permasalahan kendali haluan kapal menggunakan model sistem deterministik pada Persamaan 4.7-4.8. Pada simulasi ini diberikan nilai awal nilai awal sudut *yaw* kapal ialah 30^o dan sudut hadap referensi sebesar 0^o dengan total waktu 200 detik.

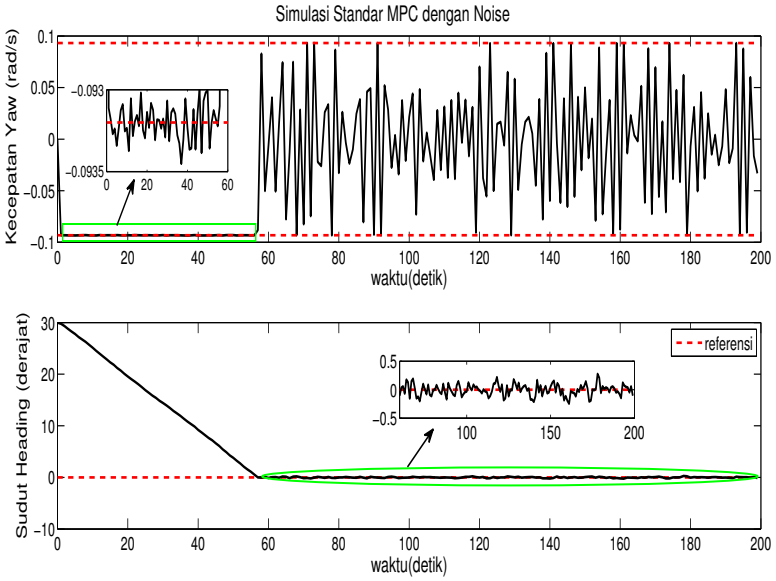
Gambar 4.5 menunjukkan bahwa kapal mampu bergerak dari sudut 30^o menuju referensi sudut hadap yang diinginkan yaitu 0^o. Pada Gambar 4.5 terlihat bahwa kapal mampu mencapai sudut hadap 0^o pada waktu sekitar 56.5408 detik dengan batasan kendala pada kecepatan *yaw* dan sudut ruddder juga terpenuhi. Dengan demikian metode Standar MPC mampu memberikan respon yang baik dalam menyelesaikan permasalan kendali haluan kapal.



Gambar 4.5: Simulasi Standar MPC tanpa mempertimbangkan *noise*

4.6.2 Simulasi Standar MPC pada kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan keberadaan *noise*

Dalam simulasi ini permasalahan kendali haluan kapal menggunakan model sistem stokastik pada Persamaan 4.9-4.10 dengan kendala berupa deterministik. Pada simulasi ini juga diberikan nilai awal nilai awal sudut *yaw* kapal ialah 30^o dan sudut hadap referensi sebesar 0^o dengan total waktu 200 detik.

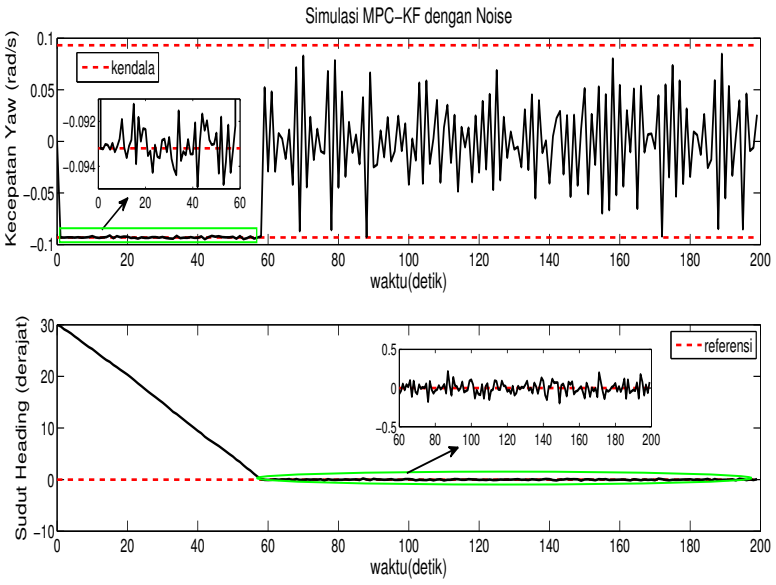


Gambar 4.6: Simulasi Standar MPC dengan mempertimbangkan *noise*

Gambar 4.6 menunjukkan bahwa kapal mampu bergerak dari sudut 30^o menuju referensi sudut hadap yang diinginkan yaitu 0^o. Pada Gambar 4.6 terlihat bahwa kapal mampu mencapai sudut hadap 0^o pada waktu sekitar 57.0590 detik, namun belum mampu memenuhi batasan kendala pada kecepatan *yaw* pada waktu 1-60 detik. Dengan demikian metode Standar MPC belum mampu mengatasi permasalahan berbentuk sistem stokastik karena adanya kendala batas yang masih dilanggar.

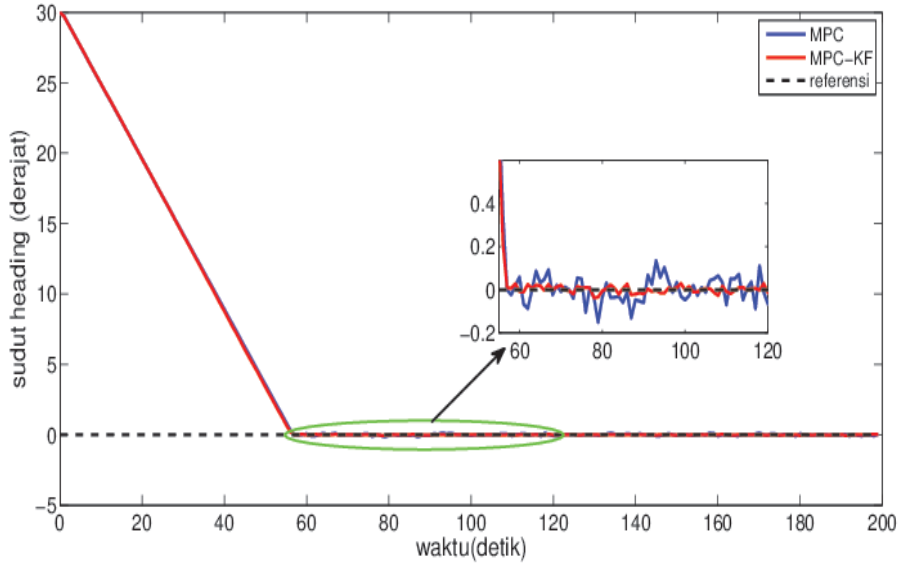
4.6.3 Simulasi MPC-KF pada kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan keberadaan *noise*

Selanjutnya dalam simulasi ini melanjutkan permasalahan kendali haluan kapal menggunakan model sistem stokastik yang telah dilakukan pada subbab 4.5.2. Pada subbab 4.5.2 metode Standar MPC belum mampu mengatasi permasalahan dengan sistem stokastik, hal ini dikarenakan nilai prediksi yang didapatkan pada proses MPC kurang tepat karena adanya nilai *noise* yang selalu berubah secara acak. Untuk mengatasi hal ini maka sebuah estimator yaitu Kalman Filter digunakan untuk menggantikan prediksi pada proses MPC untuk mengatasi permasalahan dengan sistem stokastik. Pada simulasi ini juga diberikan nilai awal nilai awal sudut *yaw* kapal ialah 30^o dan sudut hadap referensi sebesar 0^o dengan total waktu 200 detik.



Gambar 4.7: Simulasi MPC-KF dengan mempertimbangkan *noise*

Gambar 4.7 menunjukkan bahwa kapal mampu bergerak dari sudut 30^o menuju referensi sudut hadap yang diinginkan yaitu 0^o. Pada Gambar 4.7 terlihat bahwa kapal mampu mencapai sudut hadap 0^o pada waktu sekitar 57.8140 detik, namun belum mampu juga dalam memenuhi batasan kendala pada kecepatan *yaw* pada waktu 1-60 detik. Dengan demikian metode MPC-KF belum mampu juga mengatasi permasalahan berbentuk sistem stokastik karena adanya kendala batas yang masih dilanggar. Akan tetapi ketika metode MPC-KF dibandingkan dengan Standar MPC dalam mengatasi permasalahan dengan sistem stokastik, maka didapatkan bahwa metode MPC-KF memberikan hasil yang lebih baik. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 4.8.



Gambar 4.8: Simulasi Perbandingan Standar MPC dan MPC-KF dengan mempertimbangkan keberadaan *noise*

Gambar 4.8 menunjukkan perbandingan sudut hadap kapal menggunakan metode Standar MPC dan MPC-KF dalam menghadapi permasalahan dengan mempertimbangkan keberadaan *noise*. pada Gambar 4.8 terlihat bahwa dengan menggunakan metode MPC-KF, sudut hadap kapal berosilasi lebih kecil pada waktu 60-200 detik dibandingkan menggunakan metode Standar MPC. Adapun simulasi perbandingan kedua metode yang dilakukan sebanyak 20 kali dengan melihat perbandingan RMSE metode MPC-KF dan Standar MPC terhadap sudut hadap referensi selama waktu 200 detik diberikan pada Tabel 4.6

Tabel 4.6: Perbandingan RMSE Standar MPC dan MPC-KF.

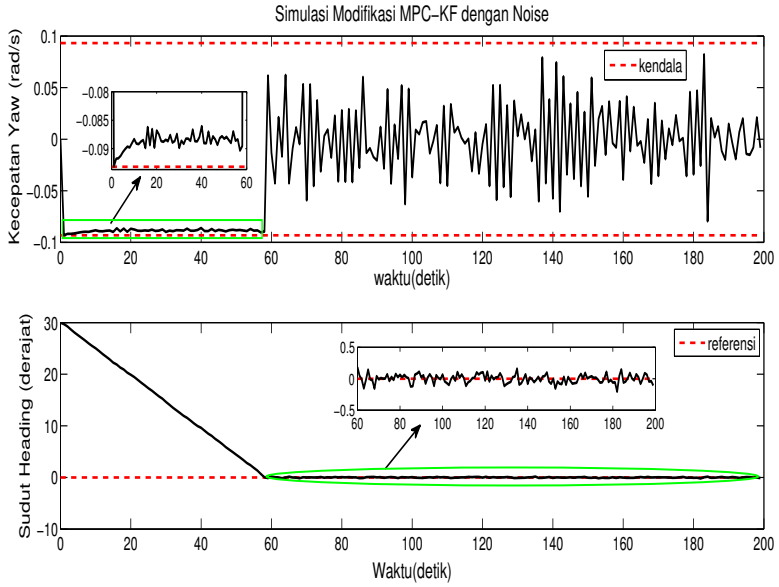
Percobaan	RMSE MPC	RMSE MPC-KF	Percobaan	RMSE MPC	RMSE MPCKF
1	0, 162435	0, 159603	11	0, 166101	0, 170070
2	0, 168653	0, 168430	12	0, 169445	0, 160379
3	0, 164964	0, 166160	13	0, 168673	0, 15919
4	0, 165835	0, 161751	14	0, 165974	0, 168769
5	0, 168662	0, 166480	15	0, 161235	0, 167898
6	0, 171018	0, 158189	16	0, 171248	0, 168108
7	0, 165586	0, 166236	17	0, 163376	0, 163712
8	0, 156934	0, 162086	18	0, 169454	0, 167679
9	0, 161310	0, 164700	19	0, 171316	0, 166199
10	0, 159041	0, 166227	20	0, 171285	0, 161915

Berdasarkan Tabel 4.6 maka didapatkan rata-rata RMSE MPC ialah sebesar $0, 166127$ dan rata-rata RMSE MPC-KF sebesar $0, 164689$. Oleh karena itu dapat disimpulkan penggunaan Kalman Filter untuk menggantikan proses prediksi pada MPC memberikan pengaruh yang cukup baik meskipun masih belum memenuhi kendala batas yang diberikan.

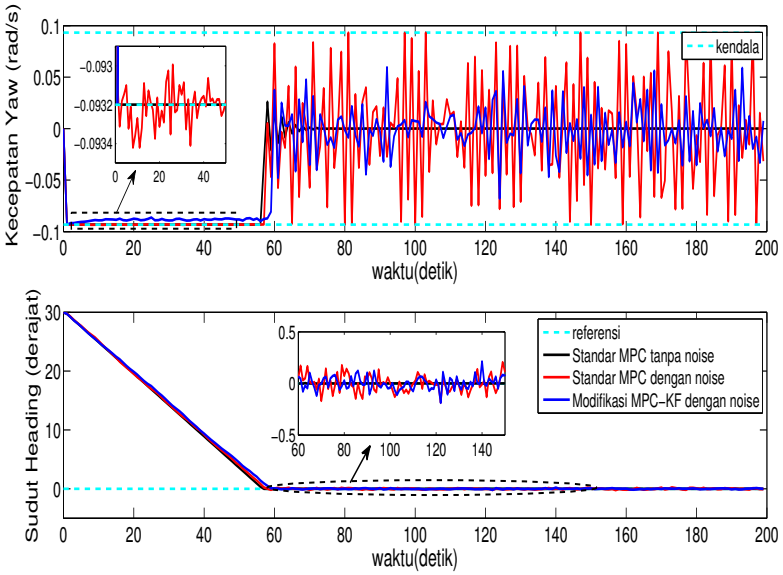
4.6.4 Simulasi Modifikasi MPC-KF pada kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan keberadaan *noise*

Pada sub bab sebelumnya permasalahan dengan sistem stokastik masih belum mampu diselesaikan karena kendala batas masih dilanggar. Selanjutnya metode Modifikasi MPC-KF digunakan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Pada permasalahan ini kendala pada variabel keadaan berubah menjadi bentuk probabilistik sebagai akibat dari model sistem yang berbentuk stokastik. Pada simulasi ini diberikan nilai awal sudut *yaw* kapal ialah 30^o dan sudut hadap referensi sebesar 0^o dengan total waktu 200 detik.

Gambar 4.9 menunjukkan bahwa kapal mampu bergerak dari sudut 30^o menuju referensi sudut hadap yang diinginkan yaitu 0^o. Pada Gambar 4.9 terlihat bahwa kapal mampu mencapai sudut hadap 0^o pada waktu sekitar 58.2652 detik dengan batasan kendala pada kecepatan *yaw* dan sudut *rudder* juga terpenuhi. Dengan demikian metode modifikasi MPC-KF mampu memberikan respon yang baik pada sudut heading kapal dengan permasalahan sistem stokastik meskipun waktu untuk menuju sudut hadap referensi lebih lambat sedikit dibanding metode Standar MPC dan MPC-KF.



Gambar 4.9: Simulasi Modifikasi MPC-KF dengan mempertimbangkan *noise*



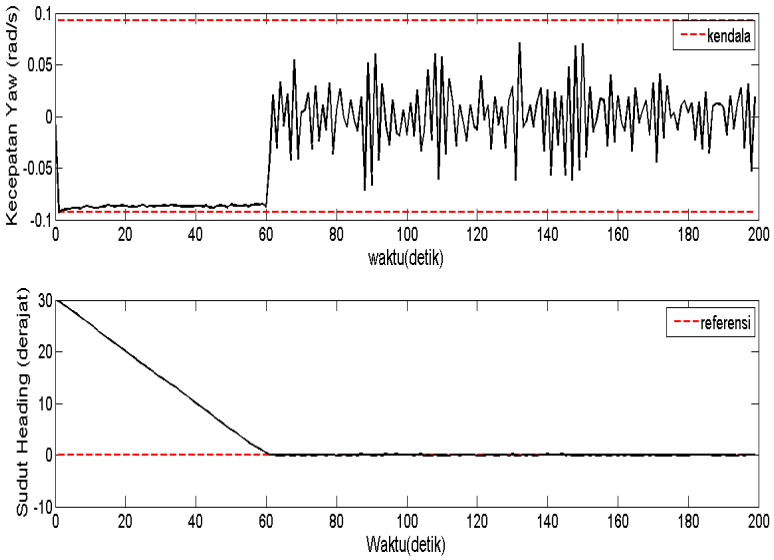
Gambar 4.10: Simulasi Perbandingan Standar MPC dan Modifikasi MPC-KF dengan mempertimbangkan *noise*

Gambar 4.10 merupakan perbandingan antara metode Standar MPC tanpa *noise*, Standar MPC dengan mempertimbangkan *noise* dan Modifikasi MPC-KF dengan mempertimbangkan keberadaan *noise*. Pada simulasi ini Standar MPC tanpa *noise* diasumsikan sebagai metode kontrol yang memberikan nilai

paling optimal dimana sudut heading kapal mampu mencapai sudut referensi yang diberikan pada waktu ke- $56,5408$ detik dan memenuhi semua kendala batas yang diberikan. Selanjutnya ketika permasalahan berbentuk stokastik, metode Standar MPC dengan *noise* juga mampu mencapai sudut referensi yang diberikan pada waktu ke- $57,5230$ detik, begitu pula pada metode modifikasi MPC-KF juga mampu memberikan respon yang baik meskipun waktu untuk mencapai sudut referensi adalah $58,8025$ detik. Meskipun demikian, Gambar 4.12 menunjukkan bahwa metode modifikasi MPC-KF lebih mampu mengatasi kendala kendala yang diberikan dibanding metode standar MPC dengan mempertimbangkan keberadaan *noise*. Adapun RMSE sudut heading kapal anatara modifikasi MPC-KF dan standar MPC ialah sebesar $0,0052$ rad atau $0,2979$ derajat.

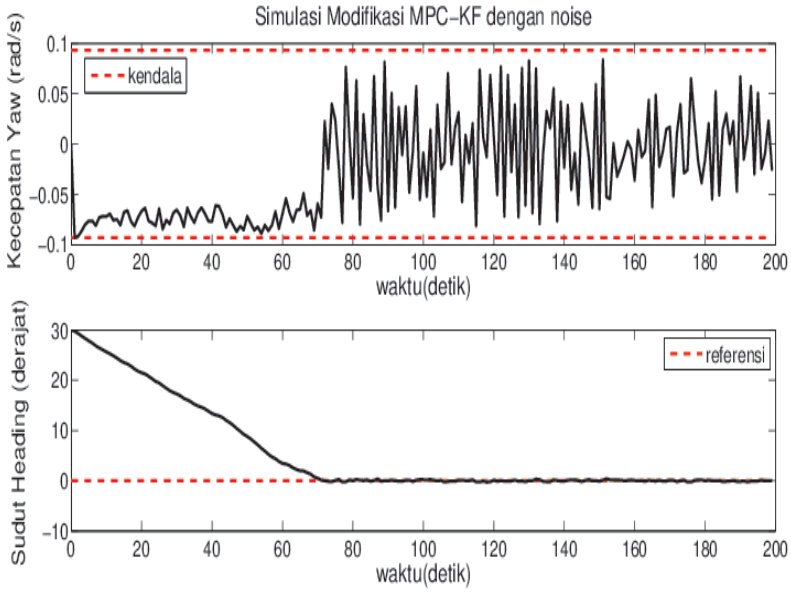
4.6.4.1 Simulasi Pengujian Modifikasi MPC-KF dengan Variasi Nilai *Noise*

Pada sub bab ini dilakukan uji metode modifikasi MPC-KF dengan memberikan variasi pada *noise* model sistem. Pengujian dilakukan dengan memberikan nilai *noise* yang semakin besar. Pengujian ini dilakukan untuk melihat respon metode modifikasi MPC-KF dalam mengatasi *noise* yang diberikan. Pengujian pertama dilakukan dengan memberikan *noise* pada kecepatan *sway* sebesar $w_k \sim N(0, 10^{-6})$, *noise* pada kecepatan *yaw* yaitu $w_k \sim N(0, 10^{-6})$ dan *noise* pada sudut heading (yaw) ialah $w_k \sim N(0, 10^{-6})$.



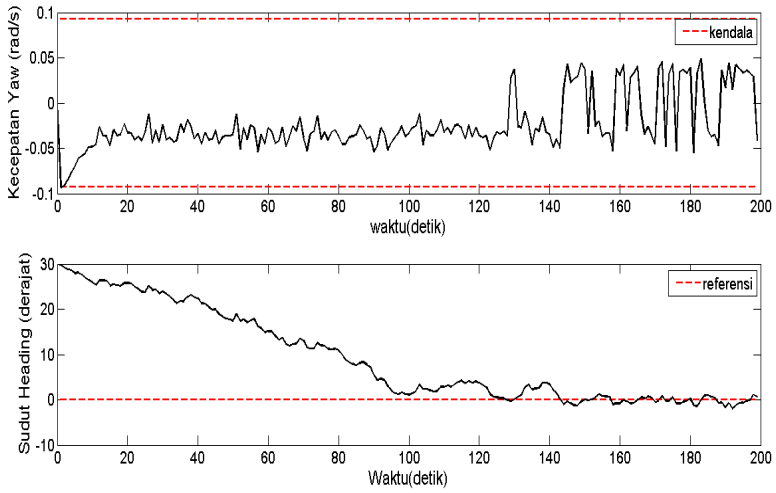
Gambar 4.11: Simulasi Modifikasi MPC-KF pada pengujian pertama

Berdasarkan Gambar 4.11 terlihat bahwa sudut hadap kapal masih mampu menuju sudut hadap referensi yaitu dari sudut 30^o menuju 0^o dalam selang waktu sekitar 60 detik. Gambar 4.11 juga menunjukkan bahwa metode modifikasi MPC-KF mampu memberikan respon yang cukup baik sehingga *noise* yang diberikan mampu teratasi dengan batasan kendala yang terpenuhi. Selanjutnya pengujian kedua dilakukan dengan diberikan *noise* yang lebih besar yaitu *noise* pada kecepatan *sway* sebesar $w_k \sim N(0, 10^{-4})$, *noise* pada kecepatan *yaw* sebesar $w_k \sim N(0, 10^{-8})$ dan *noise* pada sudut heading (*yaw*) sebesar $w_k \sim N(0, 10^{-6})$.



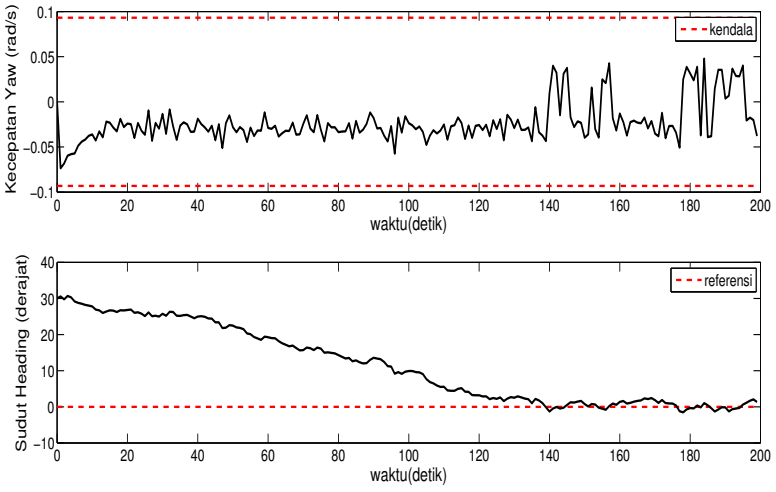
Gambar 4.12: Simulasi Modifikasi MPC-KF pada pengujian kedua

Berdasarkan Gambar 4.12 terlihat bahwa sudut hadap kapal masih mampu menuju sudut hadap referensi yaitu dari sudut 30^o menuju 0^o dalam selang waktu sekitar 70 detik. Gambar 4.12 juga masih menunjukkan bahwa metode modifikasi MPC-KF mampu memberikan respon yang cukup baik pada kendali haluan kapal sehingga *noise* yang diberikan mampu teratasi dengan batasan kendala yang tetap terpenuhi. Selanjutnya pengujian ketiga dilakukan dengan diberikan *noise* pada kecepatan *sway* sebesar $w_k \sim N(0, 10^{-4})$, *noise* pada kecepatan *yaw* sebesar $w_k \sim N(0, 10^{-8})$ dan *noise* pada sudut heading (*yaw*) sebesar $w_k \sim N(0, 10^{-4})$.



Gambar 4.13: Simulasi Modifikasi MPC-KF pada pengujian ketiga

Pada Gambar 4.13 terlihat bahwa sudut heading kapal mampu menuju sudut hadap referensi dalam waktu sekitar 97 detik. Gambar 4.13 juga menunjukkan metode modifikasi MPC-KF mampu mengatasi *noise* yang diberikan dengan memenuhi kendala batas yang diberikan. Selanjutnya pada pengujian keempat diberikan *noise* pada kecepatan *sway* sebesar $w_k \sim N(0, 10^{-4})$, pada kecepatan *yaw* sebesar $w_k \sim N(0, 10^{-4})$ dan pada sudut heading (yaw) sebesar $w_k \sim N(0, 10^{-4})$.



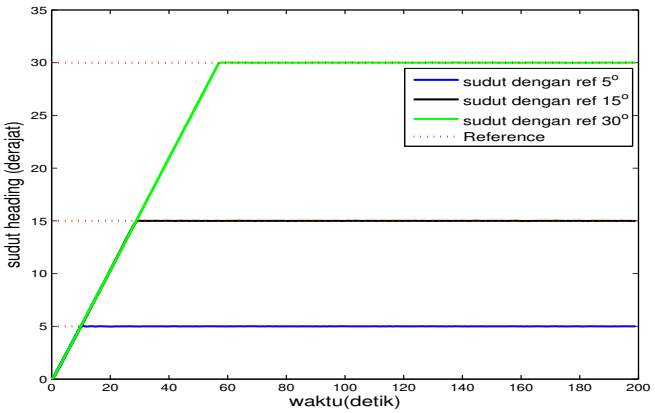
Gambar 4.14: Simulasi Modifikasi MPC-KF pada pengujian keempat

Pada Gambar 4.14 terlihat bahwa metode modifikasi MPC-KF mampu memberikan respon yang cukup baik sehingga sudut heading kapal masih mampu mencapai sudut referensi 0 derajat pada waktu 140 detik dengan kendala batas yang masih dapat terpenuhi. Berdasarkan pengujian yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa metode modifikasi MPC-KF mampu memberikan respon yang cukup baik pada permasalahan kendali haluan kapal dengan mempertimbangkan keberadaan *noise*. Metode modifikasi MPC-KF mampu mengatasi *noise* yang diberikan dengan memenuhi kendala batas yang diberikan.

Metode modifikasi MPC-KF telah teruji mampu mengatasi permasalahan dengan mempertimbangkan keberadaan *noise* pada sistem. Pada simulasi selanjutnya, *noise* yang diberikan pada sudut *yaw* ialah sekitar $0,001$ rad atau sekitar $0,057$ derajat, *noise* pada kecepatan sudut *yaw* adalah $0,00001 rad/s$ dan noise pada kecepatan *sway* diasumsikan sebesar $0.001 m/s$.

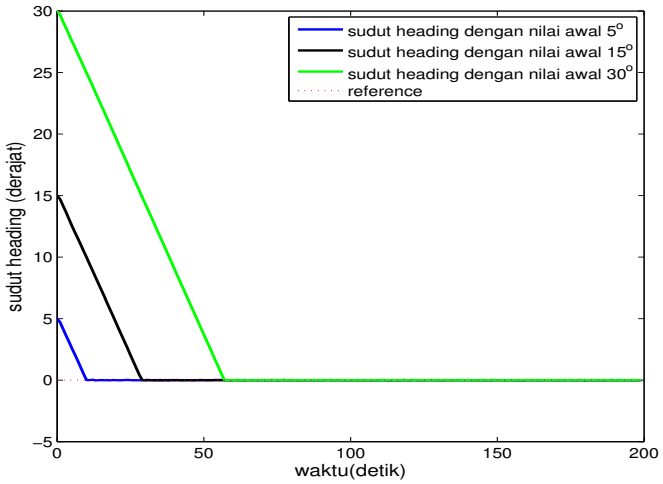
4.6.4.2 Simulasi Pengujian Modifikasi MPC-KF pada Sudut *Yaw*

Simulasi pengujian dengan kontrol Modifikasi MPC-KF pada sudut *yaw* terdiri dari 2 cara, yaitu pengujian dengan variasi nilai referensi dan pengujian dengan variasi nilai awal. Pengujian dengan variasi nilai referensi dilakukan untuk mengetahui apakah respon kontroler Modifikasi MPC-KF pada gerak rotasi sudut *yaw* dapat mengikuti referensi yang diberikan. Sedangkan pengujian variasi nilai awal dilakukan untuk mengetahui apakah respon kontroler Modifikasi MPC-KF pada sudut *yaw* dapat meregulasi ke titik awal, sehingga apabila kapal diberi gangguan maka akan tetap kembali ke jalur yang ditentukan.



Gambar 4.15: Respon Simulasi Sudut *Yaw* dengan Variasi Nilai Referensi

Dalam simulasi ini, pengujian sudut *yaw* diberikan variasi nilai referensi sebesar 5^o, 15^o dan 30^o dengan nilai awal 0^o terlebih dahulu. Hasil pengujian nilai referensi sudut *yaw* dapat dilihat pada Gambar 4.15. Didapatkan bahwa respon dengan nilai referensi sebesar 5^o, 15^o dan 30^o mengikuti referensi yang diberikan.



Gambar 4.16: Respon Simulasi Sudut *Yaw* dengan Variasi Nilai Awal

Selanjutnya dilakukan pengujian sudut *yaw* dengan variasi nilai awal. Pada pengujian ini diberikan nilai awal sebesar 5^o, 15^o dan 30^o dengan nilai referensi adalah 0^o. Hasil respon dapat dilihat pada pada Gambar 4.16 dan didapatkan bahwa pada semua nilai awal, respon tetap meregulasi ke titik awal 0^o.

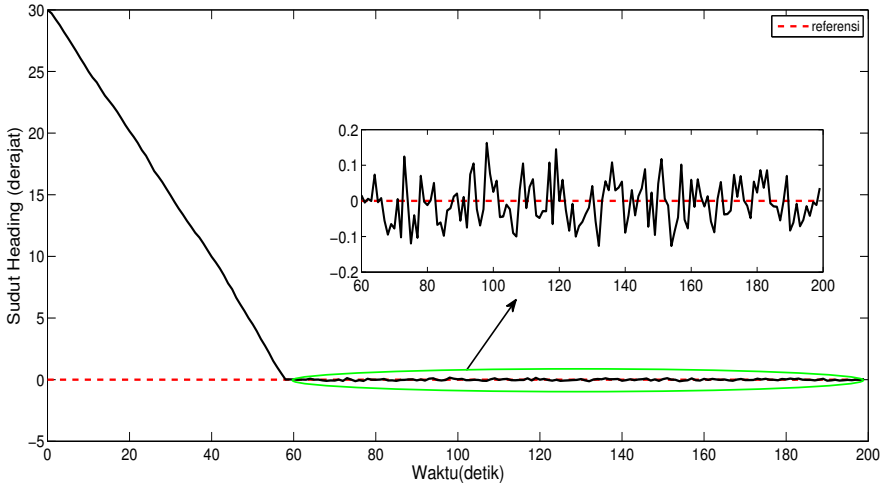
4.6.5 Simulasi Penerapan Modifikasi MPC-KF pada Permasalahan Kendali Haluan Kapal

Pada sub bab ini dijelaskan mengenai hasil simulasi penerapan Modifikasi MPC-KF pada permasalahan kendali haluan kapal. Dalam simulasi ini, model sistem yang digunakan mempertimbangkan keberadaan *noise* yang melekat pada model sistem sehingga model sistem berbentuk stokastik. Model sistem stokastik diskrit yang digunakan dapat dilihat pada Persamaan 4.9. Simulasi ini dilakukan dengan nilai awal yang bervariasi. Skenario pertama adalah nilai awal sudut *yaw* kapal ialah 30^o dan menuju sudut yang diinginkan 0^o. Skenario kedua adalah nilai awal sudut *yaw* kapal ialah 0^o dan menuju sudut yang diinginkan 30^o.

4.6.5.1 Simulasi Kendali Modifikasi MPC-KF dengan Nilai Awal Sudut *Yaw* 30^o

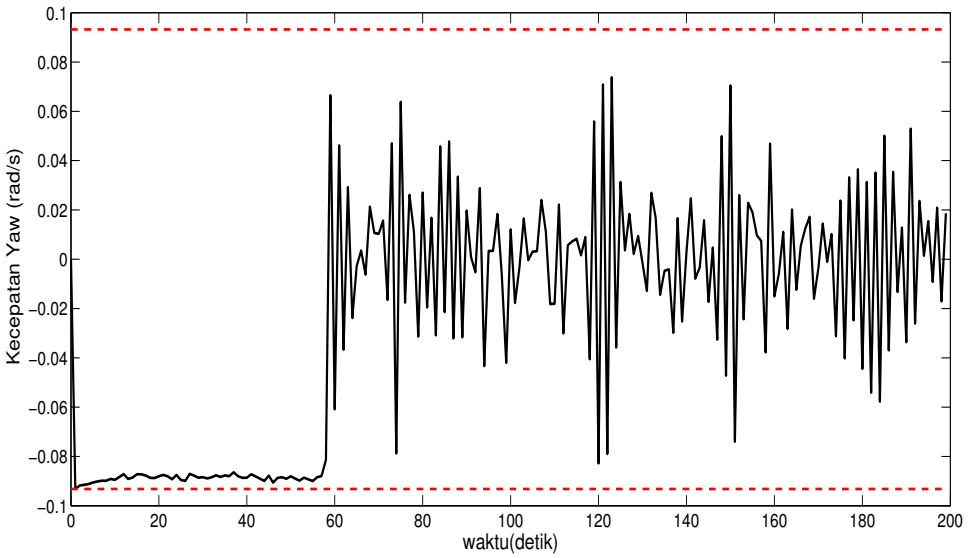
Dalam permasalahan ini sudut *yaw* kapal yang diinginkan ialah menuju 0^o. Pada mulanya kapal berada pada sudut *yaw* $\psi = 30^o$, kemudian *ship heading autopilot control* akan mengarahkan sudut *yaw* kapal sehingga menuju posisi sudut yang diinginkan, dengan kata lain $\psi = 0^o$. Adapun waktu simulasi yang digunakan adalah 200 detik dan kapal berada dalam kondisi bermanuver dan tidak ada gangguan alam yang mengenai kapal (*sea state* 0).

Dalam simulasi ini, nilai awal variabel keadaan didefinisikan $x_1(1) = 0\ m/s$, $x_2(1) = 0\ rad/s$ dan $x_3(1) = 30$ derajat. Selain itu didefinisikan juga nilai awal sudut kemudi *rudder* yaitu $u(1) = 0\ rad$. Parameter prediksi horizon yang digunakan dalam simulasi ini adalah $N_p = 15$, parameter ini dipilih karena menghasilkan performansi yang lebih baik dibanding prediksi horizon lainnya.



Gambar 4.17: Sudut *yaw* pada skenario 1

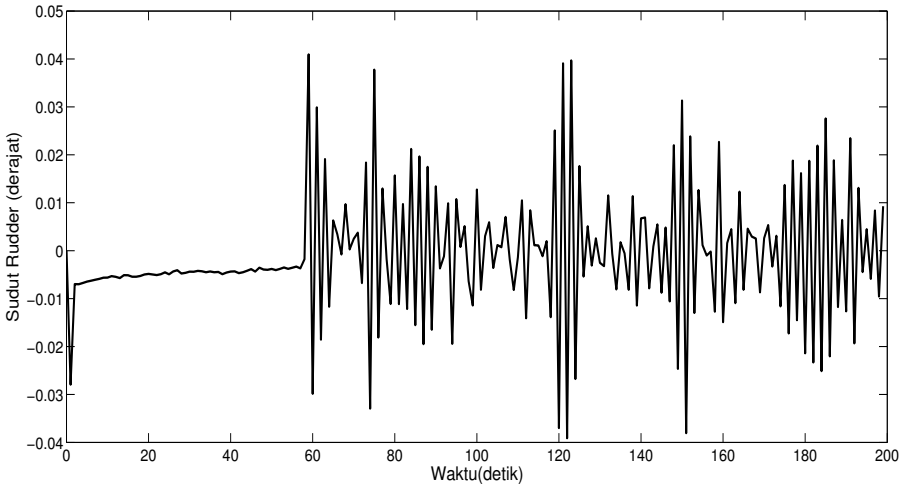
Berdasarkan Gambar 4.17 terlihat bahwa sudut *yaw* kapal bergerak dari 30^o mendekati nilai sudut yang diinginkan yaitu 0^o pada detik ke-58. Selanjutnya pada detik ke-58 hingga detik ke-200, sudut *yaw* kapal semakin mendekati sudut 0^o dan berosilasi di sekitar sudut 0^o. Hal ini disebabkan karena adanya *noise* yang bersifat stokastik sehingga kestabilan sistem tidak stabil sempurna di sudut referensi yang diberikan. Akan tetapi dapat dilihat bahwa perbedaan sudut *yaw* kapal dengan sudut referensi tidak terlalu cukup signifikan dengan maksimum perbedaannya ialah sebesar $0,1511$ derajat.



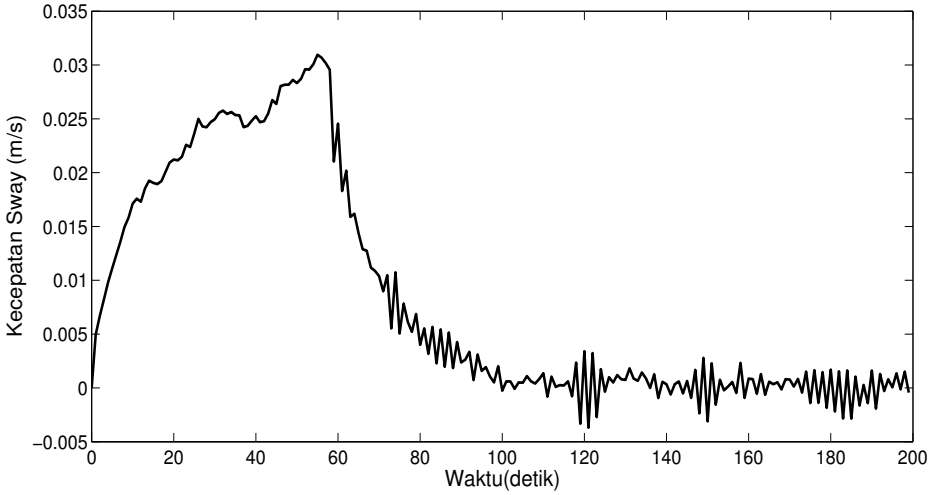
Gambar 4.18: Kecepatan *yaw* pada skenario 1

Gambar 4.18 menunjukkan dinamika kecepatan *yaw* ketika kapal bergerak dari sudut hadap 30^o menuju 0^o. Berdasarkan Gambar 4.18 terlihat bahwa kendala batas untuk kecepatan *yaw* yaitu $-0,0932\ rad/s$ dan $0,0932\ rad/s$ dapat terpenuhi, artinya laju kecepatan *yaw* kapal tidak melanggar batas atas dan bawah yang telah ditentukan. Adapun nilai negatif pada kecepatan *yaw* kapal menunjukkan bahwa kapal sedang bergerak ke arah kanan. Pada detik ke-60 terlihat bahwa kecepatan *yaw* kapal mulai mendekati $0 rad/s$, atau dapat dikatakan kecepatan *yaw* kapal sangat kecil. Hal ini menandakan bahwa sudut hadap kapal telah mendekati referensi yang diinginkan yaitu 0 derajat. Pada Gambar 4.18 terlihat bahwa kecepatan *yaw* tidak pernah bergerak stabil pada kecepatan 0 rad/s hingga detik ke-200, hal ini bersesuaian dengan sudut *yaw* yang juga tidak pernah bergerak stabil pada sudut 0 derajat.

Gambar 4.19 menunjukkan besar sudut *rudder* bersesuaian dengan kecepatan *yaw*. Nilai minus menunjukkan kapal sedang bergerak ke arah kanan. Dalam selang waktu hingga 60 detik besar sudut *rudder* mulai mendekati 0^o, artinya sudut hadap kapal sudah berada pada sudut hadap yang diinginkan. Pada detik ke 60 hingga detik ke 200 sudut *rudder* mengalami osilasi di sekitar 0 derajat. Hal inilah yang membuat sudut hadap kapal tidak pernah bergerak stabil di 0 derajat.



Gambar 4.19: Sudut *rudder* pada skenario 1



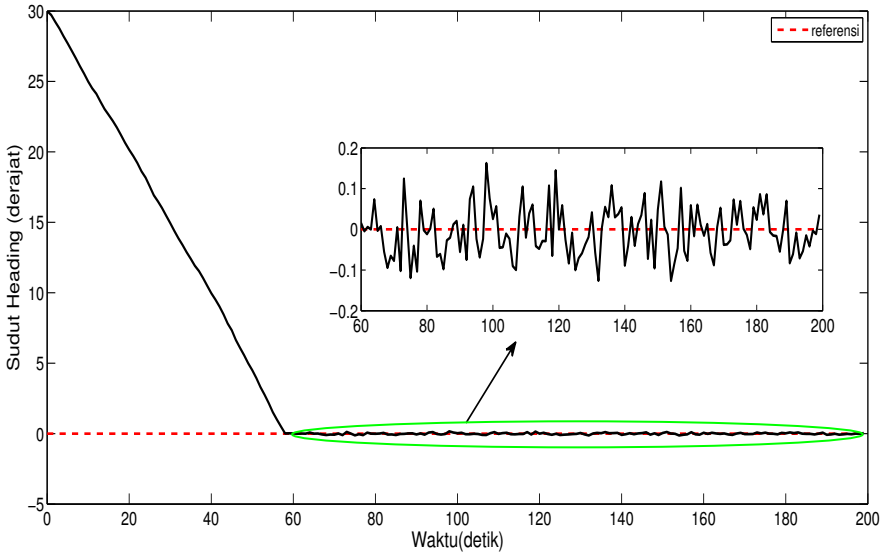
Gambar 4.20: Kecepatan *sway* pada skenario 1

Berdasarkan Gambar 4.20 terlihat bahwa pergerakan *sway* berkebalikan dengan sudut *rudder* kapal. *Sway* merupakan gerakan translasi ke samping (kanan-kiri) pada kapal sehingga ketika sudut *rudder* bergerak ke kanan, maka *sway* bergerak ke arah kiri dengan kecepatan tertentu. Pada Gambar 4.20 terlihat bahwa kecepatan *sway* meningkat dari $0m/s$ mencapai nilai $0,032m/s$ pada detik ke 55, kemudian kecepatan *sway* berkurang secara terus menerus hingga mendekati $0m/s$ pada detik ke 200 atau dapat dikatakan bahwa sudut *rudder* kapal telah mendekati 0 derajat.

4.6.5.2 Simulasi Kendali Modifikasi MPC-KF dengan Nilai Awal Sudut *Yaw* 0^o

Dalam permasalahan ini sudut *yaw* kapal yang diinginkan ialah menuju 30^o. Pada mulanya kapal berada pada sudut *yaw* $\psi = 0^o$, kemudian *ship heading autopilot control* akan mengarahkan sudut *yaw* kapal sehingga menuju posisi sudut yang diinginkan, dengan kata lain $\psi = 30^o$. Adapun waktu simulasi yang digunakan adalah 200 detik dan kapal berada dalam kondisi bermanuver dan tidak ada gangguan alam yang mengenai kapal (*sea state* 0).

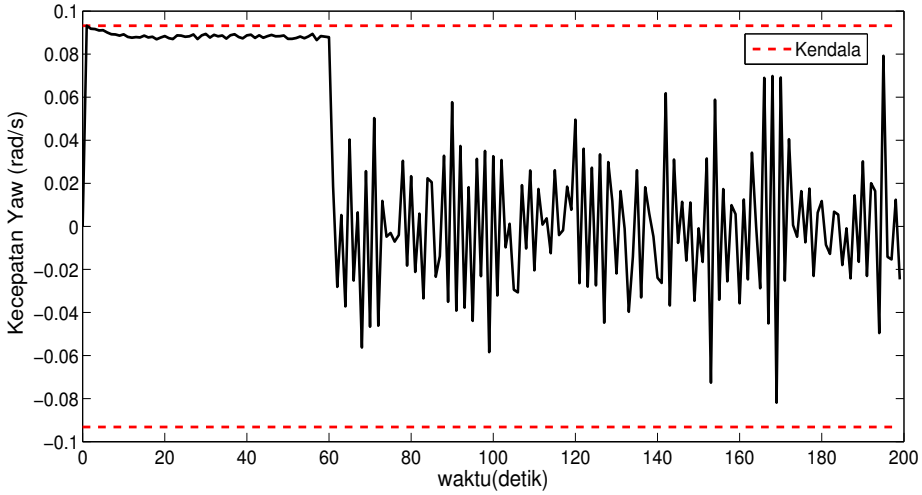
Dalam simulasi ini, nilai awal variabel keadaan didefinisikan $x_1(1) = 0\ m/s$, $x_2(1) = 0\ rad/s$ dan $x_3(1) = 0$ derajat. Selain itu didefinisikan juga nilai awal sudut kemudi (*rudder*) yaitu $u(1) = 0rad$. Parameter prediksi horizon yang digunakan dalam simulasi ini adalah $N_p = 15$, parameter ini dipilih karena menghasilkan performansi yang baik dibanding nilai prediksi horizon lainnya. Hasil simulasi dengan skenario ini dapat dilihat pada Gambar 4.21, Gambar 4.22, Gambar 4.23, dan Gambar 4.24.



Gambar 4.21: Sudut *yaw* pada Skenario 2

Berdasarkan Gambar 4.21 terlihat bahwa sudut *yaw* kapal bergerak dari 0^o mendekati sudut referensi yaitu 30^o pada detik ke-60. Selanjutnya pada detik ke-60 hingga detik ke-200 sudut *yaw* kapal semakin mendekati sudut 30^o dan berosilasi di sekitar sudut 30^o. Hal ini disebabkan karena adanya pengaruh *noise* yang bersifat stokastik sehingga sudut *yaw* tidak pernah stabil

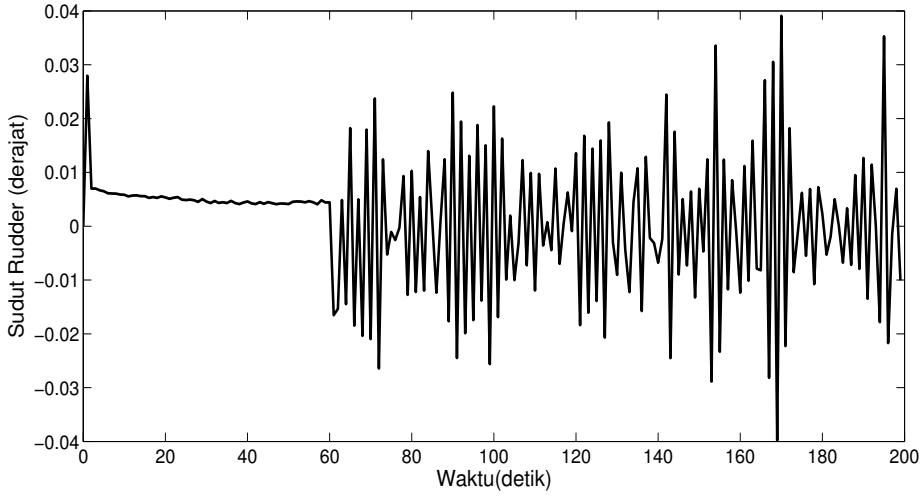
sempurna di sudut referensi yang diberikan. Namun perbedaan sudut *yaw* kapal dengan sudut referensi tidaklah terlalu signifikan dengan perbedaan maksimum sebesar $0,1788$ derajat.



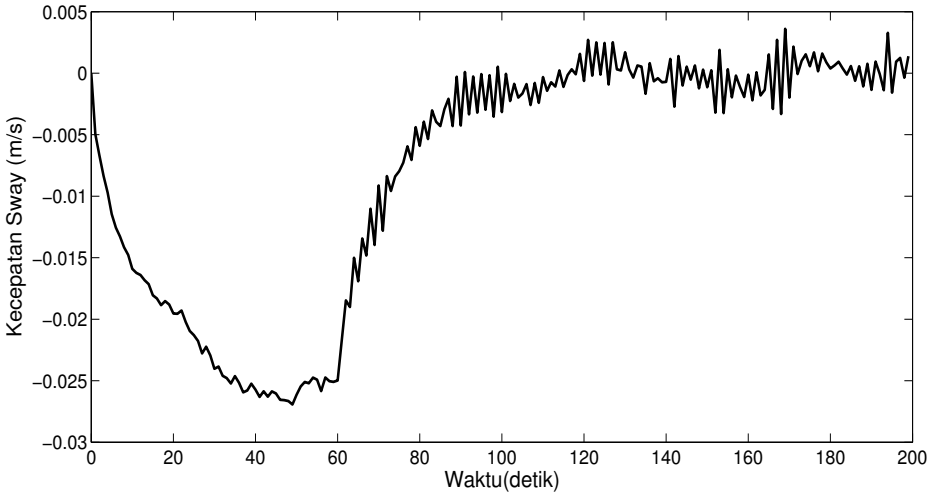
Gambar 4.22: Kecepatan *yaw* pada Skenario 2

Gambar 4.22 menunjukkan dinamika kecepatan *yaw* ketika kapal bergerak dari sudut hadap 0^o menuju 30^o. Nilai positif pada kecepatan *yaw* menunjukkan bahwa kapal sedang bergerak ke arah kiri. Berdasarkan Gambar 4.22 terlihat bahwa kendala batas untuk kecepatan *yaw* tetap dapat terpenuhi yaitu tidak melebihi nilai $-0,0932\ rad/s$ dan $0,0932\ rad/s$. Pada detik ke-60 kecepatan *yaw* mulai mendekati $0 rad/s$, atau dapat dikatakan kecepatan *yaw* kapal sangat kecil. Hal ini menandakan bahwa sudut hadap kapal telah mendekati sudut referensi yaitu 30 derajat. Pada Gambar 4.22 terlihat bahwa kecepatan *yaw* tidak pernah bergerak stabil pada kecepatan $0 rad/s$ hingga detik ke-200, hal ini bersesuaian dengan sudut *yaw* yang juga tidak pernah bergerak stabil pada sudut 30 derajat.

Berdasarkan Gambar 4.23 terlihat bahwa besar sudut *rudder* bersesuaian dengan kecepatan *yaw*. Nilai positif menunjukkan bahwa kapal sedang bergerak ke arah kiri. Dalam selang waktu hingga 60 detik, besar sudut *rudder* mulai mendekati 0 derajat, artinya sudut hadap kapal telah mendekati sudut hadap referensi. Pada detik ke 60 hingga detik ke 200, sudut *rudder* mengalami osilasi di sekitar 0 derajat. Hal inilah yang membuat sudut hadap kapal tidak pernah bergerak stabil di 30 derajat.



Gambar 4.23: Sudut *rudder* pada Skenario 2



Gambar 4.24: Kecepatan *sway* pada Skenario 2

Hasil simulasi pada Gambar 4.24 menunjukkan bahwa pergerakan kecepatan *sway* berkebalikan dengan sudut *rudder* kapal. Pada Gambar 4.23 terlihat bahwa sudut *rudder rudder* bergerak ke kiri, sehingga pergerakan kecepatan *sway* ialah ke arah kanan. Berdasarkan Gambar 4.24 terlihat bahwa kecepatan *sway* meningkat dari $0m/s$ mencapai nilai $0,032m/s$ bergerak ke arah kanan pada detik ke 55, kemudian kecepatan *sway* berkurang secara terus menerus hingga mendekati $0m/s$ pada detik ke 200 atau dapat dikatakan bahwa sudut *rudder* kapal telah mendekati 0 derajat.

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

Penarikan kesimpulan didasarkan pada analisis hasil simulasi, sedangkan saran ditujukan untuk perbaikan penelitian dan pengerjaan penelitian selanjutnya berupa pengembangan ide atau pengembangan metode.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis hasil simulasi yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal berikut:

1. Formulasi metode Modifikasi MPC-KF dilakukan dengan 3 tahapan yaitu proses penggabungan Kalman Filter ke dalam proses MPC, pengubahan kendala probabilistik menjadi bentuk deterministik dan pengubahan fungsi obyektif dari bentuk ekspektasi menjadi bentuk deterministik. Adapun hasil formulasi metode Modifikasi MPC-KF ialah

$$\min_u J = \hat{\mathbf{x}}_{k+N|k}^T \mathbf{S}_N \hat{\mathbf{x}}_{k+N|k} + \sum_{j=1}^{N} (\hat{\mathbf{x}}_{k+j|k}^T \mathbf{Q}_j \hat{\mathbf{x}}_{k+j|k} + \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_{k+j})$$

   dengan kendala

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k+j|k} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k+j-1|k} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k+j-1} (j = 1, ..., N) \\
\mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k|k}\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\tau_k\mathbf{G}^T \\
\hat{x}_{k+j|k}^i &\leq \beta_j^i - (P_{k+1|k}^{ii})^{1/2} (\beta_j^i)^* (j = 1, ..., N), (i = 1, ..., n) \\
u_{k+j} &\leqslant \mu_j (j = 0, ..., N-1).
\end{aligned}$$

2. Secara simulasi kendali Modifikasi MPC-KF mampu menyelesaikan permasalahan model sistem linier dengan mempertimbangkan keberadaan *noise* yang melekat pada model sistem. Penerapan Modifikasi MPC-KF menghasilkan respon yang cukup akurat pada sudut hadap kapal yang diinginkan. Berdasarkan simulasi didapatkan bahwa nilai prediksi horizon terbaik didapatkan pada saat $N_p = 15$ dengan rata-rata RMSE antara sudut hadap kapal dan sudut hadap yang diinginkan dalam waktu 200 detik adalah $0,1609391$. Keberadaan *noise*

membuat sudut hadap kapal selalu mengalami osilasi di sekitar sudut referensi, namun perbedaan sudut *yaw* kapal dengan sudut referensi tidaklah terlalu cukup signifikan dengan maksimum perbedaannya ialah sebesar $0,1511$ derajat atau kurang dari 1 derajat.

3. Metode Modifikasi MPC-KF yang diusulkan mampu mengatasi permasalahan dengan memperhatikan *noise* yang melekat pada model sistem. Hal ini merupakan keunggulan metode Modifikasi MPC-KF dibanding metode standar MPC yang hanya mampu menyelesaikan permasalahan determinisitik.

5.2 Saran

Saran yang dapat dikemukakan untuk pengembangan penelitian lebih lanjut ialah diusulkan penerapan metode modifikasi MPC-KF pada masalah *tracking* lintasan dengan memperhatikan keberadaan *noise* yang melekat pada model sistem serta diberikan *disturbance* seperti gelombang air laut dan angin.

DAFTAR PUSTAKA

Bordons, C., dan Camacho,E.F.,(1999), *Model Predictive Control*, Springer-Verlag, London Limited.

Dian, E.W., (2016).*Kendali Kestabilan Kapal Korvet Kelas Sigma Dalam Misi Penembakan Menggunakan Model Predictive Control (MPC)*. Tugas Akhir Program Sarjana Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Fossen, T.I.,(1999), *Guidance and Control of Ocean Vehicles*, John Wiley and Sons.

Fossen, T.I.,(2011), *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*, John Wiley and Sons.

Grewal, M.S. dan Andrews, A.P.,(1999), *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*, Springer-Verlag, John Wiley and Sons.

Heirung, T.A.N, Paulson, J.A., O'Leary, J. dan Mesbah, A., (2018), Stochastic model predictive control how does it work?, *Computers and Chemical Engineering* 114: 158-170.

Li, P., Wendt, M. dan Wozny, G., (2002), A probabilisticallyconstrained model predictive controller, *Automatica* 38: 1171-1176.

Li, P., Wendt, M. dan Wozny, G., (2000), Robust model predictive control under chance constraints, *Computers and Chemical Engineering* 24: 829-834.

Li, Z., Sun, J., dan Oh, S., (2009), Path Following for Marine Surface Vessels with Rudder and Roll Constraints: an MPC Approach, *American Control Conference*.

Li, Z. dan Sun, J., (2012), Disturbance Compensating Model Predictive Control With Application to Ship Heading Control, *IEEE* Vol.20 No.1.

Oldewurtel, F., Jones, C.N., Parisio, A. dan Morari, M.,(2014), Stochastic Model Predictive Control for Building Climate Control, *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY* Vol.22 No.3.

Putri, D. K. R., Asfihani, T. and Subchan, S. (2018), *Steering Angle Control of Car for Dubins Path-tracking Using Model Predictive Control*, Journal of Physics: Conference Series, Vol. 974, IOP Publishing, 012066.

Prodan, I., Bencatel, R., dan Olaru, S., (2012), Predictive Control for Autonomous Aerial Vehicles Trajectory Tracking, *The International Federation of Automatic Control*.

Sahoo, P.,(2013), *Probability and Mathematical Statistics*, University of Louisville, Louisville.

Subchan dan Zbikowski, R., (2009), *Computational optimal control: Tools and practice*, John Wiley and Sons.

Subchan, Syaifuddin, W.H. dan Asfihani, T., (2014), Ship heading control of corvette-sigma with disturbances using model predictive control, *Far East Journal of Applied Mathematics* vol. 87, No.3, pp.245-256.

Subiono,(1999), *Sistem Linear*, Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Sukolilo, Surabaya, Indonesia.

van Hessen, D.H. dan Bosgra, O.H., (2002), A conic reformulation of Model Predictive Control including bounded and stochastic disturbances under state and input constraints, *IEEE*.

Wang, L.,(2009), *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB.*, Springer Book, ISBN 978-1-84882-330-3.

Yan, J. dan Bitmead, R.R., (2002), MODEL PREDICTIVE CONTROL AND STATE ESTIMATION: A NETWORK EXAMPLE, *IFAC*.

Yan, J. dan Bitmead, R.R., (2005), Incorporating state estimation into model predictive control and its application to network traffic control, *Automatica* 41:595-604.

Zheng, H. dan Negenborn, R.R., (2014), Trajectory tracking of autonomous vessels using model predictive control, *The International Federation of Automatic Control*.

BIODATA PENULIS

Penulis memiliki nama lengkap Ahmad Maulana Syafii atau biasa dipanggil Lana. Penulis dilahirkan di Samarinda pada tanggal 28 April 1995. Jenjang pendidikan penulis dimulai dari TK Islam Al-Jawahir pada tahun 2000 s.d 2001 dan dilanjutkan menempuh pendidikan di SD Islam Al-Jawahir pada tahun 2001 s.d 2007, MTs Negeri Model Samarinda pada tahun 2007 s.d 2010 dan SMA Negeri 1 Samarinda pada tahun 2010 s.d 2013. Pada tahun 2013 penulis melanjutkan studi di prodi Matematika ITK hingga tahun 2017. Pada tahun 2017, penulis melanjutkan studi ke jenjang S2 di jurusan yang sama yaitu Matemtika ITS.

Di jurusan Matematika penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan. Untuk mendapatkan informasi terkait Tesis ini dapat ditujukan ke alamat e-mail: maulanasyafii95@gmail.com