TESIS - SF142502

KAJIAN INTERAKSI ELEKTROMAGNETIK DARI NEUTRINO

MUHAMMAD TAUFIQI
NRP. 1113 201 901

DOSEN PEMBIMBING
Agus Purwanto, D.Sc

PROGRAM MAGISTER
BIDANG KEAHLIAN FISIKA TEORI
JURUSAN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015

THESIS - SF142502

STUDY OF NEUTRINO ELECTROMAGNETIC INTERACTION

MUHAMMAD TAUFIQI
NRP. 1113 201 901

SUPERVISOR
Agus Purwanto, D.Sc

MAGISTER PROGRAM
THEORITICAL PHYSICS
DEPARTMENT OF PHYSICS
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2015

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:
MUHAMMAD TAUFIQI
NRP 1113 201 901

Tanggal Ujian : 27 Juni 2015
Periode Wisuda : September 2015

Disetujui oleh tim Penguji Tesis

1. Agus Purwanto, D.Sc. (Pembimbing)
   NIP. 19640811 199002.1.001

2. Prof. Ir. Eddy Yahya, M.Sc, Ph.D (Penguji I)
   NIP. 19471126 197210.1.001

3. Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo, S.Si, M.Si (Penguji II)
   NIP. 19790716 200501.1.002

Direktur Program Pasca Sarjana,

Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T
NIP. 19640405 1990002.1.001

KAJIAN INTERAKSI ELEKTROMAGNETIK DARI NEUTRINO

Nama Mahasiswa : Muhammad Taufiqi
NRP : 1113 201 901
Pembimbing : Agus Purwanto, D.Sc.

ABSTRAK

Model standar dibangun dengan asumsi neutrino netral, maka tidak bisa dimunculkan suku arus bermuatan bagi neutrino pada Lagrangian. Alternatif lain untuk meninjau interaksi elektromagnetik neutrino adalah melalui fungsi verteks, dimana medan neutrino berinteraksi dengan medan foton. Fungsi verteks ini harus memenuhi sifat hermitian, kekekalan arus, dan invariansi lorentz, yang bisa dinyatakan dalam vektor lorentz dengan empat faktor bentuk, yaitu $F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$, $F_3(q^2)$, dan $F_4(q^2)$. Interpretasi fisis dari keempat faktor bentuk ini dilakukan dengan pendekatan non-relativistik, yang didapat bahwa $F_1(0)$, $F_2(0)$, $F_3(0)$, dan $F_4(0)$ secara berturut-turut merupakan muatan listrik, momen magnetik, momen dipol listrik, dan momen anapol, dan secara umum $F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$, $F_3(q^2)$, dan $F_4(q^2)$ disebut faktor bentuk elektrik, momen magnetik, momen dipol listrik, dan momen anapol. Transformasi CP pada fungsi verteks memberikan hasil bahwa hanya suku $F_3(q^2)$ saja yang terjadi penyimpangan CP, maka jika kekekalan CP terlanggar pada sektor lepton, neutrino hanya mempunyai dipol listrik, tetapi jika CP kekal, neutrino hanya mempunyai muatan listrik, momen magnetik, dan momen anapol. Jika neutrino merupakan partikel Dirac, maka tidak ada syarat tertentu yang mengharuskan keempat faktor bentuk tersebut bernilai nol, tetapi jika neutrino merupakan partikel majorana, hanya $F_4(q^2)$ yang tidak nol dimana faktor bentuk lainnya harus nol. Peluruhan radiatif neutrino, dimana suatu mass eigen state dari neutrino yang lebih berat meluruh menjadi neutrino yang lebih ringan dengan memancarkan foton, bergantung dari besar massa neutrino dalam proses peluruhan,

besar momen dipol magnetik, dan besar momen dipol elektrik dari neutrino, maka jika neutrino tidak mempunyai sifat keduanya, maka peluruhan seperti ini tidak dapat terjadi.

Kata kunci: interaksi elektromagnetik, neutrino

STUDY OF ELECTROMAGNETIC INTERACTION OF NEUTRINOS

Name	: Muhammad Taufiqi
NRP	: 1113 201 901
Thesis Advisor	: Agus Purwanto, D.Sc.

ABSTRACT

The standard model was built with the assumption that the neutrino neutral, then a neutrino charged current can not be made by the Lagrangian. Another alternative for the reviewing the neutrino electromagnetic interaction is through the vertex function, where the field of neutrino interacts with the photon field. The vertex function must has some properties, that is hermitian, current conservation, and Lorentz invariance, which can be expressed in vector Lorentzs with four form factors, namely $F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$, $F_3(q^2)$, and $F_4(q^2)$. The physical interpretation of the form factors is done by non-relativistic approach, which found that $F_1(0)$, $F_2(0)$, $F_3(0)$, dan $F_4(0)$ is an electric charge, magnetic moment, electric dipole moment, and anapole moment, respectively, and generally $F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$, $F_3(q^2)$, and $F_4(q^2)$ is called electric charge, magnetic moment, electric dipole moment, and anapole moment form factor, respectively. CP transformation on the vertex functions provide results that only $F_3(q^2)$ is violated, then if CP invariance is violated in the lepton sector, then the neutrinos has only an electric dipole, otherwise, neutrinos have no electric charge, magnetic moment, and anapole moment. If neutrinos are Dirac particles, then there is no specific requirement that requires all four of the form factor is zero, but if the neutrinos are Majorana particles, only $F_4(q^2)$ is not zero where the other form factors should be zero. Neutrino radiative decay process, where a mass eigen state of the heavier neutrino decays into lighter neutrinos by emitting photons, depends on the mass of the neutrino in the process of decay, magnetic dipole

moment, and electric dipole moment of the neutrinos, then if neutrinos does not has the both properties, then the decay can not be happen.

Keywords: electromagnetic interaction, neutrinos

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat ALLAH SWT yang telah melimpahkan segala rahmat serta hidayahNYA, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul : **"KAJIAN INTERAKSI ELEKTROMAGNETIK DARI NEUTRINO".**

Terselesaikannya Tesis ini tak lepas dari dukungan banyak pihak. Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih setulus hati kepada :

1. Ibu dan Ayah tercinta di rumah atas segalanya yang diberikan untuk penulis dengan penuh cinta. Penulis tidak akan mampu membalasnya.
2. Bapak Agus Purwanto, D.Sc., yang tak hanya membimbing penulis dalam menyelesaikan Tesis. Penulis mohon maaf yang sebesar-besarnya atas segala kesalahan yang telah dilakukan penulis.
3. Prof. Ir. Eddy Yahya, M.Sc, Ph.D dan Dr.rer.nat Bintoro Anang Subagyo, S.Si, M.Si selaku Dosen Penguji, terima kasih atas bimbingan dan kesabarannya.
4. Bapak Dr. Yono Hadi Pramono selaku Ketua Jurusan Fisika FMIPA.
5. Bapak dan Ibu dosen yang telah mengajarkan ilmu beliau.
6. Adik kandung penulis Muhammad Masruri, terima kasih atas dukungan dan doanya, semoga sukses studinya.
7. Segenap karyawan di Jurusan Fisika atas segala bantuan dan layanan informasi yang diberikan
8. Sahabat-sahabat di LaFTiFA, Pak Heru, Mbak Nofa, Kang Nur, Mas Yo, Mas Fadlol, dan tiga trio, sebagai teman diskusi yang asik.
9. Teman-teman Cosmic 2010, atas segala motivasinya.
10. Sahabat-sahabat asrama penulis, Khoiri, Anggris, Eli, Ani, Mbak Nurul, Mita, dan Mbak Di. Terima kasih banyak atas mawar putihnya.
11. Kakak-kakak dan adik-adik angkatan di Jurusan Fisika.
12. Serta semua pihak yang telah membantu yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Laporan Tesis ini dapat bermanfaat bagi pihak-pihak yang berkepentingan serta dapat menjadi sumbangan bagi almamater tercinta.

Surabaya, 8 Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

Bab 1

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Pada tahun 1930, Wolfgang Pauli mempostulatkan kedudukan neutrino dalam keluarga partikel elementer untuk mempertahankan hukum kekekalan energi dan paritas pada kasus peluruhan beta, dengan asumsi tidak bermassa dan tidak bermuatan. Dan pada tahun 1965, keberadaan neutrino tersebut diverifikasi melalui hasil eksperimen di sebuah reaktor nuklir oleh Cowan dan Reines. Permasalahan selanjutnya masuk pada berapa massa neutrino tersebut. Pada tahun 1957, eksperimen berhasil mendeteksi paritas pada peluruhan beta, dan didapatkan neutrino hanya memiliki helisitas kiri saja. Dalam model standard, jika partikel hanya memiliki satu helisitas, partikel tersebut dikatakan tidak bermassa.

Tetapi pada tahun 1968, Davis bersama rekan-rekannya mendeteksi penyimpangan fluks neutrino matahari pada suatu eksperimen yang dilakukan selama dua puluh tahun. Harga yang didapatkan Davis lebih kecil dari perhitungan secara teoritik berdasarkan model standard. Maka B. Pontecorvo memunculkan suatu teori bahwa fluks neutrino elektron berubah secara periodik selama perjalanannya dari matahari ke bumi. Fluks ini tidak musnah, tetapi berubah menjadi neutrino muon dan neutrino tauon. Fenomena osilasi neutrino ini, mensyaratkan neutrino bermassa, yang tidak bersesuaian dengan model standar, yaitu massa neutrino dianggap nol.

Jika asumsi neutrino tidak bermassa terbukti salah, ada kemungkinan asumsi neutrino tidak bermuatan juga salah, mengingat masih belum ada data eksperimen yang menyatakan bahwa neutrino benar-benar netral. Maka perlu dibuat penelitian lebih lanjut tentang sifat elektromagnetik ini, dan diharapkan bisa memberi jalan menuju teori di balik model standar.

1.2 Rumusan Masalah

Dalam penelitian ini permasalahan yang akan dibahas dibatasi pada sifat elektromagnetik dari neutrino, yaitu kajian faktor bentuk muatan listrik, momen dipol

elektrik, momen dipol magnetik, dan momen anapol, kajian invariansi CP pada fungsi verteks, faktor bentuk neutrino dirac dan majorana, serta penerapan pada proses peluruhan radiatif dari neutrino.

1.3 Tujuan Penelitian

Dalam penelitian ini akan dilakukan penurunan dan eksplorasi secara lengkap mengenai kajian faktor bentuk muatan listrik, momen dipol elektrik, momen dipol magnetik, dan momen anapol, kajian invariansi CP pada fungsi verteks, faktor bentuk neutrino dirac dan majorana, serta penerapan pada proses peluruhan radiatif dari neutrino.

1.4 Manfaat Penelitian

Deskripsi rinci mengenai sifat elektromagnetik neutrino bermanfaat untuk memberikan prediksi tentang kemungkinan sifat elektromagnetik yang bisa dimiliki neutrino, memberi alternatif lain untuk mengidentifikasi apakah neutrino tergolong partikel dirac atau majorana, serta memprediksi proses peluruhan radiatif neutrino yang sebelumnya tidak bisa dibentuk, sehingga diharapkan bisa memberikan jembatan untuk "fisika baru" di luar standar model.

Bab 2

Faktor Bentuk Elektromagnetik dari Neutrino

Dalam model standar, lagrangian interaksi elektromagnetik dapat dituliskan sebagai (Lampiran A)

$$\mathscr{L}_{int} = eQ\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x) \tag{2.1}$$

Untuk fermion bermuatan tidak masalah, tetapi untuk neutrino bermasalah, karena tidak ada suku seperti itu untuk neutrino dalam model standar. Maka dibuatlah suku secara analogi, yaitu

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{int} &= \bar{\psi}(x)\Gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x) && (2.2) \\ &= j_\mu(x)A^\mu(x) && (2.3) \end{aligned}$$

dimana Γ_μ akan dicari bentuknya.

Analogi seperti kasus elektron, elemen matriks dari arus tersebut bisa dituliskan sebagai (Lampiran B)

$$\langle p', s' | j_\mu(x) | p, s\rangle = \frac{m}{V\sqrt{E_p E_{p'}}}\bar{u_{s'}}(p')\Gamma_\mu(p,p')u_s(p) \tag{2.4}$$

yang didapat dari ekspansi,

$$\psi(x) = \sum_{s,p}\left(\frac{m}{VE_p}\right)^{1/2}[c_s(p)u_s(p)e^{-ipx} + d_r^\dagger(p)v_r(p)e^{ipx}] \tag{2.5}$$

telah digunakan satuan natural $c = \hbar = 1$

Untuk x = 0, sifat hermitian dari persamaan (2.4) mengimplikasikan

$$\langle p', s' | j_\mu(0) | p, s\rangle = \langle p', s' | j_\mu(0) | p, s\rangle^\dagger \tag{2.6}$$

yang bisa ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
\bar{u_{s'}}(p')\Gamma_\mu(p,p')u_s(p) &= \left(\bar{u_{s'}}(p')\Gamma_\mu(p,p')u_s(p)\right)^\dagger \\
&= u_s(p)^\dagger\Gamma_\mu^\dagger(p,p')\bar{u_{s'}}^\dagger(p') \\
&= u_s(p)^\dagger\Gamma_\mu^\dagger(p,p')\left(u_{s'}^\dagger(p')\gamma_0\right)^\dagger \\
&= u_s(p)^\dagger\Gamma_\mu^\dagger(p,p')\gamma_0^\dagger\left(u_{s'}^\dagger(p')\right)^\dagger \\
&= u_s(p)^\dagger\Gamma_\mu^\dagger(p,p')\gamma_0\left(u_{s'}^\dagger(p')\right)^\dagger \\
&= u_s(p)^\dagger\Gamma_\mu^\dagger(p,p')\gamma_0 u_{s'}(p') \\
&= u_s(p)^\dagger\gamma_0\gamma_0\Gamma_\mu^\dagger(p,p')\gamma_0 u_{s'}(p') \\
&= \bar{u_s}(p)\gamma_0\Gamma_\mu^\dagger(p,p')\gamma_0 u_{s'}(p') \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Dan dilakukan pergantian indeks, yaitu

$$\begin{aligned}
p &\longleftrightarrow p' \\
s &\longleftrightarrow s' \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

maka,

$$\begin{aligned}
\bar{u_{s'}}(p')\Gamma_\mu(p,p')u_s(p) &= \bar{u_s}(p)\gamma_0\Gamma_\mu^\dagger(p,p')\gamma_0 u_{s'}(p') \\
&= \bar{u_{s'}}(p')\gamma_0\Gamma_\mu^\dagger(p',p)\gamma_0 u_s(p) \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

sehingga didapat

$$\Gamma_\mu(p,p') = \gamma_0\Gamma_\mu^\dagger(p',p)\gamma_0 \qquad (2.10)$$

yang merupakan salah satu sifat matriks $\Gamma_\mu(p,p')$.

Selanjutnya, kekekalan arus menyatakan

$$\begin{aligned}
0 &= \partial^\mu(\langle p',s'|\, j_\mu(x)\,|p,s\rangle) \\
&= \partial^\mu(\langle p',s'|\, j_\mu(0)e^{-i(p-p')x}\,|p,s\rangle) \\
&= -i(p-p')^\mu\,\langle p',s'|\, j_\mu(0)e^{-i(p-p')x}\,|p,s\rangle \\
&= -iq^\mu\,\langle p',s'|\, j_\mu(0)e^{-iqx}\,|p,s\rangle \\
&= -iq^\mu\bar{u_{s'}}(p')\Gamma_\mu(p,p')u_s(p) \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

dengan

$$q = p - p' \qquad (2.12)$$

yang merupakan syarat kedua untuk matriks $\Gamma_\mu(p,p')$.

Karena matriks $\Gamma_\mu(p,p')$ diinginkan mempunyai sifat invarian terhadap transformasi lorentz, maka matriks $\Gamma_\mu(p,p')$ akan dibentuk dari vektor-vektor lorentz, dengan bentuk paling umum sebagai

$$\Gamma_\mu(p,p') = F_1(q^2)\gamma_\mu + F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 + F_4(q^2)(q^2\gamma_\mu - q_\mu q^\nu\gamma_\nu)\gamma_5 \tag{2.13}$$

dengan empat jenis faktor bentuk yang akan dicari interpretasi fisisnya.

2.1 Faktor Bentuk $F_1(q^2)$

Kita mulai evaluasi bentuk (2.13). Misal diambil kondisi diagonal, yaitu

$$\begin{aligned} p &= p' \\ s &= s' \end{aligned}$$

maka

$$q = 0 \tag{2.14}$$

Sehingga Pers. (2.6) menjadi

$$\langle p,s|\, j_\mu(x)\,|p,s\rangle = \frac{m}{VE_p}\bar{u}_s(p)\Gamma_\mu(p,p)u_s(p) \tag{2.15}$$

dengan faktor bentuk (2.13) tereduksi menjadi suku $F_1(0)$ saja,

$$\Gamma_\mu(p,p) = F_1(0)\gamma_\mu$$

Maka

$$\begin{aligned} \langle p,s|\, j_\mu(x)\,|p,s\rangle &= \frac{m}{VE_p}\bar{u}_s(p)\Gamma_\mu(p,p)u_s(p) \\ &= \frac{m}{VE_p}\bar{u}_s(p)F_1(0)\gamma_\mu u_s(p) \\ &= \frac{m}{VE_p}F_1(0)\bar{u}_s(p)\gamma_\mu u_s(p) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Spinor $u_s(p)$ memenuhi persamaan Dirac sebagai

$$\left(p^\mu\gamma_\mu - m\right)u_s(p) = 0 \tag{2.17}$$

Dari identitas Gordon (Lampiran B),

$$\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')\left[\left(p+p'\right)^{\mu} - i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}\right]u(p) \tag{2.18}$$

untuk p = p' dan s = s' didapatkan,

$$\bar{u_s}(p)\gamma^{\mu}u_s(p) = \frac{1}{m}\bar{u_s}(p)p^{\mu}u_s(p) \tag{2.19}$$

dan spinor $u_s(p)$ memenuhi

$$\bar{u_r}(p)u_s(p) = 2E_p\delta_{rs} \tag{2.20}$$

Maka persamaan (2.16) bisa dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
\langle p,s|\, j_{\mu}(x)\,|p,s\rangle &= \frac{m}{VE_p}F_1(0)\bar{u_s}(p)\gamma_{\mu}u_s(p) \\
&= \frac{m}{VE_p}F_1(0)\frac{1}{m}\bar{u_s}(p)p_{\mu}u_s(p) \\
&= \frac{1}{VE_p}F_1(0)\bar{u_s}(p)p_{\mu}u_s(p) \\
&= \frac{1}{VE_p}F_1(0)p_{\mu}\bar{u_s}(p)u_s(p) \\
&= \frac{1}{VE_p}F_1(0)p_{\mu}2E_p\delta_{ss} \\
&= \frac{1}{VE_p}F_1(0)p_{\mu}2E_p \\
&= \frac{1}{V}F_1(0)p_{\mu}2 \\
&= \frac{2F_1(0)p_{\mu}}{V}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Nilai ekspektasi tersebut mempunyai bentuk seperti pada arus kasus klasik. Misal arus ini terkopel dengan suatu medan elektromagnetik dimana $\vec{A} = 0$,dan hanya medan $A_0 = \varphi$ yang tidak nol. Maka suku Lagrangian interaksi yang efektif bisa

dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{int} &= \langle j_\mu \rangle A^\mu \\
&= \frac{2F_1(0)p_\mu}{V} A^\mu \\
&= \frac{2F_1(0)p_0}{V} A^0 + 0 \\
&= \frac{2F_1(0)p_0}{V} \varphi \\
&= \frac{2F_1(0)m}{V} \varphi
\end{aligned} \tag{2.22}$$

dimana langkah terakhir dilakukan dengan pendekatan klasik, yakni $p^0 = E \approx m$ dalam satuan natural c = 1.

Karena medan $\vec{A} = 0$, maka medan elektromagnetik yang berinteraksi dalam kasus ini adalah medan elektrik, dan suku lagrangian klasik adalah

$$\mathscr{L} = -\rho\varphi \tag{2.23}$$

dimana ρ adalah densitas muatan. Maka, disini didapatkan

$$\rho = -\frac{2F_1(0)m}{V} \tag{2.24}$$

Sehingga didapatkan bahwa $F_1(0)$ berkontribusi pada rapat muatan dari neutrino, sehingga secara umum $F_1(q^2)$ disebut faktor bentuk elektrik dari neutrino.

Bentuk persamaan (2.24) cukup menarik, yaitu sifat muatran listrik dari neutrino akan tidak nol jika massa neutrino tidak nol. Artinya muatan listrik neutrino dimungkinkan ada jika neutrino mempunyai massa. Mengingat massa neutrino yang sangat kecil, maka muatan listrik neutrino juga sangat kecil, hal ini sesuai dengan eksperimen yang sampai saat ini belum menemukan nilai dari muatan listrik neutrino yang sangat kecil tersebut.

Kemudian untuk kasus non-diagonal, yaitu

$$\begin{aligned}
p &\neq p' \\
s &\neq s'
\end{aligned} \tag{2.25}$$

dengan menggunakan identitas Gordon (Lampiran C)

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')\left[(p+p')^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right]u(p) \tag{2.26}$$

maka suku arus terkait dengan faktor bentuk F_1, $\Gamma_\mu(p,p') = F_1(q^2)\gamma_\mu$, menjadi

$$\left\langle p',s' \right| j_\mu(x) \left| p,s \right\rangle = \frac{m}{\sqrt{2VE_p}\sqrt{2VE_{p'}}} e^{-iqx} \bar{u_{s'}}(p')\Gamma_\mu(p,p')u_s(p) \tag{2.27}$$

Maka

$$\begin{aligned}
\left\langle p',s' \right| j_\mu(x) \left| p,s \right\rangle &= \frac{m}{\sqrt{2VE_p}\sqrt{2VE_{p'}}} e^{-iqx} \bar{u_{s'}}(p')\Gamma_\mu(p,p')u_s(p) \\
&= \frac{m}{\sqrt{2VE_p}\sqrt{2VE_{p'}}} e^{-iqx} \bar{u_{s'}}(p')F_1(q^2)\gamma_\mu u_s(p) \\
&= \frac{m}{\sqrt{2VE_p}\sqrt{2VE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2)\bar{u_{s'}}(p')\gamma_\mu u_s(p) \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

dari persamaan (2.26) bisa dituliskan

$$\begin{aligned}
\left\langle p',s' \right| j^\mu(x) \left| p,s \right\rangle &= \frac{m}{\sqrt{2VE_p}\sqrt{2VE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2)\bar{u_{s'}}(p')\gamma^\mu u_s(p) \\
&= \frac{m}{\sqrt{2VE_p}\sqrt{2VE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \\
&\quad \times \frac{1}{2m}\bar{u}(p')\left[\left(p+p'\right)^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right]u(p) \\
&= \frac{m}{\sqrt{2VE_p}\sqrt{2VE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \\
&\quad \times \frac{1}{2m}\bar{u}(p')\left(p+p'\right)^\mu u(p) \\
&\quad - \frac{m}{\sqrt{2VE_p}\sqrt{2VE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \\
&\quad \times \frac{1}{2m}\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2VE_p}\sqrt{2VE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \\
&\quad \times \bar{u}(p')\left(p+p'\right)^\mu u(p) \\
&\quad - \frac{i}{2\sqrt{2VE_p}\sqrt{2VE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \\
&\quad \times \bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}u(p)q_\nu \\
&= \frac{1}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \\
&\quad \times \bar{u}(p')\left(p+p'\right)^\mu u(p) \\
&\quad - \frac{i}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \\
&\quad \times \bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}u(p)q_\nu \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Suku pertama persamaan (2.29) dianalisa sebagai berikut. Untuk kasus non-relativistik, yaitu ketika $E_p \approx E_{p'} \approx m$, dalam satuan natural, maka kontribusi yang dominan dari suku $(p+p')^\mu$ akan mereduksi seperti pada pembahasan muatan listrik, yaitu

$$\begin{aligned}
\left\langle p', s' \right| j_\mu(x) \left| p, s \right\rangle &= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) 2m\bar{u}(p')u(p) \\
&= \frac{m}{2V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \bar{u}(p')u(p) \\
&= \frac{m}{2V\sqrt{m^2}} e^{-iqx} F_1(q^2) \bar{u}(p')u(p) \\
&= \frac{1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \bar{u}(p')u(p) \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Selanjutnya pada suku kedua dari persamaan (2.29). Kontribusi suku ini pada lagrangian akan muncul jika suku ini terkopel dengan suatu medan foton A^μ, yang bisa dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \left\langle j_\mu \right\rangle A^\mu \\
&= -\frac{i}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \bar{u}(p') \sigma_{\mu\nu} u(p) q^\nu A^\mu \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Mengingat sifat antisimetrik dari tensor $\sigma_{\mu\nu}$, maka persamaan (2.31) bisa dituliskan kembali sebagai

$$\begin{aligned}
\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p) i q^\nu A^\mu &= \frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p) i q^\nu A^\mu \\
&\quad + \frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p) i q^\nu A^\mu \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Kemudian, khusus untuk suku kedua, akan dilakukan pertukaran indeks, yaitu

$$\mu \longleftrightarrow \nu$$

maka bisa dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p) i q^\nu A^\mu &= \frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p) i q^\nu A^\mu \\
&\quad + \frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p) i q^\nu A^\mu \\
&= \frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p) i q^\nu A^\mu \\
&\quad + \frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\nu\mu}u_s(p) i q^\mu A^\nu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)iq^\nu A^\mu \\
&\quad -\frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)iq^\mu A^\nu \\
&= \frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)i \\
&\quad \times(q^\nu A^\mu - q^\mu A^\nu) \\
&= -\frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)i \\
&\quad \times(q^\mu A^\nu - q^\nu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)F^{\mu\nu} \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

dimana langkah terakhir didapatkan dari bentuk tensor $F^{\mu\nu}$ dalam koordinat momentum, yaitu

$$
\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\
&= i(-i\partial^\mu A^\nu + i\partial^\nu A^\mu) \\
&= i(q^\mu A^\nu - q^\nu A^\mu) \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

Maka,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \langle j_\mu \rangle A^\mu \\
&= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2)\frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{8V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2)\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)F^{\mu\nu} \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

Kemudian, spinor $u_s(p)$ dinyatakan dalam bentuk eksplisit

$$
u_s(p) = \sqrt{E_p + m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma\cdot p}{\sqrt{E_p+m}}\chi_s \end{pmatrix} \qquad (2.36)
$$

dan

$$
\begin{aligned}
\bar{u_s}(p) &= u_s^\dagger(p)\gamma_0 \\
&= \sqrt{E_p + m}\begin{pmatrix} \chi_s^\dagger & \frac{\sigma\cdot p}{\sqrt{E_p+m}}\chi_s^\dagger \end{pmatrix}\gamma_0 \qquad (2.37)
\end{aligned}
$$

dengan

$$\chi_s = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; s = \frac{1}{2} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; s = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.38}$$

untuk kasus non-relativistik, yaitu

$$E_p \approx m$$

dalam satuan natural, maka

$$E_p + m \approx 2m$$

dan

$$\frac{\sigma \cdot p}{\sqrt{E_p + m}} \approx 0$$

sehingga,

$$u_s(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

dan

$$\bar{u_s}(p) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_s^\dagger & 0 \end{pmatrix} \gamma_0 \tag{2.40}$$

Kemudian, mengingat definisi dari tensor $\sigma_{\mu\nu}$, yaitu

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \tag{2.41}$$

tensor ini bisa dituliskan sebagai berikut. Untuk $\mu = \nu = 0$,

$$\begin{aligned} \sigma_{00} &= \frac{i}{2}(\gamma^0\gamma^0 - \gamma^0\gamma^0) \\ &= \frac{i}{2}(1-1) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Untuk $\mu = 0, \nu = j$,

$$\begin{aligned} \sigma_{0j} &= \frac{i}{2}(\gamma^0\gamma^j - \gamma^j\gamma^0) \\ &= \frac{i}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(2\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

dan untuk $\mu = i, \nu = 0$,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{i0} &= \frac{i}{2}(\gamma^i\gamma^0 - \gamma^0\gamma^i) \\
&= \frac{i}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(-\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(-2\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.44)
\end{aligned}
$$

yang juga dipenuhi dari sifat antisimetrik, yaitu

$$
\sigma_{0j} = -\sigma_{j0} \qquad (2.45)
$$

Kemudian, untuk $\mu = i, \nu = j$,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{i}{2}(\gamma^j\gamma^j - \gamma^j\gamma^j) \\
&= \frac{i}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sigma^j\sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^j\sigma^i \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{2}\left(2\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j \end{pmatrix}\right) \\
&= i\begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j \end{pmatrix} \\
&= i\begin{pmatrix} -i\varepsilon_{ijk}\sigma^k & 0 \\ 0 & -i\varepsilon_{ijk}\sigma^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \varepsilon_{ijk}\sigma^k & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ijk}\sigma^k \end{pmatrix} \\
&= \varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \qquad (2.46)
\end{aligned}
$$

Uraian $\sigma_{\mu\nu}$ dalam komponen membuat persamaan (2.35), untuk $\mu = 0, \nu = 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{8V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_1(q^2)\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{00}u_s(p)F^{00} \\
&= 0 \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

Sedangkan untuk $\mu = 0, \nu = j$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{8V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_1(q^2)\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{0j}u_s(p)F^{0j} \\
&= \frac{1}{8V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_1(q^2)\sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\gamma_0 \\
&\quad \times i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}\sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}F^{0j} \\
&= \frac{2im}{8V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_1(q^2)\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}F^{0j} \\
&= \frac{2im}{8V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_1(q^2)\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^j\chi_s \end{pmatrix}F^{0j} \\
&= 0 \qquad (2.48)
\end{aligned}
$$

dan untuk $\mu = i, \nu = 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{8V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \bar{u_{s'}}(p') \sigma_{i0} u_s(p) F^{i0} \\
&= \frac{i}{8V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \gamma_0 \\
&\quad \times (-i) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{i0} \\
&= \frac{-2im}{8V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{i0} \\
&= \frac{-2im}{8V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^i \chi_s \end{pmatrix} F^{i0} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

Selanjutnya untuk $\mu = i, \nu = j$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{8V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \bar{u_{s'}}(p') \sigma_{ij} u_s(p) F^{ij} \\
&= \frac{1}{8V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \gamma_0 \\
&\quad \times \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{ij} \\
&= \frac{2m}{8V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} \varepsilon_{ijk} F_1(q^2) \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{ij} \\
&= \frac{2m}{8V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} \varepsilon_{ijk} F_1(q^2) \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sigma^k \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{ij} \\
&= \frac{2m}{8V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} \varepsilon_{ijk} F_1(q^2) \chi_{s'} \sigma^k \chi_s F^{ij}
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

Dari tensor $F^{\mu\nu}$,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

Evaluasi $\varepsilon_{ijk}F^{ij}$, untuk k=1

$$\begin{aligned} \varepsilon_{231}F^{23} + \varepsilon_{321}F^{32} &= -B_1 - B_1 \\ &= -2B_1 \end{aligned} \tag{2.52}$$

untuk k=2

$$\begin{aligned} \varepsilon_{132}F^{13} + \varepsilon_{312}F^{31} &= -B_2 - B_2 \\ &= -2B_2 \end{aligned} \tag{2.53}$$

dan untuk k=3

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123}F^{12} + \varepsilon_{213}F^{21} &= -B_3 - B_3 \\ &= -2B_3 \end{aligned} \tag{2.54}$$

sehingga dapat dituliskan

$$\varepsilon_{ijk}F^{ij} = -2B_k \tag{2.55}$$

Maka persamaan (2.50) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \frac{2m}{8V\sqrt{E_pE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \chi_{s'}^{\dagger} \sigma^k \chi_s \varepsilon_{ijk} F^{ij} \\ &= \frac{2m}{8V\sqrt{E_pE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \chi_{s'}^{\dagger} \sigma^k \chi_s (-2B_k) \\ &= \frac{-4m}{8V\sqrt{E_pE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \chi_{s'}^{\dagger} \sigma^k \chi_s B_k \\ &= \frac{-4m}{8V\sqrt{E_pE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \chi_{s'}^{\dagger} \sigma^k B_k \chi_s \\ &= \frac{-4m}{8V\sqrt{E_pE_{p'}}} e^{-iqx} F_1(q^2) \chi_{s'}^{\dagger} \sigma \cdot B \chi_s \end{aligned} \tag{2.56}$$

Untuk kasus klasik $E_p \simeq m$, dapat dituliskan

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{-4m}{8V\sqrt{m^2}} e^{-iqx} F_1(q^2) \chi_{s'}^{\dagger} \sigma \cdot B \chi_s \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \chi_{s'}^{\dagger} \sigma \cdot B \chi_s
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Selanjutnya, kita uraikan komponen spin. Untuk $s = s' = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \chi_{\frac{1}{2}}^{\dagger} \sigma \cdot B \chi_{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma \cdot B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} (\sigma_1 B_1 \\
&\quad + \sigma_2 B_2 + \sigma_3 B_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} B_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) (\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} B_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} B_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} B_3) \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) (0 + 0 + B_3) \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) B_3
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Untuk $s = \frac{1}{2}; s' = -\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \chi_{\frac{1}{2}}^{\dagger} \sigma \cdot B \chi_{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma \cdot B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} (\sigma_1 B_1 + \sigma_2 B_2 + \sigma_3 B_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2V}e^{-iqx}F_1(q^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}B_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}B_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}B_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2V}e^{-iqx}F_1(q^2)(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}B_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}B_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}B_3) \\
&= \frac{-1}{2V}e^{-iqx}F_1(q^2)(B_1 - iB_2 + 0) \\
&= \frac{-1}{2V}e^{-iqx}F_1(q^2)(B_1 - iB_2) \qquad (2.59)
\end{aligned}
$$

Untuk $s = -\frac{1}{2}; s' = \frac{1}{2}$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{-1}{2V}e^{-iqx}F_1(q^2)\chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}}\sigma \cdot B\chi_{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-1}{2V}e^{-iqx}F_1(q^2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\sigma \cdot B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2V}e^{-iqx}F_1(q^2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}(\sigma_1 B_1 + \sigma_2 B_2 + \sigma_3 B_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2V}e^{-iqx}F_1(q^2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}B_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}B_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}B_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2V}e^{-iqx}F_1(q^2)(\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}B_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}B_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}B_3) \\
&= \frac{-1}{2V}e^{-iqx}F_1(q^2)(B_1 + iB_2 + 0) \\
&= \frac{-1}{2V}e^{-iqx}F_1(q^2)(B_1 + iB_2) \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

Untuk $s = s' = -\frac{1}{2}$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}} \sigma \cdot B \chi_{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma \cdot B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} (\sigma_1 B_1 + \sigma_2 B_2 + \sigma_3 B_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} B_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) (\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} B_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} B_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} B_3) \\
&= \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2)(0 + 0 - B_3) \\
&= \frac{1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) B_3 \qquad (2.61)
\end{aligned}
$$

Sehingga didapatkan

$$
\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) B_3; \quad s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2)(B_1 - iB_2); \; s = \frac{1}{2}; s' = -\frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2)(B_1 + iB_2); \; s = -\frac{1}{2}; s' = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) B_3; \quad s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (2.62)
$$

Karena dalam kasus klasik, tidak dikenal Lagrangian imaginer, maka syarat agar Lagrangian tersebut bisa diinterpretasikan adalah jika $s = s'$, yaitu

$$
\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{-1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) B_3; \quad s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2V} e^{-iqx} F_1(q^2) B_3; \quad s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (2.63)
$$

Jika dilakukan transformasi Fourier balik, seperti

$$
f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(q) e^{iqx} dq \qquad (2.64)
$$

yang akan menghilangkan faktor eksponensial, menjadi

$$\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{-1}{2V} F_1(q^2) B_3; & s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2V} F_1(q^2) B_3; & s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.65}$$

dan karena kita tidak mengetahui bentuk eksplisit dari $F_1(q^2)$ maka faktor bentuk ini akan dideretkan dalam deret Mc Laurin di sekitar $q^2 = 0$ dan hanya diambil suku pertama. Hal ini boleh, karena dalam hal ini kita hanya ingin menganalisa jenis interaksinya saja, belum melihat seberapa kuat interaksi tersebut.. Sehingga Lagrangian dapat dituliskan sebagai

$$\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{-1}{2V} F_1(0) B_3; & s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2V} F_1(0) B_3; & s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.66}$$

Terlihat bahwa $F_1(0)$ terkopel dengan suatu medan magnet B_3 dan nilainya bergantung dari arah orientasi spin neutrino. Jika dibandingkan dengan kasus klasik, hal ini tidak lain adalah interaksi antara momen magnet dengan medan magnet, sehingga didapatkan selain $F_1(0)$ berkontribusi pada sifat muatan listrik neutrino, $F_1(0)$ juga berkontribusi pada sifat momen magnetik dari neutrino.

2.2 Faktor Bentuk $F_2(q^2)$

Selanjutnya kita uraikan suku $F_2(q^2)$ di dalam Lagrangian. Suku Lagrangian pada faktor bentuk ini adalah

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \langle j_\mu \rangle A^\mu \\ &= \frac{i}{2V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \bar{u}(p') \sigma_{\mu\nu} u(p) q^\nu A^\mu \end{aligned} \tag{2.67}$$

Mengingat sifat antisimetrik dari tensor $\sigma_{\mu\nu}$, maka persamaan (2.67) bisa dituliskan kembali sebagai

$$\begin{aligned} \bar{u_{s'}}(p') \sigma_{\mu\nu} u_s(p) i q^\nu A^\mu &= \frac{1}{2} \bar{u_{s'}}(p') \sigma_{\mu\nu} u_s(p) i q^\nu A^\mu \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{u_{s'}}(p') \sigma_{\mu\nu} u_s(p) i q^\nu A^\mu \end{aligned} \tag{2.68}$$

Kemudian, khusus untuk suku kedua Pers. (2.68), akan dilakukan pertukaran indeks, yaitu

$$\mu \longleftrightarrow \nu$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)iq^\nu A^\mu &= \frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)iq^\nu A^\mu \\
&\quad +\frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\nu\mu}u_s(p)iq^\mu A^\nu \\
&= \frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)iq^\nu A^\mu \\
&\quad -\frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)iq^\mu A^\nu \\
&= \frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)i \\
&\quad \times(q^\nu A^\mu - q^\mu A^\nu) \\
&= -\frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)i \\
&\quad \times(q^\mu A^\nu - q^\nu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)F^{\mu\nu} \qquad (2.69)
\end{aligned}
$$

dengan

$$
F^{\mu\nu} = i(q^\mu A^\nu - q^\nu A^\mu) \qquad (2.70)
$$

Dengan demikian, Lagrangain interaksi dengan $F_2(q^2)$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \langle j_\mu \rangle A^\mu \\
&= \frac{1}{2V\sqrt{E_p E_{p'}}}e^{-iqx}F_2(q^2)\frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}}e^{-iqx}F_2(q^2)\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}u_s(p)F^{\mu\nu} \qquad (2.71)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, kita uraikan spinor $u_s(p)$ seperti Pers. (2.36) sampai Pers. (2.40). Kemudian, mengingat definisi dari tensor $\sigma_{\mu\nu}$ pada Pers. (2.41), yaitu

$$
\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \qquad (2.72)
$$

dan uraian untuk setiap komponen μ, ν pada Pers. (2.42), (**??**), (2.44), dan (**??**), diperoleh, untuk $\mu = 0, \nu = 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}}e^{-iqx}F_2(q^2)\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{00}u_s(p)F^{00} \\
&= 0 \qquad (2.73)
\end{aligned}
$$

untuk $\mu = 0, \nu = j$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \bar{u_{s'}}(p') \sigma_{0j} u_s(p) F^{0j} \\
&= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \gamma_0 \\
&\quad \times i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{0j} \\
&= \frac{2im}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{0j} \\
&= \frac{2im}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^j \chi_s \end{pmatrix} F^{0j} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{2.74}
$$

untuk $\mu = i, \nu = 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \bar{u_{s'}}(p') \sigma_{i0} u_s(p) F^{i0} \\
&= \frac{i}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \gamma_0 \\
&\quad \times (-i) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{i0} \\
&= \frac{-2im}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{i0} \\
&= \frac{-2im}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^i \chi_s \end{pmatrix} F^{i0} \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

dan untuk $\mu = i, \nu = j$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \bar{u_{s'}}(p') \sigma_{ij} u_s(p) F^{ij} \\
&= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \gamma_0 \\
&\quad \times \varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{ij} \\
&= \frac{2m}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} \varepsilon_{ijk} F_2(q^2) \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{ij} \\
&= \frac{2m}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} \varepsilon_{ijk} F_2(q^2) \begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sigma^k \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{ij} \\
&= \frac{2m}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} \varepsilon_{ijk} F_2(q^2) \chi_{s'} \sigma^k \chi_s F^{ij} \qquad (2.76)
\end{aligned}
$$

Dari tensor $F^{\mu\nu}$ pada Pers. (2.51) sampai (2.55), Pers. (2.76) dapat dituliskan menjadi

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{2m}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \chi_{s'}^\dagger \sigma^k \chi_s \varepsilon_{ijk} F^{ij} \\
&= \frac{2m}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \chi_{s'}^\dagger \sigma^k \chi_s (-2B_k) \\
&= \frac{-4m}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \chi_{s'}^\dagger \sigma^k \chi_s B_k \\
&= \frac{-4m}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \chi_{s'}^\dagger \sigma^k B_k \chi_s \\
&= \frac{-4m}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_2(q^2) \chi_{s'}^\dagger \sigma \cdot B \chi_s \qquad (2.77)
\end{aligned}
$$

Untuk kasus klasik, $E_p \simeq m$, dapat dituliskan

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{-4m}{4V\sqrt{m^2}} e^{-iqx} F_2(q^2) \chi_{s'}^\dagger \sigma \cdot B \chi_s \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_2(q^2) \chi_{s'}^\dagger \sigma \cdot B \chi_s \qquad (2.78)
\end{aligned}
$$

Pers. (2.78) ini tidak lain adalah Pers. (2.57) dengan $F_1(q^2)$ diganti $F_2(q^2)$dengan

perbedaan faktor $\frac{1}{2}$. Karena itu, dengan prosedur yang sama, didapatkan

$$\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_2(q^2) B_3; \quad s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_2(q^2)(B_1 - iB_2); \; s = \frac{1}{2}; s' = -\frac{1}{2} \\ \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_2(q^2)(B_1 + iB_2); \; s = -\frac{1}{2}; s' = \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_2(q^2) B_3; \quad s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.79}$$

Dengan alasan yang sama, yakni tidak dikenal Lagrangian imaginer dalam kasus klasik, maka syarat agar Lagrangian tersebut bisa diinterpretasikan untuk sembarang medan B adalah jika $s = s'$, maka nilai yang memenuhi adalah

$$\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_2(q^2) B_3; \quad s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_2(q^2) B_3; \quad s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.80}$$

Jika dilakukan transformasi fourier balik,

$$\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{-1}{V} F_2(q^2) B_3; \; s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{V} F_2(q^2) B_3; \quad s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.81}$$

dan karena kita tidak mengetahui bentuk eksplisit dari $F_2(q^2)$ maka faktor bentuk ini akan dideretkan dalam deret Mc Lauren di sekitar $q^2 = 0$ dan hanya diambil suku pertama. Sehingga Lagrangian dapat dituliskan sebagai

$$\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{-1}{V} F_2(0) B_3; \; s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{V} F_2(0) B_3; \quad s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.82}$$

Terlihat bahwa jika dibandingkan dengan elektrodinamika klasik, suku ini tidak lain adalah suku interaksi antara momen magnetik dengan medan magnet, sehingga $F_2(0)$ berkontribusi pada sifat momen magnetik dari neutrino. Tetapi, berbeda dengan $F_1(0)$, yang jika muatan listrik nol, maka tidak mempunyai momen magnetik, $F_2(0)$ tidak bergantung muatan listrik neutrino. Jadi meskipun neutrino netral, neutrino masih mungkin mempunyai momen magnetik. Momen magnetik seperti ini disebut momen magnetik anomali, dan secara umum faktor bentuk $F_2(q^2)$ disebut faktor bentuk momen magnetik.

2.3 Faktor Bentuk $F_3(q^2)$

Pada subbab ini kita bahas suku interaksi dengan faktor bentuk $F_3(q^2)$. Suku lagrangian pada faktor bentuk ini adalah

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \langle j_\mu \rangle A^\mu \\ &= \frac{i}{2V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_3(q^2)\bar{u}(p')\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 u(p) q^\nu A^\mu \end{aligned} \tag{2.83}$$

Seperti sebelumnya, sifat antisimetri $\sigma_{\mu\nu}$, dan uraian $q^\nu A^\mu$ dalam $F^{\mu\nu}$ memberikan

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \langle j_\mu \rangle A^\mu \\ &= \frac{1}{2V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_3(q^2)\frac{1}{2}\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 u_s(p) F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_3(q^2)\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 u_s(p) F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.84}$$

Kemudian, uraian spinor $u_s(p)$ seperti Pers. (2.36) sampai dengan (2.40), pendekatan klasik $E_p = m$, dan mengingat tensor $\sigma_{\mu\nu}$ seperti telah diuraikan dalam Pers. (2.41) sampai (**??**), didapatkan komponen Lagrangian untuk $\mu = 0, \nu = 0$,

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_3(q^2)\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{00}\gamma_5 u_s(p) F^{00} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.85}$$

untuk $\mu = 0, \nu = j$,

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_3(q^2)\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{0j}\gamma_5 u_s(p) F^{0j} \\ &= \frac{1}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_3(q^2)\sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix}\gamma_0 \\ &\quad \times i\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}\gamma_5\sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{0j} \\ &= \frac{2im}{4V\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{-iqx} F_3(q^2)\begin{pmatrix} \chi_{s'}^\dagger & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{0j} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2im}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \sigma^j\chi_s \\ 0 \end{pmatrix} F^{0j} \\
&= \frac{2im}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\chi^\dagger_{s'}\sigma^j\chi_s F^{0j} \qquad (2.86)
\end{aligned}
$$

untuk $\mu = i, \nu = 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{i0}\gamma_5 u_s(p)F^{i0} \\
&= \frac{i}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\gamma_0 \\
&\quad \times(-i)\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\gamma_5\sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}F^{i0} \\
&= \frac{-2im}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}F^{i0} \\
&= \frac{-2im}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times\begin{pmatrix} \sigma^i\chi_s \\ 0 \end{pmatrix}F^{i0} \\
&= \frac{-2im}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\chi^\dagger_{s'}\sigma^i\chi_s F^{i0} \qquad (2.87)
\end{aligned}
$$

dan untuk $\mu = i, \nu = j$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{1}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\bar{u_{s'}}(p')\sigma_{ij}\gamma_5 u_s(p)F^{ij} \\
&= \frac{1}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\gamma_0 \\
&\quad \times\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}\gamma_5\sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}F^{ij} \\
&= \frac{2m}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}\varepsilon_{ijk}F_3(q^2)\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\quad \times\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}F^{ij}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2m}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}\varepsilon_{ijk}F_3(q^2)\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma^k\chi_s \end{pmatrix} F^{ij} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.88}
$$

Mengingat komponen tensor $F^{\mu\nu}$,

$$
F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.89}
$$

Maka tampak bahwa

$$
F^{oj} = E_j \tag{2.90}
$$

dan antisimetrinya

$$
F^{i0} = -E_i \tag{2.91}
$$

Maka persamaan (2.86) dapat dituliskan menjadi

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{2im}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\chi^\dagger_{s'}\sigma^j\chi_sF^{0j} \\
&= \frac{2im}{4V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\chi^\dagger_{s'}\sigma^j\chi_sE_j \\
&= \frac{im}{2V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\chi^\dagger_{s'}\sigma^j\chi_sE_j \\
&= \frac{im}{2V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\chi^\dagger_{s'}\sigma^jE_j\chi_s \\
&= \frac{im}{2V\sqrt{E_pE_{p'}}}e^{-iqx}F_3(q^2)\chi^\dagger_{s'}\sigma\cdot E\chi_s
\end{aligned} \tag{2.92}
$$

Untuk kasus klasik, $E_p \simeq m$, dapat dituliskan

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{im}{2V\sqrt{m^2}}e^{-iqx}F_3(q^2)\chi^\dagger_{s'}\sigma\cdot E\chi_s \\
&= \frac{i}{2V}e^{-iqx}F_3(q^2)\chi^\dagger_{s'}\sigma\cdot E\chi_s
\end{aligned} \tag{2.93}
$$

Bandingkan Pers. (2.93) dengan (2.57), kedua persamaan ini serupa dan hanya mengganti $F_1(q^2)$ dengan $F_3(q^2)$ dan $\sigma\cdot B$ dengan $\sigma\cdot E$. Karena itu, uraian dalam indeks spin s dan s' juga memberikan hasil serupa yaitu mengganti $F_1(q^2)$ dengan

$F_3(q^2)$ dan $\sigma \cdot B$ dengan $\sigma \cdot E$ pada Pers. (2.58) sampai (2.61). Sehingga didapatkan lagrangian totalnya

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \begin{cases} \frac{2i}{2V} e^{-iqx} F_3(q^2) E_3; \quad s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{21}{2V} e^{-iqx} F_3(q^2)(iE_2 + E_1); \; s = \frac{1}{2}; s' = -\frac{1}{2} \\ \frac{21}{2V} e^{-iqx} F_3(q^2)(iE_1 - E_2); \; s = -\frac{1}{2}; s' = \frac{1}{2} \\ \frac{2i}{2V} e^{-iqx} F_3(q^2) E_3; \quad s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{i}{V} e^{-iqx} F_3(q^2) E_3; \quad s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{V} e^{-iqx} F_3(q^2)(iE_1 + E_2); \; s = \frac{1}{2}; s' = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{V} e^{-iqx} F_3(q^2)(iE_1 - E_2); \; s = -\frac{1}{2}; s' = \frac{1}{2} \\ \frac{i}{V} e^{-iqx} F_3(q^2) E_3; \quad s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Dalam kasus klasik, tidak dikenal Lagrangian imaginer, maka syarat agar Lagrangian tersebut bisa diinterpretasikan adalah jika $s \neq s'$ dan pengambilan secara khusus yaitu komponen medan listrik $E_1 = 0$, maka nilai yang memenuhi adalah

$$\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{1}{V} e^{-iqx} F_3(q^2) E_2; \quad s = \frac{1}{2}; s' = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{V} e^{-iqx} F_3(q^2) E_2; \quad s = -\frac{1}{2}; s' = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.95}$$

Jika dilakukan transformasi fourier balik,

$$\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{1}{V} F_3(q^2) E_2; \quad s = \frac{1}{2}; s' = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{V} F_3(q^2) E_2; \quad s = -\frac{1}{2}; s' = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.96}$$

dan karena kita tidak mengetahui bentuk eksplisit dari $F_3(q^2)$ maka faktor bentuk ini akan dideretkan dalam deret Mc Laurin di sekitar $q^2 = 0$ dan hanya diambil suku pertama. Sehingga Lagrangian dapat dituliskan sebagai

$$\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{1}{V} F_3(0) E_2; \quad s = \frac{1}{2}; s' = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{V} F_3(0) E_2; \quad s = -\frac{1}{2}; s' = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.97}$$

Terlihat bahwa jika dibandingkan dengan elektrodinamika klasik, suku ini tidak lain adalah suku interaksi antara momen elektrik dengan medan listrik, sehingga faktor $F_3(0)$ berkontribusi pada sifak momen elektrik neutrino. Dan secara umum, faktor $F_3(q^2)$ disebut faktor bentuk momen elektrik.

2.4 Faktor Bentuk $F_4(q^2)$

Akhirnya, kita analisa faktor bentuk terakhir $F_4(q^2)$. Suku Lagrangian untuk faktor bentuk ini bisa dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \langle j_\mu \rangle A^\mu \\
&= \frac{e^{-iqx}}{\sqrt{2E_pV}\sqrt{2E_{p'}V}} F_4(q^2)(\bar{u_{s'}}(p')(q_\mu q_\nu \gamma^\nu - q^\mu q_\mu \gamma_\mu) \\
&\quad \times \gamma_5 u_s(p))A^\mu \\
&= \frac{e^{-iqx}}{\sqrt{2E_pV}\sqrt{2E_{p'}V}} F_4(q^2)(\bar{u_{s'}}(p')(q_\mu q_\nu \gamma^\nu - q^\mu q_\mu g_{\mu\nu} \gamma^\nu) \\
&\quad \times \gamma_5 u_s(p))A^\mu \\
&= \frac{e^{-iqx}}{\sqrt{2E_pV}\sqrt{2E_{p'}V}} F_4(q^2)(\bar{u_{s'}}(p')(q_\mu q_\nu - q^\mu q_\mu g_{\mu\nu})\gamma^\nu \\
&\quad \times \gamma_5 u_s(p))A^\mu \\
&= \frac{e^{-iqx}}{\sqrt{2E_pV}\sqrt{2E_{p'}V}} F_4(q^2)(\bar{u_{s'}}(p')\gamma^\nu \gamma_5 u_s(p)) \\
&\quad \times (q_\mu q_\nu - q^\mu q_\mu g_{\mu\nu})A^\mu
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Evaluasi suku terakhir dari Pers. (2.98)

$$\begin{aligned}
(q_\mu q_\nu - q^\mu q_\mu g_{\mu\nu})A^\mu &= q_\mu q_\nu A^\mu - q^\mu q_\mu g_{\mu\nu} A^\mu \\
&= -(-q_\mu q_\nu A^\mu + q^\mu q_\mu g_{\mu\nu} A^\mu) \\
&= -(-q_\nu q_\mu A^\mu + q^\mu q_\mu g_{\mu\nu} A^\mu) \\
&= -(-q_\nu q^\mu A_\mu + q^\mu q_\mu g_{\mu\nu} A^\mu) \\
&= -(-q^\mu q_\nu A_\mu + q^\mu q_\mu g_{\mu\nu} A^\mu) \\
&= -q^\mu(-q_\nu A_\mu + q_\mu g_{\mu\nu} A^\mu) \\
&= -q^\mu(-q_\nu A_\mu + q_\mu A_\nu) \\
&= -q^\mu(q_\mu A_\nu - q_\nu A_\mu) \\
&= i^2 q^\mu(q_\mu A_\nu - q_\nu A_\mu) \\
&= i q^\mu i(q_\mu A_\nu - q_\nu A_\mu) \\
&= i q^\mu F_{\mu\nu}(q) \\
&= j_\nu
\end{aligned} \tag{2.99}$$

dengan $j_\nu(q)$ merupakan rapat arus dalam ruang momentum. Dengan demikian persamaan (2.98) bisa dituliskan sebagai

$$\mathscr{L} = \frac{e^{-iqx}}{\sqrt{2E_pV}\sqrt{2E_{p'}V}} F_4(q^2)(\bar{u_{s'}}(p')\gamma^\nu\gamma_5 u_s(p))j_\nu(q) \tag{2.100}$$

Selanjutnya evaluasi suku perkalian spinor $u_s(p)$. Untuk $\nu = 0$ dan kasus non-relativistik,

$$\begin{aligned}
\bar{u_{s'}}(p')\gamma^0\gamma_5 u_s(p) &= \sqrt{E'_p + m}\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & \frac{\sigma\cdot p'}{E_{p'}+m}\chi^\dagger_{s'} \end{pmatrix}\gamma^0\gamma_5 \\
&\quad \times\sqrt{E_p + m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma\cdot p}{E_p+m}\chi_s \end{pmatrix} \\
&\approx \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\gamma^0\gamma_5\sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2m\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\gamma^0\gamma_5\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Bentuk eksplisit matriks γ memberikan

$$\begin{aligned}
\bar{u_{s'}}(p')\gamma^0\gamma_5 u_s(p) &= 2m\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\gamma^0\gamma_5\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2m\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2m\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s \end{pmatrix} \\
&= 2m\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\chi_s \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Serupa untuk $\nu = i = 1,2,3$,

$$
\begin{aligned}
\bar{u_{s'}}(p')\gamma^i\gamma_5 u_s(p) &= \sqrt{E'_p+m}\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & \frac{\sigma\cdot p'}{E_{p'}+m}\chi^\dagger_{s'} \end{pmatrix}\gamma^i\gamma_5 \\
&\quad \times\sqrt{E_p+m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma\cdot p}{E_p+m}\chi_s \end{pmatrix} \\
&\approx \sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\gamma^i\gamma_5\sqrt{2m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2m\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\gamma^i\gamma_5\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2m\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\gamma^i\gamma_5\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2m\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 2m\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s \end{pmatrix} \\
&= 2m\begin{pmatrix} \chi^\dagger_{s'} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sigma_i\chi_s \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -2m\chi^\dagger_{s'}\sigma_i\chi_s \qquad (2.103)
\end{aligned}
$$

Maka, Lagrangian (2.100) tereduksi menjadi

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= -\frac{e^{-iqx}}{\sqrt{2mV}\sqrt{2mV}}F_4(q^2)2m\chi^\dagger_{s'}\sigma_i\chi_s j_i \\
&= -\frac{e^{-iqx}}{2mV}F_4(q^2)2m\chi^\dagger_{s'}\sigma_i\chi_s j_i \\
&= -\frac{e^{-iqx}}{V}F_4(q^2)\chi^\dagger_{s'}\sigma_i\chi_s j_i \\
&= -\frac{e^{-iqx}}{V}F_4(q^2)\chi^\dagger_{s'}\sigma_i j_i\chi_s \\
&= -\frac{e^{-iqx}}{V}F_4(q^2)\chi^\dagger_{s'}\sigma\cdot j\chi_s \qquad (2.104)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, uraian indeks spin memberikan, untuk $s = s' = \frac{1}{2}$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} \cdot j \chi_{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} (\sigma_1 j_1 \\
&\quad + \sigma_2 j_2 + \sigma_3 j_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} j_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} j_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} j_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) (\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} j_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} j_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} j_3) \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) (0 + 0 + j_3) \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) j_3 \qquad (2.105)
\end{aligned}
$$

Untuk $s = \frac{1}{2}; s' = -\frac{1}{2}$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} \cdot j \chi_{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot j \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} (\sigma_1 j_1 + \sigma_2 j_2 + \sigma_3 j_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} j_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} j_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} j_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2)(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} j_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} j_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} j_3) \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2)(j_1 - i j_2 + 0) \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2)(j_1 - i j_2) \qquad (2.106)
\end{aligned}
$$

Untuk $s = -\frac{1}{2}; s' = \frac{1}{2}$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}} \sigma \cdot j \chi_{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma \cdot j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} (\sigma_1 j_1 + \sigma_2 j_2 + \sigma_3 j_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} j_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} j_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} j_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2)(\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} j_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} j_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} j_3) \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2)(j_1 + i j_2 + 0) \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2)(j_1 + i j_2) \qquad (2.107)
\end{aligned}
$$

Untuk $s = s' = -\frac{1}{2}$,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma} \cdot j \chi_{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot j \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} (\sigma_1 j_1 + \sigma_2 j_2 + \sigma_3 j_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} j_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} j_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} j_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) (\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} j_1 \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} j_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} j_3) \\
&= \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) (0 + 0 - j_3) \\
&= \frac{1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) j_3 \qquad (2.108)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, keseluruhan bentuk Lagrangian diberikan oleh

$$
\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) j & ; s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2)(j_1 - i j_2) & ; s = \frac{1}{2}; s' = -\frac{1}{2} \\ \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2)(j_1 + i j_2) & ; s = -\frac{1}{2}; s' = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) j_3 & ; s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (2.109)
$$

dan untuk sembarang rapat arus j. Untuk $s \neq s'$ Lagrangiannya mengandung suku imaginer, yang tidak dikenal pada kasus klasik, maka yang memenuhi adalah untuk $s = s'$

$$
\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) j_3 & ; s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{V} e^{-iqx} F_4(q^2) j_3 & ; s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (2.110)
$$

Dan karena bentuk eksplisit $F_4(q^2)$tidak diketahui, maka $F_4(q^2)$ akan dideretkan di

sekitar $q^2 = 0$ dan diambil suku pertamanya saja, sehingga

$$\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{-1}{V} e^{-iqx} F_4(0) j_3 & ; s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{V} e^{-iqx} F_4(0) j_3 & ; s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.111}$$

dan jika dilakukan transformasi Fourier balik, akan dihasilkan

$$\mathscr{L} = \begin{cases} \frac{-1}{V} F_4(0) j_3 & ; s = s' = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{V} F_4(0) j_3 & ; s = s' = -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.112}$$

Terlihat bahwa Lagrangian ini merupakan interaksi antara spin dengan rapat arus j yang absen pada fisika klasik. $F_4(0)$ disebut momen anapol dari neutrino, dan secara umum $F_4(q^2)$ disebut faktor bentuk momen anapol.

Bab 3

Faktor Bentuk Neutrino Dirac dan Majorana

Neutrino adalah fermion netral sehingga dapat mempunyai sifat Dirac atau Majorana. Pada bab ini dianalisa sifat-sifat dari transformasi paritas, dan sekawan muatan, dan implikasinya bagi kualifikasi Dirac dan Majorana ini.

3.1 Transformasi P

Pertama, transformasi paritas, $r \to r' = -r$. Transformasi P (Lampiran D) untuk skalar, pseudoskalar, vektor, pseudovektor, dan tensor akan diberikan sebagai berikut.

Untuk skalar,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 \psi_2 \xrightarrow{P} \bar{\psi}'_1 \psi'_2 &= \bar{\psi}_1 \gamma^0 \gamma^0 \psi_2 \\ &= \bar{\psi}_1 \psi_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

untuk pseudoskalar,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 \xrightarrow{P} \bar{\psi}'_1 \gamma_5 \psi'_2 &= \bar{\psi}_1 \gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 \psi_2 \\ &= -\bar{\psi}_1 \gamma_5 \gamma^0 \gamma^0 \psi_2 \\ &= -\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Untuk vektor,

$$\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 \xrightarrow{P} \bar{\psi}'_1 \gamma^\mu \psi'_2 = \bar{\psi}_1 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \psi_2 \tag{3.3}$$

Untuk $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 \psi_2 &= \bar{\psi}_1 \gamma^0 \psi_2 \\ &= \bar{\psi}_1 \gamma_0 \psi_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Untuk $\mu = i = 1,2,3$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1\gamma^0\gamma^i\gamma^0\psi_2 &= \bar{\psi}_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\psi_2 \\
&= \bar{\psi}_1\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\psi_2 \\
&= \bar{\psi}_1\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\psi_2 \\
&= \bar{\psi}_1\gamma_i\psi_2 \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Maka,

$$\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2 \xrightarrow{P} \bar{\psi}_1'\gamma^\mu\psi_2' = \bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_2 \qquad (3.6)$$

Untuk Pseudovektor

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma_5\psi_2 \xrightarrow{P} \bar{\psi}_1'\gamma^\mu\gamma_5\psi_2' &= \bar{\psi}_1\gamma^0\gamma^\mu\gamma_5\gamma^0\psi_2 \\
&= \bar{\psi}_1\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma_5\psi_2 \\
&= -\bar{\psi}_1\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma_5\psi_2 \\
&= -\bar{\psi}_1\gamma_\mu\gamma_5\psi_2 \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Dan untuk tensor,

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2 \xrightarrow{P} \bar{\psi}_1'\sigma^{\mu\nu}\psi_2' &= \bar{\psi}_1\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0\psi_2 \\
&= \bar{\psi}_1\gamma^0\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma^0\psi_2 \\
&= \bar{\psi}_1\frac{i}{2}(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^0 - \gamma^0\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^0)\psi_2 \\
&= \bar{\psi}_1\frac{i}{2}(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0 \\
&\quad -\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0)\psi_2 \\
&= \bar{\psi}_1\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\psi_2 \\
&= \bar{\psi}_1\sigma_{\mu\nu}\psi_2 \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

3.2 Transformasi C

Kedua, transformasi sekawan muatan, yakni muatan negarif menjadi positif dan sebaliknya. Transformasi C (Lampiran D) untuk skalar, pseudoskalar, vektor, pseudovektor, dan tensor akan diberikan sebagai berikut.

Kemudian transformasi C, untuk skalar

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1 \psi_2 \xrightarrow{C} \bar{\psi}'_1 \psi'_2 &= -\psi_1^T C^{-1} C \bar{\psi}_2{}^T \\
&= -\psi_1^T \bar{\psi}_2{}^T \\
&= [\bar{\psi}_1 \psi_2]^T \\
&= \bar{\psi}_2 \psi_1 \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Untuk pseudoskalar,

$$\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 \xrightarrow{C} \bar{\psi}'_1 \gamma_5 \psi'_2 = -\psi_1^T C^{-1} \gamma_5 C \bar{\psi}_2{}^T \qquad (3.10)$$

Mengingat

$$C = i\gamma^2 \gamma^0 \qquad (3.11)$$

Maka

$$\begin{aligned}
\gamma_5 C &= \gamma_5 i\gamma^2 \gamma^0 \\
&= -i\gamma^2 \gamma_5 \gamma^0 \\
&= i\gamma^2 \gamma^0 \gamma_5 \\
&= C\gamma_5 \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2 \xrightarrow{C} \bar{\psi}'_1 \gamma_5 \psi'_2 &= -\psi_1^T C^{-1} \gamma_5 C \bar{\psi}_2{}^T \\
&= -\psi_1^T C^{-1} C \gamma_5 \bar{\psi}_2{}^T \\
&= -\psi_1^T \gamma_5 \bar{\psi}_2{}^T \\
&= \left[\bar{\psi}_2 \gamma_5^T \psi_1\right]^T \\
&= [\bar{\psi}_2 \gamma_5 \psi_1]^T \\
&= \bar{\psi}_2 \gamma_5 \psi_1 \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Untuk vektor,

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2 \xrightarrow{C} \bar{\psi}'_1 \gamma^\mu \psi'_2 &= -\psi_1^T C^{-1} \gamma^\mu C \bar{\psi}_2{}^T \\
&= \psi_1^T \gamma^{\mu T} \bar{\psi}_2{}^T \\
&= -[\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1]^T \\
&= -\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1 \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Untuk pseudovektor

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma_5\psi_2 \xrightarrow{C} \bar{\psi}_1'\gamma^\mu\gamma_5\psi_2' &= -\psi_1^T C^{-1}\gamma^\mu\gamma_5 C\bar{\psi}_2{}^T \\
&= -\psi_1^T C^{-1}\gamma^\mu C\gamma_5\bar{\psi}_2{}^T \\
&= \psi_1^T\gamma^{\mu T}\gamma_5\bar{\psi}_2{}^T \\
&= -\left[\bar{\psi}_2\gamma_5^T\gamma^\mu\psi_1\right]^T \\
&= -\left[\bar{\psi}_2\gamma_5\gamma^\mu\psi_1\right]^T \\
&= -\bar{\psi}_2\gamma_5\gamma^\mu\psi_1 \\
&= \bar{\psi}_2\gamma^\mu\gamma_5\psi_1 \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Untuk tensor,

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2 \xrightarrow{C} \bar{\psi}_1'\sigma^{\mu\nu}\psi_2' &= -\psi_1^T C^{-1}\sigma^{\mu\nu}C\bar{\psi}_2{}^T \\
&= -\psi_1^T C^{-1}\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)C\bar{\psi}_2{}^T \\
&= -\psi_1^T\frac{i}{2}(C^{-1}\gamma^\mu CC^{-1}\gamma^\nu C \\
&\quad -C^{-1}\gamma^0\gamma^\nu CC^{-1}\gamma^\mu C)\bar{\psi}_2{}^T \\
&= -\psi_1^T\frac{i}{2}(\gamma^{\mu T}\gamma^{\nu T}-\gamma^{\nu T}\gamma^{\mu T})\bar{\psi}_2{}^T \\
&= \psi_1^T\sigma^{\mu\nu T}\bar{\psi}_2{}^T \\
&= -\left[\bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1\right]^T \\
&= -\bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1 \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

3.3 Transformasi CP pada fungsi Verteks

Terakhir, kita tinjau transformasi gabungan antara sekawan muatan dan paritas. Lagrangian interaksi elektromagnetik dari neutrino dapat dituliskan sebagai

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \bar{\psi}\Gamma_\mu\psi A^\mu \\
&= \bar{\psi}(F_1(q^2)\gamma_\mu + F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q^\nu \\
&\quad +F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 + F_4(q^2) \\
&\quad \times(q^2\gamma_\mu - q^\mu q_\nu\gamma^\nu))\psi A^\mu \\
&= \bar{\psi}F_1(q^2)\gamma_\mu\psi A^\mu + \bar{\psi}F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\psi A^\mu \\
&\quad +\bar{\psi}F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5\psi A^\mu + \bar{\psi}F_4(q^2) \\
&\quad \times(q^2\gamma_\mu - q^\mu q_\nu\gamma^\nu)\psi A^\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{\psi}F_1(q^2)\gamma_\mu\psi A^\mu + \bar{\psi}F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\psi A^\mu \\
&\quad + \bar{\psi}F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5\psi A^\mu \\
&\quad + \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma^\nu\gamma_5(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\psi A^\mu \\
&= \bar{\psi}F_1(q^2)\gamma_\mu\psi A^\mu + \bar{\psi}F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\psi A^\mu \\
&\quad + \bar{\psi}F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5\psi A^\mu \\
&\quad + \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma^\nu\gamma_5\psi A^\mu q_\mu q_\nu \\
&\quad - \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma^\nu\gamma_5\psi A^\mu q^2 g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Mengingat transformasi CP untuk medan foton dan momentum q,

$$
\begin{aligned}
A^\mu &\rightarrow -A^\mu \\
q^\mu &\rightarrow q_\mu
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Maka, transformasi CP untuk suku pertama Pers. (3.17) adalah

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}F_1(q^2)\gamma_\mu\psi A^\mu \rightarrow\ & \bar{\psi}'F_1(q^2)\gamma_\mu\psi' A'^\mu \\
&= (-\bar{\psi}F_1(q^2)\gamma^\mu\psi)(-A_\mu) \\
&= \bar{\psi}F_1(q^2)\gamma^\mu\psi A_\mu \\
&= \bar{\psi}F_1(q^2)\gamma^\mu A_\mu\psi \\
&= \bar{\psi}F_1(q^2)\gamma_\mu A^\mu\psi \\
&= \bar{\psi}F_1(q^2)\gamma_\mu\psi A^\mu
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Tampak, suku ini invarian terhadap transformasi CP. Selanjutnya, transformasi CP untuk suku kedua Pers. (3.17),

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\psi A^\mu \rightarrow\ & \bar{\psi}'F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q'^\nu\psi' A'^\mu \\
&= (-\bar{\psi}F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\psi)(-A_\mu) \\
&= \bar{\psi}F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\psi A_\mu \\
&= \bar{\psi}F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu A_\mu\psi \\
&= \bar{\psi}F_2(q^2)i\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)q_\nu A_\mu\psi \\
&= \bar{\psi}F_2(q^2)i\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu q_\nu A_\mu \\
&\quad -\gamma^\nu\gamma^\mu q_\nu A_\mu)\psi \\
&= \bar{\psi}F_2(q^2)i\frac{i}{2}(\gamma^\mu A_\mu\gamma^\nu q_\nu \\
&\quad -\gamma^\nu q_\nu\gamma^\mu A_\mu)\psi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{\psi} F_2(q^2) i \frac{i}{2} (\gamma_\mu A^\mu \gamma_\nu q^\nu \\
&\quad - \gamma_\nu q^\nu \gamma_\mu A^\mu) \psi \\
&= \bar{\psi} F_2(q^2) i \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu \\
&\quad - \gamma_\nu \gamma_\mu) q^\nu A^\mu \psi \\
&= \bar{\psi} F_2(q^2) i \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) q^\nu \psi A^\mu \\
&= \bar{\psi} F_2(q^2) i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \psi A^\mu \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

juga invarian. Untuk suku ketiga, transformasi C nya adalah

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi \xrightarrow{C} \bar{\psi}' \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi' &= -\psi^T C^{-1} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 C \bar{\psi}^T \\
&= -\psi^T C^{-1} \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) q^\nu \gamma_5 C \bar{\psi}^T \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

mengingat

$$
\begin{aligned}
\gamma_5 C &= \gamma_5 i \gamma^2 \gamma^0 \\
&= i \gamma^2 \gamma^0 \gamma_5 \\
&= C \gamma_5 \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Maka,

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi \xrightarrow{C} \bar{\psi}' \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi' &= -\psi^T C^{-1} \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_5 C \bar{\psi}^T \\
&= -\psi^T C^{-1} \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) C \gamma_5 \bar{\psi}^T \\
&= -\psi^T \frac{i}{2} (C^{-1} \gamma_\mu C C^{-1} \gamma_\nu C \\
&\quad - C^{-1} \gamma_\nu C C^{-1} \gamma_\mu C) \gamma_5 \bar{\psi}^T \\
&= -\psi^T \frac{i}{2} (\gamma_\mu^T \gamma_\nu^T - \gamma_\nu^T \gamma_\mu^T) \gamma_5 \bar{\psi}^T \\
&= \psi^T \sigma_{\mu\nu}^T \gamma_5 \bar{\psi}^T \\
&= \psi^T \sigma_{\mu\nu}^T \gamma_5^T \bar{\psi}^T \\
&= -\left[\bar{\psi} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \psi \right]^T \\
&= -\bar{\psi} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \psi \\
&= -\bar{\psi} \gamma_5 \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_5\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_5\gamma_\mu)\psi \\
&= -\bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma_5\psi \\
&= -\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Sedangkan transformasi P untuk suku ini,

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi \xrightarrow{P} \bar{\psi}'\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi' &= \bar{\psi}\gamma_0\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\gamma_0\psi \\
&= -\bar{\psi}\gamma_0\sigma_{\mu\nu}\gamma_0\gamma_5\psi \\
&= -\bar{\psi}\gamma_0\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma_0\gamma_5\psi \\
&= -\bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma_0\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_0 - \gamma_0\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_0)\gamma_5\psi \\
&= -\bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0\gamma_0\gamma_\nu\gamma_0 \\
&\quad -\gamma_0\gamma_\nu\gamma_0\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0)\gamma_5\psi \\
&= -\bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma_5\psi \\
&= -\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Maka transformasi CP untuk suku ini adalah

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi q^\nu A^\mu \rightarrow \bar{\psi}'\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi' q'^\nu A'^\mu &= \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi q_\nu(-A_\mu) \\
&= -\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}q_\nu A_\mu\gamma_5\psi \\
&= -\bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)q_\nu A_\mu\gamma_5\psi \\
&= -\bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu q_\nu A_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu q_\nu A_\mu)\gamma_5\psi \\
&= -\bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma^\mu A_\mu\gamma^\nu q_\nu - \gamma^\nu q_\nu\gamma^\mu A_\mu)\gamma_5\psi \\
&= -\bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma_\mu A^\mu\gamma_\nu q^\nu - \gamma_\nu q^\nu\gamma_\mu A^\mu)\gamma_5\psi \\
&= -\bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)q^\nu A^\mu\gamma_5\psi \\
&= -\bar{\psi}\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma_5\psi q^\nu A^\mu \\
&= -\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi q^\nu A^\mu \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

yang tidak invarian. Untuk suku keempat dari lagrangian, tansformasi CP-nya dapat diuraikan sebagai

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}F_4(q^2)\gamma^\nu\gamma_5\psi A^\mu q_\mu q_\nu \quad &\rightarrow \quad \bar{\psi}'F_4(q^2)\gamma^\nu\gamma_5\psi' A'^\mu q'_\mu q'_\nu \\
&= -\bar{\psi}F_4(q^2)\gamma_\nu\gamma_5\psi(-A_\mu)q^\mu q^\nu \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma_\nu\gamma_5\psi A_\mu q^\mu q^\nu \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma_\nu q^\nu\gamma_5\psi A_\mu q^\mu \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma^\nu q_\nu\gamma_5\psi A^\mu q_\mu \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma^\nu\gamma_5\psi A^\mu q_\mu q_\nu \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

Suku ini invarian terhadap transformasi CP. Akhirnya, untuk suku kelima Pers. (3.17)

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}F_4(q^2)\gamma^\nu\gamma_5\psi A^\mu q^2 g_{\mu\nu} \quad &\rightarrow \quad \bar{\psi}'F_4(q^2)\gamma^\nu\gamma_5\psi' A'^\mu q'^2 g_{\mu\nu} \\
&= -\bar{\psi}F_4(q^2)\gamma_\nu\gamma_5\psi(-A_\mu)q^2 g_{\mu\nu} \\
&= -\bar{\psi}F_4(q^2)\gamma_\nu\gamma_5\psi(-A_\mu)q^2 g^{\mu\nu} \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma_\nu\gamma_5\psi A_\mu q^2 g^{\mu\nu} \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)g^{\mu\nu}\gamma_\nu\gamma_5\psi A_\mu q^2 \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma^\mu\gamma_5\psi A_\mu q^2 \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma^\mu A_\mu\gamma_5\psi q^2 \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma_\mu A^\mu\gamma_5\psi q^2 \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma_\mu\gamma_5\psi q^2 A^\mu \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)g_{\mu\nu}\gamma^\nu\gamma_5\psi q^2 A^\mu \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma^\nu\gamma_5\psi q^2 g_{\mu\nu}A^\mu \\
&= \bar{\psi}F_4(q^2)\gamma^\nu\gamma_5\psi A^\mu q^2 g_{\mu\nu} \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Juga invarian terhadap transformasi CP. Dengan demikian, transformasi CP bagi Lagrangian (3.17) diberikanMaka secara lengkap bisa dituliskan

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} \overset{CP}{\to} \mathscr{L}' &= \bar{\psi}' F_1(q^2)\gamma_\mu \psi' A'^\mu + \bar{\psi}' F_2(q^2) i\sigma_{\mu\nu} q'^\nu \psi' A'^\mu \\
&\quad + \bar{\psi}' F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu} q'^\nu \gamma_5 \psi' A'^\mu \\
&\quad + \bar{\psi}' F_4(q^2)\gamma^\nu \gamma_5 \psi A'^\mu q'_\mu q'_\nu \\
&\quad - \bar{\psi}' F_4(q^2)\gamma^\nu \gamma_5 \psi' A'^\mu q'^2 g_{\mu\nu} \\
&= \bar{\psi} F_1(q^2)\gamma_\mu \psi A^\mu + \bar{\psi} F_2(q^2) i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \psi A^\mu \\
&\quad - \bar{\psi} F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \psi A^\mu \\
&\quad + \bar{\psi} F_4(q^2)\gamma^\nu \gamma_5 \psi A^\mu q_\mu q_\nu \\
&\quad - \bar{\psi} F_4(q^2)\gamma^\nu \gamma_5 \psi A^\mu q^2 g_{\mu\nu} \\
&= \bar{\psi} F_1(q^2)\gamma_\mu \psi A^\mu + \bar{\psi} F_2(q^2) i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \psi A^\mu \\
&\quad - \bar{\psi} F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \psi A^\mu \\
&\quad + \bar{\psi} F_4(q^2)\gamma^\nu \gamma_5 (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \psi A^\mu \\
&= \bar{\psi} F_1(q^2)\gamma_\mu \psi A^\mu + \bar{\psi} F_2(q^2) i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \psi A^\mu \\
&\quad - \bar{\psi} F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \psi A^\mu + \bar{\psi} F_4(q^2) \\
&\quad \times (q^2 \gamma_\mu - q^\mu q_\nu \gamma^\nu) \psi A^\mu \\
&= \bar{\psi}(F_1(q^2)\gamma_\mu + F_2(q^2) i\sigma_{\mu\nu} q^\nu - F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu} q^\nu \gamma_5 \\
&\quad + F_4(q^2)(q^2\gamma_\mu - q^\mu q_\nu \gamma^\nu)) \psi A^\mu
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

dan jika dibandingakan dengan Pers. (3.17), seperti telah disebutkan di depan, hanya suku $F_3(q^2)$ saja yang mengalami perubahan tanda setelah dilakukan transformasi. Maka, jika CP kekal pada sektor lepton, suku $F_3(q^2)$ harus bernilai nol, sehingga neurino mungkin mempunyai muatan listrik, momen dipol magnetik, dan momen anapol tetapi tidak momen elektrik. Tetapi jika CP terlanggar pada sektor lepton, suku $F_3(q^2)$ tidak nol tetapi suku yang lain nol, sehingga neutrino tidak mempunyai muatan listrik, momen dipol magnetik, momen anapol, dan hanya mempunyai momen dipol elektrik.

3.4 Faktor Bentuk Neutrino Dirac dan Majorana

Jika neutrino merupakan partikel Dirac, tidak ada larangan khusus yang mengharuskan faktor bentuk neutrino nol, sehingga neutrino dirac mungkin mempunyai empat sifat elektromagnetik.

Sedangkan jika neutrino merupakan partikel majorana, dimana

$$\psi^C = C\bar{\psi}^T = \psi \tag{3.29}$$

dengan C memiliki sifat $C^{-1} = C^{\dagger} = C^{T} = -C$. aMaka,

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\Gamma_{\mu}\psi &= \bar{\psi}^{C}\Gamma_{\mu}\psi^{C} \\
&= \psi^{T}C\Gamma_{\mu}C\bar{\psi}^{T} \\
&= \left(\psi^{T}C\Gamma_{\mu}C\bar{\psi}^{T}\right)^{T} \\
&= -\bar{\psi}C^{T}\Gamma_{\mu}^{T}C^{T}\psi
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu} &= -C^{T}\Gamma_{\mu}^{T}C^{T} \\
&= C\Gamma_{\mu}^{T}C^{-1}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Mengingat bentuk fungsi verteks (a2.13), maka

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu} &= C\Gamma_{\mu}^{T}C^{-1} \\
&= C(F_1(q^2)\gamma_{\mu} + F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q^{\nu} + F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu}q^{\nu}\gamma_5 \\
&\quad + F_4(q^2)\gamma^{\nu}\gamma_5(q_{\mu}q_{\nu} - q^2 g_{\mu\nu}))^{T}C^{-1} \\
&= C(F_1(q^2)\gamma_{\mu}^{T} + F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}^{T}q^{\nu} + F_3(q^2)(\sigma_{\mu\nu}\gamma_5)^{T}q^{\nu} \\
&\quad + F_4(q^2)(\gamma^{\nu}\gamma_5)^{T}(q_{\mu}q_{\nu} - q^2 g_{\mu\nu}))C^{-1} \\
&= F_1(q^2)C\gamma_{\mu}^{T}C^{-1} + F_2(q^2)iC\sigma_{\mu\nu}^{T}C^{-1}q^{\nu} \\
&\quad + F_3(q^2)C(\sigma_{\mu\nu}\gamma_5)^{T}C^{-1}q^{\nu} \\
&\quad + F_4(q^2)C(\gamma^{\nu}\gamma_5)^{T}C^{-1}(q_{\mu}q_{\nu} - q^2 g_{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Evaluasi masing-masing suku Pers. (3.32), untuk suku pertama,

$$C\gamma_{\mu}^{T}C^{-1} = -\gamma_{\mu}$$

untuk suku kedua,

$$\begin{aligned}
C\sigma_{\mu\nu}^T C^{-1} &= C\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)^T C^{-1} \\
&= C\frac{i}{2}(\gamma_\nu^T\gamma_\mu^T - \gamma_\mu^T\gamma_\nu^T)C^{-1} \\
&= \frac{i}{2}(C\gamma_\nu^T\gamma_\mu^T C^{-1} - C\gamma_\mu^T\gamma_\nu^T C^{-1}) \\
&= \frac{i}{2}(C\gamma_\nu^T CC^{-1}\gamma_\mu^T C^{-1} - C\gamma_\mu^T C^{-1}C\gamma_\nu^T C^{-1}) \\
&= \frac{i}{2}(\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu) \\
&= -\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) \\
&= -\sigma_{\mu\nu} \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Suku ketiga,

$$\begin{aligned}
C(\sigma_{\mu\nu}\gamma_5)^T C^{-1} &= C\gamma_5^T\sigma_{\mu\nu}^T C^{-1} \\
&= C\gamma_5\sigma_{\mu\nu}^T C^{-1} \\
&= \gamma_5 C\sigma_{\mu\nu}^T C^{-1} \\
&= \gamma_5 C\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)^T C^{-1} \\
&= \gamma_5 C\frac{i}{2}(\gamma_\nu^T\gamma_\mu^T - \gamma_\mu^T\gamma_\nu^T)C^{-1} \\
&= \gamma_5\frac{i}{2}(C\gamma_\nu^T\gamma_\mu^T C^{-1} - C\gamma_\mu^T\gamma_\nu^T C^{-1}) \\
&= \gamma_5\frac{i}{2}(C\gamma_\nu^T CC^{-1}\gamma_\mu^T C^{-1} - C\gamma_\mu^T C^{-1}C\gamma_\nu^T C^{-1}) \\
&= \gamma_5\frac{i}{2}(\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu) \\
&= -\gamma_5\frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) \\
&= -\gamma_5\sigma_{\mu\nu} \\
&= -\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Suku keempat,

$$\begin{aligned}
C(\gamma^\nu\gamma_5)^T C^{-1} &= C\gamma_5^T\gamma^{\nu T} C^{-1} \\
&= C\gamma_5\gamma^{\nu T} C^{-1} \\
&= \gamma_5 C\gamma^{\nu T} C^{-1} \\
&= -\gamma_5\gamma^\nu \\
&= \gamma^\nu\gamma_5 \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu &= C\Gamma_\mu^T C^{-1} \\ &= -F_1(q^2)\gamma_\mu - F_2(q^2)i\sigma_{\mu\nu}q^\nu - F_3(q^2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu\gamma_5 \\ &\quad +F_4(q^2)\gamma^\nu\gamma_5(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\end{aligned} \tag{3.36}$$

yang mengharuskan

$$F_1(q^2) = F_2(q^2) = F_3(q^2) = 0 \tag{3.37}$$

Artinya, jika neutrino merupakan partikel majorana, maka neutrino hanya mungkin mempunyai momen anapol, sedangkan muatan listrik, momen dipol magnetik, dan momen dipol elektrik harus nol.

Bab 4

Peluruhan Radiatif Neutrino

4.1 Peluruhan Neutrino

Suatu medan neutrino flavor bisa dinyatakan dalam kombinasi linier tiga eigenmass (Lampiran E), maka ada kemungkinan suatu neutrino dalam eigenmass yang lebih tinggi meluruh ke keadaan eigenmass yang lebih rendah. Jika neutrino berinteraksi elektromagnetik, maka neutrino dapat meluruh menjadi neutirno dengan foton, sebagai berikut

$$v_i(p) \to v_j(p') + \gamma(q) \tag{4.1}$$

dengan

$$m_i > m_j \tag{4.2}$$

dan

$$q = p - p' \tag{4.3}$$

Diferensial waktu peluruhan bisa dinyatakan sebagai (Lampiran F),

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\Sigma p'_f - p\right) \frac{1}{2E} \left(\prod_l 2m_l\right) \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E'_p}\right) |M|^2 \tag{4.4}$$

sehingga

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^4 \left(p' + q - p\right) \frac{1}{2E_p} 2m_i 2m_j \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'_p} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2\omega} |M|^2 \tag{4.5}$$

Sedangkan untuk foton, dari syarat foton fisis, yaitu

$$q^2 = 0 \tag{4.6}$$

dan syarat gauge lorentz

$$A^\mu q_\mu = 0 \tag{4.7}$$

maka bentuk dari fungsi verteks bisa dituliskan

$$\Gamma_\mu = \left(F_2(q^2) + F_3(q^2)\gamma_5\right)\sigma_{\mu\nu}q^\nu \tag{4.8}$$

Disini diasumsikan neutrino netral, dengan tujuan untuk menghindari masalah muatan neutrino yang terlampai kecil. Maka matriks hamburan bisa dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
M &= \bar{\psi}'\Gamma_\mu\psi A^\mu \\
&= e^{-iqx}\bar{u_{s'}}(p')\left[\left(F_2(q^2) + F_3(q^2)\gamma_5\right)\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right]u_s(p)A^\mu \\
&= e^{-iqx}\bar{u_{s'}}(p')\left[\left(F_2(q^2) + F_3(q^2)\gamma_5\right)\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right]u_s(p)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon^{*\mu}e^{iqx} \\
&= \bar{u_{s'}}(p')\left[\left(F_2(q^2) + F_3(q^2)\gamma_5\right)\sigma_{\mu\nu}q^\nu\right]u_s(p)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon^{*\mu} \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

4.2 Peluruhan dengan Foton Terpolarisasi Linier Arah x

Bentuk matriks hamburan tergantung dari bentuk polarisasi dari foton. Misal diambil foton terpolarisasi arah x,

$$\varepsilon^{*\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Maka

$$M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bar{u_{s'}}(p')\left[\left(F_2(q^2) + F_3(q^2)\gamma_5\right)\sigma_{1\nu}q^\nu\right]u_s(p)$$

Dan jika dilakukan penjumlahan spin, yaitu

$$\begin{aligned}
m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}|M|^2 &= m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bar{u_{s'}}(p') \\
&\quad \times(F_2(q^2) + F_3(q^2)\gamma_5)\sigma_{1\nu}q^\nu u_s(p)|^2 \\
&= m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bar{u_s}(p) \\
&\quad \times(F_2(q^2) + F_3(q^2)\gamma_5)\sigma_{1\nu}q^\nu u_{s'}(p')) \\
&\quad \times(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bar{u_{s'}}(p')(F_2(q^2) + F_3(q^2)\gamma_5)\sigma_{1\nu}q^\nu u_s(p)) \\
&= \frac{1}{2\pi}m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}(\bar{u_s}(p) \\
&\quad \times(F_2(q^2) + F_3(q^2)\gamma_5)\sigma_{1\nu}q^\nu u_{s'}(p')) \\
&\quad \times(\bar{u_{s'}}(p')(F_2(q^2) + F_3(q^2)\gamma_5)\sigma_{1\nu}q^\nu u_s(p))
\end{aligned}$$

dan diambil arah perambatan foton pada arah z, maka

$$\begin{aligned}
m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}|M|^2 &= \frac{1}{2\pi} m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}(\bar{u_s}(p) \\
&\times(F_2(q^2)+F_3(q^2)\gamma_5)\sigma_{13}q^3 u_{s'}(p')) \\
&\times(\bar{u_{s'}}(p')(F_2(q^2)+F_3(q^2)\gamma_5)\sigma_{13}q^3 u_s(p)) \\
&= \frac{1}{2\pi}(q^3)^2 m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}(\bar{u_s}(p) \\
&\times(F_2(q^2)+F_3(q^2)\gamma_5)\sigma_{13}u_{s'}(p')) \\
&\times(\bar{u_{s'}}(p')(F_2(q^2)+F_3(q^2)\gamma_5)\sigma_{13}u_s(p))
\end{aligned}$$

dan diganti indeks $q^3 \rightarrow q$, maka

$$\begin{aligned}
m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}|M|^2 &= \frac{1}{2\pi}(q)^2 m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}(\bar{u_s}(p) \\
&\times(F_2(q^2)+F_3(q^2)\gamma_5)\sigma_{13}u_{s'}(p')) \\
&\times(\bar{u_{s'}}(p')(F_2(q^2)+F_3(q^2)\gamma_5)\sigma_{13}u_s(p)) \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

misal,

$$A = (F_2(q^2)+F_3(q^2)\gamma_5)\sigma_{13} \qquad (4.12)$$

Maka

$$= \frac{1}{2\pi}(q)^2 m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}(\bar{u_s}(p)Au_{s'}(p'))(\bar{u_{s'}}(p')Au_s(p)) \qquad (4.13)$$

dan dinyatakan dalam elemen matriksnya,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}(q)^2 m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}(\bar{u}_{s\alpha}(p)A_{\alpha\beta}u_{s'}(p')_\beta)(\bar{u_{s'}}(p')_\gamma A_{\gamma\delta}u_{s\delta}(p)) \\
&= \frac{1}{2\pi}(q)^2 m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}u_{s\delta}(p)\bar{u}_{s\alpha}(p)A_{\alpha\beta}u_{s'}(p')_\beta \bar{u_{s'}}(p')_\gamma A_{\gamma\delta} \\
&= \frac{1}{2\pi}(q)^2 m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s u_{s\delta}(p)\bar{u}_{s\alpha}(p)A_{\alpha\beta}\sum_{s'}u_{s'}(p')_\beta \bar{u_{s'}}(p')_\gamma A_{\gamma\delta} \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Evalusi,

$$\sum_s u_{s\delta}(p)\bar{u_{s\alpha}}(p) \qquad (4.15)$$

yang dapat dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u_1} & \bar{u_2} & \bar{u_3} & \bar{u_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1\bar{u_1} & u_1\bar{u_2} & \cdots & \\ u_2\bar{u_1} & u_2\bar{u_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & \cdots & & u_4\bar{u_4} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

dan mengingat bentuk eksplisit dari spinor u

$$u_s(p) = (E+m)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi_s \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

dan

$$\begin{aligned} \chi_{\frac{1}{2}}\chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}} + \chi_{-\frac{1}{2}}\chi^{\dagger}_{-\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Maka

$$\begin{aligned} u_{\frac{1}{2}}(p)\bar{u_{\frac{1}{2}}}(p) + u_{-\frac{1}{2}}(p)\bar{u}_{-\frac{1}{2}}(p) &= (E+m)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \chi_{\frac{1}{2}} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} (E+m)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}} & \chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}}\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \end{pmatrix} \gamma_0 \\ &\quad + (E+m)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \chi_{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi_{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} (E+m)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \chi^{\dagger}_{-\frac{1}{2}} & \chi^{\dagger}_{-\frac{1}{2}}\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \end{pmatrix} \gamma_0 \\ &= (E+m) \begin{pmatrix} \chi_{\frac{1}{2}} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}} & \chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}}\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \end{pmatrix} \gamma_0 \\ &\quad + (E+m) \begin{pmatrix} \chi_{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi_{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{\dagger}_{-\frac{1}{2}} & \chi^{\dagger}_{-\frac{1}{2}}\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \end{pmatrix} \gamma_0 \\ &= (E+m) \begin{pmatrix} \chi_{\frac{1}{2}}\chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}} & \chi_{\frac{1}{2}}\chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}}\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi_{\frac{1}{2}}\chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}} & \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi_{\frac{1}{2}}\chi^{\dagger}_{\frac{1}{2}}\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \end{pmatrix} \gamma_0 \\ &\quad + (E+m) \begin{pmatrix} \chi_{-\frac{1}{2}}\chi^{\dagger}_{-\frac{1}{2}} & \chi_{-\frac{1}{2}}\chi^{\dagger}_{-\frac{1}{2}}\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi_{-\frac{1}{2}}\chi^{\dagger}_{-\frac{1}{2}} & \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\chi_{-\frac{1}{2}}\chi^{\dagger}_{-\frac{1}{2}}\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \end{pmatrix} \gamma_0 \end{aligned}$$

dan bisa dituliskan sebagai

$$
\begin{aligned}
&= (E+m)\begin{pmatrix} \left(\chi_{\frac{1}{2}}\chi_{\frac{1}{2}}^{\dagger}+\chi_{-\frac{1}{2}}\chi_{-\frac{1}{2}}^{\dagger}\right) & \left(\chi_{\frac{1}{2}}\chi_{\frac{1}{2}}^{\dagger}+\chi_{-\frac{1}{2}}\chi_{-\frac{1}{2}}^{\dagger}\right)\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\left(\chi_{\frac{1}{2}}\chi_{\frac{1}{2}}^{\dagger}+\chi_{-\frac{1}{2}}\chi_{-\frac{1}{2}}^{\dagger}\right) & \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\left(\chi_{\frac{1}{2}}\chi_{\frac{1}{2}}^{\dagger}+\chi_{-\frac{1}{2}}\chi_{-\frac{1}{2}}^{\dagger}\right)\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \end{pmatrix}\gamma_0 \\
&= (E+m)\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma\cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m} & \frac{\sigma\cdot p}{E+m}\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \end{pmatrix}\gamma_0 \\
&= (E+m)\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma\cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m} & \left(\frac{\sigma\cdot p}{E+m}\right)^2 \end{pmatrix}\gamma_0 \\
&= (E+m)\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma\cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m} & \left(\frac{\sigma\cdot p}{E+m}\right)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (E+m)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m} & -\left(\frac{\sigma\cdot p}{E+m}\right)^2 \end{pmatrix} \\
&= (E+m)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m} & -\frac{E^2-m^2}{(E+m)^2} \end{pmatrix} \\
&= (E+m)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m} & -\frac{(E+m)(E-m)}{(E+m)^2} \end{pmatrix} \\
&= (E+m)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sigma\cdot p}{E+m} \\ \frac{\sigma\cdot p}{E+m} & -\frac{(E-m)}{(E+m)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (E+m) & -\sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & -(E-m) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E+m & -\sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & -E+m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E & -\sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & -E \end{pmatrix}+m \\
&= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -\sigma\cdot p \\ \sigma\cdot p & 0 \end{pmatrix}+m \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}E-\begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}p+m \\
&= \gamma_0 E-\gamma_i p+m \\
&= \gamma_\mu p^\mu+m \\
&= p^\mu\gamma_\mu+m \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

Secara sama untuk spin s', sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\sum_s u_{s\delta}(p)\bar{u}_{s\alpha}(p)A_{\alpha\beta}\sum_{s'} u_{s'}(p')_\beta \bar{u}_{s'}(p')_\gamma A_{\gamma\delta} &= \left(p^\mu\gamma_\mu + m\right)_{\delta\alpha} A_{\alpha\beta}\left(p^\nu\gamma_\nu + m\right)_{\beta\gamma} A_{\gamma\delta} \\ &= Tr[\left(p^\mu\gamma_\mu + m\right) A \left(p^\nu\gamma_\nu + m\right) A] \quad (4.20)\end{aligned}$$

atau bisa ditulis

$$\begin{aligned} &= Tr[\left(p^\mu\gamma_\mu + m\right)\left(F_2(q^2) + F_3(q^2)\gamma_5\right)\sigma_{13} \\ &\quad \times \left(p^\nu\gamma_\nu + m\right)\left(F_2(q^2) + F_3(q^2)\gamma_5\right)\sigma_{13}] \end{aligned} \quad (4.21)$$

dengan tensor σ_{13} bisa dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= \frac{i}{2}(\gamma_1\gamma_3 - \gamma_3\gamma_1) \\ &= \frac{i}{2}(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_1\gamma_3) \\ &= \frac{i}{2}(2\gamma_1\gamma_3) \\ &= i\gamma_1\gamma_3\end{aligned}$$

Trace dari n matriks gamma dengan n adalah bilangan ganjil hasilnya nol, maka suku di atas bisa dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} &= F_2^2(q^2)p_\mu p_\nu Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^\mu i\gamma_1\gamma_3\gamma^\nu] \\ &\quad + F_2^2(q^2)p_\mu m_j Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^\mu i\gamma_1\gamma_3] \\ &\quad + F_2(q^2)F_3(q^2)p_\mu p_\nu Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^\mu\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^\nu] \\ &\quad + F_2(q^2)F_3(q^2)p_\mu m_j Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^\mu\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3] \\ &\quad + F_2(q^2)F_3(q^2)p_\mu m_j Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^\mu i\gamma_1\gamma_3] \\ &\quad + F_3^2(q^2)p_\mu p_\nu Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^\mu\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^\nu] \\ &\quad + F_2(q^2)F_3(q^2)m_i p_\nu Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3 i\gamma_1\gamma_3\gamma^\nu] \\ &\quad + F_3^2(q^2)m_i m_j Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3] \end{aligned} \quad (4.22)$$

dalam kerangka neutrino datang,

$$\begin{aligned} p_\mu &= (m_i, 0, 0, 0) \\ p_\nu &= (m_j, 0, 0, -q) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Maka,

$$
\begin{aligned}
= \; & F_2^2(q^2)m_i m_j Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^0 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0] \\
& +F_2^2(q^2)m_i(-q)Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^0 i\gamma_1\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_2^2(q^2)m_i m_j Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^0 i\gamma_1\gamma_3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i(-q)Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0 i\gamma_1\gamma_3] \\
& +F_3^2(q^2)m_i m_j Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0] \\
& +F_3^2(q^2)m_i(-q)Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i(-q)Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3 i\gamma_1\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_3^2(q^2)m_i m_j Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3] \\
= \; & F_2^2(q^2)m_i m_j Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^0 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0] \\
& -F_2^2(q^2)m_i q Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^0 i\gamma_1\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_2^2(q^2)m_i m_j Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^0 i\gamma_1\gamma_3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0] \\
& -F_2(q^2)F_3(q^2)m_i q Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[i\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0 i\gamma_1\gamma_3] \\
& +F_3^2(q^2)m_i m_j Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0] \\
& -F_3^2(q^2)m_i q Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3 i\gamma_1\gamma_3\gamma^0] \\
& -F_2(q^2)F_3(q^2)m_i q Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3 i\gamma_1\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_3^2(q^2)m_i m_j Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3]
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

atau

$$
\begin{aligned}
= \quad & F_2^2(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_1\gamma_3\gamma^0] \\
& -F_2^2(q^2)m_i q Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_1\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_2^2(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_1\gamma_3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0] \\
& -F_2(q^2)F_3(q^2)m_i q Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_1\gamma_3] \\
& +F_3^2(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0] \\
& -F_3^2(q^2)m_i q Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3\gamma^0] \\
& -F_2(q^2)F_3(q^2)m_i q Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_3^2(q^2)m_i m_j Tr[\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3\gamma_5 i\gamma_1\gamma_3]
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

Evaluasi untuk masing-masing suku akan dilakukan sebagai berikut, untuk suku pertama

$$
\begin{aligned}
Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_1\gamma_3\gamma^0] &= Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3(+1)] \\
&= Tr[+\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma_3] \\
&= Tr[+(-1)(-1)] \\
&= Tr[I] \\
&= 4
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

Untuk suku kedua,

$$
\begin{aligned}
Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_1\gamma_3\gamma^3] &= Tr[-\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_3\gamma^3] \\
&= Tr[-(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_3\gamma^3] \\
&= Tr[+\gamma_3\gamma^0\gamma_3\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_3\gamma_3\gamma^0\gamma^3] \\
&= Tr[-(-1)\gamma^0\gamma^3] \\
&= Tr[\gamma^0\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma^3\gamma^0]
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

sedangkan dari sifat trace,

$$Tr[\gamma^0\gamma^3] = [\gamma^3\gamma^0] \tag{4.28}$$

Maka yang memenuhi adalah

$$Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_1\gamma_3\gamma^3] = 0 \tag{4.29}$$

Untuk suku ketiga,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_1\gamma_3] &= Tr[-\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_3] \\
&= Tr[-(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_3\gamma^0\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_3\gamma_3\gamma^0] \\
&= Tr[-(-1)\gamma^0] \\
&= Tr[\gamma^0] \\
&= 0 \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

Untuk suku keempat,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0] &= Tr[+\gamma_1\gamma_3\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma^0] \\
&= Tr[+\gamma_1\gamma_3\gamma_5\gamma_1\gamma_3(+1)] \\
&= Tr[+\gamma_1\gamma_3\gamma_5\gamma_1\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[+(-1)\gamma_3\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_3\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_3\gamma_3\gamma_5] \\
&= Tr[-\gamma_5] \\
&= 0 \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

Untuk suku kelima,

$$
\begin{aligned}
Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^3] &= Tr[+\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[-(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_3\gamma_3\gamma^0\gamma_5] \\
&= Tr[-\gamma^0\gamma_5] \\
&= 0 \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

Suku keenam,

$$
\begin{aligned}
Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3] &= Tr[+\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[+(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_3\gamma_3\gamma^0\gamma_5] \\
&= Tr[-(-1)\gamma^0\gamma_5] \\
&= Tr[\gamma^0\gamma_5] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma^0] \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

tetapi dari sifat trace, didapat

$$Tr[\gamma^0\gamma_5] = Tr[\gamma_5\gamma^0] \qquad (4.34)$$

maka yang memenuhi adalah

$$
\begin{aligned}
Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3] &= Tr[-\gamma_5\gamma^0] \\
&= 0 \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

Suku ketujuh,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_1\gamma_3] &= Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_5(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma_3\gamma^0\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_3\gamma_3\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5(-1)\gamma^0] \\
&= Tr[\gamma_5\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma^0\gamma_5] \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

tetapi dari sifat trace, didapat

$$Tr[-\gamma^0\gamma_5] = Tr[-\gamma_5\gamma^0] \qquad (4.37)$$

maka yang memenuhi adalah

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_1\gamma_3] &= Tr[\gamma_5\gamma^0] \\
&= 0 \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

Suku kedelapan,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0] &= Tr[+\gamma_5\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^0] \\
&= Tr[+\gamma_5(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_3\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5(-1)\gamma^0\gamma_5\gamma^0] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma^0\gamma_5\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_5\gamma^0\gamma^0] \\
&= Tr[-(+1)(-1)] \\
&= Tr[I] \\
&= 4 \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

Suku kesembilan,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0] &= Tr[+\gamma_5\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^3] \\
&= Tr[+\gamma_5(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_3\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_5(-1)\gamma^0\gamma_5\gamma^3] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma^0\gamma_5\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_5\gamma^0\gamma^3] \\
&= Tr[-(+1)\gamma^0\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma^0\gamma^3] \\
&= Tr[\gamma^3\gamma^0] \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

tetapi dari sifat trace, didapat

$$Tr[-\gamma^0\gamma^3] = Tr[-\gamma^3\gamma^0] \qquad (4.41)$$

maka yang memenuhi adalah

$$\begin{aligned}
Tr[+\gamma_5\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^3] &= Tr[\gamma^3\gamma^0] \\
&= 0 \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

Suku kesepuluh,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3\gamma^0] &= Tr[+\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma_3\gamma_1\gamma^0] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma_1(-1)\gamma_1\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_1\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5(-1)\gamma^0] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma^0] \\
&= 0 \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

Suku kesebelas,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3\gamma^3] &= Tr[+\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma_3\gamma_1\gamma^3] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma_1(-1)\gamma_1\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_1\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_5(-1)\gamma^3] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma^3] \\
&= 0 \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

Suku keduabelas,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma_5\gamma_1\gamma_3] &= Tr[-\gamma_5\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3] \\
&= Tr[-(+1)\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma_3] \\
&= Tr[+(-1)(-1)] \\
&= Tr[I] \\
&= 4 \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_i m_j |M|^2 &= \frac{1}{2}\left(4F_2^2(q^2)+8F_3^2(q^2)\right)m_i m_j q^2 \\
&= 2m_i m_j q^2\left(F_2^2(q^2)+2F_3^2(q^2)\right) \qquad (4.46)
\end{aligned}$$

Mengingat bentuk waktu peluruhan diferensialnya,

$$d\Gamma = (2\pi)^4\delta^4(p'+q-p)\frac{1}{2E_p}2m_i 2m_j\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_{p'}}\frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q}|M|^2 \qquad (4.47)$$

dengan kerangka referensi neutrino datang, yaitu

$$\begin{aligned}
p^\mu &= (m_i, 0) \\
p'^\mu &= (m_j, \vec{p}) \qquad (4.48) \\
q^\mu &= (\omega, q)
\end{aligned}$$

Maka,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2m_i m_j}{4\pi^2 E_p E_{p'} \omega} \delta^4(p' + q - p) d^3q d^3p' \, |M|^2 \\
&= \frac{m_i m_j}{2\pi^2 E_p E_{p'} \omega} \delta(E_{p'} + \omega - m_i) \omega^2 d\omega d\Omega \, |M|^2 \\
&= \frac{m_j \omega}{2\pi^2 E_{p'}} \left[\frac{\partial \left(\omega + E_{p'} \right)}{\partial \omega} \right]^{-1} d\Omega \, |M|^2 \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

Dan, dengan

$$
\begin{aligned}
E_{p'} &= \left(m_j^2 + \vec{p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(m_j^2 + (-q)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(m_j^2 + \omega^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

Maka,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \left(\omega + E_{p'} \right)}{\partial \omega'} &= \frac{\partial \left(\omega + \left(m_j^2 + \omega^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)}{\partial \omega} \\
&= 1 + \frac{1}{2} \left(m_j^2 + \omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\omega \\
&= 1 + \frac{\omega}{\left(m_j^2 + \omega^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\left(m_j^2 + \omega^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \omega}{\left(m_j^2 + \omega^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
d\Gamma &= \frac{m_j\omega}{2\pi^2 E_{p'}}\left[\frac{\partial\left(\omega+E_{p'}\right)}{\partial\omega}\right]^{-1} d\Omega\,|M|^2 \\
&= \frac{m_j\omega}{2\pi^2 E_{p'}}\frac{\left(m_j^2+\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(m_j^2+\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}+\omega} d\Omega\,|M|^2 \\
&= \frac{m_j}{2\pi^2\left[\left(m_j^2+\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}+\omega\right]} d\Omega\left[2\omega^2\left(F_2^2(q^2)+2F_3^2(q^2)\right)\right] \\
&= \frac{\omega^2 m_j}{\pi^2\left[\left(m_j^2+\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}+\omega\right]}\left(F_2^2(q^2)+2F_3^2(q^2)\right) d\Omega \qquad (4.52)
\end{aligned}
$$

Sehingga didapatkan

$$
\Gamma = \frac{4\omega^2 m_j}{\pi\left[\left(m_j^2+\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}+\omega\right]}\left(F_2^2(q^2)+2F_3^2(q^2)\right) \qquad (4.53)
$$

Terlihat bahwa waktu peluruhan neutrino bergantung pada sifat momen elektrik dan momen magnetik. Sehingga, jika neutrino tidak memiliki kedua sifat ini, maka peluruhan neutrino tidak dapat terjadi.

4.3 Peluruhan dengan Foton Terpolarisasi Linier Arah y

Tetapi jika polarisasi foton berbentuk

$$
\varepsilon^{*\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.54)
$$

Maka jumlahan spin bisa dituliskan sebagai

$$
\begin{aligned}
m_i m_j \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}|M|^2 &= Tr[\left(p^\mu\gamma_\mu+m\right)\left(F_2(q^2)+F_3(q^2)\gamma_5\right)\sigma_{23} \\
&\quad \times\left(p^\nu\gamma_\nu+m\right)\left(F_2(q^2)+F_3(q^2)\gamma_5\right)\sigma_{23}] \qquad (4.55)
\end{aligned}
$$

yang secara sama bisa dituliskan sebagai

$$
\begin{aligned}
= \quad & F_2^2(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_2\gamma_3\gamma^0] \\
& -F_2^2(q^2)m_i q Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_2\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_2^2(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_2\gamma_3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^0] \\
& -F_2(q^2)F_3(q^2)m_i q Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_2\gamma_3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_2\gamma_3] \\
& +F_3^2(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^0] \\
& -F_3^2(q^2)m_i q Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_2(q^2)F_3(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_3\gamma^0] \\
& -F_2(q^2)F_3(q^2)m_i q Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_3\gamma^3] \\
& +F_3^2(q^2)m_i m_j Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma_5\gamma_2\gamma_3]
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

yang akan dicari nilai untuk masing-masing suku. Untuk suku pertama

$$
\begin{aligned}
Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_2\gamma_3\gamma^0] &= Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_3(+1)] \\
&= Tr[+\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma_3] \\
&= Tr[+(-1)(-1)] \\
&= Tr[I] \\
&= 4
\end{aligned} \tag{4.57}
$$

Untuk suku kedua,

$$
\begin{aligned}
Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_2\gamma_3\gamma^3] &= Tr[-\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_3\gamma^3] \\
&= Tr[-(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_3\gamma^3] \\
&= Tr[+\gamma_3\gamma^0\gamma_3\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_3\gamma_3\gamma^0\gamma^3] \\
&= Tr[-(-1)\gamma^0\gamma^3] \\
&= Tr[\gamma^0\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma^3\gamma^0]
\end{aligned} \tag{4.58}
$$

sedangkan dari sifat trace,

$$Tr[\gamma^0\gamma^3] = [\gamma^3\gamma^0] \tag{4.59}$$

Maka yang memenuhi adalah

$$Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_2\gamma_3\gamma^3] = 0 \tag{4.60}$$

Untuk suku ketiga,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_2\gamma_3] &= Tr[-\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_3] \\
&= Tr[-(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_3\gamma^0\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_3\gamma_3\gamma^0] \\
&= Tr[-(-1)\gamma^0] \\
&= Tr[\gamma^0] \\
&= 0 \qquad (4.61)
\end{aligned}$$

Untuk suku keempat,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^0] &= Tr[+\gamma_2\gamma_3\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma^0] \\
&= Tr[+\gamma_2\gamma_3\gamma_5\gamma_2\gamma_3(+1)] \\
&= Tr[+\gamma_2\gamma_3\gamma_5\gamma_2\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[+(-1)\gamma_3\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_3\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_3\gamma_3\gamma_5] \\
&= Tr[-\gamma_5] \\
&= 0 \qquad (4.62)
\end{aligned}$$

Untuk suku kelima,

$$
\begin{aligned}
Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^3] &= Tr[+\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_2\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[-(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_3\gamma_3\gamma^0\gamma_5] \\
&= Tr[-\gamma^0\gamma_5] \\
&= 0 \qquad (4.63)
\end{aligned}
$$

Suku keenam,

$$
\begin{aligned}
Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_2\gamma_3] &= Tr[+\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[+(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_3\gamma_3\gamma^0\gamma_5] \\
&= Tr[-(-1)\gamma^0\gamma_5] \\
&= Tr[\gamma^0\gamma_5] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma^0] \qquad (4.64)
\end{aligned}
$$

tetapi dari sifat trace, didapat

$$Tr[\gamma^0\gamma_5] = Tr[\gamma_5\gamma^0] \qquad (4.65)$$

maka yang memenuhi adalah

$$
\begin{aligned}
Tr[-\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_1\gamma_3] &= Tr[-\gamma_5\gamma^0] \\
&= 0 \qquad (4.66)
\end{aligned}
$$

Suku ketujuh,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_2\gamma_3] &= Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_5(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma_3\gamma^0\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_3\gamma_3\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5(-1)\gamma^0] \\
&= Tr[\gamma_5\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma^0\gamma_5] \qquad (4.67)
\end{aligned}$$

tetapi dari sifat trace, didapat

$$Tr[-\gamma^0\gamma_5] = Tr[-\gamma_5\gamma^0] \qquad (4.68)$$

maka yang memenuhi adalah

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma^0\gamma_1\gamma_3] &= Tr[\gamma_5\gamma^0] \\
&= 0 \qquad (4.69)
\end{aligned}$$

Suku kedelapan,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^0] &= Tr[+\gamma_5\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^0] \\
&= Tr[+\gamma_5(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_3\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5(-1)\gamma^0\gamma_5\gamma^0] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma^0\gamma_5\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_5\gamma^0\gamma^0] \\
&= Tr[-(+1)(-1)] \\
&= Tr[I] \\
&= 4 \qquad (4.70)
\end{aligned}$$

Suku kesembilan,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma^0] &= Tr[+\gamma_5\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^3] \\
&= Tr[+\gamma_5(-1)\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_3\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_5(-1)\gamma^0\gamma_5\gamma^3] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma^0\gamma_5\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_5\gamma^0\gamma^3] \\
&= Tr[-(+1)\gamma^0\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma^0\gamma^3] \\
&= Tr[\gamma^3\gamma^0] \qquad (4.71)
\end{aligned}$$

tetapi dari sifat trace, didapat

$$Tr[-\gamma^0\gamma^3] = Tr[-\gamma^3\gamma^0] \qquad (4.72)$$

maka yang memenuhi adalah

$$\begin{aligned}
Tr[+\gamma_5\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma^0\gamma_5\gamma_3\gamma^3] &= Tr[\gamma^3\gamma^0] \\
&= 0 \qquad (4.73)
\end{aligned}$$

Suku kesepuluh,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_3\gamma^0] &= Tr[+\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma_3\gamma_2\gamma^0] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma_2(-1)\gamma_2\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_2\gamma^0] \\
&= Tr[-\gamma_5(-1)\gamma^0] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma^0] \\
&= 0 \qquad (4.74)
\end{aligned}$$

Suku kesebelas,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_3\gamma^3] &= Tr[+\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma_3\gamma_2\gamma^3] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma_2(-1)\gamma_2\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_2\gamma^3] \\
&= Tr[-\gamma_5(-1)\gamma^3] \\
&= Tr[+\gamma_5\gamma^3] \\
&= 0 \qquad (4.75)
\end{aligned}$$

Suku keduabelas,

$$\begin{aligned}
Tr[-\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma_5\gamma_2\gamma_3] &= Tr[-\gamma_5\gamma_5\gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_3] \\
&= Tr[-(+1)\gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_3] \\
&= Tr[-\gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_3] \\
&= Tr[+\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma_3] \\
&= Tr[+(-1)(-1)] \\
&= Tr[I] \\
&= 4 \qquad (4.76)
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_i m_j |M|^2 &= \frac{1}{2}\left(4F_2^2(q^2)+8F_3^2(q^2)\right)m_i m_j q^2 \\
&= 2m_i m_j q^2\left(F_2^2(q^2)+2F_3^2(q^2)\right) \qquad (4.77)
\end{aligned}$$

Dan secara sama, waktu peluruhan adalah

$$\Gamma = \frac{4\omega^2 m_j}{\pi\left[\left(m_j^2+\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}+\omega\right]}\left(F_2^2(q^2)+2F_3^2(q^2)\right) \qquad (4.78)$$

4.4 Peluruhan dengan Foton Terpolarisasi Melingkar

Kemungkinan lain dari polarisasi foton adalah polarisasi lingkaran, yang bisa dinyatakan dalam

$$\varepsilon^{*\mu} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4.79)$$

Sehingga, jumlahan spin matriks hamburannya adalah

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_i m_j |M|^2 &= \frac{1}{2}m_i m_j \left| -\frac{1}{\sqrt{2}}(A+iB)\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}m_i m_j \frac{1}{2}\left(|A|^2+|B|^2\right) \end{aligned} \tag{4.80}$$

dengan A adalah matriks bauran untuk polarisasi linier arah x dan B adalah untuk polarisasi linier arah y yang telah dihitung sebelumnya, maka, waktu peluruhannya adalah sama yaitu

$$\Gamma = \frac{4\omega^2 m_j}{\pi\left[\left(m_j^2+\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}+\omega\right]}\left(F_2^2(q^2)+2F_3^2(q^2)\right) \tag{4.81}$$

Dan bentuk lain polarisasi lingkaran,

$$\varepsilon^{*\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.82}$$

Maka

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_i m_j |M|^2 &= \frac{1}{2}m_i m_j \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(A-iB)\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}m_i m_j \frac{1}{2}\left(|A|^2+|B|^2\right) \end{aligned} \tag{4.83}$$

Dan secara sama

$$\Gamma = \frac{4\omega^2 m_j}{\pi\left[\left(m_j^2+\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}+\omega\right]}\left(F_2^2(q^2)+2F_3^2(q^2)\right) \tag{4.84}$$

Terlihat bahwa waktu peluruhan dari neutrino mempunyai bentuk yang sama tidak tergantung jenis polarisasi dari foton yang dipancarkan. Waktu peluruhan ini hanya bergantung dengan massa dari neutrino dan sifat momen magnetik dan momen elektrik neutrino. Jika neutrino tidak mempunyai sifat momen magnetik dan sifat momen elektrik, maka peluruhan seperti ini tidak dapat terjad. Mengingat sifat faktor bentuk dari neutrino majorana, dimana faktor bentuk yang tidak nol hanyalah faktor bentuk momen anapol, maka peluruhan radiatif ini tidak bisa terjadi jika neutrino merupakan partikel majorana, peluruhan seperti hanya bisa terjadi jika

neutrino merupakan partikel dirac.

Bab 5

Kesimpulan

Dari penelitian yang telah dilakukan, didapatkan bahwa suku interaksi elektromagnetik dari neutrino bisa ditambahkan dengan memperkenalkan fungsi verteks, dimana fungsi ini harus memenuhi sifat hermitian, kekekalan arus, dan invariansi Lorentz, yang dapat dibentuk dalam empat suku dengan empat faktor bentuk, yaitu $F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$, $F_3(q^2)$, dan $F_4(q^2)$. Interpretasi dari masing-masing faktor bentuk terhadap kontribusi pada sifat elektromagnetik yang mungkin dimiliki neutrino dilakukan dengan cara non-relativistik. Didapatkan bahwa suku $F_1(0)$ berinteraksi dengan medan skalar, dimana jika dibandingkan dengan kasus klasik, $F_1(0)$ diinterpretasikan sebagai rapat muatan listrik neutrino. Selain itu suku ini juga berinteraksi dengan medan vektor, sehingga dikatakan suku ini juga berkontribusi pada momen dipol magnetik dari neutrino. Dan secara umum faktor bentuk $F_1(q^2)$ disebut faktor bentuk muatan listrik. Sedangkan suku $F_2(0)$ berinteraksi dengan medan vektor dari neutrino, sehingga berkontribusi juga pada momen dipol magnetik neutrino, tetapi suku tidak bergantung dengan ada tidaknya muatan listrik neutrino $F_1(0)$, momen magnetik seperti ini disebut momen dipol magnetik anomali. Dan secara umum $F_2(q^2)$ disebut faktor bentuk momen magnetik. Untuk suku $F_3(q^2)$, $F_3(0)$ berinteraksi dengan medan listrik dari neutirno, sehingga jika dibandingkan dengan kasus klasik, $F_3(0)$ tidak lain adalah momen dipol elektrik dari neutrino. Sehingga secara umum, $F_3(q^2)$ merupakan faktor bentuk momen dipol elektrik dari neutrino. Untuk suku $F_4(q^2)$, suku ini berinteraksi dengan rapat arus, yang dalam hal ini absen dalam fisika klasik, sehingga interpretasi sulit untuk dilakukan. Suku $F_4(q^2)$ dikatakan faktor bentuk momen anapol.

Kemudian, transformasi CP pada fungsi verteks, memberikan hasil bahwa hanya suku $F_3(q^2)$ saja yang tidak invarian, maka jika CP kekal pada sektor lepton, maka suku $F_3(q^2)$ harus nol, sehingga neutrino tidak mempunyai momen elektrik, tetapi muatan listrik, momen magnetik, dan momen anapol mungkin ada. Sebaliknya, jika kekekalan CP terlanggar pada sektor lepton, maka hanya suku $F_3(q^2)$ saja yang tidak nol, sehingga neutrino hanya mungkin memiliki sifat momen elektrik,

sedangkan sifat-sifat yang lain tidak ada. Jika neutrino merupakan partikel dirac, maka tidak ada syarat tertentu yang mengharuskan keempat faktor bentuk bernilai nol, tetapi jika neutrino merupakan partikel majorana, sifat dari partikel majorana, yaitu anti-partikel adalah partikel itu sendiri, akan berimplikasi pada nilai keempat faktor bentuk, dimana $F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$, $F_3(q^2)$ harus bernilai nol, sehingga jika neutrino merupakan partikel majorana, maka neutrino tidak mempunyai muatan listrik, momen magnetik, dan momen elektrik, dan hanya mungkin memiliki momen anapol.

Suku interaksi elektromagnetik yang telah dibentuk dengan fungsi verteks, memungkinkan terjadinya proses peluruhan radiatif neutrino, dimana suatu mass eigen state yang lebih tinggi meluruh menjadi mass eigen state yang lebih rendah dengan memancarkan foton. Waktu peluruhan dari proses seperti ini bergantung pada massa neutrino, besar momen magnetik, dan momen elektrik. Sehingga jika neutrino tidak memiliki momen magnetik dan momen elektrik, maka peluruhan seperti ini tidak dapat terjadi.

Daftar Pustaka

[1] C. Giunti, A. Studenikin, Electromagnetic Interactions of Neutrinos: A Window to New Physics, arXiv:1403.6344v1 [hep-ph] 25 Mar 2014 submt to Rev. Mod. Phys.

[2] C. Broggini, C. Giunti, A. Studenikin, Electromagnetic Properties of Neutrinos, Adv. in High Energy Phys. 2012 (2012) 459526

[3] C. Giunti, A. Studenikin, Neutrino Electromagnetic Properties, Phys. Atom. Nucl. 73 (2009) 2089

[4] C. Giunti, A. Studenikin, Electromagnetic Properties of Neutrino, J. Phys.: Conf. Series. 203 (2010) 012100

[5] A. Studenikin, Neutrino Magnetic Moment: A Window to New Physics, Nucl. Phys. B (Proc. Supl.) 188 (2009) 220

[6] K. Kouzakov, A. Studenikin, Theory of Neutrino-atom Collisions: The History, Present Status, and BSM Physics, arXiv: 1403.6344 submt to Rev. Mod. Phys.

[7] Zhizong Xing, Shun Zhou, Neutrinos in Particles Physics, Astronomy and Cosmology, Zhejiang University Press, (2011). ISBN 978-7-208-08024-8.

[8] M. Fukugita, T. Yanagita, Physics of Neutrinos and Applications to Astrophysics, Springer (2003).

Lampiran A

Model Standar U(1) x SU(2)

Dari Lagrangian Dirac, yaitu

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(x)(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x)$$

Lagrangian ini mempunyai simetri $U(1)$ global, misal $U(1) = e^{i\alpha}$, dengan $\alpha \neq \alpha(x)$, dipilih demikian karena

$$U^{+}U = e^{-i\alpha}e^{i\alpha} = 1$$

memenuhi sifat uniter. Transformasi $U(1)$ ini akan mentransformasi ψ menjadi

$$\psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x)$$

dan

$$\overline{\psi}'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x).$$

Bentuk pada Persamaan di atas diperbolehkan karena mengingat $e^{i\alpha}$ mempunyai dimensi satu.

Maka Lagrangian (2.1) setelah dikenai transformasi tersebut menjadi

$$\mathscr{L}' = \overline{\psi}'(x)(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi'(x).$$

Dari Pers. (2.2) dan (2.3), Pers. (2.4) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}' &= \overline{\psi}(x)e^{-i\alpha}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)e^{i\alpha}\psi(x) \\
&= \overline{\psi}(x)e^{-i\alpha}e^{i\alpha}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x) \\
&= \overline{\psi}(x)(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x) \\
&= \mathscr{L}.
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa Lagrangian ini invarian (simetri) terhadap transformasi $U(1)$ global.

Tetapi Lagrangian ini tidak invarian terhadap transformasi $U(1)$ lokal, $\alpha =$

$\alpha(x)$. Bukti :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}' &= \overline{\psi}'(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'(x) \\
&= \overline{\psi}(x)e^{-i\alpha}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\alpha}\psi(x) \\
&= \overline{\psi}(x)e^{-i\alpha}(i\gamma^\mu(ie^{i\alpha}\partial_\mu\alpha\psi(x) + e^{i\alpha}\partial_\mu\psi(x)) - me^{i\alpha}\psi(x)) \\
&= \overline{\psi}(x)e^{-i\alpha}e^{i\alpha}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma^\mu\partial_\mu\alpha - m)\psi(x) \\
&= \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma^\mu\partial_\mu\alpha - m)\psi(x) \\
&= \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\alpha\psi(x) \\
&= \mathscr{L} - \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\alpha\psi(x).
\end{aligned}$$

Lagrangian tidak invarian terhadap transformasi $U(1)$ lokal karena ada tambahan suku $-\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\alpha\psi(x)$.

Agar Lagrangian menjadi simetri, diperkenalkan turunan kovarian,

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + iqA_\mu \equiv D_\mu$$

dengan $A_\mu$adalah medan vektor.D_μ bertransformasi seperti ini,

$$\begin{aligned}
D_\mu \longrightarrow D'_\mu &= e^{i\alpha}D_\mu e^{-i\alpha} \\
&= e^{i\alpha}(\partial_\mu + iqA_\mu)e^{-i\alpha} \\
&= e^{i\alpha}(-ie^{-i\alpha}\partial_\mu\alpha + e^{-i\alpha}\partial_\alpha + e^{-i\alpha}iqA_\mu) \\
&= e^{i\alpha}e^{-i\alpha}(-i\partial_\mu\alpha + \partial_\alpha + iqA_\mu) \\
&= -i\partial_\mu\alpha + \partial_\alpha + iqA_\mu.
\end{aligned}$$

Lagrangian akan berubah menjadi

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \\
&= \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) \\
&= \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - \overline{\psi}(x)q\gamma^\mu\psi(x)A_\mu
\end{aligned}$$

dan Lagrangian setelah ditransformasi menjadi

$$\mathscr{L}' = \overline{\psi}'(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A'_\mu - m)\psi'(x).$$

Dari Pers. (2.8), $\mathscr{L}'$ dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}' &= \overline{\psi}'(x)(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\psi'(x) \\
&= \overline{\psi}'(x)(i\gamma^\mu(-i\partial_\mu\alpha + \partial_\alpha + iqA_\mu) - m)\psi'(x) \\
&= \overline{\psi}'(x)(\gamma^\mu\partial_\mu\alpha + i\gamma^\mu\partial_\alpha - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi'(x)
\end{aligned}$$

Dengan membandingkan Pers. (2.10) dan Pers. (2.11), didapatkan

$$\begin{aligned}
-q\gamma^\mu A'_\mu &= \gamma^\mu\partial_\mu\alpha - q\gamma^\mu A_\mu \\
A'_\mu &= -\partial_\mu\alpha + qA_\mu \\
A'_\mu &= -\frac{1}{q}\partial_\mu\alpha + A_\mu
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan $A_\mu$bertransformasi sebagai

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = -\frac{1}{q}\partial_\mu\alpha + A_\mu.$$

Dengan didefinisikannya turunan kovarian ini, Lagrangian akan invarian terhadap transformasi $U(1)$ lokal, bukti :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}' &= \overline{\psi}'(x)(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\psi'(x) \\
&= \overline{\psi}'(x)(i\gamma^\mu(-i\partial_\mu\alpha + \partial_\alpha + iqA_\mu) - m)\psi'(x) \\
&= \overline{\psi}'(x)(\gamma^\mu\partial_\mu\alpha + i\gamma^\mu\partial_\alpha - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi'(x) \\
&= \overline{\psi}(x)e^{-i\alpha}(\gamma^\mu\partial_\mu\alpha + i\gamma^\mu\partial_\alpha - q\gamma^\mu A_\mu - m)e^{i\alpha}\psi(x) \\
&= \overline{\psi}(x)e^{-i\alpha}(e^{i\alpha}\gamma^\mu\partial_\mu\alpha\psi(x) + i\gamma^\mu(ie^{i\alpha}\partial_\mu\alpha\psi(x) \\
&\quad + e^{i\alpha}\partial_\mu\psi(x)) - e^{i\alpha}q\gamma^\mu A_\mu\psi(x) - me^{i\alpha}\psi(x)) \\
&= \overline{\psi}(x)e^{-i\alpha}e^{i\alpha}(\gamma^\mu\partial_\mu\alpha\psi(x) + i\gamma^\mu(i\partial_\mu\alpha\psi(x) \\
&\quad + \partial_\mu\psi(x)) - q\gamma^\mu A_\mu\psi(x) - m\psi(x)) \\
&= \overline{\psi}(x)(\gamma^\mu\partial_\mu\alpha\psi(x) + i\gamma^\mu(i\partial_\mu\alpha\psi(x) + \partial_\mu\psi(x)) \\
&\quad - q\gamma^\mu A_\mu\psi(x) - m\psi(x)) \\
&= \overline{\psi}(x)(\gamma^\mu\partial_\mu\alpha + i\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma^\mu\partial_\mu\alpha - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) \\
&= \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) \\
&= \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \\
&= \mathscr{L}
\end{aligned}$$

Transformasi lokal memungkinkan sistem interaktif, sehingga didefinisikan ten-

sor kuat medan

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Dilipih demikian agar bentuk $F^{\mu\nu}$ invarian, bukti

$$\begin{aligned}
F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu \\
&= \partial^\mu \left(A^\nu - \frac{1}{q}\partial^\nu \alpha \right) - \partial^\nu \left(A^\mu - \frac{1}{q}\partial^\mu \alpha \right) \\
&= \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{q}\partial^\mu \partial^\nu \alpha - \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{q}\partial^\nu \partial^\mu \alpha \\
&= \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{q}\partial^\nu \partial^\mu \alpha - \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{q}\partial^\nu \partial^\mu \alpha \\
&= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\
&= F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

energi kinetik, harus dalam bentuk turunan orde dua, sehingga dipilih

$$\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Sehingga Lagrangian lengkapnya diberikan oleh

$$\mathscr{L} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) - q\overline{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x) A_\mu$$

Dari Lagrangian tersebut, dapat diketahui bahwa massa dari medan $\psi(x)$ adalah m, dan massa dari medan vektor A_μ adalah nol. Tuntutan invariansi medan materi terhadap transformasi lokal memaksa kehadiran medan baru, yaitu melalui penggantian turunan biasa menjadi turunan kovarian. Invariansi gauge lokal tidak dapat dipenuhi oleh sistem bebas, tetapi lebih relevan untuk sistem interaktif.

Akan dibangun Lagrangian yang invarian terhadap transformasi SU(2) lokal. Transformasi tersebut diberikan oleh

$$\begin{aligned}
\Psi_l^L(x) &\rightarrow \Psi_l'^L(x) = \exp\left[ig\sigma_j \omega_j(x)/2\right] \Psi_l^L(x) \\
\bar{\Psi}_l^L(x) &\rightarrow \bar{\Psi}_l'^L(x) = \bar{\Psi}_l^L(x) \exp\left[-ig\sigma_j \omega_j(x)/2\right] \\
\psi_l^R(x) &\rightarrow \psi_l'^R(x) = \psi_l^R(x) \\
\bar{\psi}_l^R(x) &\rightarrow \bar{\psi}_l'^R(x) = \bar{\psi}_l^R(x) \\
\psi_{\nu_l}^R(x) &\rightarrow \psi_{\nu_l}'^R(x) = \psi_{\nu_l}^R(x) \\
\bar{\psi}_{\nu_l}^R(x) &\rightarrow \bar{\psi}_{\nu_l}'^R(x) = \bar{\psi}_{\nu_l}^R(x)
\end{aligned}$$

$\omega_j(x), j = 1,2,3$ adalah tiga fungsi diferensiabel riel sembarang dalam x, dan g adalah konstanta riel. Penerapan transformasi tersebut ke dalam rapat Lagrangian memberikan

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_0 \to \mathscr{L}_0' &= i\left[\bar{\Psi}_l^{'L}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_l^{'L} + \bar{\psi}_l^{'R}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_l^{'R} + \bar{\psi}_{\nu_l}^{'R}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\nu_l}^{'R}\right] \\
&= i[\bar{\Psi}_l^L \exp\left[-ig\sigma_j\omega_j/2\right]\gamma^\mu\partial_\mu \exp\left[ig\sigma_j\omega_j/2\right]\Psi_l^L \\
&\quad +\bar{\psi}_l^R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\nu_l}^R] \\
&= i[\bar{\Psi}_l^L \exp\left[-ig\sigma_j\omega_j/2\right](\exp\left[ig\sigma_j\omega_j/2\right]\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_l^L \\
&\quad +\frac{1}{2}ig\sigma_j\gamma^\mu\partial_\mu\omega_j \exp\left[ig\sigma_j\omega_j/2\right]\Psi_l^L) \\
&\quad +\bar{\psi}_l^R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\nu_l}^R] \\
&= i[\bar{\Psi}_l^L\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_l^L + \frac{1}{2}ig\Psi_l^L\sigma_j\bar{\gamma}^\mu\partial_\mu\omega_j\Psi_l^L \\
&\quad +\bar{\psi}_l^R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\nu_l}^R] \\
&= i[\bar{\Psi}_l^L\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\nu_l}^R] \\
&\quad -\frac{1}{2}g\Psi_l^L\sigma_j\bar{\gamma}^\mu\partial_\mu\omega_j\Psi_l^L \\
&= \mathscr{L}_0 - \frac{1}{2}g\Psi_l^L\sigma_j\bar{\gamma}^\mu\partial_\mu\omega_j\Psi_l^L
\end{aligned}$$

Didapatkan bahwa rapat Lagrangian tidak invarian terhadap transformasi lokal. Analog dengan kasus elektromagnetik, invariansi Lagrangian dipenuhi jika dilakukan penggantian turunan menjadi turunan kovarian, yaitu

$$\partial^\mu\Psi_l^L \to D^\mu\Psi_l^L \equiv \left[\partial^\mu + ig\sigma_j W_j^\mu/2\right]\Psi_l^L$$

sehingga $\mathscr{L}_0$ menjadi

$$\mathscr{L}_0 = i[\bar{\Psi}_l^L\gamma^\mu D_\mu\Psi_l^L + \bar{\psi}_l^R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}^R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{\nu_l}^R]$$

Pada penggantian turunan kovarian telah diperkenalkan tiga medan gauge riel $W_j^\mu(x)$. Agar $\mathscr{L}_0$ invarian terhadap transformasi SU(2) maka $D_\mu\Psi_l^L$ harus bertransformasi dengan cara yang sama seperti Ψ_l^L itu sendiri,

$$D^\mu\Psi_l^L \to \left[D^\mu\Psi_l^L\right]' = \exp\left[ig\sigma_j\omega_j/2\right]D^\mu\Psi_l^L$$

dan $W_j^\mu(x)$ bertransformasi menurut

$$W_j^\mu \to W_j^{'\mu} = W_j^\mu + \delta W_j^\mu$$

Untuk penyederhanaan penulisan digunakan

$$\begin{aligned} U &= \exp\left[ig\sigma_j\omega_j/2\right] \\ &= \exp\left[ig\sigma\omega/2\right] \end{aligned}$$

dan

$$U^{-1} = \exp\left[-ig\sigma\omega/2\right]$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \left[D^\mu\Psi_l^\mu\right]' &= D'^\mu\Psi_l'^L \\ &= \left[\partial^\mu + ig\sigma W'^\mu/2\right]U\Psi_l^L \\ &= U\partial^\mu\Psi_l^L + \partial^\mu U\Psi_l^L \\ &\quad + \frac{1}{2}ig\sigma W'^\mu U\Psi_l^L \end{aligned}$$

dan ruas kanannya

$$\begin{aligned} UD^\mu\Psi_l^L &= U\left[\partial^\mu + ig\sigma W^\mu/2\right]\Psi_l^L \\ &= U\partial^\mu\Psi_l^L + U\frac{1}{2}ig\sigma W^\mu\Psi_l^L \end{aligned}$$

Penyamaan kedua persamaan di atas diperoleh

$$\frac{1}{2}ig\sigma W'^\mu U\Psi_l^L = U\frac{1}{2}ig\sigma W^\mu\Psi_l^L - \partial^\mu U\Psi_l^L$$

atau

$$\frac{1}{2}ig\sigma W'^\mu U = U\frac{1}{2}ig\sigma W^\mu - \partial^\mu U$$

Jika dikalikan dari kanan dengan U^{-1} akan didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ig\sigma W'^\mu UU^{-1} &= U\frac{1}{2}ig\sigma W^\mu U^{-1} - (\partial^\mu U)U^{-1} \\ \frac{1}{2}ig\sigma W'^\mu &= U\frac{1}{2}ig\sigma W^\mu U^{-1} - (\partial^\mu U)U^{-1} \end{aligned}$$

Jika ω_j infinitesimal, maka

$$U = \left[1 + \frac{1}{2}ig\sigma\omega\right]$$

dan

$$U^{-1} = \left[1 - \frac{1}{2}ig\sigma\omega\right]$$

Substitutsi balik memberikan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}ig\sigma W'^{\mu} &= \left[1+\frac{1}{2}ig\sigma\omega\right]\frac{1}{2}ig\sigma W^{\mu}\left[1-\frac{1}{2}ig\sigma\omega\right] \\
&\quad -\left(\partial^{\mu}\left[1+\frac{1}{2}ig\sigma\omega\right]\right)\left[1-\frac{1}{2}ig\sigma\omega\right] \\
&= \frac{1}{2}ig\sigma W^{\mu}+\left[\frac{1}{2}ig\sigma W^{\mu}\right]\left[-\frac{1}{2}ig\sigma\omega\right] \\
&\quad +\left[\frac{1}{2}ig\sigma\omega\right]\left[\frac{1}{2}ig\sigma W^{\mu}\right] \\
&\quad +\left[\frac{1}{2}ig\sigma\omega\right]\left[\frac{1}{2}ig\sigma W^{\mu}\right]\left[-\frac{1}{2}ig\sigma\omega\right] \\
&\quad -\left[\frac{1}{2}ig\sigma\partial^{\mu}\omega\right]\left[1-\frac{1}{2}ig\sigma\omega\right]
\end{aligned}$$

Suku dalam parameter infinitesimal orde dua dapat diabaikan, sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}ig\sigma W'^{\mu} &= \frac{1}{2}ig\sigma W^{\mu}+\left[\frac{1}{2}ig\sigma W^{\mu}\right]\left[-\frac{1}{2}ig\sigma\omega\right] \\
&\quad +\left[\frac{1}{2}ig\sigma\omega\right]\left[\frac{1}{2}ig\sigma W^{\mu}\right]-\frac{1}{2}ig\sigma\partial^{\mu}\omega \\
\frac{\sigma}{2}W'^{\mu} &= \frac{\sigma}{2}W^{\mu}-ig\left[\frac{\sigma}{2}W^{\mu}\right]\left[\frac{\sigma}{2}\omega\right] \\
&\quad +ig\left[\frac{\sigma}{2}\omega\right]\left[\frac{\sigma}{2}W^{\mu}\right]-\frac{\sigma}{2}\partial^{\mu}\omega \\
&= \frac{\sigma}{2}W^{\mu}+ig\left[\frac{\sigma}{2}\omega\frac{\sigma}{2}W^{\mu}-\frac{\sigma}{2}W^{\mu}\frac{\sigma}{2}\omega\right] \\
&\quad -\frac{\sigma}{2}\partial^{\mu}\omega.
\end{aligned}$$

Uraian komponen kedua dan ketiga memberikan

$$\begin{aligned}
ig\left[\frac{\sigma}{2}\omega\frac{\sigma}{2}W^{\mu}-\frac{\sigma}{2}W^{\mu}\frac{\sigma}{2}\omega\right] &= ig[\frac{\sigma_i}{2}\omega_i\frac{\sigma_j}{2}W_j^{\mu}-\frac{\sigma_j}{2}W_j^{\mu}\frac{\sigma_i}{2}\omega_i] \\
&= ig\omega_i W_j^{\mu}\left[\frac{\sigma_i}{2}\frac{\sigma_j}{2}-\frac{\sigma_j}{2}\frac{\sigma_i}{2}\right] \\
&= ig\omega_i W_j^{\mu} i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2} \\
&= -g\varepsilon_{ijk}\omega_i W_j^{\mu}\frac{\sigma_k}{2}
\end{aligned}$$

Penulisan semua suku pada Persamaan (2.126) dalam komponen k memberikan

$$\frac{\sigma_k}{2}W_k'^{\mu}=\frac{\sigma_k}{2}W_k^{\mu}-g\varepsilon_{ijk}\omega_i W_j^{\mu}\frac{\sigma_k}{2}-\frac{\sigma_k}{2}\partial^{\mu}\omega_k$$

Atau bisa dituliskan sebagai

$$W_k^{'\mu} = W_k^\mu - g\varepsilon_{ijk}\omega_i W_j^\mu - \partial^\mu \omega_k$$

atau

$$\begin{aligned} W_i^{'\mu} &= W_i^\mu - g\varepsilon_{jki}\omega_j W_k^\mu - \partial^\mu \omega_i \\ &= W_i^\mu - g\varepsilon_{ijk}\omega_j W_k^\mu - \partial^\mu \omega_i \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$\delta W_i^\mu = -g\varepsilon_{ijk}\omega_j W_k^\mu - \partial^\mu \omega_i$$

Dari perhitungan di atas, didapatkan mahwa medang gauge W^μ bertransformasi sebagai berikut

$$W_i^\mu \to W_i^{'\mu} = W_i^\mu - \partial^\mu \omega_i - g\varepsilon_{ijk}\omega_j W_k^\mu$$

Dengan menggunakan transformasi di atas, invariansi Lagrangian dapat dipertahankan.Selanjutnya ditinjau transformasi lokal U(1), yaitu

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \psi^{'}(x) = \exp\left[ig^{'}Yf(x)\right]\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}^{'}(x) = \bar{\psi}(x)\exp\left[-ig^{'}Yf(x)\right] \end{aligned}$$

dengan g merupakan bilangan riel dan f(x) merupakan fungsi riel differensiabel sembarang. Analogi dengan kasus elektromagnetik, invariansi rapat Lagrangian bisa dipenuhi dengan mengganti turunan biasa menjadi turunan kovarian, yaitu

$$\partial^\mu \psi(x) \to D^\mu \psi(x) = \left[\partial^\mu - ig'YB^\mu(x)\right]\psi(x)$$

dimana $\psi(x)$ adalah salah satu dari medan lepton kiri, medan neutrino kiri, medan lepton kanan, dan medan neutrino kanan. Secara analogi juga, medan gauge $B^\mu(x)$ bertransformasi menurut

$$B^\mu(x) \to B^{'\mu}(x) = B^\mu(x) - \frac{1}{g'}\partial^\mu f(x)$$

Jika penggantian dilakukan secara serempak, yaitu pada SU(2) dan U(1), maka rapat Lagrangian bisa dituliskan menjadi

$$\mathscr{L}_0 = i[\bar{\Psi}_l^L \gamma^\mu D_\mu \Psi_l^L + \bar{\psi}_l{}^R \gamma^\mu D_\mu \psi_l^R + \bar{\psi}_{\nu_l}{}^R \gamma^\mu D_\mu \psi_{\nu_l}^R]$$

dimana

$$\begin{aligned}
D_\mu \Psi_l^L &= \left[\partial_\mu + ig\sigma_j W_{j\mu}/2 - ig' Y B_\mu\right] \Psi_l^L \\
D_\mu \psi_l^R &= \left[\partial_\mu - ig' Y B_\mu\right] \psi_l^R \\
D_\mu \psi_{\nu_l}^R &= \partial_\mu \psi_{\nu_l}^R
\end{aligned}$$

Rapat Lagrangian seperti ini dinamakan invarian gauge SU(2) x U(1).

Rapat Lagrangian tersebut dapat dituliskan kembali dalalm bentuk

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I$$

dengan $\mathscr{L}_0$ adalah rapat Lagrangian lepton bebas, dan

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_I &= -\frac{1}{2} g \bar{\Psi}_l{}^L \gamma^\mu \sigma_i \Psi_l^L W_\mu \\
&\quad -g' \left[-\frac{1}{2} \bar{\Psi}_l^L \gamma^\mu \Psi_l^L - \bar{\psi}_l^R \gamma^\mu \psi_l^R \right] B_\mu \\
&= -g J_i^\mu W_{\mu i} - g' J_Y^\mu B_\mu
\end{aligned}$$

merepresentasikan interaksi antara arus isospin lemah dengan medan gauge W_μ dan arus muatan hiper lemah dengan B_μ.

Untuk merepresentasikan Lagrangian interaksi ini, dituliskan

$$J_1^\mu = \frac{1}{4}\left[J^\mu + J^{\mu+}\right]$$

dan

$$J_2^\mu = \frac{1}{4} i \left[J^\mu - J^{\mu+}\right]$$

Kemudian secara analogi, diperkenalkan medan gauge non-hermitian, yaitu

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[W_{1\mu} - iW_{2\mu}\right]$$

dan

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[W_{1\mu} + iW_{2\mu}\right]$$

untuk menggantikan $W_{1\mu}$ dan $W_{2\mu}$. Penjumlahan kedua persamaan di atas didapatkan

$$W_{1\mu} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[W_\mu + W_\mu^+\right]$$

dan pengurangannya didapatkan

$$W_{2\mu} = \frac{\sqrt{2}}{2} i \left[W_\mu - W_\mu^+ \right]$$

Maka, dua suku pertama dari $-gJ_i^\mu W_{i\mu}$ pada rapat Lagrangian interaksi dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}
-g\sum_{i=1}^{2} J_i^\mu W_{i\mu} &= -g[\frac{1}{4}\left[J^\mu + J^{\mu+}\right]\frac{\sqrt{2}}{2}\left[W_\mu + W_\mu^+\right] \\
&\quad + \frac{1}{4} i \left[J^\mu - J^{\mu+}\right]\frac{\sqrt{2}}{2} i \left[W_\mu - W_\mu^+\right]] \\
&= -g\frac{\sqrt{2}}{8}[J^\mu W_\mu + J^\mu W_\mu^+ \\
&\quad + J^{\mu+} W_\mu + J^{\mu+} W_\mu^+] \\
&\quad + g\frac{\sqrt{2}}{8}[J^\mu W_\mu - J^\mu W_\mu^+ \\
&\quad - J^{\mu+} W_\mu + J^{\mu+} W_\mu^+] \\
&= -\frac{g}{2\sqrt{2}}\left[J^\mu W_\mu^+ + J^{\mu+} W_\mu\right]
\end{aligned}$$

Dan dua suku yang tersisa adalah

$$\begin{aligned}
-gJ_3^\mu W_{3\mu} - g' J_Y^\mu B_\mu &= -gJ_3^\mu W_{3\mu} - g'\left[\frac{s^\mu}{e} - J_3^\mu\right] B_\mu \\
&= -J_3^\mu \left[gW_{3\mu} - g' B_\mu\right] - g'\frac{s^\mu}{e} B_\mu
\end{aligned}$$

Pada persamaan di atas terlihat bahwa J_3^μ tidak hanya berinteraksi dengan medan gauge $W_{3\mu}$, tetapi juga dengan medan gauge B_μ.

Suku campuran J_3^μ dapat didiagonalisasi dengan memperkenalkan dua medan hermitian, A_μ dan Z_μ. Kedua medan ini dihubungkan dengan $W_{3\mu}$ dan B_μ dalam kombinasi linier.

$$\begin{aligned}
W_{3\mu} &= \cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu \\
B_\mu &= -\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu
\end{aligned}$$

Sudut θ_W yang menyatakan pencampuran antara medan A_μ dan Z_μ dalam $W_{3\mu}$ dan $B_\mu$dinamakan sudut pencampuran lemah (the weak mixing angle) atau sudut Wei-

nberg. Maka

$$
\begin{aligned}
-gJ_3^\mu W_{3\mu} - g' J_Y^\mu B_\mu &= -gJ_3^\mu W_{3\mu} - g' \left[\frac{s^\mu}{e} - J_3^\mu \right] B_\mu \\
&= -J_3^\mu \left[gW_{3\mu} - g' B_\mu \right] - g' \frac{s^\mu}{e} B_\mu \\
&= -J_3^\mu [g \left(\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu \right) \\
&\quad -g' \left(-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu \right)] \\
&\quad -g' \frac{s^\mu}{e} \left(-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu \right) \\
&= -\left(g\cos\theta_W - g'\sin\theta_W \right) J_3^\mu Z_\mu \\
&\quad -\left(g\sin\theta_W + g'\cos\theta_W \right) J_3^\mu A_\mu \\
&\quad +\frac{g'}{e} \sin\theta_W s^\mu Z_\mu - \frac{g'}{e} \cos\theta_W s^\mu A_\mu
\end{aligned}
$$

A_μ merupakan medan elektromagnetik, hal ini berarti koefisien $-s^\mu A_\mu$ harus sama dengan -1. Maka

$$g' \cos\theta_W = e \tag{5.1}$$

Dengan demikian koefisien $J_\mu^\mu A_\mu$ harus lenyap, maka

$$g\sin\theta_W + g'\cos\theta_W = 0$$

atau

$$g\sin\theta_W = -g'\cos\theta_W$$

dan

$$g' = -g\frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}$$

Subtitusi balik menghasilkan

$$
\begin{aligned}
-gJ_3^\mu W_{3\mu} - g' J_Y^\mu B_\mu &= -\left(g\cos\theta_W - g'\sin\theta_W\right) J_3^\mu Z_\mu \\
&\quad + \frac{g'}{e}\sin\theta_W s^\mu Z_\mu - s^\mu A_\mu \\
&= -J_3^\mu \left(g\cos\theta_W Z_\mu - g'\sin\theta_W Z_\mu\right) \\
&\quad + \frac{g'}{e}\sin\theta_W s^\mu Z_\mu - s^\mu A_\mu \\
&= -s^\mu A_\mu - J_3^\mu \left(g\cos\theta_W Z_\mu + g\frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}\sin\theta_W Z_\mu\right) \\
&\quad + g\frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}\frac{1}{e}\sin\theta_W s^\mu Z_\mu \\
&= -s^\mu A_\mu - J_3^\mu \left(g\cos\theta_W Z_\mu + g\frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}\sin\theta_W Z_\mu\right) \\
&\quad + g\frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}\sin\theta_W \frac{s^\mu}{e} Z_\mu \\
&= -s^\mu A_\mu - J_3^\mu \left(g\cos\theta_W Z_\mu + g\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W} Z_\mu\right) \\
&\quad + g\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}\frac{s^\mu}{e} Z_\mu \\
&= -s^\mu A_\mu - J_3^\mu \frac{1}{\cos\theta_W}\left(g\cos^2\theta_W Z_\mu + g\sin^2\theta_W Z_\mu\right) \\
&\quad + g\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}\frac{s^\mu}{e} Z_\mu \\
&= -s^\mu A_\mu - J_3^\mu \frac{g}{\cos\theta_W}\left(\cos^2\theta_W + \sin^2\theta_W\right) Z_\mu \\
&\quad + g\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}\frac{s^\mu}{e} Z_\mu \\
&= -s^\mu A_\mu - J_3^\mu \frac{g}{\cos\theta_W} Z_\mu + g\frac{\sin^2\theta_W}{\cos\theta_W}\frac{s^\mu}{e} Z_\mu \\
&= -s^\mu A_\mu - \frac{g}{\cos\theta_W}\left[J_3^\mu - \frac{\sin^2\theta_W}{e} s^\mu\right] Z_\mu
\end{aligned}
$$

Sehingga rapat Lagrangian interaksinya menjadi

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_I &= -s^\mu A_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}}\left[J^\mu W_\mu^+ + J^{\mu +} W_\mu\right] \\
&\quad - \frac{g}{\cos\theta_W}\left[J_3^\mu - \frac{\sin^2\theta_W}{e} s^\mu\right] Z_\mu
\end{aligned}
$$

Rapat Lagrangian ini mendeskripsikan interaksi lemah dan interaksi elektromagnetik dari lepton. Suku pertama merepresentasikan interaksi dalam elektrodinamika

kuantum, suku kedua merupakan rapatlagrangian interaksi IVB, dimana medan W_μ menyatakan boson vektor $W^\pm$. Sedangkan suku ketiga merepresentasikan arus netral, yang berpasangan dengan medan vektor riel Z_μ yang diinterpretasikan sebagai boson vektor netral Z^0.

Lampiran B

Fungsi gelombang bisa dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi^{+}(x)+\psi^{-}(x)\\ &= \sum_{r,q}\left(\frac{m}{VE_q}\right)^{\frac{1}{2}}[c_r(q)u_r(q)e^{-iqx}+d_r^{\dagger}(q)v_r(q)e^{iqx}]\end{aligned}$$

dan medan konjugatnya, $\bar{\psi}=\psi^{\dagger}\gamma^0$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^{+}(x)+\bar{\psi}^{-}(x)\\ &= \sum_{r,q}\left(\frac{m}{VE_q}\right)^{\frac{1}{2}}[d_r(q)\bar{v}_r(q)e^{-iqx}+c_r^{\dagger}(q)u_r(q)e^{iqx}]\end{aligned}$$

dan jika beroperasi pada ket,

$$\begin{aligned}\psi^{+}\left|e^{-}p\right\rangle &= |0\rangle\left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}}u(p)e^{-ipx}\\ \bar{\psi}^{+}\left|e^{+}p\right\rangle &= |0\rangle\left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{v}(p)e^{-ipx}\\ \bar{\psi}^{-}|0\rangle &= \sum_{spin}\left|e^{-}p\right\rangle\left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}}\bar{u}(p)e^{ipx}\\ \psi^{-}|0\rangle &= \sum_{spin}\left|e^{+}p\right\rangle\left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}}v(p)e^{ipx}\end{aligned}$$

Maka, elemen matriks arus

$$\begin{aligned}\left\langle p',s'\right|\bar{\psi}\Gamma_\mu\psi\left|p,s\right\rangle &= \left\langle p',s'\right|\left(\bar{\psi}^{+}(x)+\bar{\psi}^{-}(x)\right)\Gamma_\mu\left(\psi^{+}(x)+\psi^{-}(x)\right)\left|p,s\right\rangle\\ &= \left\langle p',s'\right|(\bar{\psi}^{+}(x)\Gamma_\mu\psi^{+}(x)+\bar{\psi}^{+}(x)\Gamma_\mu\psi^{-}(x)\\ &\quad+\bar{\psi}^{-}(x)\Gamma_\mu\psi^{+}(x)+\bar{\psi}^{-}(x)\Gamma_\mu\psi^{-}(x))\left|p,s\right\rangle\\ &= \left\langle p',s'\right|\bar{\psi}^{+}(x)\Gamma_\mu\psi^{+}(x)\left|p,s\right\rangle+\left\langle p',s'\right|\bar{\psi}^{+}(x)\Gamma_\mu\psi^{-}(x)\left|p,s\right\rangle\\ &\quad+\left\langle p',s'\right|\bar{\psi}^{-}(x)\Gamma_\mu\psi^{+}(x)\left|p,s\right\rangle+\left\langle p',s'\right|\bar{\psi}^{-}(x)\Gamma_\mu\psi^{-}(x)\left|p,s\right\rangle\end{aligned}$$

Evaluasi masing-masing suku memberikan, untuk suku pertama

$$\begin{aligned}
\psi^{+}(x)\left|p,s\right\rangle &= \left(\sum_{r,q}\left(\frac{m}{VE_q}\right)^{\frac{1}{2}} c_r(q)u_r(q)e^{-iqx}\right)\left|p,s\right\rangle \\
&= \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}} c_s(p)u_s(p)e^{-ipx}\left|p,s\right\rangle + 0 \\
&= \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}} u(p)e^{-ipx}\left|0\right\rangle
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
\left\langle p',s'\right|\bar{\psi}^{+} &= \left\langle p',s'\right|\left(\sum_{r,q}\left(\frac{m}{VE_q}\right)^{\frac{1}{2}} d_r(q)\bar{v}_r(q)e^{-iqx}\right) \\
&= \sum_{r,q}\left(\frac{m}{VE_q}\right)^{\frac{1}{2}} d_r(q)\bar{v}_r(q)e^{-iqx}\left\langle (p',s');(q,r)\right|
\end{aligned}$$

sehingga

$$\left\langle p',s'\right|\bar{\psi}^{+}(x)\Gamma_\mu\psi^{+}(x)\left|p,s\right\rangle = 0$$

Untuk suku kedua,

$$\begin{aligned}
\psi^{-}(x)\left|p,s\right\rangle &= \left(\sum_{r,q}\left(\frac{m}{VE_q}\right)^{\frac{1}{2}} d_r^{\dagger}(q)v_r(q)e^{+iqx}\right)\left|p,s\right\rangle \\
&= \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}} d_r^{\dagger}(q)v_r(q)e^{+iqx}\left|p,s\right\rangle + 0 \\
&= \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}} v_r(q)e^{+iqx}\left|0\right\rangle
\end{aligned}$$

dan secara sama

$$\left\langle p',s'\right|\bar{\psi}^{+} = \sum_{r,q}\left(\frac{m}{VE_q}\right)^{\frac{1}{2}} d_r(q)\bar{v}_r(q)e^{-iqx}\left\langle (p',s');(q,r)\right|$$

Maka

$$\left\langle p',s'\right|\bar{\psi}^{+}(x)\Gamma_\mu\psi^{-}(x)\left|p,s\right\rangle = 0$$

Untuk suku ketiga,

$$\psi^{+}(x)\left|p,s\right\rangle = \left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}} u_s(p)e^{-ipx}\left|0\right\rangle$$

dan

$$
\begin{aligned}
\left\langle p',s'\right|\bar{\psi}^{+} &= \left\langle p',s'\right|\left(\sum_{r,q}\left(\frac{m}{VE_q}\right)^{\frac{1}{2}} c_r^{\dagger}(q)\bar{u}_r(q)e^{-iqx}\right) \\
&= \left(\frac{m}{VE_{p'}}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}_{s'}(p')e^{+ip'x}\left\langle 0\right|
\end{aligned}
$$

Maka

$$
\begin{aligned}
\left\langle p',s'\right|\bar{\psi}^{-}(x)\Gamma_\mu\psi^{+}(x)\left|p,s\right\rangle &= \left(\frac{m}{VE_{p'}}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}_{s'}(p')e^{+ip'x}\left\langle 0\right|\Gamma_\mu\left(\frac{m}{VE_p}\right)^{\frac{1}{2}} u_s(p)e^{-ipx}\left|0\right\rangle \\
&= \left(\frac{m^2}{V^2E_{p'}E_p}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i(p'-p)x}\bar{u}_{s'}(p')\Gamma_\mu u_s(p) \\
&= \frac{m}{V\sqrt{E_{p'}E_p}}e^{-iqx}\bar{u}_{s'}(p')\Gamma_\mu u_s(p)
\end{aligned}
$$

dengan $q = p' - p$.

Lampiran C

Identitas Gordon

Diketahui

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
[\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= \gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu \\
&= \gamma^\mu\gamma^\nu + (2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu) \\
&= 2\gamma^\mu\gamma^\nu - 2g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
i\sigma^{\mu\nu} &= -(\gamma^\mu\gamma^\nu - g^{\mu\nu}) \\
&= -\gamma^\mu\gamma^\nu + g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Secara equivalen,

$$\begin{aligned}
[\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu) - \gamma^\nu\gamma^\mu \\
[\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= 2g^{\mu\nu} - 2\gamma^\nu\gamma^\mu \\
-2\sigma^{\mu\nu} &= 2g^{\mu\nu} - 2\gamma^\nu\gamma^\mu \\
i\sigma^{\mu\nu} &= \gamma^\nu\gamma^\mu - g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu - p_\nu)u(p) &= \bar{u}(p')[i\sigma^{\mu\nu}p'_\nu - i\sigma^{\mu\nu}p_\nu]u(p) \\
&= \bar{u}(p')[(\gamma^\nu\gamma^\mu - g^{\mu\nu})p'_\nu - (-\gamma^\mu\gamma^\nu + g^{\mu\nu})p_\nu]u(p) \\
&= \bar{u}(p')[\gamma^\nu\gamma^\mu p'_\nu - g^{\mu\nu}p'_\nu - g^{\mu\nu}p_\nu + \gamma^\mu\gamma^\nu p_\nu]u(p) \\
&= \bar{u}(p')[\gamma^\nu\gamma^\mu p'_\nu - p'^\mu - p^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu p_\nu]u(p) \\
&= \bar{u}(p')[\gamma^\nu\gamma^\mu p'_\nu - (p'+p)^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu p_\nu]u(p)
\end{aligned}$$

Mengingat persamaan Dirac,

$$(\gamma^\nu p_\nu - m)u(p) = 0 \rightarrow \gamma^\nu p_\nu u(p) = mu(p)$$

dan konjugatnya

$$\bar{u}(p')(\gamma^\nu p'_\nu - m) = 0 \rightarrow \bar{u}(p')\gamma^\nu p'_\nu = \bar{u}(p')m$$

Maka,

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}(p')[m\gamma^\mu - (p'+p)^\mu + \gamma^\mu m]u(p) \\
&= \bar{u}(p')[2m\gamma^\mu - (p'+p)^\mu]u(p)
\end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')i\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu - p_\nu)u(p) &= \bar{u}(p')[2m\gamma^\mu - (p'+p)^\mu]u(p) \\
2m\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) &= \bar{u}(p')[(p'+p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu - p_\nu)]u(p) \\
\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) &= \frac{1}{2m}\bar{u}(p')[(p'+p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu - p_\nu)]u(p)
\end{aligned}$$

Lampiran D

Persamaan Dirac untuk partikel bebas diberikan,

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x,t) = 0$$

diuraikan menjadi

$$(i\gamma^{0}\partial_{0} + i\gamma^{i}\partial_{i} - m)\psi(x,t) = 0$$

Di dalam pengaruh medan elektromagnetik, dapat dituliskan menjadi

$$(\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} - eA_{\mu}) - m)\psi(x,t) = 0$$

Paritas

Misal, ψ' adalah medan setelah dikenai operasi paritas dan persamaan Dirac invarian terhadap transformasi paritas,

$$(i\gamma^{0}\partial_{0} + i\gamma^{i}\partial_{i} - m)\psi'(x,t) = 0$$

setelah dikenai operasi paritas, menjadi

$$(i\gamma^{0}\partial_{0} + i\gamma^{i}\partial_{i} - m)\psi(-x,t) = 0$$

dikali dengan operator sembarang P dari kiri,

$$(iP\gamma^{0}\partial_{0} + iP\gamma^{i}\partial_{i})\psi(-x,t) - mP\psi(-x,t) = 0$$

$P^{-1}P$ disisipkan pada suku pertama ruas kiri,

$$(iP\gamma^{0}P^{-1}\partial_{0} + iP\gamma^{i}P^{-1}\partial_{i})P\psi(-x,t) - mP\psi(-x,t) = 0$$

Maka jika dibandingkan dengan persamaan semula didapatkan,

$$\psi'(x,t) = P\psi(-x,t)$$

dan

$$P\gamma^0 P^{-1} = \gamma^0;\ P\gamma^j P^{-1} = -\gamma^j$$

dan P yang memenuhi adalah

$$P = \gamma^0$$

Medan adjoin setelah ditransformasi paritas menjadi

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'(x,t) &= \psi'^{\dagger}(x,t)\gamma^0 \\
&= (\gamma^0\psi(-x,t))^{\dagger}\gamma^0 \\
&= \psi^{\dagger}(-x,t)\gamma^0\gamma^0 \\
&= \psi^{\dagger}(-x,t)P \\
&= \psi^{\dagger}(-x,t)P^{-1}
\end{aligned}$$

Sekawan Muatan

Persamaan Dirac untuk positron di dalam medan EM adalah

$$(\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} + eA_{\mu}) - m)\psi'(x,t) = 0$$

dan untuk elektron yang disekawan komplekskan,

$$(\gamma^{\mu *}(i\partial_{\mu} + eA_{\mu}) + m)\psi^*(x,t) = 0$$

lalu dikalikan dengan operator C sembarang dari kiri,

$$C\gamma^{\mu *}(i\partial_{\mu} + eA_{\mu})\psi^*(x,t) + mC\psi^*(x,t) = 0$$

kemudian disisipkan $C^{-1}C$ pada suku pertama ruas kiri,

$$C\gamma^{\mu *}C^{-1}(i\partial_{\mu} + eA_{\mu})C\psi^*(x,t) + mC\psi^*(x,t) = 0$$

Sehingga jika dibandingkan dengan persamaan Dirac untuk positron, didapatkan

$$\psi'(x,t) = C\psi^*(x,t)$$

dan

$$C\gamma^{\mu *}C^{-1} = -\gamma^{\mu}$$

Sehingga C tidak lagi sembarang, dan

$$C = i\gamma^2$$

Kemudian untuk lebih menarik, disisipkan $I = \gamma^0\gamma^0$menjadi

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= C\gamma^0\gamma^0\psi^*(x) \\
&= C\gamma^0\bar{\psi}^T(x) \\
&= \mathbf{C}\bar{\psi}^T(x)
\end{aligned}$$

dengan

$$\mathbf{C} = C\gamma^0 = i\gamma^2\gamma^0$$

sehingga,

$$\left(C\gamma^0\right)\gamma^{\mu *}\left(C\gamma^0\right)^{-1} = -\gamma^\mu$$

jika ruas kiri dijabarkan, untuk $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
C\gamma^0\gamma^{0*}\gamma^0C^{-1} &= C\gamma^0\gamma^0\gamma^0C^{-1} \\
&= C\gamma^0C^{-1} \\
&= C\gamma^{0T}C^{-1}
\end{aligned}$$

kemudian untuk $\mu = k = 1,2,3$

$$\begin{aligned}
C\gamma^0\gamma^{k*}\gamma^0C^{-1} &= -C\gamma^0\gamma^{kT}\gamma^0C^{-1} \\
&= C\gamma^0\gamma^0\gamma^{kT}C^{-1} \\
&= C\gamma^{kT}C^{-1}
\end{aligned}$$

Maka didapatkan,

$$\mathbf{C}\gamma^{\mu T}\mathbf{C}^{-1} = -\gamma^\mu$$

Medan adjoin untuk positron menjadi

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'(x) &= \psi'^\dagger(x)\gamma^0 \\
&= \left(i\gamma^2\gamma^*\right)^\dagger\gamma^0 \\
&= -i\psi^T(x)\gamma^{2\dagger}\gamma^0 \\
&= -\psi^T(x)\left(-i\gamma^0\gamma^{2\dagger}\right) \\
&= -\psi^T(x)\mathbf{C}^{-1}
\end{aligned}$$

Lampiran E

Arus Bermuatan dan Bauran Neutrino

Dalam penurunan tadi, telah dilakukan pergantian medan ψ menjadi ψ', sehingga bentuk arus pada teori interaksi lemah juga perlu dilakukan pergantian. Kasus khusus terjadi pada arus bermuatan, yaitu

$$j_\mu = -\bar{\psi}^{'L}_{\nu_l}\gamma_\mu\psi^{'L}_l$$

dimana

$$\psi^{'L}_{\nu_l} = \begin{pmatrix} \psi^{'L}_{\nu_e} \\ \psi^{'L}_{\nu_\mu} \\ \psi^{'L}_{\nu_\tau} \end{pmatrix}$$

Maka,

$$\begin{aligned} j_\mu &= -\bar{\psi}^{'L}_{\nu_l}\gamma_\mu\psi^{'L}_l \\ &= -\bar{\psi}^{'L}_{\nu_l}\gamma_\mu U_L\psi^L_l \\ &= -\bar{\psi}^{fL}_{\nu_l}\gamma_\mu\psi^L_l \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned} \psi^{fL}_{\nu_l} &= U^+_L\psi^{'L}_{\nu_l} \\ &= \begin{pmatrix} \psi^L_{\nu_e} \\ \psi^L_{\nu_\mu} \\ \psi^L_{\nu_\tau} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Model standar dibangun berdasarkan teori neutrino dua komponen, tetapi hanya neutrino kiri yang masuk pada Lagrangian SM. Jika medan Higgs bertransformasi sebagai doublet, maka hal ini tidak mungkin untuk memunculkan massa neutrino.Tetapi secara formal, massa neutrino dapat dibentuk. Untuk memunculkan

massa neutrino, dibuat bentuk Lagrangian

$$\mathscr{L} = -\frac{\sqrt{2}}{v}\bar{\Psi}_l^{'L} M^{'} \psi_{\nu_l}^{'R} \tilde{\phi} + h.c.$$

dimana $\psi_{\nu_l}^{'R}$ adalah singlet dari grup SU(2). M' adalah matrik 3 x 3 dan $\tilde{\phi}$ adalah conjugated Higgs doublet. Setelah dilakukan perusakan simetri spontan

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi} &= i\sigma_2\phi^* \\
&= i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{v+\sigma}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= -\frac{\sqrt{2}}{v}\begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\nu_l}^{'L} & \psi_l^{'L} \end{pmatrix} M^{'} \psi_{\nu_l}^{'R}\begin{pmatrix} \frac{v+\sigma}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} + h.c \\
&= -\bar{\psi}_{\nu_l}^{'L} M^{'} \psi_{\nu_l}^{'R}\left(1+\frac{\sigma}{v}\right) + h.c \\
&= \bar{\psi}_{\nu_l}^{fL} M \psi_{\nu_l}^{'R}\left(1+\frac{\sigma}{v}\right) + h.c
\end{aligned}$$

dimana

$$\psi_{\nu_l}^{'L} = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e}^{'L} \\ \psi_{\nu_\mu}^{'L} \\ \psi_{\nu_\tau}^{'L} \end{pmatrix}$$

$$\psi_{\nu_l}^{'R} = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e}^{'R} \\ \psi_{\nu_\mu}^{'R} \\ \psi_{\nu_\tau}^{'R} \end{pmatrix}$$

dan

$$M = U_L^+ M'$$

Matriks M bisa dituliskan sebagai

$$M = UmV^+$$

dimana U dan V adalah matrik uniter dan $m_{ik} = m_i\delta_{ik}$, $m_i > 0$. Untuk suku massa

neutrino,kita mempunyai

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^m &= -\bar{\psi}_\nu^{fL} U m V^+ \psi_\nu^{'R} + h.c. \\ &= -\bar{\psi}_\nu m \psi_\nu\end{aligned}$$

atau dituliskan dalam bentuk komponen matriknya,

$$\mathscr{L}^m = -\sum_{i=1}^{3} m_i \bar{\psi}_{\nu_i} \psi_{\nu_i}$$

dimana

$$U^+ \psi_\nu^{fL} = \psi_\nu^L;\ U^+ \psi_\nu^{'R} = \psi_\nu^R;\ \psi_\nu = \psi_\nu^L + \psi_\nu^R$$

dan

$$\psi_\nu = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_1} \\ \psi_{\nu_2} \\ \psi_{\nu_3} \end{pmatrix},\ m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

ψ_{ν_i} adalah medan neutrino dengan massa m_i. Jadi, medan neutrino flavor $\psi_{\nu_l}^L$ yang masuk pada arus lepton netral dan bermuatan, adalah terhubung dengan komonen kiri dari neutrino masif ψ_{ν_i}, dengan relasi mixing

$$\nu_l^L = \sum_{i=1}^{3} U_{li} \nu_i^L$$

Relasi di atas akan membawa pada fenomena osilasi neutrino.

Lampiran F

Misalkan, suatu partikel meluruh menjadi beberapa partikel. Maka elemen matriks S dapat dituliskan sebagai

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_i - \sum_f p_f) \left(\prod_l 2m_l \right) \frac{1}{\sqrt{2E_i V}} \prod_f \frac{1}{\sqrt{2E_f V}} M_{fi}$$

dimana E_i merupakan energi partikel datang dan E_f merupakan energi masing-masing partikel keluar. Probabilitas transisi dari keadaan awal ke akhir diberiken dengan $\left|S_{fi}\right|^2$.

Akan tetapi, ketika kita mencoba untuk mengkuadratkan elemen matriks kita akan mendapat sedikit masalah, yaitu kita harus mengkuadratkan fungsi delta. Apakah artinya? Untuk sembarang fungsi f(p) dari momentum, kita bisa menuliskan

$$\delta^4(p) f(p) = \delta^4(p) f(0)$$

dalam tanda integrasi. Jika fungsi f(p) merupakan fungsi delta yang lain, kita akan menuliskan

$$\left[\delta^4(p)\right]^2 = \delta^4(p) \delta^4(0)_p$$

Sekarang akan dicari arti dari $\delta^4(0)_p$. Hal ini bisa dilakukan jika kita melakukan kalkulasi dalam volume V besar dan waktu T yang sangat lama, yang bisa dituliskan sebagai

$$\delta^4(0)_p = \frac{VT}{(2\pi)^4}$$

Maka, kuadrat elemen matriks S dapat dituliskan sebagai

$$\left|S_{fi}\right|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - \sum_f p_f) \left(\prod_l 2m_l \right) VT \frac{1}{2E_i V} \prod_f \frac{1}{2E_f V} \left|M_{fi}\right|^2$$

yang merupakan probabilitas transisi. Probabilitas transisi per unit waktu didapatk-

an dengan membagi dengan waktu T, yang memberikan

$$\left|S_{fi}\right|^2/T = (2\pi)^4\delta^4(p_i - \sum_f p_f)\left(\prod_l 2m_l\right)\frac{1}{2E_i}\prod_f \frac{1}{2E_f V}\left|M_{fi}\right|^2$$

Kita tertarik dengan momentum beberapa partikel dalam daerah d^3p dalam ruang momentum, maka kita harus mengalikan persamaan di atas dengan banyaknya keadaan dalam daerah tersebut. Angka ini bisa didapatkan dari mendiskritkan ruang fasa menjadi sel dengan volume $(2\pi)^3$ dalam satuan natural. Maka, banyaknya keadaan partikel tunggal dalam ruang momentum dengan volume d^3p adalah

$$\frac{Vd^3p}{(2\pi)^3}.$$

Dengan mengalikan faktor tersebut ke dalam kuadrat elemen matriks S, maka didapatkan differensial kecepatan peluruhan adalah

$$d\Gamma = (2\pi)^4\,\delta^4\left(\Sigma p'_f - p\right)\frac{1}{2E}\left(\prod_l 2m_l\right)\left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3\,2E'_p}\right)|M|^2$$

BIODATA PENULIS

Muhammad Taufiqi, berasal dari Sukorejo, Pasuruan. Ia dilahirkan pada 14 November 1992. Pendidikan penulis yaitu SD Negeri Glagahsari 1, SMP Negeri 1 Pandaan, SMA Negeri 1 Pandaan, Jurusan Fisika ITS (2010-2014), dan Pascasarjana Jurusan Fisika ITS (2013-2015). Pendidikan non-formal, meliputi seminar dan pelatihan, yaitu CTPNP 2012, ITS, Surabaya; Seminar Fisika dan Aplikasinya, UNAIR, Surabaya; CTPNP 2013, ITS, Surabaya; Seminar Nasional Fisika 2013, ITS Surabaya, School of Particle Physics 2013, IPB, Bogor; First Hue University Summer School of Particle and Astro-Particle 2014, Hue University, Vietnam; IAS-CERN School on Particle Physics and Cosmology and Implications for Technology 2015, Nanyang Technological University, Singapura; dan Pembicara Seminar Nasional Fisika 2015, Universitas Jakarta, Jakarta.

Di jurusan Fisika, Penulis mengambil Bidang Studi Fisika Teori dan bergabung menjadi anggota Laboratorium Fisika Teori dan Filsafat Alam (LaFTiFA). Penulis pernah menjadi anggota Himpuanan Mahasiswa Fisika (Himasika) ITS. Selama kuliah, penulis pernah menjadi asisten Fisika Dasar I dan II, asisten Fisika Matematika II, asisten Mekanika Klasik S2, asisten Mekanika Kuantum S2, asisten laboratorium Fisika Modern, asisten laboratorium Gelombang, tutor Fisika Statistik, dan Fisika Matematika I.

Prestasi penulis selama kuliah adalah PKM didanai 2011, PKM didanai 2012, Finalis

Tokyo Indonesian Commitment Award Paper Competition 2012, Tokyo Institute of Technology, Japan, Peringkat 4 Olimpiade Sains dan Teknologi Yogyakarta Tingkat Nasional 2011, Medali Perunggu Olimpiade Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Perguruan Tinggi tingkat Nasional 2012, Peringkat 3 Olimpiade Sains dan Teknologi Yogyakarta Tingkat Nasional 2012, dan Medali Emas Olimpiade Mtematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Perguruan Tinggi tingkat Nasional 2013.