TUGAS AKHIR – TF 141581

INVESTIGASI SOLUSI ANALITIS *UNSTEADY FREE CONVECTION* PADA MEDIA BERPORI

JOSEPH WILANTARA GULO
NRP. 2412 100 084

Dosen Pembimbing
Gunawan Nugroho, S.T., M.T., Ph.D.
Ir. Roekmono M.T.

JURUSAN TEKNIK FISIKA
Fakultas Teknologi Industri
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

FINAL PROJECT – TF141581

INVESTIGATION OF ANALYTICAL SOLUTION UNSTEADY FREE CONVECTION ON POROUS MEDIUM

JOSEPH WILANTARA GULO
NRP. 2412 100 084

Dosen Pembimbing
Gunawan Nugroho, S.T., M.T., Ph.D.
Ir. Roekmono, M.T.

DEPARTMENT OF ENGINEERING PHYSICS
Faculty of Industrial Technology
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

INVESTIGASI SOLUSI ANALITIS
UNSTEADY FREE CONVECTION
PADA MEDIA BERPORI

TUGAS AKHIR

Oleh :

Joseph Wilantara Gulo
2412 100 084

Surabaya, Juli 2016
Mengetahui/Menyetujui

Pembimbing I	Pembimbing II
Gunawan Nugroho, S.T., M.T., Ph.D	**Ir. Roekmono M.T.**
NIP: 19771127 200212 1 002	**NIP: 19580908 198601 1 001**

KETUA JURUSAN
TEKNIK FISIKA FTI ITS

Agus Muhamad Hatta, S.T., M.Si., Ph.D
NIP: 19780902 200312 1 002

LEMBAR PENGESAHAN

INVESTIGASI SOLUSI ANALITIS *UNSTEADY FREE CONVECTION* PADA MEDIA BERPORI

TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Teknik
Bidang Studi Rekayasa Energi dan Pengkondisian Lingkungan
Program Studi S-1 Jurusan Teknik Fisika
Fakultas Teknologi Industri
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :

JOSEPH WILANTARA GULO
2412 100 084

Disetujui oleh Tim Penguji Tugas Akhir :

1. Gunawan Nugroho, S.T., M.T., Ph.D ..... (Pembimbing I)
2. Ir. Roekmono, M.T. ..... (Pembimbing II)
3. Harsono Hadi, Ph.D ..... (Penguji I)
4. Ir. Sarwono, M.M. ..... (Penguji II)
5. Lizda Johar M., S.T., M.T. ..... (Penguji III)

SURABAYA
JULI 2016

INVESTIGASI SOLUSI ANALITIS *UNSTEADY FREE CONVECTION* PADA MEDIA BERPORI

Nama : Joseph Wilantara Gulo
NRP : 2412100084
Jurusan : Teknik Fisika, FTI - ITS
Pembimbing I : Gunawan Nugroho, S.T., M.T., Ph.D
Pembimbing II : Ir. Roekmono, M.T.

Abstrak

Solusi analitis dari *unsteady free convection* pada media berpori diteliti dalam tulisan ini. Solusi eksplisit untuk *unsteady free convection* pada media berpori didapatkan dengan menggunakan persamaan dasar yang dikemukakan Johnson dan Cheng, serta kondisi batas yang dikemukakan Magyari dan Pop. Persamaan dasar disesuaikan dengan kondisi batas lalu dibentuk menjadi solusi persamaan diferensial linier orde dua. Kemudian solusi direduksi menjadi persamaan nonlinier orde satu (persamaan Riccati). Solusi eksplisit ini memiliki arti fisis jika $m<0$ dan $C2<0$, dengan m dan n adalah konstanta yang ditentukan oleh kondisi batas. Dibandingkan dengan viskos dan difusi panas, efek konveksi dapat diabaikan. Karena alasan ini panas dan aliran sering disebut daerah konduksi. Estimasi yang dilakukan dengan menetapkan variasi nilai $m=-1$ dan $m=-2$ menunjukkan bahwa daerah konduksi yang terjadi saat permulaan *free convection* sangatlah kecil dan hanya terjadi pada rentang waktu yang sangat singkat. Semakin kecil nilai parameter m semakin kecil pula nilai t dan n yang didapatkan. Hal ini menunjukkan semakin kecil nilai m nilai estimasi daerah konduksi juga semakin kecil.

Kata kunci : solusi analitis, *unsteady free convection*, aliran pada media berpori

INVESTIGATION OF ANALYTICAL SOLUTION UNSTEADY FREE CONVECTION ON POROUS MEDIA

Name ***: Joseph Wilantara Gulo***
NRP ***: 2412100084***
Departement ***: Engineering Physics – Faculty of Industrial Technology - ITS***
Supervisor I ***: Gunawan Nugroho, S.T., M.T., Ph.D***
Supervisor II ***: Ir. Roekmono, M.T.***.

Abstract

Analytical solutions of unsteady free convection in porous media is presented in this research. Explicit solution for unsteady free convection in a porous media is obtained using the governing equations proposed by Johnson and Cheng and the boundary conditions are set by Magyari and Pop. Governing equations and boundary conditions transform into a solution of second order linear differential equation. Then the solution is reduced to a nonlinear equation of first order (Riccati equation). Explicit solution has physical meaning if m <0 and C2 <0, which m and n are constants that be determined by boundary conditions. When the free convection heat is started, if it are compared to the viscous and thermal diffusion, convection effects are negligible small. For this reason , the heat and the flow is often called the conduction regime. This research estimates conduction regime with variation of m=-1 and m=-2. The estimation indicates that the conduction regime is very small which occur at very shot time interval. The smaller value of the parameter m, the smaller value of t and n are obtained. The smaller value of m, estimation value of conduction regime are getting smaller

Key words : analytical solutions, unsteady free convection, flow in porous media

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur senantiasa dipanjatkan kepada Tuhan Yang Maha Agung dan Maha Bijaksana. Atas berkah, petunjuk, dan karunia-Nya, Tugas Akhir dengan judul "**Investigasi Solusi Analitis *Unsteady Free Convection* pada Media Berpori** dapat diselesaikan. Laporan Tugas Akhir ini disusun sebagai pertanggungjawaban selama melaksanakan tugas akhir.

Banyak bantuan yang didapatkan dari berbagai pihak selama pengerjaan dan penyusunan laporan tugas akhir ini. Oleh karena itu diucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Gunawan Nugroho, ST. MT, Ph.d dan Bapak Ir. Roekmono, M.T. selaku dosen pembimbing tugas akhir yang selalu mengarahkan penulis dalam pengerjaan tugas akhir.
2. Teman- teman F47, kakak- kakak F46, F45.
3. Bapak Agus Muhamad Hatta, S.T., M.Si. Ph.D selaku ketua Jurusan Teknik Fisika FTI ITS.
4. Bapak dan Ibu dosen Teknik Fisika yang telah memberikan ilmunya dengan ikhlas sehingga penulis dapat menyelesaikan kuliah sampai tugas akhir ini.
5. Orang tua, dan keluarga besar yang selalu memberikan do'a, dukungan, dan perhatiannya kepada penulis.
6. Semua pihak yang telah membantu dalam pelaksanaan dan penyusunan laporan kerja praktek ini.

Dalam penulisan skripsi ini masih terdapat beberapa kekurangan, baik aspek kualitas maupun aspek kuantitas dari materi penelitian yang disajikan, maka dari itu kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan agar penyusunan laporan selanjutnya lebih baik lagi. Semoga laporan tugas akhir ini dapat memberikan manfaat bagi kita semua.

Surabaya, Juli 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL ..... **i**
LEMBAR PENGESAHAN ..... **v**
ABSTRAK ..... **ix**
ABSTACT ..... **xi**
KATA PENGANTAR ..... **xiii**
DAFTAR ISI ..... **xv**
DAFTAR GAMBAR ..... **xvii**

BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan 3
1.4 Batasan Masalah 3
1.5 Manfaat Penelitian 3

BAB II Dasar Teori **5**
2.1 *Free Convection* 5
2.2 Media Berpori 7
2.3 *Flow* dan Perpindahan Panas pada Media Berpori 13
2.4 Persamaan Dasar untuk *Unsteady Free Convection* pada Media Berpori 14
2.5 Persamaan Diferensial 15
2.6 ODE Linear Persamaan Bernoulli 16
2.7 Deret Taylor 20

BAB III METODOLOGI **25**
3.1 Diagram Alir Penelitian 25
3.2 Persamaan Dasar 27
3.3 Solusi Persamaan Diferensial Orde Dua 29
3.4 Solusi Persamaan Diferensial Orde Satu 31

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN 37
4.1 Persamaan Eksplisit dengan Kondisi Batas 37
4.2 Daerah Konduksi 41
4.3 Pembahasan 45

BAB V Kesimpulan dan Saran..... 47
5.1 Kesimpulan 47
5.2 Saran 47
Daftar Pustaka

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Contoh media berpori (a) pasir pantai, (b) batu pasir, (c) kapur, (d) roti gandum, (e) kayu, dan (f) paru-paru manusia.....8
Gambar 2.2 Ilustrasi volume elemen representatif 10
Gambar 3.1 *Flowchart* Metodologi Penelitian 25
Gambar 4.1 Profil temperatur pada media berpori saat (a) m>0 dan C2>0 (b) m>0 dan C2<0.....38
Gambar 4.2 Profil temperatur pada media berpori saat(a) m<0 dan C2>0 (b) m<0 dan C2<0.....40
Gambar 4.3 Profil temperatur pada media berpori (a) Θ/Θ_w dengan m=-1(b) Θ_w dengan m=-1....42
Gambar 4.4 Profil temperatur pada media berpori (a) Θ/Θ_w dengan m=-2(b) Θ_w dengan m=-2 44

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Bidang teknologi industri banyak menggunakan prinsip-prinsip dasar proses perpindahan panas. Sehingga pendalaman di bidang ini perlu ditingkatkan, terutama pada metode penyelesaiannya. Perpindahan panas (*heat transfer*) adalah ilmu untuk memprediksikan perpindahan energi yang terjadi akibat perbedaan suhu pada benda atau material. Proses perpindahan panas dapat terjadi melalui tiga cara, yaitu perpindahan panas secara konduksi, konveksi dan radiasi.

Pada umumnya konveksi dibedakan menjadi dua, yaitu konveksi paksa dan konveksi alami. Pada kasus konveksi paksa, aliran fluida disebabkan oleh alat-alat eksternal, seperti fan atau pompa. Sedangkan pada kasus konveksi alami, aliran fluida dihasilkan oleh *body force* yang terjadi sebagai akibat dari perubahan densitas yang timbul dari perubahan suhu di daerah aliran. *Body force* pada kasus ini biasanya disebut gaya apung (*buoyancy force*).

Pada dasarnya, media berpori terdiri atas sekumpulan partikel yang sangat rapat atau berbentuk matrik padat yang mana fluida mengalir melaluinya. Apabila fluida mengisi semua celah diantara partikel-partikel tersebut, maka dikatakan media berpori jenuh dengan fluida. Misalnya di dalam bumi fluida menempati celah-celah atau pori-pori diantara batuan yang terhubung satu sama lain (medium berpori). Karena gaya gravitasi, fluida selalu mempunyai kecenderungan untuk bergerak kebawah. Akan tetapi apabila fluida tersebut kontak dengan suatu sumber panas maka akan terjadi perpindahan panas sehingga temperatur fluida menjadi lebih tinggi dan fluida menjadi lebih ringan. Keadaan ini

menyebabkan fluida yang lebih panas bergerak ke atas dan fluida yang lebih dingin bergerak turun ke bawah, sehingga terjadi sirkulasi air atau arus konveksi Fenomena tersebut dapat menghantarkan fluida menuju ke permukaan.

Banyak peneliti yang tertarik mempelajari perpindahan panas *free convection* pada media berpori yang jenuh dengan fluida karena fenomena ini terjadi dalam banyak aplikasi *engineering* seperti, sistem isolasi termal, sistem panas bumi, ekstrasi minyak dan banyak lagi. Tinjauan yang representatif dari aplikasi fenomena ini dan aplikasi transfer panas lainnya pada media berpori dapat ditemukan dalam buku-buku dari Vafai (*Handbook of Porous Media*, 2005, Nield dan Bejan (*Convection in Porous Media*, 2006) dan Ingham dan Pop (*Transport Phenomena in Porous Media*, 2002) yang berkontribusi memberi gambaran secara luas tentang perpindahan panas pada media berpori.

Suatu penelitian dapat dilakukan secara eksperimen di lapangan maupun secara analitis. Akan tetapi, penelitian secara eksperimen di lapangan membutuhkan biaya yang mahal dan proses yang cukup rumit. Oleh karena itu, dibutuhkan metode alternatif dalam mempelajari suatu fenomena atau permasalahan, salah satu metodenya adalah studi secara analitis.

Johnson dan Cheng mengemukakan kemungkinan solusi dari *free convection boundary layers* yang berdekatan dengan pelat datar pada media berpori baik untuk kasus *steady* maupun *unsteady*. Banyak upaya yang telah dilakukan untuk mencari solusi analitis dan numerik untuk kasus diidentifikasi oleh Johnson dan Cheng sejak jurnal mereka dipublikasikan. Salah satunya adalah solusi yang yang dikemukakan oleh Magyari, Pop dan Keller, dimana solusi yang dikemukakan bersesuaian dengan variasi eksponensial dan *power-law* dari temperatur permukaan.

Dalam tugas akhir ini ingin didapatkan solusi lain dari *unsteady free convection* pada media berpori secara analitis dan focus terhadap permasalahan yang dikaji oleh Magyari, Pop dan Keller untuk mengetahui perilaku fisis dari *unsteady free convection* pada media berpori.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah berdasarkan latar belakang diatas adalah bagaimana menentukan solusi analitis dari *unsteady free convection* pada media berpori

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah, tulisan ini bertujuan untuk mendeskripsikan solusi analitis dari *unsteady free convection* pada media berpori dengan menggunakan kaidah matematik dan menganalisis fenomena fisis yang terjadi

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan solusi persamaan eksplisit dari *unsteady free convection* pada media berpori secara analitis sehingga fenomena fisis yang terjadi dapat digambarkan

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam tugas akhir ini antara lain:

- Sistem yang dianalisis adalah *unsteady free convection* pada media berpori
- Kecepatan aliran sangat kecil sehingga konveksi fluida dan media berpori berada pada kesetimbangan termodinamik lokal
- Fluida dan media berpori homogen dan isotropik

- Tekanan dan temperatur sedemikian rupa sehingga cairan tetap berada dalam fase *liquid*
- Media berpori jenuh sepenuhnya.
- *Incompressible* flow
- Sistem menggunakan pemodelan 2 dimensi

BAB II
DASAR TEORI

2.1 *Free Convection*

Disebut juga konveksi alamiah (*natural convection*), terjadi karena fluida mengalir secara alamiah/tidak dipompa/tidak dihembus. Fluida dapat mengalir secara alamiah karena adanya perubahan sifat fisis (terutama rapat massanya) dan pengaruh dari gaya apung (*bouyancy force*). Hukum Newton untuk konveksi:

$$Q = h \,.\, A \,.\, (T_w - T_\infty) \tag{2.1}$$

dengan $(T_w > T_\infty)$

Aliran fluida pada perpindahan panas konveksi bebas terjadi secara alami karena gaya apung, sehingga hampir selalu berada pada kecepatan rendah ($\leq$ 1 m/s). Secara umum, koefisien perpindahan panas konveksi bebas bernilai lebih kecil dibandingkan koefisien perpindahan panas konveksi paksaan.
Nilai h pada perpindahan panas konveksi bebas dipengaruhi oleh sifat fisis fluida dan bentuk geometri benda. Penyelesaian umum pada persamaan perpindahan panas konveksi memunculkan suatu parameter berupa bilangan tak berdimensi yang disebut dengan bilangan Grashof (Gr)

$$Gr = \frac{g\beta(T_w > T_\infty)L^3}{v^2} \tag{2.2}$$

g = percepatan gravitasi $\left(\frac{m}{s^2}\right)$

β = koefisien ekspansi volum $\left(\frac{1}{T_f}, \frac{1}{K}\right)$

$T_f = \frac{(T_w - T_\infty)}{2}$

v = viskositas kinematika fluida $\left(\frac{m}{s^2}\right)$
T_w = suhu permukaan benda (K)
T_∞ = suhu fluida dari jarak tak hingga dari benda (K)
L = panjang karakteristik (m)

Selain bilangan Grashof (Gr), koefisien perpindahan panas pada konveksi bebas juga dipengaruhi oleh bilangan Prandtl

$$Pr = \frac{molecular\ diffucity\ of\ momentum}{molecular\ diffucity\ of\ heat} \qquad (2.3)$$

$$= \frac{v}{\alpha} = \frac{\mu\ .\ Cp}{k}$$

$$v = \frac{\mu}{\rho} = viskositas\ kinematis$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho\ .Cp} = difusitas\ termal$$

Sebagai catatan: sifat fisis fluida dievaluasi pada suhu lapisan film (Tf) dengan

$$T_f = \frac{(T_w - T_\infty)}{2} \qquad (2.4)$$

Koefisien perpindahan panas konveksi bebas rata-rata untuk berbagai situasi dapat didekati dengan persamaan empiris sebagai berikut:

$$Nu = \frac{hL}{k} = C(GrPr)^n = CRa^n \qquad (2.5)$$

dengan

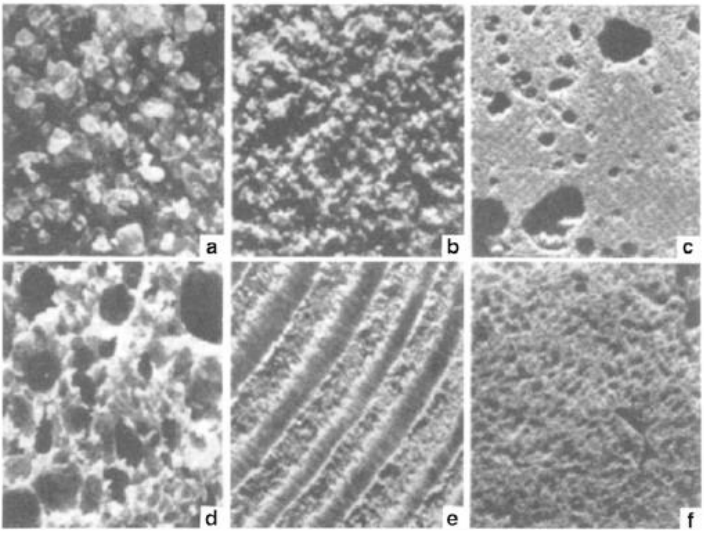
k : Konduktivitas termal fluida
L : Panjang karakteristik
Ra : Bilangan Rayleigh = GrPr

Nilai C dan n tergantung pada geometri dan daerah aliran yang dikarakterisasikan dalam bilangan Rayleigh (Cengel, 2015)

2.2 Media Berpori

Media berpori adalah materi yang terdiri dari matriks padat dengan ruang kosong yang saling berhubungan. Matriks padat dapat bersifat kaku atau dapat mengalami deformasi kecil. Ruang kosong (pori-pori) memungkinkan adanya aliran dari satu atau lebih cairan melalui materi. Dalam situasi yang paling sederhana yaitu aliran fase tunggal, pori jenuh dengan cairan. Pada aliran dua fase, cairan dan gas mengisi pori (Donald, 2013). Ruang yang kosong adalah fraksi dari volume aliran yang ditempati gas.

Dalam media berpori alami, distribusi pori terbentuk dengan ukuran yang tidak teratur. Contoh media berpori di alam pasir pantai, batu pasir, kapur, kayu, dan paru-paru manusia. Contoh media berpori buatan manusia adalah keramik, bahan komposit, dan busa logam tinggi porositas. Pada skala mikroskopis, properti aliran (kecepatan, tekanan, dll) akan tidak teratur. Tapi dalam eksperimen, properti aliran yang melintasi pori-pori diasumsikan seperti sifat aliran dalam skala makroskopik dengan propertinya berubah secara teratur dalam ruang dan waktu. Sehingga analisa secara teori memungkinkan (Donald, 2013).

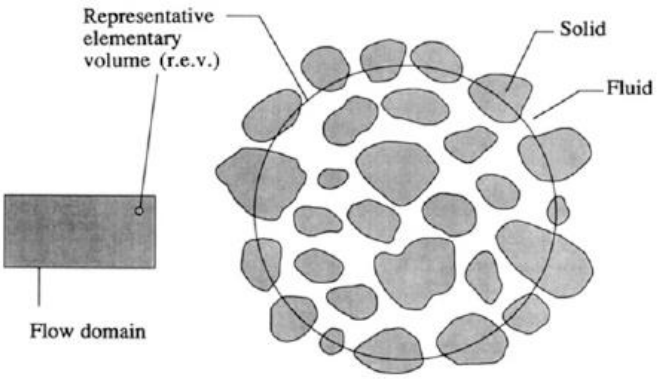


Gambar 2.1 Contoh media berpori (a) pasir pantai, (b) batu pasir, (c) kapur, (d) roti gandum, (e) kayu, dan (f) paru- paru manusia (Donald, 2013)

Bagaimana mangasumsikan aliran melalui struktur berpori adalah cara penyelesaian untuk mendekati struktur aliran sebenarnya (Bejan, 2004). Ketika jaraknya pendek, pengamat hanya melihat satu atau dua saluran, atau satu atau dua pori terbuka atau tertutup. Dalam hal ini, adalah mungkin untuk menggunakan mekanika fluida konvensional dan transfer panas konvektif untuk menggambarkan apa yang terjadi di setiap titik dari ruang fluid dan solid. Ketika jarak besarnya sehingga ada banyak saluran dan pori, kompleksitas dari jalur aliran mengesampingkan pendekatan konvensional. Dalam batas ini, volume rata-rata dan pengukuran secara menyeluruh misalnya, permeabilitas dan konduktivitas, berguna dalam menggambarkan aliran dan menyederhanakan deskripsi. Insinyur fokus lebih dalam pendekatan perancangan

penurunan skala pori, untuk menyelesaikan masalah diatas. Tantangan tidak hanya untuk menggambarkan struktur kasar berpori, tetapi juga untuk mengoptimalkan elemen aliran (Donald, 2013).

Cara biasa yakni menurunkan persamaan yang mengatur variabel makroskopik untuk mendapatkan persamaan standar fluida dengan volume rata-rata. Ada dua cara untuk melakukan parata-rataan yaitu spasial dan statistik. Dalam pendekatan spasial, sebuah variabel makroskopik didefinisikan sebagai rata-rata yang mewakili *repesentative elemetary* volume (r.e.v). Operasi ini menghasilkan nilai variabel yang pada pusat r.e.v. Hal mengasumsikan bahwa hasilnya adalah independen dari ukuran r.e.v. Panjang skala r.e.v. jauh lebih besar dari skala pori, tapi jauh lebih kecil dari skala aliran makroskopik (Gambar 2.2). Dalam pendekatan statistik, rata-rata dari kemungkinan struktur pori ekuivalen secara makroskopik. Kesulitannya adalah biasanya informasi statistik hanya didasarkan pada sampel tunggal, dan ini hanya mungkin jika homogenitas statistik (stasioneritas) diasumsikan. Jika fokus dengan menurunkan hubungan antara properti aliran terhadap jarak dan tidak mempedulikan fluktuasi yang terjadi, maka hasil yang diperoleh degan menggunakan dua pendekatan pada dasarnya sama (Donald, 2013).



Gambar 2.2 Ilustrasi elemen volume representatif (Donald, 2013)

2.2.1 Porositas

Porositas adalah ukuran dari ruang kosong di antara material, dan merupakan fraksi dari volume ruang kosong terhadap total volume, yang bernilai antara 0 dan 1, atau sebagai persentase antara 0-100%. Istilah ini digunakan di berbagai kajian ilmu seperti geologi, geofisika, farmasi, teknik manufaktur, ilmu tanah, metalurgi, dan sebagainya. Porositas bergantung pada jenis bahan, ukuran bahan, distribusi pori, sementasi, riwayat diagenetik, dan komposisinya. Porositas bebatuan umumnya berkurang dengan bertambahnya usia dan kedalaman. Namun hal yang berlawanan dapat terjadi yang biasanya dikarenakan riwayat temperatur bebatuan. Dalam aliran dua fase gas dan cairan, fraksi kekosongan didefinisikan sebagai fraksi dari volume aliran yang ditempati oleh gas (Donald, 2013). Porositas umumnya bervariasi dari satu lokasi ke lokasi lainnya dalam perpipaan dan berfluktuasi terhadap waktu. Pada aliran non-homogen, porositas terkait dengan laju aliran volumetrik dari fase gas dan cairan, dan terkait dengan kecepatan relatif antara dua fase (disebut dengan *slip ratio*).

Porositas dan permeabilitas erat kaitannya. Hubungan antara porositas dan permeabilitas ditunjukkan dalam persamaan berikut:

$$K = \frac{\phi^3 d_p^3}{a(1-\phi)^2} \tag{2.6}$$

dengan ϕ adalah porositas media berpori dan a adalah konstanta untuk parameterisasi geometri mikroskopis dari bahan berpori, sementara d adalah representasi yang mewakili panjang matriks padat (Ingham, 2002).

2.2.3 Permeabilitas

Permeabilitas (K) merupakan salah satu parameter medium yang berupa kemampuan medium untuk dapat meloloskan fluida. Satuan permeabilitas yang umum digunakan ialah Darcy. Aliran fluida dalam media berpori berdasarkan Hukum Darcy diturunkan secara empiris sebagai berikut (Peng, 2007):

$$Q_f = \frac{K.A.\Delta P}{\mu L} \tag{2.7}$$

dengan:
Qf = Laju alir fluida, cm3/sec
A = Luas penampang media berpori, cm2
μ = Viskositas fluida, cps
ΔP = P1 – P2 = Perbedaan tekanan, atm
L = Panjang media berpori, cm
K = Permeabilitas, Darcy

Pada umumnya seiring bertambahnya tingkat porositas pada suatu batuan maka akan diikuti dengan penambahan tingkat

permeabilitas batuan tersebut, meskipun anggapan ini tidak selalu benar. Jenis-jenis permeabilitas dibedakan menjadi (Peng, 2007):

a) Permeabilitas absolut, yakni kemampuan batuan untuk dapat meloloskan satu jenis fluida yang 100% jenuh
b) Permeabilitas efektif, yakni kemampuan batuan untuk dapat meloloskan satu macam fluida apabila terdapat dua macam fluida yang tidak bercampur satu sama lain. Permeabilitas efektif akan memiliki nilai yang lebih kecil dibandingkan permeabilitas absolut
c) Permeabilitas relatif, yakni perbandingan antara permeabilitas efektif dan absolut. Semakin besar saturasi air maka permeabilitas relatif air tersebut akan semakin besar. Sebaliknya permeabilitas relatif minyak akan mengecil hingga nol saat kondisi Sw = Swc (critical water saturation)

Faktor-faktor yang mempengaruhi permeabilitas antara lain:

a) Distribusi ukuran butir
   Pada suatu batuan, apabila ukuran butirnya semakin beragam, maka pori-pori batuan akan semakin kecil sehingga permeabilitas batuan juga akan semakin kecil
b) Susunan butiran
   Pada suatu batuan, apabila susunan butirannya semakin rapi, maka semakin besar pula nilai permeabilitasnya
c) Geometri butiran
   Pada suatu batuan, semakin menyudut geometri butiran, maka permeabilitasnya akan semakin kecil
d) Hubungan antar pori
   Semakin bagus hubungan antar pori pada batuan, maka permeabilitasnya akan semakin besar

e) Sementasi
   Semakin banyak kandungan semen dalam suatu batuan, maka nilai permeabilitas akan semakin kecil
f) Kandungan lempung
   Semakin banyak kandungan lempung pada suatu batuan, maka semakin kecil nilai permeabilitas batuan tersebut

Adapun Hubungan permeabilitas dengan porositas adalah, penambahan porositas akan diikuti dengan penambahan permeabilitas. Semakin tua dan rapat suatu batuan, maka porositas dan permeabilitasnya akan semakin kecil. Permeabilitas dipengaruhi oleh besar, bentuk dan hubungan antar butir dalam suatu batuan

2.3 *Flow* dan Perpindahan Panas pada Media Berpori

Secara tradisional, persamaan empiris Darcy telah diterapkan untuk *flow* melalui media berpori ketika bilangan Reynolds berdasarkan ukuran pori (atau diameter partikel, dp) sangat kecil. Untuk keadaan ini, persamaan momentum aliran fluida melewati media isotropik dirumuskan dengan (Ingham, 2002):

$$-\nabla P = \frac{\mu U}{K} \tag{2.8}$$

dimana P adalah tekanan pori, μ adalah viskositas fluida, dan U adalah kecepatan Darcy. Kecepatan Darcy didefinisikan sebagai kecepatan superfisial dengan menganggap media sebagai sebuah kontinum dan mengabaikan struktur dari pori tersebut.

Perpindahan panas dalam media berpori telah diteliti selama lebih dari satu abad. Masalah yang paling sederhana dalam transfer panas dalam media berpori adalah konduksi murni ketika cairan dakam keadaan tidak bergerak (stagnan). Dengan asumsi

keseimbangan termal lokal antara cairan dan fase padat, *mixture model* digunakan secara tradisional untuk konduksi panas di media berpori. Dengan suhu padatan dan cairan diasumsikan sama secara lokal dan panas persamaan konduksi rata-rata selama fase padat dan cairan dirumuskan ke dalam *mixture model* berikut, (Vafai, 2000)

$$(\rho C_p)_m \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla.[k_{st} \nabla \mathrm{T}] \tag{2.9}$$

di mana T adalah suhu rata-rata dan k_{st} adalah *effective stagnant thermal conductivity.* Dalam persamaan kapasitas panas yang efektif dari solid-cairan campuran, $(\rho c_p)_m$, didefinisikan sebagai (Vafai, 2000)

$$(\rho C_p)_m = \phi \rho C_f + (1 - \phi)\rho_s C_s \tag{2.10}$$

dimana ρc_p dan $\rho_s c_{ps}$ adalah kapasitas panas dari fluida dan solid, masing-masing, dengan ρ dan ρ_s adalah densitas

2.4 Persamaan Dasar untuk *Unsteady Free Convection* pada Media Berpori (Magyari, 2004)

Berdasarkan *vertical impermeable flat plate adjacent to a fluid-saturated porous medium of constant ambient temperature*, *plate* dapat diasumsikan non-isotermal. Johnson dan Cheng menulis kontinuitas dasar, momentum Darcy dan persamaan energi untuk penyelesaian masalah *free convection* di *boundary layer* dan pendekatan Boussinesq dalam bentuk dimensional

$$u_X + v_Y = 0, \quad u_Y = \frac{g\beta K}{v} T_y,$$
$$\sigma T_\tau + uT_X + vT_Y = \alpha T_{YY} \tag{2.11}$$

X dan Y adalah koordinat Cartesian pada *plate*, τ adalah variabel waktu, u dan ν adalah komponen kecepatan sepanjang X dan Y - axis, T adalah temperatur fluida (dianggap berada dalam kesetimbangan termal dengan kerangka padat), K adalah permeabilitas media berpori, g adalah percepatan gravitasi, α, β, υ = μ / ρ adalah difusivitas termal efektif, koefisien ekspansi termal, viskositas kinematik dan $\sigma = (\rho Cp)_m / (\rho Cp)_f$, rasio kapasitas media berpori (m) dan cairan (f). X, Y, τ menunjukkan derivatif parsial terhadap variabel-variabel ini.

2.5 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial (PD) adalah persamaan yang melibatkan variabel-variabel tak bebas dan derivatif-derivatifnya terhadap variabel-variabel bebas. Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial (Sigit, 2012):

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6x \frac{dy}{dx} + 10y = 0 \tag{2.12}$$

$$y' = e^x + \sin(x) \tag{2.13}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} - 3\frac{dQ}{dt} + 10Q = 4\sin(2t) \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{2.15}$$

PD dibagi dalam dua kelas yaitu biasa dan parsial. PD biasa (*ordinary differential equation*) adalah suatu PD yang melibatkan hanya satu variabel bebas. Jika diambil $y(x)$ sebagai suatu fungsi satu variabel, dengan x dinamakan variabel bebas dan y dinamakan variabel tak bebas, maka suatu PD biasa (PDB) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$F(x, y, y', y'', y^n) = 0 \tag{2.16}$$

PD parsial (PDP) adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan dua atau lebih variabel bebas. Jadi persamaan (2.12), (2.13), (2.14) adalah PDB sedangkan (2.15) adalah PDP.

Orde dari suatu PD ditentukan oleh turunan tertinggi dalam persamaan tersebut, contoh:

$x\frac{dy}{dx} - y^2$	adalah PDB orde satu
$xy\frac{d^2y}{dx^2} - y^2 \sin x$	adalah PDB orde dua
$\frac{d^3y}{dx^3} - \mathrm{y}\frac{dy}{dx} + e^{4x}$	adalah PDB orde tiga

2.6 ODE Linear Persamaan Bernoulli

ODE linier atau ODE yang dapat diubah ke bentuk linear adalah model dari berbagai fenomena, misalnya, dalam fisika, biologi, dinamika populasi, dan ekologi, seperti yang kita akan lihat, Sebuah ODE orde pertama dikatakan linear jika memiliki bentuk seperti berikut (Kreyzig, 1999):

$$y' + p(x)y = r(x) \tag{2.17}$$

Persamaan ODE linear persamaan (2.17) diatas menjelaskan bahwa kedua fungsi y dan turunannya $y' = dy/dx$ adalah linear, dimana p dan r dalam fungsi x. Jika dalam aplikasinya variabel independennya adalah waktu, kita menulis t bukan x.

Jika kondisi pertama adalah $f(x)y'$ (bukan y'), bagikan persamaan dengan $f(x)$ untuk mendapatkan bentuk standar persamaan (2.17), dengan y' sebagai kondisi yang pertama, yang lebih praktis.

Misalnya,$y' \cos x + y \sin x = x$ adalah ODE linear, dan itu merupakan bentuk standar dari $y' + y \tan x = x \sec x$.

Fungsi $r(x)$ di sebelah kanan menjadi gaya, dan solusi perpindahan $y(x)$ dari gerakan atau arus listrik atau bentuk fisika lainnya. Dalam Keteknikan, $r(x)$ sering disebut input, dan $y(x)$ disebut output atau respon terhadap input (dan, jika diketahui, dengan kondisi awal).

ODE Linear Homogen. Kita akan memecahkan persamaan (2.17) pada selang $a < x < b$,sebut saja J, dan kita mulai dengan kasus khusus sederhana yang $r(x)$ sama dengan nol untuk semua x di J. (atau ditulis $r(x) \equiv 0$). Lalu ODE persamaan (2.12) menjadi

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2.18}$$

dan disebut homogen. Dengan memisahkan variabel dan mengintegralkan kita akan memperolehkan

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\, dx \tag{2.19}$$

dimana $\ln|y| = -\int p(x)\,dx + c^*$ (2.20)

Dengan mengeksponenkan kedua sisi, kita memperoleh solusi umum dari ODE homogen pada persamaan 2.18,

$$y(x) = ce^{-\int p(x)\,dx} \quad (2.21)$$

dimana $c = \pm e^{c^*}$ (ketika) $y \neq 0$ (2.22)

dari sini kita juga dapat memilih dan mendapatkan solusi biasa untuk semua x dalam selang tersebut.

ODE Linear non Homogen. Kita telah memecahkan persamaan (2.17) dalam kasus $r(x)$ di persamaan (2.17) dengan pertimbangan tidak selalu nol dalam interval J. Kemudian ODE persamaan (2.17) disebut non homogen. Ternyata bahwa dalam kasus ini, persamaan (2.17) memiliki memiliki faktor integrasi yang tergantung hanya pada x. Kita kalikan persamaan(2.17) dengan F (x), diperoleh

$$Fy' + pFy = rF \quad (2.23)$$

Sebelah kiri merupakan turunan $(Fy)' = F'y + Fy'$ dari Fy jika

$pFy = F'y$, dimana $pF = F'$ (2.24)

Dengan memisahkan variabel $\frac{dF}{F} = p\,dx$, dengan di integrasikan, maka dapat dituliskan $h = \int p\,dx$

ln F $= h = \int p\,dx$ dimana $F = e^h$ (2.25)

dengan F ini dan h'=p, persamaan (2.23) menjadi

$$e^h y' + h' e^h y = e^h y' + \left(e^h\right)' y = \left(e^h y\right)' = r e^h \tag{2.26}$$

dengan mengintegrasikan

$$e^h y' = \int e^h r dx + c \tag{2.27}$$

Dibagi dengan e^h, kita memperoleh solusi persamaan yang diinginkan

$$y(x) = e^{-h}(\int e^h r dx + c) \tag{2.28}$$

$$h = \int p(x) dx \tag{2.29}$$

Hal ini mempermudah penyederhanaan persamaan (2.17) untuk mengevaluasi integral yang umum ke bentuk sederhana. Untuk ODE yang rumit, harus menggunakan metode numerik untuk integral (Kreyzig, 1999).

Struktur dari persamaan (2.30) menjadi lebih sederhana. Nilai c ditentukan dari kondisi awal.

$$y(x) = e^{-h}(\int e^h r dx) + c\, e^{-k} \tag{2.30}$$

2.6.1 Penyederhanaan bentuk Linear Persamaan Bernoulli

Banyak aplikasi dapat dimodelkan oleh ODE yang nonlinear tetapi dapat diubah ke bentuk ODE linier. Salah satu yang paling berguna adalah persamaan Bernoulli (Kreyzig, 1999).

$$y' + p(x)y = g(x)y^a \tag{2.31}$$

Dimana a adalah bilangan real. Jika a = 0 atau a = 1 pada persamaan (2.31), maka persamaan tersebut adalah linear. Selain itu adalah non Linear. Kemudian terbentuk

$$u(x) = [y(x)]^{1-a} \tag{2.32}$$

Kita turunkan dan substitusi y' dari persamaan (2.31), maka diperoleh

$$u' = (1-a)y^{-a}y' = (1-a)y^{-a}(gy^a - py) \tag{2.33}$$

penyederhanaan diperoleh

$$u' = (1-a)(g - py^{1-a}) \tag{2.34}$$

dimana y^{1-a} = u di sebelah kanan, sehingga kita mendapatkan ODE linear.

$$u' + (1-a)pu = (1-a)g \tag{2.35}$$

2.7 Deret Taylor (Milton, 1970)

Dalam matematika, deret Taylor adalah representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret ini dapat dianggap sebagai limit polinomial Taylor. Deret Taylor mendapat nama dari matematikawan Inggris Brook Taylor. Bila deret tersebut terpusat di titik nol, deret tersebut dinamakan sebagai deret Maclaurin, dari nama matematikawan Skotlandia Colin Maclaurin.

Deret Taylor dari sebuah fungsi riil atau fungsi kompleks $f(x)$ yang terdiferensialkan takhingga dalam sebuah persekitaran sebuah bilangan riil atau kompleks a adalah deret pangkat.

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^3$$

yang dalam bentuk lebih ringkas dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{2.36}$$

dengan $n!$ melambangkan faktorial n dan $f^{(n)}(a)$ melambangkan nilai dari turunan ke-$n$dari f pada titik a. Turunan kenol dari f didefinisikan sebagai f itu sendiri, dan $(x - a)^0$dan 0! didefinisikan sebagai 1.

Dalam kasus khusus di mana $a = 0$, deret ini disebut juga sebagai Deret Maclaurin.

Dalam kalkulus, teorema Taylor memberikan barisan pendekatan sebuah fungsi yang diferensiabel pada sebuah titik menggunakan suku banyak (polinomial). Koefisien polinomial tersebut hanya tergantung pada turunan fungsi pada titik yang bersangkutan. Teorema ini juga memberikan estimasi besarnya galat dari pendekatan itu. Teorema ini mendapat nama dari matematikawan Brook Taylor, yang menyatakannya pada tahun 1712, meskipun hasilnya sudah ditemukan pertama kali tahun 1671 oleh James Gregory.

Teorema Taylor menyatakan sembarang fungsi mulus dapat dihampiri dengan polinomial. Contoh sederhana penerapan teorema Taylor adalah hampiran fungsi eksponensial *ex* di dekat $x = 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \tag{2.37}$$

Hampiran ini dinamakan hampiran Taylor orde ke-*n'* terhadap *ex* karena menghampiri nilai fungsi eksponensial menggunakan polinomial derajat *n*. Hampiran ini hanya berlaku untuk *x* mendekati nol, dan bila *x* bergerak menjauhi nol, hampiran ini menjadi semakin buruk. Kualitas hampiran dinyatakan oleh suku sisa:

$$R_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \tag{2.38}$$

Lebih umum lagi, teorema Taylor berlaku untuk setiap fungsi yang dapat diturunkan *f*, dengan hampiran untuk *x* di dekat titik *a*, dalam bentuk:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^3 \tag{2.39}$$

Suku sisa adalah perbedaan antara fungsi dan polinomial hampirannya:

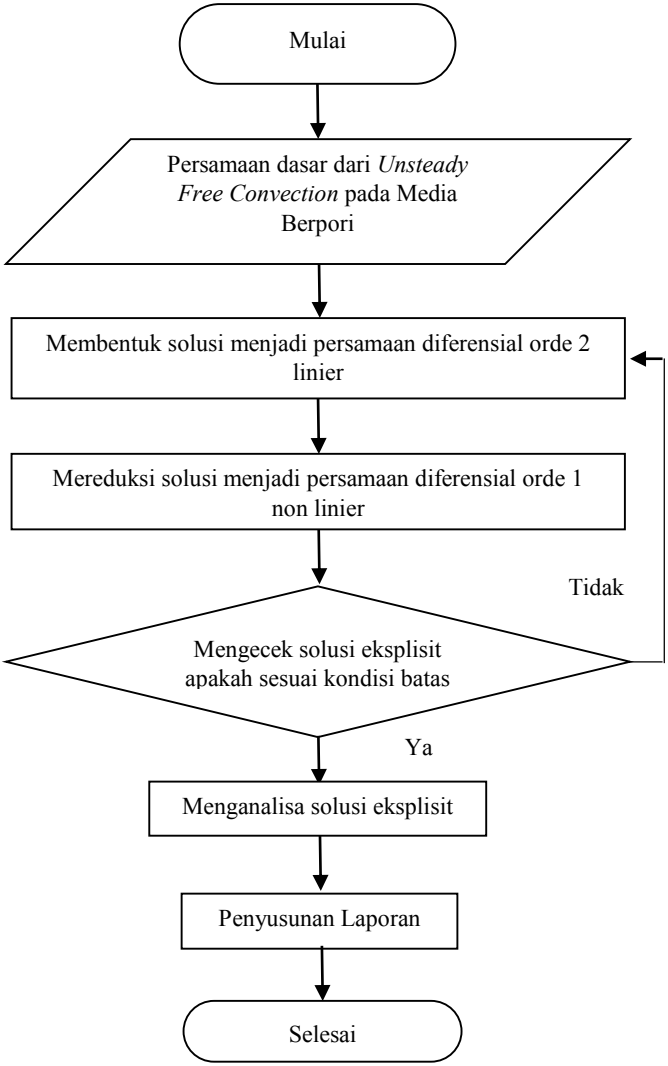
$$R_n(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^3\right) \tag{2.40}$$

Meskipun rumus eksplisit untuk suku sisa ini jarang digunakan, teorema Taylor juga memberikan estimasi nilai sisanya. Dengan kata lain, untuk x cukup dekat terhadap a, suku sisa haruslah cukup *kecil*. Teorema Taylor memberikan informasi persis seberapa kecil suku sisa tersebut.

"***Halaman ini sengaja dikosongkan***"

BAB III
METODOLOGI

3.1 Diagram Alir Penelitian



Gambar 3.1 *Flowchart* Metodologi Penelitian

Sebelum memulai penelitian dilakukan studi literatur tentang *free convection* pada media berpori. Penelitian sebelumnya mengemukakan solusi penyelesaian untuk *free convection* pada media berpori untuk keadaan *steady* dan *unsteady* dengan sudut plat vertikal, horizontal, dan *inclined* (Johnson1978).
Kajian tentang *unsteady free convection* pada media berpori secara analitis dimulai dengan menentukan persamaan dasar. Persamaan dasar disederhanakan sesuai kajian analisa, Kajian ini diselesaikan dengan beberapa kondisi batas

Persamaan dasar yang sudah diberi kondisi batas akan menjadi persamaan diferensial orde dua. Persamaan ini akan dipisahkan menjadi fungsi terhadap t dan fungsi terhadap y. Dalam penelitian ini domain y diubah menjadi domain n, dimana n=f(y,t). Kedua fungsi ini akan diselesaikan dengan metode diferensial sederhana.

Persamaan diferensial orde dua akan direduksi menjadi persamaan diferensial orde satu non linier. Bentuk persamaan diferensial orde satu non linier dapat ditransformasi menjadi bentuk persamaan diferensial orde satu linier jika memenuhi bentuk persamaan Bernoulli Setelah solusi penyelesaian didapatkan, dibuat grafik untuk setiap parameter dari persamaan akan disesuaikan sehingga memenuhi kondisi batas. Jika tidak dapat memenuhi kondisi batas berarti penurunan persamaannya salah. Grafik dibuat dengan menggunakan *software* matlab.

Grafik akan memudahkan untuk menentukan sifat dari parameter. Penentuan ini didasarkan pada kondisi batas yang sudah ditetapkan sebelumnya. Solusi persamaan ini akan dianalisa untuk mengetahui perilaku fisis dari permasalahan yang dikaji.

3.2 Persamaan Dasar

Persamaan dasar pada analisa *unsteady free convection* pada media berpori didapatkan dari persamaan kontinuitas, konservasi momentum, dan ketimbangan energi.

$$u_X + v_Y = 0 \tag{3.1}$$

$$u_Y = \frac{g\beta K}{v} T_y \tag{3.2}$$

$$\sigma T_\tau + uT_X + vT_Y = \alpha T_{YY} \tag{3.3}$$

X dan Y adalah koordinat kartesian, τ adalah variabel waktu, u dan ν adalah komponen kecepatan sepanjang X dan Y -axis, T adalah temperatur fluida (dianggap berada dalam kesetimbangan termal dengan kerangka padat), K adalah permeabilitas media berpori, g adalah percepatan gravitasi, α adalah difusivitas termal efektif, β adalah koefisien ekspansi termal, υ = μ / ρ adalah viskositas kinematik dan $\sigma = (\rho Cp)_m / (\rho Cp)_f$, adalah rasio kapasitas media berpori (m) dan cairan (f).

Bentuk dimensional dari fungsi aliran Ψ didefinisikan, dan identik dengan persamaan kontinuitas

$$u = \Psi_Y \qquad\qquad v = -\Psi_X \tag{3.4}$$

Persamaan dasar di atas ditulis ke dalam bentuk variabel tak berdimensi. Variabel tak berdimensi didefinisikan sebagai berikut,

$$x = \frac{X}{L} \qquad y = \frac{Y}{L} \qquad t = \frac{\alpha\tau}{\sigma L^2} \tag{3.5}$$

$$\psi = \frac{1}{\alpha}\Psi \qquad\qquad \Theta = \frac{g\beta KL(T - T_\infty)}{v\alpha} \tag{3.6}$$

Dimana L adalah panjang karakteristik. Dengan mensubstitusi variabel tak berdimensi ke persamaan konservasi momentum, dan ketimbangan energi, dihasilkan bentuk persamaan tak berdimensi

$$\psi_{yy} = \Theta_y \tag{3.7}$$

$$\Theta_t + \psi_y\Theta_x + \psi_x\Theta_{y=}\Theta_{yy} \tag{3.8}$$

Yang menjadi topik utama pembahasan kali ini adalah eksistensi dari sebuah solusi persamaan dengan mengikuti kondisi batas sebagai berikut :

$$\begin{array}{lll} \psi_x = 0 & \Theta = \Theta_w(x,t) & \text{pada } y = 0 \\ \psi_y = 0 & \Theta = \Theta_\infty(x,t) & \text{pada } y = \infty \end{array} \tag{3.9}$$

Sehingga persamaan ketimbangan energi non-dimensional di atas menjadi :

$$\Theta_t = \Theta_{yy} \tag{3.10}$$

Dengan kondisi batas

$$\begin{array}{cc} \Theta = \Theta_w(t) & \text{pada } y = 0 \\ \Theta \to 0 & \text{ketika } y = \infty \end{array} \tag{3.11}$$

Surface temperatur didefinisikan sebagai $\Theta_w(t)$ diasumsikan positif untuk setiap $t \geq 0$

3.3 Solusi Persamaan Diferensial Orde Dua

Persamaan (3.10) dapat dianalisis dengan menggunakan kaidah matematik untuk menemukan solusi penyelesaian eksplisit yang dapat memenuhi kondisi batas. Solusi eksplisit dari persamaan (3.10) dapat diturunkan dengan terlebih dahulu memisahkan setiap fungsi seperti berikut:

$$\Theta\,(t,n) = K(t)\,.\,L(n) \tag{3.12}$$

K(t) adalah fungsi terhadap waktu dan L(n) adalah fungsi terhadap n, dimana n didefinisikan

$$n = \frac{y}{2\sqrt{t + t_0}} \tag{3.13}$$

Dengan metode *derivative* sederhana persamaan (3.10) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\Theta_t = K_t L + K L_t = K_t L + K L_n \frac{\partial n}{\partial t} \tag{3.14}$$

$$\Theta_{yy} = K L_{yy}$$

$$= K \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial n}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial n}\right)$$

$$= K\frac{\partial^2 n}{\partial y}L_n + K\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2 L_{nn} \tag{3.15}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.14) dan (3.15) ke persamaan (3.10), maka didapatkan bentuk sebagai berikut

$$K_t L + KL_n\frac{\partial n}{\partial t} = K\frac{\partial^2 n}{\partial y}L_n + K\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2 L_{nn} \tag{3.16}$$

n diturunkan terhadap t dan y sehingga didapatkan hasil bentuk

$$K_t L - KL_n\frac{y}{4}(t-t_0)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}(t-t_0)^{-1}\,K\,L_{nn} \tag{3.17}$$

Kemudian persamaan di atas dibagi dengan KL

$$\frac{K_t}{K} - \frac{L_n}{L}\frac{y}{4}(t-t_0)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}(t-t_0)^{-1}\,\frac{L_{nn}}{L} \tag{3.18}$$

Ruas kiri dan kanan dikali 4 $(t-t_0)$

$$\frac{L_{nn}}{L} = 4(t-t_0)\frac{K_t}{K} - y\,(t-t_0)^{-\frac{1}{2}}\frac{L_n}{L} \tag{3.19}$$

$$\frac{L_{nn}}{L} + y\,(t-t_0)^{-\frac{1}{2}}\frac{L_n}{L} - 4(t-t_0)\frac{K_t}{K} = 0 \tag{3.20}$$

Persamaan di atas akan dibentuk menjadi persamaan diferensial orde dengan mendefinisikan

$4(t-t_0)\frac{K_t}{K} = 4m$ dan $y\,(t-t_0)^{-\frac{1}{2}} = 2n$

Dari defenisi di atas maka K fungsi t dari persamaan (3.12) dapat diperoleh

$$4\frac{K_t}{K} = \frac{4m}{(t - t_0)} \tag{3.21}$$

$$\int \frac{1}{K} K_t = \int \frac{m}{(t - t_0)} \tag{3.22}$$

$$\ln K = m \ln(t - t_0) \tag{3.23}$$

$$K(t) = \Theta_0 (t - t_0)^m \tag{3.24}$$

Dimana Θ_0 ditententukan positif konstan. Dalam hal ini ketika n = 0, K(t) adalah *surface* temperatur. persamaan (3.20) dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{L_{nn}}{L} + 2n\frac{L_n}{L} - 4m = 0 \tag{3.25}$$

Persamaan di atas dikali dengan L

$$L_{nn} + 2nL_n - 4mL = 0 \tag{3.26}$$

Persamaan (3.26) merupakan solusi yang bentuknya persamaan diferensial orde dua.

3.4 Solusi Persamaan Diferensial Orde Satu

Untuk mempermudah penyelesaian agar solusi eksplosit dari *unsteady free convection* pada media berpori deketahui persamaan (3.26) direduksi menjadi persamaan diferensial orde satu dengan memisalkan

$$L = e^{\int \theta \, dn} \tag{3.27}$$

$$L_n = \theta e^{\int \theta \, dn} \tag{3.28}$$

$$L_{nn} = \theta_n e^{\int \theta \, dn} + \theta^2 e^{\int \theta \, dn} \tag{3.29}$$

Persamaan (3.27), persamaan (3.28) dan persamaan (3.29) disubstitusikan ke persamaan (3.26) sehingga menjadi bentuk berikut :

$$\theta_n e^{\int \theta \, dn} + \theta^2 e^{\int \theta \, dn} + 2n\theta e^{\int \theta \, dn} - 4me^{\int \theta \, dn} = 0 \tag{3.30}$$

Persamaan (3.30) dibagi dengan $e^{\int \theta \, dn}$, sehingga menjadi bentuk seperti berikut

$$\theta_n + \theta^2 + 2n\theta - 4m = 0 \tag{3.31}$$

Persamaan (3.31) merupakan persamaan diferensial orde satu nonlinier. Persamaan diferensial orde satu tersabut dapat ditransformasi menjadi persamaan difrensial orde satu linier untuk mempermudah penyelesaian. Agar dapat ditransformasi persamaan (3.31) harus memenuhi bentuk persamaan Bernoulli (Kreyzig, 1999). Dimisalkan 4m= $\gamma\theta$ supaya persamaan (3.31) memenuhi bentuk persamaan Bernoulli

$$\theta_n + \theta^2 + 2n\theta - \gamma\theta = 0 \tag{3.32}$$

Persamaan (3.32) dibentuk menjadi persis sama dengan bentuk persamaan Bernoulli (Kreyzig, 1999)

$$\theta_n = -\theta^2 + (\gamma - 2n)\theta \tag{3.33}$$

Persamaan diferensial orde satu non linier di atas dapat ditransformasi menjadi persamaan diferensial orde satu linier karena memenuhi bentuk persamaan Bernoulli

$$\theta = \frac{4m}{\gamma} = \frac{e^{\int(\gamma-2n)\,dn}}{\int e^{\int(\gamma-2n)dn}dn} \tag{3.34}$$

dimisalkan :

$$\int e^{\int(\gamma-2n)dn}dn = D \tag{3.35}$$

sehingga :

$$e^{\int(\gamma-2n)\,dn} = D_n \tag{3.36}$$

Atau dapat juga ditulis :

$$D = \int e^{\int(\gamma-2n)dn}dn = e^{\int\frac{4m}{\gamma}\,dn} \tag{3.37}$$

dimisalkan

$$\gamma = \frac{A}{B}$$

dengan mensubstitusi persamaan (3.36) dan (3.37) ke persamaan (3.34) didapatkan persamaan

$$Ae^{\int\left(\frac{A}{B}-2n\right)dn} = 4mBe^{\int\frac{4mA}{B}dn} = G \tag{3.38}$$

dengan A dan B :

$$A = \frac{Ge^{\int(2n)\,dn}}{\int\frac{G}{B}e^{\int(2n)\,dn}dn}, dan\ B = \frac{G}{4m\int\frac{G}{A}dn} \tag{3.39}$$

γ dapat ditulis menjadi :

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{4m\ e^{\int(2n)\,dn}\int\frac{G}{A}dn}{\int\frac{G}{B}e^{\int(2n)\,dn}dn} \tag{3.40}$$

dimisalkan $A = Ge^{\int(2n)\,dn}$

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{4m\ e^{\int(2n)\,dn}\int e^{-\int(2n)\,dn}dn}{\int\frac{A}{B}dn} \tag{3.41}$$

Sehingga γ menjadi bentuk

$$\gamma = \frac{A}{B} = \left\{\left[C2\int(4m\ e^{\int(2n)\,dn}\int e^{-\int(2n)\,dn}dn)\,dn\right]^{\frac{1}{2}}\right\}_n \tag{3.42}$$

Dengan menggunakan fungsi ekspansi $e^{\int(2n)\,dn}\int e^{-\int(2n)\,dn}dn$ dapat diubah ke dalam bentuk deret.

$$e^{\int(2n)\,dn}\int e^{-\int(2n)\,dn}dn = n^2 + \frac{2n^3}{1\times3} + \frac{2^2n^5}{1\times3\times5} + \dots$$

Untuk menyelesaikan persamaan ini kita menggunakan

$$e^{\int(2n)\,dn}\int e^{-\int(2n)\,dn}dn)\,dn = n^2 \tag{3.43}$$

Persamaan (3.42) dapat diselesaikan dengan mensubstitusi persamaan (3.43) ke persamaan (3.42)

$$\gamma = \frac{A}{B} = \frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{C2\,m\,n} \tag{3.44}$$

Persamaan (3.42) disubstitusi ke persamaan (3.34) akan didapatkan bentuk umum dari θ

$$\theta = \frac{4m}{\gamma} = \frac{4m}{\frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{C2\,m\,n}} \tag{3.35}$$

Persamaan (3.35) disubstitusi ke persamaan (3.27), sehingga terbentuk

$$L = e^{\int\frac{4m}{\frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{C2\,m\,n}}dn} \tag{3.36}$$

$$L(n) = e^{\frac{8\sqrt{3}\,m\,n^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{m\,C2}}} \tag{3.37}$$

Sehingga didapatkan solusi persamaan (3.12) dengan mensubstitusi persamaan (3.24) dan (3.37) ke persamaan (3.12)

$$\Theta\,(n,t) = \Theta_0(t - t_0)^m e^{\frac{8\sqrt{3}\,m\,n^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{m\,C2}}} \tag{3.38}$$

Persamaan (3.38) merupakan persamaan eksplisit dari *unsteady free convection* pada media berpori.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Persamaan Eksplisit dengan Kondisi Batas

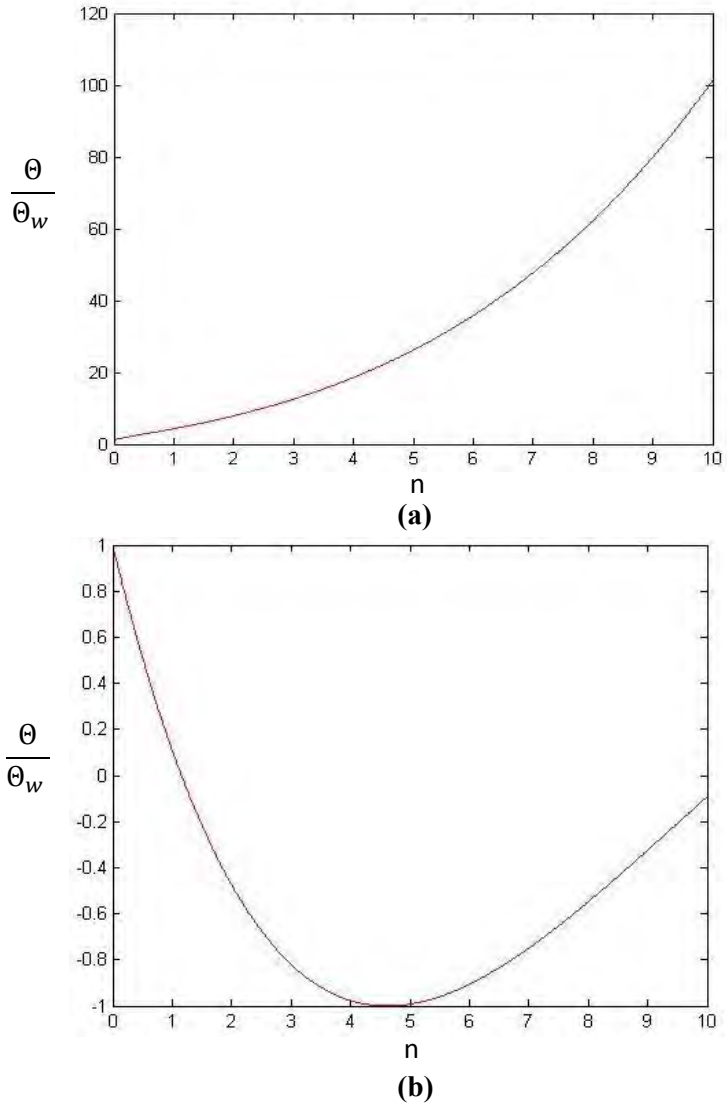
Analisis secara analitis dengan menggunakan metode matematik menghasilkan persamaan (3.38) yang merupakan persamaan eksplisit dari *unsteady free convection pada media berpori*. Namun persamaan eksplisit tersebut belum tentu memenuhi kondisi batas yang ditinjau. Tujuan dari investigasi ini adalah membentuk solusi penyelesaian dari kondisi batas yang ada. Untuk menjawab hal tersebut parameter m dan C2 perlu divariasikan agar solusi penyelesaian dari persamaan eksplisit *unsteady free convection pada media berpori* dapat diketahui.

Besar nilai Θ pada persamaan (3.38) tergantung pada nilai t dan n dan persamaan (3.38) akan merepresentasikan temperatur permukaan pelat ketika n = 0. Dalam hal ini temperatur permukaan pelat ditulis sebagai Θ_w (*temperature wall*). Jika Θ/Θ_w dibandingkan, maka kondisi batas pada persamaan (3.11) yang sudah diatur sebelumnya akan berubah menjadi

$$\frac{\Theta}{\Theta_w} = 1 \qquad \text{pada } n = 0$$

$$\Theta \to 0 \qquad \text{ketika } n = \infty$$

sehingga nilai distribusi temperatur hanya tergantung terhadap fungsi n. Parameter m akan divariasikan dengan nilai m>0 atau m<0, dan variasi konstanta C2 dengan nilai C2>0 atau C2<0 maka didapat hasil seperti tampak pad gambar 4.1 dan 4.2.

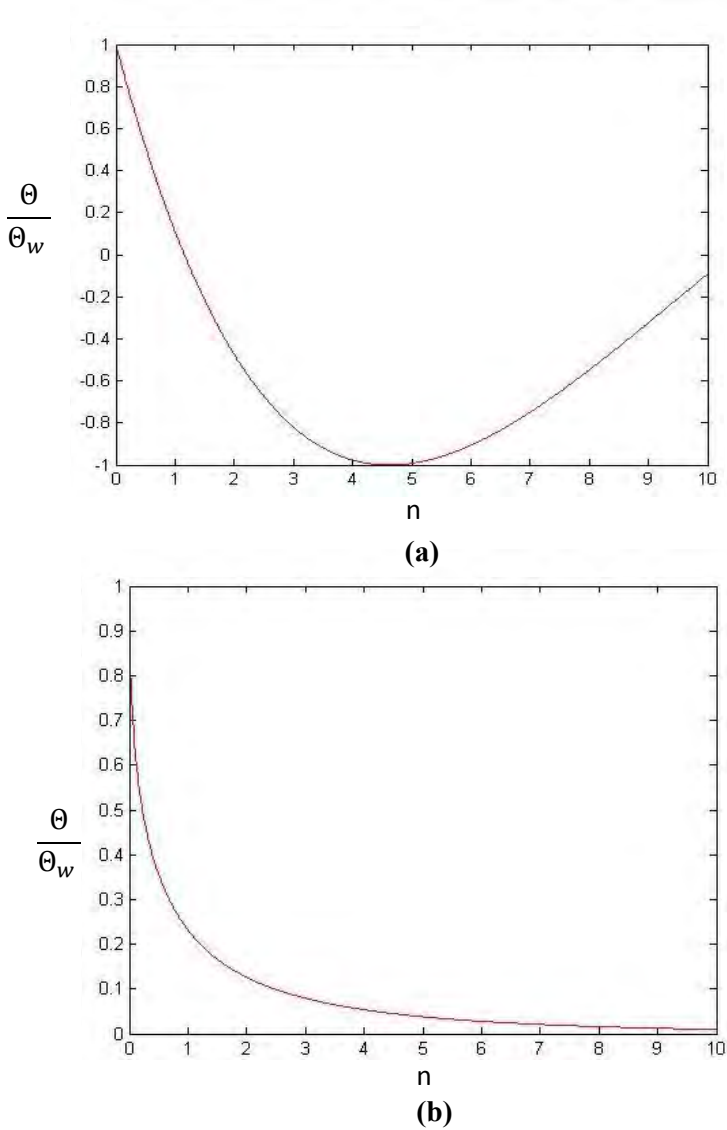


Gambar 4.1 Profil temperatur media berpori saat**(a)** m>0 dan C2>0 **(b)** m>0 dan C2<0

Seperti yang terlihat pada gambar, profil temperature untuk variasi C2>0 (gambar 4.1(a)) asimtotik terhadap n=c sementara pada kondisi batas seharusnya asimtotik terhadap Θ=0. Profil temperature untuk variasi C2<0 (gambar4.1(b)) tidak asimtotik baik terhadap Θ maupun terhadap n. Profil Kedua profil temperature menunjukkan bahwa kedua variasi tidak dapat menjadi solusi penyelesaian karena tidak memenuhi kondisi batas yang ditinjau.

Profil temperature dengan variasi m<0 dan C2>0 (gambar 4.2(a)) sama dengan variasi m>0 dan C2<0 (gambar 4.1(b)), yaitu tidak asimtotik baik terhadap Θ maupun terhadap n sementara pada kondisi batas seharusnya asimtotik pada Θ.

Profil temperature untuk variasi m<0 dan C2<0 asimtotik terhadap Θ dimana nilai Θ akan menuju 0 pada n=∞ sehingga dari grafik diatas dapat diambil kesimpulan bahwa persamaan (3.38) akan memenuhi kondisi batas yang ditinjau jika m < 0 dan C2 < 0 (Gambar 4.2(b)).



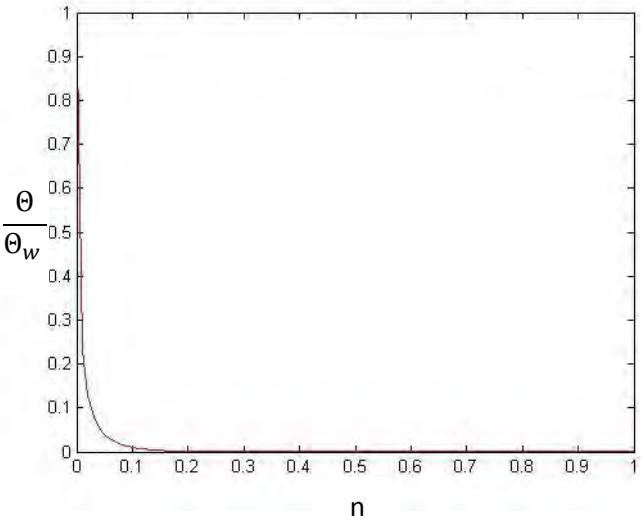
Gambar 4.2 Profil temperatur pada media berpori saat **(a)** m<0 dan C2>0 **(b)** m<0 dan C2<0

4.2 Daerah Konduksi

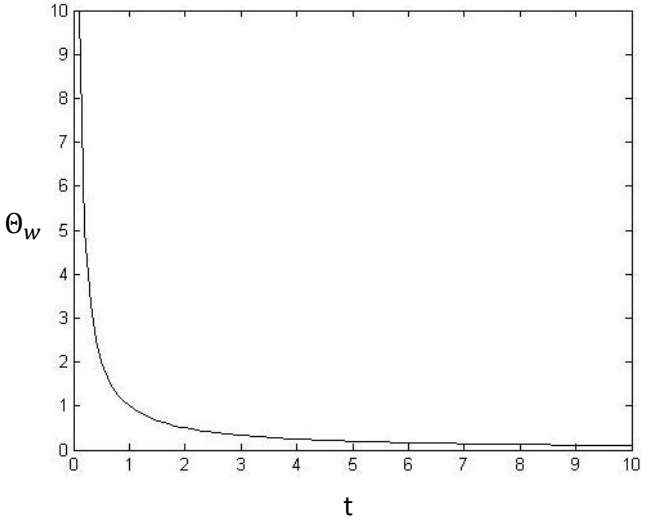
Solusi asimtotik berlaku selama interval waktu yang singkat setelah dimulainya *free convection* (Menold, 1962). Pada waktu yang sangat singkat ini, jika dibandingkan dengan *viscous* dan difusi panas, efek konveksi dapat diabaikan (Magyari, 2004). Karena alasan ini perpindahan panas dan aliran sering disebut daerah konduksi.

Persamaan (3.38) dapat digunakan untuk mengestimasi daerah konduksi pada *free convection*. Besarnya nilai Θ pada persamaan (3.38) tergantung pada besarnya nilai t dan n. Ketika n = 0 persamaan (3.38) menjadi Θ_w (*surface* temperature). Θ_w merupakan temperature pada permukaan pelat vertikal yang menjadi sumber panas. Sementara itu n merupakan fungsi yang besarnya tergantung pada nilai y dan t. Jika Θ/Θ_w dibandingkan, persamaan (3.38) hanya terganutng pada besarnya nilai n. Jadi, Θ_w dapat digunakan untuk estimasi berapa lama *unsteady free convection* terjadi, sementara Θ/Θ_w dapat digunakan untuk mengestimasi seberapa tebal daerah konduksi.

Estimasi daerah konduksi dilakukan pada variasi nilai m=-1 dan m=-2 menggunakan persamaan (3.24) dan persamaan 4.29. Persamaan (3.24) adalah Θ_w pada saat n = 0. Sedangkan persamaan (3.37) adalah perbandingan antara Θ/Θ_w.



(a)



(b)

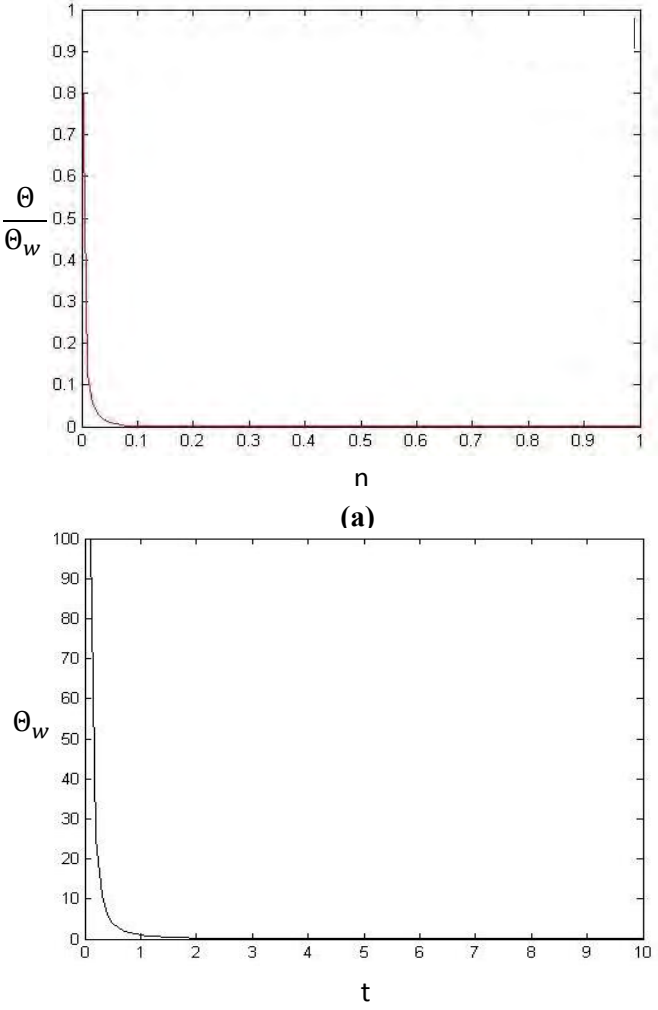
Gambar 4.3 Profil temperatur pada **(a)** Θ/Θ_w dengan m=-1**(b)** Θ_w dengan m=-1

Gambar 4.3 adalah grafik Θ/Θ_w dan Θ_w dengan variasi m = -1. Kedua gambar meluruh secara eksponensial. Dalam hal faktor peluruhannya dipengaruhi oleh nilai m = -1. Gambar 4.3(a) mendekati 0 pada n = 0,17. Pada gambar 4.3(b), peluruhan grafik Θ_w tidak signifikan lagi saat t = 4.

Gambar 4.3 adalah grafik Θ/Θ_w dan Θ_w dengan variasi m = -2. Kedua gambar meluruh secara eksponensial. Dalam hal faktor peluruhannya dipengaruhi oleh nilai m = -2. Gambar 4.5 mendekati 0 pada n = 0,1 sementara itu pada Θ_w peluruhan grafik tidak signifikan lagi saat t = 1,5.

Dari gambar 4.3(a) dan 4.4(a) didapatkan nilai estimasi n. Dimana fungsi n tergantung pada nilai y dan t. Dari gambar 4.3(b) dan 4.4(b) didapatkan estimasi waktu. Dengan begitu, nilai y dapat diketahui sehingga daerah konduksi dapat diestimasi.

Nilai Θ_w merepresentasikan temperature dari sumber panas, sehingga ketika Θ dibandingkan dengan Θ_w nilai tertinggi yang dicapai adalah satu. Gambar 4.3 dan gambar 4.4 menunjukkan semakin kecil m maka peluruhan grafik eksponensialnya semakin cepat, baik pada grafik perbandingan Θ/Θ_w maupun pada grafik Θ_w.



Gambar 4.4 Profil temperatur pada **(a)** Θ/Θ_w dengan m=-2**(b)** Θ_w dengan m=-2

4.3 Pembahasan

Solusi penyelesaian *unsteady free convection* pada media berpori diselesaikan secara analitis sehingga diperoleh persamaan (3.38). Persamaan (3.38) akan memenuhi *boundary condition* jika $m<0$ dan $C2<0$.

Persamaan (3.38) terdiri dari tiga variabel yaitu Θ, t, dan n, dimana besarnya nilai Θ tergantung pada besarnya nilai t dan n. Sementara n terdiri dari tiga variabel, dapat dilihat pada persamaan (3.13), yaitu n, t, dan y. Besarnya nilai n tergantung pada besarnya nilai t dan y

Daerah konduksi pada *unsteady free convection* pada media berpori terjadi pada interval waktu yang singkat saat permulaan *free convection* (Magyari, 2004). Dari grafik gambar 4.3 dapat diestimasikan daerah konduksi pada $m=-1$. Gambar 4.3(a) mendekati 0 pada $n = 0.17$, sementara pada $t = 4$ pada gambar 4.3(b) peluruhan grafik tidak signifikan lagi. Besarnya nilai n tergantung pada y dan t sesuai persamaan (3.13). Karena besarnya n dan t dapat diketahui, besarnya y dapat diestimasi dimana untuk kasus $m=-1$, besar $y=0.64$.

Besarnya y untuk $m=-2$ dapat juga diestimasikan dimana pada gambar 4.4(a) grafik mendekati 0 pada $n = 0.1$ dan sedangkan pada gambar 4.4(b) peluruhan grafik tidak signifikan lagi pada $t = 1.5$. Dari angka tersebut besar y untuk $m=-2$ adalah $y=0.24$.

Estimasi yang dilakukan menunjukkan bahwa daerah konduksi yang terjadi saat permulaan *free convection* sangatlah kecil dan hanya terjadi pada rentang waktu yang sangat singkat (Tomasz, 2014). Semakin kecil nilai parameter m semakin kecil pula nilai t dan n yang didapatkan. Hal ini menunjukkan semakin kecil nilai m nilai estimasi daerah konduksi juga semakin kecil.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang didapatkan dari pengerjaan tugas akhir ini adalah dengan menggunakan metode matematik didapatkan solusi analitis berupa persamaan eksplisit dari *unsteady free convection* pada media berpori yaitu

$$\Theta\,(n,t) = \Theta_0 (t - t_0)^m e^{\frac{8\sqrt{3}\,m\,n^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{m\,C2}}}$$

Persamaan eksplisit di atas menjadi solusi penyelesaian jika memenuhi kondisi batas yang ditinjau. Pada kasus ini persamaan tersebut akan memenuhi kondisi batas jika m<0 dan C2<0.

Hasil estimasi menunjukkan bahwa semakin kecil nilai m, semakin kecil nilai t dan n yang didapatkan sehingga nilai estimasi daerah konduksinya juga semakin kecil. Daerah konduksi yang terjadi saat permulaan *free convection* pada media berpori sangatlah kecil dan hanya terjadi pada rentang waktu yang sangat singkat.

5.2 Saran

Penelitian berbasis eksperimen tentang *unsteady free convection* pada media berpori perlu dilakukan, sebagai perbandingan terhadap solusi secara analitis. Selain itu, solusi umum unsteady free convection masih dapat dikembangkan lagi dengan menggunakan metode matematik lain atau dengan mengganti asumsi yang digunakan.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR PUSTAKA

Magyari, Pop dan Keller.2004. *"Analytical solutions for unsteady free convection in porous media". Journal of Engineering Mathematics.*

Mebine dan Adigio. 2008. *"Unsteady Free Convection Flow with Thermal Radiation"*. TUBITAK.

Cengel dan Ghafar. 2015. "*Heat and Mass Transfer Fundamental and Applications, 5th Edition"*.McGraw Hill..

D.B. Ingham dan I. Pop (eds.). 2002. *"Transport Phenomena in Porous Media"*. Oxford: Pergamon,

K. Vafai (ed.).2000 *"Handbook of Porous Media"*. New York: Marcel Dekker.

Donald A. Nield, dan Adrian Bejan. 2013. *"Convection in Porous Media Fourth Edition"*.Springer

Erwin Kreyzig. 1999. *"Advanced Engineering Mathematics (8th edition)"*. John Wiley and Sons.

Gunawan Nugroho. 2013 .*"Application of Forst Order Polynomial Differential Equation for Generating Solution to the Three-Dimensional Incompresible Navier Stoke Equation"*.Researchgate.

Johnson dan Cheng.1978. *"Possible Similarity Solutions For Free Convection Boundary Layers Adjacent To Flat Plates In Porous Media"*. Int. J. Heat Mass Transfer.

Peng, Suping., & Zhang, Jincai. 2007. "*Engineering Geology for Underground Rocks"*. Berlin: Springer.

Abramowitz, Milton dan Stegun, Irene A. 1970.*"Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables"*. New York: Dover Publications, Ninth printing.

Sigit. 2012. Buku Ajar Matematika Teknik I. Malang: Universitas Brawijaya

BIODATA PENULIS

Joseph Wilantara Gulo adalah mahasiswa Jurusan Teknik Fisika angkatan 2012. Penulis dilahirkan di Kota Gunungsitoli, Kepulauan Nias pada tanggal 27 Nopember 1993 dari ayah yang bernama Tareli Gulo dan Ibu bernama Nurdelima Harefa. Penulis merupakan anak sulung dari dua bersaudara. Saat ini penulis tinggal di Desa Sifalaete Tabaloho, Kota Gunungsitoli, Sumatera Utara. Penulis menempuh pendidikannya di SDS RK Mutiara Gunungsitoli, SMPN 1 Gunungsitoli, dan SMAN 1 Matauli Pandan. Dan pada tahun 2016 ini, penulis mampu menyelesaikan gelar sarjananya di Jurusan Teknik Fisika ITS dengan menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **"Investigasi Solusi Analitis *Unsteady Free Convection* pada Media Berpori"**. Bagi pembaca yang ingin berdiskusi tentang Tugas Akhir ini dapat menghubungi email penulis, wilantaragulo@gmail.com.