PENERAPAN MODEL PREDICTIVE CONTROL (MPC) PADA *FLOW LINE* SISTEM PRODUKSI MENGGUNAKAN ALJABAR MAX-PLUS

*Imam Fauzi[1], Dieky Adzkiya[2]

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Indonesia
Imamfauzi446@yahoo.co.id , diekyadzkiya@gmail.com

ABSTRAK

Model Predictive Control (MPC) atau dengan kata lain model kendali terprediksi adalah metode desain kontroler yang populer digunakan pada dunia industri. Keuntungan utama dari MPC adalah kemampuannya untuk memberikan constraint atau batasan tertentu pada sinyal pengendali input maupun output. Pada penelitian ini akan dipaparkan mengenai penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL) dan *buffer* memiliki kapasitas terbatas. *Flow line* sistem produksi adalah diagram yang menggambarkan urutan proses pada sistem produksi, mulai dari input, pemroses, sampai output. Dari *flow line* sistem produksi yang telah dimodelkan sebagai sistem MPL kemudian diterapkan MPC untuk mendapatkan waktu optimal ketika bahan baku masuk ke sistem dan waktu optimal ketika bahan jadi meninggalkan sistem yang memenuhi batasan-batasan MPC, sehingga dapat meminimumkan kriteria biaya. Batasan-batasan yang digunakan pada MPC meliputi batasan selisih waktu setiap langkah kejadian input, batas waktu *deadline* sebagai pembatas waktu output, prediksi horizon N_P adalah rentang waktu prediksi, dan control horizon N_c adalah rentang waktu pengendalian. Selanjutnya hasil konstruksi dari input, output, dan kriteria biaya pada penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dapat diperoleh dengan menggunakan program matlab.

Kata kunci: *Sistem Max-Plus Linier, Flow Line, Sistem Produksi, Model Predictive Control*

1. PENDAHULUAN

Dalam dunia industri, efisiensi waktu sangatlah penting, karena tuntutan produksi yang semakin meningkat untuk memenuhi kebutuhan pasar. Oleh karena itu, ketepatan waktu sangatlah dibutuhkan dalam dunia industri. Dalam satu dekade terakhir, model predictive control (MPC) atau dengan kata lain model kendali terprediksi adalah salah satu metode yang populer digunakan dalam dunia industri, karena MPC adalah cara yang efektif dalam proses kontrol yang praktis, dan dapat diterima secara luas dalam proses industri. Keuntungan utama dari MPC adalah kemampuannya untuk memberikan constraint atau batasan tertentu pada sinyal pengendali input maupun output.

MPC konvensional, menggunakan model waktu diskrit linier untuk pengendalian proses. MPC yang digunakan disini adalah untuk sistem event diskrit. Secara umum, dalam aljabar konvensional, model yang digunakan adalah sistem yang nonlinear. Namun pada sistem event diskrit max-plus linier dapat dideskripsikan dalam model linier di aljabar max-plus (Baccelli dkk, 1992). Sistem max-plus linear termasuk dalam sistem event diskrit. Sebagai contoh adalah *flow line* sistem produksi, sistem produksi dengan rute jadwal tetap, dan jaringan kereta api.

Dalam penelitian ini dipaparkan tentang penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang yang dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL). Sistem produksi termasuk dalam kategori *Discrete Event Dynamic System* (DEDS). Sistem seperti ini dapat dimodelkan dengan automata, Petri-nets, *Markov-chains*, *queuing network*, simulasi dan aljabar max-plus.

Sebelum memodelkan sistem produksi kebentuk persamaan aljabar max-plus, terlebih dahulu dikonstruksi bentuk *flow line* dari sistem produksi, yaitu diagram yang mengambarkan skema urutan proses dari sustu sistem produksi mulai dari input, pemroses, dan output. setelah terbentuk *flow line* dari sistem produksi kemudian dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL). Selanjutnya diterapkan model predictive control (MPC) pada *flow line* sistem produksi dalam sistem MPL untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi.

Penelitian tentang pemodelan sistem produksi menggunakan aljabar max-plus telah banyak dilakukan sebelumnya. Misalnya Seleim dan ElMaraghy dalam papernya (Seleim dan ElMaraghy, 2014a) membahas tentang pemodelan sistem produksi dengan aljabar max-plus. Tetapi tidak membahas model aljabar max-plus dari *flow line* sistem produksi yang memuat pemroses yang tersusun secara seri dan paralel dengan *buffer* terbatas. Selanjutnya Seleim dan ElMaraghy dalam papernya (Seleim dan ElMaraghy, 2014b) mengembangkan paper mereka sendiri dengan menambahkan bahasan tentang *flow line* sistem produksi yang memuat pemroses yang tersusun secara campuran seri dan paralel dengan *buffer* terbatas. Kemudian Pohet Bintoto pada tesisnya (Pohet B., 2015) menjelaskan bentuk umum dari suatu model *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai persamaan aljabar max-plus.

Selanjutnya De Schutter dan van den Boom dalam papernya (De Schutter dan van den Boom, 2001) menjelaskan tentang penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi sederhana. Untuk itu penelitian ini mengembangkan penelitian-penelitian sebelumnya dengan menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem max-plus linier (MPL). Untuk memperjelas pemahaman tentang penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi, dalam penelitian ini diberikan contoh dari model tersebut dalam suatu *flow line* sistem produksi. Selanjutnya penerapan MPC pada sistem produksi tersebut diimplementasikan kedalam program matlab untuk mendapatkan waktu optimal terprediksi pada sistem produksi.

2. KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Pengertian Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus adalah struktur aljabar dengan menggunakan dua operasi dasar yaitu " maksimalisasi " dan " jumlahan ". Aljabar max-plus didefinisikan oleh $\mathbb{R}_\varepsilon \to \{\mathbb{R} \cup -\infty\}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real. Dua operasi dasar dalam aljabar max-plus adalah maksimalisasi yang dilambangkan dengan $\oplus$, dan jumlahan yang dilambangkan dengan $\otimes$, dituliskan:

$$a \oplus b = \max(a, b) \qquad \forall a, b \in R_\varepsilon$$
$$a \otimes b = a + b \qquad \forall a, b \in R_\varepsilon$$

Aljabar max-plus adalah himpunan $\mathbb{R}_{\max}$ yang bersama-sama dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$ (Heidergott dkk, 2006). Elemen netral untuk operasi $\oplus$ adalah ε yaitu $-\infty$, dan elemen netral untuk operasi $\otimes$ adalah e yaitu 0.

Seperti halnya aljabar konvensional, operasi $\oplus$ dan $\otimes$ adalah bersifat asosiatif dan komutatif, dan operasi perkalian distributif terhadap penjumlahan. Dalam operasi aljabar max-plus $\oplus$ dan $\otimes$, banyak sifat dan konsep dari aljabar linier dapat diterjemahkan ke dalam aljabar max-plus dengan mengganti $+$ sebagai $\oplus$ dan $\times$ sebagai $\otimes$.

2.2 Vektor dan Matriks

Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dalam aljabar max-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_\varepsilon^{m \times n}$. Selanjutnya matriks A dapat dituliskan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Aljabar max-plus dapat diterapkan dalam matriks seperti halnya aljabar konvensional. Jika A dan B dua matriks berdimensi sama, maka $A \oplus B = C$. Jika jumlah kolom A adalah sama dengan jumlah baris B untuk n, maka $A \otimes B = C$. Matriks $\mathcal{E}_{m \times n}$ adalah matriks nol $m \times n$, dalam aljabar max-plus yaitu $(\mathcal{E}_{m \times n})_{ij} = \varepsilon$ untuk semua i, j. E_n adalah matriks identitas $n \times n$ dalam aljabar max-plus yaitu

$(E_n)_{ii} = 0$ untuk semua i dan $(E_n)_{ij} = \varepsilon$ untuk semua i, j dengan $i \neq j$. Jika $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$ dan $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times p}$ maka

$$(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes b_{kj} = \max_k (a_{ik} + b_{kj})$$

untuk semua i, j.

Aljabar max-plus perpangkatan matriks $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n}$ didefinisikan sebagai $A^{\otimes^0} = E_n$ dan $A^{\otimes^k} = A \otimes A^{\otimes^{k-1}}$ untuk $k = 1, 2, \ldots$. Menurut Baccelli dkk (2001) sebuah persamaan bentuk umum :

$$X = A \otimes X \oplus B \otimes U \tag{2.1}$$

dengan X adalah variabel vector ukuran $n \times 1$, U adalah input vektor ukuran $m \times 1$, A adalah matriks persegi ukuran $n \times n$, dan B adalah matriks ukuran $m \times n$, mempunyai solusi:

$$X = A^* \otimes B \otimes U \tag{2.2}$$

dengan A^* didefinisikan sebagai $A^* = E \oplus A^+$ dimana $A^+ = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus A^{\otimes n} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n}$

2.3 Model Predictive Control (MPC)

MPC yaitu sistem kendali yang menggunakan hasil prediksi dalam mengeluarkan kendali input. Kendali input ini merupakan kendali optimal untuk pengendalian berdasarkan hasil prediksi *plant*. MPC menggunakan *receding horizon principle*. Pada saat kejadian ke-k, urutan kontrol waktu input $U(k), \cdots, U(k + N_\mathrm{c} - 1)$ yang akan datang ditentukan, sehingga kriteria biaya diminimalkan tergantung pada batasan. Pada saat kejadian ke-k, elemen pertama $(U(k))$ dari urutan optimal diterapkan dalam proses. Pada saat waktu kejadian berikutnya horizon digeser, model diperbarui dengan informasi baru dari perhitungan yang pertama, dan optimasi baru saat kejadian ke-$(k + 1)$ dilakukan.

Parameter N_p, N_c dan λ adalah tiga parameter dasar MPC, yaitu prediksi horizon N_p adalah panjang langkah dari proses, dan interval waktu $(1, N_\mathrm{p})$ berisi dinamika dari proses. Kontrol horizon $N_\mathrm{c} \leq N_\mathrm{p}$ biasanya diambil sama dengan sistem order. Parameter $\lambda \geq 0$ sebagai *trade-off* antara kriteria biaya output J_out dan kriteria biaya input J_in.

2.4 Sistem Max-Plus Linear (MPL)

Sistem event diskrit dapat dimodelkan dalam bentuk sistem max-plus linier (MPL) sebagai berikut (Baccelli dkk, 1992):

$$X(k + 1) = A \otimes X(k) \oplus B \otimes X(k) \tag{2.3}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k) \tag{2.4}$$

dengan $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times m}$ dan $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{l\times n}$.

2.5 Model Predictive Control untuk Sistem Max-Plus Linier

2.5.1 Rekursif Sistem

Misalkan $X(k)$ adalah waktu ketika pemroses memulai proses pada saat kejadian ke-k, waktu taksiran dapat dihitung menggunakan perhitungan sebelumnya. Jika keadaan dari sistem $X(k)$ pada saat ke-k diketahui, maka dapat diperkirakan taksiran rekursif output dari sistem untuk urutan input yang diberikan $U(k), \cdots, U(k + N_\mathrm{p} - 1)$ adalah sebagai berikut:

$$\tilde{Y}(k + j|k) = C \otimes A^{\otimes^j} \otimes X(k) \oplus \bigoplus_{i=0}^{j-1} C \otimes A^{\otimes^{j-i}} \otimes B \otimes U(k + i)$$

jika dituliskan dalam bentuk matriks adalah

$$\breve{Y}(k) = H \otimes \breve{U}(k) \oplus G(k)$$

dengan $\tilde{Y}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{Y}(k+1|k) \\ \tilde{Y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \tilde{Y}(k+N_\mathrm{p}|k) \end{bmatrix}$, $\breve{U}(k) = \begin{bmatrix} U(k) \\ U(k+1) \\ \vdots \\ U(k+N_\mathrm{p}-1) \end{bmatrix}$, $G(k) = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes^2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes^{N_\mathrm{p}}} \end{bmatrix} \otimes X(k)$

dan $H = \begin{bmatrix} C \otimes B & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes^{N_\mathrm{p}-1}} \otimes B & C \otimes A^{\otimes^{N_\mathrm{p}-2}} \otimes B & \cdots & C \otimes B \end{bmatrix}$

dengan $\tilde{Y}(k)$ adalah waktu taksiran output dan $U(k)$ adalah waktu input

2.5.2 Constraint (Batasan)

MPC untuk sistem MPL dapat menggunakan batas linear. Batas untuk sistem event diskrit adalah pemisahan minimum atau maksimum antara kejadian input dan output, yaitu:

$$a_1(k+j) \leq \Delta U(k+j-1) \leq b_1(k+j) \quad \text{untuk } j = 1, \cdots, N_\mathrm{c} \tag{2.5}$$

$$a_2(k+j) \leq \Delta \tilde{Y}(k+j|k) \leq b_2(k+j) \quad \text{untuk } j = 1, \cdots, N_\mathrm{p} \tag{2.6}$$

atau waktu *deadline* maksimum untuk kejadian output:

$$\tilde{Y}(k+j|k) \leq R(k+j) \quad \text{untuk } j = 1, \cdots, N_\mathrm{p} \tag{2.7}$$

Pada sistem MPL waktu input dan output urutannya sesuai dengan terjadinya beberapa kejadian yang berturut-turut dan harus selalu monoton naik. Oleh karena itu, harus selalu menambahkan kondisi $\Delta u(k+j) \geq 0$ untuk $j = 0, \cdots, N_\mathrm{p} - 1$, untuk menjamin bahwa urutan input selalu naik.

2.5.3 Rekursif Input Setelah Kontrol Horizon

Batas kontrol horizon N_c konvensional adalah input harus tetap konstan pada saat kejadian ke-$(k + N_\mathrm{c})$, ini tidak digunakan dalam sistem MPL, karena urutan input harus meningkat. Oleh karena itu, kondisi ini dirubah sebagai berikut. tingkat laju harus tetap konstan setelah kejadian ke-$(k + N_\mathrm{c})$ yaitu

$$\Delta U(k+j) = \Delta U(k + N_\mathrm{c} - 1) \quad \text{untuk } j = N_c, \cdots, N_\mathrm{p} - 1 \tag{2.8}$$

atau $\Delta^2 U(k+j) = 0$ untuk $j = N_\mathrm{c}, \cdots, N_\mathrm{p} - 1$. Kondisi ini menunjukkan keteraturan dalam urutan input dan mencegah masalah *buffer overflow* yang bisa muncul ketika semua bahan dimasukkan ke sistem.

2.5.4 Kriteria Biaya

Kriteria biaya MPC untuk sistem MPL diberikan sebagai berikut.

$$\min_{U(k)} J = \min_{U(k)} (J_\mathrm{out} + \lambda J_\mathrm{in}) \tag{2.9}$$

Ini disebut masalah MPC-MPL untuk kejadian ke-k. MPC-MPL juga menggunakan prinsip *receding horizon*.

1) Kriteria biaya untuk output J_{out}

Jika waktu *deadline* $R(k)$ produk jadi diketahui dan jika harus membayar denda untuk setiap keterlambatan, formula kriteria biaya keterlambatan yang tepat adalah:

$$J_\mathrm{out} = \sum_{j=1}^{N_\mathrm{p}} \sum_{i=1}^{l} \max[\tilde{Y}_i(k+j|k) - R_i(k+j), 0] \tag{2.10}$$

2) Kriteria biaya untuk input J_{in}

Formula kriteria biaya untuk memaksimalisasi waktu input adalah:

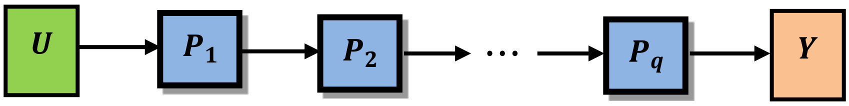
$$J_\mathrm{in} = -\sum_{j=1}^{N_\mathrm{p}} \sum_{i=1}^{m} U_i(k+j-1) \tag{2.11}$$

2.6 Model Sistem Produksi Menggunakan Aljabar Max-Plus

Model *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dibagi menjadi dua macam, yaitu *flow line* sistem produksi dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* dan *flow line* sistem produksi dengan pemrosesnya disertai *buffer* (Pohet B., 2015) seperti yang dijelaskan sebagai berikut.

2.6.1 Model *Flow Lines* Sistem Produksi Tanpa *buffer*

Model *flow line* sistem produksi tanpa *buffer* adalah sebuah bentuk *flow line* dimana pada semua pemrosesnya tidak disertai *buffer*. Sebagai contoh adalah sebagai berikut



Gambar 1: Model *flow line* sistem produksi tanpa *buffer* (Pohet B., 2015)

Misalkan $U(k)$ adalah waktu ketika bahan dasar masuk ke sistem dan siap untuk diproses saat yang ke-k, $Y(k)$ adalah waktu ketika produk selesai diproses dan meninggalkan sistem saat yang ke-k, dan $X_i(k)$ adalah waktu memulai proses yang ke-k pada pemroses ke-i. Model aljabar max-plus dalam bentuk matriks dari *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebaranag tanpa *buffer* adalah sebagai berikut:

$$X(k) = A \otimes X(k) \oplus B \otimes X(k-1) \oplus D \otimes U(k) \tag{2.12}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

dari persamaan (2.1) dan (2.2), persamaan (2.11) dapat dituliskan sebagai berikut.

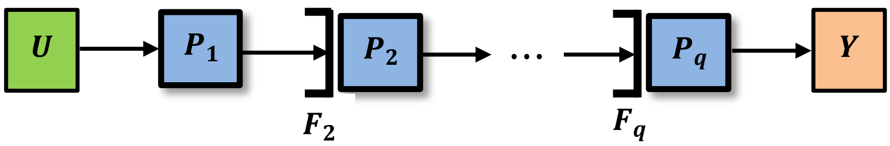
$$X(k) = \hat{A} \otimes X(k-1) \oplus \hat{B} \otimes U(k) \tag{2.13}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

dengan $\hat{A} = A^* \otimes B$ dan $\hat{B} = A^* \otimes D$

2.6.2 Model *Flow Lines* Sistem Produksi yang Disertai *Buffer*

Model *flow line* sistem produksi yang disertai *buffer* adalah sebuah bentuk *flow line* dimana pada pemrosesnya disertai *buffer*. Sebagai contoh adalah sebagai berikut.



Gambar 2: Model *flow line* sistem produksi dengan *buffer* (Pohet B., 2015)

Dalam memodelkan *flow line* sistem produksi dengan *buffer*, diasumsikan semua pemroes ke-i dilengkapi dengan *buffer* sebesar F dengan kapasitas F terbatas. Untuk kejadian yang ke-k, pemroses ke-i bisa memulai proses ketika pemroses ke-$(i+1)$ telah memulai proses untuk kejadian yang ke-$(k-F-1)$. Model *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* memiliki bentuk persamaan aljabar max-plus sebagai berikut.

$$\breve{X}(k+1) = \breve{A} \otimes \breve{X}(k) \oplus \breve{B} \otimes U(k) \tag{2.14}$$

$$Y(k) = \breve{C} \otimes \breve{X}(k) \tag{2.15}$$

dengan $\breve{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{\breve{q}\times\breve{q}}$,$\breve{B} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{\breve{q}\times m}$, dan $\breve{C} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times\breve{q}}$ untuk $\breve{q} = q\big(\max(F_1, F_2, \cdots, F_q) + 1\big)$

sedangkan $$\breve{X}(k) = \begin{bmatrix} X(k) \\ X(k-1) \\ X(k-2) \\ \vdots \\ \mathrm{X}\left(k - \max\left(F_1, F_2, \cdots, F_q\right)\right) \end{bmatrix},$$

$$\breve{A} = \begin{bmatrix} \hat{A} & [\breve{A}]_{1,2} & \cdots & [\breve{A}]_{1,s-1} & [\breve{A}]_{1,s} \\ E(q\times q) & \mathcal{E}(q\times q) & \cdots & \mathcal{E}(q\times q) & \mathcal{E}(q\times q) \\ \mathcal{E}(q\times q) & E(q\times q) & \cdots & \mathcal{E}(q\times q) & \mathcal{E}(q\times q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathcal{E}(q\times q) & \mathcal{E}(q\times q) & \cdots & E(q\times q) & \mathcal{E}(q\times q) \end{bmatrix}, \quad \breve{B} = \begin{bmatrix} \hat{B} \\ \mathcal{E}(q\times m) \\ \mathcal{E}(q\times m) \\ \vdots \\ \mathcal{E}(q\times m) \end{bmatrix}$$

dan $\breve{C} = [C \quad \mathcal{E}(n\times q) \quad \mathcal{E}(n\times q) \quad \cdots \quad \mathcal{E}(n\times q)]$ dengan $E(q\times q)$ adalah matriks identitas berordo $q\times q$, dan $\mathcal{E}(q\times q)$ adalah matriks null yaitu matriks berordo $q\times q$ yang semua elemennya adalah ε. Sedangkan $[\breve{A}]_{1,b}$ didefinisikan sebagai berikut.

$$[\breve{A}]_{1,b} = \bigoplus_{l=1, F_l=b-1}^{q} \widehat{AB}_l \tag{2.16}$$

dengan $b = 2, 3, \dots, t$ dan $t = \max\left(F_1, F_2, \dots, F_q\right) + 1$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang ada beberapa tahapan penyelesaian, yaitu sebagai berikut.

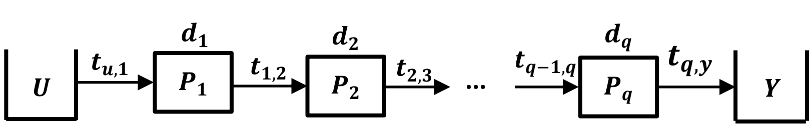
1) Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output.
2) Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi tersebut beserta waktu prosesnya.
3) Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer*.
4) Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut.

Kemudian penerapan MPC pada flow line sistem produksi ada dua macam, yaitu penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tanpa *buffer* dan dengan *buffer* seperti yang dijelaskan sebagai berikut.

3.1 Penerapan MPC Pada *Flow Line* Sistem Produksi Tanpa *Buffer*

Pada penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang tanpa *buffer* ada beberapa tahapan penyelesaian, yaitu sebagai berikut.

1) Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output.
2) Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi tersebut beserta waktu prosesnya.



Gambar 3: *flow line* sistem produksi dengan pmrosesnya tanpa *buffer*

Pada Gambar 3 terlihat bahwa d_i merupakan waktu yang dibutuhkan untuk melakukan proses pada pemroses ke-i, $t_{u,1}$ merupakan waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan bahan baku dari input U menuju pemroses ke-1 (P_1), $t_{q,y}$ merupakan waktu yang dibutuhkan untuk memindahkan bahan jadi dari pemroses ke-q (P_q) menuju output Y, $t_{i,j}$ merupakan waktu yang dibutuhkan untuk perpindahan bahan setengah jadi dari pemroses P_i menuju pemroses P_j dengan $i, j = 1,2, \dots, q$.

3) Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang tanpa *buffer*.

Utuk memulai proses yang ke-$(k+1)$ pada pemroses P_1harus menunggu sampainya bahan baku dari U pada pemroses P_1 saat yang ke-k dan selesainya proses di pemroses P_1saat yang ke-k. Sehingga dapat ditulis dalam bentuk matriks aljabar max-plus sebagai berikut.

$$X(k+1) = A \otimes X(k+1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k) \tag{3.1}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k) \tag{3.2}$$

dengan matriks $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q\times q}$, $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times q}$, dan $D \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q\times m}$. Dari persamaan (2.10) dan (2.11), maka persamaan (3.1) dapat disederhanakan menjadi sistem max-plus linier sebagai berikut.

$$X(k+1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \hat{B} \otimes U(k) \tag{3.3}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

dengan $\hat{A} = A^* \otimes B$ dan $\hat{B} = A^* \otimes D$

4) Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang tanpa *buffer* dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut.

Setelah diperoleh bentuk model sistem max-plus linier dari *flow line* sistem produksi tersebut, kemudian diterapkan MPC untuk mendapatkan waktu optimal terpredikasi. Untuk mendapatkan urutan waktu optimal output harus melalui proses perhitungan evolusi sistem $\tilde{Y}(k) = H \otimes U(k) \oplus G(k)$, tentunya sudah didapatkan urutan waktu optimal input dengan menggunakan konsep *receding horizon*.

Dalam penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem MPL, harus diketahui kondisi dan memenuhi batasan-batasan MPC sebagai berikut:

1) Kondisi awal waktu input $U(-1)$,
2) Kondisi awal waktu proses pada pemroses $X(0)$,
3) $k = 0$, yaitu variabel pada setiap langkah waktu kejadian input maupun output,
4) Prediksi horizon N_{p}, yaitu rentang waktu prediksi dalam memprediksi waktu optimal pada setiap langkah kejadian proses produksi dimulai dari langkah kejadian ke-k sampai yang ke-$\left(k + N_p\right)$.
5) Kontrol horizon N_{c}, yaitu rentang waktu pengendalian, dengan $N_{\mathrm{c}} \leq N_{\mathrm{p}}$
6) Batas waktu *deadline* maksimum $R(k)$, yaitu sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem diberikan sebagai berikut.
   $\tilde{Y}(k+j|k) \leq R(k+j)$ untuk $j = 1, \dots, N_p$
7) Batasan untuk selisih waktu dari setiap langkah kejadian ketika bahan baku masuk ke sistem. Untuk batas maksimum b dan batas minimum a yang diberikan sebagai berikut.
   $a(k+j) \leq \Delta U(k+j) \leq b(k+j)$ untuk $j = 1, \dots, N_c - 1$
8) Bilangan tak negatif $\lambda \geq 0$, yaitu sebagai *trade-off* antara kriteria biaya output J_{out} dan kriteria biaya input J_{in}.

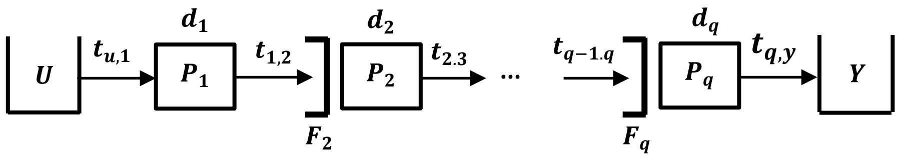
Kemudian waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi yang memenuhi batasan-batasan MPC tersebut diselesaikan dengan menggunakan program matlab MPC (Bart De Schutter, 2001). Sehingga didapatkan urutan waktu optimal input $\left[U_{\mathrm{opt}}\right]_{k=0}^{N_p-1}$, urutan waktu optimal output $\left[Y_{\mathrm{opt}}\right]_{k=0}^{N_p}$, dan kriteria biaya J. Untuk memperoleh kriteria biaya output J_{out} dan kriteria biaya input J_{in} dari *flow line* sistem produksi menggunakan formula pada persamaan (2.5) dan (2.6), sehingga didapatkan kriteria biaya $J = J_{\mathrm{out}} + \lambda J_{\mathrm{in}}$, dengan $\lambda \geq 0$.

3.2 Penerapan MPC Pada *Flow Line* Sistem Produksi dengan *Buffer*

pada dasarnya penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan *buffer* sama dengan penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi tanpa *buffer*. Seperti halnya pada penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi tanpa *buffer*, penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan *buffer* juga terdapat beberapa tahapan penyelesaian, adalah sebagai berikut.

1) Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output.
2) Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi tersebut beserta waktu prosesnya.

Pada Gambar 4 terlihat bahwa *flow line* sistem produksi tersebut disertai *buffer* yeng terletak pada pemroses P_2, P_3 sampai dengan P_q dengan kapasitas terbatas sebesar F_2, F_3 sampai dengan F_q berikut.



Gambar 4: *flow line* sistem produksi dengan pmrosesnya disertai *buffer*

3) Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan *buffer*.

Untuk memulai proses yang ke-i (P_i) yang ke-$(k+1)$ harus menunggu sampainya bahan baku pada P_i saat yang ke-$(k+1)$, selesainya proses pada pemroses P_i saat yang ke-k, dan harus menunggu pemroses P_{i+1} telah memulai proses untuk kejadian yang ke-$(k - F_{i+1})$. Sehingga dapat ditulis dalam bentuk matriks aljabar max-plus sebagai berikut.

$$X(k+1) = A \otimes X(k+1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k) \oplus A_2 \otimes X_2(k - F_2) \oplus A_3 \otimes X_3(k - F_3) \oplus \dots \oplus A_q \otimes X_q\big(k - F_q\big) \tag{3.4}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k) \tag{3.5}$$

dengan matriks $A, B, A_2, \dots, A_q \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q\times q}$, $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times q}$, dan $D \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q\times m}$. Dari persamaan (2.1) dan (2.2), maka persamaan (3.4) dapat disederhanakan menjadi sistem max-plus linier sebagai berikut.

$$X(k+1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \hat{B} \otimes U(k) \oplus \widehat{AB}_2 \otimes X_2(k - F_2) \oplus \widehat{AB}_3 \otimes X_3(k - F_3) \oplus \dots \oplus \widehat{AB}_q \otimes X_q\big(k - F_q\big) \tag{3.6}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

dengan $\hat{A} = A^* \otimes B$, $\hat{B} = A^* \otimes D$, dan $\widehat{AB}_i = A^* \otimes A_i$.

Karena operasi $\oplus$ pada aljabar max-plus bersifat komutatif maka persamaan (3.6) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$X(k+1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \widehat{AB}_2 \otimes X_2(k - F_2) \oplus \widehat{AB}_3 \otimes X_3(k - F_3) \oplus \dots \oplus \widehat{AB}_q \otimes X_q\big(k - F_q\big) \oplus \hat{B} \otimes U(k) \tag{3.7}$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

Dari persamaan (3.7), diperoleh persamaan sistem max-plus linier sebagai berikut.

$$\check{X}(k+1) = \check{A} \otimes \check{X}(k) \oplus \check{B} \otimes U(k) \tag{3.8}$$

$$Y(k) = C \otimes \check{X}(k) \tag{3.9}$$

dengan $\check{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{\check{q}\times\check{q}}$ dan $\check{B} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{\check{q}\times m}$ untuk $\check{q} = q(F_s + 1)$

4) Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang tanpa *buffer* dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut.

Sama seperti halnya pada penerapan MPC *flow line* sistem produksi tanpa *buffer*, setelah diperoleh bentuk model sistem max-plus linier (MPL) dari *flow line* sistem produksi tersebut, kemudian diterapkan MPC untuk mendapatkan waktu optimal terpredikasi. Kemudian waktu optimal terprediksi tersebut diselesaikan dengan menggunakan program matlab. Sehingga didapatkan urutan waktu optimal input $\left[U_{\text{opt}}\right]_{k=0}^{N_p-1}$, urutan waktu optimal output $\left[Y_{\text{opt}}\right]_{k=1}^{N_p}$, dan kriteria biaya J.

4. KESIMPULAN

Setelah tersusun model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi, kemudian diterapkan MPC pada *flow line* sistem produksi yang memenuhi kondisi beserta batasan-batasan MPC. Kemudian didapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi dengan cara memasukkan matriks parameter dari sistem MPL beserta kondisi dan batasan-batasan yang memenuhi MPC ke dalam *toolbox* program matlab MPC (Bart De Schutter, 2001). Hasil simulasi dan analisa penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi dengan program matlab, kemudian didapatkan urutan waktu optimal input $\left[U_{\text{opt}}\right]_{k=0}^{N_p-1}$, urutan waktu optimal output $\left[Y_{\text{opt}}\right]_{k=1}^{N_p}$, dan kriteria biaya J.

5. DAFTAR PUSTAKA

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder G.J., and Quadrat, J.P., (1992). *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. John Wiley & Sons. New York.

Dairy, (2012). *Dairy Processing Hand Book*. Alamat web: http://beveragesmachine.com/profile/1-3-complete-yoghurt-processing-line/176183/0

De Schutter, B. and van den Boom, T., (2000). *Model Predictive Control for Max-Plus-Linear Discrete Event Systems*. *Automatica*, vol.37, no.7, pp. 1049-1056, July 2001.

Dewiagustiyani, (2015). *Sistem Produksi Produk Kemasan Kaleng*. Alamat web: http://dewiagustina.blogspot.co.id/2015/04/kemasan-kaleng-proses-pengalengan-exp.html.

Enda, W. S., (2012). *Pemodelan dan Simulasi Motor DC dengan Kendali Model Predictive Control (MPC)*. Universitas Diponegoro Semarang, Transmisi Vol. 14, No. 3.

Gross, J. L. and Yallen, J., (2006). *Graph Theory and Application (Second Edition)*. Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York.

Heidergott, B., Olsder, G.J., Woude, J., (2006). *Max-Plus At Work: Modelling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-plus Algebra and Its Application*. Princeton University Press, New Jersey.

Holkar, K. S., Waghmare, L. M., (2010*). An Overview of Model Predictive Control*. International Journal of Control and Automation, Vol. 3 No. 4, December, 2010.

Imam, F., Dieky, A., (2016). *Application of Model Predictive Control (MPC) for Flow Line Production System Using Max-Plus Algebra*. Proceedings of the 6th Annual Basic Science International Conference, Editors: Derek Thomas, et all, Faculty of Mathematics and Sciences Brawijaya University, Malang, East Java, Indonesia, page 309-312.

Pohet, B., Subiono, (2015). *Generalisasi Model Sistem Produksi Menggunakan Aljabar Max-Plus*. Prosiding Seminar Nasional Matematika, Sains dan Informatika, Editor: Purnami W., dkk., Universitas Sebelas Maret, Surakarta, hal. 31-36.

Seborg, D.E., Edger, T.F., Mellichamp, D.A., and Doyle III, F.J., (2011). *Process Dynamics and Control: Chapter 20: Model Predictive Control (Third Edition).* John Wiley & Sons. New York.

Seleim, A., Elmaraghy, H., (2014a). *Generating Max-Plus Equation for Efficient Analysis of Manufacturing Flow Lines*. Proceeding of the 47th CIRP Conference on Manufacturing Systems.

Seleim, A., Elmaraghy, H., (2014b). *Generating Max-Plus Equation for Efficient Analysis of Manufacturing Flow Lines*. Journal of Manufacturing Systems, Vol. 314.

Subiono, (2015). *Aljabar Min-Max-Plus dan Terpannya*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.