UJIAN TESIS

PENERAPAN MODEL PREDICTIVE CONTROL (MPC) PADA *FLOW LINE* SISTEM PRODUKSI MENGGUNAKAN ALJABAR MAX-PLUS

Oleh:

Imam Fauzi

NRP. 1214201039

Dosen Pembimbing:

Dr. Dieky Adzkiya, M.Si

PROGRAM MAGISTER JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA 2016

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Dalam dunia industri, efisiensi waktu sangatlah penting, karena tuntutan produksi semakin meningkat untuk memenuhi kebutuhan pasar. Oleh karena itu, ketepatan waktu sangatlah dibutuhkan dalam dunia industri.

Rumusan Masalah

Bagaimana menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi dalam bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem MPL.

Batasan Masalah

1. Kondisi awal dari sistem max-plus linier telah ditentukan.
2. Nilai matriks parameter pada sistem MPL selalu tetap, tidak tergantung pada setiap langkah kejadian.
3. Nilai matriks parameter berdasarkan dari data yang telah ditentukan.
4. Penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi hanya sebatas pada masalah standar.
5. Proses produksi tidak mengalami gangguan dan tidak mengalami cacat pada produksi.
6. Mesin produksi tidak mengalami kerusakan atau berhenti berproses.

Tujuan Penelitian

Memprediksi waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem (output) dengan mengontrol waktu ketika bahan baku masuk ke sistem (input). Sehingga dapat meminimumkan kriteria biaya, yaitu dengan memaksimumkan waktu ketika bahan baku masuk ke sistem sedemikian hingga waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem tidak melewati atau sama dengan batas waktu *deadline* maksimum yang telah ditentukan.

Manfaat Penelitian

Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari sistem produksi dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi yang dimodelkan sebagai sistem MPL.

Kontribusi Hasil Penelitian

Sebagai metode yang digunakan untuk mengontrol waktu ketika bahan baku masuk ke sistem sedemikian hingga waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem tidak melewati atau sama dengan batas waktu *deadline* maksimum.

Penelitian Terkait

Max-Plus Modelling of Manufacturing Flow Line (Seleim dan ElMaraghy, 2014a)
Aljabar max-plus dapat digunakan untuk memodelkan, mengevaluasi, dan mengoptimasi kinerja serta mengontrol sistem manufaktur.

Generating Max-Plus Equation for Efficient Analysis of Manufacturing Flow Lines (Seleim dan ElMaraghy, 2014b)
Dikembangkan metode baru yang cepat dan efisien membangun persamaan aljabar max-plus dari suatu *flow lines* sistem produksi.

Generalisasi model sistem produksi menggunakan aljabar max-plus (Pohet B., 2015)
Didapatkan bentuk umum persamaan aljabar max-plus dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer.*

Model Predictive Control for Max-Plus-Linier Discrete Event System (De Schutter dan Van Den Boom, 2001)
Penerapan MPC untuk sistem MPL dalam mendapatkan waktu optimal terprediksi pada sistem produksi sederhana.

Dari keempat penelitian terkait tersebut, pada penelitian ini bagaimana menenerapkan MPC pada *flow line* sistem dalam bentuk sebarang baik tanpa *buffer* maupun dengan *buffer* yang dimodelkan sebagai sistem MPL.

Pengertian Aljabar Max-Plus

- Aljabar max-plus adalah struktur aljabar dengan menggunakan dua operasi dasar yaitu maksimalisasi dinotasikan $\oplus$ dan penjumlahan dinotasikan $\otimes$. Aljabar max-plus didefinisikan oleh $\mathbb{R}_\varepsilon = \{\mathbb{R} \cup -\infty\}$, dituliskan:

$$a \oplus b = \max(a, b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$$
$$a \otimes b = a + b \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$$

Vektor dan Matriks

- Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dalam aljabar max-plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$. Suatu matriks A dapat dituliskan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Jika $A, B \in \mathbb{R}_\varepsilon^{m\times n}$ dan $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n\times p}$ maka

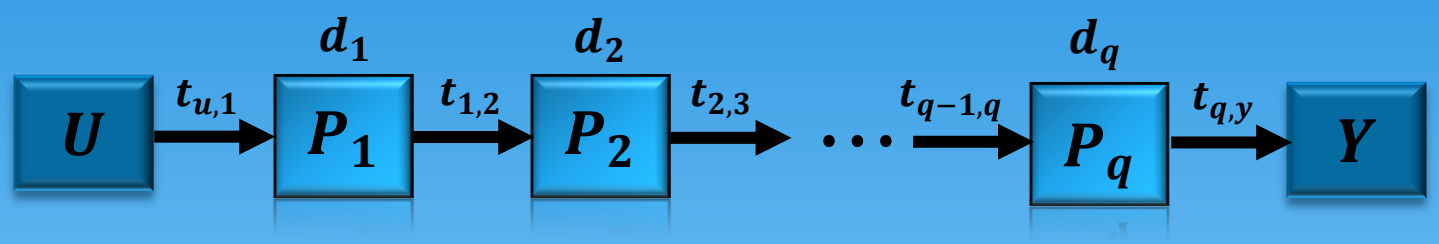
$$(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$$

$$(A \otimes C)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} (a_{ik} \otimes c_{kj}) = \max_k (a_{ik} + c_{kj})$$

untuk semua i, j.

Model Sistem Produksi Menggunakan Aljabar Max-Plus

1. Model *Flow Line* dengan Pemrosesnya Tanpa *Buffer*



misal

$$X_1(k+1) = t_{u,1} \otimes U(k) \oplus d_1 \otimes X_1(k)$$

Bentuk persamaan aljabar max-plus dalam bentuk matriks dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak diserta *buffer* adalah

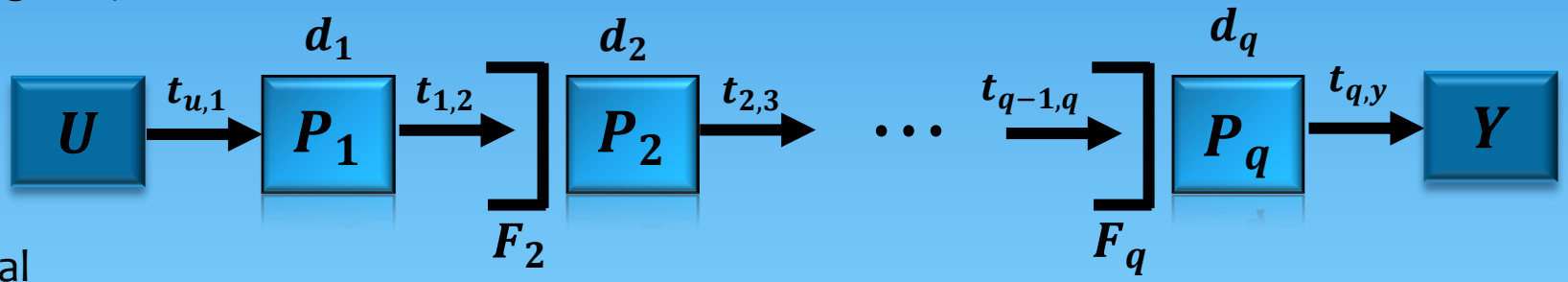
$$X(k+1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \hat{B} \otimes U(k)$$
$$Y(k) \quad = C \otimes X(k)$$

dengan $\hat{A} = A^* \otimes B$ dan $\hat{B} = A^* \otimes D$

Model Sistem Produksi Menggunakan Aljabar Max-Plus

2. Model *Flow Line* dengan Pemrosesnya Disertai *Buffer*

Buffer adalah tempat penampung bahan setengah jadi hasil dari proses pada mesin pemroses yang akan diproses lebih lanjut ke mesin pemroses berikutnya dan memiliki kapasitas terbatas dengan besar kapasitas berupa bilangan bulat yang dinotasikan dengan F_i dimana $i = 2,3, \dots, q$.



misal

$$X_1(k+1) = t_{u,1} \otimes U(k) \oplus d_1 \otimes X_1(k) \oplus -t_{1,2} \otimes X_2(k - F_2)$$

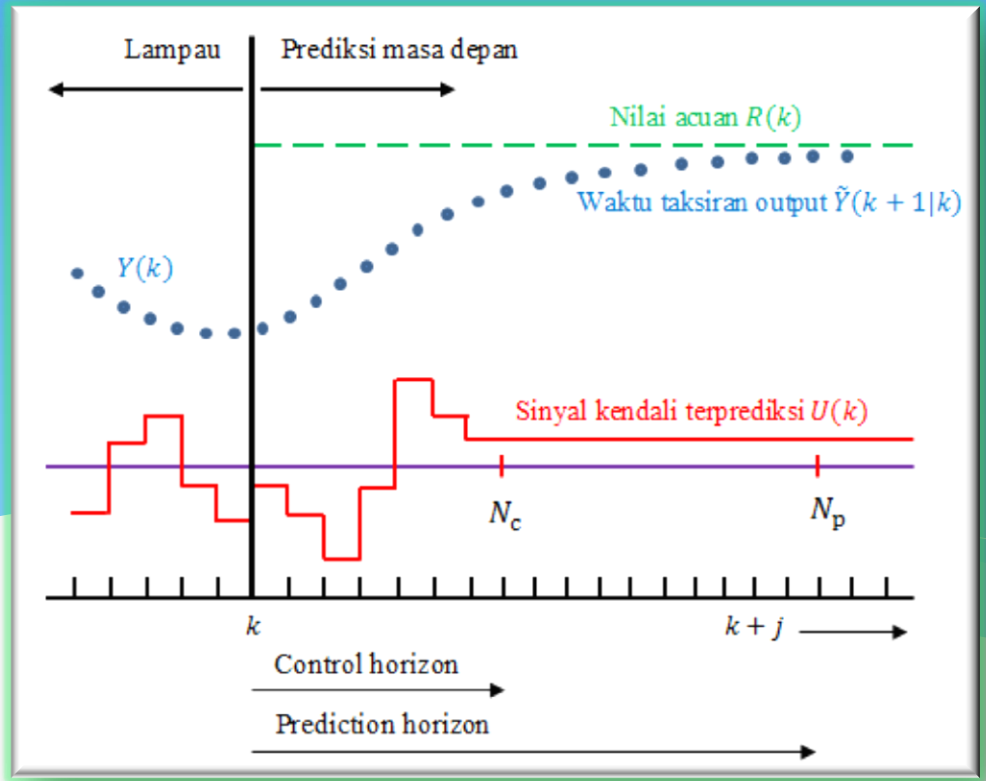
Bentuk persamaan aljabar max-plus dalam bentuk matriks dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer* adalah

$$\begin{aligned} \check{X}(k+1) &= \check{A} \otimes \check{X}(k) \oplus \check{B} \otimes U(k) \\ Y(k) &= \check{C} \otimes \check{X}(k) \end{aligned}$$

dengan $\check{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{\check{q}\times\check{q}}$, $\check{B} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{\check{q}\times m}$, dan $\check{C} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{l\times\check{q}}$ untuk $\check{q} = q\big(\max(F_2, F_3, \cdots, F_q) + 1\big)$

Model Predictive Control (MPC)

- MPC yaitu sistem kendali yang menggunakan hasil prediksi dalam mengeluarkan kendali input. Kendali input ini merupakan kendali optimal untuk pengendalian berdasarkan hasil prediksi beberapa langkah waktu ke depan.
- MPC menggunakan prinsip *receding horizon.*
- Parameter N_c, N_p, dan λ adalah parameter dasar pada MPC



Pada kejadian ke-k, urutan waktu input yang akan datang di tentukan dan input yang pertama diterapkan dalam proses, sehingga kriteria biaya diminimumkan. Untuk waktu langkah kejadian berikutnya horizon digeser, model diperbarui dengan informasi baru dari perhitungan yang pertama. Dan optimasi baru saat kejadian ke-$(k+1)$ dilakukan, dan begitu seterusnya.

Sistem Max-Plus Linier (MPL)

$$X(k+1) = A \otimes X(k) \oplus B \otimes U(k)$$
$$Y(k) \quad = C \otimes X(k)$$

dengan $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{n\times m}$ dan $C \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{l\times n}$, dimana m adalah banyaknya input dan l adalah banyaknya output.

MPC untuk Sistem MPL

1. Evolusi Sistem

$$\tilde{X}(k+j|k) = A \otimes \tilde{X}(k+j-1|k) \oplus B \otimes U(k+j-1)$$
$$\tilde{Y}(k+j|k) = C \otimes \tilde{X}(k+j|k)$$

untuk $j = 1, 2, \cdots, N_{\mathrm{p}}$.

Bentuk persamaan waktu taksiran output:

$$\tilde{Y}(k+j|k) = C \otimes A^{\otimes^j} \otimes X(k) \oplus \bigoplus_{i=0}^{j-1} C \otimes A^{\otimes^{j-i}} \otimes B \otimes U(k+i)$$

MPC untuk Sistem MPL

1. Evolusi Sistem

Evolusi sistem jika ditulis dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut.

$$\breve{Y}(k) = G(k) \oplus H \otimes \breve{U}(k)$$

dengan

$$\breve{Y}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{Y}(k+1|k) \\ \tilde{Y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \tilde{Y}(k+N_{\mathrm{p}}|k) \end{bmatrix}, \breve{U}(k) = \begin{bmatrix} U(k) \\ U(k+1) \\ \vdots \\ U(k+N_{\mathrm{p}}-1) \end{bmatrix}, G(k) = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes^2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes^{N_{\mathrm{p}}}} \end{bmatrix} \otimes X(k)$$

dan $H = \begin{bmatrix} C \otimes B & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes^{N_{\mathrm{p}}-1}} \otimes B & C \otimes A^{\otimes^{N_{\mathrm{p}}-2}} \otimes B & \cdots & C \otimes B \end{bmatrix}$

MPC untuk Sistem MPL

2. Constraint (Batasan)

- Batasan dari selisih waktu setiap langkah kejadian input:

$$a(k+j) \leq \Delta U(k+j) \leq b(k+j) \qquad \text{untuk } j = 1, \cdots, N_{\mathrm{c}} - 1$$

- Waktu *deadline* maksimum output :

$$\tilde{Y}(k+j|k) \leq R(k+j) \qquad \text{untuk } j = 1, \cdots, N_{\mathrm{p}}$$

- Agar urutan langkah kejadian selalu monoton naik maka :

$$\Delta U(k+j) \geq 0 \qquad \text{dengan } j = 0, \cdots, N_{\mathrm{p}} - 1$$

3. Evolusi Input Setelah Kontrol Horizon

$$\Delta U(k+j) = \Delta U(k+N_{\mathrm{c}}-1) \qquad \text{untuk } j = N_{\mathrm{c}}, \cdots, N_{\mathrm{p}} - 1$$

$$\text{atau } \Delta^2 U(k+j) = 0 \qquad \text{untuk } j = N_{\mathrm{c}}, \cdots, N_{\mathrm{p}} - 1$$

MPC untuk Sistem MPL

4. Kriteria Biaya

- Kriteria biaya untuk output J_{out} :

$$J_{\text{out}} = \sum_{j=1}^{N_{\text{p}}} \sum_{i=1}^{l} \max[\tilde{Y}_i(k+j|k) - R_i(k+j), 0]$$

- Kriteria biaya untuk input J_{in} :

$$J_{\text{in}} = -\sum_{j=1}^{N_{\text{p}}} \sum_{i=1}^{m} U_i(k+j-1)$$

- Kriteria biaya :

$$J = J_{\text{out}} + \lambda J_{\text{in}}$$

dengan $\lambda \geq 0$

Jika $\lambda > 1$, maka yang diprioritaskan adalah J_{in}

Jika $\lambda < 1$, maka yang diprioritaskan adalah J_{out}

Jika $\lambda = 1$, maka keduanya diprioritaskan

Tahapan Penelitian

- Setudi literatur
- Mempelajari bentuk sistem max-plus linier dari *flow line* sistem produksi
- Penerapan MPC pada sistem produksi
- Menyajikan suatu contoh
- Penyelesaian model MPC dan menganalisa hasil simulasi

Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi

Penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi terdapat beberapa tahapan penyelesaian, yaitu

1) Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output.

2) Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi beserta waktu prosesnya.

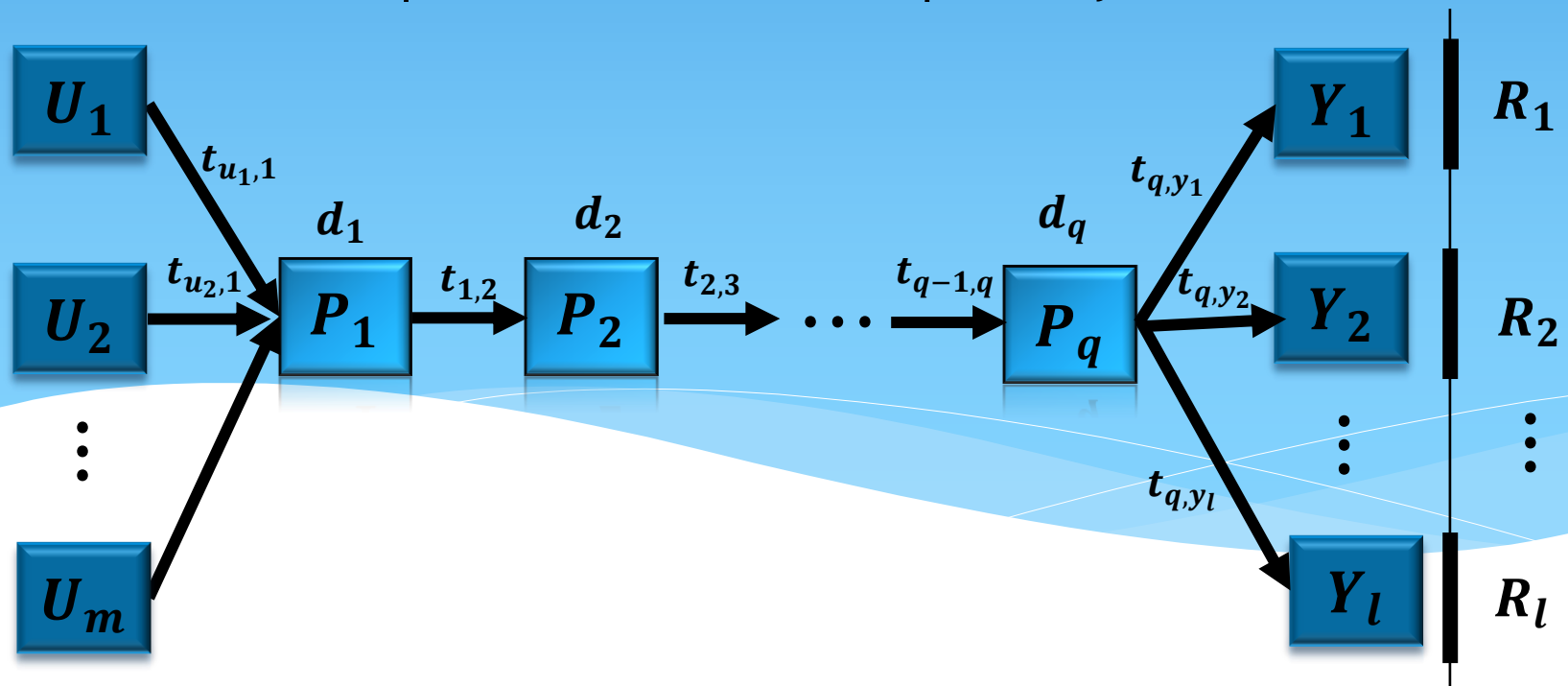
3) Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tanpa *buffer* maupun dengan *buffer*.

4) Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi.

1. Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi Tanpa *Buffer*

Penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang tanpa *buffer* terdapat beberapa tahapan penyelesaian, yaitu

1) Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output.
2) Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi beserta waktu prosesnya.



1. Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi Tanpa *Buffer*

3) Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer*.

Persamaan aljabar maxplus dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya tidak disertai *buffer* adalah

$$X(k+1) = A \otimes X(k+1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k)$$
$$Y(k) \quad = C \otimes X(k)$$

Persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi

$$X(k+1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \hat{B} \otimes U(k)$$
$$Y(k) \quad = C \otimes X(k)$$

dengan $\hat{A} = A^* \otimes B$ dan $\hat{B} = A^* \otimes D$

1. Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi Tanpa *Buffer*

4) Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut.

Untuk mendapatkan urutan waktu optimal output terprediksi harus melalui proses perhitungan evolusi sistem sebagai berikut

$$\check{Y}(k) = G(k) \oplus H \otimes \check{U}(k)$$

dengan

$$\check{Y}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{Y}(k+1|k) \\ \tilde{Y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \tilde{Y}(k+N_{\mathrm{p}}|k) \end{bmatrix}, \check{U}(k) = \begin{bmatrix} U(k) \\ U(k+1) \\ \vdots \\ U(k+N_{\mathrm{p}}-1) \end{bmatrix}, G(k) = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes^2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes^{N_{\mathrm{p}}}} \end{bmatrix} \otimes X(k)$$

dan $H = \begin{bmatrix} C \otimes B & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes^{N_{\mathrm{p}}-1}} \otimes B & C \otimes A^{\otimes^{N_{\mathrm{p}}-2}} \otimes B & \cdots & C \otimes B \end{bmatrix}$

1. Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi Tanpa *Buffer*

Dalam penerapan MPC untuk sistem MPL, harus diketahui kondisi dan memenuhi batasan-batasan sebagai berikut:

1. Kondisi awal waktu input $U(-1)$,
2. Kondisi awal waktu proses pada pemroses $X(0)$,
3. $k = 0$, yaitu variabel pada setiap langkah waktu kejadian input maupun output,
4. Kontrol horizon N_c, yaitu rentang waktu pengendalian,
5. Prediksi horizon N_p, yaitu rentang waktu prediksi,
6. Batas waktu *deadline* maksimum $R(k)$, yaitu sebagai pembatas waktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem.

   $$\tilde{Y}(k+j|k) \leq R(k+j) \qquad \text{untuk } j = 1, \dots, N_p$$

7. Batasan untuk selisih waktu dari setiap langkah kejadian ketika bahan baku masuk ke sistem. Untuk batas maksimum b dan batas minimum a

   $$a(k+j) \leq \Delta U(k+j) \leq b(k+j) \quad \text{untuk } j = 1, \dots, N_c - 1$$

8. Bilangan tak negatif $\lambda \geq 0$, yaitu sebagai *trade-off* antara kriteria biaya output J_{out} dan kriteria biaya input J_{in}.

1. Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi Tanpa *Buffer*

Dengan memasukkan matriks parameter dari sistem MPL beserta batasan-batasan yang memenuhi MPC pada *toolbox* program matlab MPC, sehingga didapatkan:

- Urutan waktu optimal input :

$$[U_{\text{opt}}]_{k=0}^{N_p-1}$$

- Urutan waktu optimal output :

$$[Y_{\text{opt}}]_{k=1}^{N_p}$$

- Kriteria biaya output :

$$J_{\text{out}} = \sum_{j=1}^{N_{\text{p}}} \sum_{i=1}^{l} \max[\tilde{Y}_i(k+j|k) - R_i(k+j), 0]$$

- kriteria biaya input :

$$J_{\text{in}} = -\sum_{j=1}^{N_{\text{p}}} \sum_{i=1}^{m} U_i(k+j-1)$$

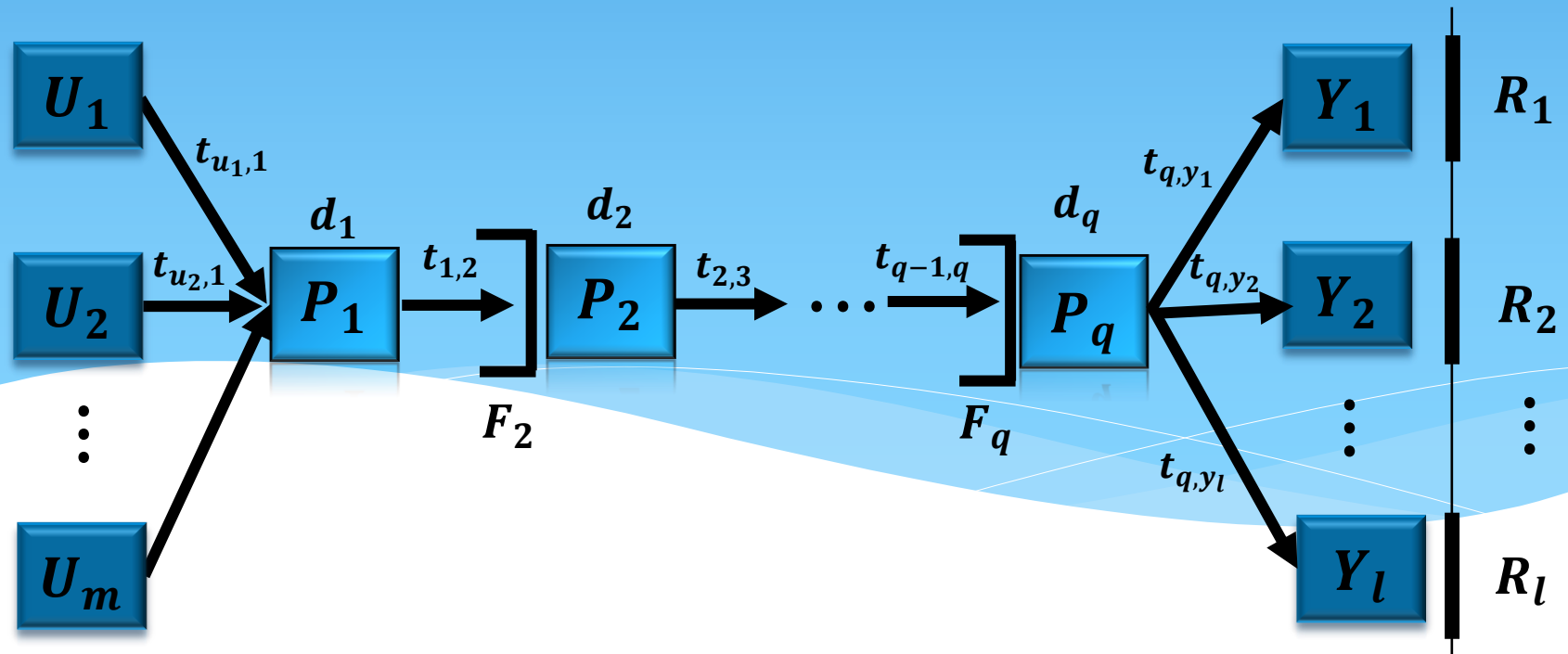
- Kriteria biaya J :

$$J = J_{\text{out}} + \lambda J_{\text{in}}$$

2. Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi dengan *Buffer*

Penerapan MPC pada *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan *buffer* juga terdapat beberapa tahapan penyelesaian, yaitu

1) Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output.
2) Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi beserta waktu prosesnya.



2. Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi dengan *Buffer*

3) Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer*.

- Persamaan aljabar max-plus dari *flow line* sistem produksi bentuk sebarang dengan pemrosesnya disertai *buffer* adalah

$$X(k+1) = A \otimes X(k+1) \oplus B \otimes X(k) \oplus D \otimes U(k) \oplus A_2 \otimes X_2(k-F_2) \oplus A_3 \otimes X_3(k-F_3) \oplus \cdots \oplus A_q \otimes X_q(k-F_q)$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

dengan $A, B, A_2, \ldots, A_q \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q\times q}$, $C \in \mathbb{R}_\varepsilon^{l\times q}$, dan $D \in \mathbb{R}_\varepsilon^{q\times m}$

- Persamaan diatas dapat disederhanakan menjadi

$$X(k+1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \widehat{AB}_2 \otimes X_2(k-F_2) \oplus \widehat{AB}_3 \otimes X_3(k-F_3) \oplus \cdots \oplus \widehat{AB}_q \otimes X_q(k-F_q) \oplus \hat{B} \otimes U(k)$$

$$Y(k) = C \otimes X(k)$$

dengan $\hat{A} = A^* \otimes B$, $\hat{B} = A^* \otimes D$, dan $\widehat{AB}_i = A^* \otimes A_i$

- Sehingga didapatkan sistem MPL berikut

$$\check{X}(k+1) = \check{A} \otimes \check{X}(k) \oplus \check{B} \otimes U(k)$$

$$Y(k) = \check{C} \otimes \check{X}(k)$$

dengan $\check{A} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{\check{q}\times\check{q}}$, $\check{B} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{\check{q}\times m}$, dan $\check{C} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{l\times\check{q}}$ untuk $\check{q} = q\big(\max(F_1, F_2, \cdots, F_q) + 1\big)$

2. Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi dengan *Buffer*

4) Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi.

Untuk mendapatkan urutan waktu optimal output terprediksi harus melalui proses perhitungan evolusi sistem sebagai berikut

$$\breve{Y}(k) = G(k) \oplus H \otimes \breve{U}(k)$$

dengan

$$\breve{Y}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{Y}(k+1|k) \\ \tilde{Y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \tilde{Y}(k+N_{\mathrm{p}}|k) \end{bmatrix}, \breve{U}(k) = \begin{bmatrix} U(k) \\ U(k+1) \\ \vdots \\ U(k+N_{\mathrm{p}}-1) \end{bmatrix}, G(k) = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes^2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes^{N_{\mathrm{p}}}} \end{bmatrix} \otimes X(k)$$

dan $H = \begin{bmatrix} C \otimes B & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes^{N_{\mathrm{p}}-1}} \otimes B & C \otimes A^{\otimes^{N_{\mathrm{p}}-2}} \otimes B & \cdots & C \otimes B \end{bmatrix}$

2. Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi dengan *Buffer*

Dalam penerapan MPC untuk sistem MPL, harus diketahui kondisi dan memenuhi batasan-batasan sebagai berikut:

1. Kondisi awal waktu input $U(-1)$,
2. Kondisi awal waktu proses pada pemroses $X(0)$,
3. $k = 0$, yaitu variabel pada setiap langkah waktu kejadian input maupun output,
4. Kontrol horizon N_c, yaitu rentang waktu pengendalian,
5. Prediksi horizon N_p, yaitu rentang waktu prediksi,
6. Batas waktu *deadline* maksimum $R(k)$, yaitu sebagai pembatas wktu ketika bahan jadi meninggalkan sistem.

   $$\tilde{Y}(k+j|k) \leq R(k+j) \qquad \text{untuk } j = 1, \dots, N_p$$

7. Batasan untuk selisih waktu dari setiap langkah kejadian ketika bahan baku masuk ke sistem. Untuk batas maksimum b dan batas minimum a

   $$a(k+j) \leq \Delta U(k+j) \leq b(k+j) \quad \text{untuk } j = 1, \dots, N_c - 1$$

8. Bilangan tak negatif $\lambda \geq 0$, yaitu sebagai *trade-off* antara kriteria biaya output J_{out} dan kriteria biaya input J_{in}.

2. Penerapan MPC pada *Flow Line* Sistem Produksi dengan *Buffer*

Dengan memasukkan matriks parameter dari sistem MPL beserta batasan-batasan yang memenuhi MPC pada *toolbox* program matlab MPC, sehingga didapatkan:

- Urutan waktu optimal input :

$$[U_{\text{opt}}]_{k=0}^{N_p-1}$$

- Urutan waktu optimal output :

$$[Y_{\text{opt}}]_{k=1}^{N_p}$$

- Kriteria biaya output :

$$J_{\text{out}} = \sum_{j=1}^{N_{\text{p}}} \sum_{i=1}^{l} \max[\tilde{Y}_i(k+j|k) - R_i(k+j), 0]$$

- kriteria biaya input :

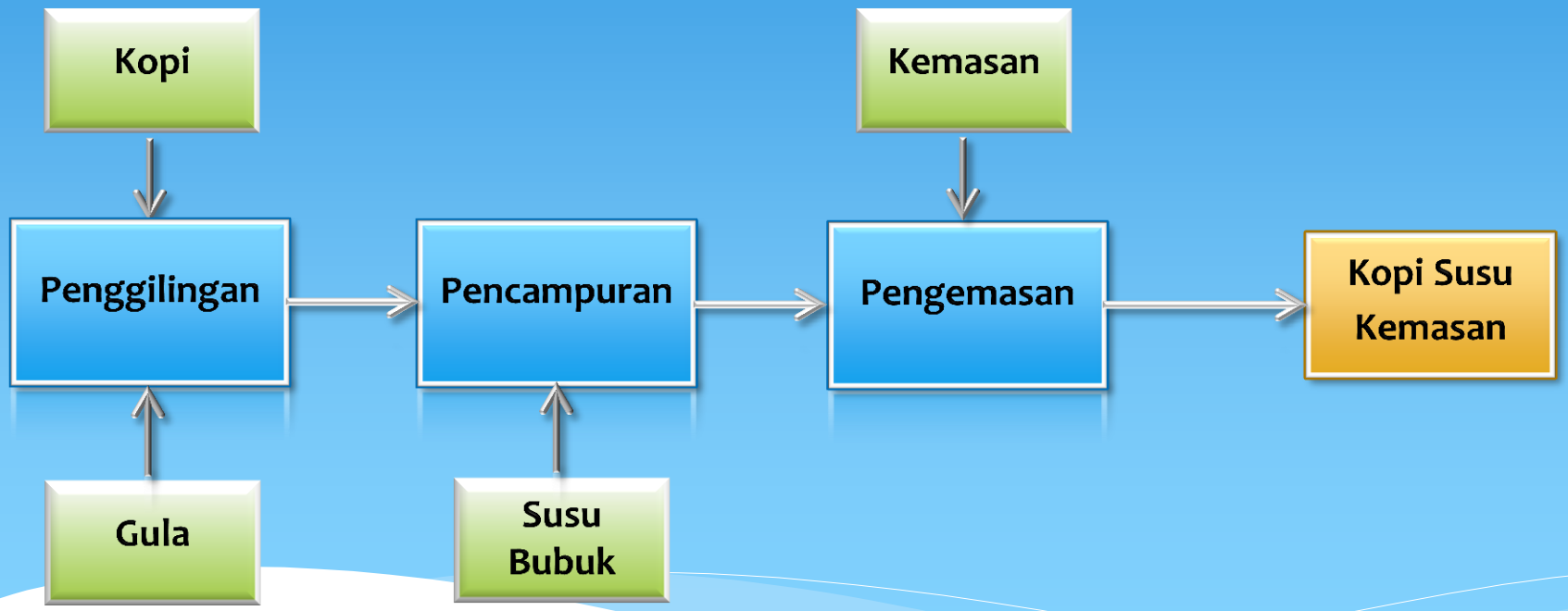
$$J_{\text{in}} = -\sum_{j=1}^{N_{\text{p}}} \sum_{i=1}^{m} U_i(k+j-1)$$

- Kriteria biaya J :

$$J = J_{\text{out}} + \lambda J_{\text{in}}$$

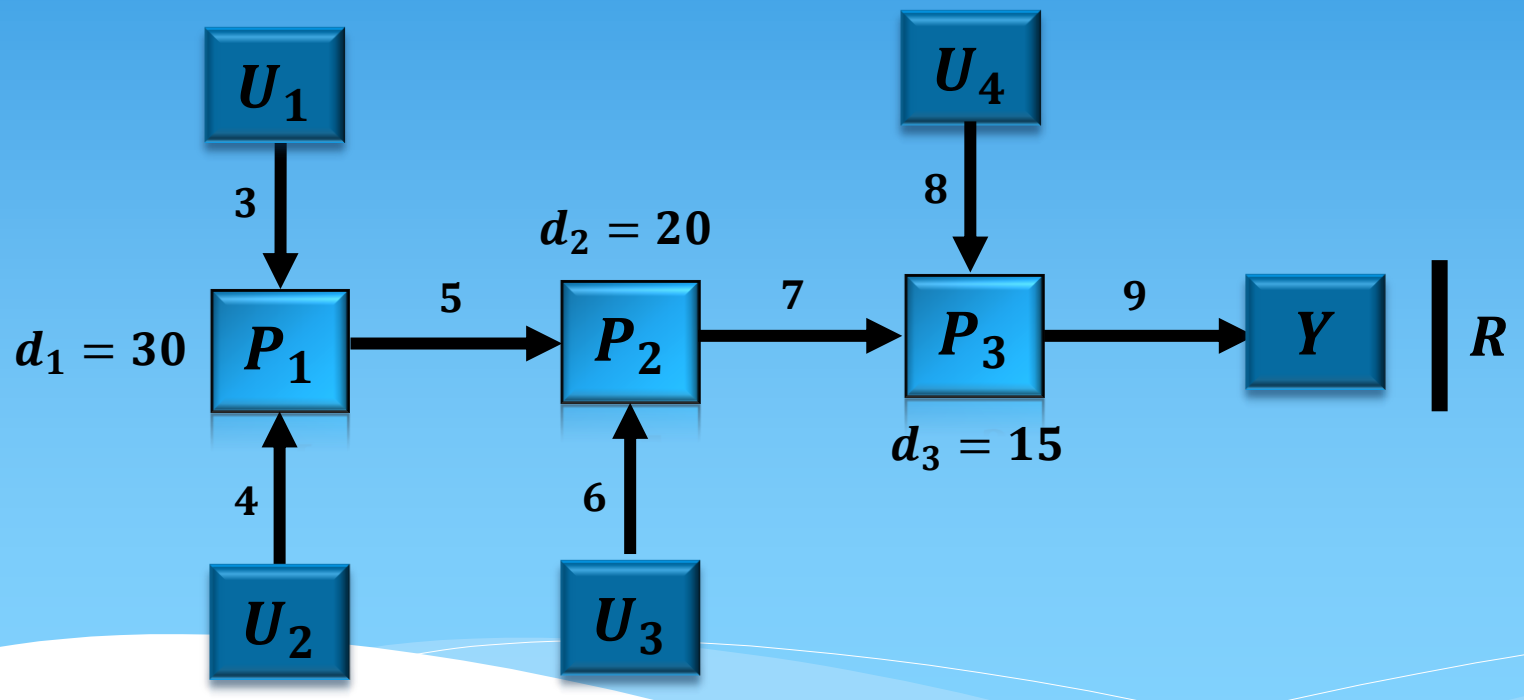
3. Contoh Kasus Sistem Produksi Kopi Susu Tanpa *Buffer*

1) Mengetahui susunan skema dari suatu mesin produksi yang akan dimodelkan sebagai *flow line* sistem produksi mulai dari input, pemroses, sampai output.



3. Contoh Kasus Sistem Produksi Kopi Susu Tanpa *Buffer*

2) Mengkonstruksi model *flow line* sistem produksi sesuai dengan susunan skema dari mesin produksi beserta waktu prosesnya.



3. Contoh Kasus Sistem Produksi Kopi Susu Tanpa *Buffer*

3) Mendapatkan model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi kopi susu tanpa *buffer*.

Model sistem MPL dari *flow line* sistem produksi Kopi Susu adalah

$$X(k+1) = \hat{A} \otimes X(k) \oplus \hat{B} \otimes U(k)$$
$$Y(k) \quad = C \otimes X(k)$$

dengan

$$X(k) = \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \\ X_3(k) \end{bmatrix}, U(k) = \begin{bmatrix} U_1(k) \\ U_2(k) \\ U_3(k) \\ U_4(k) \end{bmatrix}, Y(k) = [Y(k)], \hat{A} = \begin{bmatrix} 30 & \varepsilon & \varepsilon \\ 65 & 20 & \varepsilon \\ 92 & 47 & 15 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ 38 & 39 & 6 & \varepsilon \\ 65 & 66 & 33 & 8 \end{bmatrix}, \text{dan } C = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad 24]$$

3. Contoh Kasus Sistem Produksi Kopi Susu Tanpa *Buffer*

4) Mendapatkan waktu optimal terprediksi dari *flow line* sistem produksi kopi susu dengan cara menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi tersebut.

Untuk mendapatkan urutan waktu optimal output terprediksi harus melalui proses perhitungan evolusi sistem dengan $N_p = 9$ adalah sebagai berikut

$$\breve{Y}(k) = G(k) \oplus H \otimes \breve{U}(k)$$

dengan

$$\breve{Y}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{Y}(k+1|k) \\ \tilde{Y}(k+2|k) \\ \vdots \\ \tilde{Y}(k+9|k) \end{bmatrix}, \ \breve{U}(k) = \begin{bmatrix} U_1(k) \\ U_2(k) \\ U_3(k) \\ U_4(k) \\ \vdots \\ U_4(k+8) \end{bmatrix}, \ G(k) = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes^2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes^8} \end{bmatrix} \otimes X(k),$$

dan $H = \begin{bmatrix} C \otimes B & \mathcal{E}(1 \times 4) & \cdots & \mathcal{E}(1 \times 4) \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \cdots & \mathcal{E}(1 \times 4) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes^7} \otimes B & C \otimes A^{\otimes^6} \otimes B & \cdots & C \otimes B \end{bmatrix}$

3. Contoh Kasus Sistem Produksi Kopi Susu Tanpa *Buffer*

Dalam penerapan MPC untuk sistem MPL, harus diketahui kondisi beserta batasan-batasan sebagai berikut:

1. Kondisi awal waktu input $U(-1) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$
2. Kondisi awal waktu proses pada pemroses $X(0) = [0 \quad 0 \quad 10]^T$
3. $k = 0$
4. Kontrol horizon $N_c = 6$
5. Prediksi horizon $N_p = 9$
6. Waktu *deadline*

   $$R(k) = [150 \quad 155 \quad 165 \quad 176 \quad 185 \quad 195 \quad 206 \quad 218 \quad 230]^T$$
7. Batas maksimum dan minimum selisih waktu dari setiap langkah kejadian input

   $$2 \leq \Delta U(k+j) \leq 12 \text{ untuk } j = 0, 1, \cdots, 5$$
8. $\lambda = 1$

3. Contoh Kasus Sistem Produksi Kopi Susu Tanpa *Buffer*

Dengan memasukkan matriks parameter dari sistem MPL beserta batasan-batasan yang memenuhi MPC pada *toolbox* program matlab MPC, sehingga didapatkan:

- Urutan waktu optimal input :

$$[U_{opt}]_{k=0}^{8} = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4]^T$$
$$= [12 \quad 12 \quad 12 \quad 12 \quad 24 \quad 24 \quad 24 \quad 24 \quad 36 \quad 36 \quad 36 \quad 36 \quad 48 \quad 48 \quad 48 \quad 48 \quad 60 \quad 60 \quad 60 \quad 60 \quad 72 \quad 72 \quad 72 \quad 72 \quad 84 \quad 84 \quad 84 \quad 84 \quad 96 \quad 96 \quad 96 \quad 96 \quad 108 \quad 108 \quad 108 \quad 108]^T$$

- Urutan waktu optimal output :

$$[Y_{\text{opt}}]_{k=1}^{9} = [116 \quad 146 \quad 176 \quad 206 \quad 236 \quad 266 \quad 296 \quad 326 \quad 356]^T$$

- Kriteria biaya output :

$$J_{out} = \sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{l} \max[\tilde{Y}_i(k+j|k) - R_i(k+j), 0] = 487$$

- Kriteria biaya input :

$$J_{in} = -\sum_{j=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{m} U_i(k+j-1) = -2160$$

- Kriteria biaya J :

$$J = J_{out} + \lambda J_{in} = -1673$$

1. Kesimpulan

Dengan menerapkan MPC pada *flow line* sistem produksi didapatkan urutan waktu optimal input $\left[U_{\text{opt}}\right]_{k=0}^{N_p-1}$ dan urutan waktu optimal output $\left[Y_{\text{opt}}\right]_{k=1}^{N_p}$. Dari urutan waktu optimal input dan output tersebut kemudian didapatkan kriteria biaya output J_{out} dan kriteria biaya input J_{in}, sehingga diperoleh kriteria biaya J yang memenuhi batasan-batasan MPC.

2. Saran

Waktu optimal terprediksi dari penerapan MPC berdasarkan hasil simulasi dengan menggunakan program matlab. Untuk itu diharapkan penelitian berikutnya dengan melakukan analisis yang lebih mendalam, yaitu bagaimana bentuk simulasi jika proses terjadi stagmasi. Dan diharapkan juga untuk penelitian berikutnya bagaimana bentuk model jika lama waktu proses terjadi perubahan pada saat waktu langkah kejadian tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder G.J., and Quadrat, J.P., (1992). *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. John Wiley & Sons. New York.

Dairy, (2012). *Dairy Processing Hand Book*. Alamat web: http://beveragesmachine.com/profile/1-3-complete-yoghurt-processing-line/176183/0

De Schutter, B. and van den Boom, T., (2000). *Model Predictive Control for Max-Plus-Linear Discrete Event Systems*. *Automatica*, vol.37, no.7, pp. 1049-1056, July 2001.

Dewiagustiyani, (2015). *Sistem Produksi Produk Kemasan Kaleng*. Alamat web: http://dewiagustina.blogspot.co.id/2015/04/kemasan-kaleng-proses-pengalengan-exp.html

Gross, J. L. and Yallen, J., (2006). *Graph Theory and Application (Second Edition)*. Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York.

Heidergott, B., Olsder, G.J., Woude, J., (2006). *Max-Plus At Work: Modelling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-plus Algebra and Its Application*. Princeton University Press, New Jersey.

Pohet B., (2015). *Generalisasi Model Sistem Produksi Menggunakan Aljabar Max-Plus*. Tesis. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Seborg, D.E., Edger, T.F., Mellichamp, D.A., and Doyle III, F.J., (2011). *Process Dynamics and Control: Chapter 20: Model Predictive Control (Third Edition).* John Wiley & Sons. New York.

Seleim, A., Elmaraghy, H., (2014a). *Generating Max-Plus Equation for Efficient Analysis of Manufacturing Flow Lines*. Proceeding of the 47th CIRP Conference on Manufacturing Systems.

Seleim, A., Elmaraghy, H., (2014b). *Generating Max-Plus Equation for Efficient Analysis of Manufacturing Flow Lines*. Journal of Manufacturing Systems, Vol. 314.

Subiono, (2015). *Aljabar Min-Max-Plus dan Terpannya*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.