



TUGAS AKHIR - SM141501

ANALISIS BIFURKASI MUNDUR DAN PENYELESAIAN NUMERIK PADA MODEL SIVS DENGAN IMIGRASI NON-INFEKTIF

DEVI MUTIA ANWAR
NRP 1211 100 105

Dosen Pembimbing
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015



FINAL PROJECT - SM141501

BACKWARD BIFURCATION ANALYSIS AND NUMERICAL SOLUTION ON SIVS MODEL WITH IMMIGRATION NON-INFECTIVES

DEVI MUTIA ANWAR
NRP 1211 100 105

Supervisor
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

MATHEMATICS DEPARTMENT
Faculty of Mathematics and Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

LEMBAR PENGESAHAN

**ANALISIS BIFURKASI MUNDUR DAN PENYELESAIAN
NUMERIK PADA MODEL SIVS DENGAN IMIGRASI
NON-INFEKTIF**

***BACKWARD BIFURCATION ANALYSIS AND NUMERICAL
SOLUTION ON SIVS MODEL WITH IMMIGRATION
NON-INFECTIVES***

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

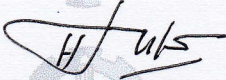
Oleh :

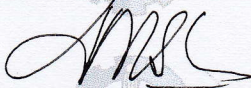
DEVI MUTIA ANWAR
NRP. 1211 100 105

Menyetujui,

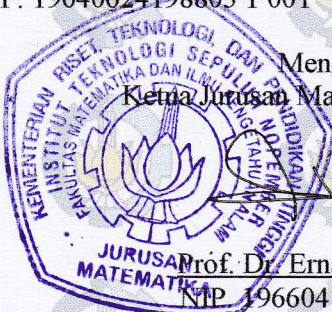
Pembimbing II


Pembimbing I


Drs. Lukman Hanafi, M.Sc
NIP. 19640624198803 1 001


Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
NIP. 19640920199002 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS




Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001
Surabaya, Agustus 2015

ANALISIS BIFURKASI MUNDUR DAN PENYELESAIAN NUMERIK PADA MODEL SIVS DENGAN IMIGRASI NON-INFEKTIF

Nama Mahasiswa : Devi Mutia anwar
NRP : 1211 100 105
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : 1. Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

Abstrak

Penyakit menular yang terjadi pada masyarakat jumlah penderitanya meningkat sehingga menimbulkan banyak kerugian. Upaya pencegahan pada penyakit menular salah satunya dengan vaksinasi. Model matematika pada penyakit menular digunakan untuk menganalisis penyebaran penyakit menular. Adanya perpindahan penduduk mempengaruhi pembentukan model epidemi. Model penularan penyakit pada Tugas Akhir ini adalah model epidemi tipe SIVS (*Susceptible-Infected-Vaccinated-Susceptible*) dengan pengaruh imigrasi dari populasi yang rentan dan tervaksinasi. Analisis kualitatif pada model meliputi titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, kestabilan dari titik kesetimbangan, menentukan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) dan bifurkasi. Analisis bifurkasi diperlukan untuk mengetahui adanya perubahan stabilitas dan perubahan banyaknya titik kesetimbangan. Hasil yang diperoleh terjadi bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 = 1$. Apabila nilai laju imigrasi populasi yang rentan η tetap dan nilai dari laju imigrasi populasi yang tervaksinasi ω bertambah atau sebaliknya, menyebabkan perubahan kualitatif pada model berupa bifurkasi maju menjadi bifurkasi mundur. Penyelesaian numerik diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat menunjukkan \mathcal{R}_0 mempengaruhi kestabilan pada titik kesetimbangan.

Kata kunci: Model SIVS, bifurkasi, analisis stabilitas.

”Halaman ini sengaja dikosongkan”

**BACKWARD BIFURCATION ANALYSIS AND NUMERICAL
SOLUTION ON SIVS MODEL WITH IMMIGRATION
NON-INFECTIVES**

Name : Devi Mutia Anwar
NRP : 1211 100 105
Department : Mathematics
Supervisors : 1. Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
2. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

Abstract

Infectious disease that occurs in the community increases the number of sufferers and causing many losses. Prevention efforts on infectious diseases is vaccinations. Mathematical model of infectious disease is used for spread infectious disease analysis. The migration affects the formation of epidemic models. Disease transmission model in this Final Project is an epidemic of type SIVS (Susceptible-Infected-Vaccinated-Susceptible) model with the effect of immigration on Susceptible populations and vaccinated. Qualitative analysis on the model include disease free equilibrium and endemic equilibrium point, stability of equilibrium point, determine the basic reproduction number (\mathcal{R}_0) and bifurcation. Bifurcation analysis is required to determine the change in the amount of stability and changes the equilibrium point. The results obtained backward bifurcation happened at $\mathcal{R}_0 = 1$. If the immigration rate value η remains susceptible populations and the value of the rate of immigration population vaccinated ω increases or conversely, cause qualitative change in the model that is forward bifurcation become backward bifurcation. Numerical solution solved using the Runge-Kutta fourth order method show that \mathcal{R}_0 influence stability of equilibrium point.

Keywords : SIVS model, bifurcation, stability analysis.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **“Analisis Bifurkasi Mundur dan Penyelesaian Numerik pada Model SIVS dengan Imigrasi Non-Infektif”** sebagai syarat kelulusan dalam menempuh program S-1 Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya.

Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik dan lancar atas kerja sama dan dukungan berbagai pihak. Sehubungan dengan itu, penulis bermaksud menyampaikan terima kasih kepada :

1. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS.
2. Bapak Drs. M. Setijo Winarko, M.Si dan Drs. Lukman Hanafi, M.Sc sebagai dosen pembimbing Tugas Akhir, atas segala bimbingan, motivasi dan nasihat yang telah diberikan kepada penulis selama mengerjakan Tugas Akhir.
3. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si, Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si dan Ibu Dra. Wahyu Fistia Doctorina, M.Si selaku dosen penguji.
4. Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp selaku Ketua Prodi S-1 Jurusan Matematika FMIPA ITS.
5. Bapak Drs. Suharmadi, Dipl. Sc, M.Phil selaku dosen wali.
6. Bapak dan Ibu dosen serta seluruh *staff* Tata Usaha dan Laboratorium Jurusan Matematika FMIPA ITS.
7. Teman – teman angkatan 2011 Jurusan Matematika atas dukungan yang telah diberikan kepada penulis

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis memohon saran dan kritik dari berbagai pihak sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang. Semoga laporan ini bermanfaat bagi semua pihak.

Surabaya, Agustus 2015
Penulis

Special Thank's to :

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

- Allah SWT yang telah memberikan rahmat serta petunjuk dalam setiap langkah kehidupan penulis
- Ibu Mutmainah dan Ayah Moch. Anwar, terima kasih atas segala doanya, dukungan baik moril maupun materil serta kasih sayang yang telah diberikan kepada penulis
- Adik satu-satunya penulis, Saddam Anwar atas dukungan dan semangatnya kepada penulis
- Dona Maria Ratuosari Oa Tukan, sahabat dan teman seperjuangan sedih dan duka sejak mahasiswa baru hingga semester akhir yang selalu ada untuk penulis, semoga kita sukses kawan
- Mashurriyah Rohmawati, Bella Putri Pertiwi, Muhammad Musa dan mbak Nisfu Laila Indah Sari teman seperjuangan topik Tugas Akhir dalam membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir
- Tux Apple, M. Nur Haqqul, Mas Toni dan Muhammad Nurul Mausuf atas bantuannya kepada penulis selama berkuliah dan dalam mengerjakan Tugas Akhir
- Menara'11 dan teman-teman Matematika ITS 2011 yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu atas dukungan dan semangatnya selama penulis berkuliah di Matematika ITS, semoga Allah membalas kebaikan kalian
- Seluruh keluarga besar HIMATIKA ITS terutama Departemen Kesejahteraan Mahasiswa (2012-2014) atas dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
<i>ABSTRACT</i>	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
DAFTAR LAMPIRAN	xxi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan.....	3
1.5 Manfaat.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Penelitian Terdahulu.....	5
2.2 Sistem Kompartemen.....	6
2.3 Bilangan Reproduksi Dasar.....	6
2.4 Kestabilan Titik Tetap.....	7
2.4.1 Linearisasi Sistem.....	8
2.4.2 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz.....	10
2.5 Metode Runge-Kutta.....	11
2.6 Kriteria Bendixson-Dulac.....	12
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	
3.1 Studi Literatur.....	15
3.2 Tahap Mengkaji Model Epidemi SIVS dengan Imigrasi Non-Infektif.....	15
3.3 Tahap Mencari Titik Kesetimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar.....	15
3.4 Tahap Menganalisis Kestabilan Lokal dari Setiap	

Titik Keseimbangan dan Bifurkasi	15
3.5 Tahap Simulasi Numerik Runge-Kutta	16
3.6 Kesimpulan dan Saran	16
3.7 Diagram Alir	17
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN	
4.1 Model SIVS dengan Imigrasi Non-Infektif	19
4.1 Daerah Penyelesaian Model	22
4.2 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit.....	25
4.2.1 Bilangan Reproduksi Dasar	25
4.2.2 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	29
4.3 Titik Keseimbangan Endemik	30
4.3.1 Analisis Bifurkasi	35
4.3.2 Kurva Bifurkasi.....	41
4.3.3 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Endemik.....	44
4.3.4 Kestabilan Global	46
4.4 Solusi Numerik dan Simulasi	49
4.5 Pengaruh Imigrasi pada Bifurkasi Mundur.....	60
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	
5.1 Kesimpulan	65
5.2 Saran	67
DAFTAR PUSTAKA	69

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Koefisien Persamaan Karakteristik.....	10
Tabel 2.2 Routh-Hurwitz.....	11
Tabel 4.1 Nilai Parameter.....	43
Tabel 4.2 Routh-Hurwitz Kestabilan Endemik.....	46
Tabel 4.3 Nilai Parameter.....	51
Tabel 4.4 Nilai Awal	55

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model Epidemi tipe SIVS dengan Imigrasi Non-infektif 20
Gambar 4.2	Kurva Bifurkasi Mundur dengan $\beta = 0.3$ 43
Gambar 4.3	Kurva Bifurkasi Maju dengan $\beta = 0.2$ 44
Gambar 4.4	Grafik Kestabilan Bebas Penyakit pada $E_0 = (0, 148.4)$ saat $\mathcal{R}_0 = 0.95 < 1$, $N = 120, h = 0.1$ 52
Gambar 4.5	Grafik Kestabilan Endemik pada $E_1 = (\check{I}_1, \check{V}_1) = (8.6, 135.4)$ saat $\mathcal{R}_0 = 1.23$, $N = 250, h = 0.1$ 53
Gambar 4.6	Grafik Kestabilan Endemik pada $E_2 = (\check{I}_2, \check{V}_2) = (50.7, 82.8)$ saat $\mathcal{R}_0 = 2.38$, $N = 140, h = 0.1$ 54
Gambar 4.7	Grafik Kestabilan Endemik pada $(I(0), V(0)) = (9, 120)$ saat $\mathcal{R}_0 = 1.57$, $N = 250, h = 0.1$ 56
Gambar 4.8	Grafik Kestabilan Endemik pada $(I(0), V(0)) = (18, 130)$ saat $\mathcal{R}_0 = 1.35, N = 180, h = 0.1$ 57
Gambar 4.9	Grafik Kestabilan Endemik pada $I(0), V(0) = (50, 100)$ saat $\mathcal{R}_0 = 2.01, N = 150, h = 0.1$ 58
Gambar 4.10	Grafik Kestabilan Endemik pada $(I(0), V(0)) = (5, 148)$ saat $\mathcal{R}_0 = 0.96$, $N = 200, h = 0.1$ 59
Gambar 4.11	Perubahan Kurva bifurkasi dengan $\beta = 0.16$ saat $\eta = 5$ dan $\omega = 0,1, \dots, 19$ 63
Gambar 4.12	Perubahan Kurva Bifurkasi dengan $\beta = 0.16$ saat $\eta = 10, 12, \dots, 48$ dan $\omega = 0$ 64

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR SIMBOL

- $S(t)$: populasi *Susceptible* yaitu kelompok individu yang rentan terhadap penyakit
- $I(t)$: populasi *Infected* yaitu kelompok individu yang terjangkit dan dapat menularkan penyakit
- $V(t)$: populasi *Vaccinated* yaitu kelompok individu yang tervaksinasi
- $\Lambda(N)$: fungsi kelahiran pada populasi *Susceptible*
- μ : laju kematian pada populasi *Susceptible*, *Infected* dan *Vaccinated*
- β : konstanta yang menunjukkan tingkat kontak sehingga terjadi penularan
- ϕ : proporsi dari populasi *Susceptible* yang divaksinasi
- θ : proporsi dari populasi *Vaccinated* yang menjadi populasi *Infected* dengan $0 \leq \theta \leq 1$
- σ : proporsi dari populasi *vaccinated* yang menjadi populasi *infected* dengan $0 \leq \sigma \leq 1$
- γ : laju kesembuhan dari individu yang terinfeksi
- η : laju imigrasi individu ke populasi yang rentan (*susceptible*)
- ω : laju imigrasi individu ke populasi yang tervaksinasi (*vaccinated*)
- K : jumlah maksimum populasi
- \mathcal{R}_0 : bilangan reproduksi dasar
- \mathcal{R}_c : nilai kritis dari bilangan reproduksi dasar
- β_c : nilai kritis dari β
- E_0 : titik kesetimbangan bebas penyakit
- E_1, E_2 : titik kesetimbangan endemik
- J : matriks Jacobian
- λ : nilai eigen

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR LAMPIRAN

LAMPIRAN

A. Listing Program untuk Bifurkasi	71
B. Listing Program Numerik Runge-Kutta.....	73
C. Listing Program untuk Pengaruh Parameter Imigrasi pada Bifurkasi Mundur	76
D. Tabel Nilai Iterasi untuk $E_1 = (\check{I}_1, \check{V}_1) =$ (8.6 , 135.4)	80
E. Tabel Nilai Iterasi untuk $E_2 = (\check{I}_2, \check{V}_2) = (50.7 ,$ 82.8)	85
F. Tabel Nilai Iterasi untuk $(I(0), V(0)) = (9 , 120)$	88
G. Tabel Nilai Iterasi untuk $(I(0), V(0)) = (18 , 130)$	93
H. Tabel Nilai Iterasi untuk $(I(0), V(0)) = (50 , 100)$	97
I. Tabel Nilai Iterasi untuk $(I(0), V(0)) = (5 , 148)$	100
J. Biodata Penulis	105

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai latar belakang dari permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan dari Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Penyakit menular merupakan permasalahan kesehatan yang penting di Indonesia. Suatu bentuk pengobatan untuk beberapa penyakit menular adalah vaksinasi untuk mencegah terjadinya infeksi sebelum memulai epidemi. Pengertian Epidemio atau wabah adalah penyakit menular yang berjangkit dengan cepat di daerah yang luas dan tidak secara tetap berjangkit di daerah itu. Sedangkan pengertian endemik adalah penyakit yang menetap di suatu daerah atau golongan masyarakat.

Upaya pencegahan penyakit menular dapat dilakukan melalui dua tipe strategi yaitu melalui peranan farmasi (vaksinasi) dan non farmasi (karantina). Vaksinasi adalah pemberian bahan antigenik yang digunakan untuk menghasilkan kekebalan aktif terhadap suatu penyakit sehingga dapat mencegah atau mengurangi pengaruh infeksi[1].

Model matematika yang menggambarkan proses penyebaran penyakit menular yaitu model epidemi SIS (*Susceptible-Infected-Susceptible*). Model SIS menggambarkan penyebaran suatu penyakit yang dapat disembuhkan namun tidak memberikan kekebalan pada individu yang terinfeksi[2]. Pembentukan model epidemi dipengaruhi oleh beberapa faktor salah satunya adalah migrasi, dimana adanya perpindahan penduduk sehat ke daerah terdapat epidemi. Negara di dunia semakin terhubung melalui perjalanan serta migrasi. Dengan demikian, migrasi memiliki implikasi kesehatan dalam suatu lokasi untuk kedua migrasi lokal dan global, karena penyakit menular tidak tetap terisolasi secara geografis[3].

Penelitian sebelumnya dilakukan oleh Intan Putri Lestari tentang eksistensi bifurkasi mundur pada model penyebaran penyakit menular tipe SIS dengan vaksinasi dan didapatkan eksistensi bifurkasi mundur dikarenakan ketidakefektifan vaksin sehingga terdapat titik kesetimbangan endemik saat bilangan reproduksi dasar kurang dari satu[1]. Dalam epidemiologi, bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) berfungsi sebagai ambang batas untuk kestabilan kesetimbangan bebas penyakit.

Pada Tugas Akhir ini dianalisis model epidemi SIVS dengan pengaruh dampak penyebaran penduduk atau demografi, seperti imigrasi populasi individu rentan dan tervaksinasi atau imigrasi selain populasi terinfeksi. Dari kondisi tersebut diselidiki bagaimana imigrasi mempengaruhi perilaku bifurkasi terutama bifurkasi mundur. Selanjutnya dilakukan penyelesaian numerik dengan metode Runge-Kutta orde empat dan kemudian disimulasikan.

1.2 Rumusan Masalah

Berkaitan dengan latar belakang yang ada, permasalahan yang dibahas pada Tugas Akhir ini antara lain :

1. Bagaimana menentukan bilangan reproduksi dasar, kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dari model, kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik serta pengaruh imigrasi pada kurva bifurkasi mundur.
2. Bagaimana hasil analisis pada model epidemi SIVS dengan imigrasi non-infektif dan penyelesaian numerik dari model dengan metode Runge-Kutta serta kemudian disimulasikan.

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini dibatasi pada model epidemi SIVS dipengaruhi oleh imigrasi non-infektif yaitu imigrasi dari individu yang rentan (*susceptible*) dan divaksinasi (*vaccinated*).

1.4 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam Tugas Akhir ini adalah :

1. Mendapatkan bilangan reproduksi dasar, kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dari model, kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik serta pengaruh imigrasi pada kurva bifurkasi mundur sehingga dapat diketahui terjadi penyebaran penyakit atau tidak.
2. Mendapatkan hasil analisis dari model epidemi SIVS dengan imigrasi non-infektif dan penyelesaian numerik dari model dengan metode Runge-Kutta serta hasil simulasi.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dalam Tugas Akhir ini adalah :

1. Mengetahui dinamika model penyebaran penyakit epidemi tipe SIVS dengan imigrasi non-infektif.
2. Sebagai referensi bagi pihak medis/badan pemerintahan dalam menyelesaikan masalah penyebaran penyakit epidemi dengan model SIVS dimana terdapat imigrasi dari populasi yang rentan dan terinfeksi.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini secara keseluruhan terdiri dari lima bab dan lampiran. Secara garis besar masing-masing bab akan membahas hal-hal sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penulisan serta sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini memaparkan dasar teori dasar yang digunakan penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir, antara lain sistem kompartemen, kestabilan asimtotik lokal, bilangan reproduksi dasar, bifurkasi dan metode Runge-Kutta.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan alur kerja dan metode yang digunakan penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini menyajikan analisis kestabilan lokal dari model epidemi tipe SIVS yang dipengaruhi oleh imigrasi non-infektif, analisis bifurkasi dari bilangan reproduksi dasar yang telah diperoleh, mencari solusi numerik dengan metode Runge-Kutta, simulasi numerik dari model, dan pengaruh parameter imigrasi η dan ω pada kurva bifurkasi.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari penulis mengenai analisis kestabilan lokal dari model epidemi tipe SIVS yang dipengaruhi oleh imigrasi non-infektif.

LAMPIRAN

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai tinjauan pustaka yang menjadi dasar materi dalam penyusunan Tugas Akhir serta menunjang metode – metode yang digunakan dalam pembahasan tugas akhir ini.

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada Tugas Akhir Lestari[1] diteliti eksistensi bifurkasi mundur pada model penyebaran penyakit menular dengan vaksinasi. Model epidemi tipe SIS dengan vaksinasi tersebut didapatkan eksistensi bifurkasi mundur dikarenakan ketidakefektifan vaksin sehingga terdapat titik kesetimbangan endemik saat $\mathcal{R}_0 < 1$.

Penelitian terdahulu tentang bifurkasi mundur diteliti oleh A. B. Gumel[4] tentang penyebab bifurkasi mundur dalam beberapa model epidemi. Fenomena bifurkasi mundur pada model penyebaran penyakit standar Kermack-McKendrick yaitu dengan menggunakan standar laju kejadian untuk laju infeksi, yang merupakan akibat tidak adanya penyakit ketika bilangan reproduksi dasar model kurang dari satu.

Penelitian lain tentang bifurkasi mundur pada model vaksinasi sederhana oleh F. Brauer yang menjelaskan tentang kebijakan vaksinasi yang dapat menyebabkan bifurkasi mundur namun dapat menurunkan populasi infeksi. Jika vaksin dapat dikembangkan secara efektif kemungkinan ini tidak muncul, serta program yang menurunkan tingkat kontak juga dapat mengontrol penyakit tanpa menyebabkan bifurkasi mundur. Namun demikian, program vaksinasi yang tidak sepenuhnya efektif dapat mengendalikan infeksi[5].

2.2 Sistem Kompartemen

Sistem kompartemen merupakan sebuah susunan kerja atau proses yang menunjukkan aliran individu dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya seperti saat individu tersebut sehat, tertular penyakit atau sembuh dari penyakit[6].

2.3 Bilangan Reproduksi Dasar (\mathcal{R}_0)

Bilangan reproduksi dasar (*Basic Reproduction Number*) atau biasa disebut \mathcal{R}_0 adalah suatu parameter yang digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit disebabkan oleh satu individu yang terinfeksi. Bilangan reproduksi dasar digunakan untuk menganalisis model epidemi pada penyakit menular. Kondisi yang akan timbul adalah satu diantara tiga kemungkinan berikut:

1. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang dalam populasi.
2. Jika $\mathcal{R}_0 = 1$, maka penyakit akan menetap dalam populasi.
3. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah dalam populasi.

Bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh dengan menentukan nilai eigen (nilai karakteristik) dari matriks Jacobian yang dihitung pada titik kesetimbangan bebas penyakit[7].

Beberapa kondisi yang akan timbul yaitu jika model hanya mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, maka tidak terjadi endemik jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan terjadi endemik jika $\mathcal{R}_0 > 1$

2.4 Kestabilan Titik Tetap

Pandang sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Sebuah titik (\bar{x}_0, \bar{y}_0) merupakan titik kesetimbangan dari sistem persamaan (2.1) jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ dan $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan [8].

$$x(t) \equiv \bar{x}_0, \text{ dan } y(t) \equiv \bar{y}_0$$

adalah penyelesaian kesetimbangan dari persamaan (2.1) untuk semua $t \geq 0$.

Kestabilan asimtotik lokal merupakan kestabilan dari sistem linier atau kestabilan dari linierisasi sistem tak linier. Kestabilan lokal pada titik kesetimbangan ditentukan oleh tanda bagian realnya.

Definisi 2.1 [8]: Jika J adalah matriks yang berukuran $n \times n$ maka vektor tak nol dinamakan vektor karakteristik dari J jika memenuhi :

$$Jx = \lambda x \tag{2.2}$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai karakteristik dari J dan x dikatakan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai karakteristik matrik J yang berukuran $n \times n$, maka persamaan (2.2) dapat ditulis:

$$\begin{aligned}(J - \lambda I)x &= 0 \\ |J - \lambda I| &= 0\end{aligned}\tag{2.3}$$

Jika matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sehingga dapat ditulis

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0$$

Akar - akar karakteristik

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

Sifat stabilitas titik setimbang berdasarkan tanda bagian real dibagi menjadi 3 yaitu:

1. Stabil

Titik setimbang dikatakan stabil jika dan hanya jika akar karakteristik mempunyai bagian real yang bernilai negatif atau mempunyai bagian real tak positif.

2. Stabil asimtotis

Titik setimbang dikatakan stabil asimtotis jika dan hanya jika akar karakteristik mempunyai bagian real negatif .

3. Tidak stabil

Titik setimbang dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat sedikitnya satu akar karakteristik yang mempunyai bagian positif.

Teorema 2.2 : Titik setimbang (\vec{x}_0, \vec{y}_0) stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik dari Matriks $J =$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

2.4.1 Linearisasi Sistem

Linearisasi sistem adalah metode yang lebih mudah untuk menentukan kestabilan suatu sistem dengan menyelidiki pengaruh perubahan kecil pada syarat awal. Jika titik (x_0, y_0) adalah titik kesetimbangan maka diselidiki pengaruh perubahan kecil pada titik kesetimbangan tersebut. Jika titik (x, y)

merupakan titik di sekitar titik kesetimbangan maka secara matematis titik (x, y) dapat diekspresikan sebagai $(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Pendekatan fungsi $f_1(x, y)$ dan $f_2(x, y)$ dapat ditentukan dengan menggunakan ekspansi Deret Taylor,

$$f_1(x, y) \approx f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) + \dots$$

$$f_2(x, y) \approx f_2(x_0, y_0) + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) + \dots$$

Karena (x_0, y_0) adalah titik kesetimbangan maka $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0$. Oleh karena itu, sistem (2.1) dapat didekati sebagai sistem linear

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$$

Sistem linear di atas dapat disajikan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = J(x) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Matriks $J(x)$ pada sistem (2.4) merupakan matriks Jacobian.

2.4.2 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Kriteria kestabilan Routh – Hurwitz adalah suatu metode untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung.

Jika diketahui suatu persamaan karakteristik dengan orde ke-n sebagai berikut :

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

Kemudian susun koefisien persamaan karakteristik seperti pada Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1. Koefisien Persamaan Karakteristik

Nilai Eigen	Koefisien				Keterangan
λ^n	a_0	a_2	a_4	$a_{2n-2}, n = 1, 2, \dots, k$
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	$a_{2n-1}, n = 1, 2, \dots, k$
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_n
.....	c_1	c_2	c_3	c_n
.....

dengan

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1},$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1},$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - b_3 a_1}{b_1}$$

Tabel 2.1 tersebut dilanjutkan mendatar dan menurun hingga diperoleh nilai nol. Semua akar tersebut dilanjutkan bernilai negatif pada bagian realnya jika dan hanya jika elemen-elemen

dari kolom pertama pada Tabel 2.1 mempunyai tanda yang sama. Selanjutnya ambil persamaan karakteristik orde ke-3 berikut :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (2.5)$$

Sehingga akan diperoleh tabel Routh-Hurwitz sebagai berikut :

Tabel 2.2 Routh-Hurwitz

Nilai Eigen	Koefisien		
λ^3	1	a_2	0 0
λ^2	a_1	a_3	0 0
λ^1	$(a_1a_2 - a_3) / a_1$	0	0 0
λ^0	$a_3(a_1a_2 - a_3) / (a_1a_2 - a_3)$	0	0 0
λ^{-1}	0		

Supaya akar-akar karakteristik bernilai negatif pada bagian realnya maka kolom pertama pada Tabel 2.2 harus mempunyai tanda yang sama yaitu :

1. $a_1 > 0$
2. $\frac{a_1a_2 - a_3}{a_1} > 0 \rightarrow a_1a_2 - a_3 > 0$
 $a_1a_2 > a_3$ supaya memenuhi maka nilai $a_2 > 0$
3. $\frac{a_3(a_1a_2 - a_3)}{a_1a_2 - a_3} > 0 \rightarrow a_3 > 0$

Jadi perhitungan di atas dapat diperoleh bahwa untuk persamaan (2.5) akan diperoleh akar-akar karakteristik yang bernilai negatif pada bagian realnya jika memenuhi

$$a_1 > 0 ; a_2 > 0 ; a_3 > 0 ; a_1a_2 > a_3$$

2.5 Metode Runge-Kutta[9]

Metode Runge-Kutta merupakan pengembangan dari metode Euler, dimana perhitungan penyelesaian dilakukan step demi step. Untuk fungsi dari persamaan diferensial:

$$y' = f(x, y)$$

Dengan titik pendekatan awal x_0, y_0 , berdasarkan metode Euler nilai fungsi penyelesaian diperoleh dengan:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n(x_n, y_n)$$

Metode Runge-Kutta membuat step (h) atau langkah waktu yang lebih kecil dari perubahan nilai dengan membagi nilai perubahan tiap step menjadi sejumlah bagian yang ditentukan, bentuk paling sederhana dari metode Runge-Kutta adalah membagi bagian perubahan menjadi dua bagian atau disebut metode Runge-Kutta orde dua sehingga:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

Selanjutnya, pada metode Runge-Kutta orde tiga ini digunakan empat nilai koefisien perbaikan yaitu k_1, k_2, k_3 dan k_4 yang diberikan sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

2.6 Kriteria Bendixson-Dulac

Misalkan $D \subseteq R^2$ dan diberikan $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)$ adalah fungsi di $D \subseteq R^2$ ke C^1 . C^1 merupakan fungsi yang kontinu dan terdiferensial sampai turunan pertama dan $D \subseteq R^2$ adalah daerah terhubung sederhana pada R^2 . Pandang sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{2.6}$$

Jika pada suatu daerah $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial(f_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2)}{\partial x_2}$ tidak identik dengan nol dan tidak berubah tanda, maka sistem (2.6) tidak memiliki orbit periodik di D . Pernyataan ini dikenal sebagai Kriteria Bendixson. Generalisasi dari kriteria Bendixson oleh Dulac adalah sebagai berikut :

Teorema 2.3[10] *Diberikan sebuah fungsi $h(x_1, x_2)$ yang merupakan fungsi C' pada daerah $D \subset \mathbb{R}^2$. Jika $\frac{\partial(f_1 h)}{\partial x_1} + \frac{\partial(f_2 h)}{\partial x_2}$ tidak identik dengan nol dan tidak berubah tanda di D , maka sistem (2.6) tidak memiliki orbit periodik di D .*

Kriteria Bendixson-Dulac menjelaskan tentang ketidakeksistensi orbit periodik. Untuk menunjukkan eksistensi orbit periodik, maka diberikan teorema berikut:

Teorema Poincaré-Bendixson[10] *Diberikan sebuah persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ pada \mathbb{R}^2 .*

- (a) *Diasumsikan bahwa \mathbf{F} terdefinisi pada \mathbb{R}^2 . Asumsikan bahwa orbit maju $[\phi(t, \mathbf{q}): t \geq 0]$ terbatas maka $\omega(\mathbf{q})$*
 - (i) *memuat satu titik tetap atau*
 - (ii) *merupakan orbit periodik.*
- (b) *Diasumsikan A subset tertutup dan terbatas pada \mathbb{R}^2 yaitu invarian positif pada untuk persamaan diferensial. Diasumsikan bahwa $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ terdefinisi pada semua titik di A dan tidak mempunyai titik tetap di A . Maka jika diberikan sebarang \mathbf{x}_0 di A , orbit $\phi(t, \mathbf{x}_0)$ merupakan*
 - (i) *Orbit periodik atau*
 - (ii) *Menuju orbit periodik selama t menuju ∞ dan $\omega(\mathbf{x}_0)$ berupa orbit periodik.*

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan bagaimana langkah-langkah yang dilakukan dalam melakukan analisis kestabilan dari model epidemi tipe SIVS yang dipengaruhi oleh imigrasi non-infektif.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan analisis model dengan mempelajari literatur-literatur yang terkait seperti jurnal, paper dan buku-buku yang berhubungan dengan model epidemi tipe SIVS yang dipengaruhi oleh imigrasi non-infektif dan metode numerik Runge Kutta.

3.2 Tahap Mengkaji Model Epidemi SIVS dengan Imigrasi Non-Infektif

Tahap mengkaji model epidemi tipe SIVS yang dipengaruhi oleh imigrasi non-infektif dilakukan untuk memahami model sehingga dapat dibuat model kompartemen dengan pengaruh imigrasi dari model epidemik SIVS, yang nantinya terdapat tiga kompartemen yaitu *susceptible*, *infected* dan *vaccinated*.

3.3 Tahap Mencari Titik Keseimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar

Pada tahap ini dilakukan analisis model epidemi tipe SIVS yang dipengaruhi oleh imigrasi non-infektif sehingga didapatkan titik keseimbangan bebas penyakit, titik keseimbangan endemik, dan bilangan reproduksi dasar.

3.4 Tahap Menganalisis Kestabilan Lokal dari Setiap Titik Keseimbangan dan Bifurkasi

Tahap ini akan dicari kestabilan lokal dari titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik dengan memasukkan nilai keseimbangan kedalam matriks Jacobian, sehingga didapatkan nilai akar-akar karakteristik dari matriks

Jacobiannya untuk mengetahui kestabilan asimtotik lokal pada titik–titik tersebut. Selanjutnya menentukan kurva bifurkasi melalui nilai \mathcal{R}_0 .

3.5 Tahap Simulasi Numerik Runge-Kutta

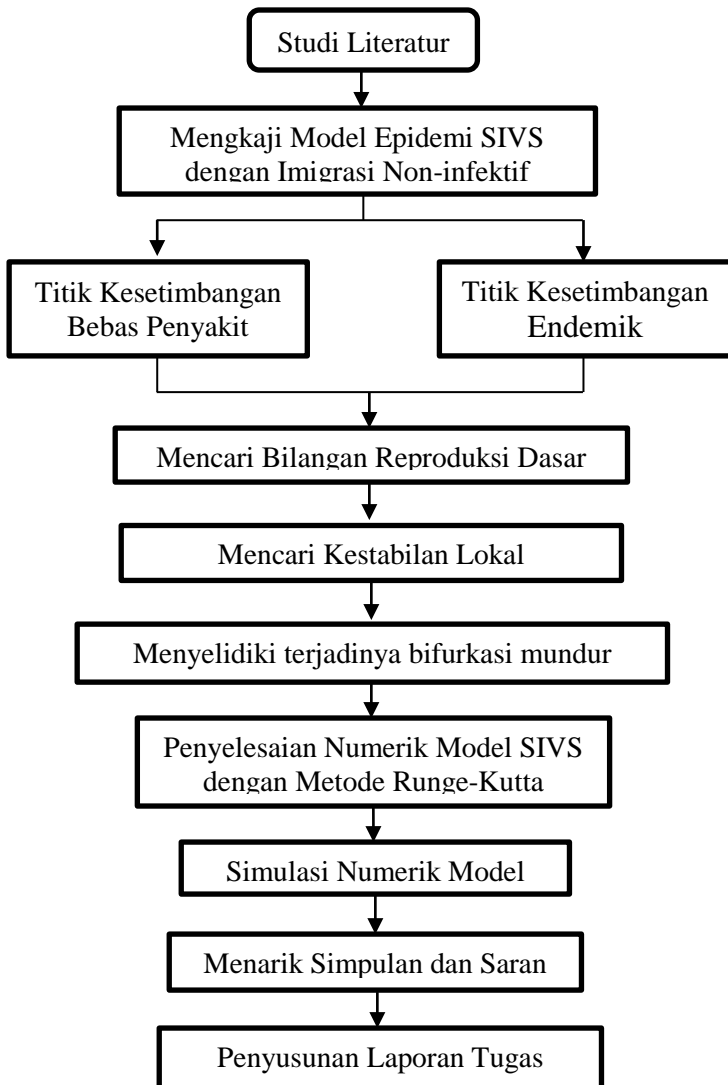
Tahap simulasi numerik Runge-Kutta orde empat dilakukan untuk menggambarkan grafik kestabilan dan penyelesaian numerik model epidemi tipe SIVS yang dipengaruhi oleh imigrasi non-infektif.

3.6 Kesimpulan dan Saran

Setelah dilakukan analisis dan pembahasan maka dapat ditarik suatu kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

3.7 Diagram Alir

Diagram alir dimaksudkan untuk memudahkan dalam pengerjaan Tugas Akhir agar lebih sistematis. Diagram alir yang digunakan pada penelitian ini disajikan pada Gambar 3.1 berikut:



Gambar 3.1 Diagram alir penelitian Tugas Akhir

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai model epidemi tipe SIVS dengan imigrasi non-infektif, daerah penyelesaian model, titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik, bilangan reproduksi dasar, menentukan bifurkasi (bifurkasi mundur) berdasarkan nilai bilangan reproduksi dasar, kestabilan lokal dari setiap titik kesetimbangan tersebut. Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian numerik model dengan metode Runge-Kutta beserta simulasinya untuk mengetahui kestabilan dari model.

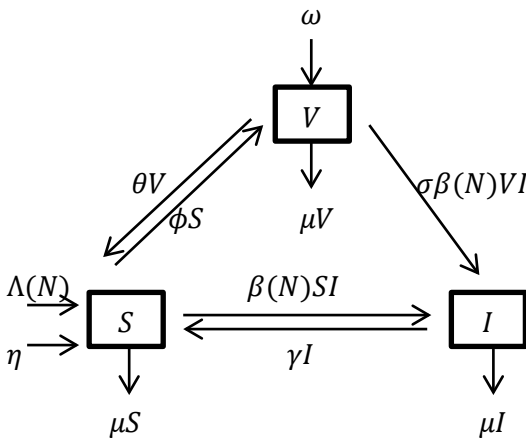
4.1 Model SIVS dengan Imigrasi Non-Infektif[11]

Pada model epidemi tipe SIVS dengan pengaruh imigrasi non-infektif mempunyai asumsi – asumsi sebagai berikut :

1. Jumlah populasi individu dinyatakan sebagai $N(t) = S(t) + I(t) + V(t)$ dan populasi dibagi menjadi 3 kelompok individu yaitu :
 - $S(t)$ adalah populasi *Susceptible* (kelompok individu yang rentan terhadap penyakit)
 - $I(t)$ adalah populasi *Infected* (kelompok individu yang terjangkit dan dapat menularkan penyakit)
 - $V(t)$ adalah populasi *Vaccinated* (kelompok individu yang divaksinasi)
2. $\Lambda(N)$ merupakan fungsi kelahiran pada populasi *susceptible* dan μ adalah laju kematian pada populasi *susceptible*, *infected* dan *vaccinated*.
3. Parameter-parameter yang terdapat dalam model epidemi SIVS dengan imigrasi non infektif adalah:
 - a. β adalah konstanta yang menunjukkan tingkat kontak sehingga terjadi penularan penyakit.
 - b. ϕ adalah proporsi dari populasi *susceptible* yang divaksinasi.

- c. θ adalah proporsi dari populasi *vaccinated* yang menjadi populasi *susceptible* dengan $0 \leq \theta \leq 1$.
 - d. σ adalah proporsi dari populasi *vaccinated* yang menjadi populasi *infected* dengan $0 \leq \sigma \leq 1$.
 - e. γ adalah laju kesembuhan dari individu yang terinfeksi.
4. Laju konstan imigrasi individu ke populasi *susceptible* dan *vaccinated*, dengan parameter η adalah laju imigrasi individu ke populasi yang rentan (*susceptible*) dan parameter ω adalah laju imigrasi individu ke populasi yang divaksinasi (*vaccinated*).

Dari asumsi – asumsi tersebut maka didapatkan diagram kompartemen model epidemi tipe SIVS dengan imigrasi non-infektif sebagai berikut :



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Epidemi tipe SIVS dengan Imigrasi Non-Infektif

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.1 diperoleh model epidemik tipe SIVS sebagai berikut :

- a. Persamaan diferensial untuk *Susceptible* adalah :

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda(N) - \beta(N)SI - (\mu + \phi)S + \gamma I + \theta V + \eta$$

yaitu besarnya laju populasi dari suatu individu yang rentan terhadap penyakit dipengaruhi oleh fungsi kelahiran dari jumlah seluruh populasi $\Lambda(N)$, laju penyembuhan dari individu yang terinfeksi γI , proporsi dari populasi *vaccinated* yang menjadi populasi *susceptible* θV , laju konstan imigrasi individu ke populasi *susceptible* η , menurunnya populasi disebabkan oleh laju kematian pada populasi *susceptible* μS , populasi yang divaksinasi ϕS , laju kontak antara populasi *susceptible* dan *infected* sehingga terjadi infeksi $\beta(N)SI$.

- b. Persamaan diferensial untuk *Infected* adalah :

$$\frac{dI}{dt} = \beta(N)SI + \sigma\beta(N)VI - (\mu + \gamma)I$$

yaitu besarnya laju populasi yang terinfeksi penyakit (*Infected*) dipengaruhi oleh laju kontak antara populasi *susceptible* dan *infected* sehingga terjadi infeksi $\beta(N)SI$, laju ketidakefektifan vaksin pada populasi yang divaksinasi menjadi populasi infeksi $\sigma\beta(N)VI$, menurunnya populasi *Infected* disebabkan oleh laju kematian μI dan laju kesembuhan dari populasi *Infected* γI .

- c. Persamaan diferensial untuk *Vaccinated* adalah :

$$\frac{dV}{dt} = \phi S - \sigma\beta(N)VI - (\mu + \theta)V + \omega$$

yaitu besarnya laju populasi yang divaksinasi (*Vaccinated*), bertambahnya populasi dipengaruhi oleh laju populasi *Susceptible* yang divaksinasi ϕS dan laju konstan imigrasi dari individu yang divaksinasi ω , menurunnya populasi *Vaccinated* disebabkan oleh laju ketidakefektifan vaksin pada populasi yang divaksinasi menjadi populasi infeksi $\sigma\beta(N)VI$.

Dari penjelasan sebelumnya maka model epidemi tipe SIVS dengan pengaruh dari imigrasi non-infektif dapat ditulis sebagai sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \Lambda(N) - \beta(N)SI - (\mu + \phi)S + \gamma I + \theta V + \eta \\ \frac{dI}{dt} &= \beta(N)SI + \sigma\beta(N)VI - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dV}{dt} &= \phi S - \sigma\beta(N)VI - (\mu + \theta)V + \omega\end{aligned}\quad (4.1)$$

dengan kondisi awal:

$$S(0) \geq 0, \quad I(0) \geq 0, \quad V(0) \geq 0$$

Jumlah populasi $S(t) + I(t) + V(t) = N(t)$ dengan N adalah jumlah populasi, maka dalam hal ini

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dt}$$

Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow & \Lambda(N) - \beta(N)SI - (\mu + \phi)S + \gamma I + \theta V + \eta + \beta(N)SI \\ & + \sigma\beta(N)VI - (\mu + \gamma)I + \phi S - \sigma\beta(N)VI \\ & - (\mu + \theta)V + \omega = \frac{dN}{dt} \\ \Leftrightarrow & \Lambda(N) - \mu S - \mu I - \mu V + \eta + \omega = \frac{dN}{dt} \\ \Leftrightarrow & \Lambda(N) - \mu(S + I + V) + \eta + \omega = \frac{dN}{dt} \\ \Leftrightarrow & \Lambda(N) - \mu N + \eta + \omega = \frac{dN}{dt}\end{aligned}\quad (4.2)$$

4.2 Daerah Penyelesaian Model

Diketahui bahwa K adalah jumlah maksimum dari sebuah populasi, maka

$$N = S + I + V =: K$$

Populasi N digantikan dengan K dan $\Lambda(N)$ digantikan dengan $\Lambda(K) = \mu K - \eta - \omega$.

Dengan substitusi kapasitas populasi K dan $S = N - I - V = K - I - V$ ke persamaan (4.1)₂ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \beta(N)SI + \sigma\beta(N)VI - (\mu + \gamma)I \\ \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} &= \beta(K)(K - I - V)I + \sigma\beta(K)VI - (\mu + \gamma)I \\ \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} &= (\beta(K)K - \beta(K)I - \beta(K)V)I + \sigma\beta(K)VI - (\mu \\ &\quad + \gamma)I \\ \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} &= \beta(K)(K - I - V + \sigma V)I - (\mu + \gamma)I \\ \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} &= \beta(K)(K - I - (1 - \sigma)V)I - (\mu + \gamma)I \end{aligned}$$

dengan $\beta = \beta(K)$ sehingga persamaan (4.1)₂ menjadi

$$\Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = \beta(K - I - (1 - \sigma)V)I - (\mu + \gamma)I$$

Begitu juga untuk persamaan (4.1)₃, disubstitusikan kapasitas populasi K dan $S = N - I - V = K - I - V$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \phi S - \sigma\beta(N)VI - (\mu + \theta)V + \omega \\ \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} &= \phi(K - I - V) - \sigma\beta(K)VI - (\mu + \theta)V + \omega \\ \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} &= \phi K - \phi I - \phi V - \sigma\beta(K)VI - (\mu + \theta)V + \omega \\ \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} &= \phi K - \phi I - \sigma\beta(K)VI - (\mu + \theta + \phi)V + \omega \\ \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} &= \phi(K - I) - \sigma\beta(K)VI - (\mu + \theta + \phi)V + \omega \end{aligned}$$

dimana $\beta = \beta(K)$ sehingga persamaan (4.1)₃ menjadi

$$\Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = \phi(K - I) - \sigma\beta VI - (\mu + \theta + \phi)V + \omega$$

Sehingga persamaan baru dari model hasil reduksi adalah:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \beta(K - I - (1 - \sigma)V)I - (\mu + \gamma)I \\ \frac{dV}{dt} &= \phi(K - I) - \sigma\beta VI - (\mu + \theta + \phi)V + \omega \end{aligned} \tag{4.3}$$

Karena K merupakan kapasitas maksimum dari populasi, maka keadaan awal pada sistem (4.3) dipenuhi oleh teorema berikut:

Teorema 4.1[11] *Jika $I(0), V(0) \geq 0$, $I(0) + V(0) \leq K$, maka $I(t), V(t) \geq 0$, $I(t) + V(t) \leq K$ dipenuhi untuk setiap $t > 0$.*

Bukti: Pada sistem (4.3), jika $I(t) = 0$ maka $I'(t) = 0$ yang menunjukkan bahwa kondisi awal I tidak pernah negatif untuk $t > 0$. Jika $V(t) = 0$ atau tidak terdapat populasi divaksinasi ketika $0 \leq I(t) \leq K$, maka $V'(t) \geq \omega \geq 0$. Oleh karena itu, penyelesaian tidak pernah keluar dari $V = 0$ atau pada bidang SI pada daerah $R: I, V \geq 0, I + V \leq K$. Selanjutnya dengan menjumlahkan model reduksi pada sistem (4.3) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dt} &= \beta(K - I - (1 - \sigma)V)I - (\mu + \gamma)I + \phi(K - I) \\ &\quad - \sigma\beta VI - (\mu + \theta + \phi)V + \omega \\ \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dt} &= \beta KI - \beta I^2 - \beta VI + \beta\sigma VI - \mu I - \gamma I + \phi K \\ &\quad - \phi I - \sigma\beta VI - \mu V - \theta V - \phi V + \omega \end{aligned}$$

dengan substitusi $I(t) + V(t) = K$ ketika $I(t), V(t) \geq 0$ maka persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dt} &= \beta(I + V)I - \beta I^2 - \beta VI - \mu I - \mu V + \phi(I + V) \\ &\quad - \phi I - \phi V - \gamma I - \theta V + \omega \\ \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dt} &= -\mu K - \gamma I - \theta V + \omega \end{aligned} \tag{4.4}$$

Karena diketahui bahwa $\omega - \mu K$ negatif, maka persamaan (4.4) bernilai negatif. Oleh karena itu $I(t) + V(t) < K$. ■

Dengan demikian diperoleh daerah penyelesaian

$$\Omega = \{(I + V) \in R_+^2: I, V \geq 0, I + V \leq K\}.$$

Karena kondisi awal $I(0) \geq 0$ dan $V(0) \geq 0$ maka Ω merupakan invarian positif dan atraktif untuk penyelesaian sistem (4.3). Jadi,

semua penyelesaian yang dimulai di Ω tidak pernah meninggalkan R_+^2 .

4.2 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Titik keseimbangan penyakit adalah suatu keadaan dimana tidak terjadi penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi. Dari $\frac{dI}{dt} = 0$ dan $\frac{dV}{dt} = 0$ maka akan diperoleh titik keseimbangan. Jika mengambil $I = 0$ maka diperoleh titik kestimbangan bebas penyakit dimana pada keadaan ini semua individu masuk ke dalam populasi *Vaccinated* dan tidak ada individu yang masuk pada populasi *Infected* yang dapat menyebarkan penyakit.

Dari persamaan (4.3)₂

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \phi(K - I) - \sigma\beta VI - (\mu + \theta + \phi)V + \omega &= 0 \\ \Leftrightarrow \phi K - (\mu + \theta + \phi)V + \omega &= 0 \end{aligned}$$

diperoleh

$$V = \frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)}. \quad (4.5)$$

Kemudian diberikan titik keseimbangan bebas penyakit $E_0 = (\bar{I}, \bar{V})$, dengan $\bar{V} = \frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)}$. Sehingga titik keseimbangan bebas penyakit untuk model tersebut adalah

$$E_0 = \left(0, \frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right) \quad (4.6)$$

4.2.1 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*) atau \mathcal{R}_0 merupakan parameter untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Pada model epidemi, \mathcal{R}_0 merupakan ambang batas dari kestabilan titik keseimbangan bebas penyakit.

Model epidemi tipe SIVS dengan imigrasi non-infektif merupakan model persamaan diferensial tak linier, sehingga perlu dilakukan linearisasi terlebih dahulu. Untuk melakukan linearisasi digunakan ekspansi Deret Taylor, pada sistem (4.3).

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= A(I, V) = \beta KI - \beta I^2 - \beta VI + \sigma \beta VI - \mu I - \gamma I \\ \frac{dV}{dt} &= B(I, V) = \phi K - \phi I - \sigma \beta VI - \mu V - \theta V - \phi V + \omega\end{aligned}\quad (4.7)$$

dengan titik tetap (I^0, V^0) maka

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= A(I^0, V^0) = 0 \\ \frac{dV}{dt} &= B(I^0, V^0) = 0.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Misal:

$$\begin{aligned}I - I^0 &= u \Rightarrow \dot{I} = \dot{u} \\ V - V^0 &= v \Rightarrow \dot{V} = \dot{v}\end{aligned}\quad (4.9)$$

Deret Taylor dari sistem (4.7)

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= A(I^0, V^0) + (I - I^0) \frac{\partial A}{\partial I} + (V - V^0) \frac{\partial A}{\partial V} + \dots \\ \frac{dV}{dt} &= B(I^0, V^0) + (I - I^0) \frac{\partial B}{\partial I} + (V - V^0) \frac{\partial B}{\partial V} + \dots\end{aligned}$$

Berdasarkan sistem (4.8), maka diperoleh linearisasi dari sistem (4.7) adalah

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= (I - I^0) \frac{\partial A}{\partial I} + (V - V^0) \frac{\partial A}{\partial V} \\ \frac{dV}{dt} &= (I - I^0) \frac{\partial B}{\partial I} + (V - V^0) \frac{\partial B}{\partial V}\end{aligned}$$

Dengan menggunakan sistem (4.9), maka ekspansi deret Taylor untuk suku-suku liniernya adalah

$$\frac{dI}{dt} = u \frac{\partial A}{\partial I} + v \frac{\partial A}{\partial V}$$

$$\frac{dV}{dt} = u \frac{\partial B}{\partial I} + v \frac{\partial B}{\partial V}$$

Sehingga dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{dI}{dt} \\ \frac{dV}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial I} & \frac{\partial A}{\partial V} \\ \frac{\partial B}{\partial I} & \frac{\partial B}{\partial V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Matriks Jacobian dari matriks diatas adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial I} & \frac{\partial A}{\partial V} \\ \frac{\partial B}{\partial I} & \frac{\partial B}{\partial V} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\frac{\partial A}{\partial I} = \beta(K) - 2\beta I - \beta V + \sigma\beta V - \mu - \gamma$$

$$\frac{\partial A}{\partial V} = -\beta I + \sigma\beta I = -(1 - \sigma)\beta I$$

$$\frac{\partial B}{\partial I} = -(\phi + \sigma\beta V)$$

$$\frac{\partial B}{\partial V} = -(\mu + \theta + \phi + \sigma\beta I).$$

Dari hasil diferensial, dapat ditulis dalam bentuk matriks Jacobian sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} \beta K - 2\beta I - \beta V + \sigma\beta V - \mu - \gamma & -(1 - \sigma)\beta I \\ -(\phi + \sigma\beta V) & -(\mu + \theta + \phi + \sigma\beta I) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Kemudian, substitusi titik kesetimbangan bebas penyakit (4.6) pada (4.10)

$$J = \begin{bmatrix} \beta K - \beta(1 - \sigma) \left(\frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right) - (\mu + \gamma) & 0 \\ -\phi - \sigma\beta \left(\frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right) & -(\mu + \theta + \phi) \end{bmatrix}$$

Dicari nilai eigen dengan menggunakan

$$|J - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \beta K - \beta(1 - \sigma) \left(\frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right) - (\mu + \gamma) - \lambda & 0 \\ -\phi - \sigma \beta \left(\frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right) & -(\mu + \theta + \phi) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\beta K - \beta(1 - \sigma) \left(\frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right) - (\mu + \gamma) - \lambda \right) (-(\mu + \theta + \phi) - \lambda) = 0$$

diperoleh

$$\left(\lambda - \left(\beta K - \beta(1 - \sigma) \left(\frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right) - (\mu + \gamma) \right) \right) (\lambda + (\mu + \theta + \phi)) = 0$$

Maka didapatkan

$$1. \lambda_1 = -(\mu + \theta + \phi) < 0 \quad (4.11)$$

λ_1 stabil

$$2. \lambda - \left(\beta K - \beta(1 - \sigma) \left(\frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right) - (\mu + \gamma) \right) = 0$$

$$\lambda_2 = \beta K - \beta(1 - \sigma) \left(\frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right) - (\mu + \gamma)$$

$$\lambda_2 = \beta K - \beta(1 - \sigma) \bar{V} - (\mu + \gamma)$$

$$= (\mu + \gamma) \left(-1 + \frac{\beta K - \beta(1 - \sigma) \bar{V}}{(\mu + \gamma)} \right)$$

$$= (\mu + \gamma) (-1 + R_0)$$

$$\lambda_2 = (\mu + \gamma) (R_0 - 1) \quad (4.12)$$

Sehingga diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta K - \beta(1 - \sigma) \bar{V}}{(\mu + \gamma)} = \frac{\beta(K - (1 - \sigma) \bar{V})}{(\mu + \gamma)} \quad (4.13)$$

dengan substitusi persamaan (4.5) ke persamaan (4.13) diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{(\mu+\gamma)} \left(\frac{K(\mu+\theta+\phi\sigma)}{(\mu+\theta+\phi)} - \frac{\omega(1-\sigma)}{(\mu+\theta+\phi)} \right) \quad (4.14)$$

4.2.2 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Setelah didapatkan titik kesetimbangan maka dilakukan analisis kestabilan. Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui laju penyebaran suatu penyakit.

Sekarang akan dicari kestabilan lokal dari titik kesetimbangan bebas penyakit pada model epidemi tipe SIVS yang dipengaruhi oleh imigrasi non-infektif.

Teorema 4.2[11] *Titik kesetimbangan bebas penyakit dari sistem (4.3) stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.*

Bukti: Telah diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (\bar{I}, \bar{V}) = \left(0, \frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right)$. Kestabilan model ditentukan oleh nilai eigen pada matriks Jacobian (4.10) dari sistem (4.3).

Berdasarkan nilai eigen yang telah diperoleh pada persamaan (4.11) dan (4.12) maka

$$\lambda_1 = -(\mu + \theta + \phi) < 0$$

dan

$$\lambda_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (\mu + \gamma)(R_0 - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow R_0 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow R_0 < 1$$

Hal ini membuktikan jika $R_0 < 1$ maka semua nilai eigen dari akar persamaan karakteristik (4.16) bernilai real negatif sehingga titik kesetimbangan $E_0 = (\bar{I}, \bar{V}) = \left(0, \frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right)$ stabil asimtotik, sebaliknya jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan E_0 tidak stabil.

4.3 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik kesetimbangan endemik adalah suatu keadaan dimana terjadi infeksi penyakit di dalam populasi. Diberikan titik kesetimbangan endemik $E = (\hat{I}, \hat{V})$ digunakan untuk menunjukkan adanya kemungkinan penyebaran penyakit. Dari $\frac{d\hat{I}}{dt} = 0$ dan $\frac{d\hat{V}}{dt} = 0$ maka akan diperoleh titik kesetimbangan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{I}}{dt} = 0 &\Leftrightarrow \beta(K - \hat{I} - (1 - \sigma)\hat{V})\hat{I} - (\mu + \gamma)\hat{I} = 0 \\ \frac{d\hat{V}}{dt} = 0 &\Leftrightarrow \phi(K - \hat{I}) - \sigma\beta\hat{V}\hat{I} - (\mu + \theta + \phi)\hat{V} + \omega = 0\end{aligned}$$

Dari persamaan (4.3)₁

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{I}}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta(K - \hat{I} - (1 - \sigma)\hat{V})\hat{I} - (\mu + \gamma)\hat{I} &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta(K - \hat{I})\hat{I} - \beta(1 - \sigma)\hat{V}\hat{I} - (\mu + \gamma)\hat{I} &= 0 \\ \Leftrightarrow \hat{V} &= \frac{\beta(K - \hat{I})\hat{I} - (\mu + \gamma)\hat{I}}{\beta(1 - \sigma)\hat{I}} \\ \Leftrightarrow \hat{V} &= \frac{\beta(K - \hat{I}) - (\mu + \gamma)}{\beta(1 - \sigma)}\end{aligned}\tag{4.15}$$

Kemudian substitusi persamaan (4.15) ke persamaan (4.3)₂

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{V}}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \phi(K - \hat{I}) - \sigma\beta\hat{V}\hat{I} - (\mu + \theta + \phi)\hat{V} + \omega &= 0 \\ \Leftrightarrow \phi(K - \hat{I}) - \sigma\beta\left(\frac{\beta(K - \hat{I}) - (\mu + \gamma)}{\beta(1 - \sigma)}\right)\hat{I} \\ &\quad - (\mu + \theta + \phi)\left(\frac{\beta(K - \hat{I}) - (\mu + \gamma)}{\beta(1 - \sigma)}\right) + \omega = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left[\phi(K - \hat{I})\beta(1 - \sigma) - \sigma\beta(\beta(K - \hat{I}) - (\mu + \gamma))\hat{I} \right. \\
&\quad \left. - (\mu + \theta + \phi)(\beta(K - \hat{I}) - (\mu + \gamma)) \right. \\
&\quad \left. + \omega\beta(1 - \sigma) \right] \frac{1}{\beta(1 - \sigma)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\phi\beta(K - \sigma K - \hat{I} + \sigma\hat{I}) - \sigma\beta^2 K\hat{I} + \sigma\beta^2 \hat{I}^2 + \sigma\beta\hat{I}\mu + \sigma\beta\hat{I}\gamma \right. \\
&\quad \left. - (\beta(K - \hat{I})(\mu + \theta + \phi) \right. \\
&\quad \left. + (\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)) + \omega\beta(1 - \sigma) \right] \frac{1}{\beta(1 - \sigma)} \\
&\quad = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\phi\beta K - \phi\beta\sigma K - \phi\beta\hat{I} + \phi\beta\sigma\hat{I} - \sigma\beta^2 K\hat{I} + \sigma\beta^2 \hat{I}^2 + \sigma\beta\hat{I}\mu \right. \\
&\quad \left. + \sigma\beta\hat{I}\gamma - \beta(\mu K - \mu\hat{I} + \theta K - \theta\hat{I} + \phi K - \phi\hat{I}) \right. \\
&\quad \left. + \mu^2 + \mu\gamma + \theta\mu + \theta\gamma + \phi\mu + \phi\gamma \right. \\
&\quad \left. + \omega\beta(1 - \sigma) \right] \frac{1}{\beta(1 - \sigma)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\phi\beta K - \phi\beta\sigma K - \phi\beta\hat{I} + \phi\beta\sigma\hat{I} - \sigma\beta^2 K\hat{I} + \sigma\beta^2 \hat{I}^2 + \sigma\beta\hat{I}\mu \right. \\
&\quad \left. + \sigma\beta\hat{I}\gamma - \beta\mu K + \beta\mu\hat{I} - \beta\theta K + \beta\theta\hat{I} - \beta\phi K \right. \\
&\quad \left. + \beta\phi\hat{I} + \mu^2 + \mu\gamma + \theta\mu + \theta\gamma + \phi\mu + \phi\gamma \right. \\
&\quad \left. + \omega\beta(1 - \sigma) \right] \frac{1}{\beta(1 - \sigma)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\sigma\beta^2 \hat{I}^2 + \phi\beta K - \beta\phi K - \phi\beta\hat{I} + \beta\phi\hat{I} + \phi\beta\sigma\hat{I} - \sigma\beta^2 K\hat{I} \right. \\
&\quad \left. + \sigma\beta\hat{I}\mu + \sigma\beta\hat{I}\gamma + \beta\mu\hat{I} + \beta\theta\hat{I} - \phi\beta\sigma K - \beta\mu K \right. \\
&\quad \left. - \beta\theta K + \mu^2 + \mu\gamma + \theta\mu + \theta\gamma + \phi\mu + \phi\gamma \right. \\
&\quad \left. + \omega\beta(1 - \sigma) \right] \frac{1}{\beta(1 - \sigma)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\sigma\beta^2 \hat{I}^2 + \beta(\phi\sigma - \sigma\beta K + \sigma\mu + \sigma\gamma + \mu + \theta)\hat{I} \right. \\
&\quad \left. - \beta(\mu + \theta + \phi\sigma)K + (\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi) \right. \\
&\quad \left. + \omega\beta(1 - \sigma) \right] \frac{1}{\beta(1 - \sigma)} = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\beta\hat{I}^2 + ((\mu + \theta + \phi\sigma) + \sigma(\mu + \gamma) - \sigma\beta K)\hat{I} + \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{\beta} - (\mu + \theta + \phi\sigma)K + \omega(1 - \sigma) = 0$$

diselesaikan dengan persamaan kuadrat

$$f(\hat{I}) = A\hat{I}^2 + B\hat{I} + C = 0 \quad (4.16)$$

sehingga didapat akar-akar persamaan kuadrat sebagai berikut

$$\check{I}_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{dan} \quad \check{I}_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

dengan

$$A = \sigma\beta \quad (4.17)$$

$$B = (\mu + \theta + \phi\sigma) + \sigma(\mu + \gamma) - \sigma\beta K \quad (4.18)$$

$$C = \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{\beta} - (\mu + \theta + \phi\sigma)K + \omega(1 - \sigma). \quad (4.19)$$

Berdasarkan persamaan (4.14) dan (4.19) maka diperoleh hubungan C dan \mathcal{R}_0 sebagai berikut

$$C = \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{\beta} - (\mu + \theta + \phi\sigma)K + \omega(1 - \sigma)$$

$$\beta C = (\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi) - \beta(\mu + \theta + \phi\sigma)K + \beta\omega(1 - \sigma)$$

$$\frac{\beta C}{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)} = \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)} - \frac{\beta(\mu + \theta + \phi\sigma)K + \beta\omega(1 - \sigma)}{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}$$

$$\beta C = \left(1 - \frac{\beta}{(\mu + \gamma)} \left(\frac{K(\mu + \theta + \phi\sigma)}{(\mu + \theta + \phi)} - \frac{\omega(1 - \sigma)}{(\mu + \theta + \phi)} \right) \right) (\mu$$

$$C = (1 - \mathcal{R}_0) \left[\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{\beta} \right]$$

Perhatikan bahwa $\frac{(\mu+\gamma)(\mu+\theta+\phi)}{\beta}$ selalu bernilai positif sehingga didapatkan hubungan antara C dan \mathcal{R}_0 sebagai berikut:

- Jika $\mathcal{R}_0 = 1$ maka $C = 0$
- Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $C < 0$ (C negatif)
- Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka $C > 0$ (C positif)

Teorema 4.3[11] *Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka ada titik kesetimbangan positif yang tunggal $\hat{I} = \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$*

Bukti: Untuk pembuktian **Teorema 4.3** akan diselidiki adanya titik kesetimbangan yang ditandai dengan penyelesaian positif dari persamaan (4.16). Berdasarkan persamaan (4.17) diketahui bahwa $A > 0$ dan berdasarkan hubungan C dan \mathcal{R}_0 pada pembahasan sebelumnya diperoleh bahwa jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $C < 0$ (C negatif) sehingga penyelesaian (4.16) hanya bergantung pada nilai B .

- (i) Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $C < 0$
diperoleh

$$\sqrt{B^2 - 4AC} > 0$$

dan

$$\sqrt{B^2 - 4AC} > B$$

Oleh karena itu

$$\check{I}_1 = \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A} > 0 \text{ untuk sebarang } B.$$

- (ii) Misalkan:

- Untuk $B > 0$

$$B > 0 \text{ maka}$$

$$-B < 0 \text{ dan } -\sqrt{B^2 - 4AC} < 0$$

$$\text{Sehingga } \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A} < 0$$

- Untuk $B = 0$

$$B = 0 \text{ maka}$$

$$\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A} = \frac{0-\sqrt{4AC}}{2A}$$

Sehingga $\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0$

- Untuk $B < 0$

Sebelumnya diketahui bahwa $C < 0$ maka

$$\sqrt{B^2} < \sqrt{B^2 - 4AC}$$

$$\sqrt{B^2} - \sqrt{B^2 - 4AC} < 0$$

Sehingga untuk $B < 0$ maka

$$\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0$$

Oleh karena itu diperoleh $\check{I}_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} < 0$ untuk sebarang B .

Analisis ini membuktikan bahwa $f(\hat{I})$ hanya mempunyai satu penyelesaian positif yaitu $\hat{I} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$. Sehingga **Teorema 4.3** terbukti. ■

Dengan demikian ada akar positif pada kondisi kesetimbangan pada $\mathcal{R}_0 = 1$ yang bergantung pada koefisien A, B dan C pada β yang terdapat di interval kiri \mathcal{R}_0 dimana masih terdapat kondisi $B < 0$ dan $B^2 - 4AC > 0$.

Terdapat tepat dua penyelesaian positif dari (4.16) karena $C > 0$ ketika $\mathcal{R}_0 < 1$. Oleh karena itu titik kesetimbangan endemik dari sistem (4.3) adalah

$$\check{I}_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\check{I}_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

dengan persamaan (4.15) diperoleh titik kesetimbangan $E_1 = (\check{I}_1, \check{V}_1)$ dan $E_2 = (\check{I}_2, \check{V}_2)$.

Ketika $B < 0$ pada $\mathcal{R}_0 = 1$ maka sistem (4.3) terjadi bifurkasi maju pada $\mathcal{R}_0 = 1$ karena terdapat kesetimbangan nol dan kesetimbangan positif $\check{I}_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ yang ada untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ yang muncul ketika \mathcal{R}_0 melewati satu dari kiri ke kanan.

4.3.1 Analisis Bifurkasi

Bifurkasi adalah perubahan kualitatif yang disebabkan oleh perubahan parameter. Perubahan kualitatif meliputi perubahan banyaknya titik tetap, perubahan stabilitas, muncul dan hilangnya orbit periodik dari suatu titik tetap (Bifurkasi Hopf). Perubahan stabilitas disebabkan satu atau dua nilai eigen dari suatu persamaan diferensial atau persamaan diferensial.

Dalam hal ini, menggunakan titik kesetimbangan endemik I untuk mencari persamaan \mathcal{R}_0 yang optimum untuk membuat kurva bifurkasinya.

Kondisi bifurkasi mundur dijelaskan pada teorema berikut:

Teorema 4.4[11] *Jika kondisi*

$$\frac{(1-\sigma)\omega}{K} > \frac{(\mu + \theta + \sigma\phi)^2 - \sigma(\mu + \gamma)(1-\sigma)\phi}{(\mu + \theta + \sigma\phi) + \sigma(\mu + \gamma)} \quad (4.20)$$

dipenuhi maka terdapat bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 = 1$.

Bukti: Kondisi bifurkasi mundur yaitu jika $B < 0$ ketika β memenuhi $\mathcal{R}_0 = 1$. Karena $B < 0$ menghasilkan

$$B = (\mu + \theta + \phi\sigma) + \sigma(\mu + \gamma) - \sigma\beta K < 0$$

$$\sigma\beta K > (\mu + \theta + \phi\sigma) + \sigma(\mu + \gamma). \quad (4.21)$$

Selanjutnya dari $C = 0$ menghasilkan

$$C = \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{\beta} - (\mu + \theta + \phi\sigma)K + \omega(1 - \sigma) = 0$$

$$\beta K = \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{(\mu + \theta + \phi\sigma) - \frac{(1-\sigma)\omega}{K}} \quad (4.22)$$

dengan substitusi (4.22) ke (4.21)

$$\sigma\beta K > (\mu + \theta + \phi\sigma) + \sigma(\mu + \gamma)$$

$$\Leftrightarrow \sigma \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{(\mu + \theta + \phi\sigma) - \frac{(1-\sigma)\omega}{K}} > (\mu + \theta + \phi\sigma) + \sigma(\mu + \gamma)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{(\mu + \theta + \phi\sigma) + \sigma(\mu + \gamma)} > (\mu + \theta + \phi\sigma) - \frac{(1-\sigma)\omega}{K}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{(1-\sigma)\omega}{K} > (\mu + \theta + \phi\sigma) - \frac{\sigma(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{(\mu + \theta + \phi\sigma) + \sigma(\mu + \gamma)} \\
&\Leftrightarrow \frac{(1-\sigma)\omega}{K} \\
&> \frac{(\mu + \theta + \phi\sigma)^2 + \sigma(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi\sigma) - \sigma(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{(\mu + \theta + \phi\sigma) + \sigma(\mu + \gamma)} \\
&\Leftrightarrow \frac{(1-\sigma)\omega}{K} > \frac{(\mu + \theta + \phi\sigma)^2 - \sigma(\mu + \gamma)(1-\sigma)\phi}{(\mu + \theta + \phi\sigma) + \sigma(\mu + \gamma)}
\end{aligned}$$

dimana kondisi $\mu K - \omega > 0$. ■

Kondisi bifurkasi maju dijelaskan pada teorema berikut:

Teorema 4.5[11] *Jika kondisi (4.20) tidak dipenuhi, maka sistem (4.3) mengalami bifurkasi maju pada $\mathcal{R}_0 = 1$. Dalam keadaan ini tidak ada titik kesetimbangan endemik untuk $\mathcal{R}_0 \in [0,1]$.*

Bukti: Dengan proses pembuktian sama pada **Teorema 4.4**, jika $\frac{(1-\sigma)\omega}{K} \leq \frac{(\mu + \theta + \phi\sigma)^2 - \sigma(\mu + \gamma)(1-\sigma)\phi}{(\mu + \theta + \phi\sigma) + \sigma(\mu + \gamma)}$

maka $B \geq 0, C = 0$, ketika β memenuhi $\mathcal{R}_0 = 1$. Untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ maka $A, C > 0$, selain itu B juga positif karena B berkurang pada β yang secara tidak langsung menyatakan tidak ada titik kesetimbangan endemik pada $\mathcal{R}_0 \in [0,1]$.

Pada $\mathcal{R}_0 = 1$ kondisi kesetimbangan (4.16) menjadi $A\hat{I}^2 + B\hat{I} = 0$ dan $A > 0, B \geq 0$ yang memberikan penyelesaian non positif. Dari **Teorema 4.3** bahwa terdapat penyelesaian positif dari (4.16) untuk $\mathcal{R}_0 > 1$, sehingga jika sistem (4.3) tidak memenuhi (4.20) maka terjadi bifurkasi maju pada $\mathcal{R}_0 = 1$, ketika titik kesetimbangan endemik muncul melewati 1. ■

Apabila digambar sebuah kurva yang menunjukkan penyelesaian dari persamaan kuadrat pada persamaan (4.16), maka pada persamaan (4.16) terdapat titik optimum dari (\check{I}, R_0) yang disimbolkan dalam (\check{I}_c, R_c) . Untuk memperoleh \check{I}_c dari

persamaan (4.16), fungsi persamaan $f(I)$ diturunkan terhadap I sama dengan nol.

$$\frac{\partial f(I)}{\partial I} = 0$$

$$\frac{\partial(A\check{I}^2 + B\check{I} + C)}{\partial \check{I}} = 0$$

$$2A\check{I} + B = 0$$

$$2A\check{I} = -B$$

$$\check{I} = -\frac{B}{2A}$$

dari persamaan di atas diperoleh \check{I}_c ketika $\check{I} = -\frac{B}{2A}$. Selanjutnya dengan mensubstitusikan $\check{I} = -\frac{B}{2A}$ pada persamaan di atas ke persamaan (4.16) diperoleh bahwa

$$f(\check{I}) = 0$$

$$A\check{I}^2 + B\check{I} + C = 0$$

$$A\left(-\frac{B}{2A}\right)^2 + B\left(-\frac{B}{2A}\right) + C = 0$$

$$\frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A} + C = 0$$

$$\frac{B^2 - 2B^2}{4A} + C = 0$$

$$\frac{-B^2}{4A} + C = 0$$

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Dari persamaan di atas diperoleh bahwa

$$B^2 - 4AC = 0 \Leftrightarrow C = \frac{B^2}{4A}$$

Selanjutnya untuk memperoleh R_0 yang optimum atau R_c dilakukan substitusi nilai

$C = (1 - \mathcal{R}_0) \left[\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{\beta} \right]$ ke ruas kanan persamaan diatas

sehingga ruas kanan persamaan di atas menjadi

$$B^2 - 4AC = 0 \Leftrightarrow (1 - \mathcal{R}_0) \left[\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{\beta} \right] = \frac{B^2}{4A}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_0 = 1 - \frac{B^2}{4A \left[\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{\beta} \right]}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_0 = 1 - \frac{((\mu + \theta + \phi)\sigma) + \sigma(\mu + \gamma) - \sigma\beta K)^2}{4\sigma\beta \left[\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{\beta} \right]}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_0 = \frac{x - U + 2\sqrt{UW}}{\sigma(\mu + \gamma)} \cdot \frac{U}{\mu + \phi + \theta}$$

dengan

$$U = (\mu + \theta + \phi\sigma) - \frac{(1 - \sigma)\omega}{K} \quad (4.23)$$

$$x = \frac{(1 - \sigma)\omega}{K} + \sigma(\mu + \gamma) \quad (4.24)$$

$$W = -x + \sigma \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \phi + \theta)}{U} \quad (4.25)$$

maka persamaan di atas menjadi

$$B^2 - 4AC = 0 \Leftrightarrow R_0 = R_c$$

Sehingga dari (4.23), (4.24) dan (4.25) didapatkan

$$\mathcal{R}_c = \frac{x - U + 2\sqrt{UW}}{\sigma(\mu + \gamma)} \cdot \frac{U}{\mu + \phi + \theta} \quad (4.26)$$

Sebagai nilai kritis bilangan reproduksi dasar dimana terdapat titik kesetimbangan endemik pada interval $[\mathcal{R}_c, 1]$.

Teorema 4.6[11] *Diasumsikan terdapat bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 = 1$. Dengan \mathcal{R}_c didefinisikan pada (4.26) hanya terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit jika $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_c$, titik kesetimbangan positif muncul pada $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_c$, dan pada interval $(\mathcal{R}_c, 1)$ terdapat dua titik kesetimbangan endemik berbeda dan juga terdapat titik kesetimbangan positif pada $\mathcal{R}_0 = 1$.*

Bukti: Pada $\mathcal{R}_0 = 1$ yang juga mengakibatkan $C = 0$, penyelesaian tak nol dari C adalah $\hat{I} = \frac{-B}{A}$ yang benilai positif karena $B < 0$. Kondisi perlu dan cukup $B < 0$ dan $B^2 - 4AC < 0$ untuk keberadaan dua titik kesetimbangan yang berbeda pada interval kiri $\mathcal{R}_0 = 1$. Jika $B = 0$ menghasilkan $B^2 - 4AC < 0$ jika $\mathcal{R}_0 < 1$, sehingga jelas bahwa kondisi $B^2 - 4AC = 0$ menentukan nilai dari \mathcal{R}_0 dimana titik kesetimbangan positif menghilang.

Digunakan nilai kritis dari β yaitu β_c dari persamaan laju penyebaran penyakit, kemudian disubsitusikan $\beta = \beta_c$ ke dalam persamaan (4.14) agar diperoleh nilai kritis pada \mathcal{R}_0 . Dengan menggunakan nilai U, x dan W pada persamaan (4.23), (4.24) dan (4.25), dan dibentuk kembali

$$B = U + x - \sigma\beta K$$

$$C = \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \phi + \theta)}{\beta} - UK$$

Sehingga persamaan $B^2 - 4AC = 0$ menjadi

$$(U + x - \sigma\beta K)^2 - 4\sigma\beta \left(\frac{(\mu + \gamma)(\mu + \phi + \theta)}{\beta} - UK \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow U^2 + 2U(x - \sigma\beta K) + (x - \sigma\beta K)^2 - 4\sigma(\mu + \gamma)(\mu + \phi + \theta) + 4\sigma\beta UK = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow U^2 + (x - \sigma\beta K)^2 - 4\sigma(\mu + \gamma)(\mu + \phi + \theta) + 2Ux - 2U\sigma\beta K \\
&\quad + 4\sigma\beta UK - 4Ux + 4Ux = 0 \\
&\Leftrightarrow U^2 - 2U(x - \sigma\beta K) + (x - \sigma\beta K)^2 + 4Ux \\
&\quad - 4\sigma(\mu + \gamma)(\mu + \phi + \theta) = 0 \\
&\Leftrightarrow U^2 - 2U(x - \sigma\beta K) + (x - \sigma\beta K)^2 \\
&\quad + 4U\left(x - \frac{\sigma(\mu + \gamma)(\mu + \phi + \theta)}{U}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow U^2 - 2U(x - \sigma\beta K) + (x - \sigma\beta K)^2 \\
&\quad - 4U\left(-x + \frac{\sigma(\mu + \gamma)(\mu + \phi + \theta)}{U}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow U^2 - 2U(x - \sigma\beta K) + (x - \sigma\beta K)^2 - 4UW = 0
\end{aligned}$$

Didapatkan bentuk persamaan kuadrat

$$(x - \sigma\beta K)^2 - 2U(x - \sigma\beta K) + U^2 - 4UW = 0 \quad (4.27)$$

Sehingga diperoleh akar-akar penyelesaian dari (4.27)

$$(x - \sigma\beta K)_{1,2} = \frac{2U \pm \sqrt{4U^2 - 4U^2 + 16UW}}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x - \sigma\beta K)_{1,2} = U \pm 2\sqrt{UW} \quad (4.28)$$

Akar positif pada (4.28) di dapatkan $B = U + (x - \sigma\beta K)_2 > 0$.

Tetapi diperlukan $B < 0$ sehingga akar penyelesaian yang memenuhi dari (4.27) yaitu $(x - \sigma\beta K)_1 = U - 2\sqrt{UW}$ dengan demikian diperoleh

$$\beta_c = \frac{x - U + 2\sqrt{UW}}{K\sigma} \quad (4.29)$$

dan β_c disubsitusikan ke dalam persamaan (4.14) diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_0(\beta_c) &= \frac{\beta_c}{(\mu + \gamma)} \left(\frac{K(\mu + \theta + \phi\sigma)}{(\mu + \theta + \phi)} - \frac{\omega(1 - \sigma)}{(\mu + \theta + \phi)} \right) \\
&= \frac{x - U + 2\sqrt{UW}}{\sigma(\mu + \gamma)} \cdot \frac{1}{(\mu + \theta + \phi)} \left(\frac{K(\mu + \theta + \phi\sigma)}{K} - \frac{\omega(1 - \sigma)}{K} \right) \\
&= \frac{x - U + 2\sqrt{UW}}{(\mu + \gamma)\sigma} \cdot \frac{U}{\mu + \phi + \theta}
\end{aligned}$$

dimana $\mathcal{R}_0(\beta_c)$ sama dengan \mathcal{R}_c pada (4.26). ■

Pada kondisi $\mathcal{R}_0 = 1$ dibentuk kembali sebagai

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_0 &= \frac{\beta}{(\mu + \gamma)} \left(\frac{K(\mu + \theta + \phi\sigma)}{(\mu + \theta + \phi)} - \frac{\omega(1 - \sigma)}{(\mu + \theta + \phi)} \right) = 1 \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{\beta}{(\mu + \gamma)} \cdot \frac{K}{(\mu + \theta + \phi)} \left((\mu + \theta + \phi\sigma) - \frac{\omega(1 - \sigma)}{K} \right) \\ \Leftrightarrow 1 &= \sigma\beta K \cdot \frac{\left((\mu + \theta + \phi\sigma) - \frac{\omega(1 - \sigma)}{K} \right)}{\sigma(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)} \\ \Leftrightarrow \frac{\sigma(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{\left((\mu + \theta + \phi\sigma) - \frac{\omega(1 - \sigma)}{K} \right)} &= \sigma\beta K\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow W + x = \sigma\beta K$$

dengan bantuan $W > U$ maka

$$\sqrt{W} > \sqrt{U}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{W} < -\sqrt{U}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{U} - \sqrt{W} < 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{U} - \sqrt{W})^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow W - 2\sqrt{UW} + U > 0$$

$$\Leftrightarrow W + U > 2\sqrt{UW}$$

$$\Leftrightarrow W + x > x - U + 2\sqrt{UW}$$

Sehingga dapat diketahui bahwa $R_c < 1$. Kepositifan dari β_c dan karena itu kepositifan dari \mathcal{R}_c hanya terjadi jika pada $\beta = \beta_c$ harus memenuhi $B < 0$ yang hanya mungkin jika $\beta > 0$.

4.3.2 Kurva Bifurkasi

Untuk menggambar kurva bifurkasi, diasumsikan \hat{I} sebagai fungsi dari β dengan parameter $\sigma, \gamma, \mu, \phi, \theta$ konstan. Turunan implisit dari (4.16) terhadap β adalah

$$\frac{d}{d\beta} (A\hat{I}^2 + B\hat{I} + C) = \frac{d}{d\beta} (0)$$

$$\Leftrightarrow 2A\hat{I} \frac{d\hat{I}}{d\beta} + \frac{dA}{d\beta} \hat{I}^2 + B \frac{d\hat{I}}{d\beta} + \frac{dB}{d\beta} \hat{I} + \frac{dC}{d\beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2A\hat{I} + B) \frac{d\hat{I}}{d\beta} = - \left(\frac{dA}{d\beta} \hat{I}^2 + \frac{dB}{d\beta} \hat{I} + \frac{dC}{d\beta} \right)$$

$$\Leftrightarrow (2A\hat{I} + B) \frac{d\hat{I}}{d\beta} = \sigma \hat{I}^2 - \sigma K + \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{\beta^2}$$

$$\Leftrightarrow (2A\hat{I} + B) \frac{d\hat{I}}{d\beta} = \sigma \hat{I}(K - \hat{I}) + \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \theta + \phi)}{\beta^2}$$

Kepositifan ruas kanan dipengaruhi oleh $K \geq \hat{I}$ yang juga menunjukkan $(2A\hat{I} + B)$ mempunyai tanda yang sama dengan $\frac{d\hat{I}}{d\beta}$ dan didapat

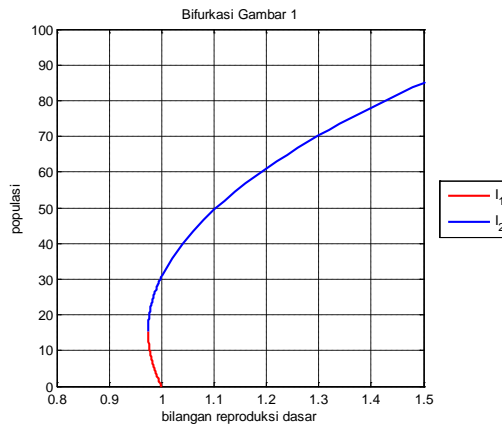
- Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terdapat titik kesetimbangan $\check{I}_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ maka $2A\hat{I} + B = \sqrt{B^2 - 4AC} > 0$. Dengan demikian untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ kurva memiliki kemiringan positif.
- Jika terjadi bifurkasi pada $\mathcal{R}_0 = 1$ maka pada $(\mathcal{R}_c, 1)$ terdapat dua titik kesetimbangan \check{I}_2 dan $\check{I}_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ dengan $\check{I}_2 > \check{I}_1$, maka $2A\hat{I} + B < 0$. Sehingga pada $(\mathcal{R}_c, 1)$ kurva bifurkasi mempunyai kemiringan negatif untuk titik kesetimbangan endemik yang lebih kecil dan mempunyai kemiringan positif titik kesetimbangan endemik yang lebih besar.
- Jika $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_c$ maka $B^2 - 4AC < 0$ sehingga tidak diperoleh penyelesaian positif dari persamaan (4.16). Jadi, sistem (4.3) tidak mempunyai titik kesetimbangan endemik jika $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_c$.

Titik kesetimbangan yang tidak stabil merupakan titik *saddle* dan oleh karena itu persamaan mengalami bifurkasi *saddle-node*.

Selanjutnya disimulasikan untuk menghasilkan kurva bifurkasi dengan sumbu (x, y) yaitu $(\mathcal{R}_0, \text{Populasi})$. Dibawah ini merupakan kurva bifurkasi hasil dari simulasi. Nilai parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:

Tabel 4.1 Nilai parameter[11]

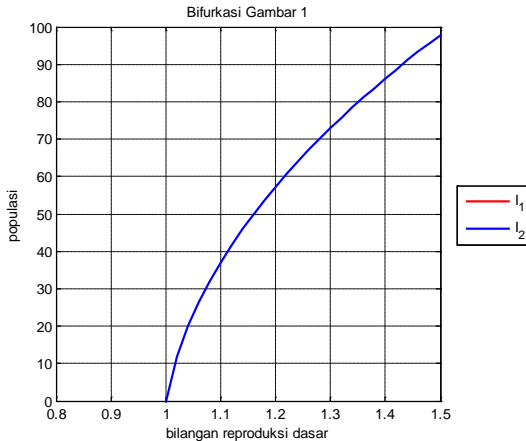
Parameter	Nilai Parameter
μ	0.1
γ	12
θ	0.5
σ	0.2
ϕ	16
ω	5

**Gambar 4.2** Kurva Bifurkasi Mundur dengan $\beta = 0.33$

Gambar 4.2 menunjukkan terjadinya bifurkasi mundur untuk $\mathcal{R}_0 < 1$ sehingga diperoleh tiga titik tetap yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik stabil dan titik kesetimbangan endemik tidak stabil. Pada saat $\mathcal{R}_0 = 1$ terjadi bifurkasi transkritikal, sedangkan pada saat $\mathcal{R}_0 < 1$ yaitu pada $\mathcal{R}_0 = 0.95$ yang diperoleh dari persamaan (4.14) terjadi bifurkasi *saddle-node*. Pada saat $\mathcal{R}_0 < 0.95$ tidak terjadi penyebaran penyakit (bebas penyakit), sedangkan pada saat $0.95 < \mathcal{R}_0 < 1$ terdapat dua titik kesetimbangan endemik, yaitu titik kesetimbangan endemik stabil yang berwarna biru dan titik kesetimbangan endemik tidak stabil yang berwarna merah, selain itu juga terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit stabil. Untuk

$\mathcal{R}_0 > 1$ titik endemik stabil sangat besar sehingga penyebaran penyakit semakin sulit diatasi dan terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit yang tidak stabil.

Selanjutnya dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 4.1 diperoleh kurva bifurkasi sebagai berikut:



Gambar 4.3 Kurva Bifurkasi Maju dengan $\beta = 0.2$

Gambar 4.3 menunjukkan telah terjadi bifurkasi maju untuk $\mathcal{R}_0 > 1$. Terdapat satu titik kesetimbangan endemik dan titik kesetimbangan bebas penyakit yang tidak stabil. Pada saat $\mathcal{R}_0 = 1$ terjadi bifurkasi transkritikal. Pada saat $\mathcal{R}_0 < 1$ tidak terjadi penyebaran penyakit (bebas penyakit), sedangkan saat $\mathcal{R}_0 > 1$ terdapat titik endemik stabil.

Pada Gambar 4.2 dan 4.3 menunjukkan nilai dari tingkat interaksi antara individu yang terinfeksi dengan individu yang rentan (β) mempengaruhi terjadinya bifurkasi.

4.3.3 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Untuk mengetahui laju penyebaran penyakit pada titik kesetimbangan endemik dilakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik. Karena $\beta(K - I - (1 - \sigma)V)$ merupakan produksi infeksi baru dan $\mu + \gamma$ merupakan laju

transisi perubahan pada *state*, sehingga diperoleh identitas $\beta(K - \hat{I} - (1 - \sigma)\hat{V}) = \mu + \gamma$. Kemudian dilakukan pendekatan linier sistem (4.3) disekitar titik kesetimbangan endemik $E = (\hat{I}, \hat{V})$ maka dari matriks Jacobian pada (4.10) diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} -\beta\hat{I} & -(1 - \sigma)\beta\hat{I} \\ -(\phi + \sigma\beta\hat{V}) & -(\mu + \theta + \phi + \sigma\beta\hat{I}) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Dari matriks Jacobian pada (4.30) dicari nilai eigen dengan $|\lambda I - J| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \beta\hat{I} & -(1 - \sigma)\beta\hat{I} \\ -(\phi + \sigma\beta\hat{V}) & \lambda + (\mu + \theta + \phi + \sigma\beta\hat{I}) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \beta\hat{I})(\lambda + (\mu + \theta + \phi + \sigma\beta\hat{I})) - (\phi + \sigma\beta\hat{V})(1 - \sigma)\beta\hat{I} &= 0 \\ \lambda^2 + \beta\hat{I}\lambda + (\mu + \theta + \phi + \sigma\beta\hat{I})\lambda + \beta\hat{I}(\mu + \theta + \phi + \sigma\beta\hat{I}) & \\ - (1 - \sigma)\beta\hat{I}(\phi + \sigma\beta\hat{V}) &= 0 \\ a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

dengan

$$a_2 = 1$$

$$a_1 = \beta\hat{I} + (\mu + \theta + \phi + \sigma\beta\hat{I})$$

$$a_0 = \beta\hat{I}(\mu + \theta + \phi + \sigma\beta\hat{I}) - (1 - \sigma)\beta\hat{I}(\phi + \sigma\beta\hat{V})$$

Teorema 4.7[11] *Titik setimbang endemik (\hat{I}, \hat{V}) untuk $\hat{I} = \check{I}_2$ stabil lokal asimtotik yang berada pada $\mathcal{R}_0 \in (1, \infty]$ dan juga pada $\mathcal{R}_0 \in (\mathcal{R}_c, 1]$ dalam hal ini terdapat bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 = 1$. Titik setimbang endemik (\hat{I}, \hat{V}) untuk $\hat{I} = \check{I}_1$ tidak stabil yang berada pada $\mathcal{R}_0 \in (\mathcal{R}_c, 1)$ dalam hal ini terdapat bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 = 1$.*

Bukti: Titik setimbang endemik dikatakan stabil jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya jika $a_2 > 0, a_1 >$

$0, b_1 > 0$. Dengan rumus Routh-Hurwitz dapat dituliskan dalam tabel berikut ini:

Tabel 4.2 Routh-Hurwitz Kestabilan Endemik

Nilai Eigen	Koefisien	
λ^2	a_2	a_0
λ^1	a_1	0
λ^0	b_1	0

dengan $b_1 = \frac{a_1 a_0 - a_2 \cdot 0}{a_1} = \frac{a_1 a_0}{a_1} = a_0$. Sehingga tanda dari a_0

menentukan kestabilan. Untuk itu dinyatakan bahwa

$$a_0 = \beta \hat{I}(\mu + \theta + \phi + \sigma \beta \hat{I}) - (1 - \sigma) \beta \hat{I}(\phi + \sigma \beta \hat{V})$$

$$a_0 = \beta \hat{I}(\mu + \theta + \phi + 2\sigma \beta \hat{I} - \sigma \beta (\hat{I} + 1 - \sigma) \hat{V})$$

dengan menggunakan $-\beta(\hat{I} + (1 - \sigma)\hat{V}) = \mu + \gamma - \beta K$ maka diperoleh

$$a_0 = \beta \hat{I}(\mu + \theta + \phi + 2\sigma \beta \hat{I} + \sigma(\mu + \gamma - \beta K))$$

$$a_0 = \beta \hat{I}(2A\hat{I} + B)$$

Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ nilai kesetimbangan endemik adalah $\check{I}_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$, maka $2A\check{I}_2 + B > 0$ sehingga $a_0 > 0$ yang menunjukkan kestabilannya. Jika terdapat bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 = 1$, maka titik kesetimbangan endemik terdapat pada $(\mathcal{R}_c, 1]$. Sedangkan \check{I}_1 tidak stabil karena $a_0 = \beta \check{I}_1 (2A\check{I}_1 + B) < 0$. ■

4.3.4 Kestabilan Global

Pada teorema berikut dijelaskan kestabilan global dari sistem (4.3)

Teorema 4.8[11] *Jika tidak terdapat titik kesetimbangan endemik, pada saat $\mathcal{R}_0 < 1$ dalam kasus bifurkasi maju dan jika $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_c$ dalam kasus bifurkasi mundur maka setiap penyelesaian konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit. Untuk $\mathcal{R}_0 > 1$ titik kesetimbangan endemik tunggal menarik secara global. Jika*

terdapat bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 = 1$ maka pada interval $(\mathcal{R}_c, 1)$ tidak terdapat titik kesetimbangan yang menarik secara global meskipun setiap penyelesaian mendekati kesetimbangan.

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa setiap penyelesaian dari sistem (4.3) konvergen ke titik kesetimbangan. Sebelumnya telah dibuktikan pada **Teorema 4.1** bahwa daerah $R: 0 \leq I, V, I + V \leq K$ merupakan invarian positif untuk penyelesaian dari sistem (4.3).

Dengan memisalkan fungsi pada C^1 yaitu $\varphi(I, V) = \frac{1}{I}$ yang tidak merubah tanda pada R yang menunjukkan bahwa sistem (4.3) tidak mempunyai solusi periodik sepanjang daerah R .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{I'}{I} \right) + \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V'}{V} \right) &= \frac{\partial}{\partial I} \frac{\beta(K - I - (1 - \sigma)V)I - (\mu + \gamma)I}{I} \\ &+ \frac{\partial}{\partial V} \frac{\phi(K - I) - \sigma\beta VI - (\mu + \theta + \phi)V + \omega}{I} \\ &= -\beta I - \sigma\beta - \frac{\mu + \theta + \phi}{I} < 0 \end{aligned}$$

menghasilkan sesuai dengan kriteria Dulac.

Dengan menggunakan Teorema Poincaré-Bendixson yang menunjukkan bahwa setiap penyelesaian dari sistem (4.3) mendekati titik kesetimbangan dan tidak mempunyai *limit cycle* atau orbit periodik.

Pada **Teorema 4.8**, setiap penyelesaian dari persamaan (4.5) dan (4.6) mendekati titik kesetimbangan. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka disamping titik kesetimbangan bebas penyakit yang tidak stabil menurut **Teorema 4.7**, terdapat satu titik kesetimbangan endemik lokal stabil \check{I}_2 . Sehingga tidak ada penyelesaian yang dapat konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit.

Jika $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ ketika $I(0) > 0$ maka dari persamaan (4.3)₂ diperoleh $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)}$. Maka untuk setiap

$\epsilon > 0$ terdapat $t_*(\epsilon)$ sedemikian hingga $I(t) < \epsilon$ dan $V(t) < \frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} + \epsilon$ untuk $t > t_*$.

Dengan menggunakan persamaan (4.3)₁ diperoleh

$$I'(t) = \beta(K - I - (1 - \sigma)V)I - (\mu + \gamma)I$$

$$\Leftrightarrow I'(t) \geq \beta \left(K - \epsilon - (1 - \sigma) \left(\frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} + \epsilon \right) \right) I(t) - (\mu + \gamma)I(t) \quad (4.31)$$

$$= \beta \left(\frac{K(\mu + \theta + \sigma\phi)}{\mu + \theta + \phi} - \frac{(1 - \sigma)\omega}{\mu + \theta + \phi} \right) I(t) + (-2\epsilon + \sigma\epsilon - (\mu + \gamma))I(t) \quad (4.32)$$

untuk $t > t_*$, selain itu $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{(\mu + \gamma)} \left(\frac{K(\mu + \theta + \phi\sigma)}{(\mu + \theta + \phi)} - \frac{\omega(1 - \sigma)}{(\mu + \theta + \phi)} \right) > 1$ yang secara tidak langsung menunjukkan bahwa terdapat ϵ_1 cukup kecil sedemikian hingga

$$\beta \left(\frac{K(\mu + \theta + \sigma\phi)}{\mu + \theta + \phi} - \frac{(1 - \sigma)\omega}{\mu + \theta + \phi} \right) + (-2\epsilon_1 + \sigma\epsilon_1 - (\mu + \gamma)) > 0$$

Dengan memilih $\epsilon = \epsilon_1$ pada ruas kanan (4.32) yang linear pada $I(t)$ dengan pengali positif yang juga menunjukkan bahwa $I(t)$ meningkat untuk $t_*(\epsilon_1) > t$ sehingga tidak konvergen ke 0. Dengan demikian, tidak ada penyelesaian dari sistem (4.3) dengan kondisi awal positif yang konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit.

Jika terdapat bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 = 1$ maka selain titik kesetimbangan bebas penyakit terdapat juga dua titik kesetimbangan endemik pada $(\mathcal{R}_c, 1)$ dimana satu titik I_2 stabil dan titik I_1 tidak stabil. Karena titik kesetimbangan bebas penyakit stabil ketika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka terjadi *bistability* pada interval $(\mathcal{R}_c, 1)$, yang sesuai dengan pernyataan ketiga dari **Teorema 4.8**. ■

4.4 Solusi Numerik dan Simulasi

Pada sub bab ini dibahas bagaimana cara untuk memperoleh solusi numerik dari model interaksi dinamis dan simulasi numeriknya. Hal ini bertujuan untuk memudahkan dalam menganalisa model dan untuk mengetahui selisih atau *error* antara nilai eksak dengan nilai numerik.

Penyelesaian numerik yang digunakan adalah metode Runge-Kutta orde empat. Metode Runge-Kutta mencapai keakuratan dari suatu pendekatan Taylor tanpa memerlukan turunan-turunan tingkat tinggi. Metode Runge-kutta orde empat adalah satu dari metode yang banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Metode ini mempunyai suatu galat pemotongan h^4 . Integrasi numerik dari persamaan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dinyatakan sebagai berikut:

Persamaan numerik Runge-Kutta untuk sistem (4.3), dimisalkan untuk nilai awal adalah sebagai berikut:

$$I(t_0) = I_0$$

$$V(t_0) = I_0$$

Integrasi numerik dari sistem (4.3) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dinyatakan sebagai berikut:

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{6}(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I})$$

$$V_{n+1} = V_n + \frac{1}{6}(k_{1,V} + 2k_{2,V} + 2k_{3,V} + k_{4,V})$$

dengan

$$\begin{aligned} k_{1,I} &= h f(t_n, I_n, V_n) \\ &= h (\beta(K - I_n - (1 - \sigma)V_n)I_n - (\mu + \gamma)I_n) \\ &= h(\beta KI_n - \beta I_n^2 + \beta \sigma V_n I_n - \mu I_n - \gamma I_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{1,V} &= h f(t_n, I_n, V_n) \\ &= h (\phi(K - I_n) - \sigma \beta V_n I_n - (\mu + \theta + \phi)V_n + \omega) \end{aligned}$$

$$= h(\phi K - \phi I_n - \sigma \beta V_n I_n - \mu V_n - \theta V_n - \phi V_n + \omega)$$

$$\begin{aligned} k_{2,I} &= h f\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, V_n + \frac{k_{1,V}}{2}\right) \\ &= h\left(\beta K\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right) - \beta\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right)^2 + \beta\sigma\left(V_n + \frac{k_{1,V}}{2}\right)\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right) - \mu\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right) - \gamma\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{2,V} &= h f\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, V_n + \frac{k_{1,V}}{2}\right) \\ &= h\left(\phi K - \phi\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right) - \sigma\beta\left(V_n + \frac{k_{1,V}}{2}\right)\left(I_n + \frac{k_{1,I}}{2}\right) - \mu\left(V_n + \frac{k_{1,V}}{2}\right) - \theta\left(V_n + \frac{k_{1,V}}{2}\right) - \phi\left(V_n + \frac{k_{1,V}}{2}\right) + \omega\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{3,I} &= h f\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, V_n + \frac{k_{2,V}}{2}\right) \\ &= h\left(\beta K\left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right) - \beta\left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right)^2 + \beta\sigma\left(V_n + \frac{k_{2,V}}{2}\right)\left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right) - \mu\left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right) - \gamma\left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{3,V} &= h f\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, V_n + \frac{k_{2,V}}{2}\right) \\ &= h\left(\phi K - \phi\left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right) - \sigma\beta\left(V_n + \frac{k_{2,V}}{2}\right)\left(I_n + \frac{k_{2,I}}{2}\right) - \mu\left(V_n + \frac{k_{2,V}}{2}\right) - \theta\left(V_n + \frac{k_{2,V}}{2}\right) - \phi\left(V_n + \frac{k_{2,V}}{2}\right) + \omega\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{4,I} &= h f(t_n + h, I_n + k_{3,I}, V_n + k_{3,V}) \\ &= h\left(\beta K(I_n + k_{3,I}) - \beta(I_n + k_{3,I})^2 + \beta\sigma(V_n + k_{3,V})(I_n + k_{3,I}) - \mu(I_n + k_{3,I}) - \gamma(I_n + k_{3,I})\right) \end{aligned}$$

$$k_{4,V} = h f(t_n + h, I_n + k_{3,I}, V_n + k_{3,V})$$

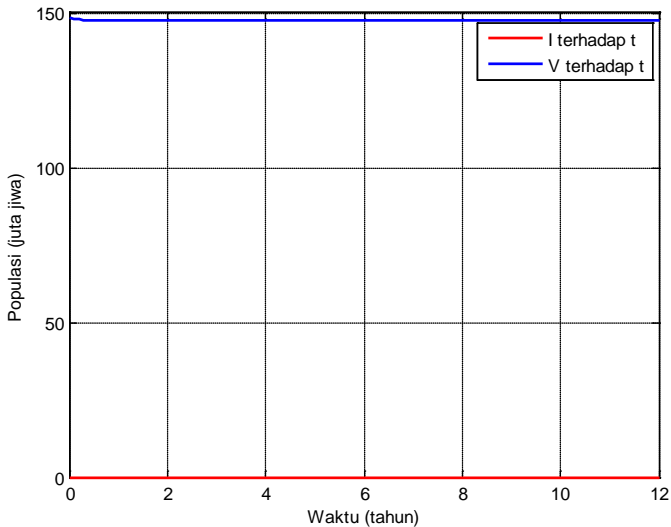
$$= h(\phi K - \phi(I_n + k_{3,I}) - \sigma\beta(V_n + k_{3,V})(I_n + k_{3,I}) - \mu(V_n + k_{3,V}) - \theta(V_n + k_{3,V}) - \phi(V_n + k_{3,V}) + \omega).$$

Nilai parameter yang digunakan untuk keadaan kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dapat dilihat pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Nilai Parameter[11]

Parameter	Nilai Parameter
μ	0.1
γ	12
θ	0.5
η	5
ω	5
β	0.33

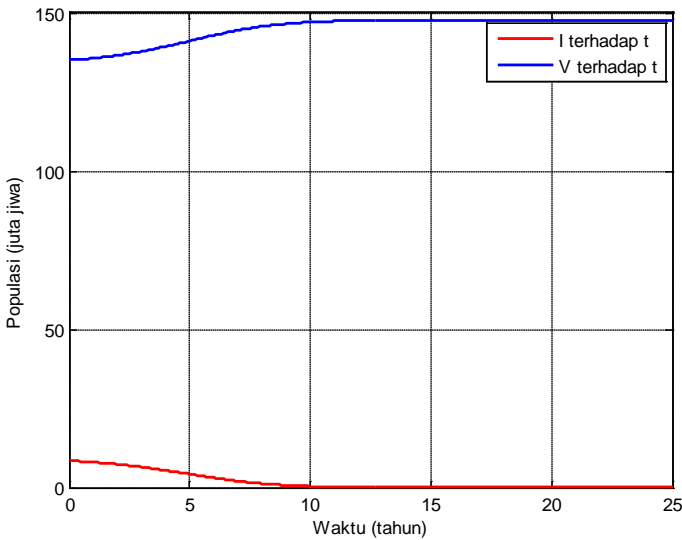
Simulasi pada model ini dilakukan dengan metode Runge-Kutta. Dengan input parameter pada Tabel 4.3 dan diasumsikan kapasitas populasi maksimum $K = 153,6$ [11], didapatkan grafik kestabilan bebas penyakit pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Grafik Kestabilan Bebas Penyakit pada $E_0 = (0, 148.4)$ saat $\mathcal{R}_0 = 0.95 < 1$, $N = 120$, $h = 0.1$

Pada Gambar 4.4 Menunjukkan grafik kestabilan bebas penyakit pada model SIVS dengan imigrasi non-infektif. Nilai titik kesetimbangan bebas penyakit pada (4.6) adalah $(0, 148.4)$. Dengan memasukkan nilai parameter dan nilai titik kesetimbangan bebas penyakit pada persamaan (4.13) menghasilkan nilai $\mathcal{R}_0 = 0.95 < 1$ yang sesuai dengan pembahasan sebelumnya. Sehingga pada $\mathcal{R}_0 < 1$ tidak terjadi endemik.

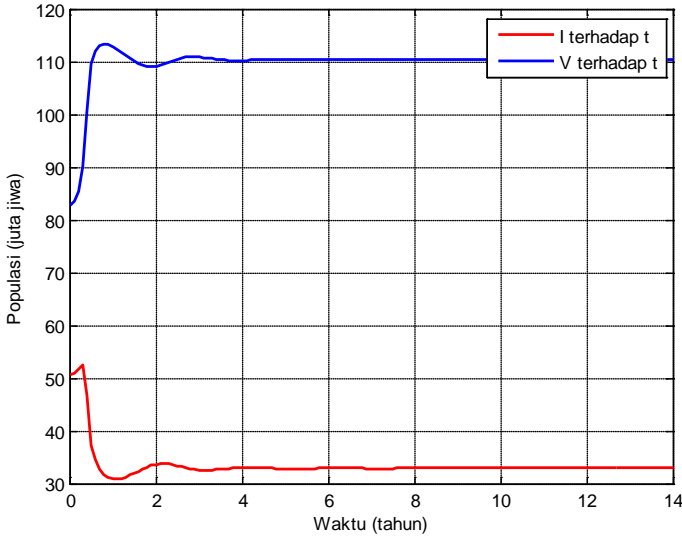
Nilai parameter yang digunakan untuk keadaan kesetimbangan endemik disajikan pada Tabel 4.3. Dengan input parameter pada Tabel 4.3 dan dengan menggunakan titik kesetimbangan endemik E_1 dan E_2 , diperoleh gambar kestabilan endemik pada Gambar 4.5 dan 4.6.



Gambar 4.5 Grafik Kestabilan Endemik pada $E_1 = (\check{I}_1, \check{V}_1) = (8.6, 135.4)$ saat $\mathcal{R}_0 = 1.23$, $N = 250$, $h = 0.1$

Laju populasi *Vaccinated* kenaikan dan mulai stabil pada tahun ke-10 dan jumlah populasi yang divaksinasi akan mendekati 147.7711 juta jiwa pada saat $t \rightarrow \infty$ yang dapat dilihat pada lampiran D. Laju populasi *Infected* mengalami penurunan dan mulai stabil pada tahun ke-11 dan jumlah populasi yang terinfeksi menjadi 0 pada tahun ke-25.

Dengan memasukkan nilai parameter pada E_1 diperoleh nilai titik kesetimbangan endemik $E_1 = (8.6, 135.4)$. Kemudian dengan memasukkan nilai parameter pada persamaan (4.13) menghasilkan nilai $\mathcal{R}_0 = 1.23 > 1$ yang sesuai dengan pembahasan sebelumnya. Sehingga pada $\mathcal{R}_0 > 1$ terjadi endemik.



Gambar 4.6 Grafik Kestabilan Endemik pada $E_2 = (\check{I}_2, \check{V}_2) = (50.7, 82.8)$ saat $\mathcal{R}_0 = 2.38, N = 140, h = 0.1$

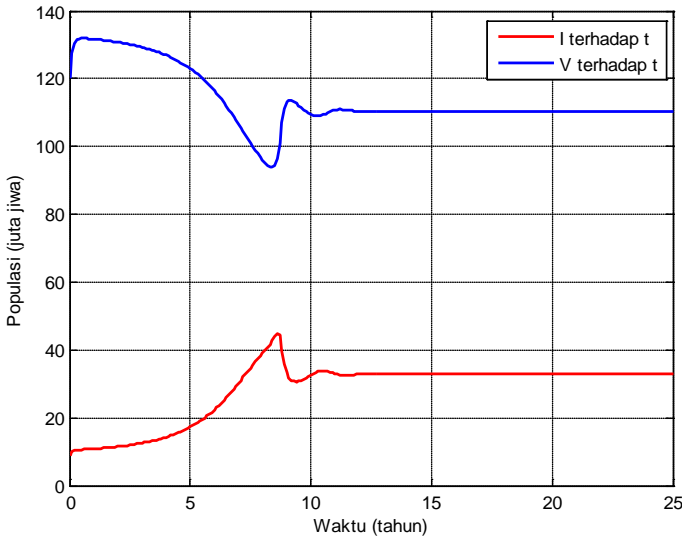
Laju populasi *Vaccinated* kenaikan tajam pada tahun pertama, kemudian menurun pada tahun kedua dan grafik naik cukup sedikit hingga akhirnya stabil pada tahun ke-14 dengan populasi 110.4020 juta jiwa. Laju populasi *Infected* menunjukkan pertumbuhan grafik yang berlawanan dengan grafik *V*. Populasi *Infected* berosilasi sampai stabil pada tahun ke-13 menuju titik kesetimbangan 32.8980 juta jiwa yang dapat dilihat pada lampiran E.

Dengan memasukkan nilai parameter pada E_2 diperoleh nilai titik kesetimbangan endemik $E_2 = (50.7, 82.8)$. Kemudian dengan memasukkan nilai parameter pada persamaan (4.13) menghasilkan nilai $\mathcal{R}_0 = 2.38 > 1$ yang sesuai dengan pembahasan sebelumnya. Sehingga pada $\mathcal{R}_0 > 1$ terjadi endemik.

Untuk melihat kestabilan global dari sistem (4.3) pada **Teorema 4.8** digunakan nilai awal sesuai dengan **Teorema 4.1**. Diasumsikan nilai $K = 153.6$ [11] sehingga diperoleh tabel nilai awal sebagai berikut:

Tabel 4.4 Nilai Awal[11]

$I(0)$	$V(0)$
9	120
18	130
50	100
5	148

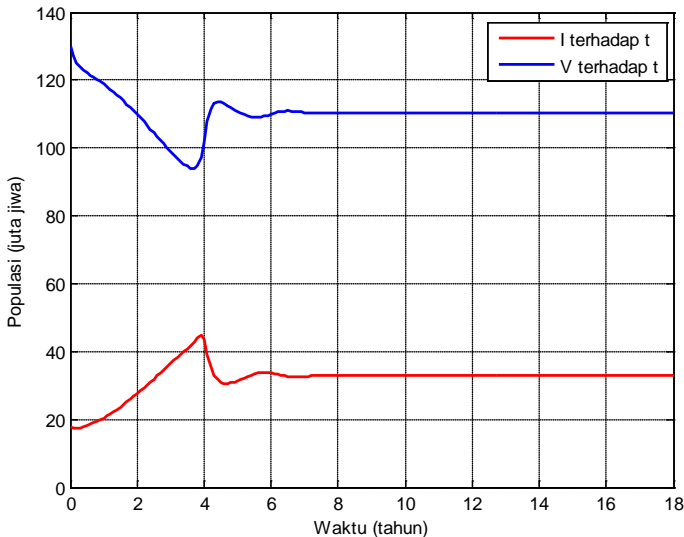


Gambar 4.7 Grafik Kestabilan Endemik pada $(I(0), V(0)) = (9, 120)$ saat $\mathcal{R}_0 = 1.57$, $N = 250$, $h = 0.1$

Laju populasi *Vaccinated* mengalami kenaikan sedikit kemudian turun perlahan menuju titik terendahnya yaitu 93.88 kemudian grafik V beresilasi hingga stabil menuju titik kesetimbangan 110.4020 mulai tahun ke-22. Laju populasi *Infected* mengalami kenaikan perlahan hingga menuju titik puncaknya yaitu 44.85 kemudian grafik turun dan beresilasi hingga stabil menuju titik kesetimbangan 32.8980 mulai tahun ke-21 yang dapat dilihat pada lampiran F.

Dengan memasukkan nilai parameter dan nilai awal $(I(0), V(0)) = (9, 120)$ pada persamaan (4.13) menghasilkan nilai $\mathcal{R}_0 = 1.57 > 1$ yang sesuai dengan pembahasan sebelumnya. Sehingga pada $\mathcal{R}_0 > 1$ terjadi endemik. Sehingga Gambar 4.7 konvergen ke titik kesetimbangan endemik $E_2 =$

$(\check{I}_2, \check{V}_2) = (50.7, 82.8)$ yang stabil pada $I = 32.8980$ dan $V = 110.4020$.

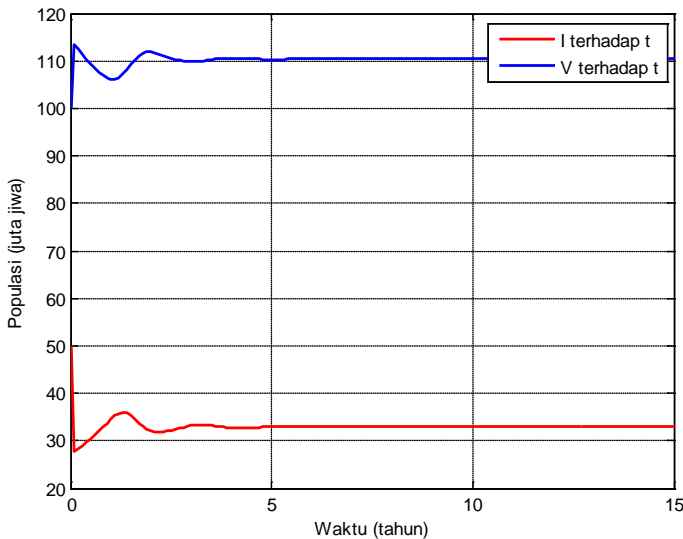


Gambar 4.8 Grafik Kestabilan Endemik pada $(I(0), V(0)) = (18, 130)$ saat $\mathcal{R}_0 = 1.35, N = 180, h = 0.1$

Laju populasi *Vaccinated* mengalami penurunan perlahan menuju titik terendahnya yaitu 94.1 kemudian grafik V naik dan beresilasi hingga stabil menuju titik kesetimbangan 110.4020 mulai tahun ke-17. Laju populasi *Infected* mengalami kenaikan perlahan hingga menuju titik puncaknya yaitu 44.7928 kemudian grafik turun dan beresilasi hingga stabil menuju titik kesetimbangan 32.8980 mulai tahun ke-17 yang dapat dilihat pada lampiran G.

Dengan memasukkan nilai parameter dan nilai awal $(I(0), V(0)) = (18, 130)$ pada persamaan (4.13) menghasilkan nilai $\mathcal{R}_0 = 1.35 > 1$ yang sesuai dengan pembahasan

sebelumnya. Sehingga pada $\mathcal{R}_0 > 1$ terjadi endemik. Sehingga Gambar 4.8 konvergen ke titik kesetimbangan endemik $E_2 = (\check{I}_2, \check{V}_2) = (50.7, 82.8)$ yang stabil pada $I = 32.8980$ dan $V = 110.4020$.

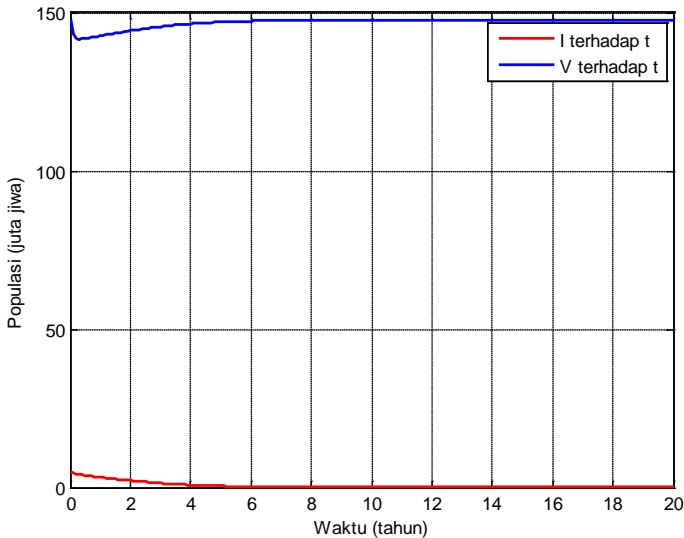


Gambar 4.9 Grafik Kestabilan Endemik pada $(I(0), V(0)) = (50, 100)$ saat $\mathcal{R}_0 = 2.01, N = 150, h = 0.1$

Laju populasi *Vaccinated* naik signifikan pada tahun pertama menuju titik 113.5448, kemudian berosilasi hingga stabil mulai tahun ke-13 menuju titik kesetimbangan 110.4020. Laju populasi *Infected* turun signifikan pada tahun pertama menuju titik 27.8034, kemudian berosilasi hingga stabil mulai tahun ke-13 menuju titik kesetimbangan 32.8980 yang dapat dilihat pada lampiran H.

Dengan memasukkan nilai parameter dan nilai awal $(I(0), V(0)) = (50, 100)$ menghasilkan nilai $\mathcal{R}_0 = 2.01 > 1$

yang sesuai dengan pembahasan sebelumnya. Sehingga pada $\mathcal{R}_0 > 1$ terjadi endemik. Sehingga Gambar 4.9 konvergen ke titik kesetimbangan endemik $E_2 = (\check{I}_2, \check{V}_2) = (50.7, 82.8)$ yang stabil pada $I = 32.8980$ dan $V = 110.4020$.



Gambar 4.10 Grafik Kestabilan Endemik pada $(I(0), V(0)) = (5, 148)$ saat $\mathcal{R}_0 = 0.96$, $N = 200$, $h = 0.1$

Laju populasi *Vaccinated* naik perlahan menuju stabil pada titik kesetimbangan 147.7710 mulai tahun ke-20. Laju populasi *Infected* turun perlahan menuju titik kesetimbangan 0 mulai tahun ke-20 yang dapat dilihat pada lampiran I.

Dengan memasukkan nilai parameter dan nilai awal $(I(0), V(0)) = (5, 148)$ menghasilkan nilai $\mathcal{R}_0 = 0.96 > 1$ yang sesuai dengan pembahasan sebelumnya. Sehingga gambar 4.10 konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = (0, 148.4)$.

Terlihat pada Gambar 4.7, 4.8 dan 4.9 titik stabil menuju $E_2 = (\check{I}_2, \check{V}_2) = (50.7, 82.8)$ yaitu ketika $I(0) \geq \check{I}_1$. Selain itu, Gambar 4.10 titik stabil menuju kestabilan bebas penyakit. Sehingga titik kesetimbangan E_1 merupakan titik *saddle*.

4.5 Pengaruh Imigrasi pada Bifurkasi Mundur

Pada sub bab ini akan diselidiki pengaruh parameter η dan ω . Dengan menggunakan **Teorema 4.4** yang menunjukkan keberadaan bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 = 1$, dianalisa pertidaksamaan dalam parameter imigrasi. Diasumsikan jika tidak terdapat bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 = 1$, maka terdapat bifurkasi maju yaitu selalu ada titik kesetimbangan endemik untuk $\mathcal{R}_0 > 1$.

Keberadaan bifurkasi mundur bergantung pada parameter η dan ω . Ketaknegatifan ω dan K menghasilkan teorema berikut:

Teorema 4.9[11] *Jika $(\mu + \theta + \phi\sigma)^2 < \sigma(\mu + \gamma)(1 - \sigma)\phi$ maka untuk semua η dan ω terdapat bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 = 1$.*

Bukti: Jika $\omega = 0$ maka mengakibatkan ruas kiri pertidaksamaan (4.18) bernilai nol, sehingga terdapat bifurkasi mundur jika dan hanya jika $(\mu + \theta + \phi\sigma)^2 - \sigma(\mu + \gamma)(1 - \sigma)\phi$ bernilai negatif. Ruas kanan merupakan parameter bebas η . ■

Teorema 4.10[11] *Jika $\omega = 0$ maka terdapat bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 = 1$ jika dan hanya jika $(\mu + \theta + \phi\sigma)^2 < \sigma(\mu + \gamma)(1 - \sigma)\phi$. Hal ini menunjukkan bahwa η tidak mempengaruhi keberadaan bifurkasi mundur.*

Bukti: Perlu diperhatikan bahwa $(\mu + \theta + \phi\sigma)^2 - \sigma(\mu + \gamma)(1 - \sigma)\phi$ merupakan parameter bebas η dan ω . Sedangkan K bergantung pada parameter μ dan fungsi kelahiran Λ . Sehingga $\frac{(1-\sigma)\omega}{K}$ bergantung pada parameter imigrasi.

Dari persamaan $\Lambda(x) = \mu x - \eta - \omega$, dapat ditulis dengan

$$\Lambda(x) = \mu \left(x - \frac{\eta}{\mu} - \frac{\omega}{\mu} \right)$$

$$\Leftrightarrow \Lambda(x) = \frac{x - \frac{\eta}{\mu} - \frac{\omega}{\mu}}{\frac{1}{\mu}}$$

karena $0 < c < \frac{1}{\mu}$ maka

$$\Lambda(x) = \frac{x - \left(\frac{\eta}{\mu} + \frac{\omega}{\mu} \right)}{c}$$

Dan $\eta, \omega \geq 0$, sehingga jika $\eta = \omega = 0$ maka

$$\Lambda(x) = \frac{x}{c}$$

Namun nilai $\frac{x}{c} > \frac{x - \left(\frac{\eta}{\mu} + \frac{\omega}{\mu} \right)}{c}$, maka

Penyebut pada $\Lambda(x)$ ditambahkan bentuk linier dx dengan $d > 0$ sehingga

$$\frac{x}{c + dx} \cong \frac{x - \left(\frac{\eta}{\mu} + \frac{\omega}{\mu} \right)}{c}$$

Dengan demikian dapat digunakan bentuk umum

$$\Lambda(x) = \frac{x}{c + dx} \quad (4.33)$$

dengan $0 < c < \frac{1}{\mu}$ dan $d > 0$. Kapasitas maksimum

$K(\mu, \eta, \omega)$ sebagai solusi dari

$$\Lambda(x) = \mu x - \eta - \omega$$

dan dengan menggunakan (4.35), diperoleh persamaan kuadrat

$$\begin{aligned}\frac{x}{c+dx} &= \mu x - \eta - \omega \\ x &= (c+dx)(\mu x - \eta - \omega) \\ x^2\mu d + x(-1+c\mu-d(\eta+\omega)) - c(\eta+\omega) &= 0\end{aligned}$$

Sehingga akar positif dari K adalah

$$K(\mu, \eta, \omega) = \frac{1 - c\mu + d(\eta + \omega)}{2\mu d} + \frac{\sqrt{(1 - c\mu + d(\eta + \omega))^2 - 4\mu d c(\eta + \omega)}}{2\mu d}$$

dengan asumsi $c < \frac{1}{\mu}$ atau $1 - c\mu > 0$ maka

$$\begin{aligned}\frac{K}{\omega} &= \frac{1}{2\mu d} \left(\frac{1 - c\mu + d\eta}{\omega} \right. \\ &\quad \left. + + \sqrt{\left(\frac{1 - c\mu + d\eta}{\omega} + d\right)^2 + \frac{4\mu d c \eta}{\omega^2} + \frac{4\mu d c \eta}{\omega}} \right) \\ &> \frac{1}{2\mu d} \left(\frac{1 - c\mu + d\eta}{\omega} + d + \frac{1 - c\mu + d\eta}{\omega} + d \right) \\ &> \frac{1}{2\mu d} 2d = \frac{1}{\mu}\end{aligned}$$

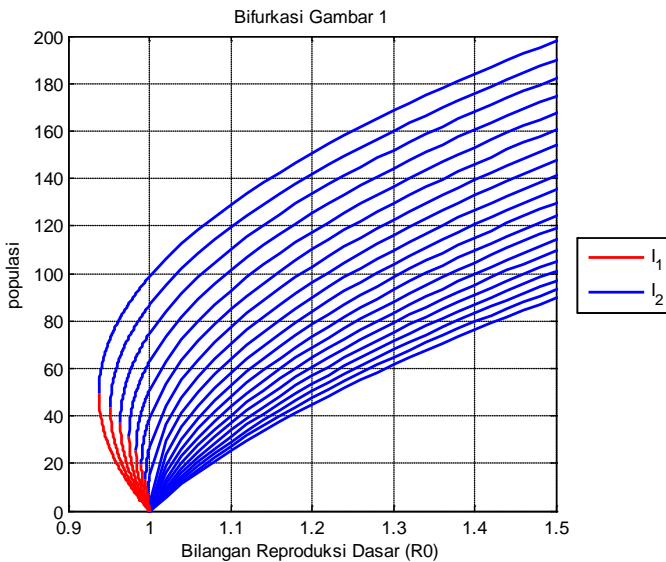
$$\frac{K}{\omega} > \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{\omega}{K} < \mu$$

$$\frac{(1-\sigma)\omega}{K} < (1-\sigma)\mu \tag{4.34}$$

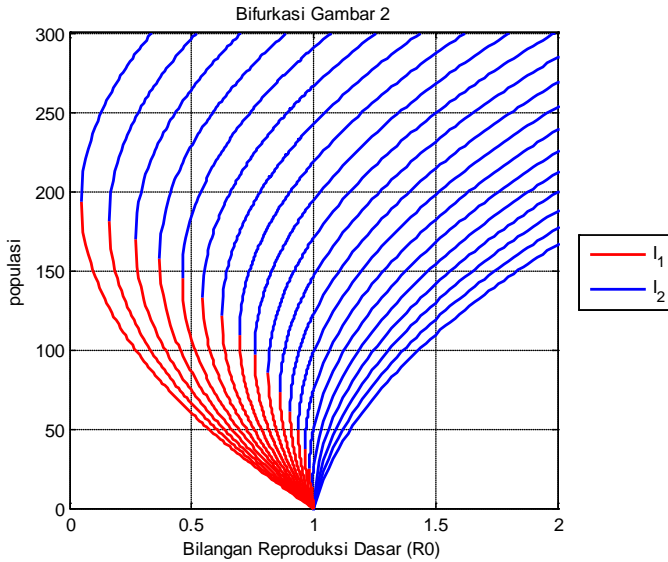
Sehingga untuk $\omega \rightarrow \infty$ diperoleh $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{(1-\sigma)\omega}{K} = (1-\sigma)\mu$ dan persamaan (4.34) mendekati nilai limit untuk ω mendekati ∞ . ■

Selanjutnya dilakukan simulasi model epidemi SIVS dengan imigrasi non-infektif dengan nilai parameter η dan ω yang berbeda. Nilai parameter yang digunakan pada Gambar 11 dan 12 adalah $\mu = 0.1, \gamma = 12, \theta = 16, c = 1, d = 1.8$ sehingga memenuhi kondisi pada **Teorema 4.9** $(\mu + \theta + \phi\sigma)^2 < \sigma(\mu + \gamma)(1 - \sigma)\phi$ yaitu $14.44 < 30.976$



Gambar 4.11 Perubahan Kurva Bifurkasi dengan $\beta = 0.16$ saat $\eta = 5$ dan $\omega = 0,1, \dots, 19$

Pada Gambar 4.11 diberikan nilai $\eta = 5$ dan 20 nilai berbeda dari ω yang bertambah menunjukkan perubahan kurva bifurkasi maju ke bifurkasis mundur.



Gambar 4.12 Perubahan Kurva Bifurkasi dengan $\beta = 0.16$ saat $\eta = 10, 12, \dots, 48$ dan $\omega = 0$

Pada Gambar 4.12 diberikan nilai $\omega = 0$ dan 20 nilai berbeda dari η yang bertambah menunjukkan terjadi perubahan kurva bifurkasi yaitu dari bifurkasi maju menjadi bifurkasi mundur.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diberikan kesimpulan sebagai hasil dari analisis model yang telah diperoleh dan saran sebagai pertimbangan dalam pengembangan atau penelitian lebih lanjut.

5.1 Kesimpulan

Dari pembahasan Tugas Akhir diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Pada saat terjadi bifurkasi maju, bilangan reproduksi dasar adalah

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta(K - (1 - \sigma)\bar{V})}{(\mu + \gamma)}$$

dengan titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = (\bar{I}, \bar{V}) = \left(0, \frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)}\right) \text{ dan}$$

titik kesetimbangan endemik

$$E = (\hat{I}, \hat{V}) = \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)}\right)$$

titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$. Titik kesetimbangan endemik ada dan stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

2. Pada saat terjadi bifurkasi mundur, bilangan reproduksi dasar adalah

$$\mathcal{R}_c = \frac{x - U + 2\sqrt{UW}}{\sigma(\mu + \gamma)} \cdot \frac{U}{\mu + \phi + \theta}$$

dengan

$$U = (\mu + \theta + \phi\sigma) - \frac{(1 - \sigma)\omega}{K}$$

$$x = \frac{(1 - \sigma)\omega}{K} + \sigma(\mu + \gamma)$$

$$W = -x + \sigma \frac{(\mu + \gamma)(\mu + \phi + \theta)}{U}$$

dan $\mathcal{R}_c < \mathcal{R}_0$. Untuk bifurkasi mundur terdapat tiga titik kesetimbangan : titik kesetimbangan bebas penyakit, dan dua titik kesetimbangan endemik yang kestabilannya bergantung pada \mathcal{R}_c , yaitu

$$E_1 = (\check{I}_1, \check{V}_1) = \left(\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right) \text{ dan}$$

$$E_2 = (\check{I}_2, \check{V}_2) = \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \frac{\phi K + \omega}{(\mu + \theta + \phi)} \right).$$

3. Pengaruh imigrasi imigrasi non-infektif terhadap penyebaran penyakit menyebabkan perubahan kualitatif berupa bifurkasi maju menjadi bifurkasi mundur dengan bertambahnya laju imigrasi populasi *susceptible* η dan bertambahnya laju populasi yang divaksinasi ω .
4. Penyelesaian numerik pada model epidemik SIVS dengan imigrasi non-infektif menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan $h = 0.1$ untuk mengetahui stabilitas titik kesetimbangan pada model dan diperoleh hasil sebagai berikut:
 - a. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka terjadi endemik karena setiap solusi menuju titik kesetimbangan endemik.
 - b. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$ maka terjadi keadaan bebas penyakit karena setiap solusi stabil menuju E_0 . Namun pada $\mathcal{R}_0 < 1$ dapat terjadi endemik jika terjadi bifurkasi mundur pada $\mathcal{R}_0 < 1$.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini tidak dibahas mengenai kendali optimal maka untuk selanjutnya dapat dilakukan analisis kendali optimal sebagai upaya pengendalian dan pencegahannya.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Lestari, I. P. (2012). “Eksistensi Bifurkasi Mundur pada Model Penyebaran Penyakit Menular dengan Vaksinasi”. **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.**
- [2] Sari, A. N. (2011). “Analisis Stabilitas dari Model Penyebaran Penyakit Menular melalui Transportasi Antara Dua Wilayah Kota”. **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.**
- [3] Zainal, F. D. (2014). “Analisis Kestabilan pada Model Transmisi Virus Hepatitis B yang dipengaruhi oleh Migrasi”. **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.**
- [4] Gumel, A. B. (2012). “Causes of Backward Bifurcations in Some Epidemiological Models”, *Journal of Mathematical Analysis Application*, 395 pp. 355-365.
- [5] Brauer, F. (2004). “Backward Bifurcations in Simple Vaccination Models”. *Journal of Mathematical Analysis Application* 298 pp. 418-431.
- [6] Zaman. G, Khan. M. A, Islam. S, Chohan. M. I, dan Jung. I. H, (2012). "Modeling Dynamical Interaction between Leptospirosis Infected Vector and Human Population". *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, 2012, no. 26, pp. 1287-1302.
- [7] Driessche, P., Watmough, J. (2002). “Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission”. *Mathematical Biosciences* 180, pp. 29-48.

- [8] Finizio, N dan Ladas, G. (1998). "Ordinary Differential Equations with Modern Applications". California: Wadsworth Publishing Company.
- [9] Edward, C. H., Penney, D. E., (2008). "Elementary Differential Equations Sixth Edition". New Jersey: Prentice Hall.
- [10] Wiggins, S. (2003). "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos". New York: Springer.
- [11] Knipl, D. H., Rost, G. (2013). "Backward Bifurcation in SIVS Model with Immigration of Non-Infectives". *Biomath*, Vol. 2, pp. 1-14.

LAMPIRAN A

Listing program untuk kurva bifurkasi

- M-File dengan judul **kurvabifurkasi.m**

```
clear all;
clc;
close all;

sigma=0.2;
mu=0.1;
theta=0.5;
phi=16;
gamma=12;
beta=0.33;
eta=5;
omega=5;
K=153.6;

A=sigma*beta;
A
B=(mu+theta+sigma*phi)+sigma*(mu+gamma)-
sigma*beta*K;

B
% C=(( (gamma+mu)*(mu+phi+theta))/beta)*(1-
R_0);
% C

r_0=(-
B^2+4*A*(( (gamma+mu)*(mu+phi+theta))/beta))/
(4*A*...
(( (gamma+mu)*(mu+phi+theta))/beta));
r_0

R_0=r_0:(1-r_0)/100:1;
```

LAMPIRAN A (LANJUTAN)

```

for i=1:1:101
    C=((gamma+mu)*(mu+phi+theta))/beta)*(1-
R_0(i));
    I_1(i)=(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A);
    I_2(i)=(-B-sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A);
end
plot(R_0,I_2,'r',R_0,I_1,'b',
'LineWidth',2);
R_a=1:(3-1)/100:3;
for i=1:1:101
    C=((gamma+mu)*(mu+phi+theta))/beta)*(1-
R_a(i));
    I_3(i)=(-B+sqrt(B^2-4*A*C))/(2*A);
end
hold on
plot(R_a,I_3,'b', 'LineWidth',2);
hold off
xlabel('Bilangan Reproduksi Dasar (R0)')
ylabel('Populasi (Ih)')
legend('I_1','I_2',20,'location','eastoutsid
e');
grid on
axis([r_0-1,R_a(101)+2,0,I_3(101)]);

```

LAMPIRAN B

Listing program numerik Runge-Kutta

- M-File dengan judul **TASimulasiRungeKutta.m**

```

mu = 0.1;
gamma = 12;
theta = 0.5;
sigma = 0.2;
phi = 16;
beta = 0.33;
omega = 5;
K = 153,6;
h = 0.1;

%nilai awal
I(1)=5;
V(1)=148;

N = 400;

for i=1:N
    %Step 1
    K1_I(i)= h*(beta*K*I(i) -
beta*((I(i))^2) - beta*V(i)*I(i) +...
    beta*sigma*V(i)*I(i) - mu*I(i) -
gamma*I(i));
    K1_V(i)= h*(phi*K - phi*I(i) -
sigma*beta*V(i)*I(i) - mu*V(i) -...
    theta*V(i) - phi*V(i) + omega);
    %Step2
    K2_I(i)= h*(beta*K*(I(i)+(K1_I(i)/2)) -
beta*(I(i)+(K1_I(i)/2))^2 -...
beta*(V(i)+(K1_V(i)/2))*(I(i)+(K1_I(i)/2)) +
beta*sigma*(V(i)+...

```

```

(K1_V(i)/2))*(I(i)+(K1_I(i)/2)) -
mu*(I(i)+(K1_I(i)/2)) - ...
LAMPIRAN B (LANJUTAN)

gamma*(I(i)+(K1_I(i)/2));
K2_V(i)= h*(phi*K -
phi*(I(i)+(K1_I(i)/2)) -
sigma*beta*(V(i)+...
(K1_V(i)/2))*(I(i)+(K1_I(i)/2)) -
mu*(V(i)+(K1_V(i)/2)) - ...
theta*(V(i)+(K1_V(i)/2)) -
phi*(V(i)+(K1_V(i)/2)) + omega);
%Step3
K3_I(i)= h*(beta*K*(I(i)+(K2_I(i)/2)) -
beta*(I(i)+((K2_I(i)/2)))^2 -...
beta*(V(i)+(K2_V(i)/2))*(I(i)+(K2_I(i)/2)) +
beta*sigma*...
(V(i)+(K2_V(i)/2))*(I(i)+(K2_I(i)/2)) -
mu*(I(i)+(K2_I(i)/2)) - ...
gamma*(I(i)+(K2_I(i)/2)));
K3_V(i)= h*(phi*K -
phi*(I(i)+(K2_I(i)/2)) - sigma*beta*...
(V(i)+(K2_V(i)/2))*(I(i)+(K2_I(i)/2)) -
mu*(V(i)+(K2_V(i)/2)) - ...
theta*(V(i)+(K2_V(i)/2)) -
phi*(V(i)+(K2_V(i)/2)) + omega);
%Step4
K4_I(i)= h*(beta*K*(I(i)+K3_I(i)) -
beta*(I(i)+K3_I(i))^2 - ...
beta*(V(i)+K3_V(i))*(I(i)+K3_I(i)) +
beta*sigma*(V(i)+K3_V(i))*...
(I(i)+K3_I(i)) - mu*(I(i)+K3_I(i)) -
gamma*(I(i)+K3_I(i)));
K4_V(i)= h*(phi*K - phi*(I(i)+K3_I(i)) -
sigma*beta*(V(i)+K3_V(i))*...

```

```

        (I(i)+K3_I(i)) - mu*(V(i)+K3_V(i)) -
theta*(V(i)+K3_V(i)) - ...
        phi*(V(i)+K3_V(i)) + omega);
    %Kalkulasi
    I(i+1) = I(i) + (1/6)*(K1_I(i) +
2*K2_I(i) + 2*K3_I(i) + K4_I(i))
    V(i+1) = V(i) + (1/6)*(K1_V(i) +
2*K2_V(i) + 2*K3_V(i) + K4_V(i))

end

t = 0:h:N*h;
plot(t,I,'r',t,V,'b','LineWidth',2);
xlabel('Waktu (tahun)');
ylabel('Populasi (juta jiwa)');
legend('I terhadap t','V terhadap t');
grid on

```

LAMPIRAN C

Listing program untuk pengaruh parameter imigrasi non-infektif pada bifurkasi mundur

- M-File dengan judul **bifurkasi.m**

```
clear all;
clc;
close all;

for j=1:2

    if j==1 || j==2
        sigma=0.2;
        mu=0.1;
        theta=0.5;
        phi=16;
        gamma=12;
        c=1;
        d=1.8;
        beta=0.16;
    end

    if j==1
        eta=5;
        omega=0:1:19;
    elseif j==2
        eta=10:2:48;
        omega=0;
    end

    if j==1
        for p=1:length(omega)
            K(p)=(((1 - c*mu + d*eta +
d*omega(p))/(2*mu*d))+...
                (((sqrt((1 - c*mu + d*eta +
d*omega(p))^2) + 4*mu*...
```

LAMPIRAN C (LANJUTAN)

```
d*c*eta + 4*mu*d*c*omega(p))/(2*mu*d))
```

```
R0(p)=(beta/(mu+gamma))*((K(p)*(mu+theta+sigma*phi)/...
```

```
(mu+theta+phi))-((1-sigma)*omega(p))/(mu+theta+phi))
```

```
%Ro hitungan
```

```
n = length(omega)
```

```
end
```

```
elseif j==2
```

```
for p=1:length(eta)
```

```
K(p)=(((1 - c*mu + d*eta(p) + d*omega)/(2*mu*d))+...
```

```
((sqrt((1 - c*mu + d*eta(p) + d*omega)^2) +...
```

```
4*mu*d*c*eta(p) + 4*mu*d*c*omega))/(2*mu*d));
```

```
R0(p)=(beta/(mu+gamma))*((K(p)*(mu+theta+sigma*phi)/...
```

```
(mu+theta+phi))-((1-sigma)*omega)/(mu+theta+phi));
```

```
%Ro hitungan
```

```
n = length(eta);
```

```
end
```

```
end
```

```
figure(j);
```

```
for p=1:n
```

```
beta_c(p)=((sigma*mu + sigma*gamma-theta - mu -...
```



```

        sigma*phi +2*(sqrt(sigma*phi*mu
-(sigma^2)*phi*mu +...
        sigma*phi*gamma -
(sigma^2)*phi*gamma)))/(K(p)*sigma));
LAMPIRAN C (LANJUTAN)

```

```

A=sigma*beta;

```

```

B(p)=(mu+theta+sigma*phi)+sigma*(mu+gamma)-
sigma*beta*K(p);

```

```

r_0(p)=(-

```

```

B(p)^2+4*A*((gamma+mu)*(mu+phi+theta)/beta)
))/...

```

```

(4*A*((gamma+mu)*(mu+phi+theta)/beta))

```

```

R_0=r_0(p):(1-r_0(p))/100:1

```

```

beta_c(p)

```

```

for i=1:1:101

```

```

C=((gamma+mu)*(mu+phi+theta))/beta)*(1-
R_0(i));

```

```

I_1(i)=(-B(p)+sqrt(B(p)^2-
4*A*C))/(2*A);

```

```

I_2(i)=(-B(p)-sqrt(B(p)^2-
4*A*C))/(2*A);

```

```

end

```

```

plot(R_0,I_2,'r',R_0,I_1,'b',
'LineWidth',1.5);

```

```

R_a=1:(3-1)/100:3;

```

```

for i=1:1:101

```

```

C=((gamma+mu)*(mu+phi+theta))/beta)*(1-
R_a(i));

```

```

                                I_3(i)=(-B(p)+sqrt(B(p)^2-
4*A*C))/(2*A);
                                end
                                hold on
                                plot(R_a,I_3,'b', 'LineWidth',2);
                                end

                                % hold off;
                                title(['Bifurkasi Gambar ',num2str(j)]);
                                xlabel('Bilangan Reproduksi Dasar
(R0)');
                                LAMPIRAN C (LANJUTAN)

                                ylabel('populasi');

                                legend('I_1','I_2',20,'location','eastoutsid
e');
                                grid on;
                                axis([0 1.8 0 200]);
                                end

```

LAMPIRAN D

- Tabel nilai iterasi untuk $E_1 = (\check{I}_1, \check{V}_1) = (8.6, 135.4)$

n	I	V
1	8.6000	135.4000
2	8.5177	135.1495
3	8.4607	135.1034
4	8.4113	135.1298
5	8.3635	135.1827
6	8.3152	135.2463
7	8.2657	135.3151
8	8.2147	135.3872
9	8.1621	135.4621
10	8.1078	135.5396
11	8.0518	135.6197
12	7.9940	135.7024
13	7.9344	135.7877
14	7.8729	135.8757
15	7.8096	135.9665
16	7.7443	136.0601
17	7.6771	136.1565
18	7.6080	136.2558
19	7.5369	136.3581
20	7.4638	136.4633
21	7.3886	136.5715
22	7.3114	136.6827
23	7.2321	136.7971
24	7.1508	136.9145
25	7.0674	137.0350
26	6.9819	137.1587
27	6.8944	137.2855
28	6.8047	137.4154
29	6.7131	137.5484
30	6.6194	137.6845

n	I	V
31	6.5236	137.8237
32	6.4259	137.9659
33	6.3263	138.1112
34	6.2247	138.2594
35	6.1213	138.4105
36	6.0161	138.5645
37	5.9092	138.7211
38	5.8006	138.8805
39	5.6904	139.0424
40	5.5787	139.2067
41	5.4656	139.3734
42	5.3511	139.5422
43	5.2355	139.7131
44	5.1187	139.8859
45	5.0010	140.0603
46	4.8825	140.2364
47	4.7632	140.4137
48	4.6433	140.5922
49	4.5231	140.7717
50	4.4025	140.9518
51	4.2818	141.1325
52	4.1611	141.3135
53	4.0406	141.4945
54	3.9204	141.6753
55	3.8007	141.8557
56	3.6816	142.0354
57	3.5634	142.2142
58	3.4462	142.3919
59	3.3300	142.5681
60	3.2152	142.7428

LAMPIRAN D (LANJUTAN)

n	I	V
61	3.1017	142.9155
62	2.9899	143.0862
63	2.8797	143.2546
64	2.7713	143.4205
65	2.6649	143.5837
66	2.5606	143.7440
67	2.4584	143.9013
68	2.3584	144.0553
69	2.2608	144.2060
70	2.1656	144.3532
71	2.0729	144.4968
72	1.9827	144.6367
73	1.8951	144.7728
74	1.8101	144.9051
75	1.7278	145.0334
76	1.6481	145.1577
77	1.5710	145.2781
78	1.4967	145.3945
79	1.4249	145.5068
80	1.3559	145.6152
81	1.2894	145.7196
82	1.2255	145.8200
83	1.1642	145.9166
84	1.1053	146.0093
85	1.0489	146.0983
86	0.9949	146.1836
87	0.9433	146.2652
88	0.8939	146.3434
89	0.8468	146.4180
90	0.8018	146.4893
91	0.7589	146.5574

n	I	V
92	0.7181	146.6222
93	0.6792	146.6841
94	0.6421	146.7429
95	0.6070	146.7989
96	0.5735	146.8522
97	0.5418	146.9028
98	0.5116	146.9508
99	0.4830	146.9965
100	0.4559	147.0398
101	0.4302	147.0808
102	0.4059	147.1197
103	0.3828	147.1565
104	0.3610	147.1914
105	0.3404	147.2244
106	0.3209	147.2557
107	0.3024	147.2852
108	0.2850	147.3132
109	0.2685	147.3396
110	0.2529	147.3645
111	0.2382	147.3881
112	0.2244	147.4103
113	0.2113	147.4313
114	0.1989	147.4511
115	0.1873	147.4698
116	0.1763	147.4874
117	0.1660	147.5041
118	0.1562	147.5198
119	0.1470	147.5345
120	0.1383	147.5485
121	0.1301	147.5616
122	0.1224	147.5740

LAMPIRAN D (LANJUTAN)

n	I	V
123	0.1152	147.5856
124	0.1084	147.5966
125	0.1019	147.6070
126	0.0959	147.6167
127	0.0902	147.6259
128	0.0848	147.6345
129	0.0798	147.6426
130	0.0750	147.6503
131	0.0706	147.6575
132	0.0663	147.6642
133	0.0624	147.6706
134	0.0587	147.6766
135	0.0552	147.6822
136	0.0519	147.6876
137	0.0488	147.6925
138	0.0458	147.6972
139	0.0431	147.7017
140	0.0405	147.7058
141	0.0381	147.7097
142	0.0358	147.7134
143	0.0337	147.7169
144	0.0316	147.7201
145	0.0297	147.7232
146	0.0280	147.7260
147	0.0263	147.7287
148	0.0247	147.7313
149	0.0232	147.7337
150	0.0218	147.7359
151	0.0205	147.7380
152	0.0193	147.7400
153	0.0181	147.7419

n	I	V
154	0.0170	147.7436
155	0.0160	147.7453
156	0.0150	147.7468
157	0.0141	147.7483
158	0.0133	147.7497
159	0.0125	147.7510
160	0.0117	147.7522
161	0.0110	147.7533
162	0.0104	147.7544
163	0.0097	147.7554
164	0.0092	147.7563
165	0.0086	147.7572
166	0.0081	147.7580
167	0.0076	147.7588
168	0.0071	147.7596
169	0.0067	147.7603
170	0.0063	147.7609
171	0.0059	147.7615
172	0.0056	147.7621
173	0.0052	147.7626
174	0.0049	147.7632
175	0.0046	147.7636
176	0.0043	147.7641
177	0.0041	147.7645
178	0.0038	147.7649
179	0.0036	147.7653
180	0.0034	147.7656
181	0.0032	147.7659
182	0.0030	147.7663
183	0.0028	147.7665
184	0.0026	147.7668

LAMPIRAN D (LANJUTAN)

n	I	V
185	0.0025	147.7671
186	0.0023	147.7673
187	0.0022	147.7675
188	0.0021	147.7678
189	0.0019	147.7680
190	0.0018	147.7681
191	0.0017	147.7683
192	0.0016	147.7685
193	0.0015	147.7686
194	0.0014	147.7688
195	0.0013	147.7689
196	0.0013	147.7691
197	0.0012	147.7692
198	0.0011	147.7693
199	0.0010	147.7694
200	0.0010	147.7695
201	0.0009	147.7696
202	0.0009	147.7697
203	0.0008	147.7698
204	0.0008	147.7699
205	0.0007	147.7699
206	0.0007	147.7700
207	0.0006	147.7701
208	0.0006	147.7701
209	0.0006	147.7702
210	0.0005	147.7702
211	0.0005	147.7703
212	0.0005	147.7703
213	0.0004	147.7704
214	0.0004	147.7704
215	0.0004	147.7705

n	I	V
216	0.0004	147.7705
217	0.0003	147.7705
218	0.0003	147.7706
219	0.0003	147.7706
220	0.0003	147.7706
221	0.0003	147.7707
222	0.0002	147.7707
223	0.0002	147.7707
224	0.0002	147.7707
225	0.0002	147.7708
226	0.0002	147.7708
227	0.0002	147.7708
228	0.0002	147.7708
229	0.0002	147.7708
230	0.0002	147.7708
231	0.0001	147.7709
232	0.0001	147.7709
233	0.0001	147.7709
234	0.0001	147.7709
235	0.0001	147.7709
236	0.0001	147.7709
237	0.0001	147.7709
238	0.0001	147.7709
239	0.0001	147.7709
240	0.0001	147.7710
241	0.0001	147.7710
242	0.0001	147.7710
243	0.0001	147.7710
244	0.0001	147.7710
245	0.0001	147.7710
246	0.0001	147.7710

LAMPIRAN D (LANJUTAN)

n	I	V
247	0.0001	147.7710
248	0.0000	147.7710
249	0.0000	147.7710
250	0.0000	147.7710
251	0.0000	147.7710

LAMPIRAN E

- Tabel nilai iterasi untuk $E_2 = (\check{I}_2, \check{V}_2) = (50.7, 82.8)$

n	I	V
1	50.7000	82.8000
	50.9363	83.5991
	51.6998	85.4679
	52.5299	90.1924
	46.6283	100.5524
	37.1424	109.4754
	34.5419	111.9052
8	32.7947	113.0316
	31.7275	113.3383
	31.1396	113.1828
	30.8846	112.7819
	30.8621	112.2612
	31.0029	111.6944
	31.2577	111.1274
15	31.5892	110.5913
	31.9676	110.1102
	32.3663	109.7048
	32.7601	109.3933
	33.1236	109.1913
	33.4312	109.1089
	33.6589	109.1482
22	33.7883	109.2992
	33.8114	109.5386
	33.7349	109.8310
	33.5801	110.1355
	33.3781	110.4140
	33.1619	110.6382
	32.9594	110.7933
29	32.7903	110.8768
	32.6649	110.8956

n	I	V
	32.5864	110.8617
	32.5523	110.7894
	32.5568	110.6932
	32.5922	110.5863
	32.6498	110.4801
36	32.7208	110.3839
	32.7967	110.3046
	32.8700	110.2467
	32.9345	110.2123
	32.9855	110.2011
	33.0201	110.2108
	33.0374	110.2372
43	33.0384	110.2754
	33.0254	110.3196
	33.0021	110.3645
	32.9725	110.4054
	32.9407	110.4391
	32.9100	110.4633
	32.8835	110.4774
50	32.8629	110.4818
	32.8493	110.4776
	32.8426	110.4669
	32.8424	110.4517
	32.8476	110.4344
	32.8567	110.4168
	32.8683	110.4007
57	32.8807	110.3874
	32.8928	110.3778
	32.9034	110.3720
	32.9117	110.3701

LAMPIRAN E (LANJUTAN)

n	I	V
	32.9173	110.3716
	32.9201	110.3757
	32.9203	110.3817
64	32.9184	110.3887
	32.9147	110.3958
	32.9101	110.4023
	32.9051	110.4077
	32.9002	110.4116
	32.8960	110.4140
	32.8926	110.4148
71	32.8903	110.4142
	32.8892	110.4126
	32.8891	110.4102
	32.8898	110.4074
	32.8913	110.4046
	32.8931	110.4020
	32.8951	110.3998
78	32.8971	110.3982
	32.8988	110.3973
	32.9001	110.3969
	32.9010	110.3971
	32.9015	110.3978
	32.9016	110.3987
	32.9013	110.3998
85	32.9007	110.4010
	32.9000	110.4020
	32.8992	110.4029
	32.8984	110.4035
	32.8977	110.4039
	32.8972	110.4041
	32.8968	110.4040

n	I	V
92	32.8966	110.4037
	32.8966	110.4034
	32.8967	110.4029
	32.8969	110.4025
	32.8972	110.4021
	32.8975	110.4017
	32.8978	110.4014
99	32.8981	110.4013
	32.8983	110.4012
	32.8985	110.4012
	32.8986	110.4013
	32.8986	110.4015
	32.8985	110.4017
	32.8984	110.4019
106	32.8983	110.4020
	32.8982	110.4022
	32.8981	110.4023
	32.8980	110.4023
	32.8979	110.4024
	32.8978	110.4023
	32.8978	110.4023
113	32.8978	110.4022
	32.8978	110.4022
	32.8978	110.4021
	32.8979	110.4020
	32.8979	110.4020
	32.8980	110.4019
	32.8980	110.4019
120	32.8980	110.4019
	32.8981	110.4019
	32.8981	110.4019

LAMPIRAN E (LANJUTAN)

n	I	V
	32.8981	110.4019
	32.8981	110.4020
	32.8981	110.4020
	32.8981	110.4020
127	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021
134	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
141	32.8980	110.4020

LAMPIRAN F

- Tabel nilai iterasi untuk $(I(0), V(0)) = (9, 120)$

n	I	V
1	9.0000	120.0000
	9.8456	127.6633
	10.2574	130.4473
	10.4497	131.4531
	10.5493	131.7977
	10.6132	131.8923
	10.6644	131.8909
8	10.7119	131.8514
	10.7593	131.7956
	10.8079	131.7318
	10.8585	131.6631
	10.9112	131.5903
	10.9663	131.5140
	11.0240	131.4340
15	11.0843	131.3503
	11.1475	131.2627
	11.2136	131.1711
	11.2829	131.0752
	11.3554	130.9748
	11.4314	130.8696
	11.5111	130.7595
22	11.5946	130.6442
	11.6821	130.5233
	11.7739	130.3967
	11.8703	130.2639
	11.9714	130.1247
	12.0775	129.9787
	12.1890	129.8256

n	I	V
29	12.3060	129.6648
	12.4290	129.4962
	12.5583	129.3190
	12.6942	129.1331
	12.8372	128.9377
	12.9876	128.7324
	13.1458	128.5166
36	13.3125	128.2897
	13.4879	128.0512
	13.6727	127.8002
	13.8675	127.5362
	14.0728	127.2583
	14.2893	126.9658
	14.5177	126.6578
43	14.7586	126.3335
	15.0128	125.9919
	15.2812	125.6320
	15.5645	125.2528
	15.8637	124.8533
	16.1796	124.4323
	16.5133	123.9886
50	16.8658	123.5212
	17.2381	123.0288
	17.6312	122.5102
	18.0464	121.9640
	18.4845	121.3892
	18.9469	120.7844
	19.4345	120.1485

LAMPIRAN F (LANJUTAN)

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
57	19.9484	119.4805
	20.4896	118.7793
	21.0589	118.0441
	21.6572	117.2741
	22.2850	116.4690
	22.9429	115.6286
	23.6309	114.7528
64	24.3489	113.8423
	25.0965	112.8980
	25.8729	111.9211
	26.6768	110.9138
	27.5064	109.8783
	28.3596	108.8178
	29.2336	107.7359
71	30.1252	106.6368
	31.0307	105.5253
	31.9460	104.4068
	32.8666	103.2869
	33.7879	102.1720
	34.7050	101.0685
	35.6136	99.9833
78	36.5093	98.9242
	37.3892	97.8997
	38.2519	96.9206
	39.0994	96.0023
	39.9395	95.1698
	40.7908	94.4678
	41.6893	93.9826

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
85	42.6917	93.8881
	43.8332	94.5362
	44.8517	96.5937
	44.2703	100.9525
	39.9329	107.0810
	35.7853	111.2213
	33.3174	113.0496
92	31.8740	113.6363
	31.0792	113.5734
	30.7087	113.1807
	30.6234	112.6300
	30.7339	112.0156
	30.9801	111.3917
	31.3190	110.7931
99	31.7175	110.2453
	32.1478	109.7701
	32.5840	109.3875
	32.9998	109.1159
	33.3679	108.9701
	33.6606	108.9584
	33.8529	109.0777
106	33.9286	109.3097
	33.8864	109.6204
	33.7432	109.9648
	33.5309	110.2963
	33.2881	110.5767
	33.0502	110.7826
	32.8435	110.9066

LAMPIRAN F (LANJUTAN)

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
113	32.6836	110.9534
	32.5763	110.9354
	32.5204	110.8685
	32.5105	110.7691
	32.5383	110.6528
	32.5944	110.5328
	32.6689	110.4203
120	32.7524	110.3241
	32.8362	110.2499
	32.9127	110.2013
	32.9759	110.1790
	33.0219	110.1812
	33.0488	110.2041
	33.0568	110.2425
127	33.0479	110.2901
	33.0258	110.3408
	32.9948	110.3889
	32.9595	110.4302
	32.9242	110.4615
	32.8924	110.4817
	32.8667	110.4906
134	32.8484	110.4893
	32.8380	110.4799
	32.8351	110.4645
	32.8388	110.4457
	32.8475	110.4259
	32.8596	110.4071
	32.8733	110.3910

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
141	32.8872	110.3785
	32.8997	110.3704
	32.9101	110.3666
	32.9175	110.3669
	32.9219	110.3705
	32.9232	110.3765
	32.9219	110.3840
148	32.9185	110.3920
	32.9136	110.3996
	32.9081	110.4062
	32.9025	110.4113
	32.8974	110.4146
	32.8933	110.4161
	32.8903	110.4161
155	32.8885	110.4147
	32.8879	110.4123
	32.8884	110.4093
	32.8898	110.4061
	32.8917	110.4031
	32.8939	110.4004
	32.8961	110.3984
162	32.8982	110.3970
	32.8998	110.3964
	32.9011	110.3964
	32.9018	110.3970
	32.9020	110.3979
	32.9018	110.3991
	32.9013	110.4004

LAMPIRAN G

- Tabel nilai iterasi untuk $(I(0), V(0)) = (18, 130)$

n	I	V
1	18.0000	130.0000
	17.3185	126.9263
	17.2510	125.0780
	17.4262	123.8725
	17.7201	122.9837
	18.0827	122.2431
	18.4919	121.5648
8	18.9375	120.9044
	19.4148	120.2384
	19.9219	119.5542
	20.4583	118.8446
	21.0240	118.1053
	21.6193	117.3338
15	22.2444	116.5286
	22.8998	115.6889
	23.5855	114.8145
	24.3014	113.9056
	25.0470	112.9630
	25.8214	111.9880
	26.6234	110.9824
22	27.4514	109.9485
	28.3031	108.8895
	29.1759	107.8089
	30.0665	106.7108
	30.9712	105.6001
	31.8861	104.4821
	32.8066	103.3624
33.7282	102.2474	

n	I	V
29	34.6462	101.1436
	35.5559	100.0581
	36.4536	98.9987
	37.3361	97.9745
	38.2026	96.9969
	39.0555	96.0825
	39.9038	95.2586
36	40.7677	94.5744
	41.6855	94.1250
	42.7139	94.1014
	43.8692	94.8864
	44.7928	97.1854
	43.7951	101.8275
43	39.2026	107.8451
	35.3779	111.5561
	33.0852	113.1678
	31.7474	113.6441
	31.0192	113.5265
	30.6921	113.1081
	30.6359	112.5472
50	30.7660	111.9310
	31.0254	111.3105
	31.3726	110.7187
	31.7755	110.1807
	32.2068	109.7177
	32.6406	109.3497
	33.0505	109.0945
33.4091	108.9665	

LAMPIRAN G (LANJUTAN)

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
57	32.6043	108.9724
	32.6802	109.1074
	32.7640	109.3510
	32.8469	109.6675
	32.9217	110.0114
	32.9826	110.3368
	33.0261	110.6073
64	33.0206	110.8019
	32.8202	110.9149
	32.6675	110.9524
	32.5674	110.9272
	32.5181	110.8554
	32.5136	110.7534
	32.5455	110.6363
71	32.6043	110.5171
	32.6802	110.4068
	32.7640	110.3134
	32.8469	110.2427
	32.9217	110.1977
	32.9826	110.1788
	33.0261	110.1839
78	33.0503	110.2091
	33.0559	110.2489
	33.0451	110.2970
	33.0217	110.3475
	32.9900	110.3948
	32.9546	110.4347
	32.9197	110.4646

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
85	32.8887	110.4832
	32.8640	110.4906
	32.8468	110.4882
	32.8374	110.4779
	32.8355	110.4620
	32.8399	110.4430
	32.8491	110.4233
92	32.8615	110.4048
	32.8752	110.3892
	32.8889	110.3773
	32.9012	110.3698
	32.9112	110.3666
	32.9182	110.3673
	32.9221	110.3713
99	32.9231	110.3776
	32.9214	110.3851
	32.9178	110.3931
	32.9129	110.4006
	32.9073	110.4070
	32.9018	110.4118
	32.8968	110.4148
106	32.8928	110.4162
	32.8900	110.4159
	32.8884	110.4143
	32.8880	110.4119
	32.8886	110.4088
	32.8900	110.4057
	32.8920	110.4027

LAMPIRAN G (LANJUTAN)

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
113	32.8942	110.4001
	32.8964	110.3982
	32.8984	110.3969
	32.9000	110.3964
	32.9012	110.3965
	32.9018	110.3971
	32.9020	110.3981
120	32.9018	110.3993
	32.9012	110.4005
	32.9004	110.4017
	32.8995	110.4028
	32.8987	110.4035
	32.8979	110.4041
	32.8972	110.4043
127	32.8967	110.4043
	32.8965	110.4040
	32.8964	110.4036
	32.8965	110.4032
	32.8967	110.4026
	32.8970	110.4022
	32.8974	110.4018
134	32.8977	110.4014
	32.8980	110.4012
	32.8983	110.4011
	32.8985	110.4011
	32.8986	110.4012
	32.8986	110.4014
	32.8986	110.4016

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
141	32.8985	110.4018
	32.8984	110.4020
	32.8983	110.4021
	32.8981	110.4023
	32.8980	110.4024
	32.8979	110.4024
	32.8978	110.4024
148	32.8978	110.4024
	32.8977	110.4023
	32.8978	110.4022
	32.8978	110.4021
	32.8978	110.4021
	32.8979	110.4020
	32.8980	110.4019
155	32.8980	110.4019
	32.8980	110.4019
	32.8981	110.4019
	32.8981	110.4019
	32.8981	110.4019
	32.8981	110.4020
	32.8981	110.4020
162	32.8981	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021

LAMPIRAN H

- Tabel nilai iterasi untuk $(I(0), V(0)) = (50, 100)$

n	I	V
1	50.0000	100.0000
	27.8034	113.5448
	28.3322	112.4076
	28.9616	111.3301
	29.6639	110.3096
	30.4209	109.3494
	31.2186	108.4604
8	32.0446	107.6620
	32.8846	106.9838
	33.7187	106.4675
	34.5141	106.1678
	35.2154	106.1486
	35.7353	106.4699
15	35.9608	107.1559
	35.7988	108.1483
	35.2589	109.2815
	34.4873	110.3338
	33.6821	111.1358
	32.9869	111.6299
	32.4630	111.8447
22	32.1166	111.8442
	31.9282	111.6948
	31.8701	111.4529
	31.9141	111.1623
	32.0339	110.8566
	32.2060	110.5615
	32.4091	110.2970
32.6237	110.0785	

n	I	V
29	32.8320	109.9170
	33.0180	109.8192
	33.1680	109.7868
	33.2721	109.8156
	33.3253	109.8960
	33.3283	110.0137
	33.2874	110.1512
36	33.2136	110.2911
	33.1201	110.4180
	33.0205	110.5206
	32.9264	110.5927
	32.8465	110.6326
	32.7860	110.6424
43	32.7473	110.6269
	32.7299	110.5924
	32.7315	110.5456
	32.7486	110.4931
	32.7769	110.4408
	32.8120	110.3934
	32.8494	110.3545
50	32.8853	110.3264
	32.9166	110.3101
	32.9411	110.3051
	32.9575	110.3102
	32.9654	110.3233
	32.9655	110.3419
	32.9591	110.3632
32.9478	110.3847	

LAMPIRAN H (LANJUTAN)

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
57	32.9335	110.4043
	32.9182	110.4204
	32.9035	110.4319
	32.8908	110.4386
	32.8809	110.4406
	32.8743	110.4386
	32.8712	110.4333
64	32.8711	110.4260
	32.8737	110.4175
	32.8781	110.4090
	32.8837	110.4013
	32.8898	110.3949
	32.8956	110.3902
	32.9007	110.3875
71	32.9047	110.3866
	32.9074	110.3873
	32.9087	110.3894
	32.9088	110.3923
	32.9078	110.3957
	32.9060	110.3991
	32.9038	110.4022
78	32.9014	110.4048
	32.8990	110.4067
	32.8970	110.4078
	32.8954	110.4082
	32.8943	110.4079
	32.8937	110.4071
	32.8937	110.4060

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
85	32.8941	110.4046
	32.8948	110.4032
	32.8957	110.4020
	32.8966	110.4009
	32.8976	110.4002
	32.8984	110.3997
	32.8990	110.3996
92	32.8995	110.3997
	32.8997	110.4000
	32.8997	110.4004
	32.8996	110.4010
	32.8993	110.4015
	32.8989	110.4020
	32.8986	110.4025
99	32.8982	110.4028
	32.8979	110.4029
	32.8976	110.4030
	32.8974	110.4030
	32.8973	110.4029
	32.8973	110.4027
	32.8974	110.4025
106	32.8975	110.4022
	32.8976	110.4020
	32.8978	110.4019
	32.8979	110.4017
	32.8981	110.4017
	32.8982	110.4016
	32.8982	110.4017

LAMPIRAN H (LANJUTAN)

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
113	32.8983	110.4017
	32.8983	110.4018
	32.8983	110.4019
	32.8982	110.4019
	32.8982	110.4020
	32.8981	110.4021
	32.8980	110.4021
120	32.8980	110.4022
	32.8979	110.4022
	32.8979	110.4022
	32.8979	110.4022
	32.8979	110.4021
	32.8979	110.4021
	32.8979	110.4021
127	32.8979	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
134	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
141	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4021
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
148	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020
	32.8980	110.4020

LAMPIRAN I

- Tabel nilai iterasi untuk $(I(0), V(0)) = (5, 148)$

n	I	V
1	5.0000	148.0000
	4.4709	143.2046
	4.2441	141.8849
	4.0939	141.6193
	3.9651	141.6681
	3.8428	141.8098
	3.7228	141.9783
8	3.6041	142.1541
	3.4865	142.3312
	3.3699	142.5077
	3.2546	142.6828
	3.1407	142.8562
	3.0282	143.0277
	2.9175	143.1969
15	2.8085	143.3637
	2.7014	143.5278
	2.5963	143.6891
	2.4933	143.8475
	2.3926	144.0026
	2.2942	144.1545
	2.1981	144.3029
22	2.1046	144.4478
	2.0135	144.5890
	1.9250	144.7264
	1.8391	144.8599
	1.7558	144.9896
	1.6752	145.1153
	1.5973	145.2371

n	I	V
29	1.5220	145.3548
	1.4494	145.4686
	1.3794	145.5783
	1.3120	145.6841
	1.2472	145.7859
	1.1850	145.8838
	1.1253	145.9778
36	1.0681	146.0681
	1.0133	146.1546
	0.9608	146.2375
	0.9107	146.3168
	0.8628	146.3927
	0.8171	146.4651
	0.7735	146.5343
43	0.7319	146.6002
	0.6923	146.6631
	0.6547	146.7230
	0.6189	146.7799
	0.5848	146.8341
	0.5525	146.8856
	0.5218	146.9346
50	0.4927	146.9810
	0.4651	147.0251
	0.4389	147.0669
	0.4141	147.1065
	0.3906	147.1441
	0.3684	147.1796
	0.3473	147.2133

LAMPIRAN I (LANJUTAN)

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
57	0.3275	147.2451
	0.3086	147.2752
	0.2909	147.3037
	0.2741	147.3306
	0.2582	147.3561
	0.2432	147.3801
	0.2291	147.4028
64	0.2157	147.4242
	0.2031	147.4444
	0.1912	147.4635
	0.1800	147.4815
	0.1694	147.4985
	0.1595	147.5145
	0.1501	147.5296
71	0.1412	147.5438
	0.1329	147.5572
	0.1250	147.5698
	0.1176	147.5817
	0.1107	147.5929
	0.1041	147.6035
	0.0979	147.6134
78	0.0921	147.6228
	0.0866	147.6316
	0.0815	147.6399
	0.0766	147.6477
	0.0721	147.6550
	0.0678	147.6619
	0.0637	147.6685

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
85	0.0599	147.6746
	0.0563	147.6803
	0.0530	147.6858
	0.0498	147.6909
	0.0468	147.6957
	0.0440	147.7002
	0.0414	147.7044
92	0.0389	147.7084
	0.0366	147.7122
	0.0344	147.7157
	0.0323	147.7190
	0.0304	147.7221
	0.0286	147.7251
	0.0268	147.7278
99	0.0252	147.7304
	0.0237	147.7329
	0.0223	147.7352
	0.0210	147.7373
	0.0197	147.7393
	0.0185	147.7413
	0.0174	147.7430
106	0.0164	147.7447
	0.0154	147.7463
	0.0144	147.7478
	0.0136	147.7492
	0.0128	147.7505
	0.0120	147.7518
	0.0113	147.7529

LAMPIRAN I (LANJUTAN)

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
113	0.0106	147.7540
	0.0100	147.7550
	0.0094	147.7560
	0.0088	147.7569
	0.0083	147.7578
	0.0078	147.7586
	0.0073	147.7593
120	0.0069	147.7600
	0.0064	147.7607
	0.0061	147.7613
	0.0057	147.7619
	0.0054	147.7625
	0.0050	147.7630
	0.0047	147.7635
127	0.0044	147.7639
	0.0042	147.7644
	0.0039	147.7648
	0.0037	147.7651
	0.0035	147.7655
	0.0033	147.7658
	0.0031	147.7662
134	0.0029	147.7665
	0.0027	147.7667
	0.0025	147.7670
	0.0024	147.7672
	0.0022	147.7675
	0.0021	147.7677
	0.0020	147.7679

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
141	0.0019	147.7681
	0.0017	147.7683
	0.0016	147.7684
	0.0015	147.7686
	0.0015	147.7687
	0.0014	147.7689
	0.0013	147.7690
148	0.0012	147.7691
	0.0011	147.7693
	0.0011	147.7694
	0.0010	147.7695
	0.0009	147.7696
	0.0009	147.7697
	0.0008	147.7697
155	0.0008	147.7698
	0.0007	147.7699
	0.0007	147.7700
	0.0006	147.7700
	0.0006	147.7701
	0.0006	147.7702
	0.0005	147.7702
162	0.0005	147.7703
	0.0005	147.7703
	0.0004	147.7704
	0.0004	147.7704
	0.0004	147.7705
	0.0004	147.7705
	0.0003	147.7705

LAMPIRAN I (LANJUTAN)

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
169	0.0003	147.7706
	0.0003	147.7706
	0.0003	147.7706
	0.0003	147.7706
	0.0003	147.7707
	0.0002	147.7707
	0.0002	147.7707
176	0.0002	147.7707
	0.0002	147.7708
	0.0002	147.7708
	0.0002	147.7708
	0.0002	147.7708
	0.0002	147.7708
	0.0001	147.7708
183	0.0001	147.7709
	0.0001	147.7709
	0.0001	147.7709
	0.0001	147.7709
	0.0001	147.7709
	0.0001	147.7709
	0.0001	147.7709
190	0.0001	147.7709
	0.0001	147.7710
	0.0001	147.7710
	0.0001	147.7710
	0.0001	147.7710
	0.0001	147.7710
	0.0001	147.7710

<i>n</i>	<i>I</i>	<i>V</i>
197	0.0001	147.7710
	0.0001	147.7710
	0.0001	147.7710
	0.0000	147.7710
	0.0000	147.7710

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

LAMPIRAN J

BIODATA PENULIS



Penulis biasa dipanggil Devi atau Mutia. Ia lahir di Surabaya, 14 Oktober 1992 sebagai anak pertama dari dua bersaudara dan merupakan anak dari pasangan Bapak Moch. Anwar dan Ibu Mutmainah. Sekarang Ia tinggal di Jalan Simorejo Sari A 6/109 Surabaya. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari SDN Asemrowo I/133 (1999-2005), SMPN 3 Surabaya (2005-2008) dan SMAN 6 Surabaya (2008-2011). Setelah lulus SMA

penulis melanjutkan ke perguruan tinggi jenjang S1 dan diterima di Matematika ITS melalui jalur SNMPTN tulis pada tahun 2011 dengan NRP 1211 100 105. Di Jurusan Matematika penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di HIMATIKA-ITS sebagai staf Departemen Kesejahteraan Mahasiswa (2012-2013) dan Kabiro Pelayanan Departemen Kesejahteraan Mahasiswa (2013-2014). Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir dapat ditunjukkan ke penulis melalui email: mutiaanwardevi@yahoo.co.id.