Menentukan Struktur Grup Berorder Hingga dengan Order 216 dan 324

Hesty Irna Aulia, Subiono
Matematika, FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: subiono2008@matematika.its.ac.id

***Abstrak*— Pada paper ini dikaji tentang banyaknya struktur grup berorder hingga. Langkah awal untuk mengkaji yaitu dengan menjabarkan tentang sifat-sifat dari grup dengan order berhingga. Sebagaimana diketahui bahwa grup sangat dipengaruhi oleh banyaknya anggota *(order)* didalam grup tersebut. Apabila *order* dari grup kecil, maka banyak struktur grup dapat dengan mudah untuk diketahui. Sedangkan untuk *order* yang besar maka akan sulit untuk diketahui. Kajian ini akan dilakukan berdasarkan *grup simpel dan klas isomorpik grup abelian.* Sehingga hasil yang diperoleh dari paper ini adalah tidak ada grup dengan order 216 dan 324 yang merupakan grup simpel, serta berdasarkan struktur klas isomorpik dari grup abelian, maka grup dengan order 216 memiliki Sembilan klas isomorpik, dan untuk order 324 memiliki Sepuluh klas isomorpik.**

***Kata Kunci*— Order, Grup Simpel, Klas Isomorpik Grup Abelian.**

I. PENDAHULUAN

Aljabar merupakan ilmu dibidang matematika yang mendasari semua disiplin ilmu dan luas pencakupannya. Ilmu tentang aljabar telah mengalami banyak perkembangan yang sangat signifikan. Hal ini ditunjukkan oleh banyaknya peneliti yang membahas tentang aljabar Ilmu aljabar tidak hanya digunakan dalam ilmu matematika saja, akan tetapi juga mengkombinasikan semua hal tentang matematika dan aplikasinya. Salah satu sistem aljabar yang sangat penting adalah tentang teori grup. Banyak permasalahan di matematika yang diselidiki dengan menggunakan teori grup. Selain itu, aplikasi dari grup juga banyak digunakan dalam ilmu pengetahuan yang lain. Misalnya konsep grup ini sangat penting dalam cabang ilmu kimia, dimana digunakan untuk menyelidiki kesimetrian suatu molekul. Begitu juga dengan ilmu fisika, konsep grup digunakan dalam menyelidiki polaritas, spektroskopi, dan juga untuk mengkonstruksi orbit molekul[1].

Kajian tentang struktur aljabar diawali dengan definisi yang sederhana dari grup. Berdasarkan [2] grup adalah himpunan yang dengan operasi biner, misal perkalian, penjumlahan, memenuhi aksioma yang telah ditentukan yaitu, tertutup, assosiatif, mempunyai elemen identitas. Struktur yang dibahas lebih tepatnya menggunakan konsep isomorphisma yang mengatakan bahwa dua grup yang berbeda adalah sama dalam beberapa arti.

Dalam membicarakan struktur grup, sangat penting untuk mengetahui banyaknya elemen grup tersebut. Banyaknya elemen dari grup dinamakan order. Maka suatu grup dikatakan *finite* (berhingga) jika order grupnya berhingga, dan berlaku sebaliknya. Jika order dari grupnya tak hingga, maka grup tersebut dikatakan *infinite* (tak hingga). Selanjutnya, grup yang dikaji adalah grup yang berorder hingga. Dalam mempelajari grup berhingga ini, grup dengan order kecil akan mudah untuk diselidiki karena operasinya dapat disajikan dalam bentuk tabel. Namun, penyajian dalam bentuk tabel ini tidak memungkinkan untuk menyelidiki grup berorder besar. Jadi, permasalahan yang timbul adalah bagaimana menyelidiki struktur yang berbeda dari grup berorder relatif besar.

Oleh karena itu, dalam Tugas Akhir ini membahas banyaknya struktur grup dengan order berhingga. Kajian struktur grup disini adalah untuk menyelidiki berdasarkan grup simpel dan klas isomorpik grup abelian.

II. METODOLOGI PENELITIAN

Langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini adalah:

A. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan pembahasan teori-teori dasar yang meliputi pengertian Grup, Subgrup, Grup Simpel, Teorema Langrange, p-Grup, dilanjutkan dengan pembahasan tentang Teorema Sylow. Kajian dan uraian dasar ini digunakan untuk landasan pembahasan kajian.

B. Penentuan Struktur Grup dengan order 216 dan 324

Pada tahap ini dilakukan penentuan struktur grup yang dikaji, yaitu dengan order 216 dan 324. Kajian teoritis ini untuk mendapatkan struktur yang berbeda dari grup yang telah ditentukan ordernya

C. Penarikan Kesimpulan

Pada Tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil analisa yang telah diperoleh.

III. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

I. Penentuan Struktur Grup Simpel

Pada bagian ini akan dibahas mengenai struktur grup simpel dari grup dengan order 216 dan 324. Berdasarkan [2] didapatkan struktur grup simpel sebagai berikut:

1. *Struktur dengan Order 216*

   Misal G adalah grup dengan order $216 = 2^2.3^3$, maka berdasarkan teorema Sylow 3 didapatkan informasi bahwa G memuat 2-subgrup Sylow dan 3-subgrup Sylow.

A. Struktur dari 3-subgrup Sylow

Jika diselidiki berdasarkan 3-subgrup Sylow maka sesuai teorema Sylow 3 diperoleh $n_3 = 1\ (mod\ 3)$ yang memenuhi yaitu 1 dan 4. Banyaknya 3-subgrup Sylow di G sama dengan indeks normaliser 3-subgrup Sylow di G yaitu $3^3 = 27$.

Untuk $n_3 = 1$, maka 3-subgrup Sylow ini berdasarkan teorema Sylow 2 yang menyatakan bahwa p-subgrup Sylow dari grup berhingga G adalah saling konjugasi. Dengan demikian diperoleh informasi bahwa 3-subgrup Sylow dengan n_3=1 adalah konjugasi dengan dirinya sendiri, yang berakibat normal di G. Maka hal ini menunjukkan bahwa setiap 3-subgrup Sylow di G merupakan subgrup Sylow normal di G.

Jadi, G bukan merupakan grup simpel.

Selanjutnya jika diselidiki jika $n_3 = 4$, maka misalkan T dan K adalah sebarang dari dua 3-subgrup Sylow di G maka $|T| = |K|$= $3^3 = 27$ dan $|G: N_G(H)| = |G: N_G(K)| = 4$, maka berdasarkan teorema subgrup berhingga diperoleh:

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{27 \times 27}{|H \cap K|} = \frac{729}{|H \cap K|}$$

Sehingga diperoleh $H \cap K$ merupakan subgrup normal dari H dan juga K. Oleh karena itu $H \cap K < N_H(H \cap K)$ dan $H \cap K < N_K(H \cap K)$ merupakan kelipatan 27 dan membagi 216. Jadi, $|N_G(H \cap K)|$ yang memenuhi adalah 54, 108, dan 216. Selanjutnya akan dijabarkan sebagai berikut ini:

i. Untuk $|N_G(H \cap K)|$=54

Jika grup G dengan order 216 dan $|N_G(H \cap K)|$=54, maka $|G: N_G(H \cap K)|$=4. Jika grup ini merupakan grup simpel, maka ada isomorphism dari G ke subgrup S_4, sehingga $|G|$ membagi $4! = 24$. Karena tidak habis membagi maka kontradiksi. Sehingga hal ini tidak memenuhi. Maka grup yang seperti ini bukan merupakan grup simpel.

ii. Untuk $|N_G(H \cap K)| = 108$

Jika grup G dengan order 216 dan $|N_G(H \cap K)| = 108$ maka $|G: N_G(H \cap K)|$=2. Berdasarkan Teorema Subgrup Normal diperoleh $N_G(H \cap K)$ adalah subgrup normal dari G. Jadi, grup grup G yang mempunyai $|N_G(H \cap K)| = 108$ bukan merupakan grup simpel

iii. Untuk $|N_G(H \cap K)| = 216$

Jika grup G dengan order 216 dan $|N_G(H \cap K)| = 216$ maka $G = N_G(H \cap K)$. Jadi $H \cap K$ merupakan subgrup normal dari G. Dengan demikian diperoleh informasi bahwa G bukan merupakan grup simpel.

Jadi, dari pembahasan diatas diperoleh kesimpulan bahwa, grup G berorder 216 diselidiki dari 3-subgrup Sylow bukan merupakan grup simpel.

B. Struktur dari 2-subgrup Sylow

Jika diselidiki dari 2-subgrup Sylow maka berdasarkan Teorema Sylow 3 diperoleh $n_2 = 1\ (mod\ 2)$ yang memenuhi adalah 1, 3, 9 dan 27.

Untuk $n_2 = 1$, maka 2-subgrup Sylow jika diselidiki akan menghasilkan informasi bahwa subgrup normal di G. Hal ini sesuai dengan teorema Sylow 2 yang menyatakan bahwa semua elemen didalamnya konjugasi terhadap dirinya sendiri.

Untuk $n_2 = 3$, misalkan T sebarang 2-subgrup Sylow di G, maka diperoleh informasi bahwa $|G: N_G(T)| = 3$ dan didapatkan $|N_G(T)| = 72$. Dari sini dapat dilihat bahwa $N_G(T) \neq G$, dengan demikian T bukan merupakan subgrup normal dari G. Sehingga grup G tidak mempunyai 2-subgrup Sylow normal. Dengan demikian dapat disimpulkan grup G bukan merupakan grup simpel

Untuk $n_2 = 9$, dimisalkan H adalah sebarang 2-subgrup Sylow di G maka $|G: N_G(H)| = 9$ dan $|N_G(H)| = 24$. Dari sini diperoleh $N_G(H) \neq G$ maka H bukan subgrup normal dari G. Oleh karena itu grup G tidak mempunyai 2-subgrup Sylow normal dan G bukan merupakan grup simpel.

Untuk $n_2 = 27$, dimisalkan P adalah sebarang 2-subgrup Sylow di G, maka $|G: N_G(H)| = 27$ dan diperoleh informasi $|N_G(H)| = |P| = 8$, sehingga $N_G(H) = P$. Dari sini dapat dilihat bahwa P adalah subgrup normal dari G. Jadi G tidak mempunyai 2-subgrup Sylow normal. Jika G merupakan grup simpel maka G mempunyai indeks terkecil 8. Akan tetapi, setiap grup simpel G mempunyai $n_3 = 4$ artinya indeks normalizer dari 3-subgrup sylow di G adalah 4. Sehingga kontradiksi, maka G bukan merupakan grup simpel.

Dari penjabaran diatas didapatkan bahwa tidak ada grup dengan order 216 diselidiki berdasarkan 2-subgrup Sylow merupakan grup simpel.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa berdasarkan penjelasan 3-subgrup Sylow dan 2-subgrup Sylow diperoleh struktur grup G tidak memenuhi grup simpel, dengan kata lain G dengan order 216 tidak merupakan grup simpel.

1. Struktur dengan Order 324

Misal G adalah grup dengan order $324 = 2^2.3^4$, sehingga berdasarkan Teorema Sylow 3 diperoleh informasi bahwa G memuat 2-subgrup sylow dan 3-subgrup sylow.

A. Struktur dari 3-subgrup sylow

Pada bagian ini akan dibahas struktur grup apakah merupakan grup simpel. Selanjutnya berdasarkan Teorema Sylow 3 diperoleh nilai $n_3 = 1\ (mod\ 3)$ yang memenuhi adalah 1 dan 4.

Untuk $n_3 = 1$, maka 3-subgrup Sylow ini berdasarkan Teorema Sylow 2 merupakan subgrup normal di G karena saling konjugasi, sehingga bukan grup simpel.

Untuk $n_3 = 4$, misal H dan T adalah sebarang dari dua 3-subgrup sylow dan $|G: N_G(H)| = |G: N_G(T)| = 4$ didapatkan $|H| = |T| = 3^4 = 81$, berdasarkan Teorema Subgrup Berhingga diperoleh yaitu :

$$|HT| = \frac{|H||T|}{|H \cap T|} = \frac{81 \times 81}{|H \cap T|} = \frac{6.561}{|H \cap T|}$$

Sehingga diperoleh $H \cap T$ merupakan subgrup normal dari H dan juga T. Oleh karena itu $H \cap T < N_H(H \cap T)$ dan $H \cap T < N_K(H \cap T)$ merupakan kelipatan 81 dan membagi 324. Jadi, $|N_G(H \cap T)|$ yang memenuhi adalah 162 dan 324.

i. Untuk $|N_G(H \cap T)| = 162$

Jika grup G dengan order 324 dan $|N_G(H \cap T)| = 162$, maka $|G: N_G(H \cap T)| = 2$. Sehingga $H \cap T$ merupakan subgrup normal dari G. Maka grup G bukan merupakan grup simpel.

ii. Untuk $|N_G(H \cap T)| = 324$

Jika grup G dengan order 324 dan $|N_G(H \cap T)| = 324$, maka $G = |N_G(H \cap T)|$. Jadi $H \cap T$ merupakan subgrup normal dari G. Dengan demikian sesuai Definisi Grup Simpel maka grup G bukan merupakan grup simpel.

Berdasarkan penjabaran diatas maka diperoleh bahwa grup G berorder 324 diselidiki dari 3-subgrup Sylow bukan merupakan grup simpel.

A. Struktur dari 2-subgrup Sylow

Pada bagian ini akan dijabarkan tentang struktur grup G berdasarkan 2-subgrup Sylow. Dengan $n_2 = 1(mod\ 2)$ dan n_2 membagi 324. Selanjutnya ditentukan n_2 yang memenuhi yaitu 1, 3, 9, 27, dan 81.

Untuk $n_2 = 1$, maka berdasarkan Teorema Sylow 2 2-subgrup Sylow ini normal di G karena konjugasi dengan dirinya sendiri.

Untuk $n_2 = 3$, misalkan T adalah sebarang 2-subgrup Sylow maka $|G : N_G(T)| = 3$ dengan $|N_G(T)| = 108$ sehingga diperoleh informasi $N_G(T) \neq G$. Dengan demikian T bukan merupakan subgrup normal di G, maka bukan merupakan grup simpel.

Untuk $n_2 = 9$, misalkan M adalah sebarang 2-subgrup Sylow dengan demikian $|G : N_G(M)| = 9$, oleh karena itu didapat $|N_G(M)| = 36$, sehingga berakibat $N_G(T) \neq G$, dan bukan merupakan grup simpel

Untuk $n_2 = 27$ misalkan K adalah sebarang 2-subgrup Sylow dengan demikian dapat diperoleh $|G : N_G(M)| = 27$, yang berarti bahwa $|N_G(M)| = 27$. Maka berakibat $N_G(M) \neq G$, dan tidak memenuhi grup simpel.

Untuk $n_2 = 81$, misalkan Q adalah sebarang 2-subgrup Sylow dengan demikian diperoleh $|G : N_G(Q)|$ =81, oleh karena itu didapat $|N_G(Q)| = 4$ sehingga P adalah subgrup normal di G.

Jadi, berdasarkan penjabaran diatas diperoleh kesimpulan bahwa tidak ada grup dengan order 324 diselidiki berdasarkan 2-subgrup Sylow merupakan grup simpel.

Dengan demikian grup dengan order 324 jika diselidiki berdasarkan 2-subgrup Sylow dan 3-subgrup Sylow tidak memenuhi kriteria grup simpel, dengan kata lain tidak ada grup dengan order 324 merupakan grup simpel

II. Struktur Klas Isomorpik dari Grup Abelian

Pada Bagian ini akan dijabarkan tentang struktur dari grup dengan order 216 dan 324 berdasarkan klas isomorpik grup abelian. Grup abelian berhingga merupakan *direct product* dari grup siklik. Sehingga untuk menentukan kelas isomorpik yang berbeda, digunakan grup modulo n, Z_n.

1. Struktur Grup Abelian dengan Order 216

Pada bagian ini akan dijabarkan tentang struktur grup abelian dengan order 216. Sehingga grup abelian dengan order 216 dinyatakan terlebih dahulu dalam bentuk faktor primanya. Bentuk faktor prima dari $216 = 2^3 3^3$. Langkah selanjutnya yaitu dipaparkan dari masing-masing $2^3 3^3$. Untuk yang pertama yaitu grup abelian dengan order $p^n = 2^3$. Maka partisi pada n adalah :

$$3; 2,1; 1,1,1$$

Sehingga terdapat 3 partisi yang berbeda untuk $n = 3$. Hal ini berakibat banyaknya grup abelian yang tidak isomorpik ada 3 yaitu :

$$Z_8,\ Z_4 \times Z_2,\ Z_2 \times Z_2 \times Z_2$$

Sedangkan untuk grup abelian dengan order $p^n = 3^3$, maka partisi pada n adalah :

$$3; 2,1; 1,1,1$$

Sehingga terdapat 3 partisi yang berbeda untuk $n = 3$. Hal ini juga berakibat bahwa banyaknya grup abelian yang tidak isomorpik ada 3 yaitu :

$$Z_{27}, Z_9 \times Z_3, Z_3 \times Z_3 \times Z_3$$

Berdasarkan penjabaran yang diperoleh dari barisan $p^n = 2^3$ dan dari barisan $p^n = 3^3$ maka diperoleh bahwa untuk barisan dari $p^n = 2^3$ merupakan 2-subgrup Sylow dari grup abelian dengan order 216. Berlaku untuk barisan dari $p^n = 3^3$ merupakan 3-subgrup Sylow dari grup abelian dengan order 216.

Selanjutnya akan dijabarkan semua kemungkinan dari *direct product* subgrup Sylow yang diberikan sebagai berikut:

1. $Z_8 \times Z_{27}$
2. $Z_4 \times Z_2 \times Z_{27}$
3. $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_{27}$
4. $Z_8 \times Z_9 \times Z_3$
5. $Z_4 \times Z_2 \times Z_9 \times Z_3$
6. $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_9 \times Z_3$
7. $Z_8 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_3$
8. $Z_4 \times Z_2 \times, Z_3 \times Z_3 \times Z_3$
9. $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times, Z_3 \times Z_3 \times Z_3$

Jadi, berdasarkan analisis yang disajikan dapat disimpulkan bahwa terdapat 9 klas isomorpik dari grup abelian dengan order 216. Dimana seluruh klas isomorpik yaitu sejumlah 9 kals isomorpik tersebut, merupakan representasi dari grup abelian dengan order 216 yang terletak pada masing-masing kelas isomorpiknya.

2. Struktur Grup Abelian dengan Order 324

Pada bagian ini dijabarkan untuk struktur grup dengan order 324 berdasarkan klas isomorpik dari grup abelian. Langkah awal yaitu dibentuk faktor prima dari order $324 = 2^2.3^4$ kemudian akan dipaparkan grup abelian dari masing-masing order p^n. Yang pertama akan dipaparkan untuk $p^n = 2^2$ maka partisi pada n adalah:

$$2; 1,1$$

Terdapat 2 partisi yang berbeda untuk $n = 2$ dan dari partisi ini berakibat bahwa banyaknya grup abelian yang tidak isomorpik ada 2 yaitu:

$$Z_4, Z_2 \times Z_2$$

Sedangkan untuk grup abelian dengan $p^n = 3^4$ maka didapatkan partisi pada n adalah:

$$4;\ 3,1;\ 2,2;\ 2,1,1;\ 1,1,1,1$$

Terdapat 5 partisi yang berbeda untuk $n = 4$ dan dari partisi tersebut berakibat bahwa banyaknya grup abelian yang tidak isomorpik ada 5 yaitu:

$$Z_{81}, Z_{27} \times Z_3, Z_9 \times Z_9, Z_9 \times Z_3 \times Z_3, Z_3 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_3$$

Setelah diperoleh analisis dari masing-masing grup abelian, maka langkah selanjutnya akan dikaji tentang *direct product* dari $p^n = 2^2$ yang merupakan 2-subgrup Sylow dari grup abelian dan $p^n = 3^4$ merupakan 3-subgrup Sylow dari grup abelian dengan order 324.

Grup abelian dengan order 324 akan isomorpik dengan *direct product* dari 2-subgrup Sylow dan 3-subgrup Sylow dan dijabarkan semua kemungkinan dari *direct product* subgrup Sylow yang diberikan sebagai berikut:

1. $Z_4 \times Z_{81}$
2. $Z_4 \times Z_{27} \times Z_3$
3. $Z_4 \times Z_9 \times Z_9$
4. $Z_4 \times Z_9 \times Z_3 \times Z_3$
5. $Z_4 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_3$
6. $Z_2 \times Z_2 \times Z_{81}$
7. $Z_2 \times Z_2 \times Z_{27} \times Z_3$
8. $Z_2 \times Z_2 \times Z_9 \times Z_9$
9. $Z_2 \times Z_2 \times Z_9 \times Z_3 \times Z_3$
10. $Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_3$

Jadi, berdasarkan analisis yang disajikan dapat disimpulkan bahwa terdapat 10 klas isomorpik dari grup abelian dengan order 324. Dimana seluruh 10 klas isomorpik tersebut merupakan representasi dari grup abelian dengan order 324 yang terletak pada masing-masing kelas isomorpiknya.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan dalam bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

a. Tidak ada grup dengan order 216 dan 324 yang merupakan grup simpel.
b. Grup dengan order 216 mempunyai 9 klas isomorpik dan grup berorder 324 mempunyai 10 klas yang saling isomorpik untuk grup abelian.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Hakimah, Maftakhul. 2006. "*Kajian Struktur Grup Berhingga*". Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
[2] Subiono. 2015. "*Aljabar: sebagai suatu Fondasi Matematika*". Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember
[3] Fraleigh, J.B. 1982. "*A First Course In Abstract Algebra*". London:Wesley.
[4] Khanna, V.K and S.K Bhambri. 1993. "*A Course In Abstract Algebra*". New Delhi: Vikas Publising House.
[5] Dummit, D.S, and Richard M.F. 1991 "*Abstract Algebra*". London : Pretice Hall.
[6] Subiono. 2011. *"Diktat Ajar Aljabar I".* Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.