Kajian Estimasi Bayes pada Parameter Skala θ dari Distribusi Invers Weibull

Zain Rizqiyyah, Farida Agustini W., Iis Herisman
Jurusan Matematika, FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: farida@matematika.its.ac.id

***Abstrak*—Pada Pada Tugas Akhir ini dikaji mengenai metode estimasi Bayes pada parameter skala $\boldsymbol{\theta}$ dari distribusi invers Weibull. Distribusi invers Weibull merupakan distribusi yang digunakan dalam menganalisa reliabilitas dan ketahanan suatu benda. Parameter skala $\boldsymbol{\theta}$ dari distribusi invers Weibull merupakan parameter numerik yang menunjukkan besarnya sebaran data dari suatu distribusi, yang seringkali nilai dari parameternya tidak diketahui. Dengan demikian untuk memperkirakan atau menduga nilai dari parameter skala tersebut diperlukan suatu metode estimasi parameter yang merupakan bagian dari inferensi statistik. Metode estimasi Bayes merupakan metode estimasi yang menggabungkan distribusi prior dengan distribusi sampel. Dalam hal ini digunakan tiga distribusi prior yaitu prior quasi, prior gamma dan prior uniform, sedangkan distribusi sampelnya merupakan fungsi likelihood dari distribusi invers Weibull. Kemudian menghitung nilai ekspektasi dari setiap distribusi posterior, didapat Persamaan untuk estimator Bayes pada parameter skala $\boldsymbol{\theta}$. Diberikan contoh kasus untuk estimator Bayes dengan simulasi Monte Carlo dan dihitung *Mean Square Error* (MSE). Didapat estimator Bayes yang baik yaitu estimator Bayes pada parameter skala θ untuk distribusi posterior dengan prior gamma dimana *Mean Square Error* terkecilnya adalah 0.141871933186387.**

***Kata Kunci*— Distribusi Invers Weibull, Estimasi Bayes, *Mean Square Error* (MSE), Simulasi *Monte Carlo*.**

I. PENDAHULUAN

Inferensi statistik merupakan semua metode yang digunakan dalam penarikan kesimpulann atau generalisasi mengenai suatu populasi. Inferensi statistik dikelompokkan dalam dua bidang yaitu estimasi parameter dan uji hipotesis. Estimasi prameter merupakan suatu cara untuk memprediksi karakteristik suatu populasi berdasarkan sampel yang diambil. Secara umum estimasi parameter dikelompokkan menjadi dua yaitu estimasi parameter titik dan estimasi parameter interval. Untuk mendapatkan suatu inferensi statistik yang baik akan lebih tepat jika data yang digunakan adalah data gabungan antara data saat ini dengan data penelitian sebelumnya. Penggabungan data yang dilakukan bertujuan untuk meminimalkan tingkat kesalahan sehingga inferensi yang dilakukan mendekati sempurna. Metode estimasi Bayes merupakan metode estimasi parameter yang menggabungkan distribusi prior dan distribusi sampel. Distribusi prior sendiri merupakan distribusi yang memberikan informasi tambahan mengenai parameter yang diberikan, dimana parameter ini bervariasi mengikuti suatu distribusi tertentu. Distribusi sampel yang digabung dengan distribusi prior akan menghasilkan distribusi baru yaitu distribusi posterior. Distribusi posterior adalah distribusi yang menyatakan derajat keyakinan seseorang mengenai suatu parameter yang kemudian digunakan untuk menentukan inferensi dari suatu parameter [1].

Distribusi Weibull merupakan salah satu distribusi yang digunakan untuk menganalisis data dalam hal reliabilitas atau ketahanan hidup yang mempunyai kelebihan yaitu mampu menyajikan keakuratan dari kegagalan dengan sampel yang berukuran sangat kecil. Distribusi Weibull pertama kali diperkenalkan oleh seorang fisikawan Swedia yang bernama Waloddi Weibull pada tahun 1936. Aspek penting dari distribusi Weibull adalah nilai dari parameter skala yang dapat mempengaruhi karakteristik dari distribusi Weibull sendiri, seperti bentuk kurva pdf, reliabilitas, dan tingkat kegagalan. Parameter skala θ merupakan parameter yang menunjukkan umur karakteristik dari suatu benda, seperti alat tertentu ataupun komponennya, dan juga menggambarkan sebaran data yang memberikan efek pada distribusi Weibull seperti perubahan skala absis [2].

Distribusi invers Weibull digunakan untuk memodelkan berbagai karakteristik kegagalan seperti angka kematian bayi, menentukan masa hidup benda, periode reliabilitas suatu materi, dan dapat digunakan untuk menentukan efektivitas serta lama waktu pemeliharaan dari reliabilitas benda tersebut [3]. Distribusi invers Weibull juga memiliki peran penting dalam banyak aplikasi praktis termasuk komponen dinamis mesin diesel dan kumpulan beberapa data seperti perlakuan dan pemecahan cairan isolasi dari kegagalan konstan. Distribusi invers Weibull yang digunakan dalam berbagai aplikasi praktis terkadang nilai parameternya tidak diketahui, oleh karena itu untuk memperkirakan nilai parameternya dapat melakukan pendekatan umum seperti menggunakan metode estimasi Bayes [4]. Sehingga untuk memperkirakan parameter skala θ dari distribusi invers Weibull dapat digunakan metode estimasi Bayes sehingga didapat estimator Bayes sebagai penduga dari parameter skala θ.

Pada tahun 2013, Farhad Yaghmei, Manoochehr Babanezhad, dan Omid S. Moghadam melakukan penelitian pada papernya yang berjudul "*Bayesian Estimation of the Scale Parameter of Invers Weibull Distribution under the Asymmetric Loss Function*". Dalam papernya tersebut menjelaskan tentang metode yang berbeda dari estimasi parameter skala distribusi invers Weibull dengan memperoleh *Maximum Likelihood Estimator* (MLE) pada parameter skala dari distribusi invers Weibull. Diperoleh pula estimator Bayes dengan tiga distribusi prior yaitu prior quasi, prior gamma dan prior uniform dan juga tiga *loss functions* yang berbeda pada parameter skala distribusi invers Weibull. Kemudian dibandingkan dengan studi simulasi dengan menghitung *Mean Square Error* dan diperoleh estimator yang baik pada parameter skala distribusi invers Weibull. Oleh karena itu berdasarkan paper tersebut, penulis mengambil judul untuk Tugas Akhir ini adalah *Kajian Estimasi Bayes pada Parameter Skala θ dari Distribusi Invers Weibull*.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Distribusi Weibull

Distribusi Weibull merupakan distribusi kontinu yang sering digunakan dalam uji ketahanan hidup suatu objek, seperti menyelesaikan masalah-masalah yang menyangkut umur suatu objek sampai objek tersebut tidak berfungsi lagi sebagaimana mestinya (rusak atau mati) [4]. Selama bertahun-tahun distribusi Weibull menjadi salah satu model data statistik yang memiliki jangkauan luas dari aplikasi uji hidup dan teori reliabilitas dengan kelebihan utamanya adalah menyajikan keakuratan kegagalan dengan sampel yang berukuran kecil [5].

Pada tahun 1939, Waloddi Weibull memperkenalkan distribusi Weibull dengan dua parameter, yaitu parameter skala dan parameter bentuk [5]. Diasumsikan bahwa ketahanan hidup suatu benda yang diuji memiliki distribusi Weibull dengan pdf sebagai berikut [4]:

$$f_Y(y;\theta,\beta)=\begin{cases}\theta\beta y^{\beta-1}e^{-\theta y^{\beta}} & ,y>0\quad \theta,\beta>0\\ 0 & ,y \text{ yang lain}\end{cases} \tag{1}$$

dengan

θ : parameter skala

β : parameter bentuk

Parameter skala θ merupakan jenis khusus dari parameter numerik yang menunjukkan besarnya data, jika semakin besar nilai parameter skala θ maka distribusi data akan semakin menyebar dan begitu pula sebaliknya. Parameter skala θ juga menggambarkan sebaran data yang memberikan efek pada distribusi Weibull seperti perubahan skala absis. Parameter skala θ juga menggambarkan umur karakteristik dari suatu benda seperti alat tertentu atau komponennya. Semakin besar nilai dari parameter skala θ dengan nilai parameter β yang konstan membuat kurva pdf distribusi Weibull membentang ke kanan dan tinggi kurva menurun dengan tetap mempertahankan bentuk kurva. Sedangkan semakin kecil nilai dari parameter θ dengan nilai parameter β yang konstan membuat kurva pdf distribusi Weibull membentang ke kiri dan tinggi kurva meningkat dengan mempertahankan bentuk kurva tersebut. Parameter skala θ pada distribusi Weibull merupakan aspek penting karena nilai dari parameter ini dapat mempengaruhi karakteristik distribusi Weibull seperti bentuk kurva dari pdf distribusi Weibull, reliabilitas, dan tingkat kegagalan distribusi Weibull [2].

Distribusi Weibull yang digunakan dalam berbagai aplikasi praktis terkadang nilai parameternya tidak diketahui, oleh karena itu untuk memperkirakan atau menduganya dapat dilakukan pendekatan umum. Untuk memperkirakan nilai dari suatu parameter dengan pendekatan umum dapat digunakan suatu metode estimasi.

B. Fungsi Likelihood

Fungsi *likelihood* merupakan pdf bersama dari r variabel acak $X_1,\dots,X_r$ yang dinotasikan dengan $f(x_1,\dots,x_r;\theta)$. Jika sampel acak $x_1,\dots,x_r$ tetap, maka fungsi *likelihood* adalah fungsi dari parameter θ yang dinotasikan $L(\theta)$. Jika $X_1,\dots,X_r$ merupakan variabel acak dari $f(x;\theta)$ maka fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai berikut [6]:

$$L(\theta)=f(x_1;\theta)\dots f(x_r;\theta)=\prod_{i=1}^{r}f(x_r;\theta) \tag{2}$$

C. Estimasi Bayes

Untuk mendapatkan inferensi yang lebih baik, akan lebih tepat jika data yang digunakan merupakan data gabungan antara data sampel saat ini dengan data penelitian sebelumnya. Penggabungan data bertujuan untuk meminimalkan tingkat kesalahan sehingga inferensi yang dihasilkan mendekati sempurna. Metode estimasi Bayes merupakan metode estimasi dari suatu inferensi statistika yang berbasis pada aturan Bayes yang menggabungkan informasi dan data observasi baru dengan informasi yang telah diperoleh sebelumnya. Metode estimasi Bayes menggabungkan distribusi prior yang memberikan informasi mengenai parameter dengan distribusi sampel sehingga diperoleh distribusi posterior yang digunakan dalam menentukan inferensi mengenai suatu parameter [1].

Estimator Bayes untuk parameter skala θ dapat diperoleh dengan menghitung nilai ekspektasi (harapan) dari distribusi posterior yang didefinisikan sebagai berikut [7]:

$$\hat{\theta}=E(\theta|x) \tag{3}$$

Dengan menggunakan metode estimasi Bayes untuk mengestimasi parameter skala θ pada distribusi invers Weibull dengan parameter bentuk $\beta>0$ yang diasumsikan telah diketahui dipertimbangkan tiga distribusi prior yang berbeda diantaranya prior quasi, prior gamma dan prior uniform.

1. Distribusi Prior

Pada metode estimasi Bayes, parameter yang digunakan merupakan variabel acak yang mempunyai distribusi prior. Distribusi prior adalah distribusi awal yang memberikan informasi mengenai suatu parameter dari distribusi sampel yang merupakan distribusi subyektif berdasarkan keyakinan seseorang yang dirumuskan sebelum data sampel diambil dan sebelum merumuskan distribusi posterior [1]. Distribusi prior dapat dinotasikan dengan $\pi(\theta)$ dimana θ adalah parameter yang diestimasi dari distribusi sampel. Dalam tugas akhir ini dipertimbangkan 3 distribusi prior yaitu [4]:

a. Prior Quasi

Ketika tidak ada informasi mengenai parameter dari suatu distribusi, salah satu prior yang dapat digunakan adalah prior quasi yang didefinisikan sebagai berikut [4]:

$$\pi_1(\theta)=\frac{1}{\theta^m}\ ;\ \theta>0,m>0 \tag{4}$$

dengan

m : parameter dari prior quasi

θ : parameter skala dari distribusi invers Weibull

b. Prior Gamma

Prior gamma adalah salah satu prior yang sering digunakan oleh peneliti. Prior gamma merupakan bagian dari prior konjugat. Diasumsikan bahwa parameter skala θ berdistribusi prior gamma dengan parameter bentuk c dan parameter skala d didefinisikan sebagai berikut [4]:

$$\pi_2(\theta)=\frac{d^c}{\Gamma(c)}\theta^{c-1}e^{-d\theta}\ ;\ \theta>0,c,d>0 \tag{5}$$

dengan

c : parameter bentuk dari prior gamma

d : parameter skala dari prior gamma

θ : parameter skala dari distribusi invers Weibull

c. Prior Uniform

Diasumsikan bahwa parameter skala θ berdistribusi prior uniform pada rentang terbatas $[0,k]$, sehingga prior uniform didefinisikan sebagai berikut [4]:

$$\pi_3(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{k} & ,0 < \theta < k \\ 0 & ,untuk\ yang\ lain \end{cases} \quad (6)$$

2. Distribusi Posterior

Distribusi posterior dirumuskan setelah menentukan distribusi priornya. Distribusi prior yang digabungkan dengan distribusi sampel akan menghasilkan distribusi posterior yang kemudian digunakan untuk mengestimasi parameter. Distribusi posterior adalah pdf bersyarat θ pada sampel acak x yang didefinisikan sebagai berikut [8]:

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta,x)}{f(x)} \quad (7)$$

Jika parameter θ kontinu maka distribusi prior dan distribusi posterior dapat dituliskan dalam bentuk pdf. Pada umumnya pdf bersama $f(\theta,x)$ dan pdf marginal $f(x)$ tidak diketahui, hanya dinyatakan dalam bentuk distribusi prior dan fungsi *likelihood* yang biasanya diketahui. Pdf bersama dan pdf marginal dapat didefinisikan dalam bentuk fungsi *likelihood* yang dinotasikan dengan $L(\theta)$ dan dalam bentuk distribusi prior yang dinotasikan dengan $\pi(\theta)$, sehingga pdf bersama didefinisikan sebagai berikut [8]:

$$f(\theta,x) = \pi(\theta)L(\theta) \quad (8)$$

Pdf marginal didefinisikan sebagai berikut [7]:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta,x)\, d\theta \quad (9)$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (8) pada Persamaan (9) diperoleh sebagai berikut:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta)L(\theta)\, d\theta \quad (10)$$

Dengan mensubtitusikan Persamaan (8) dan Persamaan (10) pada Persamaan (7) diperoleh pdf dari distribusi posterior untuk parameter θ yang bersyarat variabel acak kontinu X sebagai berikut [8]:

$$f(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)L(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta)L(\theta)\, d\theta} \quad (11)$$

dengan

$L(\theta)$: fungsi *likelihood*

$\pi(\theta)$: distribusi prior

D. Simulasi Monte Carlo

Simulasi adalah suatu prosedur kuantitatif yang menggambarkan sebuah sistem dengan mengembangkan model dari sistem tersebut dan melakukan sederetan uji coba untuk memperkirakan perilaku sistem pada jangka waktu tertentu. Simulasi juga dikatakan sebagai model dari sistem yang komponen-komponennya direpresentasikan melalui proses-proses aritmatika dan logika yang terdapat pada komputer [9].

Simulasi *Monte Carlo* merupakan tipe simulasi probabilistik untuk mencari penyelesaian masalah dengan percobaan dari proses acak [10]. Penggunaan nama *Monte Carlo* dipopulerkan oleh Stanislaw Ulam, Enrico Fermi, John Von Neumann dan Nicholas Metropolis. Simulasi *Monte Carlo* digunakan oleh Enrico Fermi pada tahun 1930, ketika ia menggunakan metode acak untuk menghitung sifat-sifat neutron yang waktu itu telah ditemukan. Simulasi *Monte Carlo* dikenal juga dengan istilah *Sampling Simulation* atau *Monte Carlo Sampling Tecnique.* Sampling simulation ini menggambarkan kemungkinan penggunaan data sampel dalam metode penggunaan *Monte Carlo* [11]. Metode Monte Carlo mensimulasikan sistem tersebut berulang-ulang kali, ratusan bahkan sampai ribuan kali tergantung sistem yang ditinjau, dengan cara memilih sebuah nilai acak untuk setiap variabel dari distribusi probabilitasnya [10].

E. Mean Square Error

Mean Square Error adalah salah satu metode yang digunakan untuk mengevaluasi suatu metode peramalan [12]. *Mean Square Error* juga dapat digunakan untuk menghitung error dari parameter yang telah diestimasi. *Mean Square Error* sebuah estimator adalah nilai harapan dari kuadrat eror. Eror yang ada menunjukkan seberapa besar perbedaan hasil estimasi dengan nilai yang akan diestimasi. Perbedaan itu terjadi karena adanya keacakan pada data atau karena estimator tidak mengandung informasi yang dapat menghasilkan estimator yang lebih akurat.

Mean Square Error adalah nilai error kuadrat rata-rata antara parameter sebelum diestimasi dengan parameter setelah diestimasi. Jika $\hat{\theta}$ adalah estimator pada parameter θ dari sampel acak $x_1, \dots, x_r$ yang diamati, maka *Mean Square Error* dapat didefinisikan sebagai berikut [13]:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{n} {e_i}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\theta_i - \hat{\theta}_i\right)^2}{n} \quad (12)$$

dengan

θ_i : nilai parameter sebelum diestimasi

$\hat{\theta}_i$: nilai parameter setelah diestimasi

n : banyaknya perulangan

Untuk mendapatkan estimator Bayes yang baik dapat memilih *Mean Square Error* terkecil atau minimum dari setiap estimator.

III. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Perumusan Distribusi Invers Weibull

1. Kajian Distribusi Weibull

Diketahui variabel acak kontinu Y yang berdistribusi Weibull dengan dua parameter yang dinotasikan $Y \sim WEI(\theta,\beta)$ mempunyai pdf yang didefinisikan sebagai berikut [4]:

$$f(y;\theta,\beta) = \begin{cases} \theta\beta y^{\beta-1} e^{-\theta y^{\beta}} & ,y > 0 \quad \theta,\beta > 0 \\ 0 & ,y \text{ yang lain} \end{cases} \quad (13)$$

dengan

θ : parameter skala

β : parameter bentuk

CDF dari suatu variabel acak kontinu Y yang memiliki pdf $f(y)$ didefinisikan sebagai berikut [6]:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\, dt \quad (14)$$

Pada Persamaan (13) telah didefinisikan pdf untuk distribusi Weibull, sehingga sesuai pada Persamaan (14) dapat diperoleh CDF distribusi Weibull dengan dua parameter sebagai berikut:

$$F(y) = 1 - e^{-\theta y^{\beta}} \quad (15)$$

Jika diketahui variabel acak kontinu Y dengan pdf $f(y)$, maka didefinisikan nilai ekspektasi (harapan) dari Y sebagai berikut [6]:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y)\, dy \tag{16}$$

Sehingga seperti pada Persamaan (16), dapat diperoleh ekspektasi dari distribusi Weibull sebagai berikut:

$$E(Y) = \theta^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right) \tag{17}$$

Variansi dari variabel acak kontinu X didefinisikan sebagai berikut [6]:

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \tag{18}$$

Untuk memperoleh variansi untuk peubah acak kontinu Y yang berdistribusi Weibull dengan dua parameter seperti pada Persamaan (18), harus terlebih dahulu diperoleh $E(Y^2)$ dan $E(Y)$ dari distribusi Weibull. Karena $E(Y)$ dari distribusi Weibull telah diperoleh, sekarang ditentukan $E(Y^2)$ dari distribusi Weibull dengan dua parameter sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\, f(y)\, dy \\ &= \theta^{-\frac{2}{\beta}}\,\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

Sehingga variansi dari variabel acak kontinu Y yang berdistribusi Weibull dengan dua parameter dapat diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (17) dan Persamaan (19) pada Persamaan (18) dan diperoleh sebagai berikut:

$$Var(Y) = \theta^{-\frac{2}{\beta}}\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right) \tag{20}$$

dengan
θ : parameter skala
β : parameter bentuk

2. Kajian Distribusi Invers Weibull

Untuk mendapatkan distribusi invers Weibull digunakan metode transformasi satu-satu [6]. Diketahui bahwa variabel acak kontinu Y dengan pdf distribusi Weibull dua parameter adalah $f_Y(y;\theta,\beta) = \theta\beta y^{\beta-1}e^{-\theta y^{\beta}}$ untuk $y > 0$ dan $\theta,\beta > 0$, dan mengasumsikan $X = w(Y)$ didefinisikan sebagai transformasi satu-satu dengan invers transformasi $y = u(x) = \frac{1}{x}$ [4]. *Jacobian* (J) didefinisikan sebagai $J = u'(x)$, sehingga *Jacobian* (J) diperoleh sebagai berikut:

$$J = u'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Pdf distribusi invers Weibull dengan metode transformasi satu-satu diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_Y\big(u(x)\big)\,|J| \\ &= \theta\beta\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta-1} e^{-\theta\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}}\left|-\frac{1}{x^{-2}}\right| \\ &= \frac{\theta\beta}{x^{\beta+1}}e^{-\theta x^{-\beta}} \end{aligned}$$

Sehingga didapat pdf distribusi invers Weibull yaitu:

$$f(x;\theta,\beta) = \begin{cases} \dfrac{\theta\beta}{x^{\beta+1}}e^{-\theta x^{-\beta}} & ,x > 0 \quad \theta,\beta > 0 \\ 0 & ,x\ yang\ lain \end{cases} \tag{21}$$

Dengan memisalkan $x = t$, pdf distribusi invers Weibull menjadi $f(t) = \frac{\theta\beta}{t^{\beta+1}}e^{-\theta t^{-\beta}}$ untuk $t > 0$ dan $\theta,\beta > 0$. Sehingga CDF distribusi invers Weibull dengan dua parameter diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \\ &= e^{-\theta x^{-\beta}} - 1 \end{aligned} \tag{22}$$

Ekspektasi dari variabel acak kontinu X yang berdistribusi invers Weibull dengan dua parameter dapat ditentukan sebagai berikut:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \tag{23}$$

Sesuai Persamaan (23) diperoleh nilai ekspektasi distribusi invers Weibull yaitu:

$$E(X) = -\theta^{\frac{1}{\beta}}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\beta}\right) \tag{24}$$

Untuk mendapatkan variansi distribusi invers Weibull seperti pada Persamaan (18), terlebih dahulu didapatkan $E(X^2)$ dan $E(X)$ dari distribusi invers Weibull. Karena $E(X)$ telah didapatkan pada Persamaan (24), selanjutnya ditentukan $E(X^2)$ distribusi invers Weibull sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx \\ &= -\theta^{\frac{2}{\beta}}\,\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right) \end{aligned} \tag{25}$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan Persamaan (24) dan Persamaan (25) pada Persamaan (18) dapat diperoleh variansi distribusi invers Weibull dengan dua parameter sebagai berikut :

$$Var(X) = -\theta^{\frac{2}{\beta}}\left(\Gamma\left(1-\frac{2}{\beta}\right) + \Gamma^2\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right) \tag{26}$$

dengan
θ : parameter skala
β : parameter bentuk

B. Penentuan Fungsi Likelihood

Fungsi *likelihood* untuk distribusi invers Weibull diperoleh sebagai berikut:

$$L(\theta) = \frac{(\theta\beta)^r}{\prod_{i=1}^{r} x_i^{\beta+1}}\, e^{-\theta\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} \tag{27}$$

untuk $\theta,\beta > 0$, dengan
θ : parameter skala
β : parameter bentuk
r : ukuran sampel

C. Metode Estimasi Bayes

1. Penentuan Distribusi Posterior

a. Distribusi Posterior dengan Prior Quasi

$$f_1(\theta|x) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{r-m+1}}{\Gamma(r-m+1)}\,\theta^{r-m}e^{-\theta\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} \tag{28}$$

untuk $\theta,\beta > 0$ dan $r-m > -1$, dengan
m : parameter dari prior quasi
θ : parameter skala dari distribusi invers Weibull
β : parameter bentuk dari distribusi invers Weibull
r : ukuran sampel

b. Distribusi Posterior dengan Prior Gamma

$$f_2(\theta|x) = \frac{\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(c+r)}\theta^{(c+r)-1}e^{-\theta\left(d+\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)}}{\Gamma(c+r)} \tag{29}$$

untuk $\theta,\beta,d > 0$ dan $c+r > 0$, dengan
d : parameter skala dari prior gamma
c : parameter bentuk dari prior gamma

θ : parameter skala dari distribusi invers Weibull
β : parameter bentuk dari distribusi invers Weibull
r : ukuran sampel

c. Distribusi Posterior dengan Prior Uniform

$$f_3(\theta|x) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)^{(r+1)}}{\Gamma(r+1)} \theta^r e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}} \tag{30}$$

untuk $\theta, \beta > 0$ dan $r > -1$, dengan
θ : parameter skala dari distribusi invers Weibull
β : parameter bentuk dari distribusi invers Weibull
r : ukuran sampel

2. Estimator Bayes

Seperti pada Persamaan (3) diperoleh estimator Bayes pada parameter skala θ dari setiap distribusi posterior dengan tiga distribusi prior berbeda untuk distribusi invers Weibull sebagai berikut:

a. Estimator Bayes untuk Distribusi Posterior dengan Prior Quasi

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\Gamma(r-m+2)}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)\Gamma(r-m+1)} \tag{31}$$

untuk $\beta > 0$ dan $r - m > -1$, dengan
β : parameter bentuk dari distribusi invers Weibull
m : parameter dari prior quasi
r : ukuran sampel

b. Estimator Bayes untuk Distribusi Posterior dengan Prior Gamma

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\Gamma(c+r+1)}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)\Gamma(c+r)} \tag{32}$$

untuk $\beta, d > 0$ dan $c + r > 0$, dengan
d : parameter skala dari prior gamma
c : parameter bentuk dari prior gamma
β : parameter bentuk dari distribusi invers Weibull
r : ukuran sampel

c. Estimator Bayes untuk Distribusi Posterior dengan Prior Uniform

$$\hat{\theta}_3 = \frac{\Gamma(r+2)}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\, \Gamma(r+1)} \tag{33}$$

untuk $\beta > 0$ dan $r > -1$, dengan
β : parameter bentuk dari distribusi invers Weibull
r : ukuran sampel

D. Contoh Kasus dengan Simulasi Monte Carlo

Untuk memperoleh estimator Bayes pada parameter skala θ dari distribusi invers Weibull, ditentukan terlebih dahulu nilai-nilai setiap parameter yang dikutip dari [9] sebagai berikut:
$\theta = 0.5$, nilai awal untuk parameter skala
$\beta = 2$, nilai parameter bentuk
$m = 0.5$, nilai parameter dari prior quasi
$d = 3$, nilai parameter dari prior gamma
$c = 2$, nilai parameter dari prior gamma
Dengan ukuran sampel $r = 5$, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, dan 80 untuk sampel acak $x_1, \dots, x_r$. Kemudian dengan menggunakan simulasi *Monte Carlo* dihitung nilai estimator Bayes pada parameter skala θ yang diulang sebanyak 1000 kali dan dihitung *Mean Square Error* dari setiap estimator Bayes pada parameter skala θ sebagai berikut:

Tabel 1.
Mean Square Error (MSE) untuk setiap estimator Bayes pada parameter skala θ dengan ukuran sampel yang berbeda.

r	MSE_1	MSE_2	MSE_3
5	0.154566276496557	0.141871933186387	0.147011371152342
10	0.175835618735887	0.169214175353577	0.170940510864099
15	0.184973989628226	0.179384786825177	0.181262968375342
20	0.188900387514921	0.184075684023662	0.187348348889584
25	0.192454383049951	0.189664363584572	0.192541273303184
30	0.196213962635152	0.194300424812500	0.194517772056302
35	0.198072276317362	0.195635286191682	0.197853231177456
40	0.199724482368924	0.197291099261156	0.199304405976705
45	0.201262711539710	0.199144260058774	0.199995245971037
50	0.201644131487833	0.201441394441170	0.202086070665318
55	0.202678801202343	0.201843807239978	0.202951466975526
60	0.203543701322275	0.202619402463145	0.203888368463330
65	0.204227903492718	0.203505866126688	0.204593082345738
70	0.206098815921172	0.204326732559592	0.205406030126721
75	0.206289944893622	0.204455745766468	0.205447932918197
80	0.206342727734282	0.205621496249104	0.206270038309001

r - ukuran sampel
MSE_1 – Mean Square Error dari estimator Bayes untuk $\hat{\theta}_1$
MSE_2 – Mean Square Error dari estimator Bayes untuk $\hat{\theta}_2$
MSE_3 – Mean Square Error dari estimator Bayes untuk $\hat{\theta}_3$

Dari semua perhitungan *Mean Square Error* untuk setiap estimator Bayes dapat disimpulkan ketiga estimator bekerja dengan baik saat ukuran sampelnya kecil. Tetapi dari ketiga estimator Bayes yang telah didapat, estimator Bayes untuk distribusi posterior dengan prior gamma ($\hat{\theta}_2$) bekerja lebih baik karena *Mean Square Error* untuk $\hat{\theta}_2$ paling kecil dari ketiga *Mean Square Error* yang telah dihitung.

IV. KESIMPULAN

Dari analisa dan pembahasan diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan metode transformasi dari distribusi Weibull diperoleh distribusi invers Weibull dengan pdf:

$$f(x;\theta,\beta) = \begin{cases} \frac{\theta\beta}{x^{\beta+1}} e^{-\theta x^{-\beta}} & , x > 0 \quad \theta, \beta > 0 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases}$$

   dengan
   θ: parameter skala
   β : parameter bentuk
2. Diperoleh estimator Bayes pada parameter skala θ dari distribusi invers Weibull sebgai berikut:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\Gamma(r-m+2)}{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)\Gamma(r-m+1)}$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\Gamma(c+r+1)}{\left(d + \sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\right)\Gamma(c+r)}$$

$$\hat{\theta}_3 = \frac{\Gamma(r+2)}{\sum_{i=1}^{r} x_i^{-\beta}\, \Gamma(r+1)}$$

3. Dengan membuat simulasi *Monte Carlo* dan nilai parameter skala $\theta = 0.5$ dan nilai parameter bentuk $\beta = 2$ dengan ukuran sampel $r = 5$, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, dan 80 diperoleh estimator

Bayes untuk distribusi posterior dengan prior gamma $(\hat{\theta}_2)$ adalah estimator yang baik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Walpole, R. E. (1997). **Pengantar Statistika Edisi ke-3, PT. Gramedia Pustaka Utama Jakarta**

[2] Anonim. http://www.weibull.com/hotwire/issue14/relbasics14.html. Diakses pada 28 Februari 2015.

[3] Khan, M. S., Pasha. G. R. dan Pasha, A. H. (2008). "Theoritical Analysis of Inferse Weibull Distribution". **WSEAS TRANSLATIONS on MATHEMATICS Vol. 7**, Hal. 30-38.

[4] Yaghmei, F., Babanezhad, M. dan Moghdam, O.S. (2013). "Bayesian Estimation of the Scale Parameter of Inverse Weibull Distribution under the Asymmetric Loss Function". **Journal of Probability and Statistics Vol. 2013**.

[5] Hazhiah, I. T., Sugito, dan Rahmawati, R. (2012). "Estimasi Parameter Distribusi Weibull Dua Parameter Menggunakan Metode Bayes". **Media Statistik Vol. 5 No. 1**, Hal. 27-35.

[6] Bain, L. J. dan Engelhardt, M. (1992). **Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Second Edition, California, Duxbury Press**.

[7] Casella, G. dan Berger, R. L. (2002). **Satistical Inference, Boston: Duxbury Press**.

[8] Sugito, dan Ispriyanti, D. (2010). "Distribusi Invers Gamma pada Inferensi Bayesian". **Media Statistika Vol. 3 No. 2**, Hal. 59-68.

[9] Saiful, Mulyadi, Mardin, F. dan Husnawati. (2013). "Analisis Risiko Finansial dengan Metode Simulasi Monte Carlo". **Hasil Penelitian Fakultas Teknik Vol. 7**.

[10] Fadjar, A. (2008). "Aplikasi Simulasi Monte Carlo dalam Estimasi Biaya Proyek". **Jurnal SMARTek Vol. 6**, Hal. 222-227.

[11] Sugiharto, B. (2007). "Aplikasi Simulasi untuk Peramalan Permintaan dan Pengolahan Persediaan yang Bersifat Probabilistik". **INASEA Vol. 8**, Hal. 112-120.

[12] Winita. (2011). "Pemilihan Teknik Peramalan dan Penentuan Kesalahan Peramalan". http://repository.usu.ac.id/bitstream/123456789/19126/4/Chapter%20II.pdf

[13] Andriyanto, U. S. dan Basith, A. **Metode dan Aplikasi Peramalan**.