TUGAS AKHIR - SM141501

KAJIAN TEORI IDEAL 2-ABSORBING PADA SEMIRING KOMUTATIF

MUHAMAD SUEF
NRP 1212100058

Dosen Pembimbing:
Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

“Halaman ini sengaja dikosongkan.”

FINAL PROJECT - SM141501

ON 2-ABSORBING IDEAL THEORY IN COMMUTATIVE SEMIRING

MUHAMAD SUEF
NRP 1212100058

Supervisor:
Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Science
Sepuluh Nopember Institut of Technology
Surabaya 2016

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

LEMBAR PENGESAHAN

KAJIAN TEORI IDEAL 2-ABSORBING PADA SEMIRING KOMUTATIF

ON 2-ABSORBING IDEAL THEORY IN COMMUTATIVE SEMIRING

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Analisis dan Aljabar
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
MUHAMAD SUEF
NRP. 1212100058

Menyetujui,

Dosen Pembimbing,

Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si
NIP. 19761215 200312 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, 22 Juli 2016

“Halaman ini sengaja dikosongkan.”

KAJIAN TEORI IDEAL 2-ABSORBING PADA SEMIRING KOMUTATIF

Nama Mahasiswa	: Muhamad Suef
NRP	: 1212100058
Jurusan	: Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	: Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si

Abstrak

Diberikan S merupakan semiring komutatif dengan $1 \neq 0$. Ideal 2-absorbing pada S merupakan bentuk perumuman dari ideal prima pada S. Pada Tugas Akhir ini diperoleh bentuk umum $(I: r)$, $\sqrt{I}$, ideal irreducible I dan ideal 2-absorbing I pada semiring komutatif Z_0^+ dimana I ideal pada Z_0^+ yang dibangun oleh satu elemen. Bentuk – bentuk umum tersebut akan mempermudah dalam pemberian contoh terkait teorema – teorema yang dibahas pada Tugas Akhir ini. Hal – hal yang dikaji pada Tugas Akhir ini yaitu mengenai karakteristik ideal 2-absorbing terkait dengan $(I: r)$ dan $\sqrt{I}$ dari ideal I pada S, ideal subtraktif dan ideal irreducible pada S serta semiring regular, dan ideal 2-absorbing lemah pada S serta semiring $S_1 \times S_2$. Selain itu, pada Tugas Akhir ini juga dikaji mengenai hubungan ideal 2-absorbing pada S dengan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.

Kata-kunci: *Ideal 2-absorbing, subtraktif, Q-ideal, ideal irreducible, semiring faktor.*

“Halaman ini sengaja dikosongkan.”

ON 2-ABSORBING IDEAL THEORY IN COMMUTATIVE SEMIRING

Name : Muhamad Suef
NRP : 1212100058
Department : Matematika FMIPA-ITS
Supervisor : Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si

Abstract

Let S *is a commutative semiring with* $1 \neq 0$. *2-absorbing ideal in* S *is generalization from prime ideal in* S. *In this final project obtained the general form of* $(I{:}\,r)$, $\sqrt{I}$, *irreducible ideal I and 2-absorbing ideal I in* Z_0^+ *where I is a ideal in* Z_0^+ *that built by one element. That general form will facilitate the provision of related example theorems that are discussed in this final project so that the theorems become easier to understand. Then, in this final project discuss several theorems about characteristics that associated 2-absorbing ideal with* $(I{:}\,r)$ *and* $\sqrt{I}$ *of ideal I in S, subtractive ideal and irreducible ideal in S and regular semiring, and 2-absorbing weakly ideal on S and semiring* $S_1 \times S_2$. *And then, in this paper also disscus the relationship betwen 2-absorbing ideal in* S *with 2-absorbing ideal in quotient semiring* $S/I_{(Q)}$.

Keywords: *2-absorbing ideal, subtraktif, Q-ideal, irreducible ideal, quotient semiring.*

“Halaman ini sengaja dikosongkan.”

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

S	Himpunan yang memiliki aksioma semiring
R	Himpunan yang memiliki aksioma ring
I, I_i, A	Himpunan yang memiliki aksioma ideal
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$\mathbb{Q}$	Himpunan bilangan rasional
Z_0^+	Himpunan bilangan bulat tak-negatif
$\mathbb{R}_0^+$	Himpunan bilangan riil tak-negatif
$\langle x \rangle$	Himpunan yang dibangun oleh elemen x
$" + "$	Operasi biner penjumlahan
$"."$	Operasi biner perkalian
$" \oplus "$	Operasi biner penjumlahan khusus
$" \odot "$	Operasi biner perkalian khusus
$\cup$	Gabungan
$\cap$	Irisan
$\subseteq$	Subset
$a \in S \backslash I$	a merupakan elemen di himpunan S selain di himpunan I
$\in$	Elemen
$\notin$	Bukan elemen
$\times$	cross product
$S/I_{(Q)}$	Semiring S atas I (semiring faktor)
$P/I_{(P \cap Q)}$	Ideal P atas I
$a/FPB(a,r)$	a dibagi $FPB(a,r)$
$\blacksquare$	Tanda berhentinya suatu pembuktian
$a \mid b$	a habis membagi b
$a \equiv b \; mod \; (c) a$	merupakan sisa bagi b dengan c

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini diuraikan hal – hal yang melatarbelakangi Tugas Akhir beserta rumusan permasalahan, batasan permasalahan, tujuan, manfaat serta sistematika penulisan Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Semiring merupakan bentuk perumuman dari konsep ring, yaitu dengan menghilangkan sifat invers terhadap operasi biner $(+)$ dari ring tersebut. Semiring diperkenalkan pertama kali oleh H.S. Vandiver[2] pada tahun 1934. Setelah itu struktur dari ideal prima pada semiring ditemukan dan banyak matematikawan yang mengembangkan dan memanfaatkannya dalam aplikasi matematika. Kemudian Anderson dan Smidth[3] memperkenalkan notasi ideal prima lemah pada ring komutatif. Sementara konsep dari ideal 2-absorbing dan ideal 2-absorbing lemah pada ring komutatif yang merupakan perumuman dari ideal prima dan ideal prima lemah pada ring komutatif dengan $1 \neq 0$ telah dikenalkan oleh Badawi[4] dan Darani[5]. Darani telah mengembangkan konsep dari semiring komutatif dan beberapa karakteristik yang dihasilkan dalam bentuk – bentuk ideal 2-absorbing dan ideal 2-absorbing lemah pada semiring komutatif. Kemudian Chaundhary dan Bonde[6] telah mengenalkan notasi dari ideal perluasan substraktif untuk mempelajari teori ideal pada semiring faktor.

Dalam jurnal yang disusun oleh Pratibha Kumar dkk[1] yang berjudul “Some results on 2-absorbing ideals in commutative semirings” telah dikaji beberapa teorema mengenai ideal 2-absorbing dan ideal 2-absorbing lemah pada semiring komutatif yang merupakan bentuk perumuman dari ideal prima dan ideal prima lemah pada semiring komutatif. Hal – hal yang dibahas dalam jurnal tersebut yaitu tentang karakteristik ideal 2-absorbing pada semiring komutatif terkait dengan $(I: r)$ dan $\sqrt{I}$ dari ideal I pada semiring S, ideal subtraktif dan ideal irreducible pada semiring S dan semiring regular serta ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dan semiring $S_1 \times S_2$. Selain itu, dalam jurnal tersebut juga dibahas mengenai hubungan ideal 2-absorbing pada semiring S dengan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$ serta hubungan ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dengan ideal 2-absorbing lemah pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$. Dalam Tugas Akhir ini dilakukan pengkajian mengenai pembahasan seperti di atas agar pemahaman mengenai ideal 2-absorbing pada semiring komutatif S dapat diperdalam dan dengan harapan dapat dibahas lebih lanjut dalam pengembangan aplikasi matematikanya. Selain itu dalam Tugas Akhir ini juga diperoleh mengenai bentuk umum $(I: r)$, $\sqrt{I}$, ideal irreducible dan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+ yang bertujuan unuk mempermudah dalam pemberian contoh terkait teorema – teorema yang dikaji dalam Tugas Akhir ini sehingga lebih mudah untuk dipahami.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya maka diperoleh beberapa rumusan masalah dalam Tugas Akhir ini sebagai berikut :

1. Bagaimana bentuk umum $(I: r)$, $\sqrt{I}$, ideal irreducible I dan ideal 2-absorbing I pada semiring Z_0^+ dimana I merupakan ideal pada Z_0^+ yang dibangun oleh satu elemen?

2. Bagaimana karakteristik ideal 2-absorbing terkait dengan $(I: r)$ dan $\sqrt{I}$ dari ideal I pada semiring S, ideal subtraktif dan ideal irreducible pada semiring S dan semiring regular serta ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dan semiring $S_1 \times S_2$?

3. Bagaimana hubungan ideal 2-absorbing pada semiring S dengan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$ serta hubungan ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dengan ideal 2-absorbing lemah pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$?

1.3 Batasan Masalah

Bentuk umum $(I: r)$, $\sqrt{I}$, ideal irreducible I dan ideal 2-absorbing I pada semiring komutatif Z_0^+ hanya diperoleh dari ideal pada semiring Z_0^+ yang dibangun oleh satu elemen.

1.4 Tujuan

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan bentuk umum $(I: r)$, $\sqrt{I}$, ideal irreducible I dan ideal 2-absorbing I pada semiring Z_0^+ dimana I merupakan ideal pada Z_0^+ yang dibangun oleh satu elemen.

2. Menyelidiki karakteristik ideal 2-absorbing terkait dengan $(I: r)$ dan $\sqrt{I}$ dari ideal I pada semiring S, ideal subtraktif dan ideal irreducible pada semiring S dan semiring regular serta ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dan semiring $S_1 \times S_2$.

3. Menyelidiki hubungan ideal 2-absorbing pada semiring S dengan ideal 2-absorbing pada semiring

faktor $S/I_{(Q)}$ dan hubungan ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dengan ideal 2-absorbing lemah pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.

1.5 Manfaat

Manfaat dari Tugas Akhir ini guna menambah pengetahuan tentang bentuk – bentuk konsep dari ideal 2-absorbing dan ideal 2-absorbing lemah pada semiring komutatif sehingga dapat dimanfaatkan untuk pengembangan pada aplikasi matematika.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu :

(1) BAB I PENDAHULUAN
Pada Bab I ini dijelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan dari penulisan Tugas Akhir ini.

(2) BAB II TINJAUAN PUSTAKA
Pada Bab II ini dijelaskan mengenai studi penelitian sebelumnya, konsep – konsep dasar mengenai ring, semiring, ideal pada semiring, jenis-jenis ideal pada semiring, dan semiring faktor yang dikontruksi dari Q-ideal. Dalam bab ini juga diberikan beberapa teorema mengenai bentuk umum ideal pada semiring Z_0^+ dan teorema mengenai ideal pada semiring faktor yang dikontruksi dari ideal perluasan subtraktif pada semiring S yang diperoleh dari beberapa referensi yang telah dikaji oleh penulis sebelumnya.

(3) BAB III METODE PENELITIAN
Pada Bab III ini dijelaskan mengenai tahapan – tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan Tugas Akhir ini.

(4) BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN
Pada bab IV ini dijelaskan mengenai bentuk umum $(I : r)$, $\sqrt{I}$, ideal irreducible I dan ideal 2-absorbing I pada semiring Z_0^+ dimana I merupakan ideal pada Z_0^+ yang dibangun oleh satu elemen. Kemudian dijelaskan mengenai karakteristik ideal 2-absorbing terkait dengan $(I : r)$ dan $\sqrt{I}$ dari ideal I pada semiring S, ideal subtraktif dan ideal irreducible pada semiring S dan semiring regular serta ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dan semiring $S_1 \times S_2$. Dalam bab IV juga dibahas mengenai hubungan ideal 2-absorbing pada semiring S dengan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$ dan hubungan ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dengan ideal 2-absorbing lemah pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.

(5) BAB V PENUTUP
Pada bab V ini dijelaskan mengenai kesimpulan Tugas Akhir yang diperoleh dari bab pembahasan serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

“Halaman ini sengaja dikosongkan.”

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai studi penelitian sebelumnya, konsep – konsep dasar mengenai ring, semiring, ideal pada semiring, jenis – jenis ideal pada semiring, dan semiring faktor yang dikonstruksi dari Q-ideal. Dalam bab ini juga diberikan beberapa teorema mengenai bentuk umum ideal pada semiring Z_0^+ dan Teorema mengenai ideal pada semiring faktor yang dikonstruksi dari ideal perluasan subtraktif pada semiring S.

2.1 Studi penelitian sebelumnya.

Pada tahun 1934 pernah dilakukan penelitian tentang semiring oleh H.S. Vandiver[2]. Kemudian, penelitian secara intensif mengenai semiring dimulai sekitar tahun 1950 oleh Almeida – Costa di Portugal, Bourne dkk. di Amerika Serikat, Redei dan Steinfeld di Hungaria, Iseki dan Iizuka di Jepang, Weinert dan Lugowski di Jerman, serta Slowikowski dan Zawa – dowski di Polandia [6]. Setelah itu struktur dari ideal prima pada semiring ditemukan dan banyak matematikawan yang mengembangkan dan memanfaatkannya dalam aplikasi matematika. Kemudian Anderson dan Smidth[3] memperkenalkan notasi ideal prima lemah pada ring komutatif. Konsep dari ideal 2-absorbing dan ideal 2-absorbing lemah pada ring komutatif yang merupakan perumuman dari ideal prima dan ideal prima lemah pada ring komutatif dengan $1 \neq 0$ telah dikenalkan oleh Badawi[4] dan Darani[5]. Darani telah mengembangkan konsep dari semiring komutatif dan beberapa karakteristik yang dihasilkan dalam bentuk-bentuk ideal 2-absorbing dan ideal 2-absorbing lemah pada semiring komutatif. Kemudian Chaundhary dan Bonde[6] telah mengenalkan notasi dari ideal perluasan substraktif untuk mempelajari teori ideal pada semiring faktor.

2.2 Ring dan ideal pada ring.

Ring merupakan suatu himpunan dengan dua operasi biner yang memenuhi aksioma – aksioma tertentu. Berikut ini merupakan definisi dari ring.

Definisi 2.2.1. [11] *Himpunan tak-kosong R terhadap dua operasi biner* $(+)$ *dan* $(\cdot)$ *disebut* ***ring*** *jika untuk setiap* $a, b, c \in R$ *berlaku:*

(i). $(a + b) + c = a + (b + c)$*; asosiatif terhadap operasi biner* $(+)$.

(ii). $a + b = b + a$*; komutatif terhadap operasi biner* $(+)$.

(iii). Terdapat elemen $0 \in R$ *sedemikian hingga* $0 + a = a + 0 = a$ *dan* $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

(iv). Untuk setiap $a \in R$*, terdapat* $-a \in R$ *sedemikian hingga berlaku* $a + (-a) = -a + a = 0$*; elemen invers terhadapat operasi biner* $(+)$.

(v). $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$*; assosiatif terhadap operasi biner* $(\cdot)$.

(vi). $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *dan* $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$*; distributif terhadap operasi biner* $(+)$ *dan* $(\cdot)$.

Jika himpunan *R* juga komutatif terhadap operasi biner $(\cdot)$, maka *R* disebut ***ring komutatif***.

Contoh 2.2.1. $\mathbb{R}$ (himpunan bilangan real), $\mathbb{Q}$ (himpunan bilangan rasional) dan $\mathbb{Z}$ (himpunan bilangan bulat) merupakan ring komutatif terhadap dua operasi biner $(+)$ dan $(\cdot)$.

Kemudian diberikan definisi ideal pada ring sebagai berikut.

Definisi 2.2.2. [11] *Jika R adalah ring dan $I \subseteq R$, maka I disebut* ***ideal*** *pada ring R apabila untuk sebarang $x, y \in I$ dan $r \in R$ memenuhi:*

(i). $x + y \in I$.

(ii). $rx, xr \in I$.

Untuk ideal $I = \{0\}$ disebut ***ideal trivial*** dan R disebut sebagai ***ideal tak sejati***, sedangkan ideal yang lain disebut ***ideal sejati***. Berikut ini akan diberikan contoh mengenai ideal pada ring.

Contoh 2.2.2. Diberikan $I_1 = \langle 3 \rangle = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, maka I_1 merupakan ideal pada ring $\mathbb{Z}$ sebab untuk setiap $3k_1, 3k_2 \in I_1$ dengan $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ dan $s \in \mathbb{Z}$ memenuhi $3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2) \in I_1$ dan $s(3k_1) = 3(sk_1) \in I_1$. Namun untuk $I_2 = \{0,3\}$ bukanlah ideal pada ring $\mathbb{Z}$ sebab untuk $3 \in \mathbb{Z}$ menyebabkan $3 + 3 = 6 \notin I_2$.

2.3 Semiring

Semiring merupakan bentuk perumuman dari konsep ring, yaitu dengan menghilangkan sifat invers terhadap operasi biner $(+)$. Berikut adalah definisi dari semiring.

Definisi 2.3.1. [1] *Himpunan tak kosong S terhadap dua operasi biner $(+)$ dan $(\cdot)$ disebut* **semiring** *jika untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku:*

(i). $(a+b)+c = a+(b+c)$; *asosiatif terhadap operasi biner* $(+)$.

(ii). $a+b = b+a$; *komutatif terhadap operasi biner* $(+)$.

(iii). Terdapat elemen $0 \in S$ *sedemikian hingga* $0+a = a+0 = a$ *dan* $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

(iv). $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; *assosiatif terhadap operasi biner* $(\cdot)$.

(v). $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ *dan* $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$; *distributif terhadap operasi biner* $(+)$ *dan* $(\cdot)$.

Jika himpunan S juga memenuhi sifat komutatif terhadap operasi biner $(\cdot)$, maka S disebut ***semiring komutatif***. Untuk selanjutnya dalam kajian ini S dinotasikan sebagai semiring komutatif dengan $1 \neq 0$. Dari Definisi 2.3.1 (def semiring) dan Definisi 2.2.1 (def ring) dapat diperoleh karakteristik antara ring dengan semiring, yaitu jika S merupakan ring maka S juga merupakan semiring, tapi tidak berlaku sebaliknya. Berikut ini akan diberikan contoh mengenai semiring.

Contoh 2.3.1. $\mathbb{Z}$ (himpunan bilangan bulat), $\mathbb{R}$ (himpunan bilangan real) dan $\mathbb{Q}$ (himpunan bilangan rasional) masing – masing terhadap dua operasi biner $(+)$ dan $(\cdot)$ biasa merupakan semiring sekaligus ring.

Contoh 2.3.2. $Z_0^+ = \{0,1,2,3,\ldots\}$ terhadap dua operasi biner $(+)$ dan $(\cdot)$ biasa merupakan semiring tetapi bukan ring. Sedangkan $Z_0^- = \{\ldots -3, -2, -2, 0\}$ bukanlah semiring sekaligus bukan ring karena Z_0^- tidak memiliki sifat tertutup terhadap operasi biner $(\cdot)$.

Dalam Tugas Akhir ini juga akan dibahas mengenai beberapa jenis semiring, yakni semiring regular dan semiring $S_1 \times S_2$. Semiring S dapat dikatakan regular jika setiap elemen –elemennya merupakan elemen regular. Berikut ini merupakan definisi dari elemen regular dan semiring regular.

Definisi 2.3.2. [1] *Sebuah elemen $a \in S$ disebut **regular** jika terdapat $x \in S$ sedemikian hingga $a \cdot x \cdot a = a$.*

Definisi 2.3.3. [1] *Misalkan S semiring dengan elemen unity (elemen satuan), jika setiap elemen di S merupakan elemen regular maka S disebut **semiring regular**.*

Berikut ini merupakan contoh mengenai elemen regular dan semiring regular.

Contoh 2.3.3. Pada semiring Z_0^+ hanya terdapat dua elemen regular, yaitu 0 dan 1 sebab terdapat $x = 1 \in Z_0^+$ sedemikian hingga $0 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ dan $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, namun Z_0^+ bukanlah semiring regular.

Contoh 2.3.4.
Untuk $Z_0^+{}_{[6]} = \{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\}$ merupakan semiring regular, sebab setiap elemen di $Z_0^+{}_{[6]}$ merupakan elemen regular dimana

(i). Untuk $[0]_6$ terdapat elemen $x = [0]_6 \in Z_0^+{}_{[6]}$ sedemikian hingga $[0]_6 \cdot [0]_6 \cdot [0]_6 = [0]_6$.

(ii). Untuk $[1]_6$ terdapat elemen $x = [1]_6 \in Z_0^+{}_{[6]}$ sedemikian hingga $[1]_6 \cdot [1]_6 \cdot [1]_6 = [1]_6$.

(iii). Untuk $[2]_6$ terdapat elemen $x = [2]_6 \in Z_0^+{}_{[6]}$ sedemikian hingga $[2]_6 \cdot [2]_6 \cdot [2]_6 = [2]_6$.

(iv). Untuk $[3]_6$ terdapat elemen $x = [3]_6 \in Z_0^+{}_{[6]}$ sedemikian hingga $[3]_6 \cdot [3]_6 \cdot [3]_6 = [3]_6$.

(v). Untuk $[4]_6$ terdapat elemen $x = [1]_6 \in Z_0^+{}_{[6]}$ sedemikian hingga $[4]_6 \cdot [1]_6 \cdot [4]_6 = [4]_6$.

(vi). Untuk $[5]_6$ terdapat elemen $x = [5]_6 \in Z_0^+{}_{[6]}$ sedemikian hingga $[5]_6 \cdot [5]_6 \cdot [5]_6 = [5]_6$.

Sedangkan himpunan $Z_0^+{}_{[p]}$ (himpunan bilangan modulo p) dengan p prima dapat dipastikan merupakan semiring regular sebab himpunan $Z_0^+{}_{[p]}$ merupakan lapangan[12] sehingga setiap elemen taknol di $Z_0^+{}_{[p]}$ memiliki invers terhadap operasi biner $(\cdot)$ yang artinya setiap $a \in Z_0^+{}_{[p]}$ memiliki $x = a^{-1} \in Z_0^+{}_{[p]}$ sedemikian hingga $a \cdot a^{-1} \cdot a = a$.

Selanjutnya dibahas mengenai definisi semiring $S_1 \times S_2$. Semiring $S_1 \times S_2$ merupakan semiring yang elemen – elemennya merupakan pasangan dari elemen di semiring S_1 dengan elemen di semiring S_2. Berikut ini merupakan definisi dari semiring $S_1 \times S_2$.

Definisi 2.3.4. *Jika S_1 dan S_2 merupakan semiring dengan dua operasi biner $(+)$ dan $(\cdot)$ maka dapat diperoleh semiring $S_1 \times S_2 = \{(a, b) \mid a \in S_1, b \in S_2\}$ dimana untuk setiap $a_1, a_2 \in S_1$, $b_1, b_2 \in S_2$ sedemikian hingga (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in S_1 \times S_2$ didefinisikan:*

(i). $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

(ii). $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$.

Kemudian berikut ini merupakan contoh mengenai semiring $S_1 \times S_2$.

Contoh 2.3.5. Diberikan semiring $S_1 = Z_0^+$ dan $S_2 = R_0^+$ maka dapat diperoleh $S_1 \times S_2 = \{(a, b) \mid a \in Z_0^+, b \in R_0^+\}$.

2.4 Ideal pada semiring

Definisi ideal pada semiring identik dengan definisi ideal pada ring, hal ini dikarenakan semiring merupakan bentuk perumuman dari ring. Berikut ini merupakan definisi ideal pada semiring.

Definisi 2.4.1. [1] *Jika S merupakan semiring dan $I \subseteq S$, maka I dikatakan* ***ideal*** *pada semiring S apabila untuk sebarang $x, y \in I$ dan $s \in S$ memenuhi:*

(i). $x + y \in I$.

(ii). $sx, xs \in I$.

Untuk ideal $I = \{0\}$ disebut ***ideal trivial*** dan S disebut sebagai ***ideal tak sejati***, sedangkan ideal yang lain disebut ***ideal sejati***. Berikut ini akan diberikan contoh mengenai ideal pada semiring.

Contoh 2.4.1. Diberikan $I_1 = \langle 2 \rangle = \{2k \mid k \in Z_0^+\}$ ideal pada semiring Z_0^+ sebab untuk setiap $2k_1, 2k_2 \in I_1$ dengan $k_1, k_2 \in Z_0^+$ dan $s \in Z_0^+$ memenuhi $2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2) \in I_1$ dan $s(2k_1) = 2(sk_1) \in I_1$. Namun, untuk $I_2 = \{0,2\}$ bukanlah ideal pada semiring Z_0^+ sebab untuk $2 \in Z_0^+$ tetapi $2 + 2 = 4 \notin Z_0^+$.

Kemudian berikut ini diberikan lemma mengenai ideal pada semiring $S_1 \times S_2$.

Lemma 2.4.2. *Diberikan I_1 ideal pada semiring komutatif S_1 dan I_2 ideal pada semiring komutatif S_2, maka $I_1 \times I_2$ merupakan ideal pada semiring $S_1 \times S_2$.*

Bukti. Ambil $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in I_1 \times I_2$ dan $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$ maka $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \in I_1 \times I_2$ dan $(s_1, s_2) \cdot (a_1, a_2) = (a_1, a_2) \cdot (s_1, s_2) = (a_1 s_1, a_2 s_2) \in I_1 \times I_2$ yang artinya $I_1 \times I_2$ *merupakan ideal pada semiring* $S_1 \times S_2$. ■

Berikut ini merupakan contoh ideal pada semiring $S_1 \times S_2$.

Contoh 2.4.2. Diberikan $I = \langle 2 \rangle$ ideal pada semiring Z_0^+, maka $I \times Z_0^+ = \{(a, b) \mid a \in I, b \in Z_0^+\}$ merupakan ideal pada semiring $Z_0^+ \times Z_0^+$.

Pada semiring Z_0^+ memiliki bentuk umum ideal yang unik dan berikut ini merupakan teorema mengenai bentuk umum ideal pada semiring Z_0^+.

Teorema 2.4.3. [10] *Setiap ideal I pada $(Z_0^+, +, .)$ berbentuk $I = \langle x_1, x_2, \dots x_n \rangle = \{k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n \mid k_i \in Z_0^+, i = 1,2,3, \dots n\}$ dengan x_1, x_2 ..., $x_n \in Z_0^+$.*

Pada Tugas Akhir ini juga akan dibahas mengenai bentuk $(I: r)$ dan $\sqrt{I}$ (*dibaca : Radikal I*) dari suatu ideal I pada semiring S yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.4. [1] *Misalkan I ideal pada semiring S maka untuk suatu* $r \in S$ *didefinisikan* $(\boldsymbol{I}: \boldsymbol{r}) = \{x \in S : rx \in I\}$.

Definisi 2.4.5. [1] *Misalkan I ideal pada semiring S maka didefinisikan radikal dari I dinotasikan* $\sqrt{\boldsymbol{I}} = \{a \in S : a^n \in I, untuk\ suatu\ n \in \mathbb{N}\}$.

Dari Definisi 2.4.4 (def$(I: r)$) dan Definisi 2.4.5 (def $\sqrt{I}$) dapat diperoleh $I \subseteq (I: r)$ dan $I \subseteq \sqrt{I}$. Untuk $I \subseteq (I: r)$ diperoleh karena untuk setiap $x \in I$ dan I ideal maka $rx \in I$ yang artinya $x \in (I: r)$ sehingga diperoleh $I \subseteq (I: r)$. Sedangkan untuk $I \subseteq \sqrt{I}$ diperoleh karena untuk setiap $a \in I$ dan untuk $n = 1$ maka $a \in \sqrt{I}$ sehingga diperoleh $I \subseteq \sqrt{I}$.

Selain diperoleh $I \subseteq \sqrt{I}$ dan $I \subseteq (I: r)$, dari Definisi 2.4.4 (def$(I: r)$) dan Definisi 2.4.5 (def $\sqrt{I}$) juga dapat diperoleh lemma mengenai ke-ideal-an $(I: r)$ dan $\sqrt{I}$ pada semiring S sebagai berikut.

Lemma 2.4.6. *Jika I ideal pada semiring S maka* $(I: r)$ *merupakan ideal pada semiring S.*

Bukti. Ambil sebarang a,$b \in (I: r)$ yang berarti bahwa $ra,\ rb \in I$. Karena I ideal dan $ra,\ rb \in I$ maka untuk sebarang $s \in S$ dapat diperoleh $ra + rb = r(a + b) \in I$ dan $srb = rsb \in I$ yang artinya $a + b \in (I: r)$ dan $sb \in (I: r)$. Dengan demikian terbukti bahwa $(I: r)$ adalah ideal pada semiring S. ■

Lemma 2.4.7. *Jika I ideal pada semiring S maka $\sqrt{I}$ merupakan ideal pada semiring S.*

Bukti. Ambil sebarang $a, b \in \sqrt{I}$ yang berarti bahwa untuk suatu m,$n \in \mathbb{N}$ memenuhi a^n,$b^m \in I$, sehingga untuk suatu $N = (n + m) \in \mathbb{N}$, $(a + b)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{N-k}. b^k = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^{n+m-k}. b^k$ dengan $k \geq m$ menyebabkan $b^k \in I$ atau dengan $k < m$ menyebabkan $a^{N-k} \in I$ sehingga diperoleh $(a + b)^N \in I$ yang artinya $a + b \in \sqrt{I}$. Kemudian untuk sebarang $s^n \in S$ maka $s^n. a^n = (s. a)^n = (a. s)^n \in I$ yang artinya $s. a$,$a. s \in \sqrt{I}$. Dengan demikian terbukti bahwa $\sqrt{I}$ adalah ideal pada semiring S. ∎

Berikut ini merupakan contoh mengenai bentuk $(I\colon r)$ dan $\sqrt{I}$ dari suatu ideal I pada semiring Z_0^+.

Contoh 2.4.3. Ideal $I = \langle 6 \rangle$ pada semiring Z_0^+ memiliki bentuk $(I\colon 4) = \{x \in Z_0^+ : 4x \in \langle 6 \rangle\}$ yang artinya $4x = 6k$ dengan $k \in Z_0^+$ sedemikian hingga diperoleh $x = \frac{6k}{4}$, karena x merupakan bilangan bulat tak negatif maka nilai k haruslah $k = 2k_1$ dengan $k_1 \in Z_0^+$ sehingga diperoleh $x = 3k_1$ yang artinya $(I\colon 4) = \langle 3 \rangle$.

Contoh 2.4.4. Ideal $I = \langle 12 \rangle$ pada semiring Z_0^+ memiliki bentuk $\sqrt{I} = \{a \in Z_0^+ : a^n \in \langle 12 \rangle,$ untuk suatu $n \in N\}$ yang artinya $a^n = 12k = 3 \cdot 2^2. k$ untuk suatu $k \in Z_0^+$. Karena a bilangan bulat maka nilai k haruslah $k = 3k_1^2$ dengan $k_1 \in Z_0^+$ sehingga diperoleh $n = 2$ yang memenuhi $a^2 = 3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot k_1^2 = (6k_1)^2$ sedemikian hingga $a = 6k_1$ yang artinya $\sqrt{I} = \langle 6 \rangle$.

Pembahasan selanjutnya yaitu mengenai jenis – jenis ideal pada semiring S. Jenis – jenis ideal yang dibahas dalam kajian ini adalah ideal subtraktif, ideal perluasan subtraktif, ideal irreducible, Q-ideal, ideal prima, ideal 2-absorbing dan ideal 2-absorbing lemah. Berikut ini merupakan definisi dari jenis – jenis ideal yang sudah disebutkan beserta contohnya.

Pertama – tama diberikan definisi dari ideal subtraktif pada semiring S sebagai berikut.

Definisi 2.4.8. [1] *Ideal I pada semiring S disebut* ***subtraktif*** *jika $a, a + b \in I$, $b \in S$, maka $b \in I$.*

Contoh 2.4.5. Diberikan $I_1 = \langle 2 \rangle = \{2k \mid k \in Z_0^+\}$ dan $I_2 = \langle 2,3 \rangle = Z_0^+ - \{1\}$ masing – masing ideal pada semiring Z_0^+. Ideal I_1 merupakan subtraktif pada semiring Z_0^+ sebab untuk setiap $2k_1 \in I$ dan $2k_1 + b \in I_1$ yang artinya $2k_1 + b = 2k$ dengan $k_1, k \in Z_0^+$. Tampak bahwa $k \geq k_1$ sehingga dapat diasumsikan $k = k_1 + k_2$ untuk suatu $k_2 \in Z_0^+$ sehingga diperoleh $2k_1 + b = 2(k_1 + k_2) = 2k_1 + 2k_2$ yang artinya $b = 2k_2 \in I$. Akan tetapi untuk ideal I_2 bukanlah ideal subtraktif karena terdapat $2 \in \langle 2,3 \rangle$, $2 + 1 \in \langle 2,3 \rangle$ tetapi $1 \notin \langle 2,3 \rangle$.

Setiap ideal yang dibangun oleh satu elemen pada Z_0^+ merupakan ideal subtraktif, sebagaimana yang telah dirumuskan dalam Teorema 2.4.9 berikut ini.

Teorema 2.4.9. [10] *Ideal I pada $(Z_0^+, +, .)$ adalah subtraktif jika dan hanya jika $I = \langle x \rangle$ untuk suatu $x \in Z_0^+$.*

Ideal perluasan subtraktif merupakan bentuk perluasan dari ideal subtraktif. Misalkan I ideal subtraktif sedemikian hingga I dapat diperluas menjadi suatu ideal A yang dinamakan ideal perluasan subtraktif. Berikut ini akan diberikan mengenai definisi dari ideal perluasan subtraktif dari I pada semiring S.

Definisi 2.4.10. [1] *Diberikan ideal I pada semiring S. Ideal A pada semiring S dengan* $I \subseteq A$ *disebut* ***perluasan substraktif*** *dari I jika* $x \in I$, $x + y \in A$, $y \in S$, *maka* $y \in A$.

Dari definisi diatas dapat diperoleh karakteristik ideal perluasan subtraktif terkait ideal subtraktif, yaitu jika A ideal subtraktif maka A merupakan ideal perluasan subtraktif dari I dimana $I \subseteq A$, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Berikut ini akan diberikan contoh mengenai ideal perluasan subtrakif pada semiring Z_0^+.

Contoh 2.4.6. Diberikan ideal $A = \langle 2 \rangle = \{2k \mid k \in Z_0^+\}$ dan $I = \langle 4 \rangle = \{4k \mid k \in Z_0^+\}$ pada semiring Z_0^+. Ideal A merupakan subtraktif sekaligus perluasan subtraktif dari I pada semiring Z_0^+ sebab untuk $4k_1 \in I$ dan $4k_1 + y \in A$ yang artinya $4k_1 + y = 2k$ dengan $k_1, k \in Z_0^+$. Tampak bahwa $k \geq k_1$ sehingga dapat diasumsikan $k = 2k_1 + k_2$ untuk suatu $k_2 \in Z_0^+$ maka dapat diperoleh $4k_1 + y = 2(2k_1 + k_2) = 4k_1 + 2k_2$ yang artinya $y = 2k_2 \in A$.

Contoh 2.4.7. [8] Diberikan $I = \langle 6 \rangle \times \{0\}$ dan $A = \langle 3 \rangle \times \langle 2,3 \rangle$ masing – masing ideal pada semiring $Z_0^+ \times Z_0^+$. Tampak bahwa $I \subseteq A$ sedemikian hingga ideal A merupakan ideal perluasan subtraktif dari ideal I sebab untuk $(6k_1, 0) \in I$ dan $(6k_1, 0) + (a, b) \in A$ yang artinya $(6k_1, 0) + (a, b) = (6k_1 + a, b) = (3k_2, 2k_3 + 3k_4)$ dengan $k_1, k_2, k_3, k_4 \in Z_0^+$. Untuk $6k_1 + a = 3k_2$ dapat diasumsikan $k_2 = 2k_1 + k_5$ dengan $k_5 \in Z_0^+$ sehingga diperoleh $6k_1 + a = 3(2k_1 + k_5) = 6k_1 + 3k_5$ yang artinya $a = 3k_5 \in \langle 3 \rangle$. Untuk $b = 2k_3 + 3k_4 \in \langle 2,3 \rangle$.

Dengan demikian $(a, b) \in A$. Namun, ideal A bukanlah ideal subtraktif pada semiring Z_0^+ sebab untuk $(3,2) \in A$ dan $(3,2) + (3,1) = (6,3) \in A$ namun $(3,1) \notin A$.

Selanjutnya akan diberikan definisi dari ideal irreducible sebagai berikut.

Definisi 2.4.11. [1] *Ideal I pada semiring S disebut **ideal irreducible** jika untuk setiap ideal H dan K pada semiring S yang memenuhi $I = H \cap K$ mengakibatkan $I = H$ atau $I = K$.*

Berikut ini merupakan contoh ideal irreducible pada semiring Z_0^+.

Contoh 2.4.8. Diberikan $I_1 = \langle 4 \rangle$ dan $I_2 = \langle 6 \rangle$ masing – masing ideal pada semiring Z_0^+. Ideal $I_1 = \langle 4 \rangle$ merupakan ideal irreducible pada semiring Z_0^+ sebab untuk ideal – ideal H dan K yang memenuhi $I_1 = H \cap K$ hanyalah ketika $H = \langle 4 \rangle$ atau $K = \langle 4 \rangle$ sehingga diperoleh $I_1 = H$ atau $I_1 = K$. Namun, untuk $I_2 = \langle 6 \rangle$ bukanlah ideal irreducible karena terdapat ideal $H = \langle 2 \rangle \neq I_2$ dan $K = \langle 3 \rangle \neq I_2$ sedemikian hingga $I_2 = H \cap K$.

Definisi selanjutnya yaitu mengenai definisi dari Q-ideal dan berikut ini merupakan definisinya.

Definisi 2.4.12. [1] *Ideal I pada semiring S disebut **Q-ideal** jika terdapat himpunan $Q \subseteq S$ sedemikian hingga:*

(i). $S = \bigcup\{q + I : q \in Q\}$,

(ii). *Jika* $q_1, q_2 \in Q$, *maka* $(q_1 + I) \cap (q_2 + I) \neq \emptyset \Leftrightarrow q_1 = q_2$.

Kemudian berikut ini merupakan contoh mengenai Q-ideal pada semiring Z_0^+.

Contoh 2.4.9. Diberikan $I = \langle 3 \rangle$ ideal pada semiring Z_0^+. Ideal I merupakan Q-ideal pada semiring Z_0^+ dengan $Q = \{0,1,2\} \subseteq Z_0^+$ dan $q_i + I$ berbentuk

- $I = \{0,3,6, \dots\}$
- $1 + I = \{1,4,7, \dots\}$
- $2 + I = \{2,5,8, \dots\}$

sedemikian hingga memenuhi:

(i). $Z_0^+ = I \cup (1 + I) \cup (2 + I)$,

(ii). $I \cap (1 + I) = \emptyset$, $I \cap (2 + I) = \emptyset$ dan $(1 + I) \cap (2 + I) = \emptyset$.

Setiap ideal yang dibangun oleh satu elemen pada semiring Z_0^+ merupakan Q-ideal sebagaimana yang dirumuskan pada Teorema 2.4.13 berikut ini.

Teorema 2.4.13. [10] *Ideal I pada* $(Z_0^+, +, .)$ *adalah Q-ideal jika dan hanya jika* $I = \langle x \rangle$ *untuk* $x \in Z_0^+$ *dengan* $Q = \{0,1,2, \dots x - 1\}$.

Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai ideal prima pada semiring S sebagai berikut.

Definisi 2.4.14. [1] *Ideal sejati I pada semiring S disebut **ideal prima** jika untuk sebarang* $a, b \in S$ *yang memenuhi* $ab \in I$ *maka* $a \in I$ *atau* $b \in I$.

Kemudian berikut ini merupakan Teorema 2.4.15 mengenai bentuk umum dari ideal prima pada semiring Z_0^+.

Teorema 2.4.15. [10] *Ideal sejati tak nol I pada semiring* $(Z_0^+, +, .)$ *adalah prima jika dan hanya jika* $I = \langle p \rangle$ *untuk suatu bilangan prima* p *atau* $I = \langle 2,3 \rangle = Z_0^+ - \{1\}$.

Contoh 2.4.10. Ideal $I_1 = \langle 3 \rangle$ pada semiring Z_0^+ merupakan ideal prima pada Z_0^+ sebab I dibangun oleh bilangan prima $p = 3$. Namun, untuk $I_2 = \langle 6 \rangle$ bukanlah ideal prima pada Z_0^+ sebab untuk $2,3 \in Z_0^+$ yang memenuhi $2.3 = 6 \in I_2$ sedangkan $2 \notin I_2$ dan $3 \notin I_2$.

Definisi selanjutnya yaitu mengenai ideal 2-absorbing pada semiring S yang merupakan bentuk perumuman dari ideal prima dari semiring S dan berikut ini definisinya.

Definisi 2.4.16. [1] *Ideal sejati I pada semiring komutatif S disebut sebagai* ***ideal 2-absorbing*** *jika untuk sebarang* $a,b,c \in S$ *yang memenuhi* $abc \in I$ *maka* $ab \in I$ *atau* $ac \in I$ *atau* $bc \in I$.

Contoh 2.4.11. Diberikan $I_1 = \langle 6 \rangle$ dan $I_2 = \langle 12 \rangle$ masing – masing merupakan ideal pada semiring Z_0^+. I_1 merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+ sebab untuk sebarang $a,b,c \in Z_0^+$ yang memenuhi $abc \in \langle 6 \rangle$ yang artinya $abc = 2 \cdot 3 \cdot k$ dengan $k \in Z_0^+$. Untuk $abc = 2 \cdot 3 \cdot k$ dengan 2 dan 3 merupakan bilangan prima maka dapat dibagi menjadi dua kasus sebagai berikut.

(i). Untuk kasus $2|a$ dan $3|b$ atau $2|b$ dan $3|a$ maka dapat diperoleh $6|ab$ yang artinya $6 \cdot k_1 = ab \in I_1$ dengan $k_1 \in Z_0^+$. Kemudian untuk kasus $2|a$ dan $3|c$, $2|c$ dan $3|a$, $2|b$ dan $3|c$ ataupun $2|c$

dan $3|b$ maka dengan menggunakan argumen yang sama dapat diperoleh $ac \in I_1$ atau $bc \in I_1$.

(ii). Untuk kasus $6|a$ maka $6|ab$ sehingga diperoleh $6 \cdot k_2 = ab \in I_1$ dengan $k_2 \in Z_0^+$. Kemudian untuk kasus $6|b$ ataupun $6|c$ maka dengan menggunakan argumen yang sama dapat dperoleh $ac \in I_1$ atau $bc \in I_1$.

Namun, untuk I_2 bukanlah ideal 2-absorbing pada Z_0^+ sebab untuk $2{,}3 \in Z_0^+$ sedemikian hingga $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \in \langle 12 \rangle$ akan tetapi $2 \cdot 3 = 6 \notin \langle 12 \rangle$ dan $2 \cdot 2 = 4 \notin \langle 12 \rangle$.

Dari definisi ideal prima dan definisi ideal 2-absorbing dapat diperoleh lemma sebagai berikut.

Lemma 2.4.17. Misalkan I ideal prima pada semiring S maka I merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S.

Bukti. Ambil a,b,$c \in S$ yang memenuhi $a(bc) \in I$ dan I ideal prima pada semiring S maka dapat diperoleh $a \in I$ atau $bc \in I$. Karena I merupakan ideal dan $a \in I$ maka $ac \in I$ dan $ab \in I$ sehingga terbukti bahwa I merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S. ■

Selain ideal 2-absorbing, dalam Tugas Akhir ini juga akan dibahas mengenai ideal 2-absorbing lemah. Ideal 2-absorbing lemah merupakan bentuk perumuman dari ideal 2-absorbing dan berikut ini merupakan definisi dari ideal 2-absorbing lemah.

Definisi 2.4.18. [1] *Ideal sejati I pada semiring komutatif S disebut sebagai* ***ideal 2-absorbing lemah*** *jika untuk sebarang* $a, b, c \in S$ *yang memenuhi* $0 \neq abc \in I$ *maka* $ab \in I$ *atau* $ac \in I$ *atau* $bc \in I$.

Berdasarkan Definisi 2.4.16 (def ideal 2-absorbing) dan Definisi 2.4.18 (def ideal 2-absorbing lemah) dapat diperoleh karakteristik ideal 2-absorbing terkait ideal 2-absorbing lemah yaitu jika I ideal 2-absorbing pada S maka I ideal 2-absorbing lemah pada S, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Hal ini disebabkan untuk I ideal 2-absorbing pada S sedemikian hingga $0 \neq abc \in I$ dapat diperoleh $ab \in I$ atau $ac \in I$ atau $bc \in I$. Terbukti bahwa I juga merupakan ideal 2-absorbing lemah pada S. Berikut ini merupakan contoh ideal 2-absorbing lemah pada semiring Z_0^+.

Contoh 2.4.12. Ideal $I = \langle 3 \rangle$ merupakan ideal 2-absorbing lemah sekaligus ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+.

2.5 Semiring faktor

Dalam kajian Tugas Akhir ini akan dibahas mengenai semiring faktor yang dikontruksi dari Q-ideal yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5.1. [1] *Misalkan I merupakan Q-ideal pada semiring S maka dapat diperoleh* ***semiring faktor*** *dengan notasi $S/I_{(Q)} = \{q + I \mid q \in Q\}$ terhadap dua operasi biner $\oplus$ dan $\odot$ sehingga untuk $q_1 + I$, $q_2 + I \in S/I_{(Q)}$ dengan $q_1, q_2 \in Q$ dapat didefinisikan*

(i). $(q_1 + I) \oplus (q_2 + I) = (q_3 + I)$ *dimana* $q_1 + q_2 + I \subseteq q_3 + I$ *untuk suatu* $q_3 \in Q$ *dan,*

(ii). $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) = (q_4 + I)$ *dimana* $q_1 q_2 + I \subseteq q_4 + I$ *untuk suatu* $q_4 \in Q$.

Dengan menggunakan definisi Q-ideal, maka terdapat elemen tunggal $q_0 \in Q$ sedemikian hingga $0 + I \subseteq q_0 + I$, maka $q_0 + I$ disebut elemen nol pada semiring faktor

$S/I_{(Q)}$. Jelas bahwa jika S semiring komutatif maka $S/I_{(Q)}$ juga merupakan semiring komutatif. Berikut ini akan diberikan contoh mengenai semiring faktor yang dikontruksi dari Q-ideal pada semiring S.

Contoh 2.5.1. Diberikan $I = \langle 3 \rangle$ Q-ideal pada Z_0^+ dengan $\mathrm{Q} = \{0,1,2\}$ sehingga diperoleh semiring faktor $Z_0^+/I_{(\mathrm{Q})} = \{I, 1+I, 2+I\}$ dimana,

- $I = \{0,3,6,9,12, \dots\}$
- $1 + I = \{1,4,7,10,13, \dots\}$
- $2 + I = \{2,5,8,11,14, \dots\}$

Dengan operasi biner $\oplus$ dan $\odot$ sebagai berikut.

$\oplus$	I	$1+I$	$2+I$
I	I	$1+I$	$2+I$
$1+I$	$1+I$	$2+I$	I
$2+I$	$2+I$	I	$1+I$

$\odot$	I	$1+I$	$2+I$
I	I	I	I
$1+I$	I	$1+I$	$2+I$
$2+I$	I	$2+I$	$1+I$

Tampak bahwa elemen nol dari $Z_0^+/I_{(Q)}$ adalah I.

Kemudian berikut ini akan diberikan Teorema mengenai ideal pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$ yang dikontruksi dari ideal perluasan subtraktif pada semiring S.

Teorema 2.5.2. [9] *Misalkan I dan A merupakan ideal pada semiring S dengan $I \subseteq A$. Jika I adalah Q-ideal pada semiring S, maka pernyataan dibawah ini ekivalen.*

(i). A adalah ideal perluasan subtraktif dari I;

(i). I adalah $A \cap Q - ideal$ dari A;

(ii). $A/I_{(A \cap Q)}$ adalah ideal pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$;

Dari Teorema 2.5.2 dapat diperoleh bahwa jika A ideal perluasan subtraktif dari I dengan I adalah Q-ideal pada semiring S maka $A/I_{(A \cap Q)}$ merupakan ideal pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$. Berikut ini merupakan contoh mengenai Teorema 2.5.2.

Contoh 2.5.2. Diberikan $I = \langle 4 \rangle$ Q-ideal pada Z_0^+ dengan $Q = \{0,1,2,3\}$ dan $A = \langle 2 \rangle$ ideal perluasan subtraktif dari I. Maka dapat diperoleh semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)} = \{I, I + 1, I + 2, I + 3\}$. Untuk $A \cap Q = \{0,2\}$ dapat diperoleh himpunan $A/I_{(A \cap Q)} = \{I, I + 2\}$ yang merupakan ideal pada semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)}$.

Kemudian berikut ini merupakan Teorema mengenai hubungan antara ideal prima pada semiring S dengan ideal prima pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.

Teorema 2.5.3. [9] *Misalkan I adalah Q-ideal dan P adalah ideal perluasan subtraktif dari I pada semiring S. Ideal P adalah ideal prima pada semiring S jika dan hanya jika ideal $P/I_{(P \cap Q)}$ merupakan ideal prima pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.*

Contoh 2.5.3. Diberikan $I = \langle 8 \rangle$ Q-ideal pada semiring Z_0^+ dengan Q $= \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ sehingga diperoleh semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)} = \{I,\ I+1,\ I+2,$ ..., $I+7\}$. $P = \langle 2 \rangle$ merupakan ideal perluasan subtraktif dari I dan P ideal prima pada semiring Z_0^+ maka dapat diperoleh $P \cap Q = \{0{,}2{,}4{,}6\}$ sedemikian hingga ideal $P/I_{(P \cap Q)} = \{I, I+2, I+4, I+6\}$ merupakan ideal prima pada semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)}$.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai tahapan – tahapan yang dilakukan dalam pengerjaan tugas akhir ini. Tahapan – tahapan tersebut antara lain:

3.1 Studi literatur.

Dalam tahap ini akan dilakukan pengkajian tentang definisi dari ring, semiring, ideal pada semiring, jenis – jenis ideal pada semiring, dan semiring faktor yang dikonstruksi dari Q-ideal. Dalam tahap ini juga akan dikaji beberapa teorema mengenai bentuk umum ideal pada semiring Z_0^+ dan teorema mengenai ideal pada semiring faktor yang dikonstruksi dari ideal perluasan subtraktif pada semiring S yang diperoleh dari beberapa referensi yang telah dikaji oleh penulis sebelumnya dari buku-buku literatur, jurnal atau paper.

3.2 Menentukan bentuk umum $(\boldsymbol{I}:\boldsymbol{r})$, $\sqrt{\boldsymbol{I}}$, ideal irreducible dan ideal 2-absorbing pada semiring $\boldsymbol{Z_0^+}$.

Dalam tahap ini akan ditentukan bentuk umum $(I:r)$, $\sqrt{I}$, ideal irreducible dan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+. Ideal I yang ditentukan bentuk umumnya merupakan ideal yang dibangun oleh satu elemen pada semiring Z_0^+. Penentuan bentuk umum ini bertujuan untuk mempermudah dalam memahami dan pemberian contoh teorema-teorema yang dikaji dalam tugas akhir ini.

3.3 Menyelidiki karakteristik ideal 2-absorbing pada semiring komutatif terkait dengan $(\boldsymbol{I}:\boldsymbol{r})$ dan $\sqrt{\boldsymbol{I}}$ dari ideal $\boldsymbol{I}$ pada semiring $\boldsymbol{S}$, ideal subtraktif dan ideal irreducible pada semiring $\boldsymbol{S}$ dan semiring regular serta ideal 2-absorbing lemah pada semiring $\boldsymbol{S}$ dan semiring $\boldsymbol{S_1} \times \boldsymbol{S_2}$.

Pada tahap ini akan dilakukan pengkajian tentang teorema – teorema penunjang yang berkaitan dengan ideal 2-absorbing pada semiring S, $(I:r)$ dan $\sqrt{I}$ dari ideal I pada semiring S, ideal subtraktif, ideal irreducible serta ideal 2-absorbing lemah pada semiring $S_1 \times S_2$ sehingga diperoleh karakteristiknya.

3.4 Menyelidiki hubungan ideal 2-absorbing pada semiring $\boldsymbol{S}$ dengan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $\boldsymbol{S}/\boldsymbol{I}_{(\boldsymbol{Q})}$ dan hubungan ideal 2-absorbing lemah pada semiring $\boldsymbol{S}$ dengan ideal 2-absorbing lemah pada semiring faktor $\boldsymbol{S}/\boldsymbol{I}_{(\boldsymbol{Q})}$.

Pada tahap ini akan dilakukan identifikasi tentang hubungan ideal 2-absorbing pada semiring komutatif S dengan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$. Pengidentifikasian dilakukan dengan pengkajian lebih dalam dengan membuktikan teorema-teorema yang berkaitan dengan ideal 2-absorbing pada semiring komutatif S dengan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.

3.5 Penarikan kesimpulan.

Dalam tahap ini akan dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil – hasil yang diperoleh pada tahap sebelumnya.

3.6 Pembukuan.

Dalam tahap ini akan dilakukan penyusunan buku tugas akhir.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai bentuk umum $(I: r)$, $\sqrt{I}$, ideal irreducible I dan ideal 2-absorbing I pada semiring Z_0^+ dimana I merupakan ideal pada Z_0^+ yang dibangun oleh satu elemen. Kemudian dijelaskan mengenai karakteristik ideal 2-absorbing pada semiring S terkait dengan $(I: r)$ dan $\sqrt{I}$ pada semiring S, ideal subtraktif dan ideal irreducible pada semiring S dan semiring regular serta ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dan semiring $S_1 \times S_2$. Setelah itu dijelaskan mengenai hubungan ideal 2-absorbing pada semiring S dengan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$ dan hubungan ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dengan ideal 2-absorbing lemah pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$. Semiring S yang dibahas pada subbab 4.2 dan 4.3 merupakan semiring komutatif.

4.1 Bentuk umum $(I: r)$, $\sqrt{I}$, ideal irreducible dan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+.

Z_0^+ merupakan semiring dengan elemen – elemennya merupakan bilangan bulat tak-negatif, sehingga pada Z_0^+ memiliki bentuk ideal yang unik sebagai mana yang telah dijelaskan pada teorema 2.4.4. Untuk menentukan bentuk umum $(I: r)$ dan $\sqrt{I}$ dari suatu ideal I yang dibangun oleh satu elemen pada Z_0^+ membutuhkan beberapa teorema – teorema yang perlu dipelajari pada teori bilangan bulat. Berikut ini merupakan teorema fundamental arithmatika mengenai bilangan bulat positif yang lebih dari 1.

Teorema 4.1.1. [13] *(Fundamental Aritmatika) Misalkan* n *adalah suatu bilangan bulat dengan* $a > 1$. *Maka*

(1) a adalah salah satu dari prima atau suatu produk dari prima.

(2) Faktorisasi dari a dalam suatu produk dari prima adalah tunggal, kecuali untuk urutan primanya. Yaitu, bila

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \text{ atau } a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s ,$$

yang mana p_i dan q_j adalah prima, maka $r = s$ dan, bila perlu dengan melakukan pengurutan kembali didapat $p_i = q_i$ untuk semua i.

Berikut ini merupakan contoh mengenai teroema 4.1.1.

Contoh 4.1.1. Misalkan $a = 132$, maka a dapat ditulis sebagai $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$.

Kemudian berikut ini diberikan salah satu lemma pembagian pada bilangan bulat.

Lemma 4.1.2. *Diberikan $a|c$ dan $b|c$ dimana a dan b merupakan suatu bilangan prima yang berbeda dan $c \in Z_0^+$ maka dapat diperoleh $ab|c$.*

Bukti. Untuk $a|c$ dengan a bilangan prima maka terdapat suatu $k_1 \in Z_0^+$ yang memenuhi $c = ak_1$, namun karena $b|c$ dan $c = ak_1$ dengan a dan b merupakan bilangan prima yang berbeda maka terdapat suatu $k_2 \in Z_0^+$ dimana $k_1 = bk_2$ sehingga diperoleh $c = abk_2$ yang artinya $ab|c$.

Berdasarkan teorema 4.1.1 maka ideal sejati $I = \langle a \rangle$ pada semiring Z_0^+ dapat ditulis sebagai $I = \langle p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} \rangle$ sehingga dapat diperoleh bentuk umum $\sqrt{I}$ dari ideal sejati $I = \langle a \rangle$ pada semiring Z_0^+ sebagai berikut.

Teorema 4.1.3. (*bentuk umum* $\sqrt{I}$) *Jika* $I = \langle a \rangle$ *ideal sejati pada semiring* Z_0^+ *dimana* $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ *maka* $\sqrt{I} = \langle p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \rangle$.

Bukti. Berikut ini dibuktikan teorema 4.1.3 dengan menunjukkan $\sqrt{I} = \langle p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \rangle$ sebagai berikut.

(i). Berikut ini ditunjukkan $\sqrt{I} \subseteq \langle p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \rangle$. Misalkan $x \in \sqrt{I}$ maka terdapat suatu $m \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x^m \in I$ yang artinya adalah

$$x^m = a \cdot k$$

$$= p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n} \cdot k \text{ untuk suatu } k \in Z_0^+$$

dengan $p_1, p_2, \dots, p_n$ merupakan bilangan prima yang berbeda dan tanpa mengurangi keumuman, $p_1, p_2, \dots, p_n$ juga memenuhi $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. Karena $p_1, p_2, \dots, p_n$ merupakan bilangan prima yang berbeda dan $k \in Z_0^+$ maka terdapat dua kondisi sebagai berikut

(1) Untuk $k = 0$ maka dapat diperoleh $m = 1$ sedemikian hingga $x^1 = 0 \in \langle p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \rangle$.

(2) Untuk $k \neq 0$ maka dapat dimisalkan $x = q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdot \dots \cdot q_t^{l_t}$ dengan $q_1, q_2, \dots, q_t$ merupakan bilangan prima berbeda dan tanpa mengurangi keumuman, $q_1, q_2, \dots, q_t$ juga memenuhi $q_1 < q_2 < \cdots < q_t$ dengan $l_1, l_2, \dots, l_t \in \mathbb{N}$ dengan $n \leq t \in \mathbb{N}$ sehingga dapat diperoleh

$$x^m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots \cdot p_n^{k_n} \cdot k$$

$$\left(q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdot \dots \cdot q_t^{l_t}\right)^m = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots p_n^{k_n} \cdot k$$

karena $q_1, q_2, \dots, q_t$ merupakan bilangan prima yang berbeda dan $p_1 | p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots p_n^{k_n} \cdot k$, $p_2 | p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots p_n^{k_n} \cdot k$, ..., $p_n | p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots p_n^{k_n} \cdot k$ maka $p_1 | q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdot \dots \cdot q_t^{l_t}$, $p_2 | q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdot \dots \cdot q_t^{l_t}$, ..., $p_n | q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdot \dots \cdot q_t^{l_t}$ sehingga $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n | q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdot \dots \cdot q_t^{l_t}$ yang artinya $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \cdot y$ dengan $y \in Z_0^+$. Dengan demikian dapat diperoleh $x \in \langle p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \rangle$.

Dari kedua kondisi di atas dapat diperoleh bahwa $\sqrt{I} \subseteq \langle p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \rangle$.

(ii). Berikut ini ditunjukkan $\langle p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \rangle \subseteq \sqrt{I}$. Misalkan $x \in \langle p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \rangle$ maka $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots p_n \cdot k$ untuk suatu $k \in Z_0^+$. Karena $p_1, p_2, \dots, p_n$ merupakan bilangan prima yang berbeda dan $k \in Z_0^+$ maka terdapat dua kondisi sebagai berikut.

(1) Untuk $k = 0$ maka dapat diperoleh $m = 1$ sedemikian hingga $x^1 = 0 \in I$ yang artinya $x \in \sqrt{I}$.

(2) Untuk $k \neq 0$ maka terdapat $m \in \mathbb{N}$ dengan $m = \max(k_1, k_2, \dots k_n)$ sehingga dapat dituliskan $m = k_i + l_i$ dengan $i = 1,2, \dots, n$, $l_i \geq 0$ sehingga diperoleh :

$$x^m = (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot k)^m$$

$$= p_1^m \cdot p_2^m \cdot \ldots \cdot p_n^m \cdot k^m$$

$$= p_1^{k_1+l_1} \cdot p_2^{k_2+l_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n+l_n} \cdot k^m$$

$$= p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} \cdot \left(p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{l_n} \cdot k^m\right)$$

yang artinya $x^m \in I$, sehingga dapat diperoleh $x \in \sqrt{I}$.

Dari dua kondisi di atas dapat diperoleh $\langle p_1 p_2 \ldots p_n \rangle \subseteq \sqrt{I}$.

Karena $\sqrt{I} \subseteq \langle p_1 p_2 p_3 \ldots p_n \rangle$ dan $\langle p_1 p_2 \ldots p_n \rangle \subseteq \sqrt{I}$ maka terbukti bahwa $\sqrt{I} = \langle p_1 p_2 p_3 \ldots p_n \rangle$. ■

Berikut ini diberikan contoh mengenai teorema 4.1.3.

Contoh 4.1.2. Perhatikan kembali contoh 2.4.4 di bab II, dengan menggunakan definisi 2.4.5 (def $\sqrt{I}$) maka untuk $I = \langle 12 \rangle$ dapat diperoleh $\sqrt{I} = 6$. Hal ini juga dapat diperoleh dengan menggunakan teorema 4.1.3, yaitu untuk $I = \langle 12 \rangle$ dengan $12 = 2^2 \cdot 3$ maka dapat diperoleh $\sqrt{I} = \langle 2 \cdot 3 \rangle = \langle 6 \rangle$.

Pembahasan selanjutnya yaitu mengenai bentuk umum $(I\!:r)$ pada semiring Z_0^+ sebagai berikut.

Teorema 4.1.4. (*Bentuk umum* $(I\!:r)$) *Jika* $I = \langle a \rangle$ *ideal sejati pada semiring* Z_0^+ *maka* $\forall r \in Z_0^+$ *dapat diperoleh:*

a). Untuk $r = 0$ *maka* $(I\!:r) = Z_0^+$.

b). Untuk $r \in Z_0^+ - \{0\}$ *maka* $(I: r) = \langle b \rangle$ *dengan* $b = a/FPB(a, r)$.

Bukti.

a. Berdasarkan definisi 2.4.3 untuk $r = 0$ maka dapat diperoleh $(I: 0) = \{x : 0 \cdot x \in I\}$. Tampak bahwa untuk $\forall_{x \in Z_0^+}$ mengakibatkan $0 \cdot x = 0 \in I$ sehingga diperoleh $(I: r) = Z_0^+$.

b. Berikut ini akan dibuktikan point $b)$ dengan menunjukkan $(I: r) = \langle b \rangle$ sebagai berikut.

   (i). Berikut ini akan ditunjukkan $(I: r) \subseteq \langle b \rangle$.
   Misalkan $x \in (I: r)$ maka $rx \in I$ yang artinya $rx = ak$ sedemikian hingga $x = \frac{a}{r}k$ untuk suatu $k \in Z_0^+$. Misalkan $d = FPB(a, r)$ maka $a = db$ dan $r = dc$ dengan $b, c \in Z_0^+ - \{0\}$ dan $FPB(b, c) = 1$ sehingga diperoleh $x = \frac{db}{dc}k = \frac{b}{c}k$. Karena $FPB(b, c) = 1$ dan x bilangan bulat tak-negatif maka nilai k haruslah berbentuk $k = k_1 c$ sehingga $x = \frac{b}{c}k = \frac{b}{c}ck_1 = bk_1$ yang artinya $x \in \langle b \rangle$. Dengan demikian diperoleh $(I: r) \subseteq \langle b \rangle$.

   (ii). ditunjukkan $\langle b \rangle \subseteq (I: r)$.
   Misalkan $x \in \langle b \rangle$ maka $x = bk = (a/FPB(a, r))k$ untuk suatu $k \in Z_0^+$. Karena $FPB(a, r)|r$ maka $rx = r\big(a/FPB(a, r)\big)k = a \cdot c \cdot k$ dengan $c = r/FPB(a, r)$ dan $ck \in Z_0^+$ sehingga $rx \in I$ yang artinya $x \in (I: r)$. Dengan demikian diperoleh $\langle b \rangle \subseteq (I: r)$.

Karena $(I: r) \subseteq \langle b \rangle$ dan $\langle b \rangle \subseteq (I: r)$ maka terbukti bahwa $\forall r \in Z_0^+ - \{0\}$, $(I: r) = \langle b \rangle$ dengan $b = a/FPB(a, r)$. ■

Berikut ini diberikan contoh mengenai teorema 4.1.4.

Contoh 4.1.3. Perhatikan kembali contoh 2.4.3 pada bab II, dengan menggunakan definisi 2.4.4 (def $(I: r)$) maka untuk ideal $I = \langle 6 \rangle$ dapat diperoleh $(I: 4) = \langle 3 \rangle$. Hal ini juga dapat diperoleh dengan menggunakan teorema 4.1.4 yaitu untuk $I = \langle 6 \rangle$ dapat diperoleh $(I: 4) = \langle 6/FPB(6,4) \rangle = \langle 6/2 \rangle = \langle 3 \rangle$. Kemudian untuk $r \in Z_0^+ - \{0\}$ dan $I = \langle 6 \rangle$ dapat diasumsikan $r \in \langle 3 \rangle \backslash \langle 6 \rangle - \{0\} = \{3,9,15, \ldots\}$, $r \in \langle 2 \rangle \backslash \langle 6 \rangle - \{0\} = \{2,4,8,10, \ldots\}$, $r \in \langle 6 \rangle - \{0\} = \{6,12, \ldots\}$, $r \in Z_0^+ \backslash \big((\langle 3 \rangle \backslash \langle 6 \rangle) \cup (\langle 2 \rangle \backslash \langle 6 \rangle) \cup \langle 6 \rangle \big) - \{0\} = \{1,5,7,11,\ldots\}$ dan $r = 0$ sehingga dapat diperoleh:

(i). Untuk $r \in \langle 3 \rangle \backslash \langle 6 \rangle - \{0\} = \{3,9,15, \ldots\}$ dapat diperoleh $FPB(6, r) = 3$ sedemikian hingga diperoleh bentuk $(I: r) = \langle 6/3 \rangle = \langle 2 \rangle$.

(ii). Untuk $r \in \langle 2 \rangle \backslash \langle 6 \rangle - \{0\} = \{2,4,8,10, \ldots\}$ dapat diperoleh $FPB(6, r) = 2$ sedemikian hingga diperoleh bentuk $(I: r) = \langle 6/2 \rangle = \langle 3 \rangle$.

(iii). Untuk $r \in \langle 6 \rangle - \{0\} = \{6,12,18, \ldots\}$ dapat diperoleh $FPB(6, r) = 6$ sedemikian hingga diperoleh bentuk $(I: r) = \langle 6/6 \rangle = \langle 1 \rangle = Z_0^+$.

(iv). Untuk $r \in Z_0^+ \backslash \big((\langle 3 \rangle \backslash \langle 6 \rangle) \cup (\langle 2 \rangle \backslash \langle 6 \rangle) \cup \langle 6 \rangle \big) - \{0\} = \{1,5,7,11, \ldots\}$ dapat diperoleh $FPB(6, r) = 1$ sedemikian hingga diperoleh bentuk $(I: r) = \langle 6/1 \rangle = I$.

(v). Untuk $r = 0$ dapat diperoleh $(I: 0) = \{x \mid 0.x \in I\} = Z_0^+$.

Pembahasan selanjutnya yaitu mengenai bentuk umum ideal irreducible pada semiring Z_0^+. Sebelumnya akan dibahas mengenai definisi KPK sebagai berikut.

Definisi 4.1.5. [13] *Diberikan dua bilangan bulat n dan m keduanya taknol,* ***kelipatan persekutuan terkecil*** *dari n dan m adalah bilangan bulat $l \geq 1$ yang memenuhi*

(i). $n|l$ *dan* $m|l$.

(ii). *Untuk sebarang bilangan bulat k, bila $n|k$ dan $m|k$, maka $l|k$.*

Dalam hal ini ditulis $l = KPK(n, m)$.

Ideal I disebut ideal irreducible pada semiring S jika untuk setiap ideal H dan K pada semiring S yang memenuhi $I = H \cap K$ maka $I = H$ atau $I = K$ sehingga untuk memudahkan dalam mencari bentuk umum ideal irreducible pada semiring Z_0^+ perlu adanya pendefinisian mengenai bentuk umum $H \cap K$. Berikut ini merupakan lemma mengenai bentuk umum $H \cap K$ dengan H dan K masing – masing merupakan ideal yang dibangun oleh satu elemen pada semiring Z_0^+.

Lemma 4.1.6. *Diberikan ideal – ideal sejati $H = \langle a \rangle$ dan $K = \langle b \rangle$ pada semiring Z_0^+, maka dapat diperoleh $H \cap K = \langle c \rangle$ dengan $c = KPK(a, b)$.*

Bukti. Berikut ini akan dibuktikan bahwa $H \cap K = \langle c \rangle$.

(i). Berikut ini akan dibuktikan bahwa $H \cap K \subseteq \langle c \rangle$. Ambil $x \in H \cap K$ yang artinya $x \in H$ dan $x \in K$ sehingga dapat diperoleh $x = a \cdot k_1$ dan $x = b \cdot k_2$ untuk suatu $k_1, k_2 \in Z_0^+$. Untuk $x = a \cdot k_1$ artinya

$a|x$ dan untuk $x = b \cdot k_2$ artinya $b|x$ maka berdasarkan definisi 4.1.7 dapat diperoleh $KPK(a,b) = c|x$ yang artinya $x = c \cdot k_3$ untuk suatu $k_3 \in Z_0^+$. Dengan demikian dapat diproleh $H \cap K \subseteq \langle c \rangle$.

(ii). Berikut ini akan dibuktikan bahwa $\langle c \rangle \subseteq H \cap K$. Ambil $x \in \langle c \rangle$ yang artinya $x = c \cdot k_1$ untuk suatu $k_1 \in Z_0^+$. Karena $c = KPK(a,b)$ maka $a|c$ dan $b|c$. Untuk $x = c \cdot k_1$ dan $a|c$ maka $a|x$. Sedangkan untuk $x = c \cdot k_1$ dan $b|c$ maka $b|x$. Untuk $a|x$ dan $b|x$ maka $x = a \cdot k_2$ dan $x = b \cdot k_3$ untuk suatu $k_2, k_3 \in Z_0^+$ yang artinya $x \in H$ dan $x \in K$, sehingga dapat diperoleh $x \in H \cap K$. Dengan demikian dapat diperoleh $\langle c \rangle \subseteq H \cap K$.

Berdasarkan poin (i) dan (ii) maka dapat diperoleh $H \cap K = \langle c \rangle$. ■

Contoh 4.1.4. Diberikan $H = \langle 6 \rangle = \{0,6,12, \dots\}$ dan $K = \langle 4 \rangle = \{0,4,8,12, \dots\}$ masing – masing ideal pada semiring Z_0^+. Jika dilihat perelemen dari himpunan H dan K maka dapat diperoleh $H \cap K = \{0,12,24,36, \dots\} = \langle 12 \rangle$. Hal ini juga dapat dipeoleh berdasarkan lemma 4.1.8, yaitu $H \cap K = \langle KPK(6,4) \rangle = \langle 12 \rangle$.

Kemudian berikut ini merupakan bentuk umum ideal irreducible yang dibangun oleh satu elemen pada semiring Z_0^+.

Teorema 4.1.7. (*Bentuk umum ideal irreducible*) *Ideal sejati $I = \langle x \rangle$ merupakan ideal irreducible pada semiring Z_0^+ jika dan hanya jika $x = p^n$ dengan p suatu bilangan prima pada Z_0^+ dan suatu $n \in \mathbb{N}$.*

Bukti.
(⇒)
Dengan menggunakan pembuktian kontradiksi maka untuk $x \neq p^n$ dapat dimisalkan $x = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ dimana $1 < k \in \mathbb{N}$ dengan $p_1, p_2, \ldots p_k$ merupakan bilangan prima dan $n_1, n_2, \ldots n_k \in \mathbb{N}$. Dengan demikian dapat diperoleh ideal $H = \langle p_1^{n_1} \rangle$ dan $K = \langle p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} \rangle$ sedemikian hingga $KPK\left(p_1^{n_1}, p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}\right) = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$. yang artinya $I = H \cap K$ tetapi $I \neq H$ dan $I \neq K$ sehingga $I = \langle x \rangle$ bukanlah ideal irreducible pada semiring Z_0^+ sehingga terjadi kontradiksi.

(⇐)
Selanjutnya dibuktikan bahwa $I = \langle p^n \rangle$ dengan p bilangan prima pada Z_0^+ merupakan ideal irreducible pada semiring Z_0^+. Ada beberapa kasus yang dapat ditinjau dalam menentukan ideal H dan ideal K sedemikian hingga $I = H \cap K$ sebagai berikut.

(i). Untuk ideal – ideal $H = \langle a \rangle$ dan $K = \langle b \rangle$ pada semiring Z_0^+ sedemikian hingga dapat diperoleh $H \cap K = \langle KPK(a, b) \rangle$. Misalkan $I = H \cap K$ maka $p^n = KPK(a, b)$. Karena p merupakan bilangan prima maka haruslah $a = p^n$ dan $b = p^m$ atau $b = p^n$ dan $a = p^m$ dengan $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$ sehingga diperoleh $I = H$ atau $I = K$. Dengan demikian terbukti bahwa $I = \langle x \rangle$ dengan $x = p^n$ merupakan ideal irreducible pada semiring Z_0^+.

(ii). Untuk ideal – ideal $H = \langle a \rangle$ dan $K = \langle b_1, b_2, \ldots, b_i \rangle$ dengan $b_1, b_2, \ldots, b_i$ saling prima untuk $i \geq 2$, $i \in \mathbb{N}$ maka tidak mungkin memenuhi $I = H \cap K$ karena jika diandaikan $I = H \cap K$ maka haruslah $a = p^n$ dan $b_l = p^m$ atau $b_l = p^n$ dan $a = p^m$

untuk suatu $l = 1,2,3, \ldots, m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Untuk kasus $a = p^n$ dan $b_l = p^m$ maka untuk suatu $j \in \mathbb{N}$ dengan $l \neq j$ terdapat $\langle KPK(a, b_j)\rangle \subseteq H \cap K$ tetapi $\langle KPK(a, b_j)\rangle \nsubseteq I$ sehingga $I \neq H \cap K$. Dengan cara yang sama untuk kasus $b_i = p^n$ dan $a = p^m$ dapat diperoleh $I \neq H \cap K$.

(iii). Sama halnya dengan poin (ii), untuk ideal – ideal $H = \langle a_1, a_2, \ldots, a_m\rangle$ dan $k = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$ juga mengakibatkan $I \neq H \cap K$.

Dengan demikian terbukti bahwa $I = \langle x\rangle$ ideal irreducible pada semiring Z_0^+ jika dan hanya jika $x = p^n$ dengan p bilangan prima pada Z_0^+ ■

Contoh 4.1.5. Perhatikan kembali contoh 2.4.8 di bab II, dengan menggunakan definisi 2.4.10 (def ideal irreducible) maka dapat diperoleh ideal $I_1 = \langle 4\rangle$ merupakan ideal irreducible pada semiring Z_0^+ dan ideal $I_2 = \langle 6\rangle$ bukan ideal irreducible pada semiring Z_0^+. Hal ini juga dapat dibuktikan dengan menggunakan teorema 4.1.7 bahwa $I_1 = \langle 4\rangle$ merupakan ideal irreducible pada semiring Z_0^+ karena terdapat $p = 2$ dan $n = 2$ yang memenuhi $p^n = 2^2 = 4$ dan $I_2 = \langle 6\rangle$ bukan ideal irreducible karena tidak ada p dan n yang memenuhi $p^n = 6$.

Selanjutnya berikut ini akan dibahas mengenai bentuk umum ideal 2-absorbing yang dibangun oleh satu elemen pada semiring Z_0^+. Bentuk umum ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+ sangat erat kaitannya dengan lemma 4.1.8 berikut ini.

Lemma 4.1.8. *untuk setiap $a, c \in Z_0^+ - \{0\}$ dan $b, d, f \in Z_0^+$ yang memenuhi $a|b$, $f|b$ dan $c|d$ maka dapat diperoleh dua pernytaan sebagai berikut.*

a). $a|bg$ *dengan* $g \in Z_0^+$.

b). $ac|bd$.

Bukti.

a). $a|b$ artinya $0 \equiv b \bmod (a)$ maka $0 \cdot g = 0 \equiv bg \bmod (a)$ sehingga diperoleh $a|bg$.

b). Untuk $a|b$ dan $c|d$ maka terdapat suatu $k_1, k_2 \in Z_0^+$ yang memenuhi $b = ak_1$ dan $d = ck_2$ sehingga dapat diperoleh $b \cdot d = ak_1 \cdot ck_2 = ack_1k_2$ yang artinya $ac|bd$.

Kemudian berikut ini diberikan teorema mengenai bentuk umum ideal 2-absorbing I pada semiring Z_0^+ dimana I merupakan ideal pada Z_0^+ yang dibangun oleh satu elemen.

Teorema 4.1.9. (*Bentuk umum ideal 2-absorbing*) *Ideal sejati* $I = \langle x \rangle$ *adalah ideal 2-absorbing pada semiring* Z_0^+ *jika dan hanya jika* $x = p$ *atau* $x = p^2$ *atau* $x = p_1 \cdot p_2$ *dengan* p, p_1, p_2 *bilangan prima pada* Z_0^+.

Bukti.

($\Rightarrow$)

Dengan menggunakan pembuktian kontradiksi maka akan dibuktikan bahwa untuk ideal $I = \langle x \rangle$ pada semiring Z_0^+ dengan $x \neq p$, $x \neq p^2$ dan $x \neq p_1p_2$ bukan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+. Untuk $x \neq p$, $x \neq p^2$ dan $x \neq p_1p_2$ dapat dibagi menjadi beberapa kasus sebagai berikut.

(i). Untuk $x = p^k$ dengan $k \geq 3$. Untuk $k \geq 3$ maka $I = \langle p^k \rangle$ bukanlah ideal 2-absorbing pada Z_0^+ sebab dengan mengambil $a = b = p \in Z_0^+$, $c = p^{k-2} \in Z_0^+$ yang memenuhi $abc = p^k \in I$ maka dapat diperoleh $ab \notin I$ dan $ac = bc \notin I$ sehingga terjadi kontradiksi.

(ii). Untuk $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2}$ dengan $k_1 > 1$ atau $k_2 > 1$ dimana $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Untuk $k_1 > 1$ maka dapat diambil $a = b = p_1$ dan $c = p_1^{k_1 - 2} \cdot p_2^{k_2}$ yang memenuhi $abc = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \in I$ mengakibatkan $ab = p_1^2 \notin I$ dan $ac = bc = p_1^{k_1 - 1} \cdot p_2^{k_2} \notin I$ sehingga terjadi kontradiksi. Dengan argumen yang sama maka untuk $k_2 > 1$ dapat diperoleh $ab \notin I$, $ac \notin I$ dan $bc \notin I$.

(iii). Untuk $x = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$ dengan $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ dan p_1, p_2, ..., p_n bilangan prima untuk $n \geq 3$ maka dapat diambil $a = p_1^{k_1} \in Z_0^+$, $b = p_2^{k_2} \in Z_0^+$, $c = p_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} \in Z_0^+$ yang memenuhi $abc = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} \in I$ sehingga mengakibatkan $ab \notin I$, $ac \notin I$ dan $bc \notin I$ dengan demikian terjadi kontradiksi.

($\Leftarrow$)

Akan dibuktikan bahwa $I = \langle x \rangle$ dengan $x = p$, $x = p^2$ atau $x = p_1 p_2$ merupakan ideal 2-absorbing pada Z_0^+. Untuk membuktikan pada bagian ini akan dibagi menjadi tiga kasus, yaitu:

(i). Untuk kasus $x = \langle p \rangle$. Ambil $a, b, c \in Z_0^+$ yang memenuhi $abc \in I = \langle p \rangle$ yang artinya $abc = p \cdot k$ dengan $k \in Z_0^+$. Karena p bilangan prima maka $p|a$ atau $p|b$ atau $p|c$. Untuk $p|a$ maka $p|ab$ yang artinya $ab = p \cdot k_1$, untuk $p|b$ maka $p|bc$ yang artinya $bc = p \cdot k_2$, kemudian untuk $p|c$ maka $p|ac$ yang artinya $ac = p \cdot k_3$. Dengan demikian dapat diperoleh $ab \in I$ atau $bc \in I$ atau $ac \in I$ yang artinya $I = \langle p \rangle$ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+.

(ii). Untuk kasus $x = \langle p^2 \rangle$. Ambil $a, b, c \in Z_0^+$ yang memenuhi $abc \in I = \langle \mathrm{p}^2 \rangle$ yang artinya $abc = \mathrm{p}^2 \cdot k$ dengan $k \in Z_0^+$. Karena p bilangan prima maka terdapat dua kemungkinan sebagai berikut.

- Untuk $p|a$ dan $p|b$ maka $p^2|ab$ yang artinya $ab = p^2 \cdot k_4$ dengan $k_4 \in Z_0^+$ sehingga diperoleh $ab \in I$. Namun bisa juga $p|a$ dan $p|c$, atau $p|b$ dan $p|c$ sehingga dengan menggunakan argumen yang sama maka dapat diperoleh $ac \in I$ atau $bc \in I$.

- Untuk $p^2|a$ maka $p^2|ab$ yang artinya $ab = p^2 \cdot k_5$ dengan $k_5 \in Z_0^+$ sehingga diperoleh $ab \in I$. Namun bisa juga $p^2|b$ atau $p^2|c$ sehingga dengan menggunakan argumen yang sama dapat diperoleh $ac \in I$ atau bc.

(iii). Untuk kasus $x = \langle p_1 p_2 \rangle$. Ambil a, b, $c \in Z_0^+$ yang memenuhi $abc \in I = \langle p_1 p_2 \rangle$ yang artinya $abc = p_1 \cdot p_2 \cdot k_6$ dengan $k_6 \in Z_0^+$. Karena p_1 dan p_2 merupakan prima maka terdapat dua kemungkinan sebagai berikut.

- Untuk $p_1|a$ dan $p_2|b$, atau $p_1|b$ dan $p_2|a$ maka $p_1 p_2|ab$ yang artinya $ab = p_1 p_2 \cdot k_7$ dengan $k_7 \in Z_0^+$ sehingga diperoleh $ab \in I$. namun bisa juga $p_1|a$ dan $p_2|c$, atau $p_1|c$ dan $p_2|a$, atau $p_1|b$ dan $p_2|c$, atau $p_1|c$ atau $p_2|b$ sehingga dengan menggunakan argumen yang sama dapat diperoleh $ac \in I$ atau $bc \in I$.

– Untuk $p_1 p_2 | a$ maka $p_1 p_2 | ab$ yang artinya $ab = p_1 p_2 \cdot k_8$ dengan $k_8 \in Z_0^+$ sehingga dieroleh $ab \in I$. Namun juga bisa $p_1 p_2 | b$ atau $p_1 p_2 | c$ sehingga dengan menggunakan argumen yang sama dapat diperoleh $ac \in I$ atau $bc \in I$.

Dengan demikian terbukti bahwa untuk $x = p$, $x = p^2$ atau $x = p_1 \cdot p_1$ maka $I = \langle x \rangle$ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+. ■

Berikut ini akan diberikan contoh mengenai ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+.

Contoh 4.1.6. Perhatikan kembali contoh 2.4.11, berdasarkan definisi 2.4.16 (def ideal 2-absorbing) dapat diperoleh $I_1 = \langle 6 \rangle$ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+ dan $I_2 = \langle 12 \rangle$ bukan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+. Hal ini juga dapat dibuktikan dengan menggunakan teorema 4.1.9 bahwa $I_1 = \langle 6 \rangle$ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+ karena terdapat $p_1 = 2$ dan $p_2 = 3$ yang memenuhi $p_1 \cdot p_2 = 2 \cdot 3 = 6$ dan $I_2 = \langle 12 \rangle$ bukan ideal 2-absorbing karena $x = 12 = 2^2 \cdot 3$ tidak memenuhi bentuk $x = p$, $x = p^2$ ataupun $x = p_1 \cdot p_2$.

4.2 Karakteristik ideal 2-absorbing terkait dengan $(\boldsymbol{I}:\boldsymbol{r})$ dan $\sqrt{\boldsymbol{I}}$ dari ideal $\boldsymbol{I}$ pada semiring $\boldsymbol{S}$, ideal subtraktif dan ideal irreducible pada semiring $\boldsymbol{S}$ dan semiring regular serta ideal 2-absorbing lemah pada semiring $\boldsymbol{S}$ dan semiring $\boldsymbol{S_1 \times S_2}$.

Pada subbab ini akan dibahas mengenai karakteristik ideal 2-absorbing terkait dengan $(I:r)$ dan $\sqrt{I}$ dari ideal I pada semiring S, ideal subtraktif dan ideal irreducible pada semiring S dan semiring regular serta ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dan semiring $S_1 \times S_2$.

Pertama – tama akan dibahas mengenai karakteristik ideal 2-absorbing terkait bentuk $(I\colon r)$ dan $\sqrt{I}$. Untuk I ideal 2-absorbing pada semiring S maka akan diperoleh $(I\colon r)$ dan $\sqrt{I}$ nya juga merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S sebagaimana yang tertulis pada teorema 4.2.1 dan teorema 4.2.2 berikut ini.

Teorema 4.2.1. [3] *Jika I ideal 2-absorbing pada semiring S, maka* $\sqrt{I}$ *merupakan ideal 2-absorbing pada semiring* S.

Bukti. Untuk setiap a, b, $c \in S$ yang memenuhi $abc \in \sqrt{I}$ maka $(abc)^n = a^n b^n c^n \in I$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Karena I merupakan ideal 2-absorbing maka $a^n b^n = (ab)^n \in I$ atau $a^n c^n = (ac)^n \in I$ atau $b^n c^n = (bc)^n \in I$. Sehingga diperoleh $ab \in \sqrt{I}$ atau $ac \in \sqrt{I}$ atau $bc \in \sqrt{I}$. Dengan demikian terbukti bahwa $\sqrt{I}$ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S. ■

Kemudian berikut ini merupakan contoh mengenai karakteristik ideal 2-absorbing terkait $\sqrt{I}$.

Contoh 4.2.1. Berdasarkan teorema 4.1.14 (bentuk umum ideal 2-absorbing), $I = \langle x \rangle$ ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+ jika dan hanya jika $x = p$, $x = p^2$ atau $x = p_1 p_2$ dengan p, p_1, p_2 bilangan prima pada semiring Z_0^+. Maka berdasarkan teorema 4.1.4 (bentuk umum $\sqrt{I}$) dapat diperoleh.

(i). Untuk $I = \langle p \rangle$ dapat diperoleh $\sqrt{I} = \langle p \rangle$ yang merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+.

(ii). Untuk $I = \langle p^2 \rangle$ dapat diperoleh $\sqrt{I} = \langle p \rangle$ yang merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+.

(iii). Untuk $I = \langle p_1 p_2 \rangle$ dapat diperoleh $\sqrt{I} = \langle p_1 p_2 \rangle$ yang merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+.

Tampak bahwa bentuk $\sqrt{I}$ dari setiap ideal 2-absorbing yang dibangun oleh satu elemen pada semiring Z_0^+ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+.

Teorema berikutnya yaitu mengenai karakteristik ideal 2-absorbing terkait bentuk $(I{:}\,r)$ sebagai berikut.

Teorema 4.2.2. [1] *Jika I ideal 2-absorbing pada semiring S maka* $\forall_{r \in S \setminus I}$, $(I{:}\,r)$ *merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S.*

Bukti. Ambil sebarang $r \in S\setminus I$ dan $a,b,c \in S$ yang memenuhi $abc \in (I{:}\,r)$ maka $r.abc \in I$. karena I merupakan ideal 2-absorbing dan $r.abc \in I$ menyebabkan $ra \in I$ atau $rbc \in I$ atau $abc \in I$. Sehingga diperoleh tiga kasus sebagai berikut.

- Untuk $ra \in I$ artinya $a \in (I{:}\,r)$. Karena $(I{:}\,r)$ merupakan ideal pada semiring S maka $ab \in (I{:}\,r)$ dan $ac \in (I{:}\,r)$.

- $rbc \in I$ artinya $bc \in (I{:}\,r)$.

- $abc \in I$, karena I merupakan ideal 2-absorbing menyebabkan $ab \in I$ atau $ac \in I$ atau $bc \in I$. Karena I merupakan ideal pada semiring S maka diperoleh $rab \in I$ atau $rac \in I$ atau $rbc \in I$ yamg artinya $ab \in (I{:}\,r)$ atau $ac \in (I{:}\,r)$ atau $bc \in (I{:}\,r)$.

Dengan demikian terbukti bahwa $(I{:}\,r)$ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S. ■

Contoh 4.2.2. Diberikan $I = \langle 6 \rangle$ ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+ dan untuk setiap $r \in Z_0^+ \backslash I$ dapat diasumsikan $r \in \langle 3 \rangle \backslash \langle 6 \rangle - \{0\} = \{3,9,15, \ldots\}$, $r \in \langle 2 \rangle \backslash \langle 6 \rangle - \{0\} = \{2,4,8,10, \ldots\}$ dan $r \in Z_0^+ \backslash \big((\langle 3 \rangle \backslash \langle 6 \rangle) \cup (\langle 2 \rangle \backslash \langle 6 \rangle) \cup \langle 6 \rangle \big) - \{0\} = \{1,5,7,11, \ldots\}$ sehingga dapat diperoleh bentuk $(I{:}r)$ sebagai berikut.

(i). Untuk $r \in \langle 3 \rangle \backslash \langle 6 \rangle - \{0\} = \{3,9,15, \ldots\}$ dapat diperoleh $FPB(6, r) = 3$ sedemikian hingga diperoleh bentuk $(I{:}r) = \langle 6/3 \rangle = \langle 2 \rangle$ yang merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+.

(ii). Untuk $r \in \langle 2 \rangle \backslash \langle 6 \rangle - \{0\} = \{2,4,8,10, \ldots\}$ dapat diperoleh $FPB(6, r) = 2$ sedemikian hingga diperoleh bentuk $(I{:}r) = \langle 6/2 \rangle = \langle 3 \rangle$ yang merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+.

(iii). Untuk $r \in Z_0^+ \backslash ((\langle 3 \rangle \backslash \langle 6 \rangle) \cup (\langle 2 \rangle \backslash \langle 6 \rangle) \cup \langle 6 \rangle) - \{0\} = \{1,5,7,11, \ldots\}$ dapat diperoleh $FPB(6, r) = 1$ sedemikian hingga diperoleh bentuk $(I{:}r) = \langle 6/1 \rangle = I$ yang merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+.

Tampak bahwa untuk setiap $r \in Z_0^+ \backslash I$ akan diperoleh $(I{:}r)$ yang merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+. Untuk $r \in Z_0^+$ dapat diperoleh $FPB(6, r) = 6$ sehingga diperoleh $(I{:}r) = \langle 6/6 \rangle = Z_0^+$ yang juga merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+, tetapi ideal semacam ini merupakan ideal tak sejati dan sudah secara otomatis merupakan ideal 2-absorbing pada Z_0^+ itu sendiri.

Jika ditinjau dari karakteristik ideal prima terkait ideal 2-absorbing adalah jika I ideal prima maka I merupakan ideal 2-absorbing namun belum tentu berlaku sebaliknya, maka untuk I ideal 2-absorbing dapat diperoleh bentuk $(I{:}r)$

yang merupakan ideal prima dengan tambahan syarat khusus untuk sifat-sifat ideal I, sebagaimana yang telah dirumuskan dalam teorema berikut ini.

Teorema 4.2.3. [1] *Diberikan I ideal subtraktif 2-absorbing pada semiring S dan $\sqrt{I}^2 \subseteq I$, jika $I \neq \sqrt{I}$ dan untuk setiap $r \in \sqrt{I} \backslash I$ maka $(I: r)$ merupakan ideal prima pada semiring S dengan $\sqrt{I} \subseteq (I: r)$.*

Bukti. Ambil $ab \in S$ dan $r \in \sqrt{I} \backslash I$ yang memenuhi $ab \in (I: r)$ maka $rab \in I$. Karena I ideal 2-absorbing maka $ra \in I$ atau $rb \in I$ atau $ab \in I$ sehingga diperoleh :

(i). Untuk kasus $ra \in I$ artinya $a \in (I: r)$ yang artinya $(I: r)$ merupakan ideal prima pada semiring S.

(ii). Untuk kasus $rb \in I$ artinya $b \in (I: r)$ yang artinya $(I: r)$ merupakan ideal prima pada semiring S.

(iii). Untuk kasus $ab \in I$. Karena $r \in \sqrt{I}$ maka $r^2 \in \sqrt{I}^2 \subseteq I$ sehingga $r \in (I: r)$ yang artinya $\sqrt{I} \subseteq (I: r)$. Karena $(I: r)$ ideal, akibatnya $rb \in (I: r)$. karena $ab \in I \subseteq (I: r)$ maka $rb + ab = (r + a)b \in (I: r)$ yang artinya $r(r + a)b \in I$. Karena I ideal 2-absorbing maka $r(r + a) \in I$ atau $rb \in I$ atau $(r + a)b \in I$ sehingga diperoleh :

- $r(r + a) = r^2 + ra \in I$, karena I ideal subtraktif dan $r^2 \in \sqrt{I}^2 \subseteq I$ maka $ra \in I$ yang artinya $a \in (I: r)$ sehingga $(I: r)$ merupakan ideal prima pada semiring S.

- $rb \in I$ artinya $b \in (I: r)$ sehingga $(I: r)$ merupakan ideal prima pada semiring S.

- $(r + a)b = rb + ab \in I$, karena I ideal subtraktif dan $ab \in I$ maka $rb \in I$ yang artinya $b \in (I: r)$ sehingga $(I: r)$ merupakan ideal prima pada semiring Z_0^+.

Dengan demikian terbukti bahwa $(I: r)$ merupakan ideal prima pada semiring S dengan $\sqrt{I} \subseteq (I: r)$. ■

Karena untuk setiap I ideal prima merupakan ideal 2-absorbing, maka dari Teorema 4.2.3 dapat diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 4.2.4. [1] *Diberikan I merupakan ideal subtraktif 2-absorbing pada semiring S dan* $\sqrt{I}^2 \subseteq I$*, jika* $I \neq \sqrt{I}$ *dan untuk setiap* $r \in \sqrt{I}\backslash I$ *maka* $(I: r)$ *merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S dengan* $\sqrt{I} \subseteq (I: r)$.

Jika $\sqrt{I}$ merupakan ideal prima pada semiring S maka Teorema 4.2.3 dapat berlaku biimplikasi sedemikian hingga menjadi Teorema 4.2.5 sebagai berikut.

Teorema 4.2.5. [1] *Jika I ideal subtraktif pada semiring S sedemikian hingga* $I \neq \sqrt{I}$ *dan* $\sqrt{I}$ *merupakan ideal prima pada semiring S dengan* $\sqrt{I}^2 \subseteq I$*, maka I merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S jika dan hanya jika* $(I: r)$ *merupakan ideal prima pada semiring S untuk setiap* $r \in \sqrt{I}\backslash I$.

Bukti.
$(\Rightarrow)$
Pembuktian menggunakan Teorema 4.2.3.

($\Leftarrow$)
Ambil a, b, $c \in S$ yang memenuhi $a(bc) \in I \subseteq \sqrt{I}$. Karena $\sqrt{I}$ merupakan ideal prima pada semiring S maka diperoleh $a \in \sqrt{I}$ atau $bc \in \sqrt{I}$.

(i). Untuk kasus $a \in \sqrt{I}$ dan $I \subseteq \sqrt{I}$ maka dapat diasumsikan $a \in I$ atau $a \in \sqrt{I}/I$. Untuk $a \in I$ dan I merupakan ideal pada semiring S maka $ab \in I$ dan $ac \in I$ yang artinya I ideal 2-absorbing pada semiring S. Untuk kasus $a \in \sqrt{I}/I$ maka $bc \in (I\colon a)$. Karena $(I\colon a)$ ideal prima pada semiring S maka $b \in (I\colon a)$ atau $c \in (I\colon a)$ sehingga dapat diperoleh $ab \in I$ atau $ac \in I$ yang artinya I merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S.

(ii). Untuk kasus $bc \in \sqrt{I}$. karena $\sqrt{I}$ merupakan ideal prima pada semiring S maka $b \in \sqrt{I}$ atau $c \in \sqrt{I}$ sehingga dengan menggunakan argumen yang sama dapat diperoleh bahwa I merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S.

Dengan demikian terbukti bahwa I merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S jika dan hanya jika $(I\colon r)$ merupakan ideal prima pada semiring S untuk setiap $r \in \sqrt{I}\backslash I$. ∎

Contoh 4.2.3. Diberikan $I = \langle 4 \rangle$ merupakan ideal subtraktif 2-absorbing pada semiring Z_0^+ dengan $\sqrt{I} = \langle 2 \rangle \neq I$ sedemikian hingga $\sqrt{I}^2 = \langle 4 \rangle \subseteq I$. Untuk setiap $r \in \sqrt{I}\backslash I$ yang artinya $r = \{2,6,10,\dots\}$ dapat diperoleh $FPB(4,r) = 2$ sedemikian hingga $(I\colon r) = \langle 4/FPB(4,r) \rangle$ $= \langle 2 \rangle$ yang merupakan ideal prima pada semiring Z_0^+ dan jelas bahwa $\sqrt{I} \subseteq (I\colon r)$.

Pembahasan selanjutnya yaitu mengenai karakteristik ideal 2-absorbing terkait ideal subtraktif dan ideal irreducible pada semiring S. Berikut ini merupakan teorema mengenai karakteristik ideal 2-absorbing terkait ideal subtraktif irreducible pada semiring S.

Teorema 4.2.6. [1] *Diberikan I ideal subtraktif irreducible pada semiring* S *dan* $\sqrt{I}^2 \subseteq I$. *Maka I merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S jika dan hanya jika* $(I{:}r) = (I{:}r^2)$ *untuk setiap* $r \in S\backslash\sqrt{I}$.

Bukti.

$(\Rightarrow)$

Diberikan I ideal 2-absorbing pada semiring S. Untuk setiap $r \in S\backslash\sqrt{I}$, maka $r^2 \notin I$ (kontradiksi dengan jika $r^2 \in I$ maka $r \in \sqrt{I}$).

(i). Ambil $x \in (I{:}r)$ maka $rx \in I$. Karena I ideal maka $r^2x \in I$ yang artinya $x \in (I{:}r^2)$, sehingga diperoleh $(I{:}r) \subseteq (I{:}r^2)$.

(ii). Ambil $x \in (I{:}r^2)$ maka $r^2x \in I$. Karena I merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S, maka $r^2 \in I$ atau $rx \in I$. Karena $r^2 \notin I$ maka $rx \in I$ yang artinya $x \in (I{:}r)$, sehingga diperoleh $(I{:}r^2) \subseteq (I{:}r)$.

Dari hasil (i) dan (ii) dapat diperoleh $(I{:}r) = (I{:}r^2)$.

$(\Leftarrow)$

Ambil $r, s, t \in S$ yang memenuhi $rst \in I$. Untuk $rs \in I$ maka sudah jelas bahwa I ideal 2-absorbing, sehingga dapat diasumsikan $rs \notin I$ kemudian akan ditunjukkan $rt \in I$ atau $st \in I$. Untuk $rs \notin I$ maka dapat diperoleh $r \notin \sqrt{I}$ atau $s \notin \sqrt{I}$ (kontradiksi dengan jika $r \in \sqrt{I}$ dan

$s \in \sqrt{I}$ maka $rs \in \sqrt{I}^2 \subseteq I$). Untuk $r \notin \sqrt{I}$ atau $s \notin \sqrt{I}$ maka dapat diperoleh $(I: r) = (I: r^2)$ atau $(I: s) = (I: S^2)$. Untuk membuktikan $rt \in I$ atau $st \in I$ akan digunakan pembuktian kontradiksi, yaitu dengan mengasumsikan $rt \notin I$ dan $st \notin I$ kemudian akan dibuktikan bahwa I bukanlah ideal irreducible. Ambil ideal $H = (I + \langle rt \rangle)$ dan $K = (I + \langle st \rangle)$ pada S (H dan K disebut ideal pada S karena untuk setiap $a, b \in I$, $r_1rt,\ r_2rt \in \langle rt \rangle$ dan $s \in S$ dapat diperoleh $(a + r_1rt) + (b + r_2rt) = (a + b) + (r_1 + r_2)rt \in H$ dan $s(a + r_1rt) = sa + sr_1rt \in H$, begitupun juga dengan K). Akan ditunjukkan $I = H \cap K$ sebagai berikut.

(i). Ambil $x \in I + 0 = I$ yang artinya $x \in (I + \langle rt \rangle) \cap (I + \langle st \rangle)$ sehingga dapat diperoleh $I \subseteq (I + \langle rt \rangle) \cap (I + \langle st \rangle)$.

(ii). Ambil $p \in (I + \langle rt \rangle) \cap (I + \langle st \rangle)$ yang artinya terdapat $p_1,\ p_2 \in I$ dan $r_1, r_2 \in S$ sedemikian hingga $p = p_1 + r_1rt = p_2 + r_2st$ sehingga dapat diperoleh $pr = p_1r + r_1r^2t = p_2r + r_2rst$. Karena $rst \in I$ maka $p_1r + r_1r^2t \in I$. Karena I ideal subtraktif maka $r_1r^2t \in I$ yang artinya $r_1t \in (I: r^2) = (I: r)$ sehingga $r_1rt \in I$. Akibatnya $p = p_1 + r_1rt \in I$, sehingga diperoleh $(I + \langle rt \rangle) \cap (I + \langle st \rangle) \subseteq I$.

Dari hasil (i) dan (ii) dapat diperoleh $(I + \langle rt \rangle) \cap (I + \langle st \rangle) = I$ sedangkan $I \neq \langle rt \rangle$ dan $I \neq \langle st \rangle$ untuk $rt \notin I$ dan $st \notin I$, sehingga I bukanlah ideal irreducible. Sesuai dengan kontradiksinya maka dapat diperoleh $rt \in I$ atau $st \in I$ sehingga terbukti bahwa I merupakan ideal 2-absorbing pada semiring komutatf S. ■

Contoh 4.2.4. Diberikan $I = \langle 2 \rangle$ ideal subtraktif irreducible pada Z_0^+ sehingga $\sqrt{I} = \langle 2 \rangle$ akibatnya $\sqrt{I}^2 = \langle 4 \rangle \subseteq I$. Tampak bahwa ideal $I = \langle 2 \rangle$ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+ dan untuk $r \in Z_0^+ \backslash \langle 2 \rangle$ dapat diperoleh $r = \{1,3,5,\dots\}$ sedemikian hingga $FPB(2, r) = FPB(2, r^2) = 1$ yang artinya $(I : r) = (I : r^2)$.

Karakteristik ideal 2-absorbing terkait ideal irreducible pada semiring S membutuhkan beberapa sifat, yaitu ideal I haruslah merupakan ideal subtraktif dan $\sqrt{I}^2 \subseteq I$ serta $(I : r) = (I : r^2)$ untuk setiap $r \in S \backslash \sqrt{I}$. Berbeda jika karakteristik ini dibawa ke semiring regular, pada semiring regular setiap ideal irreducible-nya merupakan ideal 2-absorbing pada semiring. Berikut ini merupakan teorema mengenai karakteristik ideal 2-absorbing terkait ideal irreducible pada semiring regular S.

Teorema 4.2.7. [1] *Diberikan semiring regular S. Jika I ideal irreducible pada S maka I merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S.*

Bukti. Diberikan semiring regular S dan I ideal irreducible pada semiring S. Ambil sebarang $r, s, t \in S$ yang memenuhi $rst \in I$. Untuk $rs \in I$ maka sudah jelas bahwa I merupakan ideal 2-absorbing pada S, sehingga dapat diasumsikan $rs \notin I$, kemudian akan ditunjukkan $rt \in I$ atau $st \in I$. Dengan menggunakan pembuktian kontradiksi dapat diasumsikan $rt \notin I$ dan $st \notin I$, kemudian akan ditunjukkan bahwa I bukan ideal irreducible. Ambil ideal $H = (I + \langle rt \rangle)$ dan $K = (I + \langle st \rangle)$ pada S. Akan ditunjukkan $I = H \cap K$ sebagai berikut.

(i). Ambil $x \in I + 0 = I$ yang artinya $x \in (I + \langle rt \rangle) \cap (I + \langle st \rangle)$ sehingga dapat diperoleh $I \subseteq (I + \langle rt \rangle) \cap (I + \langle st \rangle)$.

(ii). Ambil $p \in (I + \langle rt \rangle) \cap (I + \langle st \rangle)$. Karena S merupakan semiring regular maka $p \in (I + \langle rt \rangle)(I + \langle st \rangle)$ yang artinya terdapat p_1, $p_2 \in I$ dan r_1, $r_2 \in S$ sedemikian hingga $p = (p_1 + r_1 rt)(p_2 + r_2 st) = p_1 p_2 + p_1 r_2 st + r_1 rt p_2 + rs r_1 r_2 t^2 \in I$, sehingga diperoleh $(I + \langle rt \rangle) \cap (I + \langle st \rangle) \subseteq I$.

Dari hasil (i) dan (ii) dapat diperoleh $(I + \langle rt \rangle) \cap (I + \langle st \rangle) = I$ sedangkan $I \neq \langle rt \rangle$ dan $I \neq \langle st \rangle$ untuk $rt \notin I$ dan $st \notin I$, sehingga I bukanlah ideal irreducible. Sesuai dengan kontradiksinya maka dapat diperoleh $rt \in I$ atau $st \in I$ sehingga terbukti bahwa *I* merupakan ideal 2-absorbing pada semiring komutatf S. ■

Kemudian berikut ini diberikan contoh mengenai teorema 4.2.7.

Contoh 4.2.5. Diberikan $Z_{0\,[6]}^{+} = \{ [0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6 \}$ semiring regular. Dalam $Z_{0\,[6]}^{+}$ terdapat 4 ideal, yaitu $I_1 = \{[0]_6\}$, $I_2 = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$, $I_3 = \{[0]_6, [3]_6\}$ dan $I_4 = Z_{0\,[6]}^{+}$ sehingga diperoleh ideal sejati I_2 dan I_3 masing – masing merupakan ideal ireducible pada semiring $Z_{0\,[6]}^{+}$. Dengan demikian I_2 dan I_3 juga merupakan ideal 2-absorbing pada semiring $Z_{0\,[6]}^{+}$.

Telah dibahas di bab II bahwa setiap ideal 2-absorbing merupakan ideal 2-absorbing lemah, namun belum tentu berlaku sebaliknya. Salah satu karakteristik yang sangat unik jika dapat berlaku sebaliknya pada pernyataan tersebut. Berikut ini merupakan proposisi mengenai karakteristik ideal 2-absorbing terkait ideal 2-absorbing lemah pada semiring S.

Proposisi 4.2.8. [1] *Diberikan* $a \in S$ *dan* I *ideal pada semiring* S. *Maka pernyataan – pernyataan dibawah ini dapat dibangun :*

(a) *Jika* Sa *merupakan ideal subtraktif pada* S *dan* $(0{:}\,a) \subseteq Sa$*, maka ideal* Sa *merupakan ideal 2-absorbing pada S jika dan hanya jika* Sa *merupakan ideal 2-absorbing lemah pada S.*

(b) *Jika* I *merupakan ideal subtraktif pada* S *dan* $(0{:}\,a) \subseteq Ia$*, maka ideal* Ia *merupakan ideal 2-absorbing pada S jika dan hanya jika* Ia *merupakan ideal 2-absorbing lemah pada S.*

Bukti.

(a) ($\Rightarrow$) Ambil $r, s, t \in S$ yang memenuhi $0 \neq rst \in Sa$. Karena Sa ideal 2-absorbing maka $rs \in Sa$ atau $rt \in Sa$ atau $st \in Sa$. Terbukti bahwa Sa ideal 2-absorbing lemah pada S.

($\Leftarrow$) Ambil $r, s, t \in S$ yang memenuhi $rst \in Sa$.

(i). Untuk $rst \neq 0$ dan Sa ideal 2-absorbing lemah pada S maka $rs \in Sa$ atau $rt \in Sa$ atau $st \in Sa$. Terbukti bahwa Sa ideal 2-absorbing pada S.

(ii). Untuk $rst = 0$ dapat diperoleh $r(s + a)t = rst + rat \in Sa$. Jika $r(s + a)t \neq 0$ dan Sa ideal 2-absorbing lemah, maka dapat diperoleh $r(s + a) \in Sa$ atau $rt \in Sa$ atau $(s + a)t \in Sa$. Karena Sa

merupakan ideal subtraktif dan $ra, at \in Sa$ maka dapat diperoleh $rs \in Sa$ atau $st \in Sa$. Namun jika $r(s + a)t = rst + rat = 0$ dan $rst = 0$, maka dapat diperoleh $rat = 0$ yang artinya $rt \in (0: a) \subseteq Sa$. Terbukti bahwa Sa merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S.

(b) Dengan cara yang sama dapat diperoleh bahwa Jika I merupakan ideal subtraktif pada S dan $(0: a) \subseteq Ia$, maka ideal Ia merupakan ideal 2-absorbing pada S jika dan hanya jika Ia merupakan ideal 2-absorbing lemah pada S. ■

Kemudian berikut ini diberikan contoh mengenai teorema 4.2.8.

Contoh 4.2.6.

(i) Diberikan semiring $S = Z_0^+$ dan untuk $a \in Z_0^+$ dapat diperoleh $Sa = \{ka \mid \forall k \in Z_0^+\}$. Misalkan $a = 3$ sedemikian hingga $Sa = \{0,3,6, \ldots\} = \langle 3 \rangle$ merupakan ideal subtraktif 2-absorbing pada Z_0^+ dengan $(0: a) = \{x \mid 3x \in \{0\}\} = \{0\} \subseteq Sa$. Dengan demikian Sa juga merupakan ideal 2-absorbing lemah pada semiring Z_0^+.

(ii) Diberikan $I = \langle 2 \rangle = \{0,2,4, \ldots\}$ ideal pada semiring Z_0^+ dan untuk $a \in Z_0^+$ dapat diperoleh $Ia = \{ka \mid \forall k \in I\}$. Misalkan $a = 3$ sedemikian hingga $Ia = \{0,6,12, \ldots\}$ merupakan ideal subtraktif 2-absorbing pada semiring Z_0^+ dengan $(0: a) = \{x \mid 3x \in \{0\}\} = \{0\} \subseteq Ia$. Dengan demikian Ia juga merupakan ideal 2-absorbing lemah pada semiring Z_0^+.

Perlu diperhatikan bahwasanya pemilihan ideal I dan elemen $a \in S$ pada contoh di atas sangat menentukan apakah Ia merupakan ideal 2-absorbing atau bukan. Menurut teorema 4.1.9, ideal $I = \langle x \rangle$ pada semiring Z_0^+ dengan Ia merupakan ideal 2-absorbing jika dan hanya jika $x = a = p$, $x = p_1$ dan $a = p_2$, $x = p^2$ dan $a = 1$, $x = p_1 p_2$ dan $a = 1$, atau $x = p$ dan $a = 1$ dengan p, p_1 dan p_2 merupakan bilangan prima pada semiring Z_0^+.

Karakteristik ideal 2-absorbing terkait ideal 2-absorbing lemah tidak hanya dibahas pada semiring S, akan tetapi juga akan dibahas pada semiring $S = S_1 \times S_2$. Perlu diperhatikan bahwa semiring $S = S_1 \times S_2$ merupakan semiring komutatif dimana $S_i, i = 1,2$ merupakan semiring dengan elemen unity (elemen satuan). Berikut ini akan diberikan karakteristik ideal 2-absorbing terkait ideal 2-absorbing lemah pada semiring $S = S_1 \times S_2$.

Proposisi 4.2.9. [1] *Diberikan semiring $S = S_1 \times S_2$ dengan $S_i, i = 1,2$ semiring dengan elemen unity (elemen satuan). Jika I ideal sejati pada semiring S_1. Maka pernyataan-pernyataan dibawah ini ekivalen :*

(a) *I merupakan ideal 2-absorbing pada S_1.*

(b) *$I \times S_2$ merupakan ideal 2-absorbing pada $S = S_1 \times S_2$.*

(c) *$I \times S_2$ merupakan ideal 2-absorbing lemah pada $S = S_1 \times S_2$.*

Bukti.
(i) $\Rightarrow$ (ii)
Ambil $a_1, b_1, c_1 \in S_1$ dan $a_2, b_2, c_2 \in S_2$ sehingga $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in S = S_1 \times S_2$ yang memenuhi

$(a_1, a_2)(b_1, b_2)(c_1, c_2) = (a_1b_1c_1, a_2b_2c_3) \in I \times S_2$.
Untuk $(a_1b_1c_1, a_2b_2c_3) \in I \times S_2$ dapat diperoleh $a_1b_1c_1 \in I$. Karena I ideal 2-absorbing pada S_1 maka $a_1b_1 \in I$ atau $a_1c_1 \in I$ atau $b_1c_1 \in I$ yang artinya $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2) \in I \times S_2$ atau $(a_1, a_2)(c_1, c_2) = (a_1c_1, a_2c_2) \in I \times S_2$ atau $(b_1, b_2)(c_1, c_2) = (b_1c_1, b_2c_2) \in I \times S_2$. Terbukti bahwa $I \times S_2$ merupakan ideal 2-absorbing pada $S = S_1 \times S_2$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)
Ambil a_1, b_1, c_1 $\in S_1$ dan a_2, b_2, c_2 $\in S_2$ sehingga (a_1, a_2), (b_1, b_2), $(c_1, c_2) \in S = S_1 \times S_2$ yang memenuhi $(0,0) \neq (a_1, a_2)\ (b_1, b_2)\ (c_1, c_2) \in I \times S_2$. Karena $I \times S_2$ ideal 2-absorbing maka dapat diperoleh $(a_1, a_2)\ (b_1, b_2) \in I \times S_2$ atau $(a_1, a_2)(c_1, c_2) \in I \times S_2$ atau $(b_1, b_2)(c_1, c_2) \in I \times S_2$. Terbukti bahwa $I \times S_2$ merupakan ideal 2-absorbing pada $S = S_1 \times S_2$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)
Ambil $a_1, b_1, c_1 \in S_1$ yang memenuhi $a_1b_1c_1 \in I$. Untuk $1 \in S_2$ maka dapat diperoleh $(0,0) \neq (a_1b_1c_1, 1) = (a_1, 1), (b_1, 1), (c_1, 1) \in I \times S_2$. Karena $I \times S_2$ ideal 2-absorbing lemah maka dapat diperoleh $(a_1, 1)\ (b_1, 1) = (a_1b_1, 1) \in I \times S_2$ atau $(a_1, 1)\ (c_1, 1) = (a_1c_1, 1) \in I \times S_2$ atau $(b_1, 1)\ (c_1, 1) = (b_1c_1, 1) \in I \times S_2$ yang artinya $a_1b_1 \in I$ atau $a_1c_1 \in I$ atau $b_1c_1 \in I$. Terbukti bahwa I merupakan ideal 2-absorbing pada S_1.

Kemudian berikut ini diberikan contoh mengenai teorema 4.2.9.

Contoh 4.2.7.
Diberikan $I = \langle 6 \rangle$ ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+ maka dapat diperoleh $\langle 6 \rangle \times Z_0^+$ ideal 2-absorbing pada semiring $Z_0^+ \times Z_0^+$. Jika $\langle 6 \rangle \times Z_0^+$ merupakan ideal 2-

absorbing pada semiring $Z_0^+ \times Z_0^+$ maka jelas bahwa $\langle 6 \rangle \times Z_0^+$ juga merupakan ideal 2-absorbing lemah pada semiring $Z_0^+ \times Z_0^+$.

4.3 Hubungan ideal 2-absorbing pada semiring S dengan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai hubungan ideal 2-absorbing pada semiring S dengan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$ serta hubungan ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dengan ideal 2-absorbing lemah pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.

Sama halnya seperti hubungan ideal prima pada semiring S dengan ideal prima pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$ yang sudah dijelaskan pada teorema 2.5.3, maka hal ini juga berlaku pada ideal 2-absorbing pada semiring S. Berikut ini merupakan teorema mengenai hubungan ideal 2-absorbing pada semiring S dengan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.

Teorema 4.3.1. [1] *Diberikan semiring S, I merupakan Q-ideal pada S dan P merupakan ideal perluasan subtraktif dari I. Maka P merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S jika dan hanya jika $P/I_{(Q\cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.*

Bukti.
($\Rightarrow$)
Ambil q_1, q_2, $q_3 \in Q$ sedemikian hingga $q_1 + I$, $q_2 + I$, $q_3 + I \in S/I_{(Q)}$ yang memenuhi $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) \odot (q_3 + I) = q_4 + I \in P/I_{(Q\cap P)}$ dengan elemen tunggal $q_4 \in Q \cap P$ sedemikian hingga $q_1q_2q_3 + I \subseteq q_4 + I \in P/I_{(Q\cap P)}$. Jadi $q_1q_2q_3 = q_4 + i \in P$ dengan $i \in I$ yang

artinya juga $q_1q_2q_3 \in P$. Karena P ideal 2-absorbing maka dapat diperoleh $q_1q_2 \in P$ atau $q_1q_3 \in P$ atau $q_2q_3 \in P$.

(i) Untuk kasus $q_1q_2 \in P$. Jika $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) = q_5 + I$ dengan elemen tunggal $q_5 \in Q$ sedemikian hingga $q_1q_2 + I \subseteq q_5 + I$. Artinya $q_5 + i_1 = q_1q_2 + i_2$ untuk suatu i_1, $i_2 \in I$. Karena $q_1q_2 \in P$ dan $i_2 \in I$ maka $q_5 + i_1 \in P$ sehingga dapat diperoleh $q_5 \in P$ yang artinya $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) = q_5 + I \in P/I_{(Q \cap P)}$. Terbukti bahwa $P/I_{(Q \cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing pada $S/I_{(Q)}$.

(ii) Untuk kasus $q_1q_3 \in P$. Dengan menggunakan argumen yang sama dapat diperoleh $(q_1 + I) \odot (q_3 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$. Terbukti bahwa $P/I_{(Q \cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing pada $S/I_{(Q)}$.

(iii) Untuk kasus $q_2q_3 \in P$. Dengan menggunakan argumen yang sama dapat diperoleh $(q_2 + I) \odot (q_3 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$. Terbukti bahwa $P/I_{(Q \cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing pada $S/I_{(Q)}$.

Dengan demikian terbukti bahwa $P/I_{(Q \cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.

$(\Leftarrow)$

Ambil $a, b, c \in S$ yang memenuhi $abc \in P$. Karena I merupakan Q-ideal pada S maka terdapat $q_1, q_2, q_3, q_4 \in Q$ sedemikian hingga $a \in q_1 + I,\ b \in q_2 + I,\ c \in q_3 + I$ dan $abc \in (q_1 + I) \odot (q_2 + I) \odot (q_3 + I) = q_4 + I \in S/I_{(Q)}$. Misalkan $q_4 + i = abc \in P$ untuk suatu $i \in I$. Karena P merupakan ideal perluasan subtraktif pada I dan $q_4 + i \in P$ maka dapat diperoleh $q_4 \in P$ yang artinya $q_4 \in Q \cap P$ sehingga diperoleh $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) \odot (q_3 + I) =$

$q_4 + I \in P/I_{(Q \cap P)}$. Karena $P/I_{(Q \cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing pada $S/I_{(Q)}$ maka $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$ atau $(q_1 + I) \odot (q_3 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$ atau $(q_2 + I) \odot (q_3 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$.

(i) Untuk kasus $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$ maka terdapat $q_5 \in Q \cap P$ sedemikian hingga $ab \in (q_1 + I) \odot (q_2 + I) = q_5 + I \subseteq P$. Terbukti bahwa P merupakan ideal 2-absorbing pada S.

(ii) Untuk kasus $(q_1 + I) \odot (q_3 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$ maka terdapat $q_6 \in Q \cap P$ sedemikian hingga $ac \in (q_1 + I) \odot (q_3 + I) = q_6 + I \subseteq P$. Terbukti bahwa P merupakan ideal 2-absorbing pada S.

(iii) Untuk kasus $(q_2 + I) \odot (q_3 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$ maka terdapat $q_7 \in Q \cap P$ sedemikian hingga $bc \in (q_2 + I) \odot (q_3 + I) = q_7 + I \subseteq P$. Terbukti bahwa P merupakan ideal 2-absorbing pada S.

Dengan demikian terbukti bahwa P merupakan ideal 2-absorbing pada semiring S ■

Berikut ini merupakan contoh mengenai teorema 4.3.1.

Contoh 4.3.1. Diberikan $I = \langle 16 \rangle$ merupakan Q-ideal pada semiring Z_0^+ dengan $Q = \{0,1,2, \dots ,15\}$ sehingga diperoleh semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)} = \{I, I+1, I+2, \dots, I+15\}$. Untuk ideal $I = \langle 16 \rangle$ dapat diperoleh ideal perluasan subtraktif $P = \langle x \rangle$ dari ideal I dengan $x = 2$, $x = 4$ dan $x = 8$. Berdasarkan teorema 4.1.9 dapat diperoleh untuk $x = 2$ dan $x = 4$ menyebabkan $P = \langle x \rangle$ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+. Sehingaga dapat diperoleh ideal 2-absorbing pada semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)}$ sebagai berikut.

- Untuk $P = \langle 2 \rangle$ dengan $P \cap Q = \{0,2,4, \dots 14\}$ maka dapat diperoleh ideal 2-absorbing $P/I_{(P \cap Q)} = \{I, I+2, I+4, \dots, I+14\}$ pada semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)}$.

- Untuk $P = \langle 4 \rangle$ dengan $P \cap Q = \{0,4,8,12\}$ maka dapat diperoleh ideal 2-absorbing $P/I_{(P \cap Q)} = \{I, I+4, I+8, I+12\}$ pada semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)}$.

Telah diketahui bahwa I dan P masing – masing ideal pada semiring S dan $I \subseteq P$ dapat diperoleh P ideal subtraktif maka P ideal perluasan subtraktif dari I tetapi tidak berlaku sebaliknya sehingga dari teorema 4.3.1 dapat diperoleh akibat 4.3.2 sebagai berikut.

Akibat 4.3.2. [1] *Diberikan semiring S, I merupakan Q-ideal pada S dan P merupakan ideal subtraktif pada S sedemikian hingga $I \subseteq P$. Maka P merupakan ideal 2-absorbing pada S jika dan hanya jika $P/I_{(Q \cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing pada $S/I_{(Q)}$.*

Contoh 4.3.2. Sama halnya dengan contoh 4.3.1 dapat diambil Q-ideal $I = \langle 16 \rangle$ pada semiring Z_0^+ sehingga diperoleh semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)} = \{I, I+1, I+2, \dots, I+15\}$. Berdasarkan Teorema 2.4.8 dapat diperoleh ideal subtraktif $P = \langle x \rangle$ untuk $x = 2$, $x = 4$ dan $x = 8$ yang memenuhi $I \subseteq P$. Dan berdasarkan teorema 4.1.9 dapat diperoleh untuk $x = 2$ dan $x = 4$ menyebabkan $P = \langle x \rangle$ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring Z_0^+. Sehingga sesuai dengan yang dijelaskan dalam contoh 4.3.1 dapat diperoleh ideal $P/I_{(P\cap Q)}$ merupakan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)}$.

Pembahasan selanjutnya yaitu mengenai hubungan ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dengan ideal 2-absorbing lemah pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$ sebagai berikut.

Teorema 4.3.3. [1] *Diberikan semiring S, I merupakan Q-ideal pada semiring S dan P merupakan ideal perluasan subtraktif pada I. Maka :*

(i). *Jika P merupakan ideal 2-absorbing lemah pada semiring S, maka $P/I_{(Q\cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing lemah pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.*

(ii). *Jika I ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dan $P/I_{(Q\cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing lemahsemiring faktor $S/I_{(Q)}$. Maka P merupakan ideal 2-absorbing lemah pada semiring S.*

Bukti.

(i). Ambil q_1, q_2, $q_3 \in Q$ sedemikian hingga $q_1 + I$, $q_2 + I$, $q_3 + I \in S/I_{(Q)}$ yang memenuhi $q_0 + I \neq (q_1 + I) \odot (q_2 + I) \odot (q_3 + I) = q_4 + I \in P/I_{(Q\cap P)}$ dengan elemen tunggal q_4, $q_0 \in Q \cap P$ sedemikian hingga berturut-turut $q_1q_2q_3 + I \subseteq q_4 + I \in P/I_{(Q\cap P)}$ dan $0 + I \subseteq q_0 + I \in P/I_{(Q\cap P)}$. Jadi $0 \neq q_1q_2q_3 = q_4 + i \in P$. Karena P ideal 2-absorbing lemah maka dapat diperoleh $q_1q_2 \in P$ atau $q_1q_3 \in P$ atau $q_2q_3 \in P$.

- Untuk kasus $q_1q_2 \in P$. Jika $q_1q_2 \in (q_1 + I) \odot (q_2 + I) = q_3 + I$ dengan elemen tunggal

$q_3 \in Q$ sedemikian hingga $q_1 q_2 + I \subseteq q_3 + I$. Misalkan $q_3 + i_1 = q_1 q_2 + i_2 \in P$ untuk suatu $i_1,\ i_2 \in I$. Karena P ideal perluasan subraktif maka $q_3 \in P$, sehingga diperoleh $q_3 \in Q \cap P$ yang artinya $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) = q_3 + I \in P/I_{(Q \cap P)}$. Terbukti bahwa $P/I_{(Q \cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing lemah pada $S/I_{(Q)}$.

– Untuk kasus $q_1 q_3 \in P$. Dengan menggunakan argumen yang sama dapat diperoleh $(q_1 + I) \odot (q_3 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$. Terbukti bahwa $P/I_{(Q \cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing pada $S/I_{(Q)}$.

– Untuk kasus $q_2 q_3 \in P$. Dengan menggunakan argumen yang sama dapat diperoleh $(q_2 + I) \odot (q_3 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$. Terbukti bahwa $P/I_{(Q \cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing pada $S/I_{(Q)}$.

(ii). Ambil $a,b,c \in S$ yang memenuhi $0 \neq abc \in P$. Karena I merupakan Q-ideal pada S maka terdapat $q_1,q_2,q_3,q_4 \in Q$ sedemikian hingga $a \in q_1 + I$, $b \in q_2 + I$, $c \in q_3 + I$ dan memenuhi $0 \neq abc \in (q_1 + I) \odot (q_2 + I) \odot (q_3 + I) = q_4 + I \neq q_0 + I$ dengan elemen tunggal $q_0 \in Q$ sedemikian hingga $0 + I \subseteq q_0 + I$. Misal $abc = q_4 + i_2$ untuk suatu $i_2 \in I$. Karena P merupakan ideal perluasan subtraktif pada I dan $q_4 + i_2 \in P$ maka dapat diperoleh $q_4 \in P$ yang artinya $q_4 \in Q \cap P$ sehingga diperoleh $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) \odot (q_3 + I) = q_4 + I \in P/I_{(Q \cap P)}$. Karena $P/I_{(Q \cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing lemah pada $S/I_{(Q)}$ dan I ideal 2-

absorbing lemah pada S maka $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$ atau $(q_1 + I) \odot (q_3 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$ atau $(q_2 + I) \odot (q_3 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$.

- Untuk kasus $(q_1 + I) \odot (q_2 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$ maka terdapat $q_5 \in Q \cap P$ sedemikian hingga $ab \in (q_1 + I) \odot (q_2 + I) = q_5 + I$. Misal $ab = q_5 + i_1$ untuk $i_1 \in I$. Karena $q_5 \in P$ dan $i_1 \in I$ maka $ab \in P$. Terbukti bahwa P merupakan ideal 2-absorbing pada S.

- Untuk kasus $(q_1 + I) \odot (q_3 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$ maka terdapat $q_6 \in Q \cap P$ sedemikian hingga $ac \in (q_1 + I) \odot (q_3 + I) = q_6 + I$. Misal $ac = q_6 + i_2$ untuk $i_2 \in I$. Karena $q_6 \in P$ dan $i_2 \in I$ maka $ac \in P$. Terbukti bahwa P merupakan ideal 2-absorbing pada S.

- Untuk kasus $(q_2 + I) \odot (q_3 + I) \in P/I_{(Q \cap P)}$ maka terdapat $q_7 \in Q \cap P$ sedemikian hingga $bc \in (q_2 + I) \odot (q_3 + I) = q_7 + I \in P$. Misal $bc = q_7 + i_3$ untuk $i_3 \in I$. Karena $q_7 \in P$ dan $i_3 \in I$ maka $bc \in P$. Terbukti bahwa P merupakan ideal 2-absorbing pada S. Terbukti bahwa P merupakan ideal 2-absorbing pada S.

Berikut ini merupakan contoh mengenai teorema 4.3.3.

Contoh 4.3.3. Diberikan $I = \langle 4 \rangle$ merupakan Q-ideal pada semiring Z_0^+ dengan $Q = \{0,1,2,3\}$ sehingga dapat diperoleh semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)} = \{I, I+1, I+2, I+3\}$. Untuk ideal $I = \langle 4 \rangle$ dapat diperoleh ideal perluasan subtraktif $P = \langle 2 \rangle$ dari ideal I dengan $P \cap Q = \{0,2\}$.

(i). Untuk $P = \langle 2 \rangle$ merupakan ideal 2-absorbing lemah pada Z_0^+, sehingga diperoleh ideal 2-absorbing lemah $P/I_{(Q \cap P)}$ $=\{I,\ I+2\}$ pada semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)}$.

(ii). Ideal $I = \langle 4 \rangle$ merupakan ideal 2-absorbing pada Z_0^+ dan telah dijelaskan pada poin (i) bahwa $P/I_{(Q \cap P)}$ merupakan ideal 2-absorbing lemah pada semiring faktor $Z_0^+/I_{(Q)}$. Jelas bahwa $P = \langle 2 \rangle$ merupakan ideal 2-absorbing lemah pada semiring Z_0^+.

“Halaman ini sengaja dikosongkan.”

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari kajian pada bab – bab sebelumnya. Selain itu, pada bab ini juga akan diberikan saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Diperoleh bentuk umum $(I:r)$, $\sqrt{I}$, ideal irreducible I dan ideal 2-absorbing I pada semiring Z_0^+ dimana I merupakan ideal pada Z_0^+ yang dibangun oleh satu elemen.

2. Diperoleh karakteristik ideal 2-absorbing terkait dengan $(I:r)$ dan $\sqrt{I}$dari ideal I pada semiring S, ideal subtraktif dan ideal irreducible pada semiring S dan semiring regular serta ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dan semiring $S_1 \times S_2$.

3. Diperoleh hubungan ideal 2-absorbing pada semiring S dengan ideal 2-absorbing pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$ serta hubungan ideal 2-absorbing lemah pada semiring S dengan ideal 2-absorbing lemah pada semiring faktor $S/I_{(Q)}$.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini belum dibahas mengenai contoh ideal 2-absorbing lemah, karakteristik ideal n-absorbing dan ideal n-absorbing lemah pada semiring komutatif S.

Diharapkan pada penelitian selanjutnya di bahas mengenai hal – hal tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kumar, Pratibha. Dubey, M. K and Sarohe, Poonam.: Some results on 2-absorbing ideals in commutative semirings, JMA No 38, (2015) 77-84.

[2] Vandiver H. S.: Note on a Simple type of Algebra in Which the Cancellation Law of Addition Does Not Hold, Bull. Amer. Math. Soc., 40(3), (1934) 916 – 920.

[3] Anderson, D. D. and Smith, Eric: Weakly prime ideals, Houston J. Math., 29 (2003), 831 - 840.

[4] Badawi, A.: On 2-absorbing ideals of commutative rings, Bull Austral. Math. Soc., 75(2007), 417 - 429:

[5] Badawi, A. and Darani, A. Y.: On weakly 2-absorbing ideals of commutative rings, Houston J. Math., 39(2), (2013), 441 - 452:

[6] Chaudhari, J. N. and Bonde, D. R.: Ideal theory in quotient semirings, Thai J. Of Math., Vol.12, (2014), 95 - 101.

[7] Setyawati, D.W., Soleha, Rimadhany, R.(2014). "Bentuk – bentuk Ideal pada Semiring $(Z^{+}, +, .)$ dan Semiring $(Z^{+}, \oplus, \odot)$". Sains & Matematika Universitas Negeri Surabaya, Vol. 3, no. 1, Hal. 1-6.

[8] Darani, A. Y.: On 2-absorbing and weakly 2-absorbing ideals of commutative semirings, Kyungpook Math. J., 52(1), (2012), 91 – 97.

[9] Chaudhari, J.N., Bonde, D.R.(2014). Ideal Theory in Quotient Semirings. Thai Journal of Mathematics, Vol. 12, Hal. 95-101.

[10] Gupta V. & Chaudhari J.N.(2009). "Prime Ideals in Semirings". Bulletin of The Malaysian Mathematical Sciences Society, (2).

[11] Fraleigh, J.B. A First Course in Abstract Algebra 7th edition. (2002).Pearson Education, Inc.

[12] Silvestrov, Sergei. “Rings and fields”. Spring term 2011, Lecture 3.

[13] Subiono. “Aljabar : Sebagai suatu Pondasi Matematika”, versi 2.0.0.

LAMPIRAN

"Halaman ini sengaja dikosongkan."

LAMPIRAN

Biodata Penulis

Penulis memiliki nama lengkap Muhamad Suef, lahir di kota Surabaya, pada tanggal 28 Agustus 1994. Terlahir sebagai anak ketiga dari lima bersaudara. Sejak usia 5 tahun, penulis telah menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Bina Nurani Gayungan – Surabaya (1998 – 2000), MI Roudlotul Mustashlihin Masangan Kulon - Sukodono (2000 – 2006), SMP YPM Panjunan – Sukodono (2006 – 2009), dan SMA Khodijah Surabaya (2009 – 2012). Kemudian pada tahun 2012, penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya melalui jalur SNMPTN Tulis dengan NRP 12 12 100 058. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Analisis dan Aljabar. Adapun informasi lebih lanjut mengenai tugas akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email feusdammahum@gmail.com