TUGAS AKHIR – SM141501

EFISIENSI SISTEM BONUS MALUS PADA PERUSAHAAN ASURANSI MOBIL DI NEGARA HONGKONG, TAIWAN, DAN INDONESIA

LUSIANA DWI SETYANINGRUM
NRP 1211 100 036

Dosen Pembimbing
Endah Rokhmati MP, Ph.D
Drs. Sentot Didik S, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

FINAL PROJECT – SM141501

EFFICIENCY OF BONUS MALUS SYSTEM AT CAR INSURANCE COMPANY IN HONGKONG, TAIWAN, AND INDONESIA

LUSIANA DWI SETYANINGRUM
NRP 1211 100 036

Supervisor
Endah Rokhmati MP, Ph.D
Drs. Sentot Didik S, M.Si

Department Of Mathematics
Faculty Of Mathematics and Sciences
Sepuluh Nopember Institute Of technology
Surabaya 2015

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

LEMBAR PENGESAHAN

EFISIENSI SISTEM BONUS MALUS PADA PERUSAHAAN ASURANSI MOBIL DI NEGARA HONGKONG, TAIWAN, DAN INDONESIA

EFFICIENCY OF BONUS MALUS SYSTEM AT CAR INSURANCE COMPANY IN HONGKONG, TAIWAN, AND INDONESIA

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
LUSIANA DWI SETYANINGRUM
NRP. 1211 100 036

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	DosenPembimbing I,
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si	Endah Rokhmati M.P., Ph.D
NIP. 19600527 198701 1 001	NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Surabaya, Juli 2015

EFISIENSI SISTEM BONUS MALUS PADA PERUSAHAAN ASURANSI MOBIL DI NEGARA HONGKONG, TAIWAN, DAN INDONESIA

Name of Student	:	**Lusiana Dwi Setyaningrum**
NRP	:	**1211 100 036**
Jurusan	:	**Matematika**
Pembimbing	:	**Endah Rokhmati MP, Ph.D** **Drs. Sentot Didik S, M.Si**

Abstrak

Sistem Bonus Malus merupakan salah satu sistem penentuan premi dengan mempertimbangkan pengalaman mengemudi dari masing-masing pemegang polis dengan memberikan penalti kenaikan premi di tahun berikutnya jika terjadi klaim dan menurunkan premi di tahun selanjutnya jika tidak terjadi klaim. Pada sistem ini, teori Rantai Markov digunakan untuk menentukan perpindahan *level* premi di tiap periode akibat sejarah frekuensi klaim dari tertanggung tepat satu periode dibelakangnya. Hasil dari Tugas Akhir ini, diperoleh efisiensi dari sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan. Selain itu penerapan sistem Bonus Malus yang ada di Indonesia dengan persentase premi yang relatif rendah dibandingkan sistem yang ada di Hongkong dan Taiwan, menghasilkan efisiensi bernilai negatif pada rata-rata frekuensi klaim yang tinggi. Dengan demikian, penentuan batas *level* terendah persentase premi dalam sistem Bonus Malus sangatlah penting agar menghasilkan suatu nilai efisiensi yang seimbang. Nilai efisiensi yang seimbang menunjukkan tidak adanya pihak yang dirugikan dalam penerapan sistem Bonus Malus.

Kata kunci: Efisiensi, Frekuensi Klaim, Premi, Rantai Markov, Sistem Bonus Malus.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

EFFICIENCY OF BONUS MALUS SYSTEM AT CAR INSURANCE COMPANY IN HONGKONG, TAIWAN, AND INDONESIA

Name of Student : Lusiana Dwi Setyaningrum
NRP : 1211 100 036
Department : Mathematics
Supervisor : Endah Rokhmati MP, Ph.D
Drs. Sentot Didik S, M.Si

Abstract

Bonus Malus system is one of the premium determination system taking into account the experience of driving of each policyholder to penalize the increase in premiums in the next year in case of claims and lower premiums in the next year if there is no claim. In this system, the theory of Markov chain is used to determine the displacement of the premium level in each period due to the frequency of claims history of the insured exactly one period earlier. Results of this paper, we obtained the efficiency of systems Bonus Malus Hongkong and Taiwan. Furthermore Bonus Malus system implementation in Indonesia with a relatively low percentage of premiums compared to existing systems in Hongkong and Taiwan, generating efficiency is negative at an average frequency of claims is high. Thus, the determination of the percentage of premiums limits the lowest level in Bonus Malus system is essential in order to produce a value equal efficiency. A balanced efficiency values indicate that both the insurer and the insured did not suffer losses.

Keywords: *Efficiency, Frequency of claims, Premi, Markov chain, Bonus Malus System.*

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT karena atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan laporan Tugas Akhir dengan judul **“Efisiensi Sistem Bonus Malus Pada Perusahaan Asuransi Mobil Di Negara Hongkong, Taiwan, dan Indonesia”**.

Salah satu tujuan disusunnya laporan Tugas Akhir ini adalah untuk memenuhi sebagian persyaratan dalam mencapai jenjang Sarjana Sains dari Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik dan lancar berkat doa, dukungan dan kerja sama dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS yang memberikan dukungan serta kemudahan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
2. Ibu Endah Rokhmati M. P., Ph.D dan Bapak Drs. Sentot Didik S, M.Si selaku dosen pembimbing yang senantiasa meluangkan waktunya guna memberikan ilmu, nasihat dan motivasi dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
3. Dra. Farida Agustini Widjajati, MS dan Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes selaku dosen penguji ujian Tugas Akhir.
4. Bapak Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si selaku dosen wali penulis yang selalu memberi semangat, motivasi, membimbing dan mengarahkan penulis dalam merencanakan studi di Jurusan Matematika ITS.
5. Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp. selaku Kaprodi S1.
6. Semua Bapak dan Ibu Dosen Pengajar serta para staf Jurusan Matematika FMIPA ITS yang telah sabar dalam memberikan ilmu dan bantuan kepada penulis selama masa perkuliahan.

7. Kedua orang tua yang selalu memberikan semangat, kasih sayang dan doanya kepada penulis demi kelancaran Tugas Akhir ini.
8. Kakak Dita, adik Ferry, serta keluarga besar kakek Radin dan kakek Sokran yang sabar dan selalu memberikan nasihat kepada penulis.
9. Saudara Genggong tercinta : Faing, Wanda, Datul, Koboi, Ujak, Hesti, Zebri, Toni, Zamroji, Yongki, dan Isman yang selalu memberikan dorongan dan motivasi kepada penulis.
10. Teman-teman kos: Yani, Aya, Rizka, Anggun, Faiq, dan Farah yang sama-sama berjuang mendapat gelar sarjana dan selalu memberi motivasi kepada penulis dalam segala hal.
11. Singgih, Handi, Yahya, Fendi, Bundo, Heri dan teman-teman kontrakan Kejawan Gebang yang selalu memberikan semangat dan motivasi serta banyak membantu dalam pengerjaan Tugas Akhir penulis.
12. Teman-teman seperjuangan Matematika ITS 2011 yang telah banyak memberikan motivasi dan bantuan kepada penulis agar dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini, semoga kesuksesan dan keberuntungan selalu menyertai. Amin

Dan berbagai pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah SWT membalas semua kebaikan yang telah dilakukan. Apabila dalam penulisan Tugas Akhir ini masih terdapat banyak kekurangan, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak yang sifatnya membangun sebagai bahan perbaikan di masa mendatang. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Hal

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR GAMBAR

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR SIMBOL

l_i	: *Level* premi ke-i
r_{l_i}	: Biaya premi yang dibayarkan pada *level* ke-i
P_k	: Fungsi probabilitas distribusi Poisson
ϑ	: Rata-rata frekuensi klaim dalam satu periode
k	: Banyak klaim dalam satu periode
$T(k)$	: Matriks transformasi
$P_{l_i l_j}$	: Probabilitas transisi dari $level$ ke-i ke *level* ke-j
$t_{l_i l_j}(k)$	: Transformasi dari $level$ ke-i ke *level* ke-j
$P(\vartheta)$	: Matriks probabilitas Rantai Markov
$\bar{r}(\vartheta)$	: Rata-rata premi stasioner
π_j	: Distribusi probabilitas stasioner
$E_{ff_{Loi}}(\vartheta)$	: Efisiensi sistem Bonus Malus

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatarbelakangi permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Kemudian akan disusun ke dalam suatu rumusan masalah yang akan dijabarkan batasan masalahnya untuk mendapatkan tujuan dan manfaat yang diperoleh. Adapun sistematika penulisan diuraikan pada akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang Masalah

Akhir-akhir ini perkembangan dunia asuransi mengalami peningkatan yang begitu pesat. Banyak sekali perusahaan asuransi yang menawarkan pelayanan mulai dari asuransi jiwa, asuransi kesehatan, asuransi pendidikan sampai asuransi untuk kecelakaan mobil. Tingkat kecelakaan mobil yang sering terjadi saat ini membuat masyarakat lebih berhati-hati dan waspada terhadap resiko yang akan terjadi dengan mengikuti asuransi yang ditawarkan oleh perusahaan-perusahaan asuransi kecelakaan. Berbagai sistem ditawarkan untuk menarik minat banyak orang supaya menjadi pemegang polis pada perusahaan asuransi tersebut. Salah satu sistem yang ditawarkan oleh perusahaan asuransi mobil adalah sistem Bonus Malus.

Sistem Bonus Malus merupakan sistem penilaian jasa yang digunakan di sebagian besar Eropa, Asia, Amerika Latin dan Afrika [1]. Sistem Bonus Malus merupakan salah satu sistem penentuan premi dengan mempertimbangkan pengalaman mengemudi dari masing-masing pemegang polis dengan memberikan penalti kenaikan premi di tahun berikutnya jika terjadi klaim dan menurunkan premi di tahun selanjutnya jika tidak terjadi klaim [1]. Aturan yang digunakan dalam sistem Bonus Malus untuk penentuan premi akibat besarnya klaim adalah berbeda-beda di tiap negara. Hal ini tergantung pada tingkat ekonomi masing-masing negara.

Namun semua sistem ini memiliki tujuan yang sama yaitu memberi jaminan dengan tarif yang adil dengan menyesuaikan premi dari setiap pemegang polis individu dengan sebaik mungkin terhadap resiko yang benar-benar mewakili. Negara-negara yang menggunakan sistem Bonus Malus adalah Jepang, Hongkong, Malaysia-Singapura, Taiwan, Thailand, Belgia, Brazil, Perancis, Jerman, Finlandia, Italia, Luxemburg, Belanda, Norwegia, Portugal, Spanyol, Swedia, Swiss, Inggris [2].

Sistem Bonus Malus yang digunakan oleh perusahaan asuransi mobil ini tentu akan memberikan dampak bagi pemegang polis maupun perusahaan asuransi mobil itu sendiri. Dampak itu bisa berupa suatu keuntungan atau bisa jadi merupakan suatu kerugian yang harus ditanggung dari sisi pemegang polis maupun dari perusahaan asuransi itu sendiri. Untuk mengukur seberapa baik sistem Bonus Malus ini memenuhi persyaratan bahwa akan memberi jaminan yang seadil-adilnya, maka akan diteliti tentang efisiensi dari sistem Bonus Malus berdasarkan rata-rata premi stasioner dan rata-rata frekuensi klaim pada perusahaan asuransi mobil di negara Hongkong, Taiwan dan Indonesia. Sehingga dengan adanya efisiensi, dapat diketahui suatu sistem Bonus Malus yang ideal dari sudut pandang pemegang polis dan dari perusahaan asuransi mobil yang menjalankan sistem tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, permasalahan yang dibahas adalah bagaimana efisiensi dari suatu sistem Bonus Malus pada perusahaan asuransi mobil di negara Hongkong, Taiwan dan Indonesia.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah :

1. Rata-rata frekuensi klaim yang diajukan oleh pemegang polis berdistribusi Poisson dengan parameter ϑ.
2. Diasumsikan ϑ konstan sepanjang waktu.

1.4 Tujuan

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah menghitung dan menentukan efisiensi suatu sistem Bonus Malus pada perusahaan asuransi mobil di negara Hongkong, Taiwan, dan Indonesia.

1.5 Manfaat

Manfaat dari Tugas Akhir ini antara lain :

1. Sebagai bahan pengetahuan tambahan bagi pembaca dan penulis mengenai sistem Bonus Malus yang digunakan pada perusahaan asuransi mobil di negara Hongkong, Taiwan dan Indonesia.
2. Dapat mengetahui efisiensi dari sistem Bonus Malus pada perusahaan asuransi mobil di negara Hongkong, Taiwan dan Indonesia.
3. Dapat mengetahui sistem Bonus Malus yang ideal dari sudut pandang pemegang polis maupun dari sudut pandang perusahaan asuransi.

1.6 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini secara keseluruhan terdiri dari lima bab dan lampiran. Secara garis besar masing-masing bab akan membahas hal-hal berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai asuransi khususnya asuransi mobil, sistem Bonus Malus, dan penentuan efisiensi sistem Bonus Malus. Selain itu, bab ini juga berisikan materi-materi pendukung antara lain proses stokastik dengan metode Rantai Markov Waktu Diskrit, distribusi Poisson, penentuan nilai eigen dan vektor eigen, dan lain-lain.

BAB III METODE PENELITIAN

Dalam bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang akan dilakukan. Tahapan-tahapan tersebut antara lain studi literatur, penentuan perpindahan *level* tarif kelompok premi sistem Bonus Malus, penentuan premi stasioner. Kemudian dilanjutkan dengan penentuan efisisensi sistem Bonus Malus. Selanjutnya dilakukan analisis mengenai efisiensi sistem Bonus Malus di negara Hongkong, Taiwan dan Indonesia. Tahap terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas secara detail mengenai penentuan perpindahan *level* tarif kelompok premi sistem Bonus Malus, penentuan premi stasioner, penentuan efisiensi sistem Bonus Malus serta penjelasan mengenai hasil analisa yang diperoleh.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan akhir serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai asuransi khususnya asuransi mobil, sistem Bonus Malus, dan penentuan efisiensi sistem Bonus Malus. Selain itu, bab ini juga berisikan materi-materi yang mendukung, antara lain proses stokastik dengan metode Rantai Markov Waktu Diskrit, distribusi Poisson, penentuan nilai eigen dan vektor eigen, dan lain-lain.

2.1 Penelitian Terdahulu

Rensy Ermawaty sebelumnya telah meneliti tentang efisiensi dari suatu sistem Bonus Malus negara Swiss berdasarkan penghitungan sebaran stasioner dan nilai maksimal efisiensi asimtotik. Sistem Bonus Malus negara Swiss mengalami perubahan aturan perpindahan *level*. Pada sistem Bonus Malus yang baru untuk setiap laporan kecelakaan, kenaikan *level* berubah menjadi empat *level* yang semula hanya tiga *level* [3]. Kemudian nilai dari efisiensi dibandingkan antara sistem Bonus Malus negara Swiss yang baru dengan sistem Bonus Malus yang lama, sehingga dihasilkan bahwa sistem Bonus Malus negara Swiss yang lama lebih efisien dibandingkan sistem Bonus Malus yang baru.

Penelitian tentang efisiensi sistem Bonus Malus juga dilakukan oleh Supandi. Penelitian tersebut membahas mengenai pengaruh perubahan besar premi awal terhadap nilai efisiensi dari sistem Bonus Malus negara Brasil. Dalam menentukan efisiensi dari sistem Bonus Malus dengan menggunakan distribusi stasioner dari rantai Markov. Distribusi stasioner ini digunakan untuk menentukan premi stasioner. Untuk dapat meningkatkan efisiensi dari sistem Bonus Malus terdapat dua faktor penting yaitu dengan mengubah premi sehingga perbandingan premi tertinggi dan paling rendah menjadi lebih besar. Perubahan premi akan menghasilkan nilai efisiensi dari sistem Bonus Malus yang lebih bervariasi sehingga akan dapat diketahui kecenderungan pihak yang mengasuransikan kendaraan bermotornya berada di frekuensi klaim mana akan berhati-hati. Pada umumnya untuk sistem Bonus Malus negara Brasil diawal masuk asuransi [4].

2.2 Asuransi

Asuransi secara umum dapat diartikan sebagai persiapan yang dibuat oleh sekelompok orang yang masing-masing menghadapi kerugian kecil sebagai suatu yang tidak dapat diduga. Apabila kerugian itu menimpa salah seorang dari mereka yang menjadi anggota perkumpulan itu maka kerugian itu akan ditanggung bersama oleh mereka [5].

2.3 Asuransi Mobil

Asuransi mobil merupakan asuransi yang melindungi konsumen dari resiko kecelakaan. Pada umumnya perusahaan-perusahaan asuransi mobil di dunia telah mewajibkan [6]:

1. *Third party only (TPO),* asuransi jenis ini hanya melindungi pemegang polis dari resiko kerusakan akibat kecelakaan yang disebabkan oleh pihak ketiga, kecelakaan (*injury*) pada pengemudi pihak ketiga, penumpang yang ikut bersama dengan kendaraan si pemegang polis.
2. *Third party, fire, and theft (TPFT),* asuransi ini memberikan manfaat kepada pihak pemegang polis terhadap resiko kebakaran, kerusakan akibat sesuatu yang berhubungan dengan listrik, ledakan, pencurian, percobaan pencurian, dan pencurian lainnya (*taking without consent*).
3. *Comprehensive car insurance,* asuransi ini memberikan manfaat untuk semua resiko (*all risk*).

2.4 Sistem Bonus Malus

Sistem Bonus Malus merupakan sistem penilaian jasa yang digunakan di sebagian besar Eropa, Asia, Amerika Latin dan Afrika [1]. Sistem Bonus Malus merupakan salah satu sistem penentuan premi dengan mempertimbangkan pengalaman mengemudi dari masing-masing pemegang polis dengan memberikan penalti kenaikan premi di tahun berikutnya jika terjadi klaim dan menurunkan premi di tahun selanjutnya jika tidak terjadi klaim [1].

Sistem ini pertama kali diperkenalkan di Eropa yang kemudian dikembangkan oleh Delaporte, Bichsel dan Buhlman [1]. Setiap negara memiliki sistem Bonus Malus yang berbeda. Hal ini tergantung pada tingkat ekonomi masing-masing negara. Negara-negara yang sudah menggunakan sistem Bonus Malus adalah Jepang, Hongkong, Malaysia-Singapura, Taiwan, Thailand, Belgia, Brazil, Perancis, Jerman, Finlandia, Italia, Luxemburg, Belanda, Norwegia, Portugal, Spanyol, Swedia, Swiss, Inggris [2]. Sistem Bonus Malus digunakan ketika [1] :

1. Para tertanggung dari tarif kelompok yang diberikan dapat dibagi menjadi *level* yang terbatas, dinotasikan dengan l_i dengan $i = 1,2,\dots,r$.
2. *Level* awal untuk pemegang polis berada di l_{i_o} .
3. Penentuan *level* pembayaran premi berdasarkan pada *level* di periode sebelumnya dan jumlah klaim yang dilaporkan di tiap periode.

Sistem Bonus Malus ditentukan oleh tiga unsur yaitu [1] :

1. Biaya premi yang dibayarkan $\bar{r}_{l_i} = (r_1, r_2, \dots, r_r)$.
2. *Level* awal untuk pemegang polis dalam asuransi dinotasikan dengan l_{i_o}.
3. Menggunakan aturan transisi untuk menentukan perpindahan *level* akibat adanya frekuensi klaim.

2.5 Distribusi Poisson

Distribusi Poisson merupakan satu dari model terpenting dalam asuransi kecelakaan mobil. Dalam kasus ini, distribusi Poisson memberikan performansi yang lebih baik untuk *portfolio lost count* daripada distribusi *Negative Binomial* dan distribusi *Poisson-Invers Gaussian* [1]. Rata-rata frekuensi klaim yang diajukan dalam asuransi diasumsikan berdistribusi Poisson dengan parameter ϑ. Fungsi probabilitas dari distribusi Poisson dengan rata-rata ϑ adalah [7].

$$P_k(\vartheta) = \frac{\vartheta^k}{k!}\exp(-\vartheta), \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.1}$$

dengan

ϑ : rata-rata frekuensi klaim dalam satu periode
k : banyak klaim dalam satu periode
$k!$: $k\ (k-1)\ (k-2)\ldots 1$.

2.6 Proses Stokastik

Proses stokastik adalah sekumpulan atau himpunan dari peubah acak atau *variabel random* [6]. Suatu proses stokastik $L_t(s)$ adalah himpunan atau koleksi dari peubah acak. $\{L_t(s): t \in T, s \in S\}$ dengan T adalah himpunan indeks disebut *parameter space* dan S adalah ruang *sample* dari peubah acak disebut *state space*. Jadi untuk tiap t tertentu, $L_t(s)$ dinyatakan suatu peubah acak yang didefinisikan pada S dan untuk tiap s tertentu, $L_t(s)$ berhubungan dengan fungsi yang didefinisikan pada T yang disebut lintasan *sample* atau *sample path* [8].

2.6.1 Rantai Markov Waktu Diskrit

Proses stokastik untuk waktu diskrit, $\{L_n, n = 0,1,2,3,\ldots\}$ dimana peubah acak L_n adalah peubah acak diskrit yang didefinisikan pada *state space* yang berhingga terhitung atau tak terhingga terhitung.

Proses stokastik Markov adalah suatu proses stokastik dimana kelakuan atau perilaku yang akan datang dari sistem hanya bergantung pada keadaan sekarang dan tidak bergantung pada keadaan yang lalu, atau dapat dikatakan hanya bergantung pada keadaan satu langkah ke belakang [8].

Suatu proses stokastik dengan waktu diskrit pada *state space* S dikatakan mempunyai "sifat Markov" atau Rantai Markov Waktu Diskrit (DTMC) jika

$$P_r = (L_{n+1} = l_{n+1} | \; L_0 = l_0, L_1 = l_1, \dots, L_n = l_n) = \Pr(L_{n+1} = l_{n+1} | \; L_n = l_n)$$

atau

$$P_r\big(L_{n+1} = l_j \,|\, L_n = l_i, L_{n-1}, \dots, L_0\big) = P_r\big(L_{n+1} = l_j \,|\, L_n = l_i\big). \quad (2.2)$$

Suatu DTMC dikatakan homogen/stasioner terhadap waktu jika untuk setiap $n = 0,1,2,\dots$ didapat suatu rumusan [8] :

$$P_r\big(L_{n+1} = l_j \,|\, L_n = l_i\big) = P_r\big(L_1 = l_j \,|\, L_0 = l_i\,\big). \quad (2.3)$$

2.6.2 Aturan Transisi Rantai Markov

Aturan transisi rantai Markov dapat diperkenalkan sebagai transformasi $T(k)$, sehingga $T_k(l_i) = l_j$ jika polis tersebut dipindahkan dari *level* l_i ke *level* l_j saat k klaim telah dilaporkan [5]. Istilah $T(k)$ dapat ditulis dalam bentuk matriks [9] :

$$T(k) = (t_{l_i l_j}(k)) \quad (2.4)$$

dengan:

$$t_{l_i l_j}(k) = \begin{cases} 1, & \text{jika polis bergerak dari level i ke level j} \\ 0, & \text{jika polis bergerak dari level i ke selain } level \text{ j} \end{cases}$$

$T(k)$: matriks transformasi dari *level* i ke *level* j saat k klaim terjadi

$t_{l_i l_j}(k)$: transformasi dari *level* i ke *level* j saat k klaim terjadi

k : banyak klaim dalam satu periode

l_i : *level* ke-i, $i = 1,2,\dots,r$

l_j : *level* ke-j, $j = 1,2,\dots,r$.

2.6.3 Probabilitas Transisi Rantai Markov

Probabilitas transisi rantai Markov $P_{l_i l_j}(\vartheta)$ merupakan probabilitas transisi dari *level* l_i ke *level* l_j saat k klaim telah dilaporkan dengan parameter ϑ sehingga diperoleh suatu rumusan [9] :

$$P_{l_i l_j}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)\, t_{l_i l_j}(k) \qquad (2.5)$$

dengan :

$P_{l_i l_j}(\vartheta)$: probabilitas transisi dari *level* l_i ke *level* l_j dengan parameter ϑ

ϑ : rata-rata frekuensi klaim

$P_k(\vartheta)$: probabilitas tertanggung dengan parameter ϑ dengan k klaim

$t_{l_i l_j}(k)$: transformasi dari *level* l_i ke *level* l_j dengan k klaim.

Matriks transisi dari rantai Markov $\{L_n, n > 0\}$ dengan *state space* $S = 0,1,2, \ldots$ dari probabilitas transisi 1-langkah $P_{l_i l_j}(\vartheta)$ dinyatakan dengan $P(\vartheta) = (\, P_{l_i l_j}(\vartheta))$ atau ditulis

$$\mathrm{P}(\vartheta) = \begin{bmatrix} P_{00}(\vartheta) & P_{01}(\vartheta) & P_{02}(\vartheta) & \cdots & P_{0r}(\vartheta) \\ P_{10}(\vartheta) & P_{11}(\vartheta) & P_{12}(\vartheta) \vdots & \ldots & P_{1r}(\vartheta) \\ \vdots & \vdots & & & \\ P_{l_i 0}(\vartheta) & P_{l_i 1}(\vartheta) & P_{l_i 2}(\vartheta) & \cdots & P_{l_i r}(\vartheta) \end{bmatrix}. \qquad (2.6)$$

Misal $P(\vartheta) = (P_{l_1 l_2}(\vartheta))$ matriks probabilitas transisi $r \times r$ dari DTMC $\{X_n, n > 0\}$ dengan *state space* $S = 1,2, \ldots, r$, sehingga [8] :

1. $(P_{l_i l_j}(\vartheta)) \geq 0 \qquad 0 \leq i,\ j \leq r$
2. $\sum_{j=1}^{r} P_{l_i l_j}(\vartheta) = 1 \qquad 1 \leq i \leq r,$

sehingga diperoleh matriks probabilitas rantai Markov [9]:

$$P(\vartheta) = \left[P_{l_i l_j}(\vartheta)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)\, T(k). \qquad (2.7)$$

Peluang atau probabilitas transisi n-langkah dinyatakan dengan $P_{l_i l_j}{}^{(n)}$ adalah peluang bergeraknya/ *transferring* dari *state* i ke *state* j dalam n langkah waktu

$$P_{l_i l_j}(\vartheta)^{(n)} = P_r\{L_n = l_j \mid L_0 = l_i\}. \quad (2.8)$$

Matriks transisi n langkah dinyatakan dengan $P(\vartheta)^{(n)} = (P_{l_i l_j}(\vartheta)^{(n)})$. Jika $n = 0$ dan $n = 1$ maka $P_{l_i l_j}(\vartheta)^{(n)} = P_{l_i l_j}$ dan

$$P_{l_i l_j}(\vartheta)^{(0)} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Jika nilai n disubtitusikan kedalam rumusan maka didapat:

1. $P(\vartheta)^{(1)} = P(\vartheta)$, $P(\vartheta)^0 = I$, $I =$ matriks identitas berukuran rxr.
2. $P(\vartheta)^{(2)} = P(\vartheta).P(\vartheta)$
3. $P(\vartheta)^{(n)} = P(\vartheta)^n$
4. $P(\vartheta)^{(n+m)} = P(\vartheta)^n.P^m$.

Diperoleh suatu hasil dari $P(\vartheta)^0 = 1$ dan $P(\vartheta)^1 = P(\vartheta)$, sehingga teorema terbukti benar untuk $n = 0{,}1$. Oleh sebab itu dimisalkan untuk $n \geq 2$ maka didapatkan [8] :

$$\begin{aligned} P_{l_i l_j}(\vartheta)^n &= P\big(L_n = l_j \mid L_0 = l_i\big) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} P_{l_i,l_k}{}^{(n-1)}\, P(L_n = l_j \mid L_{n-1} = l_k,\, L_0 = l_i) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} P_{l_i,l_k}{}^{(n-1)}\, P(L_n = l_j \mid L_{n-1} = l_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} P_{l_i,l_k}{}^{(n-1)}\, P(L_1 = l_j \mid L_0 = l_k) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} P_{l_i,l_k}{}^{(n-1)}\, P_{l_k,l_j}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Probabilitas transisi n langkah memenuhi persamaan yang dinamakan dengan persamaan Chapman Kolmogorov [8]:

$$P_{l_i,l_j}(\vartheta)^{(n+m)} = \textstyle\sum_{k=1}^{r} P_{l_i,l_k}{}^{(n)} P_{l_k,l_j}{}^{(m)}. \quad (2.10)$$

Bukti :

$$
\begin{aligned}
P\left(L_{n+m} = l_j \mid L_0 = l_i\right) &= \sum_{k=1}^{r} P\left(L_{n+m} = l_j \mid L_n = l_k, L_0 = l_i\right) P(L_n = l_k \mid L_0 \\
&= l_i) \\
&= \sum_{k=1}^{r} P\left(L_{n+m} = l_j \mid L_n = l_k\right) P(L_n = l_k \mid L_0 = l_i) \\
&= \sum_{k=1}^{r} P\left(L_m = l_j \mid L_0 = l_k\right) P(L_n = l_k \mid L_0 = l_i) \\
&= \sum_{k=1}^{r} P(L_n = l_k \mid L_0 = l_i) P\left(L_m = l_j \mid L_0 = l_k\right) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{r} P_{l_i,l_k}{}^{(n)} P_{l_k,l_j}{}^{(m)}. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

2.6.4 Limiting Behavior

Untuk Markov Chain yang regular yaitu *irreducible* dan aperiodik dapat ditunjukkan bahwa untuk $n \to \infty$, P_{ij} ada dan *independent* terhadap i. Jadi $\lim_{n\to\infty} P_{ij}{}^{(n)} = \pi_j = \pi_l$, dengan π_j tunggal dan memenuhi persamaan-persamaan berikut [8]:

1. $\pi_j(\vartheta) = \sum_{i=1}^{r} \pi_l(\vartheta) P_{lj}(\vartheta), \qquad j \in S$
2. $\sum_{j=1}^{r} \pi_j(\vartheta) = 1, \qquad j = 0,1,2,\dots,r.$

Vektor $\pi_j(\vartheta) = (\pi_1(\vartheta), \pi_2(\vartheta), \dots, \pi_r(\vartheta))$ disebut distribusi stasioner untuk Makov Chain dengan matriks transisi/stokastik P, bila

$$\pi_{j^*}(\vartheta) = \pi_l(\vartheta).P(\vartheta) \qquad (2.12)$$

$$\pi_j{}^*(\vartheta) = [\pi_1{}^*(\vartheta), \pi_2{}^*(\vartheta), \dots, \pi_r{}^*(\vartheta)]$$

adalah distribusi stasioner jika dan hanya jika memenuhi [8]:

1. $\pi_j{}^*(\vartheta) = \sum_{i=1}^{r} \pi_l{}^*(\vartheta) P_{lj} \qquad , j \in S$
2. $\sum_{j=1}^{r} \pi_j{}^*(\vartheta) = 1. \qquad (2.13)$

Suatu Rantai Markov Waktu Diskrit dikatakan *irreducible* jika setiap *state* bekomunikasi dengan *state* yang lain [8]. *State* i dan j dikatakan berkomunikasi jika *state* i *accessible* dari *state* j dan *state* j *accessible* dari *state* i [8].

State yang saling berkomunikasi merupakan salah satu dari sifat Rantai Markov. Selain itu terdapat sifat lain dari Rantai Markov yaitu periodik. Misal $\{X_n, n > 0\}$ adalah *irreducible* dengan *state space* $S = \{1,2,3, \ldots, r\}$ dan d adalah bilangan bulat terkecil sedemikian hingga $P_r(X_n = i \mid X_0 = i) > 0 \Rightarrow n$ bilangan bulat dengan kelipatan d untuk setiap $i \in S$. Suatu Rantai Markov Waktu Diskrit dikatakan periodik dengan periode d jika $d > 1$ dan aperiodik jika $d = 1$ [8].

2.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan A adalah suatu matriks bertipe $n \times n$ maka skalar λ disebut nilai eigen matriks A jika terdapat vektor tak nol x di R^n yang memenuhi berikut:

$$Ax = \lambda x. \tag{2.14}$$

Jika λ merupakan nilai eigen matriks A, maka vektor x di R^n yang memenuhi adalah $Ax = \lambda x$ disebut vektor eigen matriks A yang berkorespondensi dengan nilai eigen λ. Hal ini ekivalen dengan skalar λ yang merupakan nilai eigen matriks A jika ada vektor tak nol x di R^n yang memenuhi persamaan berikut [10] :

$$Ax = \lambda \, I \, x \tag{2.15}$$

atau ada vektor tak nol x di R^n yang memenuhi persamaan,

$$Ax - \lambda I \, x = 0. \tag{2.16}$$

Hal ini ekivalen dengan λ yang merupakan nilai eigen matriks A jika ada vektor tak nol x di R^n yang memenuhi persamaan berikut:

$$(A - \lambda I) \, x = 0, \tag{2.17}$$

dengan I merupakan matriks identitas berukuran $n \; x \; n$.

Mengingat $\det(A - \lambda I)$ merupakan polinomial berderajat n, maka dapat disimpulkan bahwa λ merupakan nilai eigen matriks A jika dan hanya jika λ merupakan akar dari persamaan $\det(A - \lambda I) = 0$. Persamaan ini disebut karakteristik dari A [10].

2.8 Efisiensi Loimaranta

Elastisitas dari suatu sistem Bonus Malus adalah mengukur adanya respon pemegang polis dan perusahaan asuransi terhadap perubahan frekuensi klaim yang diharapkan atau total keseluruhan klaim. Dengan mengharapkan bahwa pembayaran premi asuransi oleh pemegang polis untuk skala sistem Bonus Malus mengalami peningkatan pada frekuensi klaim yang diharapkan atau total keseluruhan klaim. Rata-rata dari peningkatan frekuensi klaim atau total keseluruhan klaim memiliki keterkaitan dengan konsep dari efisiensi. Efisiensi merupakan ketepatan cara dalam menjalankan sesuatu dengan tidak membuang waktu, tenaga, dan biaya [11]. Efisiensi sangat diperlukan oleh perusahaan asuransi mobil dalam menjalankan suatu sistem dengan baik dan benar.

Dalam asuransi mobil, efisiensi Loimaranta merupakan sebuah konsep asimtotik yang tidak bergantung pada level pembayaran premi yang sedang dipakai saat ini didalam sistem Bonus Malus [9].

Jika diketahui $\bar{r}(\vartheta)$ adalah rata-rata relatif premi stasioner yang telah dicapai untuk pemegang polis dengan frekuensi klaim yang diharapkan secara tahunan, sehingga diperoleh [9] :

$$\bar{r}(\vartheta) = \sum_{l=0}^{r} \pi_l(\vartheta) r_l \,. \tag{2.18}$$

Efisiensi Loimaranta $E_{ff_{Loi}}(\vartheta)$ kemudian didefinisikan sebagai elastisitas premi relatif yang disebabkan oleh sistem Bonus Malus, yaitu [9] :

$$E_{ff_{Loi}}(\vartheta) = \frac{d\bar{r}(\vartheta) / \bar{r}(\vartheta)}{d\vartheta / \vartheta}. \tag{2.19}$$

Perhitungan dari $E_{ff_{Loi}}(\vartheta)$ memerlukan penentuan turunan dari $\bar{r}(\vartheta)$ yang terkait dengan frekuensi klaim tahunan yang diharapkan ϑ. Rumus turunan diberikan sebagai berikut [9]:

$$\frac{d\bar{r}(\vartheta)}{d\vartheta} = \sum_{l=0}^{r} \frac{d\pi_l(\vartheta)}{d\vartheta} r_l \, . \qquad (2.20)$$

Setelah dilakukan penurunan rumus pada Persamaan (2.20), diperoleh hasil yang kemudian disubtitusikan pada rumus efisiensi Loimaranta pada Persamaan (2.19).

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis antara lain: studi literatur, penentuan perpindahan *level* tarif kelompok premi sistem Bonus Malus, penentuan premi stasioner, penentuan efisisensi sistem Bonus Malus, analisis mengenai efisiensi sistem Bonus Malus di negara Hongkong, Taiwan, Indonesia dan penarikan kesimpulan.

1. Studi Literatur

Tahap ini meliputi identifikasi permasalahan dan mempelajari lebih dalam mengenai asuransi mobil, sistem Bonus Malus, proses stokastik menggunakan Rantai Markov Waktu Diskrit, distribusi Poisson, nilai eigen dan vektor eigen.

2 Penentuan Perpindahan *Level* Tarif Kelompok Premi Sistem Bonus Malus

Pada tahap ini dilakukan penentuan perpindahan *level* tarif kelompok premi sistem Bonus Malus dengan menggunakan proses stokastik yaitu Rantai Markov Waktu Diskrit.

3 Penentuan Premi Stasioner Pada Sistem Bonus Malus

Dalam tahap ini dilakukan penentuan premi stasioner dengan membuktikan adanya nilai eigen bernilai satu pada matriks probabilitas transisi rantai Markov sehingga terbukti vektor eigen berdistribusi probabilitas stasioner.

4. Penentuan Efisiensi Sistem Bonus Malus

Pada tahap ini dilakukan penentuan efisiensi sistem Bonus Malus di negara Hongkong, Taiwan dan Indonesia. Penentuan efisiensi berdasarkan rata-rata premi stasioner dan frekuensi klaim yang diharapkan.

5. Analisis Mengenai Efisiensi Sistem Bonus Malus Pada Perusahaan Asuransi Mobil Di Negara Hongkong, Taiwan, dan Indonesia.

Pada tahap ini dilakukan analisis mengenai efisiensi sistem Bonus Malus di negara Hongkong, Taiwan dan Indonesia sehingga akan diketahui sistem Bonus Malus yang ideal dari sudut pandang pemegang polis dan dari perusahaan asuransi mobil.

6. Penarikan Kesimpulan

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil yang telah diperoleh.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai penentuan perpindahan *level* tarif kelompok premi sistem Bonus Malus, penentuan premi stasioner, penentuan efisiensi sistem Bonus Malus, dan analisis mengenai efisiensi sistem Bonus Malus di negara Hongkong, Taiwan, dan Indonesia. Pembahasan dimulai dengan menentukan perpindahan *level* tarif kelompok premi sistem Bonus Malus dengan menggunakan proses stokastik dengan metode Rantai Markov Waktu Diskrit. Kemudian dilanjutkan dengan pembuktian nilai eigen dan vektor eigen untuk penentuan premi stasioner. Setelah itu akan diperoleh efisiensi sistem Bonus Malus. Diakhir pembahasan akan diberikan analisis mengenai efisiensi sistem Bonus Malus di negara Hongkong, Taiwan, dan Indonesia.

4.1 Sistem Bonus Malus Di Negara Hongkong dan Taiwan

Negara Hongkong dan Taiwan memiliki aturan sistem Bonus Malus yang berbeda dikarenakan memiliki tingkat ekonomi yang berbeda. Penarikan pembayaran tarif didalam asuransi, dalam hal ini adalah asuransi mobil bahwa setiap pemegang polis akan dikenakan premi yang sesuai dengan resiko sehingga harga premi benar-benar mewakili. Resiko ini ditentukan dari sejumlah besar faktor resiko. Beberapa diantaranya seperti jenis dan tipe mobil yang digunakan dapat dipertimbangkan terlebih dahulu untuk tarif premi dan memungkinkan untuk memisahkannya sesuai dengan kelompok yang berbeda-beda sesuai dengan kelompok resiko yang memiliki struktur resiko yang lebih homogen. Faktor-faktor lain yang tidak dapat diperhitungkan dari suatu *prior* atau pengalaman terdahulu dikarenakan terlalu sulit untuk diamati atau untuk kepentingan sosial dan alasan psikologis atau hanya karena tidak tahu semua faktor yang mempengaruhi adanya resiko. Karena masih ada faktor rawan kecelakaan yang berbeda didalam kelompok resiko maka seiring dengan perjalanan waktu akan tercermin oleh adanya pengalaman klaim individu dari resiko. Oleh karena itu salah satu yang dapat membawa perhitungan *posteriori* atau perhitungan berikutnya dengan faktor resiko diabaikan melalui metode pengalaman peringkat individu yaitu dengan sistem Bonus Malus.

4.1.1 Sistem Bonus Malus Hongkong

Sistem Bonus Malus Hongkong memiliki 6 *level* premi dan premi yang harus dibayarkan oleh setiap pemegang polis tergantung pada *level*, dimana mereka berada. Setiap tahunnya akan ada perubahan *level* setiap pemegang polis yang ditentukan oleh *level* sebelumnya dan banyaknya kecelakaan yang terjadi dalam jangka waktu tersebut. Pada Tabel (4.1) menunjukkan neraca premi dari persentase premi yang dibayarkan dengan premi dasar pada *level* 6 [2].

Tabel 4.1 Neraca Premi (%) Sistem Bonus Malus Hongkong

Level (l_i)	Premi (r_{l_i})	*Level* premi setelah banyak klaim		
		0	1	≥2
6	100	5	6	6
5	80	4	6	6
4	70	3	6	6
3	60	2	6	6
2	50	1	4	6
1	40	1	3	6

Data Tabel (4.1) menunjukkan bahwa :

1. Terdapat 6 *level* premi pada sistem Bonus Malus Hongkong mulai dari *level* $1,2,\dots,6$. Bisa dikatakan bahwa *level* 1 adalah *level* superbonus dan *level* 6 adalah *level* supermalus.

2. *Level* pembayaran premi dengan $r_{l_i} = (r_1, r_2, \dots, r_6)$ dengan asumsi bahwa $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_6$.
3. Setiap pemegang polis yang baru masuk pada sistem akan ditempatkan pada *level* 6 dengan pembayaran premi dasar (100%) untuk tahun pertama atau periode pertama.
4. Pada sistem Bonus Malus ini, apabila ditahun sebelumnya seorang pemegang polis tidak mengajukan klaim, maka akan terjadi penurunan *level* sebanyak satu untuk periode selanjutnya.
5. Apabila seorang pemegang polis melakukan kecelakaan dan mengajukan klaim di periode saat ini maka akan ada kenaikan *level* premi di periode selanjutnya.

4.1.2 Sistem Bonus Malus Taiwan

Sistem Bonus Malus Taiwan memiliki 9 *level* premi dan premi yang harus dibayarkan oleh setiap pemegang polis tergantung pada *level* mereka berada. Tiap tahun perubahan *level* setiap pemegang polis hanya ditentukan oleh *level* sebelumnya dan banyaknya kecelakaan yang terjadi dalam jangka waktu tersebut. Pada Tabel (4.2) menunjukkan neraca premi dari persentase premi yang dibayarkan dengan premi dasar pada *level* 4 [2].

Data Tabel (4.2) menunjukkan bahwa :

1. Terdapat 9 *level* premi pada sistem Bonus Malus Taiwan mulai dari *level* $1,2,\dots,9$. Bisa dikatakan bahwa *level* 1 adalah *level* superbonus dan *level* 9 adalah *level* supermalus.
2. *Level* pembayaran premi $r_l = (r_1, r_2, \dots, r_9)$ dengan asumsi bahwa $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_9$.
3. Setiap pemegang polis yang baru masuk pada sistem akan ditempatkan pada *level* 9 dengan pembayaran premi dasar (100%) untuk tahun pertama atau periode pertama.
4. Pada sistem Bonus Malus ini, apabila ditahun sebelumnya seorang pemegang polis tidak mengajukan klaim maka

akan terjadi penurunan *level* sebanyak satu untuk periode selanjutnya.

5. Apabila seorang pemegang polis melakukan kecelakaan dan mengajukan klaim di periode saat ini maka akan ada kenaikan *level* premi di periode selanjutnya.

Tabel 4.2 Neraca Premi (%) Sistem Bonus Malus Taiwan

Level (l_i)	Premi (r_{l_i})	*Level* premi setelah banyak klaim					
		0	1	2	3	4	≥5
9	150	3	5	6	7	8	9
8	140	3	5	6	7	8	9
7	130	3	5	6	7	8	9
6	120	3	5	6	7	8	9
5	110	3	5	6	7	8	9
4	100	3	5	6	7	8	9
3	80	2	5	6	7	8	9
2	65	1	5	6	7	8	9
1	50	1	5	6	7	8	9

4.2 Penentuan Perpindahan *Level* Tarif Kelompok Premi Sistem Bonus Malus

Penentuan perpindahan *level* tarif kelompok premi sistem Bonus Malus dengan meggunakan aturan transisi Rantai Markov pada sistem Bonus Malus Hongkong dan sistem Bonus Malus Taiwan yang diberikan kedalam bentuk probabilitas $t_{l_il_j}(k); i,j \in \{1,2,\dots,r\},\ k \in \{0,1,2,\dots\}$ dimana $t_{l_il_j}(k) = 1$ jika resiko dari *level* i berpindah ke *level* j ketika k klaim telah terjadi pada periode sebelumnya dan $t_{l_il_j}(k) = 0$ jika resiko tersebut berpindah ke *level* yang berbeda dari j. Dalam aturan transisi yang lengkap dan bebas dari kontradiksi harus memiliki suatu aturan untuk setiap (i,k) ada satu dan hanya satu j sehingga $t_{l_il_j}(k) = 1$.

4.2.1 Aturan Transisi Rantai Makov Sistem Bonus Malus Hongkong

Pada Tabel (4.1) telah ditunjukkan neraca premi (%) sistem Bonus Malus Hongkong. Dalam sistem Bonus Malus Hongkong tersebut terdapat 6 *level* dengan premi yang harus dibayarkan beserta banyak klaim yang diajukan. Perpindahan *level* yang terjadi pada setiap periode menyebabkan pemegang polis harus membayar sejumlah premi yang berbeda-beda tergantung pada klaim yang diajukan saat ini. Misal pada sistem Bonus Malus Hongkong, seseorang yang baru mendaftar asuransi mobil untuk pertama kalinya harus berada pada *level* awal yaitu berada pada *level* 6. Pada *level* tersebut pemegang polis harus membayar premi penuh yaitu 100% dari harga premi. Apabila ditahun pertama pemegang polis mendaftar dan sama sekali tidak melakukan klaim maka pemegang polis akan mengalami penurunan *level* premi pada periode berikutnya. Pada kasus yang berbeda apabila pemegang polis mengajukan klaim pada perode saat ini, maka akan ada kenaikan tarif *level* kelompok premi pada periode selanjutnya. Perpindahan *level* tarif kelompok premi ini telah diatur oleh suatu aturan transisi. Aturan transisi pada sistem Bonus Malus ini dapat ditampilkan dalam bentuk transformasi $T(k)$.

Pada sistem Bonus Malus Hongkong, aturan transisi dalam bentuk matriks transformasi yang sesuai dengan Persamaan (2.4) adalah sebagai berikut :

1. Jika $k = 0$ maka $T(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Jika $k = 1$ maka $T(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Jika $k = 2$ maka $T(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

4.2.2 Penentuan Perpindahan *Level* Tarif Kelompok Premi Sistem Bonus Malus Taiwan

Lain halnya dengan sistem Bonus Malus Hongkong, sistem Bonus Malus Taiwan memiliki aturan transisi yang berbeda. Pada Tabel (4.2) telah ditunjukkan neraca premi (%) sistem Bonus Malus Taiwan. Dalam sistem Bonus Malus Taiwan tersebut terdapat 9 *level* dengan premi yang harus dibayarkan beserta banyak klaim yang diajukan. Perpindahan *level* yang terjadi pada setiap periode menyebabkan pemegang polis harus membayar sejumlah premi yang berbeda-beda tergantung pada klaim yang diajukan saat ini. Pada sistem Bonus Malus Taiwan, seseorang yang baru mendaftar asuransi mobil untuk pertama kalinya harus berada pada *level* awal yaitu berada pada *level* 4. Pada *level* tersebut pemegang polis harus membayar premi penuh yaitu 100% dari harga premi. Apabila ditahun pertama pemegang polis mendaftar dan sama sekali tidak melakukan klaim maka pemegang polis akan mengalami penurunan *level* premi pada periode berikutnya. Pada kasus yang berbeda apabila pemegang polis mengajukan klaim pada perode saat ini, maka akan ada kenaikan tarif *level* kelompok premi pada periode selanjutnya. Perpindahan *level* tarif kelompok premi ini telah diatur oleh suatu aturan transisi.

Aturan transisi pada sistem Bonus Malus ini dapat ditampilkan dalam bentuk transformasi $T(k)$ pada Persamaan (2.4).

Pada sistem Bonus Malus Taiwan, aturan transisi dalam bentuk matriks transformasi adalah sebagai berikut :

1. Jika $k = 0$ maka

$$T(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Jika $k = 1$ maka

$$T(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Jika $k = 2$ maka

$$T(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Jika $k = 3$ maka

$$T(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Jika $k = 4$ maka

$$T(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Jika $k = 5$ maka

$$T(5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.3 Penentuan Premi Stasioner Pada Sistem Bonus Malus

Dalam tahap ini untuk menentukan suatu premi yang stasioner dari sistem Bonus Malus diperlukan penentuan adanya probabilitas transisi pada sistem Bonus Malus. Kemudian akan didapatkan suatu matriks transisi dari probabilitas sistem Bonus Malus yang nantinya akan dibuktikan terdapat nilai eigen sama dengan satu sehingga terbukti untuk vektor eigen berdistribusi stasioner.

4.3.1 Probabilitas Transisi Rantai Markov Sistem Bonus Malus

Untuk setiap nomor klaim dari sistem Bonus Malus yaitu $N_1, N_2, N_3, \dots N_r$ adalah independen dan berdistribusi $Poi(\vartheta)$. $P_{l_1,l_2}(\vartheta)$ merupakan probabilitas perpindahan dari *level* l_1 ke *level* l_2 untuk pemegang polis dengan rata-rata frekuensi klaim ϑ pada setiap tahun, sehingga diperoleh :

$$P_{l_1,l_2}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_r[L_{n+1}(\vartheta) = l_2 \mid N_{n+1} = n, l_n(\vartheta) = l_1] P_r[N_{n+1} = k \mid l_n(\vartheta) = l_1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k). \qquad (4.1)$$

Sesuai dengan Persamaan (4.1), diperoleh probabilitas transisi melalui aturan transisi perpindahan *level* tarif kelompok premi sistem Bonus Malus Hongkong. Pada sistem Bonus Malus Hongkong terdapat 6 *level* premi dengan probabilitas transisi sebagai berikut :

Untuk $l_1 = 1$ dan $l_2 = 1$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{11}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{11}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{11}(1) + \frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{11}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{11}(0) + P_1(\vartheta) t_{11}(1) + P_2(\vartheta) t_{11}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{11}(k).$$

Untuk $l_1 = 1$ dan $l_2 = 2$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{12}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{12}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{12}(1) + \frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{12}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{12}(0) + P_1(\vartheta) t_{12}(1) + P_2(\vartheta) t_{12}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{12}(k).$$

⋮

Untuk $l_1 = 1$ dan $l_2 = 6$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{16}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{16}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{16}(1) +$$
$$\frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{16}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{16}(0) + P_1(\vartheta) t_{16}(1) + P_2(\vartheta) t_{16}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{16}(k).$$

Untuk $l_1 = 2$ dan $l_2 = 1$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{21}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{21}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{21}(1) +$$
$$\frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{21}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{21}(0) + P_1(\vartheta) t_{21}(1) + P_2(\vartheta) t_{21}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{21}(k).$$

Untuk $l_1 = 2$ dan $l_2 = 2$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{22}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{22}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{22}(1) +$$
$$\frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{22}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{22}(0) + P_1(\vartheta) t_{22}(1) + P_2(\vartheta) t_{22}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{22}(k).$$

⋮

Untuk $l_1 = 2$ dan $l_2 = 6$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{26}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{26}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{26}(1) +$$
$$\frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{26}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{26}(0) + P_1(\vartheta) t_{26}(1) + P_2(\vartheta) t_{26}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{26}(k).$$

Untuk $l_1 = 3$ dan $l_2 = 1$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{31}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{31}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{31}(1) +$$
$$\frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{31}(2) + \cdots$$

$$= P_0(\vartheta)t_{31}(0) + P_1(\vartheta)t_{31}(1) + P_2(\vartheta)t_{31}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{31}(k).$$

Untuk $l_1 = 3$ dan $l_2 = 2$ maka

$$P_{l_1l_2}(\vartheta) = P_{32}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{32}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{32}(1) +$$
$$\frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{32}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta)t_{32}(0) + P_1(\vartheta)t_{32}(1) + P_2(\vartheta)t_{32}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{32}(k).$$

$\vdots$

Untuk $l_1 = 3$ dan $l_2 = 6$ maka

$$P_{l_1l_2}(\vartheta) = P_{36}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{36}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{36}(1) +$$
$$\frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{36}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta)t_{36}(0) + P_1(\vartheta)t_{36}(1) + P_2(\vartheta)t_{36}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{36}(k).$$

Untuk $l_1 = 4$ dan $l_2 = 1$ maka

$$P_{l_1l_2}(\vartheta) = P_{41}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{41}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{41}(1) +$$
$$\frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{41}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta)t_{41}(0) + P_1(\vartheta)t_{41}(1) + P_2(\vartheta)t_{41}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{41}(k).$$

Untuk $l_1 = 4$ dan $l_2 = 2$ maka

$$P_{l_1l_2}(\vartheta) = P_{42}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{42}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{42}(1) +$$
$$\frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{42}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta)t_{42}(0) + P_1(\vartheta)t_{42}(1) + P_2(\vartheta)t_{42}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{42}(k).$$

$\vdots$

Untuk $l_1 = 4$ dan $l_2 = 6$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{46}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{46}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{46}(1) + \frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{46}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{46}(0) + P_1(\vartheta) t_{46}(1) + P_2(\vartheta) t_{46}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{46}(k).$$

Untuk $l_1 = 5$ dan $l_2 = 1$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{51}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{51}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{51}(1) + \frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{51}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{51}(0) + P_1(\vartheta) t_{51}(1) + P_2(\vartheta) t_{51}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{51}(k).$$

Untuk $l_1 = 5$ dan $l_2 = 2$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{52}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{52}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{52}(1) + \frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{52}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{52}(0) + P_1(\vartheta) t_{52}(1) + P_2(\vartheta) t_{52}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{52}(k).$$

$\vdots$

Untuk $l_1 = 5$ dan $l_2 = 6$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{56}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{56}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{56}(1) + \frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{56}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{56}(0) + P_1(\vartheta) t_{56}(1) + P_2(\vartheta) t_{56}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{56}(k).$$

Untuk $l_1 = 6$ dan $l_2 = 1$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{61}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{61}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{61}(1) + \frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{61}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{61}(0) + P_1(\vartheta) t_{61}(1) + P_2(\vartheta) t_{61}(2) + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{61}(k).$$

Untuk $l_1 = 6$ dan $l_2 = 2$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{62}(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{62}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{62}(1) + \frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{62}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{62}(0) + P_1(\vartheta) t_{62}(1) + P_2(\vartheta) t_{62}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{62}(k).$$

⋮

Untuk $l_1 = 6$ dan $l_2 = 6$ maka

$$P_{l_1 l_2}(\vartheta) = P_{66}(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} \exp(-\vartheta)\, t_{l_1 l_2}(k)$$
$$= \frac{\vartheta^0}{0!} \exp(-\vartheta)\, t_{66}(0) + \frac{\vartheta^1}{1!} \exp(-\vartheta)\, t_{66}(1) + \frac{\vartheta^2}{2!} \exp(-\vartheta)\, t_{66}(2) + \cdots$$
$$= P_0(\vartheta) t_{66}(0) + P_1(\vartheta) t_{66}(1) + P_2(\vartheta) t_{66}(2) + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) t_{66}(k).$$

Dengan cara yang sama telah diperoleh probabilitas transisi pada sistem Bonus Malus Taiwan dengan 9 *level* premi yang sesuai pada Persamaan (4.1).

4.3.2 Matriks Transisi

Matriks transisi $P(\vartheta)$ merupakan matriks transisi satu langkah dengan

$$P(\vartheta) = \begin{pmatrix} P_{00}(\vartheta) & P_{01}(\vartheta) & \cdots & P_{0r}(\vartheta) \\ P_{10}(\vartheta) & P_{11}(\vartheta) & \cdots & P_{1r}(\vartheta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r0}(\vartheta) & P_{r1}(\vartheta) & \cdots & P_{rr}(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Matriks $P(\vartheta)$ merupakan matriks stokastik Rantai Markov Waktu Diskrit yang dinyatakan pada Persamaan (2.6). Seperti yang telah disebutkan bahwa *level* yang akan datang dari pemegang polis adalah independen dari *level* masa lalu dan hanya bergantung pada *level* masa sekarang dan juga berdasarkan pada nomor klaim yang telah dilaporkan pada tahun sekarang. Untuk mendapatkan matriks transisi maka dibutuhkan probabilitas transisi rantai Markov yang diperoleh pada Persamaan (4.1). Dengan menggunakan sistem Bonus Malus, maka akan didapatkan matriks transisi sebagai berikut:

$$P(\vartheta)=\begin{pmatrix} P_{11}(\vartheta) & P_{12}(\vartheta) & \cdots & P_{1r}(\vartheta) \\ P_{21}(\vartheta) & P_{22}(\vartheta) & \cdots & P_{2r}(\vartheta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1}(\vartheta) & P_{r2}(\vartheta) & \cdots & P_{rr}(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{11}(k) & \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{12}(k) & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{1r}(k) \\ \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{21}(k) & \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{22}(k) & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{2r}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{r1}(k) & \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{r2}(k) & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)t_{rr}(k) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} P_0(\vartheta)t_{11}(0)+P_1(\vartheta)t_{11}(1)+\cdots & \cdots & P_0(\vartheta)t_{1r}(0)+P_1(\vartheta)t_{1r}(1)+\cdots \\ P_0(\vartheta)t_{21}(0)+P_1(\vartheta)t_{21}(1)+\cdots & \cdots & P_0(\vartheta)t_{2r}(0)+P_1(\vartheta)t_{2r}(1)+\cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0(\vartheta)t_{r1}(0)+P_1(\vartheta)t_{r1}(1)+\cdots & \cdots & P_0(\vartheta)t_{rr}(0)+P_1(\vartheta)t_{rr}(1)+\cdots \end{pmatrix}$$

$$=P_0(\vartheta)\begin{pmatrix} t_{11}(0) & t_{12}(0) & \cdots & t_{1r}(0) \\ t_{21}(0) & t_{22}(0) & \cdots & t_{2r}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{r1}(0) & t_{r2}(0) & \cdots & t_{rr}(0) \end{pmatrix} + P_1(\vartheta)\begin{pmatrix} t_{11}(1) & t_{12}(1) & \cdots & t_{1r}(1) \\ t_{21}(1) & t_{22}(1) & \cdots & t_{2r}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{r1}(1) & t_{r2}(1) & \cdots & t_{rr}(1) \end{pmatrix} + P_2(\vartheta)\begin{pmatrix} t_{11}(2) & t_{12}(2) & \cdots & t_{1r}(2) \\ t_{21}(2) & t_{22}(2) & \cdots & t_{2r}(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{r1}(2) & t_{r2}(2) & \cdots & t_{rr}(2) \end{pmatrix}+\cdots$$

$$=P_0(\vartheta)T(0)+P_1(\vartheta)T(1)+P_2(\vartheta)T(2)+\cdots$$

Matriks $P(\vartheta)$ selanjutnya dituliskan sebagai berikut:

$$P(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta)\, T(k). \tag{4.2}$$

Pada sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan, keduanya memiliki matriks probabilitas transisi yang berbeda tergantung pada jumlah *level* sistem Bonus Malus yang dimiliki. Sebagai contoh pada sistem Bonus Malus Hongkong, sesuai pada Persamaan (4.2) diperoleh matriks probabilitas sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
P(\vartheta) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\vartheta) T(k) \\
&= P_0(\vartheta)T(0) + P_1(\vartheta)T(1) + P_2(\vartheta) + \cdots
\end{aligned}$$

$$= P_0(\vartheta)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + P_1(\vartheta)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ P_2(\vartheta)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} P_0(\vartheta) & 0 & P_1(\vartheta) & 0 & 0 & P_2(\vartheta) + \cdots \\ P_0(\vartheta) & 0 & 0 & P_1(\vartheta) & 0 & P_2(\vartheta) + \cdots \\ 0 & P_0(\vartheta) & 0 & 0 & 0 & P_1(\vartheta) + P_2(\vartheta) + \cdots \\ 0 & 0 & P_0(\vartheta) & 0 & 0 & P_1(\vartheta) + P_2(\vartheta) + \cdots \\ 0 & 0 & 0 & P_0(\vartheta) & 0 & P_1(\vartheta) + P_2(\vartheta) + \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_0(\vartheta) & P_1(\vartheta) + P_2(\vartheta) + \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_0(\vartheta) & 0 & P_1(\vartheta) & 0 & 0 & 1 - \sum_{k=0}^{1} P_k(\vartheta) \\ P_0(\vartheta) & 0 & 0 & P_1(\vartheta) & 0 & 1 - \sum_{k=0}^{1} P_k(\vartheta) \\ 0 & P_0(\vartheta) & 0 & 0 & 0 & 1 - P_0 \\ 0 & 0 & P_0(\vartheta) & 0 & 0 & 1 - P_0 \\ 0 & 0 & 0 & P_0(\vartheta) & 0 & 1 - P_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_0(\vartheta) & 1 - P_0 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Dari penghitungan yang telah dilakukan didapat matriks probabilitas untuk sistem Bonus Malus Hongkong dengan matriks berukuran $6x6$. Untuk selanjutnya akan diperoleh matriks probabilitas sistem Bonus Malus Taiwan yang dihitung dengan cara yang sama pada Persamaan (4.3) sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} P_0(\vartheta) & 0 & 0 & 0 & P_1(\vartheta) & P_2(\vartheta) & P_3(\vartheta) & P_4(\vartheta) & 1-\sum_{k=0}^{4} P_k \\ P_0(\vartheta) & 0 & 0 & 0 & P_1(\vartheta) & P_2(\vartheta) & P_3(\vartheta) & P_4(\vartheta) & 1-\sum_{k=0}^{4} P_k \\ 0 & P_0(\vartheta) & 0 & 0 & P_1(\vartheta) & P_2(\vartheta) & P_3(\vartheta) & P_4(\vartheta) & 1-\sum_{k=0}^{4} P_k \\ 0 & 0 & P_0(\vartheta) & 0 & P_1(\vartheta) & P_2(\vartheta) & P_3(\vartheta) & P_4(\vartheta) & 1-\sum_{k=0}^{4} P_k \\ 0 & 0 & P_0(\vartheta) & 0 & P_1(\vartheta) & P_2(\vartheta) & P_3(\vartheta) & P_4(\vartheta) & 1-\sum_{k=0}^{4} P_k \\ 0 & 0 & P_0(\vartheta) & 0 & P_1(\vartheta) & P_2(\vartheta) & P_3(\vartheta) & P_4(\vartheta) & 1-\sum_{k=0}^{4} P_k \\ 0 & 0 & P_0(\vartheta) & 0 & P_1(\vartheta) & P_2(\vartheta) & P_3(\vartheta) & P_4(\vartheta) & 1-\sum_{k=0}^{4} P_k \\ 0 & 0 & P_0(\vartheta) & 0 & P_1(\vartheta) & P_2(\vartheta) & P_3(\vartheta) & P_4(\vartheta) & 1-\sum_{k=0}^{4} P_k \\ 0 & 0 & P_0(\vartheta) & 0 & P_1(\vartheta) & P_2(\vartheta) & P_3(\vartheta) & P_4(\vartheta) & 1-\sum_{k=0}^{4} P_k \end{pmatrix} . \qquad (4.4)$$

4.3.3 Pembuktian Nilai Eigen dan Vektor Eigen Berdistribusi Probabilitas Stasioner Pada Sistem Bonus Malus

Untuk dapat menentukan suatu efisiensi dari sistem Bonus Malus diperlukan syarat adanya nilai eigen bernilai satu pada matriks probabilitas transisi Rantai Markov $P(\vartheta)$ sehingga dapat membuktikan bahwa vektor eigen berdistribusi probabilitas stasioner. Pada tahap ini akan dilakukan pembuktian dengan menggunakan metode aljabar untuk mengonsep nilai eigen sama dengan satu yang sesuai dengan vektor eigen kiri sebagai berikut

$$\pi_l(\vartheta) = [\pi_1(\vartheta), \pi_2(\vartheta), \dots, \pi_r(\vartheta)] \qquad (4.5)$$

yang telah didefinisikan dengan persamaan

$$\pi_j(\vartheta) = \pi_l(\vartheta)\, P(\vartheta) \qquad (4.6)$$

dan

$$\sum_{j=1}^{r} \pi_j(\vartheta) = 1. \qquad (4.7)$$

Pada sistem Bonus Malus, probabilitas pemegang polis berada disuatu *level* bergantung pada suatu nilai ϑ, sehingga distribusi probabilitas stasioner dari *level*-*level* sistem Bonus Malus dapat dituliskan sebagai berikut

$$\pi_j(\vartheta) = \sum_{l=0}^{r} \pi_l(\vartheta) P_{lj}(\vartheta). \qquad (4.8)$$

Bukti :

Misal terdapat matriks probabilitas Rantai Markov berukuran $r\ x\ r$ sebagai berikut

$$P(\vartheta) = \begin{pmatrix} P_{11}(\vartheta) & P_{12}(\vartheta) & P_{13}(\vartheta) & P_{14}(\vartheta) & \cdots & P_{1r}(\vartheta) \\ P_{21}(\vartheta) & P_{22}(\vartheta) & P_{23}(\vartheta) & P_{24}(\vartheta) & \cdots & P_{2r}(\vartheta) \\ P_{31}(\vartheta) & P_{32}(\vartheta) & P_{33}(\vartheta) & P_{34}(\vartheta) & \cdots & P_{3r}(\vartheta) \\ P_{41}(\vartheta) & P_{42}(\vartheta) & P_{43}(\vartheta) & P_{44}(\vartheta) & \cdots & P_{4r}(\vartheta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1}(\vartheta) & P_{r2}(\vartheta) & P_{r3}(\vartheta) & P_{r4}(\vartheta) & \cdots & P_{rr}(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Sesuai pada Persamaan (2.17) bahwa λ merupakan nilai eigen matriks $P(\vartheta)$ jika ada vektor tak nol x di R^n yang memenuhi $(A - \lambda I)\,x = 0$. Dalam hal ini, matriks A adalah matriks probabilitas Rantai Markov yaitu $P(\vartheta)$. Pada tahap ini dilakukan pengurangan terhadap matriks probabilitas Rantai Markov oleh matriks identitas I berukuran $r\,x\,r$ sebagai berikut :

$$(P(\vartheta) - I_{rxr}) \\ = \begin{pmatrix} P_{11}(\vartheta) - 1 & P_{12}(\vartheta) & P_{13}(\vartheta) & P_{14}(\vartheta) & \cdots & P_{1r}(\vartheta) \\ P_{21}(\vartheta) & P_{22}(\vartheta) - 1 & P_{23}(\vartheta) & P_{24}(\vartheta) & \cdots & P_{2r}(\vartheta) \\ P_{31}(\vartheta) & P_{32}(\vartheta) & P_{33}(\vartheta) - 1 & P_{34}(\vartheta) & \cdots & P_{3r}(\vartheta) \\ P_{41}(\vartheta) & P_{42}(\vartheta) & P_{43}(\vartheta) & P_{44}(\vartheta) - 1 & \cdots & P_{4r}(\vartheta) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1}(\vartheta) & P_{r2}(\vartheta) & P_{r3}(\vartheta) & P_{r4}(\vartheta) & \cdots & P_{rr}(\vartheta) - 1 \end{pmatrix}.$$

Pada tahap selanjutnya dilakukan pemisahan vektor-vektor setiap kolom hasil dari $(P(\vartheta) - I_{rxr})$. Sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} P_{11}(\vartheta)-1 \\ P_{21}(\vartheta) \\ P_{31}(\vartheta) \\ P_{41}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{r1}(\vartheta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{12}(\vartheta) \\ P_{22}(\vartheta)-1 \\ P_{32}(\vartheta) \\ P_{42}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{r2}(\vartheta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{13}(\vartheta) \\ P_{23}(\vartheta) \\ P_{33}(\vartheta)-1 \\ P_{43}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{r3}(\vartheta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{14}(\vartheta) \\ P_{24}(\vartheta) \\ P_{34}(\vartheta) \\ P_{44}(\vartheta)-1 \\ \vdots \\ P_{r4}(\vartheta) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} P_{1r}(\vartheta) \\ P_{2r}(\vartheta) \\ P_{3r}(\vartheta) \\ P_{4r}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{rr}(\vartheta)-1 \end{pmatrix}.$$

Kemudian akan dibuktikan bahwa vektor-vektor kolom tersebut bebas linier atau tidak dengan menjumlahkan vektor-vektor kolom.

1. Dengan memisalkan nilai $C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = 0$

$$C_1 \begin{pmatrix} P_{11}(\vartheta)-1 \\ P_{21}(\vartheta) \\ P_{31}(\vartheta) \\ P_{41}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{r1}(\vartheta) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} P_{12}(\vartheta) \\ P_{22}(\vartheta)-1 \\ P_{32}(\vartheta) \\ P_{42}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{r2}(\vartheta) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} P_{13}(\vartheta) \\ P_{23}(\vartheta) \\ P_{33}(\vartheta)-1 \\ P_{43}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{r3}(\vartheta) \end{pmatrix} +$$

$$C_4 \begin{pmatrix} P_{14}(\vartheta) \\ P_{24}(\vartheta) \\ P_{34}(\vartheta) \\ P_{44}(\vartheta)-1 \\ \vdots \\ P_{r4}(\vartheta) \end{pmatrix} + \cdots + C_4 \begin{pmatrix} P_{1r}(\vartheta) \\ P_{2r}(\vartheta) \\ P_{3r}(\vartheta) \\ P_{4r}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{rr}(\vartheta)-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Dengan memisalkan nilai $C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = 1.$

$$C_1 \begin{pmatrix} P_{11}(\vartheta)-1 \\ P_{21}(\vartheta) \\ P_{31}(\vartheta) \\ P_{41}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{r1}(\vartheta) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} P_{12}(\vartheta) \\ P_{22}(\vartheta)-1 \\ P_{32}(\vartheta) \\ P_{42}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{r2}(\vartheta) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} P_{13}(\vartheta) \\ P_{23}(\vartheta) \\ P_{33}(\vartheta)-1 \\ P_{43}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{r3}(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$+ C_4 \begin{pmatrix} P_{14}(\vartheta) \\ P_{24}(\vartheta) \\ P_{34}(\vartheta) \\ P_{44}(\vartheta)-1 \\ \vdots \\ P_{r4}(\vartheta) \end{pmatrix} + \cdots + C_4 \begin{pmatrix} P_{1r}(\vartheta) \\ P_{2r}(\vartheta) \\ P_{3r}(\vartheta) \\ P_{4r}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{rr}(\vartheta)-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dua pemisalan yang diuraikan diatas membuktikan bahwa vektor-vektor kolom tidak bebas linier dikarenakan adanya kombinasi linier dari vektor-vektor yang lain. Dengan demikian pernyataan ini ekivalen dengan pernyataan pada Subbab 2.7 bahwa $\det(P(\vartheta) - I_{rxr}) = 0$ dan juga ekivalen dengan pernyataan $\pi_j(P(\vartheta) - I_{rxr}) = 0$ dan $(P(\vartheta) - I_{rxr})\pi_j = 0$ yang memiliki penyelesaian vektor tak nol. Hal ini membuktikan bahwa satu adalah nilai eigen dari matriks probabilitas transisi Rantai Markov $P(\vartheta)$ sehingga diperoleh bukti dari kiri

$$\pi_j(P(\vartheta) - I_{rxr}) = 0 \Leftrightarrow \pi_j P(\vartheta) - \pi_j I_{rxr} = 0$$
$$\pi_j(P(\vartheta) - I_{rxr}) = 0 \Leftrightarrow \pi_j P(\vartheta) - \pi_j = 0$$
$$\pi_j(P(\vartheta) - I_{rxr}) = 0 \Leftrightarrow \pi_j P(\vartheta) = \pi_j$$

dan bukti dari kanan

$$(P(\vartheta) - I_{rxr})\pi_j = 0 \Leftrightarrow P(\vartheta)\pi_j - I_{rxr}\pi_j = 0$$
$$(P(\vartheta) - I_{rxr})\pi_j = 0 \Leftrightarrow P(\vartheta)\pi_j - \pi_j = 0$$
$$(P(\vartheta) - I_{rxr})\pi_j = 0 \Leftrightarrow P(\vartheta)\pi_j = \pi_j$$

Untuk selanjutnya ditinjau dari Persamaan (4.8) bahwa distribusi probabilitas dari *level-level* sistem Bonus Malus yang sudah stasioner dengan menjalankan persamaan untuk suatu nilai j, maka akan diperoleh sebagai berikut :

Untuk $j = 1$ maka

$$\begin{aligned}\pi_1(\vartheta) &= \textstyle\sum_{l\in r} \pi_l(\vartheta) P_{l1}(\vartheta)\\ &= \pi_1(\vartheta)P_{11}(\vartheta) + \pi_2(\vartheta)P_{21}(\vartheta) + \pi_3(\vartheta)P_{31}(\vartheta) + \cdots\\ &\qquad + \pi_r(\vartheta)P_{r1}(\vartheta)\\ &= \begin{bmatrix}\pi_1(\vartheta) & \pi_2(\vartheta) & \cdots & \pi_r(\vartheta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}(\vartheta)\\ P_{21}(\vartheta)\\ \vdots\\ P_{r1}(\vartheta)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Untuk $j = 2$ maka

$$\begin{aligned}\pi_2(\vartheta) &= \textstyle\sum_{l\in r} \pi_l(\vartheta) P_{l2}(\vartheta)\\ &= \pi_1(\vartheta)P_{12}(\vartheta) + \pi_2(\vartheta)P_{22}(\vartheta) + \pi_3(\vartheta)P_{32}(\vartheta) + \cdots\\ &\qquad + \pi_r(\vartheta)P_{r1}(\vartheta)\end{aligned}$$

$$= [\pi_1(\vartheta) \quad \pi_2(\vartheta) \quad \cdots \quad \pi_r(\vartheta)] \begin{bmatrix} P_{12}(\vartheta) \\ P_{22}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{r2}(\vartheta) \end{bmatrix}.$$

Untuk $j = 3$ maka

$$\pi_3(\vartheta) = \sum_{l \in r} \pi_l(\vartheta) P_{l3}(\vartheta)$$
$$= \pi_1(\vartheta)P_{13}(\vartheta) + \pi_2(\vartheta)P_{23}(\vartheta) + \pi_3(\vartheta)P_{33}(\vartheta) + \cdots + \pi_r(\vartheta)P_{r1}(\vartheta)$$
$$= [\pi_1(\vartheta) \quad \pi_2(\vartheta) \quad \cdots \quad \pi_r(\vartheta)] \begin{bmatrix} P_{13}(\vartheta) \\ P_{23}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{r3}(\vartheta) \end{bmatrix}.$$

$\vdots$

Untuk $j = r$ maka

$$\pi_r(\vartheta) = \sum_{l \in r} \pi_l(\vartheta) P_{lr}(\vartheta)$$
$$= \pi_1(\vartheta)P_{1r}(\vartheta) + \pi_2(\vartheta)P_{2r}(\vartheta) + \pi_3(\vartheta)P_{3r}(\vartheta) + \cdots + \pi_r(\vartheta)P_{r1}(\vartheta)$$
$$= [\pi_1(\vartheta) \quad \pi_2(\vartheta) \quad \cdots \quad \pi_r(\vartheta)] \begin{bmatrix} P_{1r}(\vartheta) \\ P_{2r}(\vartheta) \\ \vdots \\ P_{rr}(\vartheta) \end{bmatrix}.$$

Diperoleh suatu rumusan dari Persamaan (4.8) yang telah diuraikan sehingga menghasilkan $[\pi_1(\vartheta) \quad \pi_2(\vartheta) \quad \cdots \quad \pi_r(\vartheta)]$ sebagai berikut :

$$[\pi_1(\vartheta) \quad \pi_2(\vartheta) \quad \cdots \quad \pi_r(\vartheta)]$$
$$= [\pi_1(\vartheta) \quad \pi_2(\vartheta) \quad \cdots \quad \pi_r(\vartheta)] \begin{bmatrix} P_{11}(\vartheta) & P_{12}(\vartheta) & \cdots & P_{1r}(\vartheta) \\ P_{21}(\vartheta) & P_{22}(\vartheta) & \cdots & P_{2r}(\vartheta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{r1}(\vartheta) & P_{r2}(\vartheta) & \cdots & P_{rr}(\vartheta) \end{bmatrix}$$
$$= [\pi_1(\vartheta) \quad \pi_2(\vartheta) \quad \cdots \quad \pi_r(\vartheta)]\, P(\vartheta). \qquad (4.9)$$

Karena sudah terbukti bahwa terdapat nilai eigen sama dengan satu pada matriks probabilitas Rantai Markov sedemikian sehingga berlaku untuk Persamaan (4.9) bahwa $[\pi_1(\vartheta) \quad \pi_2(\vartheta) \quad \cdots \quad \pi_r(\vartheta)]$ merupakan distribusi probabilitas stasioner dari *level* sistem Bonus Malus.

4.4 Penentuan Efisiensi Sistem Bonus Malus

Pada tahap ini dilakukan penentuan efisiensi sistem Bonus Malus di beberapa negara Asia yaitu Hongkong dan Taiwan. Penentuan efisiensi sistem Bonus Malus berdasarkan rata-rata premi stasioner dan frekuensi klaim yang diharapkan. Sebagai contoh pada sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan, penentuan rata-rata premi stasioner diselesaikan dengan Persamaan (2.18). Penentuan rata-rata premi stasioner dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}\bar{r}(\vartheta) &= \sum_{l=0}^{r} \pi_l(\vartheta) r_l \\ &= \pi_0(\vartheta)r_0 + \pi_1(\vartheta)r_1 + \pi_2(\vartheta)r_2 + \cdots \\ &\qquad + \pi_r(\vartheta)r_r\,, \qquad (4.10)\end{aligned}$$

sehingga mempermudah untuk pengerjaan penentuan efisiensi dari sistem Bonus Malus pada Persamaan (2.19). Dalam hal ini, efisiensi yang digunakan adalah efisiensi Loimaranta. Efisiensi Loimaranta merupakan sebuah konsep asimtotik yang tidak bergantung pada *level* pembayaran premi yang sedang dipakai saat ini didalam sistem Bonus Malus sehingga diberikan suatu rumusan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}E_{ff_{Loi}}(\vartheta) &= \frac{\frac{d\bar{r}(\vartheta)}{\bar{r}(\vartheta)}}{\frac{d\vartheta}{\vartheta}} \\ &= \frac{d\bar{r}(\vartheta)}{\bar{r}(\vartheta)} x \frac{\vartheta}{d\vartheta} \\ &= \frac{d\bar{r}(\vartheta)}{d\vartheta} x \frac{\vartheta}{\bar{r}(\vartheta)}. \qquad (4.11)\end{aligned}$$

Perhitungan dari $E_{ff_{Loi}}(\vartheta)$ memerlukan penentuan turunan dari $\bar{r}(\vartheta)$ yang terkait dengan frekuensi klaim ϑ tahunan yang diharapkan, sehingga pada Persamaan (4.10) dapat diperoleh penurunan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{r}(\vartheta)}{d\vartheta} &= \frac{d(\sum_{l=0}^{r}\pi_l(\vartheta)r_l)}{d\vartheta} \\
&= \frac{d(\pi_0(\vartheta)r_0 + \pi_1(\vartheta)r_1 + \pi_2(\vartheta)r_2 + \cdots + \pi_r(\vartheta)r_r)}{d\vartheta} \\
&= \frac{d\big(\pi_0(\vartheta)\big)}{d\vartheta}r_0 + \frac{d\big(\pi_1(\vartheta)\big)}{d\vartheta}r_1 + \frac{d\big(\pi_2(\vartheta)\big)}{d\vartheta}r_2 + \cdots \\
&\quad + \frac{d\big(\pi_r(\vartheta)\big)}{d\vartheta}r_r \\
&= \sum_{l=0}^{r}\frac{d\pi_l(\vartheta)}{d\vartheta}r_l\,. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Hasil penurunan yang diperoleh pada Persamaan (4.12) dapat digunakan untuk menentukan efisiensi dari sistem Bonus Malus.

4.5 Analisis Mengenai Efisiensi Sistem Bonus Malus Pada Perusahaan Asuransi Mobil Di Negara Hongkong, Taiwan, dan Indonesia.

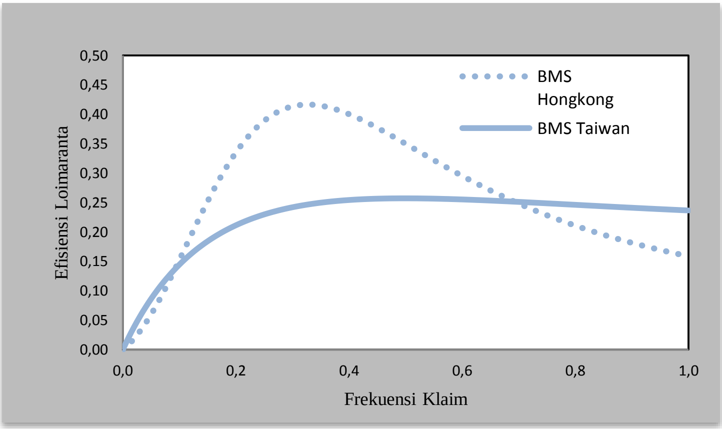
Pada tahap ini dilakukan analisis mengenai efisiensi sistem Bonus Malus di negara Hongkong, Taiwan, dan Indonesia, sehingga diketahui sistem Bonus Malus yang ideal dari sudut pandang pemegang polis dan dari perusahaan asuransi mobil.

Elastisitas dari sistem Bonus Malus bertujuan untuk mengukur respon akibat adanya perubahan frekuensi klaim terhadap suatu efisiensi dari sistem Bonus Malus.

Berdasarkan perhitungan nilai efisiensi dari sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan dengan bantuan Matlab, diperoleh suatu grafik yang menunjukkan adanya nilai efisiensi yang bergantung pada frekuensi klaim yang diajukan oleh pemegang polis. Berikut merupakan grafik persentase efisiensi sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan. Hasil perhitungan dari efisiensi sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan telah dilampirkan pada Lampiran 1.

Dalam menentukan suatu efisiensi dari sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan, sebelumnya telah diperoleh distribusi probabilitas stasioner dari *level* sistem Bonus Malus untuk pemegang polis. Dari grafik pada Gambar (4.1) jika diambil $\vartheta = 1$ diperoleh distribusi probabilitas stasioner dari *level* sistem Bonus Malus Hongkong sebagai berikut :

$\pi_1(\vartheta) = 0.007638441107352$
$\pi_2(\vartheta) = 0.013124994552517$
$\pi_3(\vartheta) = 0.035677434190732$
$\pi_4(\vartheta) = 0.089342879939357$
$\pi_5(\vartheta) = 0.229734132488836$
$\pi_6(\vartheta) = 0.624482117721206.$



Gambar 4.1 Grafik nilai efisiensi sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan

Kemudian pada Gambar (4.1) menunjukkan bahwa grafik efisiensi sistem Bonus Malus Hongkong mengalami kenaikan yang tajam mulai dari $\vartheta = 0$ sampai dengan $\vartheta = 0{,}33$. Untuk $\vartheta > 0{,}33$ efisiensi mengalami penurunan. Selain itu, dari grafik menunjukkan bahwa pada saat $\vartheta = 0$, efisiensi dari sistem Bonus Malus Hongkong bernilai 0. Untuk $\vartheta = 0{,}33$, efisiensi bernilai 0,416725473097774 dan pada saat $\vartheta =$

1, efisiensi sistem Bonus Malus Hongkong bernilai 0,159071330782168.

Dengan melakukan perhitungan yang sama dengan sistem Bonus Malus Hongkong, jika diambil $\vartheta = 1$ dari grafik pada Gambar (4.1) diperoleh distribusi probabilitas stasioner *level* sistem Bonus Malus Taiwan sebagai berikut :

$\pi_1(\vartheta) = 0.049787068367864$
$\pi_2(\vartheta) = 0.085548214868749$
$\pi_3(\vartheta) = 0.232544157934830$
$\pi_4(\vartheta) = 0$
$\pi_5(\vartheta) = 0.367879441171442$
$\pi_6(\vartheta) = 0.183939720585721$
$\pi_7(\vartheta) = 0.061313240195240$
$\pi_8(\vartheta) = 0.015328310048810$
$\pi_9(\vartheta) = 0.003659846827344.$

Efisiensi sistem Bonus Malus Taiwan mengalami kenaikan mulai dari $\vartheta = 0$ sampai dengan $\vartheta = 0{,}50$. Untuk $\vartheta > 0{,}50$ efisiensi mengalami penurunan sedikit demi sedikit. Dari grafik nilai efisensi sistem Bonus Malus Taiwan juga diperoleh nilai efisiensi sebesar 0 ketika $\vartheta = 0$. Sedangkan pada $\vartheta = 0{,}50$, efisiensi bernilai sebesar 0,257166837030946. Untuk $\vartheta = 1$, didapatkan efisiensi sistem Bonus Malus Taiwan sebesar 0,236548944466495.

Berdasarkan perhitungan nilai efisiensi dari kedua sistem Bonus Malus pada Gambar (4.1), menunjukkan bahwa sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan memiliki nilai efisiensi yang berbeda. Jika pada rata-rata frekuensi klaim yang sama yaitu pada $\vartheta = 0{,}33$, maka diperoleh efisiensi yaitu pada sistem Bonus Malus Hongkong bernilai 0,416725473 dan sistem Bonus Malus Taiwan bernilai 0,247100131628629. Hal ini menunjukkan bahwa sistem Bonus Malus yang paling efisien dari sudut pandang pemegang polis adalah sistem Bonus Malus Taiwan dan yang paling efisien dari sudut pandang perusahaan asuransi mobil adalah sistem Bonus Malus Hongkong.

Dalam penentuan efisiensi dari sistem Bonus Malus ini, dipengaruhi oleh adanya tingkat kenaikan rata-rata premi stasioner terhadap tingkat kenaikan frekuensi klaim yang diharapkan. Semakin besar nilai efisiensi dari sistem Bonus Malus, berarti semakin besar tingkat kenaikan rata-rata premi stasioner yang dibayarkan oleh pemegang polis kepada pihak asuransi mobil dan semakin kecil rata-rata klaim yang diharapkan. Hal ini tentu menguntungkan bagi pihak perusahaan asuransi. Sebaliknya jika nilai efisiensi dari sistem Bonus Malus semakin kecil, berarti semakin kecil pula tingkat kenaikan rata-rata premi stasioner yang dibayarkan oleh pemegang polis kepada pihak perusahaan asuransi mobil dan semakin besar tingkat kenaikan frekuensi klaim yang diharapkan. Dalam hal ini, pemegang polis diuntungkan dan perusahaan asuransi mobil yang dirugikan. Pihak dari pemegang polis dan perusahaan asuransi mobil akan sama-sama diuntungkan ketika sistem Bonus Malus dari Hongkong dan Taiwan mempunyai nilai efisiensi sebesar 100%. Dengan kata lain, adanya tingkat kenaikan rata-rata premi stasioner yang dibayarkan pemegang polis sama dengan tingkat kenaikan frekuensi klaim yang diajukan. Dengan demikian, tidak ada lagi pihak yang dirugikan dalam penggunaan sistem Bonus Malus yang diterapkan oleh perusahaan asuransi mobil di Hongkong dan Taiwan.

Sistem Bonus Malus yang diterapkan di berbagai negara Asia tentu membawa suatu dampak akibat adanya perubahan premi di tiap tahun. Dampak itu bisa berupa suatu keuntungan atau bahkan menjadi suatu kerugian bagi pemegang polis dan perusahaan asuransi yang menjalankan sistem tersebut. Indonesia merupakan salah satu negara di Asia yang belum menerapkan sistem Bonus Malus sebagai sistem dalam penentuan premi pada perusahaan asuransi mobil. Apabila sistem Bonus Malus ini diterapkan oleh perusahaan asuransi mobil yang ada di Indonesia, dengan menggunakan data persentase harga premi yang ditawarkan di salah satu perusahaan asuransi mobil. Data persentase premi yang telah diperoleh melalui website resmi dari salah satu perusahaan asuransi mobil di Indonesia, menunjukkan bahwa adanya perbedaan yang cukup besar pada persentase harga premi yang diterapkan sebelumnya pada sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan. Selain itu, banyaknya klaim yang diajukan dalam penentuan sistem Bonus Malus di Indonesia yaitu dengan melakukan *generate random number Poisson* pada Matlab sesuai dengan perpindahan *level* yang disediakan. Data yang diperoleh, menunjukkan adanya 6 *level* persentase premi pada asuransi mobil yang akan diterapkan pada sistem Bonus Malus Indonesia dengan aturan transisi yang ditunjukkan pada Tabel (4.3) [12].

Tabel 4.3 Neraca Premi (%) Sistem Bonus Malus Indonesia

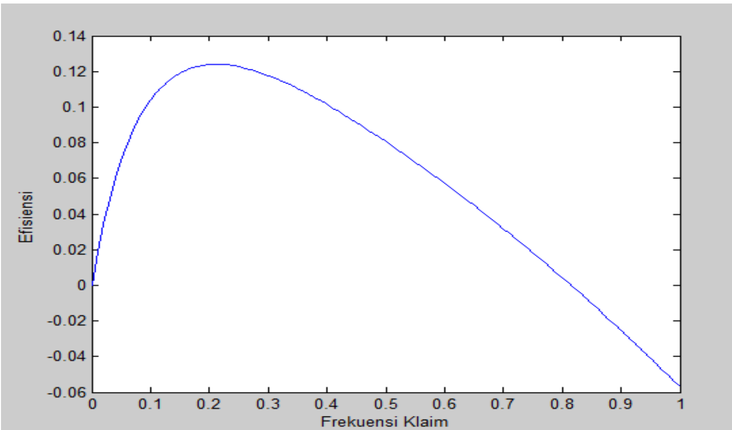
Level (l_i)	Premi (r_{l_i})	*Level* premi setelah banyak klaim		
		0	1	≥2
6	3,25	5	3	6
5	2,75	5	1	4
4	2,00	2	1	6
3	1,75	4	2	1
2	1,50	5	6	1
1	1,25	2	2	1

Data Tabel (4.3) menunjukkan bahwa :

1. Terdapat 6 *level* premi pada sistem Bonus Malus Indonesia mulai dari *level* $1,2,\dots,6$. Bisa dikatakan bahwa *level* 1 adalah *level* superbonus dan *level* 6 adalah *level* supermalus.
2. *Level* pembayaran premi dengan $r_{l_i} = (r_1, r_2, \dots, r_6)$ dengan asumsi bahwa $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_6$.

3. Setiap pemegang polis yang baru masuk pada sistem akan ditempatkan pada *level* 6 dengan pembayaran premi dasar (3,25%) untuk tahun pertama atau periode pertama.
4. Pada sistem Bonus Malus ini, apabila ditahun sebelumnya seorang pemegang polis tidak mengajukan klaim, maka akan terjadi penurunan *level* sebanyak satu untuk periode selanjutnya.
5. Apabila seorang pemegang polis melakukan kecelakaan dan mengajukan klaim di periode saat ini maka akan ada kenaikan *level* premi di periode selanjutnya.

Sama halnya dengan penentuan efisiensi sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan, diperoleh efisiensi sistem Bonus Malus Indonesia pada Gambar (4.2).



Gambar 4.2 Grafik nilai efisiensi sistem Bonus Malus Indonesia

Grafik menunjukkan bahwa sistem Bonus Malus Indonesia memiliki nilai efisiensi yang lebih rendah dibandingkan dengan sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan. Efisiensi maksimum berada pada rata-rata frekuensi klaim sebesar $\vartheta = 0{,}21$ dengan nilai efisiensi sebesar

0.123973325191797. Selanjutnya pada $\vartheta > 0,21$, grafik efisiensi mengalami penurunan yang tajam terhadap rata-rata frekuensi klaim yang mengakibatkan munculnya nilai negatif pada efisiensi saat $\vartheta \geq 0,82$. Rendahnya persentase premi di tiap *level* menyebabkan rendahnya nilai efisiensi sistem Bonus Malus yang diterapkan di Indonesia. Selain itu, hasil yang menunjukkan adanya nilai negatif pada efisiensi sistem Bonus Malus di Indonesia menyebabkan suatu kerugian bagi perusahaan asuransi mobil yang menjalankan sistem ini. Namun demikian, sistem Bonus Malus yang diterapkan di Indonesia memberi suatu keuntungan bagi pemegang polis yang mengasuransikan mobilnya ke perusahaan asuransi mobil. Hal ini membuat suatu sistem tidak seimbang untuk kedua belah pihak. Dengan demikian, hasil analisis mengenai sistem Bonus Malus yang diterapkan oleh perusahaan asuransi mobil yang ada di Indonesia belumlah memenuhi efisiensi dari kedua belah pihak yang terlibat yaitu dari perusahaan asuransi mobil dan dari pihak pemegang polis yang mengasuransikan mobilnya.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan dalam bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa :

1. Efisiensi sistem Bonus Malus Hongkong mengalami kenaikan yang tajam mulai dari $\vartheta = 0$ sampai dengan $\vartheta = 0{,}33$. Pada $\vartheta > 0{,}33$ efisiensi mengalami penurunan dan maksimum efisiensi berada pada $\vartheta = 0{,}33$.
2. Efisiensi sistem Bonus Malus Taiwan mengalami kenaikan mulai dari $\vartheta = 0$ sampai dengan $\vartheta = 0{,}50$. Pada $\vartheta > 0{,}50$ efisiensi mengalami penurunan sedikit demi sedikit dan maksimum efisiensi berada pada $\vartheta = 0{,}50$.
3. Efisiensi sistem Bonus Malus Indonesia mengalami kenaikan pada $\vartheta = 0$ sampai dengan $\vartheta = 0{,}21$. Pada $\vartheta > 0{,}21$, efisiensi mengalami penurunan yang tajam hingga menghasilkan efisiensi bernilai negatif pada $\vartheta \geq 0{,}82$.

Sistem Bonus Malus yang diterapkan di negara Hongkong dan Taiwan memiliki nilai efisiensi yang berbeda akibat adanya perubahan rata-rata frekuensi klaim dan rata-rata premi stasioner. Pada rata-rata frekuensi klaim tertentu yang sama, sistem Bonus Malus Hongkong memiliki nilai efisiensi yang lebih tinggi daripada sistem Bonus Malus Taiwan. Tingginya nilai efisiensi dari sistem Bonus Malus Hongkong ini menandakan sistem semakin ideal dari sudut pandang perusahaan asuransi mobil. Sebaliknya jika diperoleh nilai efisiensi Hongkong yang lebih rendah, menandakan sistem Bonus Malus semakin ideal dari sudut pandang pemegang polis.

Jika perusahaan asuransi di Indonesia menerapkan sistem Bonus Malus dengan persentase premi yang relatif rendah dibandingkan dengan sistem Bonus Malus yang telah ada di negara Hongkong dan Taiwan, mengakibatkan munculnya nilai negatif pada efisiensi dengan rata-rata frekuensi klaim yang tinggi. Hal ini menunjukkan bahwa penentuan batas *level* terendah persentase premi dalam sistem Bonus Malus sangatlah penting sehingga menghasilkan suatu nilai efisiensi yang seimbang. Nilai efisiensi yang seimbang menunjukkan tidak adanya pihak yang dirugikan dalam penerapan sistem Bonus Malus.

5.2 Saran

Adapun saran untuk penelitian selanjutnya dapat diperoleh suatu efisiensi sistem Bonus Malus dengan menggunakan efisiensi De Pril.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Lemaire, J. 1998. "*Bonus-Malus Systems". North American Actuarial Journal*, Vol.2, Issue 1, Hal/26-38.

[2] Lemaire, J. 1995. "*Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance"*. United States of America: Kluwer Academic Publishers xxviv +283hlm.

[3] Ermawaty, R. 2007. *"Studi Terhadap Sebaran Stasioner Pada Sistem Bonus Malus Swiss".* Bogor: Skripsi Institut Pertanian Bogor.

[4] Supandi. 2006. *"Efisiensi Sistem Bonus Malus Sebagai Model Rantai Markov".* Semarang: Skripsi Universitas AKI.

[5] Tim Pengembang. 2008. "*Model Bahan Ajar Asuransi*". Jakarta: Pusat Kurikulum Badan Penelitian dan Pengembangan Departemen Pendidikan Nasional.

[6] Irawan, B. 2007. *"Simulasi Sistem Bonus Malus(Studi Kasus: Belgia)".* Bandung: Thesis Institut Teknologi Bandung.

[7] Panjer, H.H, Willmot, G.E. 1992. *"Insurance Risk Models".* United States of America : Society of Actuaries.

[8] Kulkarni, V.G. 1999. *"Modeling, Analysis, Design, and Control of Stochstic Systems".* New York: Springer-Verlag.

[9] Denuit, M, Marechal, X, dkk. 2007. *"Actuarial Modelling Of Claims Counts".* England.

[10] Anton, H, Rorres, C. 1994. "*Elementary Linear Algebra* 9^{th} *Edition".* United States of America.

[11] Http://kbbi.web.id/efisiensi

[12] Http://www.aca.co.id/motor.aspx.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR LAMPIRAN

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

Lampiran 1

Hasil Perhitungan Efisiensi Sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan

Frekuensi Klaim	Efisiensi Loimaranta	
	BMS Hongkong	BMS Taiwan
0,00	0	0
0.01	0.008439029179262	0.020156413745948
0.02	0.018725110071406	0.038728959536381
0.03	0.030784807842816	0.055859504168237
0.04	0.044510095903650	0.071674359847353
0.05	0.059761008422884	0.086286343472637
0.06	0.076369400504373	0.099796517241016
0.07	0.094143629060690	0.112295666671122
0.08	0.112873918656785	0.123865561134486
0.09	0.132338146677041	0.134580033346177
0.10	0.152307772667932	0.144505907447688
0.11	0.172553646977176	0.153703799898078
0.12	0.192851461261078	0.162228813061622
0.13	0.212986644050865	0.170131137903600
0.14	0.232758553559765	0.177456579398266
0.15	0.251983872347837	0.184247015974557
0.16	0.270499159844432	0.190540802467046
0.17	0.288162565398224	0.196373124517692
0.18	0.304854743882444	0.201776311121796
0.19	0.320479046439808	0.206780110977104
0.20	0.334961080241962	0.211411937437046
0.21	0.348247743536084	0.215697086154681
0.22	0.360305846741739	0.219658928907006

Lampiran 1 (Lanjutan)

Frekuensi Klaim	Efisiensi Loimaranta	
	BMS Hongkong	BMS Taiwan
0.23	0.371120428304901	0.223319086588613
0.24	0.380692866938780	0.226697583942475
0.25	0.389038881302204	0.229812988240015
0.26	0.396186495477455	0.232682533821453
0.27	0.402174034998270	0.235322234151658
0.28	0.407048204593570	0.237746982828789
0.29	0.410862285957817	0.239970644796885
0.30	0.413674482212884	0.242006138854083
0.31	0.415546425571054	0.243865512411203
0.32	0.416541856166829	0.245560009337501
0.33	0.416725473097774	0.247100131628629
0.34	0.416161953315269	0.248495695543766
0.35	0.414915129992432	0.249755882782525
0.36	0.413047319194118	0.250889287205859
0.37	0.410618781896040	0.251903957547410
0.38	0.407687307461515	0.252807436511249
0.39	0.404307904411191	0.253606796607869
0.40	0.400532584556566	0.254308673041590
0.41	0.396410227175558	0.254919293928617
0.42	0.391986510772528	0.255444508095089
0.43	0.387303900991084	0.255889810678182
0.44	0.382401684360211	0.256260366730073
0.45	0.377316038694024	0.256561033004035
0.46	0.372080132089049	0.256796378083741
0.47	0.366724243538913	0.256970701000722

Lampiran 1 (Lanjutan)

Frekuensi Klaim	Efisiensi Loimaranta	
	BMS Hongkong	BMS Taiwan
0.48	0.361275899193484	0.257088048470556
0.49	0.355760019214725	0.257152230865634
0.50	0.350199071018136	0.257166837030946
0.51	0.344613225434592	0.257135248039194
0.52	0.339020512984399	0.257060649972446
0.53	0.333436978027248	0.256946045809446
0.54	0.327876829044331	0.256794266490388
0.55	0.322352583728613	0.256607981224449
0.56	0.316875207913250	0.256389707099484
0.57	0.311454247663530	0.256141818048024
0.58	0.306097954101479	0.255866553218948
0.59	0.300813400730941	0.255566024799896
0.60	0.295606593190815	0.255242225331641
0.61	0.290482571490619	0.254897034552105
0.62	0.285445504880905	0.254532225804550
0.63	0.280498779585584	0.254149472041594
0.64	0.275645079678063	0.253750351454100
0.65	0.270886461421543	0.253336352751611
0.66	0.266224421418975	0.252908880118859
0.67	0.261659958932492	0.252469257870919
0.68	0.257193632737895	0.252018734827790
0.69	0.252825612878674	0.251558488427568
0.70	0.248555727677784	0.251089628595882
0.71	0.244383506355112	0.250613201387919

Lampiran 1 (Lanjutan)

Frekuensi Klaim	Efisiensi Loimaranta	
	BMS Hongkong	BMS Taiwan
0.72	0.240308217585410	0.250130192418122
0.73	0.236328904316266	0.249641530091509
0.74	0.232444415149102	0.249148088649524
0.75	0.228653432568877	0.248650691042388
0.76	0.224954498290478	0.248150111639023
0.77	0.221346035972129	0.247647078784850
0.78	0.217826371528762	0.247142277217002
0.79	0.214393751261387	0.246636350345824
0.80	0.211046358002260	0.246129902410907
0.81	0.207782325460059	0.245623500519335
0.82	0.204599750934602	0.245117676573283
0.83	0.201496706556712	0.244612929093618
0.84	0.198471249195797	0.244109724945721
0.85	0.195521429165573	0.243608500973299
0.86	0.192645297846961	0.243109665545604
0.87	0.189840914336747	0.242613600023089
0.88	0.187106351220802	0.242120660146230
0.89	0.184439699561742	0.241631177351920
0.90	0.181839073182610	0.241145460021544
0.91	0.179302612320601	0.240663794664624
0.92	0.176828486717894	0.240186447041629
0.93	0.174414898210287	0.239713663229348
0.94	0.172060082868514	0.239245670632014
0.95	0.169762312741830	0.238782678941143
0.96	0.167519897248597	0.238324881046909

Lampiran 1 (Lanjutan)

Frekuensi Klaim	Efisiensi Loimaranta	
	BMS Hongkong	BMS Taiwan
0.97	0.165331184254221	0.237872453903673
0.98	0.163194560872777	0.237425559352138
0.99	0.161108454025014	0.236984344900461
0.100	0.159071330782168	0.236548944466495

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

Lampiran 2

Tabel Efisiensi Sistem Bonus Malus Indonesia

Frekuensi Klaim	Efisiensi Loimaranta BMS Indonesia
0,00	0
0,01	0.018550798965623
0,02	0.034506861668002
0,03	0.048259737912894
0,04	0.060130475584675
0,05	0.070384321755738
0,06	0.079241963097639
0,07	0.086888208265463
0,08	0.093478757632482
0,09	0.099145527712771
0,10	0.104000872685038
0,11	0.108140956641901
0,12	0.111648466327270
0,13	0.114594807681513
0,14	0.117041895389221
0,15	0.119043619308323
0,16	0.120647052708568
0,17	0.121893452941298
0,18	0.122819094276755
0,19	0.123455964300037
0,20	0.123832348814189
0,21	0.123973325191797
0,22	0.123901180200609
0,23	0.123635765247796

Lampiran 2 (Lanjutan)

Frekuensi Klaim	Efisiensi Loimaranta BMS Indonesia
0,24	0.123194799549932
0,25	0.122594129796751
0,26	0.121847953326416
0,27	0.120969010584505
0,28	0.119968751633556
0,29	0.118857480664926
0,30	0.117644481801141
0,31	0.116338128934453
0,32	0.114945981902175
0,33	0.113474870932708
0,34	0.111930970993151
0,35	0.110319867417975
0,36	0.108646613989112
0,37	0.106915784463201
0,38	0.105131518395541
0,39	0.103297561987520
0,40	0.101417304580914
0,41	0.099493811335143
0,42	0.097529852549629
0,43	0.095527930030651
0,44	0.093490300848701
0,45	0.091418998786738
0,46	0.089315853740817
0,47	0.087182509301128

Lampiran 2 (Lanjutan)

Frekuensi Klaim	Efisiensi Loimaranta BMS Indonesia
0,48	0.085020438712821
0,49	0.082830959391251
0,50	0.080615246144968
0,51	0.078374343241352
0,52	0.076109175433785
0,53	0.073820558055389
0,54	0.071509206272282
0,55	0.069175743578765
0,56	0.066820709607656
0,57	0.064444567320932
0,58	0.062047709638761
0,59	0.059630465558808
0,60	0.057193105812228
0,61	0.054735848097927
0,62	0.052258861932396
0,63	0.049762273148688
0,64	0.047246168074697
0,65	0.044710597417970
0,66	0.042155579881608
0,67	0.039581105533444
0,68	0.036987138948594
0,69	0.034373622143559
0,70	0.031740477318385
0,71	0.029087609421846

Lampiran 2 (Lanjutan)

Frekuensi Klaim	Efisiensi Loimaranta BMS Indonesia
0,72	0.026414908553273
0,73	0.023722252213380
0,74	0.021009507415370
0,75	0.018276532666567
0,76	0.015523179829929
0,77	0.012749295873969
0,78	0.009954724518863
0,79	0.007139307785844
0,80	0.004302887456389
0,81	0.001445306447099
0,82	-0.001433589894284
0,83	-0.004333952566798
0,84	-0.007255927763561
0,85	-0.010199655784343
0,86	-0.013165270009602
0,87	-0.016152895932532
0,88	-0.019162650245959
0,89	-0.022194639981188
0,90	-0.025248961696155
0,91	-0.028325700710475
0,92	-0.031424930385160
0,93	-0.034546711445003
0,94	-0.037691091341770
0,95	-0.040858103656528

Lampiran 2 (Lanjutan)

Frekuensi Klaim	Efisiensi Loimaranta BMS Indonesia
0,96	-0.044047767539546
0,97	-0.047260087186392
0,98	-0.050495051348907
0,99	-0.053752632879908
1,00	-0.057032788310528

" Halaman ini sengaja dikosongkan"

Lampiran 3

Persentase Harga Premi Pada Perusahaan Asuransi Mobil X

KATEGORI JNP	UANG PERTANGGUNGAN (Rp)	JENIS PERTANGGUNGAN	
		Comprehensive	TLO
		Rate per Tahun (%)	
MOBIL PENUMPANG			
(Sedan, Jeep, Minibus, St. Wagon, MPV, City Car & Double Cabin)			
1.A	0-100 Juta	3.25	0.80
1.B	> 100-150 Juta	2.75	0.80
2	> 150-300 Juta	2.00	0.80
3	> 300-500 Juta	1.75	0.80
4	> 500-800 Juta	1.50	0.80
5	> 800 Juta	1.25	0.80
TRUK/PICK-UP/BOX			
6	Semua Uang Pertanggungan	2.50	0.90
BUS			
7	Semua Uang Pertanggungan	2.50	0.90
MOTOR			
8	Semua Uang Pertanggungan	Tidak Berlaku	3.20

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

Lampiran 4

***Listing Program* Untuk Memperoleh Efisiensi Sistem Bonus Malus Hongkong dan Taiwan**

```
clear all
clc
format long
fprintf('1.Hongkong 2.Taiwan \n');
syms t
pilih=input('pilih:');
switch pilih
  %HONGKONG
  case 1
    cc=zeros(6);
    aa=zeros(6);
    dd=0;
    a=0;
    for i=1:3
      A=xlsread('HKG.xlsx',i);
      c=t^a;
      b=factorial(a);
      bb=(c*exp(-t)/b)*A;
      aa=aa+bb;
      a=a+1;
    end
     HKG=aa;
       for i=1:6
        for j=1:6

              if j~=6
              qqq=dd+aa(i,j);

               dd=qqq;
              end
              if j==6
```

Lampiran 4 (Lanjutan)

```
          aa(i,j)=1-qqq;
            end
      end

      dd=0;
    end
    aa;
    Matriks_Probabilitas_Hongkong=aa
  %TAIWAN
  case 2
    bb=zeros(9);
    cc=zeros(9);
    dd=0;
    a=0;

    for i=1:6
      B=xlsread('TAI.xlsx',i);
      y=t^a;
      x=factorial(a);
      h=(y*exp(-t)/x).*B;
      bb=bb+h;
      a=a+1;
    end
    TAI=bb;
    for i=1:9
      for j=1:9

            if j~=9
            qqq=dd+bb(i,j);

             dd=qqq;
            end
            if j==9
```

Lampiran 4 (Lanjutan)

```
                bb(i,j)=1-qqq;
                    end
          end
          dd=0;
       end
end
%TAIWAN
if pilih == 2
Harga_Premi_Taiwan=[50;65;80;100;110;120;130;140;150];
bb;
Matriks_Probabilitas_Taiwan=bb
bbt=diff(bb,t);
syms a b c d e f g h i
VektorEigen=[a b c d e f g h i];
C=VektorEigen*bb;
E=VektorEigen-C;
S=solve(E,'a+b+c+d+e+f+g+h+i=1','a,b,c,d,e,f,g,h,i');
S=[S.a S.b S.c S.d S.e S.f S.g S.h S.i];
VektorEigen=S
J=S*Harga_Premi_Taiwan;
theta=0:0.01:1;
for i=1:length(theta)
teta=theta(i);
Nilai_VektorEigen=subs(S,'t',teta);
H=diff(S,t);
G=H*Harga_Premi_Taiwan;
H=subs(H,'t',teta);
Nilai_DiffPremiStasioner=H*Harga_Premi_Taiwan;
Nilai_PremiStasioner=Nilai_VektorEigen*Harga_Premi_Taiw
an;
Efisiensi_BMS_Taiwan=t*G/J;
Efisiensi_BMS_Taiwan=subs(Efisiensi_BMS_Taiwan,'t',teta);
EfisiensiBMSTaiwan(i)=Efisiensi_BMS_Taiwan;
```

Lampiran 4 (Lanjutan)

```
end
c=max(EfisiensiBMSTaiwan);
for i=1:length(theta)
    if EfisiensiBMSTaiwan(i)==c

 MaxEfisiensiBMSTaiwan=EfisiensiBMSTaiwan(i)
        frekuensi=theta(i)
    end
end
figure(1)
plot(theta,EfisiensiBMSTaiwan)
xlabel('Frekuensi Klaim');
ylabel('Efisiensi ');
%HONGKONG
elseif pilih == 1
Harga_Premi_Hongkong=[40;50;60;70;80;100];
aa;
bbt=diff(aa,t);
syms a b c d e f
VektorEigen=[a b c d e f];
C=VektorEigen*aa;
E=VektorEigen-C;
S=solve(E,'a+b+c+d+e+f=1','a,b,c,d,e,f');
S=[S.a S.b S.c S.d S.e S.f];
VektorEigen=S
J=S*Harga_Premi_Hongkong;
theta=0:0.01:1;

for i=1:length(theta)
teta=theta(i);
Nilai_VektorEigen=subs(S,'t',teta);
H=diff(S,t);
G=H*Harga_Premi_Hongkong;
```

Lampiran 4 (Lanjutan)

```
H=subs(H,'t',teta);
Nilai_DiffPremiStasioner=H*Harga_Premi_Hongkong;
Nilai_PremiStasioner=Nilai_VektorEigen*Harga_Premi_Hon
gkong;
Efisiensi_BMS_Hongkong=t*G/J;
Efisiensi_BMS_Hongkong=subs(Efisiensi_BMS_Hongkong,'t'
,teta);
EfisiensiBMSHongkong(i)=Efisiensi_BMS_Hongkong;
end
c=max(EfisiensiBMSHongkong)
for i=1:length(theta)
    if EfisiensiBMSHongkong(i)==c
        MaxEfisiensiBMSHongkong=EfisiensiBMSHongkong(i)
        frekuensi=theta(i)
    end
end
figure(1)
plot(theta,EfisiensiBMSHongkong)
xlabel('Frekuensi Klaim');
ylabel('Efisiensi ');


end
```

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

BIODATA PENULIS

Penulis lahir di Bojonegoro, 9 Agustus 1992 dan merupakan anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan Tri Setyono dan Siti Khoirumiyah. Pendidikan adalah salah satu hal terpenting dalam keluarga kami. Dimulai dari pendidikan formal yang ditempuh di SDN Kadipaten 1 Bojonegoro, SMPN 1 Bojonegoro, dan SMAN 1 Bojonegoro. Melalui jalur undangan, penulis diterima sebagai mahasiswa jurusan S1 Matematika ITS pada tahun 2011.

Penulis aktif dalam berbagai kepanitian dan organisasi dalam lingkup jurusan maupun lingkup institut. Diantaranya adalah mengikuti kepanitian ITS EXPO sebagai staff ahli Entertainment Show selama dua periode berturut-turut yaitu pada tahun 2011-2012 dan 2012-2013, sebagai koordinator Acara terbaik pada Olimpiade Matematika ITS pada tahun 2013 dan sebagai ketua divisi Internalisasi Warga HIMATIKA ITS periode 2013-2014.

Banyak hal yang perlu diperbaiki dan dikembangkan dalam penulisan Tugas Akhir ini. Penulis mengharapkan kritik dan saran yang bisa dikirimkan melalui email lusiana.dwisetyaningrum@gmail.com untuk saling berbagi demi bertambahnya ilmu pengetahuan dan wawasan bersama.