



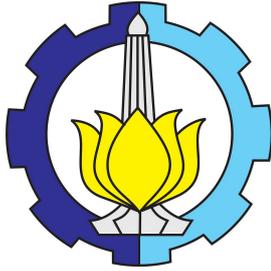
TESIS-SM 142501

**KENDALI OPTIMAL PADA PESAWAT UDARA NIR AWAK
(PUNA) UNTUK MENGIKUTI LINTASAN DENGAN
HALANGAN**

AHMAD ZAENAL ARIFIN
NRP 1212 201 019

Dosen Pembimbing:
Subchan, M.Sc, Ph.D

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015



THESIS-Sm142501

**OPTIMAL CONTROL OF UNMANNED AERIAL VEHICLE
(UAV) FOR PATH FOLLOWING WITH AN OBSTACLE**

AHMAD ZAENAL ARIFIN
NRP 1212 201 019

Supervisor:
Subchan, M.Sc, Ph.D

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2015

**KENDALI OPTIMAL PADA PESAWAT UDARA NIR AWAK
(PUNA) UNTUK MENGIKUTI LINTASAN DENGAN
HALANGAN**

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

oleh:
AHMAD ZAENAL ARIFIN
Nrp. 1212 201 019

Tanggal Ujian : 20 Mei 2015
Periode Wisuda : September 2015

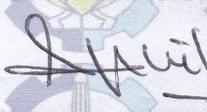
Disetujui oleh:


Subehan, M.Sc, Ph.D.
NIP. 19710513 199702 1 001

(Pembimbing)


Dr. Hariyanto, M.Si
NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)


Prof. DR. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

(Penguji)


Dr. Dra. Mardijah, M.T.
NIP. 19670114 199102 2 001

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana,


Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.
NIP. 19640405 199002 1 001

KENDALI OPTIMAL PADA PESAWAT UDARA NIR AWAK (PUNA) UNTUK MENGIKUTI LINTASAN DENGAN HALANGAN

Nama Mahasiswa : Ahmad Zaenal Arifin
NRP : 1212 201 019
Pembimbing : Subchan, M.Sc, Ph.D

ABSTRAK

Pesawat udara nir awak (PUNA) adalah pesawat udara yang dikendalikan tanpa menggunakan awak manusia. PUNA memiliki banyak kegunaan salah satunya dapat menjangkau daerah yang tidak dapat dijangkau manusia. Karena memiliki banyak kegunaan, PUNA membutuhkan sistem navigasi, panduan dan kendali agar dapat bergerak sesuai keinginan. Permasalahan yang paling sederhana dalam sistem navigasi adalah menemukan jalur dari posisi awal sampai ke tujuan dan menghindari tabrakan dengan halangan (*obstacle*). Jalur yang paling dibutuhkan adalah jalur terpendek dan waktu yang singkat untuk menempuhnya. Metode geometri Dubins adalah salah satu metode dalam perencanaan lintasan yang digunakan untuk menemukan jalur terpendek dengan membangkitkan kelengkungan garis dengan interpolasi kekontinuannya. Untuk menentukan waktu yang optimal digunakan metode Prinsip Minimum Pontryargin (PMP). Dalam Tesis ini metode geometri Dubins digunakan untuk menentukan pilihan lintasan terpendek dari beberapa kemungkinan lintasan yang ada.

Kata kunci: PUNA, *Obstacle*, Metode geometri Dubins, Prinsip Minimum Pontryargin

OPTIMAL CONTROL OF UNMANNED AERIAL VEHICLE (UAV) FOR PATH FOLLOWING WITH AN OBSTACLE

Name : Ahmad Zaenal Arifin
NRP : 1212 201 019
Supervisor : Subchan,M.Sc, Ph.D

ABSTRACT

Unmanned aircraft vehicle (UAV) is controlled aircraft without a human crew. UAV has many functions, one of which can reach areas inaccessible by humans. Because it has many functions, UAV require navigation systems, guidance and control in order to move as desired. The simplest problems in the navigation system is to find a path from the starting position to the destination and avoid a collision with an obstacle. The most path needed is the shortest path and a shortest time to take it. Dubins geometry method is one of the methods in the planning of the track that is used to find the shortest path is sought to evoke the curvature of the line by continuity interpolation. The optimal time is solved by UAV use one of the methods of optimal control that Pontryagin Minimum Principle (PMP). In this thesis Dubins geometry method used to determine the shortest path choice of several possible paths exist.

Keywords: UAV, Obstacle, Dubins Geometry Methods, Pontryagin Minimum Principle method

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan Alhamdulillahirrobbil'alamin, segala puji bagi Allah yang memiliki semua ilmu dan karena limpahan rahmat, kasih sayang serta petunjuk-NYA penulis dapat menyelesaikan Tesis ini yang berjudul:

KENDALI OPTIMAL PADA PESAWAT UDARA NIR AWAK (PUNA) UNTUK MENGIKUTI LINTASAN DENGAN HALANGAN

sebagai salah satu syarat kelulusan program Magister Matematika FMIPA ITS.

Dalam penulisan tesis ini, tidak akan terselesaikan dengan baik tanpa adanya bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Disampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu atas terselesaikannya Tesis ini:

1. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D, Selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember yang telah memberikan kesempatan dan fasilitas kepada penulis untuk menyelesaikan Tesis ini.
2. Bapak Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T, Selaku Direktur Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
3. Ibu Prof.Dr.Erna Apriliani, M.Si, selaku ketua jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember maupun dosen wali yang telah banyak memberikan nasihat serta saran sehingga tesis ini dapat terselesaikan
4. Bapak Dr.Subiono,M.Sc, selaku Dosen Pembimbing dan ketua program studi Pascasarjana Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember maupun sebagai dosen wali yang telah banyak memberikan nasihat serta saran semasa perkuliahan.
5. Bapak Subchan, Ph.D, selaku pembimbing tesis yang telah banyak mengarahkan, membimbing, dan memberi motivasi sehingga tesis ini dapat terselesaikan.
6. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, M.T, Prof. Erna Apriliani,M.Si, dan Dr. Hariyanto,M.Si Selaku penguji tesis yang telah banyak memberikan saran sehingga tesis ini dapat diselesaikan.

7. Pihak pemberi beasiswa FreshGraduated yang telah memberikan dana perkuliahan sehingga penulis terbantu secara finansial.
8. Bapak Ibu dosen serta seluruh staf Tenaga Kependidikan jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember
9. Seluruh pihak yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan tesis ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan ini masih banyak kekurangan, kesalahan dan sangat jauh dari sempurna, sehingga segala kritik dan saran yang sifatnya membangun sangat diperlukan. Penulis berharap tesis ini dapat bermanfaat bagi penulis sendiri pada khususnya dan pembaca pada umumnya.

Surabaya Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
BAB II DASAR TEORI DAN TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Kajian Pustaka Penelitian Terdahulu	5
2.2 Dasar Teori	6
2.2.1 Model Kinematika Pesawat Udara Nir Awak	6
2.2.2 Teori Kendali Optimal	7
2.2.3 Penyelesaian Pengendalian Optimal Menggunakan Prinsip Minimum Potryargin(PMP)	9
2.3 Metode Dubins	10
2.3.1 <i>Flyable</i> path Dubins	10
2.3.2 Lintasan Geometri Dubins.....	11
2.3.3 Eksistensi lintasan Dubins	12
BAB III METODE PENELITIAN	13
BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN	17
4.1 Menentukan Kendali Optimal	17
4.2 Perencanaan Lintasan Geometri Dubins	21

4.2.1	Perencanaan Lintasan Tanpa Halangan	21
4.2.2	Perencanaan Lintasan Dengan Halangan	31
4.3	Lintasan yang dibentuk oleh model kinematika	36
4.4	Simulasi Lintasan Dubins	39
4.4.1	Simulasi Lintasan Dubins tanpa Halangan	39
4.4.2	Simulasi Lintasan Dubins dengan Halangan	43
BAB V	Kesimpulan dan Saran	49
5.1	Saran	50
DAFTAR PUSTAKA		51
BIOGRAFI PENULIS		53

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Parameter dan Hasil Simulasi Tanpa <i>Obstacle</i>	39
Tabel 4.2	Parameter dan Hasil Simulasi dengan <i>Obstacle</i>	43

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Model kinematika PUNA tanpa pengaruh angin	6
Gambar 2.2	Contoh Lintasan CCC dan CLC	11
Gambar 4.1	Lintasan CLC-RSL	21
Gambar 4.2	Lintasan <i>single-obstacle</i>	31
Gambar 4.3	Geometri hubungan titik start dan titik pusat <i>obstacle</i>	32
Gambar 4.4	Geometri hubungan antara titik akhir dan titik pusat <i>obstacle</i>	34
Gambar 4.5	ilustrasi lintasan	36
Gambar 4.6	Lintasan RSR dengan $\chi_0 = \frac{\pi}{6}$	40
Gambar 4.7	Lintasan RSL dengan $\chi_0 = \frac{\pi}{3}$	41
Gambar 4.8	Lintasan LSR dengan $\chi_0 = \frac{11\pi}{12}$	42
Gambar 4.9	Lintasan dengan jari-jari <i>Obstacle</i> 30 tipe SRS	44
Gambar 4.10	Lintasan dengan jari-jari <i>Obstacle</i> 60 tipe SRS	45
Gambar 4.11	Lintasan dengan jari-jari <i>Obstacle</i> 60 tipe SLS	46
Gambar 4.12	Lintasan dengan jari-jari <i>Obstacle</i> 50 tipe SRS	47
Gambar 4.13	Lintasan dengan jari-jari <i>Obstacle</i> 50 tipe SLS	48

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pesawat udara nir awak (PUNA) atau yang di kenal dengan Unmanned Aerial vehicles(UAV) adalah pesawat udara yang dikendalikan tanpa menggunakan awak manusia. Pesawat juga dapat diperlengkapi dengan kamera, sensor, radar, dan peralatan -peralatan lainnya dengan bobot yang bergantung pada bobot pesawat.

PUNA dapat dimanfaatkan antara lain untuk peran pengintaian dan pengumpulan data intelejen termasuk untuk misi pertempuran, pemetaan, dan observasi udara. Selain itu PUNA telah diterapkan untuk kepentingan sipil, misalnya mitigasi bencana, pencurian pasir laut, pemantauan kebakaran hutan , dan lain-lain. Pesawat udara nir awak (PUNA) bisa menjadi penyelesaian alternatif yang memiliki kemampuan untuk menjalankan fungsi yang sama dengan satelit dan pesawat berawak dengan tingkat keadaan operasional yang lebih kecil dan untuk meminimalisir kecelakaan dan jatuhnya korban jiwa. Kemampuan PUNA yang dapat dikendalikan dari jarak jauh atau bahkan bisa di program sendiri dengan lintasan tertentu akan sangat memberikan keuntungan dengan biaya dan waktu yang lebih efektif dan efisien(Chitsaz dan Levalle,, 2006).

Pesawat udara nir awak (PUNA) membutuhkan sistem navigasi, panduan, dan kendali yang mampu mengarahkan pesawat bergerak sampai ke tujuan. Navigasi penerbangan adalah proses mengarahkan posisi pesawat dari satu titik ke titik yang lain dengan selamat dan lancar untuk menghindari rintangan penerbangan. Proses Navigasi penerbangan merupakan koordinasi dari perencanaan (*planning*), penginderaan (*sensing*), dan pengendalian (*control*). Permasalahan navigasi yang paling sederhana adalah menemukan jalan (*path*) dari posisi awal ke target dan melewatinya tanpa terjadi tabrakan dan menghindari halangan (*obstacle*) yang ada. Berdasarkan posisi atau lokasi tersebut, panduan menghasilkan trayektori yang harus di ikuti. Sedangkan kendali terdiri dari aktuator sehingga PUNA dapat mengikuti lintasan yang diinginkan(Fahimi,F., 2008).

Perencanaan lintasan sangat penting dalam navigasi, panduan, dan kontrol penerbangan. Dalam perencanaan lintasan pesawat udara nir awak dapat digunakan berbagai metode. Algoritma dari perencanaan lintasan akan menghasilkan lintasan yang aman dan merupakan lintasan dengan panjang minimal serta mengabaikan

segala kendala yang menghalangi. Sehingga dapat dihasilkan waktu yang optimal pula dalam proses penerbangannya.

Model perencanaan lintasan pesawat udara nir awak telah banyak diteliti dengan berbagai metode salah satunya dengan metode geometri Dubins. Perencanaan lintasan untuk lebih dari satu PUNA juga telah dilakukan yaitu perencanaan lintasan yang dibuat untuk mendeteksi, model, dan melacak batas awan yang terkontaminasi (Subchan dkk., 2008). Penelitian yang berbeda membuktikan bahwa metode Dubins menunjukkan lintasan yang optimal dengan menggunakan prinsip kontrol optimal pontryagin (Shkel dan Lumelsky., 2001). Kelebihan metode geometri Dubins karena dapat membangkitkan kelengkungan garis dengan interpolasi kekontinuannya.

Kendali optimal adalah salah satu metode dalam menentukan pengendali yang memenuhi suatu sistem dinamik (model) dan beberapa kendala dengan meminimumkan atau memaksimumkan suatu fungsi tujuan (Naidu., 2002). Salah satu teori kendali optimal yang digunakan untuk meminimumkan fungsi tujuan dikenal dengan Prinsip Minimum Pontryagin(PMP). PMP digunakan untuk menentukan waktu minimum yang akan ditempuh PUNA untuk melewati lintasan yang dibangun dengan menggunakan geometri dubins.

Oleh karena itu, pengendalian dan perencanaan lintasan sangat penting dalam navigasi dan panduan penerbangan. Dalam pengendalian dan perencanaan lintasan pesawat udara nir awak dapat digunakan berbagai metode. Algoritma dari perencanaan lintasan akan menghasilkan lintasan yang aman dan merupakan lintasan dengan panjang minimal serta dapat menghindari segala kendala yang menghalangi. Sehingga dapat dihasilkan waktu yang optimal pula dalam proses penerbangannya. Dalam Tesis ini akan menerapkan prinsip kendali optimal pontryagin dan juga geometri dubins pada PUNA dengan lintasan yang memiliki kendala untuk mendapatkan lintasan yang optimal.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian tesis ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana menentukan kendali optimal dalam sistem pesawat udara nir awak ?
2. Bagaimana membuat algoritma lintasan pesawat udara nir awak menggunakan metode geometri Dubins dengan *single-obstacle*?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Ketinggian PUNA saat terbang dianggap konstan.
2. Penyelesaian kendali optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.
3. Dalam permasalahan ini yang bergerak hanya PUNA.
4. Lintasan dibangkitkan dengan geometry dubins.
5. Jari-jari lintasan pada lingkaran pertama dan lingkaran kedua adalah sama.
6. Jari-jari *obstacle* ditentukan.
7. Lintasan PUNA menggunakan halangan (*obstacle*) yang statis dan tunggal.
8. Jarak minimum PUNA terhadap *obstacle* ditentukan.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian tesis ini adalah untuk mendapatkan pengendali yang optimal agar pesawat udara nir awak mampu mengikuti lintasan yang telah direncanakan menggunakan geometri Dubins dengan waktu yang optimal.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian tesis ini adalah model lintasan dengan geometri Dubins dapat digunakan secara efektif untuk keamanan penerbangan dalam sistem pengawasan udara

BAB II

DASAR TEORI DAN TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab ini dijelaskan beberapa teori yang digunakan dalam pembahasan tesis selanjutnya. Kajian pustaka mengenai penelitian yang berkaitan dengan geometri Dubins, teori mengenai kendali optimal beserta penyelesaiannya, dan teori mengenai metode Dubins.

2.1 Kajian Pustaka Penelitian Terdahulu

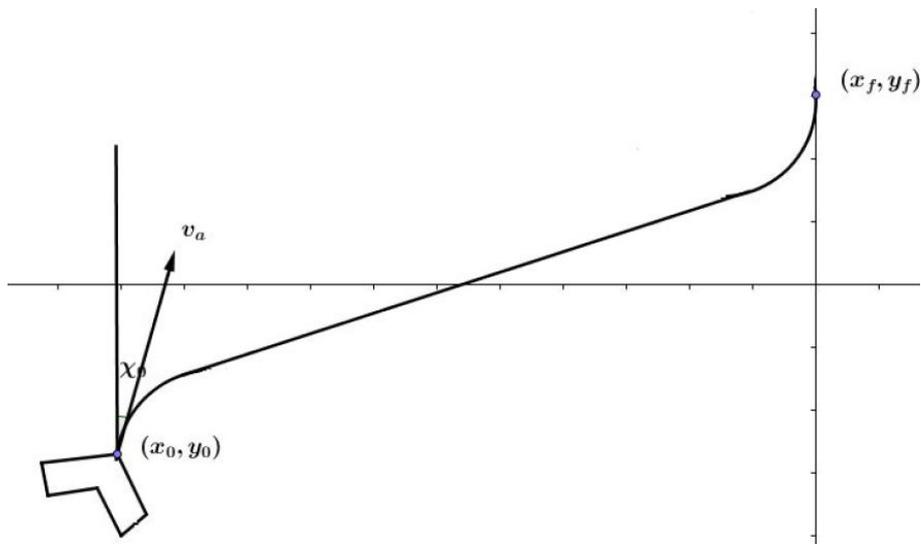
Penelitian mengenai perencanaan lintasan dengan menggunakan geometri Dubins telah dilakukan sebelumnya. Diantaranya adalah

1. Penelitian yang dilakukan oleh N.K. Dewi dan Subchan pada tahun 2010 adalah tentang perencanaan lintasan yang dilakukan yaitu pada pembentukan lintasan tanpa halangan. Lintasan dibangkitkan dengan menggunakan geometri Dubins yang terdiri dari Lengkungan (C) dan garis lurus (S) sehingga diperoleh 4 kemungkinan lintasan yaitu RSR , RSL , LSR , LSL . Untuk mendapatkan lintasan yang paling optimal dilakukan perbandingan dari tiap-tiap panjang lintasan yang diperoleh.
2. Penelitian yang dilakukan oleh Shika Hota dan D. Ghose (2009) adalah perencanaan lintasan yang dibangun dengan menggunakan geometri Dubins untuk menuju ke suatu garis lurus yang artinya koordinat titik akhir tidak ditentukan karena berubah sesuai titik pada garis yang dituju sedangkan keadaan UAV dibagi menjadi dua kondisi. Kondisi yang pertama adalah gerakan dari UAV tidak terpengaruh angin dan gerakannya dipengaruhi angin yang tentunya berpengaruh terhadap model kinematikanya.
3. Penelitian lain mengenai perencanaan lintasan untuk PUNA dilakukan oleh S.Subchan, B. White, dan A Tsourdos (2008). Perencanaan lintasan untuk PUNA dilakukan untuk mendeteksi model dan batasan dari awan yang terkontaminasi.

2.2 Dasar Teori

Pesawat Udara Nir Awak (PUNA) atau pesawat tanpa awak, adalah sebuah pesawat terbang yang tidak memiliki pilot dan penumpang. Fungsi utama dari PUNA ini adalah untuk melakukan penerbangan dengan misi tertentu, khususnya yang dinilai berisiko.

2.2.1 Model Kinematika Pesawat Udara Nir Awak



Gambar 2.1: Model kinematika PUNA tanpa pengaruh angin

Model kinematika dari PUNA tanpa pengaruh angin dirumuskan sebagai berikut (Hota dan Ghose, 2013)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_a \sin \chi \\ v_a \cos \chi \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

dengan $\dot{\chi} = \frac{v_a}{r}$

variabel-variabel dalam persamaan (2.1) yaitu

$x(t)$ = posisi PUNA saat t pada bidang xy

$y(t)$ = posisi PUNA saat t pada bidang xy

$\chi(t)$ = sudut PUNA saat t terhadap sumbu y

Variabel pengendali untuk sistem ini yaitu

$\dot{\chi}(t)$ = kecepatan sudut PUNA saat t

Berikut ini adalah beberapa parameter untuk model pada persamaan (2.1) yaitu

r = jari-jari minimum dari arah putar PUNA

v_a = kecepatan udara

2.2.2 Teori Kendali Optimal

Pada prinsipnya, tujuan dari pengendali optimal adalah menentukan signal atau kendali yang akan diproses dalam sistem dinamik (model) dan memenuhi beberapa konstrain, dengan tujuan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan (J) yang sesuai (Naidu., 2002).

Formulasi masalah kendali optimal diberikan sebagai berikut. Misalkan suatu sistem dinamik linear atau taklinear yang diberikan oleh persamaan

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.2)$$

dengan keadaan awal $x(t_0) = x_0$ dan keadaan akhir $x(t_f) = x_f$ dan $u(t)$ menyatakan pengendali keadaan pada waktu t . Dalam hal ini masalah kendali optimal adalah mencari pengendali optimal u^* yang memenuhi Persamaan (2.2) dengan syarat nilai J berikut ini

$$J(x) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x, u, t) dt \quad (2.3)$$

adalah minimum atau maksimum. Bentuk umum fungsi tujuan pada Persamaan (2.3) dinamakan bentuk Bolza dengan S adalah bentuk Mayer dan V adalah bentuk Lagrange. Dengan syarat batas yang harus dipenuhi yaitu

$$C(x(t), u(t)) \leq 0 \quad (2.4)$$

dan

$$B(x(t)) \leq 0. \quad (2.5)$$

Dengan waktu akhir tetap (diketahui) atau mungkin bebas (tidak diketahui), dan keadaan (*state*) akhir seluruhnya atau sebagian bebas atau tetap. Beberapa bentuk fungsi tujuan (J) (Naidu., 2002), yang diberikan sebagai berikut :

a. Fungsi tujuan untuk sistem kendali optimal waktu

Untuk melakukan transfer sistem yang dinyatakan dari keadaan awal sebarang $x(t_0)$ ke keadaan akhir pada waktu minimum, maka fungsi

tujuannya adalah

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 = t^*$$

b. Fungsi tujuan untuk sistem kendali optimal fuel

Misalkan $u(t)$ adalah *thrust* dari suatu mesin roket dan diasumsikan bahwa besarnya *thrust* adalah proposional pada tingkatan konsumsi fuel. Fungsi tujuannya adalah

$$J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$$

untuk beberapa kontrol, dapat ditulis :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m R_i |u(t)| dt$$

dengan R : faktor bobot.

c. Fungsi tujuan untuk sistem kendali energi minimum

Untuk meminimumkan total energi, fungsi tujuannya adalah :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m (u_i(t))^2 r_i dt$$

d. Fungsi Tujuan untuk Model (2.1) adalah

$$J = \int_0^{t_{go}} 1 dt = t_{go} \quad (2.6)$$

bernilai minimum.

kondisi batas pada permasalahan ini adalah

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \\ \chi(0) &= \chi_0 \\ \chi(t_f) &= \chi_f = 0 \\ x(t_f) &= x_f = 0 \\ y(t_f) &= y_f = \text{free} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Batas nilai kendalinya adalah

$$-\dot{\chi}_{\max} \leq u \leq \dot{\chi}_{\max} \quad (2.8)$$

t_{go} adalah waktu optimal yang ditempuh oleh PUNA dari posisi awal ke posisi akhir. t_{go} diperoleh dengan:

$$t_{go} = \frac{\text{panjang lintasan yang ditempuh}}{v_a} \quad (2.9)$$

2.2.3 Penyelesaian Pengendalian Optimal Menggunakan Prinsip Minimum Potryargin(PMP)

Prinsip Minimum Pontryagin merupakan salah satu cara dalam menyelesaikan masalah kendali optimal untuk menentukan pengendali yang optimal dari sistem dinamik persamaan kendala sehingga mampu meminimumkan fungsi tujuan yang ingin dicapai. Dengan persamaan keadaan dan fungsi tujuan yang telah diberikan, maka langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut (Naidu,, 2002): Berikut ini diberikan satu cara dalam menyelesaikan masalah kendali optimal yang diformulasikan sebelumnya dengan menggunakan persamaan Hamiltonian. Langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut

i. Bentuk Hamiltonian, yaitu $H(x, u, \lambda, t) = V(x, u, t) + \lambda f(x, u, t)$

ii. Selesaikan persamaan kendali

$$\frac{\partial}{\partial u} H(x, u, \lambda, t) = 0 \text{ untuk memperoleh } u^* = u^*(x, \lambda, t)$$

iii. Dapatkan Hamiltonian saat kondisi untuk variabel kendali yaitu

$$H^*(x, \lambda, t) = H(x, u^*, \lambda, t)$$

iv. Selesaikan 2n persamaan

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial x} H^*(x, \lambda, t)$$

dan persamaan ko-state : $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} H^*(x, \lambda, t)$ dengan kondisi batas diberikan oleh keadaan awal dan keadaan akhir yang disebut kondisi transversality. Kondisi batas secara umum untuk sistem yaitu (Naidu,, 2002)

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{t_f} \delta t_f + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right)'_{t_f} \delta x_f = 0 \quad (2.10)$$

dengan S adalah bentuk Mayer dari fungsi tujuan (J) dan H^* adalah persamaan Hamiltonian saat kondisi stasioner untuk variabel pengendalinya.

Jika waktu akhir dan *state* akhir keduanya bebas (tidak diketahui) maka kondisi batas pada Persamaan (2.10) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned}\lambda(t_f) &= \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \\ H^*(t_f) + \frac{\partial S}{\partial t}(t_f) &= 0\end{aligned}$$

- v. Substitusikan hasil-hasil dari langkah (iv) kedalam persamaan u^* untuk memperoleh kendali optimal yang dicari.

2.3 Metode Dubins

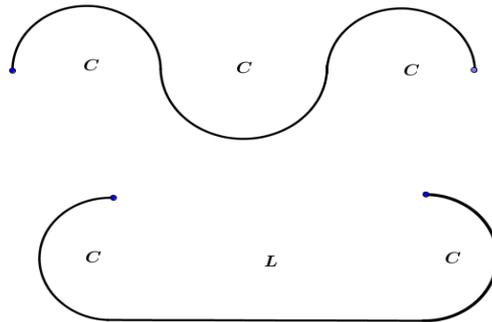
Metode Dubins adalah salah satu metode dalam merancang model lintasan yang merupakan jalur terpendek yang menghubungkan dua konfigurasi dalam pesawat di bawah kendala yang terikat pada kelengkungan lintasan. Garis merupakan jarak terpendek antara dua titik dan sebuah busur lingkaran yang merupakan pergantian kelengkungan terpendek. Perencanaan lintasan Dubins dibentuk dengan rangkaian dua busur lingkaran dengan garis singgung atau dengan tiga garis tangensial busur lingkaran (Hota dan Ghose,, 2013).

2.3.1 Flyable path Dubins

Lintasan dubins pada pesawat yang dibangun oleh garis lurus dan lingkaran dapat berupa CLC, kemudian CCC, dan yang terakhir CC, LC, atau CC, dengan keterangan C adalah busur lingkaran dan L adalah garis lurus. Dengan menggabungkan dua kurva tersebut maka terbentuk jalur terpendek. Dalam membangun model lintasan Dubins ada dua pendekatan yaitu dengan geometri euclidean dan differential geometri. Pada pendekatan geometri euclidean lebih di fokuskan untuk bentuk lintasan CLC, sedangkan differensial geometri menggunakan CCC (Hota dan Ghose,, 2013) dengan bentuk lintasan dapat diilustrasikan seperti pada gambar Gambar 2.2

Flyable Paths adalah suatu lintasan dimana lintasan tersebut berada di dalam atau tidak melebihi batas maksimum kurvatur. Sebagai sebuah kurva yang proporsional, sangat penting untuk sebuah lintasan bertemu dengan batas maksimum kurva dari lintasan PUNA. Sehingga di setiap titik dari lintasan tidak akan lebih besar dari pada batas maksimum kurva yang diinginkan. Hal ini bisa ditulis sebagai berikut :

$$|\mathcal{K}_i| < \mathcal{K}_{max} \quad (2.11)$$



Gambar 2.2: Contoh Lintasan CCC dan CLC

Dengan keterangan \mathcal{K}_i adalah kurva pada lintasan ke- i dan \mathcal{K}_{max} adalah batas maksimum kurva pada lintasan.

Feasible Paths adalah suatu lintasan yang *flyable* dan juga aman. Sehingga memungkinkan bahwa lintasan tersebut dapat dilalui oleh PUNA. Suatu lintasan dikatakan layak bila tidak ada persimpangan dengan panjang yang sama dan memenuhi batas minimum kurvatur

2.3.2 Lintasan Geometri Dubins

Dalam geometri analitik, lintasan Dubins dihasilkan oleh gambar antara garis singgung dua buah busur lingkaran. Secara umum garis singgung menghubungkan antara busur eksternal dan busur internal (diagonal). Kemungkinan lintasan geometri Dubins yang terbentuk ada empat macam lintasan yaitu LSL, LSR, RSR, dan RSL dengan L adalah *left* (kiri) dan R adalah *Right* (kanan) (Shkel dan Lumelsky,, 2001).

Penandaan gerakan awal dan akhir dapat ditentukan dengan menggambarkan masing-masing putaran ke arah kanan atau kiri. Dengan memperhatikan masing-masing posisi, perputaran positif atau negatif akan didefinisikan dengan garis lengkung masing-masing gerakan. Parameter input dalam lintasan geometri Dubins sebagai berikut:

- a. Posisi awal PUNA $P_s(x_s, y_s, \theta_s)$
- b. Posisi akhir PUNA $P_f(x_f, y_f, \theta_f)$
- c. Penentuan jari-jari posisi awal r_s
- d. Penentuan jari-jari posisi akhir r_f

Adapun proses menghitung panjang lintasan geometri Dubins sebagai berikut:

1. Menentukan parameter input yang diharapkan yaitu posisi awal dan akhir PUNA
2. Menentukan koordinat titik pusat lingkaran awal $O_s(x_{cs}, y_{cs})$ dan lingkaran akhir $O_f(x_{cf}, y_{cf})$ dengan :

$$\begin{aligned}(x_{cs}, y_{cs}) &= x_s \pm r_s \cos\left(\theta_s \pm \frac{\pi}{2}\right), y_s \pm r_s \sin\left(\theta_s \pm \frac{\pi}{2}\right) \\(x_{cf}, y_{cf}) &= x_f \pm r_f \cos\left(\theta_f \pm \frac{\pi}{2}\right), y_f \pm r_f \sin\left(\theta_f \pm \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

3. Jarak antara pusat lingkaran O_s dan O_f dihubungkan dengan garis yang disebut dengan garis pusat c yang dapat di hitung dengan geometri Euclidean.
4. Menentukan posisi koordinat *tangent entry* $T_{en}(x_{Ten}, y_{Ten})$ dan *tangent exit* $T_{ex}(x_{Tex}, y_{Tex})$. *tangent exit* adalah titik keluar dari lintasan bujur lingkaran dan awal dari lintasan garis. Sedangkan *tangent entry* adalah titik dari akhir lintasan garis dan awal dari busur lingkaran kedua yang akan dibentuk. Sebelum menentukan koordinat perlu dilakukan perhitungan sudut *entry* ϕ_{en} dan sudut *exit* ϕ_{ex} .
5. Dari hasil atas dapat dihitung panjang lintasan Dubins sebagai berikut :

$$\begin{aligned}L_{Dubins} &= L_{arc,start} + L_{garisinggung} + L_{arc,finish} \\L_{Dubins} &= f(r_s, r_f)\end{aligned}$$

2.3.3 Eksistensi lintasan Dubins

Sebelum menghitung panjang lintasan, sangat penting untuk mengetahui lintasan yang mungkin untuk dilalui oleh pesawat. Ini akan menyimpan waktu dalam komputasi sistem. Eksistensi lintasan antara dua karakter lintasan Dubins ditentukan oleh adanya garis singgung antara busur. Garis singgung eksternal dan tangent exit menentukan keberadaan lintasan RSR dan LSL, sedangkan keberadaan lintasan RSL dan LSR ditentukan oleh garis singgung internal. *Tangen eksternal* hilang ketika lingkaran utama sudah termasuk satu sama lain. *Tangen internal* hilang ketika lingkaran utama berpotongan satu sama lain. Kedua kondisi ditentukan oleh jarak pusat s dan jari-jari-balik r_s dan r_f . Namun pusat lingkaran utama ditetapkan oleh jari-jari dan kelengkungan (Shanmugavel,, 2007). Oleh karena itu lintasan Dubins bergantung pada sebuah fungsi dari jari-jari sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{Garis singgung luar} &: (c + r_s) > r_f, r_f > r_s \\ \text{Garis singgung dalam} &: c > (r_s + r_f), r_f > r_s\end{aligned}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan bagaimana langkah-langkah yang digunakan dalam tesis ini. Selain itu, dijelaskan juga prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan tesis ini. Beberapa tahapan penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini, yaitu :

1. Studi literatur

Dalam tahap ini akan dilakukan identifikasi permasalahan dengan mempelajari tentang model kinematika PUNA, teori mengenai kendali optimal dan penyelesaiannya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin, perencanaan lintasan menggunakan geometry dubins. Pembelajaran lebih mendalam mengenai hal ini di peroleh baik melalui buku-buku literatur, jurnal, paper.

2. Menentukan kendali yang optimal .

Dalam tahap ini akan ditentukan pengendali optimal menggunakan teori kendali optimal yaitu Prinsip Minimum Pontryagin, berikut langkah - langkah yang dilakukan dalam tahap ini:

a. Membentuk fungsi Hamilton

Pada bab sebelumnya telah diberikan model kinematika PUNA. Model tersebut disubstitusikan ke dalam bentuk Hamiltonian menjadi:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) &= V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t) \\ &= 1 + \lambda' \dot{X} \\ &= 1 + \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y} + \lambda_3 \dot{\chi}\end{aligned}$$

b. Meminimumkan \mathcal{H} terhadap semua vektor kendali

Persamaan Hamiltonian yang didapat kemudian diturunkan terhadap waktu

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$$

- c. Menentukan persamaan state dan costate.

Persamaan *State* sama dengan persamaan (2.1) jadi yang sekarang dicari adalah persamaan *co-state*

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}$$

- d. Kondisi batas pada permasalahan ini adalah

$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0$$

$$\chi(0) = \chi_0$$

$$\chi(t_f) = \chi_f = 0$$

$$x(t_f) = x_f = 0$$

$$y(t_f) = y_f = \text{free}$$

- e. Mendapatkan pengendali optimal yang sesuai dengan batas nilai pengendalinya.

3. Membuat Algoritma Perencanaan Lintasan

Dalam perencanaan lintasan, Hal penting yang harus diperhatikan adalah menentukan lintasan yang mungkin akan dilewati PUNA (*Feasible path*) dan juga lintasan dengan jalur terpendek.

1. Algoritma perencanaan lintasan geometri Dubins tanpa halangan

(a) Inisialisasi input

Data input yang digunakan dalam algoritma perencanaan lintasan ini adalah koordinat awal dan koordinat akhir posisi PUNA terhadap sumbu absis dan ordinat, jari-jari lingkaran awal dan akhir, sudut hadap pesawat awal dan akhir. Pada model kinematika PUNA, salah satu kondisinya adalah koordinat akhirnya tidak ditentukan, lebih tepatnya (y_f), oleh karena itu untuk mendapatkannya sebagai data input digunakan salah satu tipe lintasan.

(b) Selanjutnya dilakukan analisa model lintasan yang mungkin terbentuk untuk dilalui oleh pesawat (*feasible path*) dari input yang di inisialisasikan dengan kemungkinan lintasan LSL, RSR, LSR, RSL dan dihitung panjang lintasannya masing-masing. Panjang

lintasan di hitung berdasarkan metode geometri Dubins yaitu:

$$L_{dubins} = L_{arc,start} + L_{garis\ singgung} + L_{arc,finish}$$

- (c) Dari kemungkinan lintasan yang terbentuk, maka selanjutnya dilakukan perbandingan panjang lintasan yang mungkin dilewati .
- (d) Setelah melakukan perbandingan, maka dilakukan pemilihan terhadap ke empat lintasan dengan memilih lintasan yang memiliki panjang lintasan terpendek atau lintasan yang optimal.
- (e) Hasil perhitungan panjang lintasan optimal kemudian akan di plot kurva lintasan yang akan dilalui pesawat (*flyable path*)
- (f) Jika ingin menentukan jalan yang akan dilintasi lagi maka kembali ke langkah pertama.
- (g) Namun jika tidak ingin menentukan posisi baru maka proses dapat di akhiri atau berakhir.

2. Algoritma untuk menghindari *obstacle*

Pada saat terdapat halangan (*obstacle*) pada sebuah lintasan yang telah ditentukan maka PUNA harus menghindari *obstacle* tersebut agar terhindar dari resiko kerusakan. Oleh karena itu harus dirancang suatu lintasan baru tetapi tetap harus yang paling optimal dan *flyable*. Berikut algoritma yang harus dilakukan agar PUNA dapat menghindari *obstacle* tersebut (Subchan dkk., 2008)

- (a) Membuat lintasan *flyable* untuk PUNA
- (b) Mengubah arah lintasan untuk memenuhi kondisi kendala dengan menciptakan titik -titik yang melewati kendalanya.
- (c) Menghitung panjang lintasan.
- (d) Menemukan lintasan baru yang direferensikan.
- (e) meningkatkan panjang lintasan terpendek ke panjang lintasan referensi. Hasil ini adalah panjang lintasan yang sama
- (f) periksa lagi untuk lintasan apakah memenuhi langkah b.
- (g) jika tidak, mengatur posisi titik baru dan meningkatkan kelengkungan untuk memenuhi kondisi keamanan untuk menghasilkan panjang lintasan yang sama

4. Mensimulasikan dengan MatLab

Pada tahapan ini dibahas rancangan model perencanaan lintasan berdasarkan

algoritma yang telah dirancang dan analisa model yang selanjutnya akan di implementasikan pada perangkat lunak MATLAB dengan desain perhitungan model yang nantinya memudahkan user / pengguna untuk mengontrol dan mengatur PUNA. Sehingga dapat diketahui bentuk lintasan yang mungkin dan lintasan yang akan dilalui oleh PUNA.

5. Analisa Hasil

Dalam tahap ini akan dilakukan analisa pada hasil simulasi yaitu waktu dan jarak yang ditempuh oleh pesawat sesuai dengan konsep awal atau tidak.

6. Penarikan kesimpulan

Setelah melakukan simulasi maka dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil yang dikerjakan pada tahap-tahap sebelumnya dan selanjutnya dibuat laporan tesis

BAB IV

ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, diuraikan cara mendapatkan kendali optimal ($\dot{\chi}$) dan juga perencanaan lintasan menggunakan metode Dubins tanpa halangan dan perencanaan lintasan dengan halangan.

4.1 Menentukan Kendali Optimal

Penyelesaian masalah kendali optimal yang telah dijelaskan pada subbab sebelumnya diselesaikan dengan prinsip Pontryagin yang menggunakan persamaan Hamiltonian. Persamaan Hamiltonian untuk masalah kendali optimal dengan menggunakan persamaan kinematik (2.1) dengan fungsi tujuannya pada Persamaan (2.3) yaitu

1. Membentuk persamaan Hamiltonian

Persamaan (2.1) dan (2.6) diubah kedalam bentuk Hamiltonian menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) &= V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t) \\ &= 1 + \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y} + \lambda_3 \dot{\chi} \\ &= 1 + \lambda_1(v_a \sin \chi) + \lambda_2(v_a \cos \chi) + \lambda_3 u \end{aligned} \quad (4.1)$$

2. Meminimumkan \mathcal{H} terhadap semua vektor kendali

Persamaan Hamiltonian yang didapat kemudian diturunkan terhadap u untuk mendapatkan u yang optimal

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dengan kata lain kendalinya linear, maka untuk mendapatkan kendalinya akan digunakan fungsi *Switching*. Kemudian mendapatkan fungsi Pontryaginya

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) &\leq \mathcal{H}(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t) \\ \lambda_3 u^* &\leq \lambda_3 u \end{aligned} \quad (4.3)$$

dengan $\dot{\chi}_{max} = \frac{v_a}{r}$ dan $-\dot{\chi}_{max} \leq u \leq \dot{\chi}_{max}$

Berdasarkan pada persamaan (4.3) maka diperoleh 3 kondisi optimal saat PUNA melewati lintasan

(a) pada setiap segmen busur dengan $\lambda_3 > 0$

$$\begin{aligned} -\dot{\chi}_{max} &\leq u \leq \dot{\chi}_{max} \\ -\dot{\chi}_{max}\lambda_3 &\leq \lambda_3 u \leq \dot{\chi}_{max}\lambda_3 \end{aligned}$$

agar menjamin bahwa

$$\lambda_3 u \geq \lambda_3 u^*$$

maka

$$\lambda_3 u^* \leq -\dot{\chi}_{max}\lambda_3$$

dari persamaan diatas diperoleh $u^* \leq -\dot{\chi}_{maks}$ karena u^* berada dalam interval u maka berlaku $-\dot{\chi}_{max} \leq u^* \leq \dot{\chi}_{max}$ sehingga $u^* = -\dot{\chi}_{maks}$

(b) pada setiap segmen busur dengan $\lambda_3 < 0$

$$\begin{aligned} -\dot{\chi}_{max} &\leq u \leq \dot{\chi}_{max} \\ -\dot{\chi}_{max}\lambda_3 &\geq \lambda_3 u \quad \text{atau} \quad \lambda_3 u \geq \lambda_3 \dot{\chi}_{max} \end{aligned}$$

agar menjamin bahwa

$$\lambda_3 u \geq \lambda_3 u^*$$

maka

$$\lambda_3 u^* \leq \lambda_3 \dot{\chi}_{max}$$

dari persamaan diatas diperoleh $u^* \geq \dot{\chi}_{maks}$ dengan syarat $\lambda_3 < 0$. karena u^* berada dalam interval u maka berlaku $-\dot{\chi}_{max} \leq u^* \leq \dot{\chi}_{max}$ sehingga $u^* = \dot{\chi}_{maks}$

(c) pada setiap segmen garis lurus dengan $\lambda_3 = 0$, maka u^* dicari menggunakan fungsi *switching*

3. Menentukan Persamaan *State* dan *Co-state*

Persamaan *State* sama dengan persamaan (2.1) jadi yang sekarang dihitung adalah persamaan *co-state*

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}$$

Dalam persamaan ini terdapat 3 *state* yaitu x, y, u maka persamaan *co-statenya* juga ada 3 yaitu

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\
&= 0 \\
\dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \\
&= 0 \\
\dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \chi} \\
&= -\lambda_1 v_a \cos \chi + \lambda_2 v_a \sin \chi
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Setelah diperoleh persamaan *co-state* kemudian diselesaikan dengan mengintegrasikan masing-masing persamaan diperoleh

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \int \dot{\lambda}_1 dt \\
&= \int 0 dt \\
&= c_1
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \int \dot{\lambda}_2 dt \\
&= \int 0 dt \\
&= c_2
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \int \dot{\lambda}_3 dt \\
&= \int (-\lambda_1 v_a \cos \chi + \lambda_2 v_a \sin \chi) dt \\
&= -\lambda_1 r \cos \chi + \lambda_2 r \sin \chi + c_3
\end{aligned} \tag{4.7}$$

c_1, c_2, c_3 adalah konstanta

Lintasan yang optimal dapat diperoleh dari garis lurus dan arah belok pada busur lingkaran. Berdasarkan kondisi batas (2.7), pada saat tanpa adanya *terminal cost function* $S = 0$, $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$, dan koordinat Y_f pada target adalah bebas maka kondisi batas berubah menjadi

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^* |_{t_{go}} \delta t_{go} - \lambda^*(t) |_{t_{go}} \delta X_f &= 0 \\
\lambda_2(t_{go}) &= 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

dari persamaan (4.5) dan (4.8) diperoleh

$$\lambda_2 = 0 \quad (4.9)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\lambda_1 v_a \cos \chi \quad (4.10)$$

Pada saat lintasan memasuki segmen garis lurus itu artinya $\dot{\lambda}_3 = 0$ maka sudutnya adalah $\frac{\pi}{2}$

4. Fungsi *Switching* Dari persamaan Hamiltonian di atas terlihat bahwa nilai kendali berderajat 1 atau \mathcal{H} linear terhadap u . Untuk menyelesaikan persamaan tersebut (mendapatkan nilai u), maka digunakan *switching condition*(S).

$$\begin{aligned} S &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dari hasil dia atas, kendali u belum ditemukan secara langsung, maka persamaan *switching condition*(S) diturunkan terhadap t .

$$\begin{aligned} S &= \lambda_3 = 0 \\ \dot{S} &= \dot{\lambda}_3 = 0 \\ 0 &= -\lambda_1 v_a \cos \chi \\ 0 &= \lambda_1 v_a \cos \chi \end{aligned}$$

karena kendali masih belum juga muncul maka *switching condition*(S) diturunkan sekali lagi terhadap t .

$$\begin{aligned} \ddot{S} &= v_a \dot{\lambda}_1 \cos \chi + v_a \dot{\chi} \sin \chi \lambda_1 \\ 0 &= v_a \dot{\lambda}_1 \cos \chi + v_a \dot{\chi} \sin \chi \lambda_1 \\ -\dot{\lambda}_1 \cos \chi &= \dot{\chi} \sin \chi \lambda_1 \\ \dot{\chi} &= \frac{-\dot{\lambda}_1 \cot \chi}{\lambda_1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Jadi diperoleh

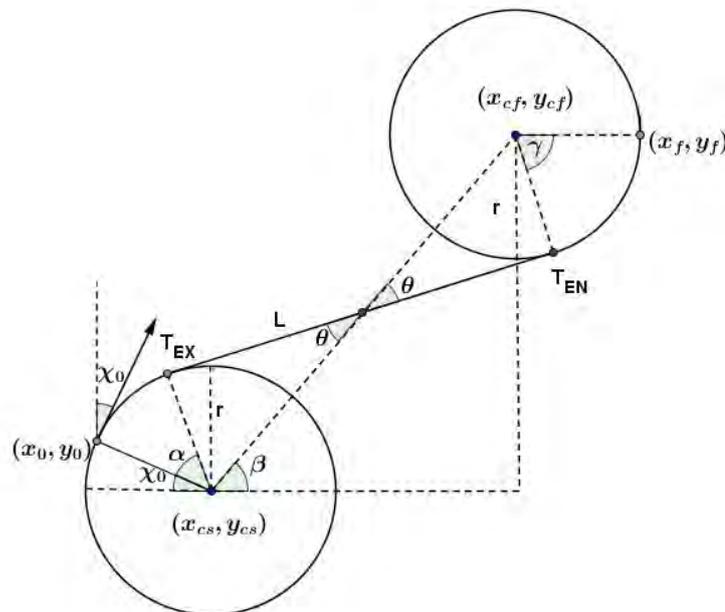
$$u^*(t) = \begin{cases} -\dot{\chi}_{\text{maks}} & \text{saat } \lambda_3 > 0 \\ 0 & \text{saat } \lambda_3 = 0 \\ \dot{\chi}_{\text{maks}} & \text{saat } \lambda_3 < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

4.2 Perencanaan Lintasan Geometri Dubins

Dalam subbab ini akan dibahas mengenai beberapa lintasan yang mungkin dilalui dengan menggunakan metode dubins. Dalam proses perencanaan lintasan pesawat udara nir awak (PUNA) dengan metode geometri Dubins, perlu diadakan analisa secara menyeluruh terhadap model lintasan yang akan di rancang dalam sistem perangkat lunak yang meliputi proses perhitungan lintasan yang terbentuk sehingga didapat lintasan optimal yang akan dilalui berupa lintasan feasible dan lintasan flyable. Lintasan optimal yang dibentuk metode geometri Dubins berupa lintasan CLC dengan C adalah lingkaran dan L adalah segmen garis. Berdasarkan klasifikasi, geometri Dubins memiliki empat bentuk lintasan yang mungkin yaitu RSR, LSL, RSL, LSR. Dengan R adalah *right* yang artinya pesawat berbelok ke arah kanan dan L adalah *left* yang artinya pesawat berbelok ke arah kiri dan S adalah segmen garis.

Dari ke-empat bentuk lintasan yang terbentuk diperlukan perhitungan dari masing-masing bentuk lintasan sehingga rancangan lintasan yang akan dilalui oleh PUNA adalah lintasan optimal.

4.2.1 Perencanaan Lintasan Tanpa Halangan



Gambar 4.1: Lintasan CLC-RSL

Karena ada 4 kemungkinan lintasan maka dihitung masing-masing kemudian dibandingkan untuk menemukan lintasan terpendek

1. Lintasan RSL (*Right-Straight-Left*)

Untuk mendapatkan panjang minimal dari lintasan RSL maka dilakukan dengan cara meminimumkan total panjang lintasan RSL(*dist*). Dari Gambar 4.1 total panjang lintasan RSL adalah

$$dist = L + r\alpha + r\gamma \quad (4.14)$$

dengan

L panjang garis singgung

$r\alpha$ panjang busur pada lingkaran pertama

$r\gamma$ panjang busur pada lingkaran akhir

Untuk menghitung panjang garis singgung (L) maka dilakukan cara berikut

(a) mendapatkan koordinat pusat lingkaran pertama

$$\begin{aligned} \cos(\chi_0) &= \frac{x_{cs} - x_0}{r} \\ x_{cs} - x_0 &= r \cos(\chi_0) \\ x_{cs} &= x_0 + r \cos(\chi_0) \\ \sin(\chi_0) &= \frac{y_0 - y_{cs}}{r} \\ y_0 - y_{cs} &= r \sin(\chi_0) \\ y_{cs} &= y_0 - r \sin(\chi_0) \\ (x_{cs}, y_{cs}) &= (x_0 + r \cos(\chi_0), y_0 - r \sin(\chi_0)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

(b) mendapatkan koordinat lingkaran kedua

$$\begin{aligned} \cos(\chi_f) &= \frac{x_{cf} - x_f}{r} \\ x_{cf} - x_f &= r \cos(\chi_f) \\ x_{cf} &= x_f + r \cos(\chi_f) \\ \sin(\chi_f) &= \frac{y_f - y_{cf}}{r} \\ y_{cf} - y_f &= r \sin(\chi_f) \\ y_{cf} &= y_f + r \sin(\chi_f) \\ (x_{cf}, y_{cf}) &= (x_f + r \cos(\chi_f), y_f + r \sin(\chi_f)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

karena $x_f = 0$ dan $\chi_f = 0$ maka

$$(x_{cf}, y_{cf}) = (r, y_f) \quad (4.17)$$

(c) menentukan panjang L dengan menggunakan garis singgung persekutuan luar

menentukan jarak antar pusat lingkaran (l) dengan geometri euclidean

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(x_{cs} - x_{cf})^2 + (y_{cs} - y_{cf})^2} \\ &= \sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2} \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{l^2 - (2r)^2} & (4.18) \\ &= \sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2 - 4r^2} \end{aligned}$$

Kemudian menentukan panjang busur lingkaran pertama dan kedua

i. panjang busur ligkaran pertama

$$\begin{aligned} \text{panjang busur 1} &= 2\pi r \times \frac{\alpha}{2\pi} \\ &= r\alpha & (4.19) \end{aligned}$$

ii. panjang busur lingkaran ke dua

$$\begin{aligned} \text{panjang busur 2} &= 2\pi r \times \frac{\gamma}{2\pi} \\ &= r\gamma & (4.20) \end{aligned}$$

dengan

$$\alpha = \gamma - \chi_0 \quad \text{dan} \quad \gamma = \pi/2 + \theta - \beta$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{r}{\frac{1}{2}l} \\ &= \frac{2r}{l} \\ &= \frac{2r}{\sqrt{(x_{cs} - x_{cf})^2 + (y_{cs} - y_{cf})^2}} \\ \theta &= \arcsin \left(\frac{2r}{\sqrt{(x_{cs} - x_{cf})^2 + (y_{cs} - y_{cf})^2}} \right) \\ &= \arcsin \left(\frac{2r}{\sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin \beta &= \frac{(n-b)}{l} \\
&= \frac{(n-b)}{l} \\
&= \frac{(n-b)}{\sqrt{(x_{cs} - x_{cf})^2 + (y_{cs} - y_{cf})^2}} \\
\beta &= \arcsin \left(\frac{(n-b)}{\sqrt{(x_{cs} - x_{cf})^2 + (y_{cs} - y_{cf})^2}} \right) \\
&= \arcsin \left(\frac{(y_f - y_0 + r \sin \chi_0)}{\sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2}} \right)
\end{aligned}$$

iii. Panjang total busur lingkaran pertama dan lingkaran kedua

$$\begin{aligned}
\text{Panjang total busur} &= r\alpha + r\gamma \\
&= r(\gamma - \chi_0) + r(\pi/2 + \theta - \beta) \\
&= r((\pi/2 + \theta - \beta) - \chi_0) + r(\pi/2 + \theta - \beta) \\
&= r\pi + 2r\theta - 2r\beta - \chi_0
\end{aligned}$$

Jadi panjang lintasan RSL *dist* yang ditempuh PUNA adalah

$$dist = L + r\pi + 2r\theta - 2r\beta - \chi_0 \quad (4.21)$$

Agar diperoleh panjang lintasan minimum maka dicari kondisi stasioner dari turunan pertama *dist* terhadap y_f

$$\frac{d(dist)}{dy_f} = \underbrace{\frac{dL}{dy_f}}_I + \underbrace{\frac{d(r\pi)}{dy_f}}_{II} + \underbrace{\frac{d(2r\theta)}{dy_f}}_{III} - \underbrace{\frac{d(2r\beta)}{dy_f}}_{IV} - \underbrace{\frac{d(\chi_0)}{dy_f}}_V = 0 \quad (4.22)$$

Persamaan (I)

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dy_f} &= \frac{1}{2}((x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2 - 4r^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad - 2(y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f) \\
&= \frac{-(y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)}{\sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2 - 4r^2}} \\
&= -\frac{y_{cs} - y_{cf}}{L}
\end{aligned}$$

Persamaan (II)

$$\frac{d(r\pi)}{dy_f} = 0$$

Persamaan (III)

$$\frac{d(2r\theta)}{dy_f} = 2r \frac{d(\theta)}{dy_f}$$

$$\theta = \arcsin \left(\frac{2r}{\sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2}} \right)$$

misalkan

$$u = \frac{2r}{\sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2}}$$

$$du = -\frac{1}{2} \times 2r \times -2 \frac{(y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)}{\sqrt{((x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2)^3}} dy_f$$

$$= 2r \frac{(y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)}{((x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2)^{\frac{3}{2}}} dy_f$$

$$2rd(\theta) = 2r \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du$$

$$= 2r2r \frac{\frac{(y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)}{((x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2r}{\sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2}} \right)^2}} dy_f$$

$$= 2r2r \frac{\frac{(y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)}{((x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\frac{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2 - 4r^2}{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2}}} dy_f$$

$$= 2r2r \frac{(y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)}{L(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2} dy_f$$

$$\frac{2rd(\theta)}{dy_f} = 2r2r \frac{y_{cs} - y_{cf}}{l^2 L}$$

Persamaan (IV)

$$\frac{d(2r\beta)}{dy_f} = 2r \frac{d(\beta)}{dy_f}$$

$$\beta = \arcsin \left(\frac{(y_f - y_0 + r \sin \chi_0)}{\sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2}} \right)$$

misalkan

$$q = \frac{(y_f - y_0 + r \sin \chi_0)}{\sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(q)}{dy_f} &= \frac{\sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2} - \frac{1}{2} \frac{-2(y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)(y_f - y_0 + r \sin \chi_0)}{\sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2}}}{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2} \\ &= \frac{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)(y_f - y_0 + r \sin \chi_0)}{\sqrt{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2} \cdot ((x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2)} \\ &= \frac{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2 - (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2}{((x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2}{((x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(x_{cs} - x_{cf})^2}{l^2 \sqrt{l}} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 2rd\beta &= 2r \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} dq \\ &= \frac{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2}{((x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2)^{\frac{3}{2}}} dy_f \\ &= \frac{\sqrt{1 - \frac{(y_s + r \sin(\chi_0) - y_f)^2}{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2}}}{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)} dy_f \\ &= \frac{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)}{(x_s + r \cos(\chi_0) - r)^2 + (y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2} dy_f \\ \frac{2rd\beta}{dy_f} &= \frac{x_{cs} - x_{cf}}{l^2} \end{aligned}$$

Persamaan (V)

$$\frac{d\chi_0}{dy_f} = 0$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{d(dist)}{d_{y_f}} &= -\frac{y_{cs} - y_{cf}}{L} + 2r \frac{y_{cs} - y_{cf}}{l^2 L} - 2r \frac{x_{cs} - x_{cf}}{l^2 \sqrt{l}} = 0 \\
&= -\frac{y_{cs} - y_{cf}}{L} + 2r \left(\frac{2r \frac{y_{cs} - y_{cf}}{l^2 L} - \frac{(x_{cs} - x_{cf})^2}{l^2 \sqrt{l}} \right) = 0 \\
\frac{y_{cs} - y_{cf}}{L} &= 2r \left(\frac{2r \frac{y_{cs} - y_{cf}}{l^2 L} - \frac{x_{cs} - x_{cf}}{l^2} \right) \\
&= 2r \left(\frac{2r \frac{y_{cs} - y_{cf}}{l^2 L} - \frac{(x_{cs} - x_{cf})L}{l^2 L} \right) \\
y_{cs} - y_{cf} &= 2r \left(\frac{2r (y_{cs} - y_{cf}) - (x_{cs} - x_{cf})L}{l^2} \right) \\
(y_{cs} - y_{cf})l^2 &= 2r (2r (y_{cs} - y_{cf}) - (x_{cs} - x_{cf})L) \tag{4.23}
\end{aligned}$$

dari persamaan (4.23) diperoleh

$$\begin{aligned}
(y_{cs} - y_{cf})(y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2 &= 4r^2 (y_{cs} - y_{cf}) \\
(y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f)^2 &= 4r^2 \\
y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f &= \pm 2r
\end{aligned}$$

Karena $y_0 - r \sin(\chi_0) - y_f < 0$ maka

$$y_f = y_0 - r \sin(\chi_0) + 2r \tag{4.24}$$

maka, panjang lintasan yang optimal ($dist_{min}$) (Gambar 4.1) adalah

$$\begin{aligned}
d_{min} &= (x_0 + r \sin \chi_0 + r) + (\pi/2 - \chi_0)r + \pi/2r \\
&= -x_0 - r \sin \chi_0 - r + (\pi - \chi_0)r
\end{aligned}$$

Setelah y_f didapatkan maka dapat digunakan sebagai parameter input untuk menghitung panjang lintasan lainnya.

2. Lintasan RSR (*Right-Straight-Right*)

Lintasan RSR merupakan lintasan yang terbentuk karena pesawat berbelok ke arah kanan (searah dengan jarum jam) dan membentuk busur lingkaran yang selanjutnya disebut dengan lingkaran pertama dan akan keluar melalui sebuah titik pada busur lingkaran. Selanjutnya akan membentuk lintasan garis yang berujung pada sebuah titik pada busur lingkaran kedua yang terbentuk menuju posisi akhir pesawat dengan sudut hadap pesawat yang di inginkan.

Sehingga lintasan yang terbentuk adalah lingkaran kanan garis lingkaran kanan (RSR). Adapun proses hitung lintasan RSR sebagai berikut:

- (a) Menentukan posisi awal (x_0, y_0) dan posisi akhir PUNA (x_f, y_f) terhadap sumbu x dan y pada koordinat kartesius (x,y) yang mana y_f dicari, sudut hadap pesawat χ_0 dan χ_f , dan jari-jari minimum lingkaran r yang akan dibentuk.
- (b) Menentukan pusat lingkaran yang akan di bentuk dengan batas jari-jari minimum dengan berbelok ke arah kanan posisi PUNA (searah jarum jam) pada lingkaran awal (x_{cs}, y_{cs}) dan lingkaran akhir (x_{cf}, y_{cf}) dengan rumus sebagai

$$\begin{aligned} (x_{cs}, y_{cs}) &= \left(x_0 - r \cos \left(\chi_0 + \frac{\pi}{2} \right), y_0 - r \sin \left(\chi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ (x_{cf}, y_{cf}) &= \left(x_f - r \cos \left(\chi_f + \frac{\pi}{2} \right), y_f - r \sin \left(\chi_f + \frac{\pi}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

- (c) Menghitung jarak pusat antar lingkaran(l) dengan geometri euclidean:

$$l = \sqrt{(x_{cs} - x_{cf})^2 + (y_{cs} - y_{cf})^2} \quad (4.25)$$

- (d) Menganalisa kondisi eksistensi lintasan Dubins yang berbentuk RSR dengan syarat batas : Jika $|r - l| < r$ Maka lintasan yang akan terbentuk tidak *feasible*. Akan tetapi, jika syarat tersebut tidak terpenuhi maka lintasan *feasible*.
- (e) Menentukan Sudut dari kemiringan garis yang dibentuk oleh jarak pusat lingkaran yang selanjutnya disebut ψ dapat dihitung sebagai berikut :

$$\psi = \arctan \left(\frac{y_{cf} - y_{cs}}{x_{cf} - x_{cs}} \right) \quad (4.26)$$

Kemudian menentukan sudut yang dibentuk oleh garis l dan selisih jari jari lingkaran

$$\phi = \arctan \left(\frac{|r - r|}{\sqrt{l^2 - (|r - r|)^2}} \right) \quad (4.27)$$

- (f) Menentukan titik akhir dari busur lingkaran awal yang selanjutnya disebut dengan *tangen exit* sebelum membentuk lintasan garis dan titik akhir dari lintasan garis yang terbentuk sebelum membentuk lintasan busur lingkaran akhir yang selanjutnya disebut *tangen entry*. Namun

sebelum menentukan titik maka harus ditentukan terlebih dulu sudut *entry* (ϕ_{en}) dan sudut *exit* (ϕ_{ex}) dari sudut hadap PUNA ketika melalui titik tersebut. adapun perhitungannya sebagai berikut:

$$\phi_{en} = \phi + \frac{\pi}{2} + \psi \quad (4.28)$$

$$\phi_{ex} = \phi + \frac{\pi}{2} + \psi \quad (4.29)$$

Sehingga dalam menentukan koordinat *tangen entry* dan *tangen exit* adalah:

$$T_{EN} = (x_{cs} + r \cos \phi_{en}, y_{cs} + r \sin \phi_{en}) \quad (4.30)$$

$$T_{EX} = (x_{cs} + r \cos \phi_{ex}, y_{cs} + r \sin \phi_{ex}) \quad (4.31)$$

- (g) Selanjutnya menghitung panjang lintasan garis atau jarak titik tangen entry dan tangen exit dengan geometri euclidean

$$L = \sqrt{(x_{TEN} - x_{TEX})^2 + (y_{TEN} - y_{TEX})^2} \quad (4.32)$$

- (h) Kemudian menghitung panjang lintasan busur lingkaran awal dan lingkaran akhir untuk panjang busur lingkaran awal:

$$\text{panjang busur 1} = r * \left(\chi_0 + \frac{\pi}{2} - \phi_{ex} \right) \quad (4.33)$$

$$\text{panjang busur 2} = r * \left(\chi_0 + \frac{\pi}{2} - \phi_{en} \right) \quad (4.34)$$

- (i) Panjang lintasan total dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\text{dist} = \text{panjang busur 1} + L + \text{panjang busur 2} \quad (4.35)$$

3. Lintasan LSL (*Left-Straight-Left*)

Pesawat berbelok ke arah kiri dan membentuk busur lingkaran yang selanjutnya disebut dengan lingkaran pertama dan akan keluar melalui sebuah titik pada busur lingkaran tersebut. Selanjutnya akan membentuk lintasan garis yang berujung pada sebuah titik dan masuk ke busur lingkaran kedua yang terbentuk dengan arah belok ke kanan (berlawanan arah jarum jam) menuju posisi akhir pesawat dengan sudut hadap pesawat yang diinginkan. Sehingga lintasan yang terbentuk adalah lingkaran-garis-lingkaran (LSL). Adapun proses hitung lintasan LSL hampir sama dengan proses lintasan RSR,

namun yang membedakan adalah penentuan pusat lingkaran yang dibentuk yaitu:

$$(x_{cs}, y_{cs}) = \left(x_0 - r \cos \left(\chi_0 - \frac{\pi}{2} \right), y_0 - r \sin \left(\chi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (4.36)$$

$$(x_{cf}, y_{cf}) = \left(x_f - r \cos \left(\chi_f - \frac{\pi}{2} \right), y_f - r \sin \left(\chi_f - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (4.37)$$

Dan perhitungan sudut tangen entry dan tangen exit

$$\phi_{en} = \phi - \frac{\pi}{2} + \psi \quad (4.38)$$

$$\phi_{ex} = \phi - \frac{\pi}{2} + \psi \quad (4.39)$$

Untuk perhitungan lainnya sama dengan lintasan RSR

4. Lintasan LSR (*Left-Straight-Right*)

Lintasan LSR merupakan lintasan yang terbentuk karena pesawat berbelok ke arah kiri dan membentuk busur lingkaran yang selanjutnya disebut dengan lingkaran pertama dan akan keluar melalui sebuah titik pada busur lingkaran tersebut. Selanjutnya akan membentuk lintasan garis yang berujung pada sebuah titik dan masuk ke busur lingkaran kedua yang terbentuk dengan arah belok ke kanan (berlawanan arah jarum jam) menuju posisi akhir pesawat dengan sudut hadap pesawat yang diinginkan. Sehingga lintasan yang terbentuk adalah lingkaran kiri-garis-lingkaran kanan (LSR). Adapun proses hitung lintasan LSR hampir sama dengan proses lintasan RSR, namun yang membedakan adalah penentuan pusat lingkaran yang dibentuk yaitu:

$$(x_{cs}, y_{cs}) = \left(x_0 - r \cos \left(\chi_0 - \frac{\pi}{2} \right), y_0 - r \sin \left(\chi_0 - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (4.40)$$

$$(x_{cf}, y_{cf}) = \left(x_f - r \cos \left(\chi_f + \frac{\pi}{2} \right), y_f - r \sin \left(\chi_f + \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (4.41)$$

Menganalisa kondisi eksistensi lintasan

$$|r + r| > l \quad (4.42)$$

Maka lintasan yang akan terbentuk tidak *feasible*. Akan tetapi, jika syarat tersebut tidak terpenuhi maka lintasan *feasible*. Dengan adanya syarat batas tersebut maka dipastikan jari-jari lingkaran awal dan akhir tidak saling

beririsan Dan perhitungan sudut *tangent entry* dan *tangent exit*

$$\phi_{en} = \phi - \frac{\pi}{2} + \psi \quad (4.43)$$

$$\phi_{ex} = \phi - \frac{\pi}{2} + \psi \quad (4.44)$$

Kemudian menentukan sudut yang dibentuk oleh garis l dan selisih jari-jari lingkaran

$$\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{l^2 - (|r + r|)}}{|r - r|}\right) \quad (4.45)$$

dan juga sudut *tangent entry* dan *tangent exit*

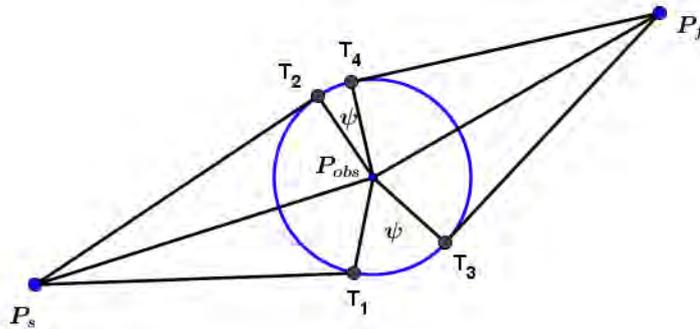
$$\phi_{en} = -\phi + \pi + \psi \quad (4.46)$$

$$\phi_{ex} = -\phi + \pi + \psi \quad (4.47)$$

Untuk perhitungan selanjutnya sama dengan lintasan RSR

4.2.2 Perencanaan Lintasan Dengan Halangan

Pada subbab sebelumnya telah dibahas mengenai perencanaan lintasan tanpa adanya halangan. Perencanaan lintasan dengan adanya halangan tentunya berpengaruh pada waktu dan panjang lintasan yang terbentuk. Oleh karena itu pada subbab ini akan dibahas mengenai perencanaan lintasan dengan halangan yang mengoptimalkan waktu dan panjang lintasan.



Gambar 4.2: Lintasan *single-obstacle*

Untuk mendapatkan panjang lintasan seperti pada gambar Gambar 4.2 diperlukan beberapa tahap berikut ini

1. Menghitung jarak antara titik start P_s ke titik T_1

- Menghitung jarak pusat *obstacle* dengan P_s
didefinisikan $\vec{P_s O}$ adalah vektor dari P_s ke pusat *obstacle* dan vektor $\vec{P T_1}$ adalah vektor dari P_s ke T_1

$$\vec{P_s O} := P_{obs} - P_s \quad (4.48)$$

$$\vec{P T_1} := T_1 - P_{obs} \quad (4.49)$$

$$d_{P_s O} = \sqrt{(x_s - x_{obs})^2 + (y_s - y_{obs})^2}$$

maka jarak P_s ke titik T_1 adalah

$$d_{P T_1} = \sqrt{d_{P_s O}^2 - r_{obs}^2} \quad (4.50)$$

2. Menghitung jarak antara titik akhir P_f ke titik T_3 .

- Menghitung panjang pusat *obstacle* dengan P_f .
didefinisikan $\vec{P_f O}$ adalah vektor dari P_f ke pusat *obstacle* dan vektor $\vec{P T_3}$ adalah vektor dari P_f ke T_3

$$\vec{P_f O} := P_{obs} - P_f \quad (4.51)$$

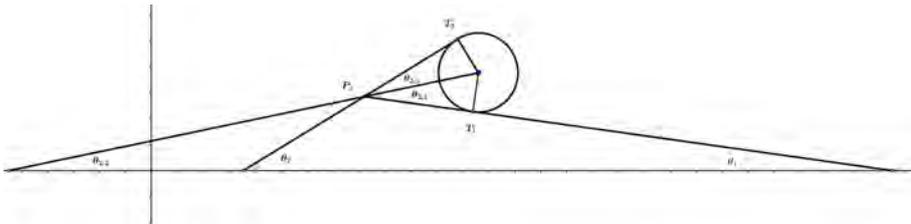
$$\vec{P T_3} := T_3 - P_{obs} \quad (4.52)$$

$$d_{P_f O} = \sqrt{(x_f - x_{obs})^2 + (y_f - y_{obs})^2}$$

maka jarak P_f ke titik T_3 adalah

$$d_{P T_3} = \sqrt{d_{P_f O}^2 - r_{obs}^2} \quad (4.53)$$

3. menentukan koordinat T_1 dan T_2



Gambar 4.3: Geometri hubungan titik start dan titik pusat *obstacle*

Sudut $\theta_{2,1}$ adalah sudut antara garis yang menghubungkan P_s dan pusat *obstacle* dengan garis yang menghubungkan P_s dan T_1 . Sedangkan sudut $\theta_{2,2}$ adalah sudut antara garis yang menghubungkan P_s dan pusat *obstacle* dengan sumbu -x maka diperoleh

$$\theta_1 = \theta_{2,2} - \theta_{2,1} \quad (4.54)$$

$$\sin \theta_{2,1} = \frac{r_{obs}}{d_{P_s O}} \quad (4.55)$$

$$\tan \theta_{2,2} = \frac{P_s \vec{O}_y}{P_s \vec{O}_x} \quad (4.56)$$

dari persamaan (4.55) maka persamaan (4.60) menjadi

$$\theta_1 = \frac{P_s \vec{O}_y}{P_s \vec{O}_x} - \frac{r_{obs}}{d_{P_s O}} \quad (4.57)$$

kemudian dengan menggunakan persamaan rotasi matriks 2 dimensi diperoleh koordinat titik T_1

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times d_{P_s O} + P_s$$

kemudian untuk menentukan titik T_2 yang berbeda adalah arah rotasinya

$$\theta_2 = \theta_{2,2} + \theta_{2,1} \quad (4.58)$$

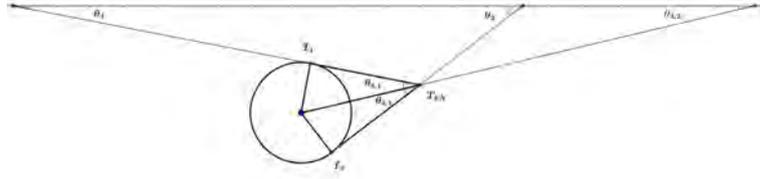
dari persamaan (4.55) maka persamaan (4.60) menjadi

$$\theta_2 = \frac{P_s \vec{O}_y}{P_s \vec{O}_x} + \frac{r_{obs}}{d_{P_s O}} \quad (4.59)$$

kemudian dengan menggunakan persamaan rotasi matriks 2 dimensi diperoleh koordinat titik T_2

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times d_{P_s O} + P_s$$

4. Mendapatkan koordinat titik T_3 dan T_4 .



Gambar 4.4: Geometri hubungan antara titik akhir dan titik pusat *obstacle*

Sudut $\theta_{3,1}$ adalah sudut antara garis yang menghubungkan P_f dan pusat *obstacle* dengan garis yang menghubungkan P_f dan T_3 . Sedangkan sudut $\theta_{3,2}$ adalah sudut antara antara garis yang menghubungkan P_f dan pusat *obstacle* dengan sumbu x maka diperoleh

$$\theta_3 = \theta_{3,2} + \theta_{3,1} \quad (4.60)$$

$$\sin \theta_{3,1} = \frac{r_{obs}}{d_{P_f O}} \quad (4.61)$$

$$\tan \theta_{3,2} = \frac{P_f O_y}{P_f O_x} \quad (4.62)$$

dari persamaan (4.55) maka persamaan (4.60) menjadi

$$\theta_3 = \frac{P_f O_y}{P_f O_x} - \frac{r_{obs}}{d_{P_f O}} \quad (4.63)$$

kemudian dengan menggunakan persamaan rotasi matriks 2 dimensi diperoleh koordinat titik T_3

$$T_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times d_{P_f O} + P_f$$

kemudian untuk menentukan titik T_4 yang berbeda adalah arah rotasinya

$$\theta_4 = \theta_{3,2} - \theta_{3,1} \quad (4.64)$$

dari persamaan (4.61) maka persamaan (4.64) menjadi

$$\theta_4 = \frac{P_f \vec{O}_y}{P_f \vec{O}_x} - \frac{r_{obs}}{d_{P_f O}} \quad (4.65)$$

kemudian dengan menggunakan persamaan rotasi matriks 2 dimensi diperoleh koordinat titik T_4

$$T_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 \\ \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times d_{P_f O} + P_f$$

5. Menghitung panjang busur dari titik T_1 ke titik T_3 .

- Panjang tali busur dari titik T_1 ke titik T_3 (u) adalah

$$u = \sqrt{(x_{T_1} - x_{T_3})^2 + (y_{T_1} - y_{T_3})^2}$$

- Menghitung sudut ψ .

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}\psi &= \frac{u}{2r_{obs}} \\ \psi &= 2 \arcsin \left(\frac{u}{2r_{obs}} \right) \end{aligned}$$

Panjang busurnya adalah

$$\text{Panjang busur} = r \times \psi \quad (4.66)$$

6. Menghitung panjang busur dari titik T_2 ke titik T_4 .

- Panjang tali busur dari titik T_2 ke titik T_4 (w) adalah

$$w = \sqrt{(x_{T_2} - x_{T_4})^2 + (y_{T_2} - y_{T_4})^2}$$

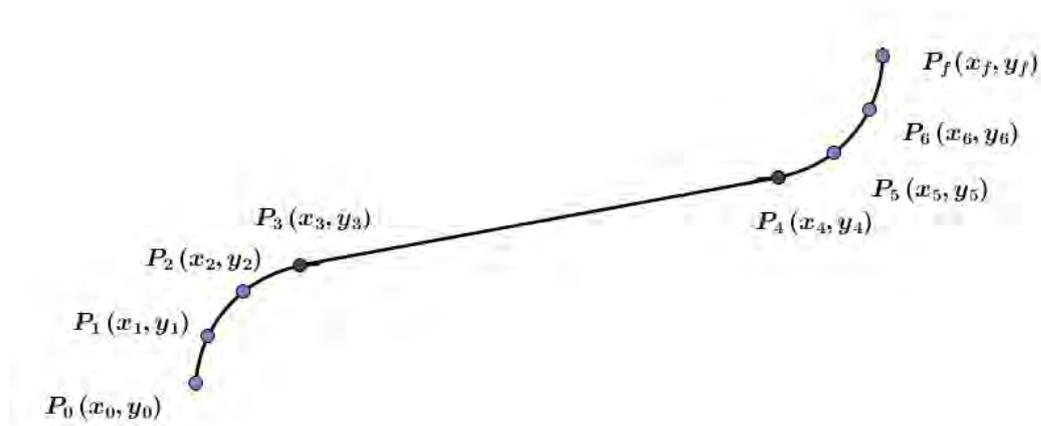
- Menghitung sudut ψ .

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}\psi &= \frac{w}{2r_{obs}} \\ \psi &= 2 \arcsin \left(\frac{w}{2r_{obs}} \right) \end{aligned}$$

Panjang busurnya adalah

$$\text{Panjang busur} = r \times \psi \quad (4.67)$$

4.3 Lintasan yang dibentuk oleh model kinematika



Gambar 4.5: ilustrasi lintasan

Berdasarkan pada (Hota dan Ghose,, 2013) yaitu untuk menjadi lintasan Bang-Singular-Bang yang optimal, sudut PUNA pada segmen garis lurus harus tegak lurus terhadap garis x_f yang akan diikuti. Dapat diperoleh bahwa sudut pada titik P_4 sampai titik P_5 adalah siku-siku terhadap garis lurus x_f .

Tipe lintasan R atau L ditentukan oleh arah putar PUNA oleh karena itu diberikan $a_i \in \{-1, 1\}$. $a_i = -1$ untuk arah putar berlawanan arah jarum jam dan $a_i = 1$ untuk arah putar searah jarum jam. Sedangkan $i = 1, 2$. $i = 1$ artinya PUNA berputar pada busur pertama dan $i = 2$ artinya PUNA berputar pada busur kedua. Titik-titik koordinat P_0, P_1, P_2, P_3 dihubungkan oleh busur dan sudutnya pun berubah sesuai jalannya waktu. jadi perubahan sudut pada busur pertama dapat

dirumuskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{\chi} &= \omega \\ \frac{\chi_1 - \chi_0}{t_1 - t_0} &= \omega \\ \frac{\chi_1 - \chi_0}{t_1 - 0} &= \omega\end{aligned}$$

atau secara umum dapat dituliskan

$$\chi = \chi_0 + \omega t$$

Karena pada busur pertama memiliki 2 kemungkinan arah putar maka rumus umum untuk perubahan sudut terhadap waktu menjadi

$$\chi = \chi_0 + a_1 \omega t \quad (4.68)$$

Kecepatan pada busur pertama diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.1)

$$\begin{aligned}\dot{x}_{c_1} &= v_a \sin(\chi_0 + a_1 \omega t) \\ \dot{y}_{c_1} &= v_a \cos(\chi_0 + a_1 \omega t) \\ v_{c_1} &= \sqrt{\dot{x}_{c_1}^2 + \dot{y}_{c_1}^2} \quad (4.69)\end{aligned}$$

Persamaan posisi pada busur pertama diperoleh dengan mengintegrasikan (2.1)

$$\begin{aligned}x_{c_1} &= x_0 + \int_{\chi_0}^{\chi} v_a \sin \chi(t) dt \\ &= x_0 - v_a \frac{1}{\dot{\chi}} \cos \chi(t) \Big|_{\chi_0}^{\chi} \\ &= x_0 - r (\cos \chi - \cos \chi_0) \\ y_{c_1} &= y_0 + \int_{\chi_0}^{\chi} v_a \cos \chi(t) dt \\ &= y_0 + v_a \frac{1}{\dot{\chi}} \sin \chi(t) \Big|_{\chi_0}^{\chi} \\ &= y_0 + r (\sin \chi - \sin \chi_0)\end{aligned}$$

Karena pada busur pertama memiliki 2 kemungkinan arah putar maka rumus umum

untuk perubahan posisi terhadap waktu menjadi

$$x_{c_1} = x_0 - a_1 r (\cos \chi - \cos \chi_0) \quad (4.70)$$

$$y_{c_1} = y_0 + a_1 r (\sin \chi - \sin \chi_0) \quad (4.71)$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh rumus untuk perubahan sudut dan perubahan posisi pada busur ke dua karena pada busur pertama memiliki 2 kemungkinan arah putar maka rumus umum untuk perubahan sudut terhadap waktu menjadi

$$\chi = \chi_4 + a_2 \omega t \quad (4.72)$$

kecepatan pada busur pertama diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.1)

$$\dot{x}_{c_2} = v_a \sin (\chi_4 + a_2 \omega t)$$

$$\dot{y}_{c_2} = v_a \cos (\chi_4 + a_2 \omega t)$$

$$v_2 = \sqrt{\dot{x}_{c_2}^2 + \dot{y}_{c_2}^2} \quad (4.73)$$

persamaan posisi pada busur pertama diperoleh dengan mengintegrasikan (2.1)

$$\begin{aligned} x_{c_2} &= x_2 + \int_{\chi_4}^{\chi} v_a \sin \chi(t) dt \\ &= x_0 - v_a \frac{1}{\dot{\chi}} \cos \chi(t) \Big|_{\chi_4}^{\chi} \\ &= x_0 - r (\cos \chi - \cos \chi_0) \\ y_{c_2} &= y_0 + \int_{\chi_4}^{\chi} v_a \cos \chi(t) dt \\ &= y_0 + v_a \frac{1}{\dot{\chi}} \sin \chi(t) \Big|_{\chi_0}^{\chi} \\ &= y_0 + r (\sin \chi - \sin \chi_0) \end{aligned}$$

karena pada busur pertama memiliki 2 kemungkinan arah putar maka rumus umum untuk perubahan posisi terhadap waktu menjadi

$$x_{c_2} = x_4 - a_2 r (\cos \chi - \cos \chi_4) \quad (4.74)$$

$$y_{c_2} = y_4 + a_2 r (\sin \chi - \sin \chi_4) \quad (4.75)$$

Dengan menggunakan persamaan (4.74) diperoleh

$$\begin{aligned}
x_{c_2} &= x_4 - a_2 r (\cos \chi - \cos \chi_4) \\
x_4 &= x_f + a_2 r (\cos \chi_f - \cos \chi_4) \\
&= x_f + a_2 r (1 - \cos \chi_4) \\
y_{c_2} &= y_4 + a_2 r (\sin \chi - \sin \chi_4) \\
y_4 &= y_f - a_2 r (\sin \chi_f - \sin \chi_4) \\
&= y_f - a_2 r (0 - \sin \chi_4) \\
&= y_f - a_2 r (-\sin \chi_4)
\end{aligned}$$

4.4 Simulasi Lintasan Dubins

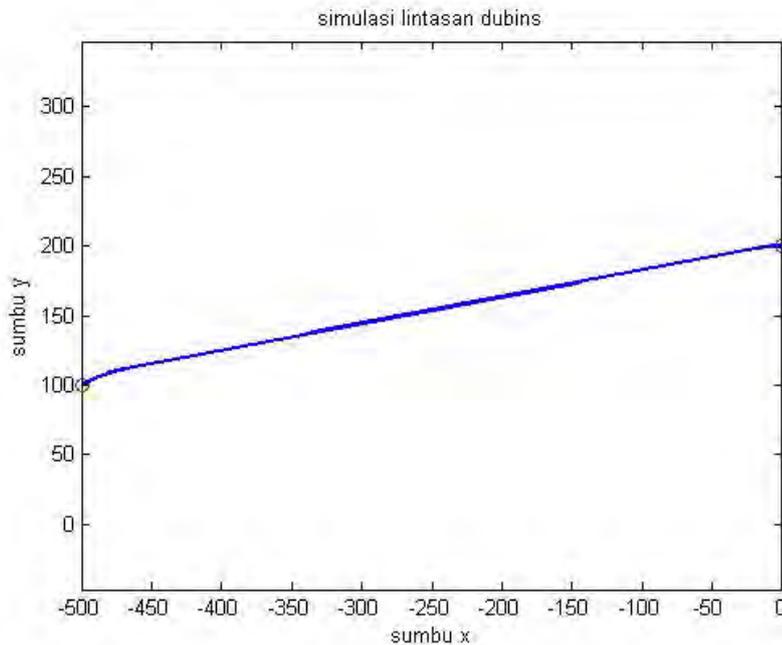
Pada subbab ini disimulasikan pembentukan lintasan Dubins yang pada subbab sebelumnya telah dihitung dan untuk mendapatkan lintasan optimal dilakukan dengan membandingkan panjang lintasan yang terbentuk. Setelah lintasan optimal terbentuk maka diperoleh juga waktu tempuh paling optimal bergantung pada parameter dari kecepatan PUNA. Pada simulasi ini dilakukan 6 kali simulasi dengan rincian 4 simulasi untuk mendapatkan 4 tipe lintasan Dubins tanpa halangan dan 2 simulasi untuk lintasan dengan halangan.

4.4.1 Simulasi Lintasan Dubins tanpa Halangan

Berikut ini adalah tabel parameter dan hasil untuk simulasi lintasan Dubins

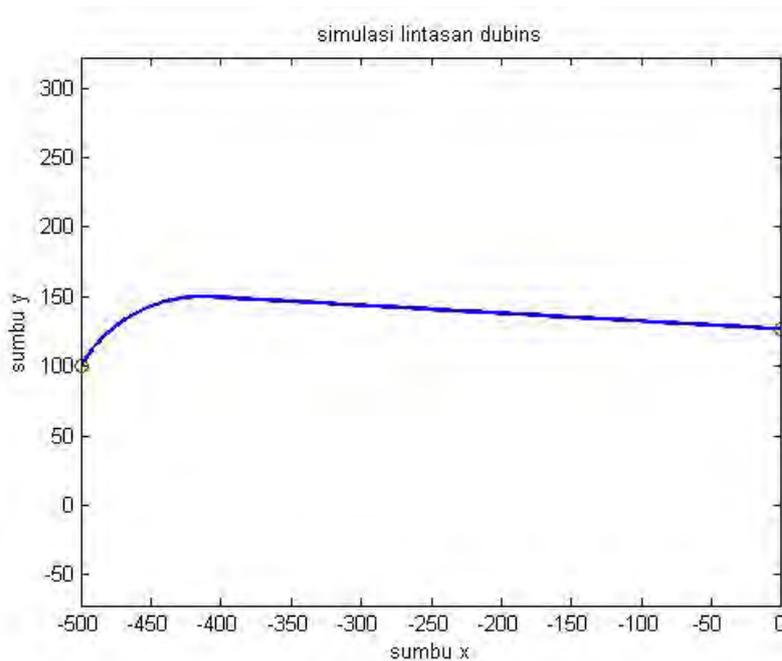
Tabel 4.1: Parameter dan Hasil Simulasi Tanpa *Obstacle*

Parameter	Nilai	Simulasi (χ_0)	Hasil			
			RSR	RSL	LSR	LSL
Posisi awal (x,y)	(-500, 100)					
Posisi akhir (x)	0	$1(\frac{\pi}{6})$	510,6174	1138,7	1200	1743,5
Jari-jari lingkaran pertama (r)	100 m					
Jari-jari lingkaran kedua (r)	100 m	$2(\frac{\pi}{3})$	1147,1	518,774	1298,1	1743,5
Kecepatan udara (v_a)	20m/s					
Sudut akhir hadap pesawat(χ_f)	0	$3(\frac{7\pi}{4})$	1196,2	1821,2	609,6035	1229,1



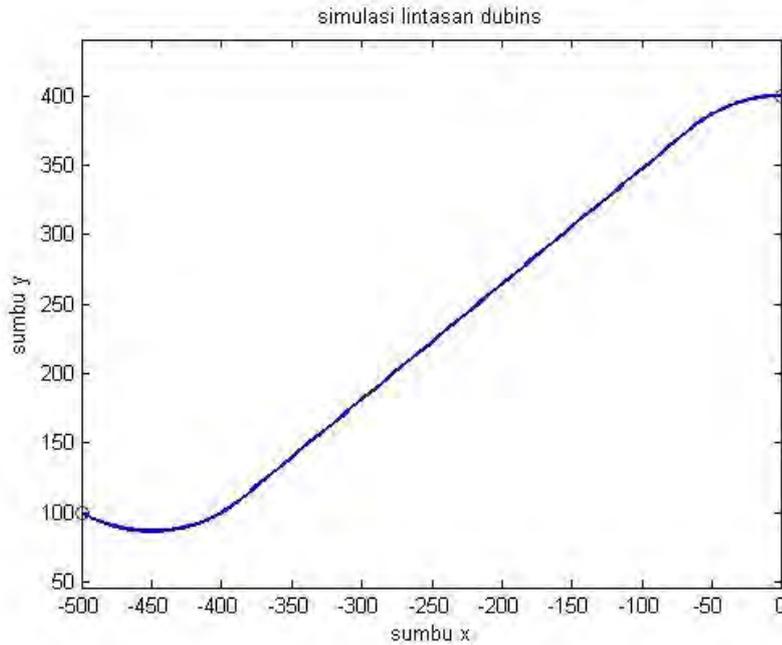
Gambar 4.6: Lintasan RSR dengan $\chi_0 = \frac{\pi}{6}$

Hasil simulasi yang ditunjukkan oleh gambar 4.1 menunjukkan bahwa PUNA bergerak dari titik awal menuju titik akhir dengan melalui busur lingkaran awal, garis lurus dan busur lingkaran awal. Pada saat PUNA melewati busur lingkaran awal terjadi dua pilihan bergantung pada sudut awal hadap pesawat, karena sudut awal hadap pesawatnya $\frac{\pi}{6}$ dengan kata lain berada pada kuadran I maka PUNA bergerak mengikuti lintasan berupa busur sampai pada titik yang pada saat itu sudut hadap PUNA adalah 100.89° yaitu pada titik *tangent exit* $(-468.90, 111.60)$. Setelah sampai pada titik *tangent exit* PUNA melewati lintasan lurus menuju titik *tangent entry* $(-18.90, 198.20)$ yang saat itu sudut hadap PUNA tidak berubah yaitu 100.89° . Kemudian PUNA bergerak melalui busur lingkaran kedua menuju titik akhir. Untuk mendapatkan titik akhir untuk sumbu y dengan menggunakan persamaan (4.24) diperoleh $y_f = 200$.



Gambar 4.7: Lintasan RSL dengan $\chi_0 = \frac{\pi}{3}$

Hasil simulasi yang ditunjukkan oleh gambar 4.2 menunjukkan bahwa PUNA bergerak dari titik awal menuju titik akhir dengan melalui busur lingkaran awal, garis lurus dan busur lingkaran awal. Pada saat PUNA melewati busur lingkaran awal terjadi dua pilihan bergantung pada sudut awal hadap pesawat, karena sudut awal hadap pesawatnya $\frac{\pi}{3}$ dengan kata lain berada pada kuadran I maka PUNA bergerak mengikuti lintasan berupa busur sampai pada titik yang pada saat itu sudut hadap PUNA adalah 86.74° yaitu pada titik *tangent exit* $(-407.72, 149.84)$. Setelah sampai pada titik *tangent exit* PUNA melewati lintasan lurus menuju titik *tangent entry* $(-5.68, 126.96)$ yang saat itu sudut hadap PUNA adalah 266.74° . Kemudian PUNA bergerak melalui busur lingkaran kedua menuju titik akhir. Untuk mendapatkan titik akhir untuk sumbu y dengan menggunakan persamaan (4.24) diperoleh $y_f = 126.79$.



Gambar 4.8: Lintasan LSR dengan $\chi_0 = \frac{11\pi}{12}$

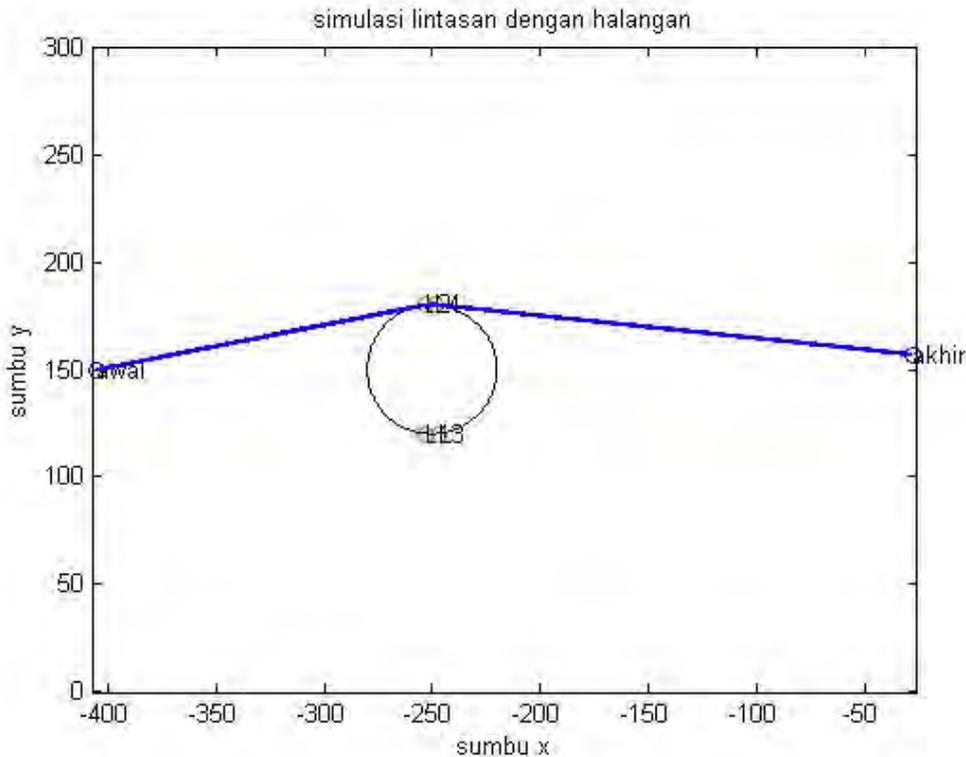
Hasil simulasi yang ditunjukkan oleh gambar 4.3 menunjukkan bahwa PUNA bergerak dari titik awal menuju titik akhir dengan melalui busur lingkaran awal, garis lurus dan busur lingkaran awal. Pada saat PUNA melewati busur lingkaran awal terjadi dua pilihan bergantung pada sudut awal hadap pesawat, karena sudut awal hadap pesawatnya $\frac{7\pi}{4}$ dengan kata lain berada pada kuadran IV maka PUNA bergerak mengikuti lintasan berupa busur yang mengarah ke bawah sampai pada titik yang pada saat itu sudut hadap PUNA adalah 317.34° yaitu pada titik *tangent exit* $(-355.75, 102.94)$. Setelah sampai pada titik *tangent exit* PUNA melewati lintasan lurus menuju titik *tangent entry* $(-73.54, 409.19)$ yang saat itu sudut hadap PUNA adalah 137.34° . Kemudian PUNA bergerak melalui busur lingkaran kedua menuju titik akhir. Untuk mendapatkan titik akhir untuk sumbu y dengan menggunakan persamaan (4.24) diperoleh $y_f = 441.42$.

4.4.2 Simulasi Lintasan Dubins dengan Halangan

Dalam simulasi ini posisi awal dari PUNA adalah posisi *tangent exit* sedangkan posisi akhirnya adalah *tangent entry* dari lintasan tanpa halangan. Oleh karena setiap lintasan memiliki koordinat *tangent entry* dan *tangent exit* yang berbeda maka untuk mempermudah, koordinat posisi awal dan posisi akhir diambil dari lintasan yang optimal. Berikut ini adalah tabel parameter dan hasil untuk simulasi lintasan Dubins

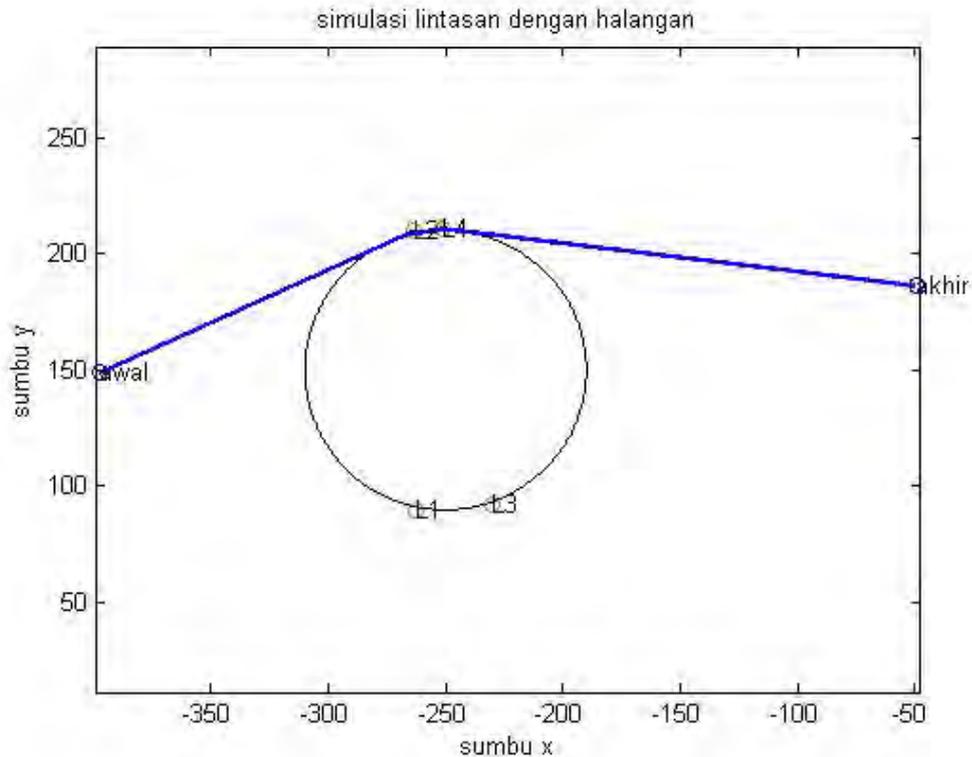
Tabel 4.2: Parameter dan Hasil Simulasi dengan *Obstacle*

Parameter	Nilai	Simulasi (r_{obs})	Panjang lintasan
Jari-jari lingkaran pertama (r)	100 m		
Jari-jari lingkaran kedua (r)	100 m		
Kecepatan udara (v_a)	20m/s		
Posisi <i>obstacle</i>	(-250, 150)		
Posisi awal (x,y)	(-407.72, 149.84)	1(30)	381.91
Posisi akhir (x)	-5.68, 126.96		
Posisi awal (x,y)	(-407.72, 149.84)	2(60)	362.47
Posisi akhir (x)	-5.68, 126.96		
Posisi awal (x,y)	(-468.90, 111.60)	3(50)	443.62
Posisi akhir (x)	-18.90, 198.20		
Posisi <i>obstacle</i>	(-250, 180)		
Posisi awal (x,y)	(-407.72, 149.84)	4(60)	361.27
Posisi akhir (x)	-5.68, 126.96		
Posisi awal (x,y)	(-468.90, 111.60)	5(50)	449.65
Posisi akhir (x)	-18.90, 198.20		



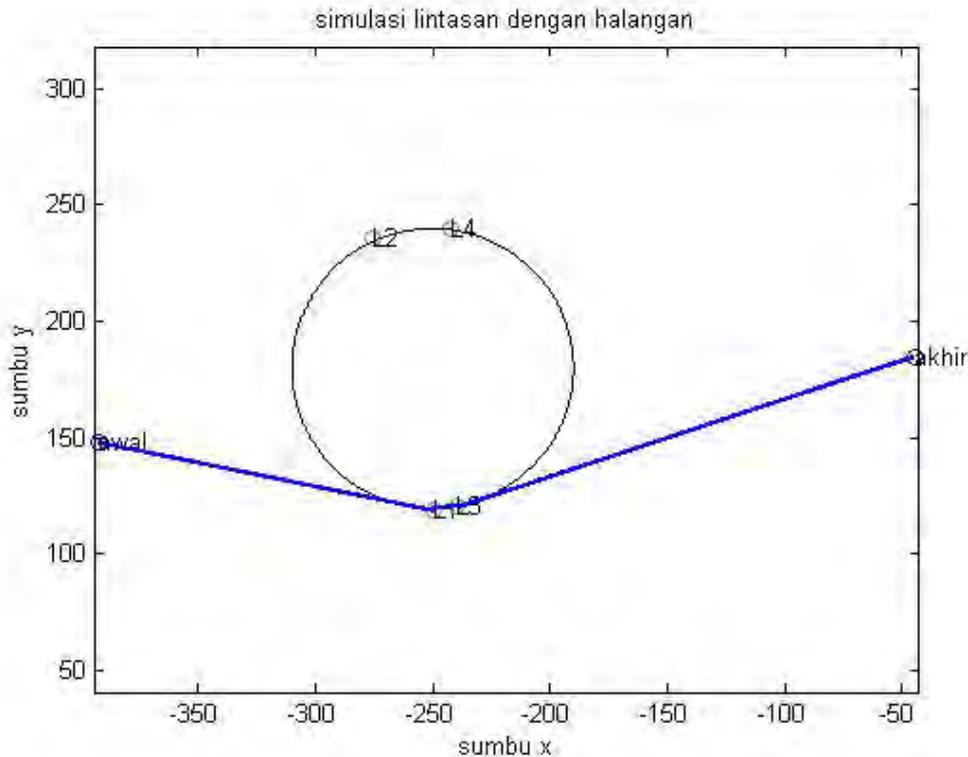
Gambar 4.9: Lintasan dengan jari-jari *Obstacle* 30 tipe SRS

Hasil simulasi yang ditunjukkan oleh gambar 4.4 adalah adanya *obstacle* pada lintasan mengakibatkan adanya dua pilihan lintasan yang akan dilalui yaitu dari titik awal ke titik L_1 dan L_2 . Panjang masing-masing garis penghubung tersebut adalah 149.2768 m dan 149.2768 m. Karena panjang kedua garis tersebut sama maka dilanjutkan dengan perbandingan panjang lintasan yang berbentuk busur. Terdapat dua lintasan yang berupa busur lingkaran yaitu garis yang melewati L_1 dan L_3 dengan panjang 5,9583 m dan juga garis yang melewati L_2 dan L_4 dengan panjang 4,2078 m. Panjang garis yang menghubungkan L_3 dengan titik akhir adalah 222,5442 m dan panjang garis yang menghubungkan L_4 dengan titik akhir adalah 222,5442 m. Jadi dengan data tersebut maka jalur lintasan yang dipilih adalah titik start $\rightarrow L_2 \rightarrow L_4 \rightarrow$ titik akhir.



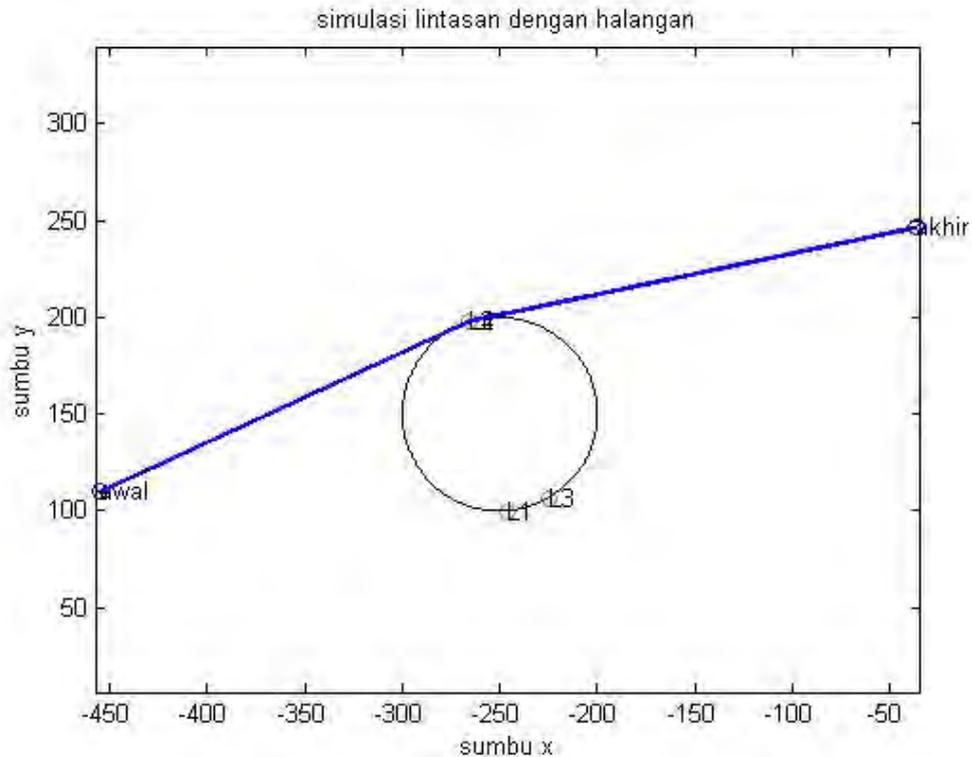
Gambar 4.10: Lintasan dengan jari-jari *Obstacle* 60 tipe SRS

Hasil simulasi yang ditunjukkan oleh gambar 4.5 adalah adanya *obstacle* pada lintasan mengakibatkan adanya dua pilihan lintasan yang akan dilalui yaitu dari titik awal ke titik L_1 dan L_2 . Panjang masing-masing garis penghubung tersebut adalah 204,5137 m dan 204,5137 m. Karena panjang kedua garis tersebut sama maka dilanjutkan dengan perbandingan panjang lintasan yang berbentuk busur. Terdapat dua lintasan yang berupa busur lingkaran yaitu garis yang melewati L_1 dan L_3 dengan panjang 32,8660 m dan juga garis yang melewati L_2 dan L_4 dengan panjang 0,9333 m. Panjang garis yang menghubungkan L_3 dengan titik akhir adalah 233,6532 m dan panjang garis yang menghubungkan L_4 dengan titik akhir adalah 233,6532 m. Jadi dengan data tersebut maka jalur lintasan yang dipilih adalah titik start $\rightarrow L_2 \rightarrow L_4 \rightarrow$ titik akhir.



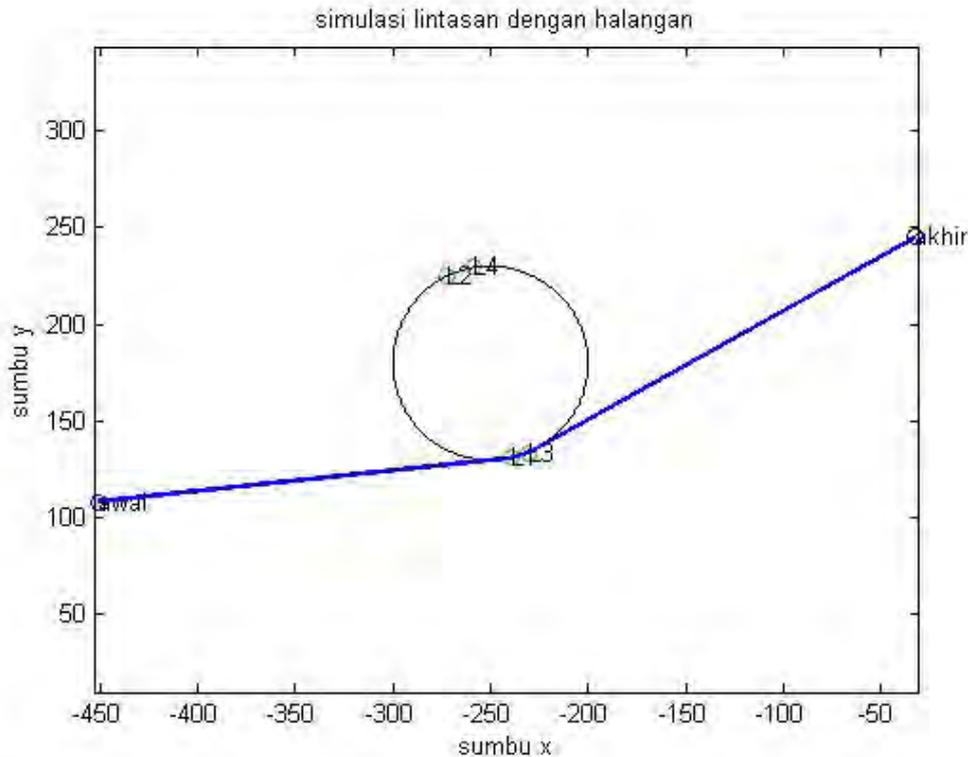
Gambar 4.11: Lintasan dengan jari-jari *Obstacle* 60 tipe SLS

Hasil simulasi yang ditunjukkan oleh gambar 4.6 adalah adanya *obstacle* pada lintasan mengakibatkan adanya dua pilihan lintasan yang akan dilalui yaitu dari titik awal ke titik L_1 dan L_2 . Panjang masing-masing garis penghubung tersebut adalah 208,6558 m dan 208,6558 m. Karena panjang kedua garis tersebut sama maka dilanjutkan dengan perbandingan panjang lintasan yang berbentuk busur. Terdapat dua lintasan yang berupa busur lingkaran yaitu garis yang melewati L_1 dan L_3 dengan panjang 18,6426 m dan juga garis yang melewati L_2 dan L_4 dengan panjang 15,3337 m. Panjang garis yang menghubungkan L_3 dengan titik akhir adalah 225.7693 m dan panjang garis yang menghubungkan L_4 dengan titik akhir adalah 225.7693 m. Jadi dengan data tersebut maka jalur lintasan yang dipilih adalah titik start $\rightarrow L_1 \rightarrow L_3 \rightarrow$ titik akhir.



Gambar 4.12: Lintasan dengan jari-jari *Obstacle* 50 tipe SRS

Hasil simulasi yang ditunjukkan oleh gambar 4.7 adalah adanya *obstacle* pada lintasan mengakibatkan adanya dua pilihan lintasan yang akan dilalui yaitu dari titik awal ke titik L_1 dan L_2 . Panjang masing-masing garis penghubung tersebut adalah 209,1706 m dan 209,1706 m. Karena panjang kedua garis tersebut sama maka dilanjutkan dengan perbandingan panjang lintasan yang berbentuk busur. Terdapat dua lintasan yang berupa busur lingkaran yaitu garis yang melewati L_1 dan L_3 dengan panjang 0,1031 m dan juga garis yang melewati L_2 dan L_4 dengan panjang 23,0417 m. Panjang garis yang menghubungkan L_3 dengan titik akhir adalah 234,3474 m dan panjang garis yang menghubungkan L_4 dengan titik akhir adalah 234,3474 m. Jadi dengan data tersebut maka jalur lintasan yang dipilih adalah titik start $\rightarrow L_2 \rightarrow L_4 \rightarrow$ titik akhir



Gambar 4.13: Lintasan dengan jari-jari *Obstacle* 50 tipe SLS

Hasil simulasi yang ditunjukkan oleh gambar 4.8 adalah adanya *obstacle* pada lintasan mengakibatkan adanya dua pilihan lintasan yang akan dilalui yaitu dari titik awal ke titik L_1 dan L_2 . Panjang masing-masing garis penghubung tersebut adalah 213,5233 m dan 213,5233 m. Karena panjang kedua garis tersebut sama maka dilanjutkan dengan perbandingan panjang lintasan yang berbentuk busur. Terdapat dua lintasan yang berupa busur lingkaran yaitu garis yang melewati L_1 dan L_3 dengan panjang 14,1723 m dan juga garis yang melewati L_2 dan L_4 dengan panjang 8,8905 m. Panjang garis yang menghubungkan L_3 dengan titik akhir adalah 227,2368 m dan panjang garis yang menghubungkan L_4 dengan titik akhir adalah 227,2368 m. Jadi dengan data tersebut maka jalur lintasan yang dipilih adalah titik start $\rightarrow L_2 \rightarrow L_4 \rightarrow$ titik akhir

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

1. Kendali optimal pada PUNA dengan tujuan meminimumkan waktu tempuh lintasan didapat dengan menggunakan prosedur prinsip Pontryagin. Langkah awal untuk mendapatkan kendali optimal adalah dengan membentuk fungsi Hamiltonian. Dengan menggunakan Fungsi Hamiltonian maka diperoleh kendali optimal yaitu

$$u^*(t) = \begin{cases} -\dot{\chi}_{\text{maks}} & \text{saat } \lambda_3 > 0 \\ 0 & \text{saat } \lambda_3 = 0 \\ \dot{\chi}_{\text{maks}} & \text{saat } \lambda_3 < 0 \end{cases}$$

2. Metode Dubins untuk masalah perencanaan lintasan dilakukan secara geometri. Untuk menentukan lintasan terbaik dilakukan dengan cara membandingkan tiap-tiap lintasan yang terbentuk. Pembahasan ini pada dua masalah yaitu pada lintasan tanpa halangan dan lintasan dengan halangan
 - a. Untuk lintasan tanpa halangan terdapat 4 tipe lintasan yang *feasible* yaitu RSR, RSL, LSR, LSL. Untuk mendapatkan lintasan terpendek dilakukan dengan membandingkan panjang lintasan yang memenuhi syarat *feasible*. Pada dasarnya lintasan Dubins bergantung pada sudut awal, sudut akhir dan jari-jari lingkaran.
 - b. Untuk lintasan dengan halangan terbagi menjadi dua pilihan lintasan yaitu SRS dan SLS. Pada masalah ini diasumsikan bahwa PUNA sudah terbang dan posisi awal yang digunakan adalah koordinat *tangent exit* dan posisi akhirnya adalah *tangent entry* sehingga untuk mendapatkan panjang lintasan optimalnya dengan:

$$d_{opt} = L_{arc1} + L_{opt_{obs}} + L_{arc2}$$

Variabel-variabel yang terdapat pada persamaan diatas adalah

- d_{opt} panjang lintasan optimal yang feasible
- L_{arc1} panjang busur lingkaran pertama
- $L_{opt_{obs}}$ panjang lintasan terpilih (SRS atau SLS)
- L_{arc} panjang busur lingkaran kedua

Lintasan yang terbentuk dengan metode ini adalah lintasan yang terpendek dan memiliki waktu yang optimal.

5.1 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya yaitu

1. Melakukan perencanaan lintasan dengan adanya *obstacle*, sudut belok PUNA saat melalui *tangent exit* dan *tangent entry* harus mengikuti batasan minimum belok PUNA.
2. Melakukan perencanaan lintasan untuk halangan yang bergerak agar PUNA lebih dinamis dalam menentukan jalur terpendek untuk dilalui.
3. Melakukan perencanaan lintasan untuk halangan yang lebih dari satu karena kondisi saat terdapat *single obstacle* hanya dilakukan saat kondisi lapangan adalah ruang yang terbuka dan luas. PUNA akan lebih variatif dalam memilih lintasan terpendek jika memiliki lebih dari satu *obstacle*.

DAFTAR PUSTAKA

- Chitsaz, H., dan Levalle, M.,(2006), *Time-optimal Paths for a Dubins airplane*, Cambridge University.
- Dewi, N.K., dan Subchan,S., (2010), *Perencanaan Lintasan Menggunakan Geometri Dubins pada Pesawat Udara Nir Awak(PUNA)* , TA ITS, Surabaya.
- Fahimi,F., (2008), *Autonomous Robots : Modeling, Path Planning, and Control*,Mechanical Engineering Department University of Alberta. Canada.
- Hota,S., dan Ghose, D., (2009), *A Modified Dubins Method for Optimal Path Planning of a Miniature Air Vehicle Converging to a Straight Line Path*,American Control Conference, USA.
- Hota,S., dan Ghose, D., (2013), *Time-Optimal Convergence to a Rectilinear Path in the Presence of Wind*,J Intell Robot Syst, Springer Science+Business Media Dordrecht, USA.
- Naidu, S.D., (2002), *Optimal Control System*, CRC Press, USA.
- Shanmugavel,M.,(2007),*Path planning of multiple autonomous vehicles*,United Kingdom: Thesis of Department of aerospace,power, and sensor. Cranfield University
- Shkel, A.M., dan Lumelsky, V., (2001), *Classification of the Dubins set* , University of California, USA.
- Subchan, S., dan White, B A., dan Tsourdos, A., (2008), *Dubins path planning of multiple UAVs for tracking contaminant could* , Cranfield University, United Kingdom.

BIOGRAFI PENULIS

BIODATA PENULIS



Penulis bernama Ahmad Zaenal Arifin, lahir di Tuban, 22 Oktober 1990, penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Sarkam dan Rumini. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari SDN Jatimulyo 1, SMP Negeri 1 Plumpang, dan SMA Negeri 1 Tuban. Lulus dari SMAN 1 Tuban pada tahun 2008. Kemudian melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2008 dengan jalur SNM-PTN dan lulus dari ITS pada tahun 2012. Setelah lulus penulis melanjutkan studi ke jenjang S2 di jurusan matematika pada tahun 2012. Penulis fokus pada bidang simulasi sistem dan pemodelan matematika, dengan judul penelitian ” Kendali Optimal Pada Pesawat Udara Nir Awak (PUNA) Untuk Mengikuti Lintasan dengan Halangan”. Untuk keterangan lebih lanjut mengenai tugas akhir ini bisa menghubungi penulis melalui email : kuyafira@gmail.com