



TUGAS AKHIR -SM141501

**ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL SUKU  
BUNGA COX INGERSOLL ROSS (CIR) MENGGUNAKAN  
*KALMAN FILTER* UNTUK MENENTUKAN HARGA  
*ZERO COUPON BOND***

ENI MARIANA  
NRP 1211 100 115

Dosen Pembimbing  
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2015



FINAL PROJECT -SM141501

# PARAMETER ESTIMATION OF COX INGERSOLL ROSS (CIR) INTEREST RATE MODEL USING KALMAN FILTER FOR PRICING ZERO COUPON BOND

ENI MARIANA  
NRP 1211 100 115

Supervisor  
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
Faculty of Mathematics and Natural Science  
SepuluhNopember Institute of Technology  
Surabaya 2015

# LEMBAR PENGESAHAN

**ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL SUKU  
BUNGA COX INGERSOLL ROSS (CIR)  
MENGUNAKAN KALMAN FILTER UNTUK  
MENENTUKAN HARGA ZERO COUPON BOND**

**PARAMETER ESTIMATION OF COX INGERSOLL  
ROSS (CIR) INTEREST RATE MODEL USING  
KALMAN FILTER FOR PRICING ZERO COUPON  
BOND**

## TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Pada bidang studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :  
ENI MARIANA  
NRP. 1211 100 115

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,

Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si  
NIP. 19600527 198701 1 001

Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
NIP. 19660414 199102 2 001



Surabaya, Juli 2015

# ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL SUKU BUNGA COX INGERSOLL ROSS (CIR) MENGUNAKAN *KALMAN FILTER* UNTUK MENENTUKAN HARGA *ZERO COUPON BOND*

Nama Mahasiswa : Eni Mariana  
NRP : 1211 100 115  
Jurusan : Matematika  
DosenPembimbing : Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si

## Abstrak

Tingkat suku bunga sangat berpengaruh pada penentuan harga sekuritas. Salah satunya pada penentuan harga *bond* yang nilainya bergantung pada tingkat suku bunga yang berlaku saat itu. Jenis *bond* yang dibahas pada tugas akhir ini adalah *zero coupon bond*. *Bond* jenis ini tidak membagikan kupon atau bunga pada setiap periode. Jadi, penerbit *bond* membayarkan pokok hutang dan bunga pada saat masa jatuh tempo. Pada kenyataannya, tingkat suku bunga bersifat stokastik. Sehingga diperlukan model suku bunga stokastik yang bisa mewakili kondisi riil tingkat suku bunga pasar. Pada tugas akhir ini digunakan model suku bunga Cox Ingersoll Ross (CIR). Untuk menentukan harga *bond* diperlukan nilai parameter dari model suku bunga CIR. Sehingga perlu dilakukan estimasi parameter. Nilai awal parameter didapatkan dari metode *Ordinary Least Square* (OLS). Hasil estimasi tersebut digunakan sebagai nilai awal parameter pada metode *Kalman Filter* untuk mengestimasi parameter dan tingkat suku bunga harian yang mengikuti model CIR. Pada tugas akhir ini, nilai parameter dan tingkat suku bunga harian hasil estimasi akan digunakan untuk menentukan harga *zero coupon bond*. Karena hasil estimasi parameter menggunakan *Kalman Filter* tidak cukup baik, maka digunakan nilai parameter hasil metode OLS untuk mengestimasi tingkat suku bunga harian menggunakan *Kalman Filter*.

**Kata Kunci:** Tingkat suku bunga, Model CIR, OLS, *Kalman Filter*, *zero coupon bond*

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

**PARAMETER ESTIMATION OF COX INGERSOLL  
ROSS (CIR) INTEREST RATE MODEL USING  
KALMAN FILTER FOR PRICING ZERO COUPON  
BOND**

**Name** : *Eni Mariana*  
**NRP** : *1211 100 115*  
**Department** : *Mathematics*  
**Supervisor** : *Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si*  
*Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si*

***Abstract***

*An interest rate having a big influence on pricing securities value. For an example on pricing bond that depend on interest rate that prevailing at that time. This final project will discuss about zero coupon bond. This kind of bond not share the coupon on each period. The publiher of bond pays principal and interest on the maturity date. In fact, interest rates are stochastic. So, we need a stochastic models which could represent the real conditions of the market interest rate. This final project use Cox Ingersoll Ross (CIR) interest rate model. To determine the price of the bond required parameter values of the CIR interest rate model. So it is necessary to estimate the parameters. The initial value of parameters obtained from the Ordinary Least Square (OLS) method. The estimation results are used as the initial value of the parameter in the Kalman filter to estimate the parameters and the daily interest rate that follows the CIR model. In this final project, the value of the parameter and the daily interest rate estimation results will be used for pricing zero coupon bond. Because the results of parameter estimation using a Kalman filter is not good enough, then we use the OLS parameter results to estimate the daily interest rate using the Kalman Filter.*

***Keywords:*** *Interest rate, CIR model, OLS, Kalman Filter, zero coupon bond*

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

**LAMPIRAN A**

Data Tingkat Suku Bunga Untuk *Zero Coupon Bond* masa jatuh tempo 5 tahun dari *Bank Of England*

Tanggal	Tingkat Suku Bunga Dalam %	Tanggal	Tingkat Suku Bunga Dalam %
02 Jan 14	1.98	05 Feb 14	1.73
03 Jan 14	1.98	06 Feb 14	1.78
06 Jan 14	1.93	07 Feb 14	1.74
07 Jan 14	1.92	10 Feb 14	1.75
08 Jan 14	1.97	11 Feb 14	1.77
09 Jan 14	1.98	12 Feb 14	1.89
10 Jan 14	1.89	13 Feb 14	1.85
13 Jan 14	1.84	14 Feb 14	1.87
14 Jan 14	1.84	17 Feb 14	1.85
15 Jan 14	1.88	18 Feb 14	1.82
16 Jan 14	1.83	19 Feb 14	1.79
17 Jan 14	1.86	20 Feb 14	1.86
20 Jan 14	1.86	21 Feb 14	1.84
21 Jan 14	1.88	24 Feb 14	1.83
22 Jan 14	1.94	25 Feb 14	1.82
23 Jan 14	1.88	26 Feb 14	1.81
24 Jan 14	1.83	27 Feb 14	1.76
27 Jan 14	1.85	28 Feb 14	1.80
28 Jan 14	1.88	03 Mar 14	1.75
29 Jan 14	1.82	04 Mar 14	1.78
30 Jan 14	1.81	05 Mar 14	1.79
31 Jan 14	1.78	06 Mar 14	1.82
03 Feb 14	1.77	07 Mar 14	1.83
04 Feb 14	1.76	10 Mar 14	1.84

**LAMPIRAN A (LANJUTAN)**

Tanggal	Tingkat Suku Bunga Dalam %	Tanggal	Tingkat Suku Bunga Dalam %
11 Mar 14	1.83	16 Apr 14	1.78
12 Mar 14	1.81	17 Apr 14	1.83
13 Mar 14	1.77	22 Apr 14	1.89
14 Mar 14	1.75	23 Apr 14	1.84
17 Mar 14	1.77	24 Apr 14	1.87
18 Mar 14	1.77	25 Apr 14	1.82
19 Mar 14	1.78	28 Apr 14	1.85
20 Mar 14	1.85	29 Apr 14	1.88
21 Mar 14	1.85	30 Apr 14	1.86
24 Mar 14	1.81	01 May 14	1.84
25 Mar 14	1.83	02 May 14	1.86
26 Mar 14	1.82	06 May 14	1.90
27 Mar 14	1.81	07 May 14	1.91
28 Mar 14	1.86	08 May 14	1.89
31 Mar 14	1.87	09 May 14	1.92
01 Apr 14	1.87	12 May 14	1.97
02 Apr 14	1.90	13 May 14	1.91
03 Apr 14	1.87	14 May 14	1.81
04 Apr 14	1.81	15 May 14	1.75
07 Apr 14	1.79	16 May 14	1.80
08 Apr 14	1.82	19 May 14	1.81
09 Apr 14	1.82	20 May 14	1.84
10 Apr 14	1.74	21 May 14	1.87
11 Apr 14	1.74	22 May 14	1.88
14 Apr 14	1.76	23 May 14	1.86
15 Apr 14	1.74	27 May 14	1.86

**LAMPIRAN A (LANJUTAN)**

Tanggal	Tingkat Suku Bunga Dalam %	Tanggal	Tingkat Suku Bunga Dalam %
28 May 14	1.78	02 Jul 14	2.09
29 May 14	1.77	03 Jul 14	2.08
30 May 14	1.80	04 Jul 14	2.09
02 Jun 14	1.84	07 Jul 14	2.07
03 Jun 14	1.88	08 Jul 14	2.00
04 Jun 14	1.91	09 Jul 14	2.02
05 Jun 14	1.89	10 Jul 14	1.99
06 Jun 14	1.88	11 Jul 14	1.96
09 Jun 14	1.92	14 Jul 14	1.96
10 Jun 14	1.95	15 Jul 14	2.01
11 Jun 14	1.94	16 Jul 14	2.02
12 Jun 14	1.95	17 Jul 14	1.95
13 Jun 14	2.03	18 Jul 14	1.95
16 Jun 14	2.05	21 Jul 14	1.93
17 Jun 14	2.07	22 Jul 14	1.96
18 Jun 14	2.02	23 Jul 14	1.93
19 Jun 14	2.03	24 Jul 14	1.98
20 Jun 14	2.07	25 Jul 14	1.95
23 Jun 14	2.04	28 Jul 14	1.96
24 Jun 14	2.04	29 Jul 14	1.93
25 Jun 14	1.96	30 Jul 14	1.98
26 Jun 14	1.96	31 Jul 14	1.99
27 Jun 14	1.97	01 Aug 14	1.94
30 Jun 14	2.00	04 Aug 14	1.92
01 Jul 14	2.04	05 Aug 14	1.96

**LAMPIRAN A (LANJUTAN)**

Tanggal	Tingkat Suku Bunga Dalam %	Tanggal	Tingkat Suku Bunga Dalam %
06 Aug 14	1.91	12 Sep 14	1.81
07 Aug 14	1.90	15 Sep 14	1.81
08 Aug 14	1.87	16 Sep 14	1.81
11 Aug 14	1.91	17 Sep 14	1.82
12 Aug 14	1.90	18 Sep 14	1.88
13 Aug 14	1.82	19 Sep 14	1.87
14 Aug 14	1.81	22 Sep 14	1.85
15 Aug 14	1.75	23 Sep 14	1.83
18 Aug 14	1.82	24 Sep 14	1.84
19 Aug 14	1.78	25 Sep 14	1.81
20 Aug 14	1.81	26 Sep 14	1.81
21 Aug 14	1.79	29 Sep 14	1.80
22 Aug 14	1.80	30 Sep 14	1.78
26 Aug 14	1.75	01 Oct 14	1.73
27 Aug 14	1.69	02 Oct 14	1.69
28 Aug 14	1.70	03 Oct 14	1.74
29 Aug 14	1.70	06 Oct 14	1.71
01 Sep 14	1.72	07 Oct 14	1.65
02 Sep 14	1.75	08 Oct 14	1.60
03 Sep 14	1.78	09 Oct 14	1.60
04 Sep 14	1.79	10 Oct 14	1.56
05 Sep 14	1.75	13 Oct 14	1.49
08 Sep 14	1.72	14 Oct 14	1.45
09 Sep 14	1.74	15 Oct 14	1.28
10 Sep 14	1.76	16 Oct 14	1.40
11 Sep 14	1.77	17 Oct 14	1.51

**LAMPIRAN A (LANJUTAN)**

Tanggal	Tingkat Suku Bunga Dalam %	Tanggal	Tingkat Suku Bunga Dalam %
20 Oct 14	1.48	25 Nov 14	1.35
21 Oct 14	1.49	26 Nov 14	1.32
22 Oct 14	1.51	27 Nov 14	1.29
23 Oct 14	1.54	28 Nov 14	1.30
24 Oct 14	1.55	01 Dec 14	1.27
27 Oct 14	1.52	02 Dec 14	1.35
28 Oct 14	1.54	03 Dec 14	1.39
29 Oct 14	1.55	04 Dec 14	1.37
30 Oct 14	1.54	05 Dec 14	1.41
31 Oct 14	1.56	08 Dec 14	1.39
03 Nov 14	1.60	09 Dec 14	1.32
04 Nov 14	1.56	10 Dec 14	1.34
05 Nov 14	1.59	11 Dec 14	1.33
06 Nov 14	1.58	12 Dec 14	1.24
07 Nov 14	1.54	15 Dec 14	1.25
10 Nov 14	1.53	16 Dec 14	1.22
11 Nov 14	1.57	17 Dec 14	1.21
12 Nov 14	1.52	18 Dec 14	1.31
13 Nov 14	1.51	19 Dec 14	1.29
14 Nov 14	1.46	22 Dec 14	1.27
17 Nov 14	1.43	23 Dec 14	1.29
18 Nov 14	1.44	24 Dec 14	1.32
19 Nov 14	1.46	29 Dec 14	1.24
20 Nov 14	1.42	30 Dec 14	1.23
21 Nov 14	1.38	31 Dec 14	1.20
24 Nov 14	1.38		

**LAMPIRAN A (LANJUTAN)**

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## KATA PENGANTAR

Segala Puji bagi Allah SWT Tuhan semesta alam yang telah memberikan karunia, rahmat dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul: “**Estimasi Parameter Pada Model Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR) Menggunakan Kalman Filter Untuk Menentukan Harga Zero Coupon Bond**” yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Studi S-1 pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan berkat kerjasama, bantuan, serta dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si dan Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si selaku dosen pembimbing yang senantiasa membimbing dengan sabar dan memberikan kritik dan saran dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
2. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus Dosen Wali.
3. Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si, Tahiyatul Afihani, S.Si, M.Si, dan Kistosil Fahim, S.Si, M.Si selaku dosen penguji Tugas Akhir ini.
4. Seluruh jajaran dosen dan staf jurusan Matematika ITS.
5. Teman-teman mahasiswa jurusan Matematika ITS

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Juli 2015

**Penulis**

*special thanks to*

Selama proses pembuatan Tugas Akhir ini, banyak pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan untuk penulis. Penulis mengucapkan terima kasih dan apresiasi secara khusus kepada:

1. Ibu Suliyah dan Bapak Zainul Aminin selaku orang tua penulis yang senantiasa memberikan kasih sayang, semangat, doa, serta nasihat yang sangat berharga bagi penulis.
2. Mas Aik, Mas Hei, Dina, dan Mbak Riris yang selalu menghibur dan memberi semangat setiap pulang ke Rumah.
3. *Happy Girls*, Nana dan Vimala. Semoga selamanya selalu bisa saling berbagi, memberi *support. My bestfriend forever.*
4. Sahabat Kepompong yang kini telah menjadi kupu-kupu, Ade, Nilam, Toni, dan Zamroji. Keluarga kecil di Surabaya yang selalu memberikan senyum semangat, keceriaan dan doa. Semoga selamanya kita tetap sahabat meskipun terpisah jarak dan waktu.
5. Hasanuddin Al-Habib, terimakasih telah setia sebagai seorang teman, sahabat sekaligus kakak yang selalu menyediakan waktunya untuk penulis.
6. Zebri, Linda, Bundo. Sahabat dekat yang selalu memberikan semangat dan dukungan kepada penulis.
7. Fendi, Singgih, Isman, dan Ilham. Teman seperjuangan sesama anak bimbingan Bu Erna. Terimakasih sudah menjadi teman *sharing* dan berbagai ilmu.
8. Teman-teman Matematika angkatan 2011 yang selama masa kuliah menjadi teman baik dan keluarga baru bagi penulis.
9. “Piphe Prend”, Ani, Vita, Watie, dan Riska. Terimakasih masih terus memberi semangat meskipun hanya bisa saling memberi kabar via *chat messenger.*

Tentu saja masih banyak pihak lain yang turut andil dalam penyelesaian tugas akhir ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah membalas dengan balasan yang lebih baik bagi semua pihak yang telah membantu penulis. *Amin ya rabbal ‘alamin.*

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xv
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xix
<b>BAB I. PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan .....	4
1.5 Manfaat .....	4
1.6 Sistematika Penulisan .....	4
<b>BAB II. TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Studi Penelitian Sebelumnya.....	7
2.2 Tingkat Suku Bunga.....	7
2.3 Model Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR) ..	8
2.4 Formula Ito .....	8
2.5 <i>Zero Coupon Bond</i> .....	9
2.6 <i>Ordinary Least Square (OLS)</i> .....	10
2.7 <i>Kalman Filter</i> .....	11
2.8 <i>Extended Kalman Filter</i> .....	12
2.9 <i>Ensemble Kalman Filter</i> .....	13
<b>BAB III. METODOLOGI PENELITIAN</b>	
3.1 Tahapan Penelitian .....	15
3.2 Diagram Alir Tahapan Penelitian .....	16
<b>BAB IV. HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
4.1 Penyelesaian Model Suku Bunga Cox Ingersoll	

Ross (CIR) .....	19
4.2 Estimasi Parameter Model CIR	
Menggunakan <i>Ordinary Least Square</i> .....	25
4.3 Estimasi Parameter dan <i>State</i> .....	27
4.3.1 Estimasi Menggunakan <i>Kalman Filter</i> .....	27
4.3.2 Estimasi Menggunakan <i>Extended</i>	
<i>Kalman Filter</i> .....	33
4.3.3 Estimasi Menggunakan <i>Ensemble</i>	
<i>Kalman Filter</i> .....	40
4.4 Estimasi Tingkat Suku Bunga Harian .....	46
4.5 Simulasi Harga <i>Zero Coupon Bond</i> .....	48
<b>BAB V. PENUTUP</b>	
6.1 Kesimpulan .....	51
6.2 Saran .....	52
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	53
<b>LAMPIRAN</b> .....	55

## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1 Rata-rata eror estimasi parameter dan tingkat suku bunga CIR menggunakan <i>Kalman Filter</i> ...	31
Tabel 4.2 Rata-rata eror estimasi parameter dan tingkat suku bunga CIR menggunakan <i>Extended Kalman Filter</i> .....	38
Tabel 4.3 Rata-rata eror estimasi parameter dan tingkat suku bunga CIR menggunakan <i>Ensemble Kalman Filter</i> .....	43

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 3.1	Diagram alir tahapan penelitian ..... 17
Gambar 4.1	Hasil estimasi parameter $k$ menggunakan <i>Kalman Filter</i> ..... 29
Gambar 4.2	Hasil estimasi parameter $\theta$ menggunakan <i>Kalman Filter</i> ..... 30
Gambar 4.3	Hasil estimasi parameter $\sigma$ menggunakan <i>Kalman Filter</i> ..... 30
Gambar 4.4	Hasil estimasi tingkat suku bunga harian model CIR menggunakan <i>Kalman Filter</i> ..... 31
Gambar 4.5	Perbandingan grafik data <i>real</i> tingkat suku bunga harian untuk <i>zero coupon bond</i> dengan data simulasi ..... 32
Gambar 4.6	Hasil estimasi parameter $k$ menggunakan <i>Extended Kalman Filter</i> ..... 35
Gambar 4.7	Hasil estimasi parameter $\theta$ menggunakan <i>Extended Kalman Filter</i> ..... 36
Gambar 4.8	Hasil estimasi parameter $\sigma$ menggunakan <i>Extended Kalman Filter</i> ..... 36
Gambar 4.9	Hasil estimasi tingkat suku bunga harian model CIR menggunakan <i>Extended Kalman Filter</i> ..... 37
Gambar 4.10	Perbandingan grafik data <i>real</i> tingkat suku bunga harian untuk <i>zero coupon bond</i> dengan data simulasi ..... 38
Gambar 4.11	Hasil estimasi parameter $k$ menggunakan <i>Ensemble Kalman Filter</i> ..... 40
Gambar 4.12	Hasil estimasi parameter $\theta$ menggunakan <i>Ensemble Kalman Filter</i> ..... 41
Gambar 4.13	Hasil estimasi parameter $\sigma$ menggunakan <i>Ensemble Kalman Filter</i> ..... 42
Gambar 4.14	Hasil estimasi tingkat suku bunga harian model CIR menggunakan <i>Ensemble Kalman Filter</i> ..... 43
Gambar 4.15	Perbandingan grafik data <i>real</i> tingkat suku bunga harian untuk <i>zero coupon bond</i> dengan data simulasi ..... 44
Gambar 4.16	Hasil estimasi tingkat suku bunga harian model CIR menggunakan <i>Kalman Filter</i> ..... 46

Gambar 4.17	Perbandingan grafik data <i>real</i> tingkat suku bunga harian untuk <i>zero coupon bond</i> dengan data simulasi .....	47
Gambar 4.18	Simulasi harga <i>zero coupon bond</i> .....	48

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Pada dunia ekonomi, tingkat suku bunga berpengaruh penting dalam penentuan harga suatu sekuritas, contohnya pada penentuan harga *bond* (obligasi), saham, dan opsi. Pergerakan tingkat suku bunga merupakan proses stokastik karena selalu berubah-ubah sepanjang waktu, sehingga diperlukan model stokastik untuk bisa menjelaskan pergerakan dari tingkat suku bunga tersebut. Model tingkat suku bunga yang akan dibahas pada tugas akhir ini adalah model Cox Ingersoll Ross (CIR). Model ini pertama kali diperkenalkan pada tahun 1985 oleh Cox, Ingersoll, dan Ross[1]. Model CIR menjamin tingkat bunga bernilai positif dan memiliki sifat *mean reversion* yakni memiliki kecenderungan kembali ke nilai rata-rata jangka panjang.

Salah satu sekuritas yang nilainya bergantung pada tingkat suku bunga adalah *bond* (obligasi). *Bond* adalah surat hutang yang diterbitkan oleh pemerintah atau perusahaan untuk memenuhi kebutuhan dana. Ada kalanya pelaku ekonomi seperti perusahaan membutuhkan pinjaman dana untuk memenuhi kebutuhan pada proses bisnis mereka. Untuk itu perusahaan menerbitkan *bond* dan menjualnya pada investor. *Bond* merupakan contoh dari investasi yang bebas resiko karena menjamin adanya keuntungan dari pengembalian yang akan diterima pemegang *bond* pada saat jatuh tempo, yakni berupa nilai pokok dan bunga. Jenis *bond* yang akan dibahas pada tugas akhir ini adalah *zero coupon bond* atau obligasi tanpa kupon. Pemegang *bond* akan menerima pembayaran berupa nilai pokok hutang dan bunga pada saat jatuh tempo, tidak ada pembayaran

bunga secara periodik. Keuntungan yang diterima pemegang *bond* dinyatakan oleh tingkat suku bunga yang berlaku pada masa kepemilikan *bond*. Karena itu, tingkat suku bunga sangat berpengaruh dalam penentuan harga *zero coupon bond*. Pihak investor atau pembeli *bond* harus mengetahui tentang pergerakan tingkat suku bunga di pasar. Investor juga harus mengetahui bagaimana menentukan harga *zero coupon bond* agar tidak membeli *bond* dengan harga yang lebih tinggi dari seharusnya.

Dalam penentuan harga *zero coupon bond* diperlukan beberapa parameter dari model tingkat suku bunga. Pada tugas akhir ini adalah model CIR. Parameter tersebut didapat dari hasil estimasi model CIR menggunakan data tingkat suku bunga. Penelitian terdahulu dilakukan oleh AR Rizqiyatul Barokah dengan judul “*Implementasi Model Cox Ingersoll Ross dalam Mengaproksimasi Tingkat Bunga Harian dan Harga Zero Coupon Bond*”. Dalam penelitian ini digunakan metode *Generalized Method of Moment* (GMM) untuk mengestimasi parameter pada model CIR[2]. Dan ada pula penelitian yang telah dilakukan oleh Kamil Kladvko dengan judul “*Maximum Likelihood Estimation of The Cox-Ingersoll-Ross Process: The Matlab Impementation*”. Penelitian ini menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) untuk mengestimasi model CIR[3].

Model tingkat suku bunga CIR bersifat dinamik. Model dari sistem dinamik tersebut bisa dirubah ke model *state space* sehingga memungkinkan variabel yang tidak dapat diobservasi (*unobservable*) menjadi dapat diobservasi (*observable*). Penggunaan model *state space* pada bidang ekonomi sudah sering dilakukan, diantaranya untuk estimasi elemen tidak tampak, pengukuran eror dan observasi yang hilang. Model *state space* dapat dianalisa menggunakan algoritma rekursif yakni *Kalman*

*Filter*[4]. Metode *Kalman Filter* adalah suatu metode estimasi yang optimal. Metode ini dapat diterapkan pada model *state space*. Parameter pada model tingkat suku bunga CIR bisa diestimasi menggunakan metode *Kalman Filter* dengan cara merubah model CIR ke bentuk *state space*[4].

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis memilih melakukan penelitian tugas akhir yang berjudul “*Estimasi Parameter pada Model Tingkat Suku Bunga Cox Ingersoll Ross Menggunakan Metode Kalman Filter untuk Menentukan Harga Zero Coupon Bond*”. Dalam tugas akhir ini digunakan metode *Kalman Filter* untuk mengestimasi parameter dan tingkat suku bunga model CIR. Hasil estimasi tersebut selanjutnya digunakan untuk menentukan harga *zero coupon bond*.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang diuraikan pada Subbab 1.1, pada tugas akhir ini dirumuskan beberapa permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana mendapatkan nilai parameter dari model CIR menggunakan metode *Kalman Filter*?
2. Bagaimana mengimplementasikan model CIR untuk menentukan harga *zero coupon bond*?

## **1.3 Batasan Masalah**

Dari rumusan masalah yang ada, pada tugas akhir ini diberikan batasan masalah sebagai berikut:

1. Model tingkat suku bunga yang digunakan adalah model tingkat suku bunga CIR.
2. Pembeli *bond* bersifat *risk neutral*, artinya pembeli *bond* hanya memandang imbalan hasil dari *bond* yang dibeli.

3. Tingkat suku bunga dari *zero coupon bond* mengikuti model CIR.

#### **1.4 Tujuan**

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengestimasi parameter pada model tingkat suku bunga CIR.
2. Mengimplementasikan model CIR untuk menentukan harga *zero coupon bond*.

#### **1.5 Manfaat**

Manfaat yang diharapkan penulis dari penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika dibidang keuangan.
2. Memberikan pemahaman pada pembaca mengenai aplikasi metode *Kalman Filter*.
3. Membantu investor dalam memahami bagaimana menentukan harga *zero coupon bond*.

#### **1.6 Sistematika Penulisan**

Sistematika penulisan didalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

##### **BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang pembuatan tugas akhir, rumusan dan batasan permasalahan yang dihadapi dalam penelitian tugas akhir, tujuan serta manfaat pembuatan tugas akhir dan sistematika penulisan tugas akhir.

##### **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Bab ini menjelaskan tentang kajian teori dari referensi penunjang serta penjelasan mengenai permasalahan

yang dibahas dalam tugas akhir ini, meliputi teori suku bunga, model suku bunga CIR, formula Ito, *zero coupon bond* dan *Kalman Filter*.

### BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi metodologi atau urutan pengerjaan yang dilakukan dalam menyelesaikan tugas akhir, meliputi studi literatur, pengumpulan data, kajian model CIR, estimasi parameter dan *state*, penentuan harga *zero coupon bond*, hingga penulisan tugas akhir.

### BAB IV HASIL dan PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan mengenai penyelesaian dari model CIR, proses estimasi parameter dengan menggunakan OLS, *Kalman Filter*, *Extended Kalman Filter*, dan *Ensemble Kalman Filter* serta simulasi harga *zero coupon bond*.

### BAB V PENUTUP

Bab ini merupakan penutup, berisi tentang kesimpulan yang dapat diambil berdasarkan hasil pembahasan tugas akhir dan saran yang selayaknya dilakukan bila tugas akhir ini dilanjutkan.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bab ini akan dibahas mengenai teori-teori dasar yang mendukung pengerjaan tugas akhir serta penjelasan umum tentang metode yang akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada tugas akhir ini. Diantaranya adalah mengenai teori suku bunga, model suku bunga CIR, *zero coupon bond*, dan *Kalman Filter*.

#### **2.1 Studi Penelitian Sebelumnya**

Berikut beberapa penelitian yang berkaitan dengan Tugas Akhir ini :

1. Tugas Akhir AR Rizqiyatul Barokah dari Universitas Indonesia yang melakukan penelitian dengan judul “Implementasi Model Cox Ingersoll Ross dalam Mengaproksimasi Tingkat Bunga Harian dan Harga *Zero Coupon Bond*” pada tahun 2009[2]. Pada penelitian ini digunakan metode GMM untuk mengestimasi parameter model CIR. Hasil dari estimasi parameter tersebut digunakan untuk mengaproksimasi harga *zero coupon bond*.
2. Pada tahun 2007 Kamil Kladivko melakukan penelitian dengan judul “*Maximum Likelihood Estimation of The Cox-Ingersoll-Ross Process: The Matlab Implementation*”[3]. Pada penelitian ini digunakan metode Maximum Likelihood Estimation untuk mengestimasi parameter dari model CIR.

#### **2.2 Tingkat Suku Bunga**

Bunga adalah imbalan jasa atas pinjaman uang. Jika seseorang meminjam uang sejumlah  $P$  yang harus dikembalikan saat  $T$  dengan bunga sebesar  $r$  untuk setiap  $P$ , maka uang yang harus dibayarkan pada saat  $T$  adalah sebesar[5]:

$$P + rP = P(1 + r)$$

Persentase dari pokok hutang yang dibayarkan sebagai imbalan jasa (bunga) dalam suatu periode tertentu disebut suku bunga. Sedangkan tingkat suku bunga adalah perbandingan antara bunga yang dibayarkan dengan nilai pokok.

### 2.3 Model Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR)

Model tingkat suku bunga CIR merupakan model *equilibrium* yang diperkenalkan oleh Cox, Ingersoll, Ross pada tahun 1985. Model CIR menjamin tingkat suku bunga bernilai positif dan memiliki sifat *mean reversion* atau mempunyai kecenderungan kembali menuju rata-rata. Bentuk dari model CIR adalah[1]:

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t) \quad (2.1)$$

dengan nilai  $k > 0$ ,  $\theta > 0$ , dan  $\sigma > 0$

$r(t)$  : tingkat suku bunga pada waktu  $t$

$k$  : kecepatan  $r(t)$  kembali menuju  $\theta$

$\theta$  : rata-rata jangka panjang tingkat suku bunga

$\sigma$  : *volatility* dari tingkat suku bunga

$W(t)$  : proses Wiener

### 2.4 Formula Ito

Misalkan  $X(t)$  merupakan proses stokastik yang didefinisikan sebagai

$$dX(t) = \mu_t dt + \sigma_t dW(t)$$

dengan  $\mu_t$  merupakan suku *drift*,  $\sigma_t$  merupakan bagian difusi dan  $W(t)$  adalah proses Wiener, maka fungsi  $f(X(t), t)$  juga merupakan proses stokastik yang mempunyai bentuk persamaan diferensial sebagai berikut [6]:

$$df(X(t), t) = \frac{\partial f}{\partial X} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad (2.2)$$

Persamaan 2.2 dapat ditulis dalam bentuk integral sebagai berikut:

$$f(X(T), t) - f(X(0), 0) = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial X} dX(t) + \int_0^T \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt$$

## 2.5 Zero Coupon Bond

*Bond* adalah surat hutang yang berisi suatu kontrak hutang yang menjamin penerbit *bond* membayar bunga pada periode tertentu dan melunasi pokok hutang kepada pembeli *bond* pada waktu jatuh tempo.

### Definisi 2.1[6]

*Zero coupon bond* adalah suatu kontrak hutang yang dibuat saat  $t$  dengan masa jatuh tempo  $T$  yang menjamin pembeli *bond* menerima pembayaran bunga dan pokok hutang pada saat  $T$  tanpa ada pembayaran secara periodik. Nilai kontrak untuk  $t < T$  dan dinotasikan  $P(t, T)$ . Nilai  $P(T, T) = 1$  untuk semua  $T$ .

Bentuk persamaan *zero coupon bond* yang mengikuti model tingkat suku bunga CIR satu faktor adalah[7]:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (2.3)$$

dengan:

$$A(t, T) = \left[ \frac{2\gamma e^{(k+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + k)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{2k\theta/\sigma^2}$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + k)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

$r(t)$  : tingkat suku bunga pada waktu  $t$

**Definisi 2.2[6]**

Tingkat suku bunga majemuk yang berlaku saat  $t$  dengan waktu jatuh tempo  $T$  dinotasikan dengan  $R(t, T)$  dan merupakan laju konstan dimana investasi dari unit  $P(t, T)$  saat  $t$  akan terus bertambah sampai menghasilkan sejumlah unit pada waktu jatuh tempo  $T$ . Dengan rumus:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)} \quad (2.4)$$

dengan:

$P(t, T)$  : Harga *zero coupon bond* pada Persamaan (2.3)

$\tau(t, T)$  :  $T - t$

**2.6 Ordinary Least Square (OLS)**

*Ordinary Least Square* (OLS) adalah metode estimasi parameter yang sering digunakan didalam ilmu statistika. dengan meminimalkan jumlahan kuadrat dari error [8]. Misalkan diberikan suatu model:

$$Y_t = \theta Y_{t-1} + e_t, \quad t=1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

Dengan  $e_t$  adalah bagian error dan nilai ekspektasinya adalah nol.  $E[e_t] = 0$ . Estimator untuk koefisien  $\theta$  pada Persamaan 2.5 adalah:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{t=2}^n Y_{t-1} Y_t}{\sum_{t=1}^n Y_{t-1}^2}$$

**2.7 Kalman Filter**

*Kalman Filter* adalah suatu metode estimasi yang optimal. Komponen dasar dari metode *Kalman Filter* adalah persamaan pengukuran dan persamaan transisi. Dengan menggunakan data pengukuran untuk memperbaiki hasil estimasi. Secara umum

algoritma *Kalman Filter* untuk sistem dinamik linear waktu diskrit adalah[9]:

Model sistem dan model pengukuran:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k \\z_k &= H_k x_k + v_k \\x_0 &\sim (\bar{x}_0, P_{x_0}), \quad w_k \sim (0, Q_k), \quad v_k \sim (0, R_k)\end{aligned}$$

Inisialisasi:

$$P_0 = P_{x_0}, \quad \hat{x}_0 = \bar{x}_0$$

Tahap Prediksi:

$$\begin{aligned}\text{estimasi : } \hat{x}_{k+1}^- &= A_k \hat{x}_k + B_k u_k \\ \text{kovariansi error : } P_{k+1}^- &= A_k P_k A_k^T + G_k Q_k G_k^T\end{aligned}$$

Tahap Koreksi:

kalman gain :

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}$$

kovariansi error :

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1}^-$$

estimasi :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-)$$

dengan :

$x_k$  = variabel keadaan sistem pada waktu  $k$  yang nilai estimasi awalnya adalah  $\bar{x}_0$  dan kovariansi awal  $P_{x_0}$

$u_k$  = variabel *input* deterministik pada waktu  $k$

$w_k$  = *noise* pada sistem dengan *mean* sama dengan nol dan kovariansi  $Q_k$

$z_k$  = variabel pengukuran

$H$  = matriks pengukuran

$v_k$  = *noise* pada pengukuran dengan *mean* sama dengan nol dan kovariansi  $R_k$

$A_k, B_k, G_k$  adalah matriks-matriks dengan nilai elemen-elemennya merupakan koefisien variabel masing masing.

Proses estimasi menggunakan *Kalman Filter* dilakukan dalam dua tahapan, yakni tahap prediksi (*time update*) dan tahap koreksi (*measurement update*).

## 2.8 Extended Kalman Filter

Metode *Extended Kalman Filter* (EKF) merupakan perluasan dari metode *Kalman Filter*. Metode EKF dapat digunakan untuk mengestimasi model sistem yang nonlinear. Seperti pada metode *Kalman Filter*, metode EKF dilakukan dalam dua tahapan yakni tahap prediksi (*time update*) dan tahap koreksi (*measurement update*). Bentuk umum dari algoritma EKF untuk sistem dinamik nonlinear diskrit adalah [9]:

Model Sistem dan model pengukuran :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= a(x_k, u_k, k) + G_k w_k \\z_k &= h(x_k, k) + v_k \\x(0) &\sim (\bar{x}_0, P_0), \quad w(k) \sim (0, Q), \quad v_k \sim (0, R)\end{aligned}$$

Asumsi :

$\{w_k\}$  dan  $\{v_k\}$  adalah proses *white noise* yang tidak berkorelasi dengan  $x(0)$  dan dengan yang lainnya juga.

Inisialisasi :

$$P(0) = P_0, \quad \hat{x}(0) = \bar{x}_0$$

Tahap Prediksi:

$$\text{estimasi : } \hat{x} = a(\hat{x}, u, k)$$

$$\text{kovarians eror : } \hat{P} = A(\hat{x}, k)P + PA^T(\hat{x}, k) + GQG^T$$

Tahap Koreksi:

kalman gain :

$$K_k = P^-(t_k)H^T(\hat{x}_k^-)[H(\hat{x}_k^-)P^-(t_k)H^T(\hat{x}_k^-) + R]^{-1}$$

kovarians eror :

$$P_{k+1} = [I - K_k H_k]P_{k+1}^-$$

estimasi :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}[z_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1}^-, k)]$$

*Jacobians* :

$$A(x, k) = \frac{\partial a(x, u, k)}{\partial x}$$

$$H(x) = \frac{\partial h(x, k)}{\partial x}$$

Matriks *jacobians* digunakan pada tahap prediksi dan tahap koreksi.

## 2.9 Ensemble Kalman Filter

Metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) adalah metode estimasi modifikasi dari metode *Kalman Filter* yang dapat digunakan untuk mengestimasi model sistem yang linear maupun nonlinear. Dalam metode EnKF tidak perlu dilakukan linearisasi seperti pada metode EKF. Tahap awal dari metode EnKF adalah membangkitkan sejumlah  $N$  *ensemble* secara acak dan berdistribusi normal. Bentuk algoritma EnKF secara umum adalah sebagai berikut:

Model Sistem dan Pengukuran:

$$x_{k+1} = a(x_k, u_k, k) + G_k w_k$$

$$z_k = H x_k + v_k$$

$$w_k \sim (0, Q), \quad v_k \sim (0, R)$$

Inisialisasi:

Bangkitkan sebanyak  $N$  *ensemble* sesuai estimasi awal  $\bar{x}_0$

$$x_{0,i} = [x_{0,1} \quad x_{0,2} \quad x_{0,3} \quad \cdots \quad x_{0,N}]$$

Nilai awal:

$$\hat{x}_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{0,i}$$

Tahap Prediksi:

$$\hat{x}_{k+1,i}^- = f(\hat{x}_k, u_k)$$

estimasi :

$$\hat{x}_{k+1}^- = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{x}_{k+1,i}^-$$

kovarians eror :

$$P_{k+1}^- = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_{k+1,i}^- - \hat{x}_{k+1}^-) (\hat{x}_{k+1,i}^- - \hat{x}_{k+1}^-)^T$$

Tahap Koreksi:

$$z_{k,i} = z_k + v_{k,i} \text{ dengan } v_{k,i} \sim (0, R)$$

kalman gain :

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- H^T [H P_{k+1}^- H^T + R]^{-1}$$

kovarians eror :

$$P_{k+1} = [I - K_{k+1} H] P_{k+1}^-$$

estimasi :

$$\hat{x}_{k+1,i} = \hat{x}_{k+1,i}^- + K_{k+1} [z_{k+1,i} - H \hat{x}_{k+1,i}^-]$$

$$\hat{x}_{k+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{x}_{k+1,i}$$

## **BAB III**

### **METODOLOGI PENELITIAN**

Bab ini membahas mengenai metodologi penelitian yang digunakan untuk menyelesaikan tugas akhir. Subbab yang dibahas meliputi tahapan penelitian dan diagram alir tahap pengerjaan.

#### **3.1 Tahapan Penelitian**

Pada subbab ini dibahas tahapan yang dilakukan penulis dalam proses penelitian tugas akhir. Tahapan penelitian yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Studi Literatur

Pada tahap pertama ini akan dilakukan pengkajian tentang model suku bunga CIR, estimasi parameter, algoritma *Kalman Filter*, *Extended Kalman Filter*, *Ensemble Kalman Filter* dan penentuan harga *zero coupon bond*. Studi ini dilakukan dengan membaca buku, jurnal, ataupun artikel yang terkait serta melalui diskusi dengan dosen dan mahasiswa.

2. Pengumpulan Data

Pada tahap kedua, penulis mengumpulkan data yang diperlukan untuk pengerjaan tugas akhir ini. Yakni data tingkat suku bunga dari *zero coupon bond*. Data tersebut akan digunakan dalam proses estimasi parameter model CIR. Data yang digunakan pada tugas akhir ini adalah data suku bunga harian selama satu tahun dari *Bank of England* untuk masa jatuh tempo 5 tahun. Yakni mulai tanggal 2 Januari 2014 sampai 31 Desember 2014. Data selengkapnya terdapat pada lampiran A [10].

3. Estimasi Nilai Awal Parameter

Pada tahap ini, dilakukan proses estimasi untuk mendapatkan nilai awal dari parameter model CIR. Dengan metode *Ordinary Least Square* (OLS) dan menggunakan data yang

didapatkan dari tahap 2 dilakukan estimasi parameter untuk  $k$ ,  $\theta$ , dan  $\sigma$ .

4. **Estimasi Parameter dan *State***  
Pada tahap estimasi ini dilakukan proses estimasi parameter dan *state* dengan menggunakan algoritma *Kalman Filter*, *Extended Kalman Filter*, dan *Ensemble Kalman Filter*. *Software* yang akan digunakan untuk proses estimasi ini adalah Matlab. Parameter yang akan diestimasi adalah parameter-parameter dari model CIR yakni  $k$ ,  $\theta$ , dan  $\sigma$ . Sedangkan *state* yang akan diestimasi adalah tingkat suku bunga harian yang mengikuti model CIR.
5. **Simulasi Harga *Zero Coupon Bond***  
Pada tahap ini digunakan hasil estimasi dari Tahap 4 untuk menentukan harga *zero coupon bond*. Selanjutnya dilakukan simulasi agar lebih terlihat seperti apa bentuk grafik dari harga *zero coupon bond*.
6. **Penarikan Kesimpulan**  
Tahap penarikan kesimpulan merupakan tahap akhir dalam proses penelitian tugas akhir ini, dimana pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan terhadap hasil yang telah dicapai.

### **3.2 Diagram Alir Tahapan Penelitian**

Tahap-tahap pengerjaan Tugas Akhir yang telah dijelaskan pada Subbab 3.1 di atas digambarkan dalam diagram alir pada Gambar 3.1 sebagai berikut :



**Gambar 3.1** Diagram Alir Tahapan Penelitian

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada penelitian tugas akhir ini. Pada subbab selanjutnya akan dijelaskan tentang penyelesaian model suku bunga CIR, estimasi parameter menggunakan OLS, estimasi parameter dan *state* dan simulasi harga *zero coupon bond*.

### 4.1 Penyelesaian Model Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR)

Subbab 4.1 akan membahas mengenai penyelesaian dari model CIR pada Persamaan (2.1). Karena Persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial stokastik, maka digunakan teorema Ito yang terdapat pada Subbab 2.4. Misalkan didefinisikan fungsi:

$$f(t, r(t)) = e^{kt}r(t) \quad (4.1)$$

berdasarkan teorema Ito, karena  $r(t)$  merupakan proses stokastik, maka fungsi  $f(t, r(t))$  yang mengandung  $r(t)$  juga merupakan proses stokastik. Sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$df(t, r(t)) = f_t(t, r(t))dt + f_r(t, r(t))dr(t) + \frac{1}{2}f_{rr}(t, r(t))dt$$

$$d(e^{kt}r(t)) = ke^{kt}r(t) dt + e^{kt}dr(t) + \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$= ke^{kt}r(t) dt$$

$$+e^{kt} \left( k(\theta - r(t)) dt + \sigma\sqrt{r(t)} dW(t) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= ke^{kt}r(t) dt + k\theta e^{kt} dt - ke^{kt}r(t) dt \\
&\quad + \sigma e^{kt}\sqrt{r(t)} dW(t) \\
&= k\theta e^{kt} dt + \sigma e^{kt}\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Selanjutnya kedua ruas Persamaan (4.2) diintegrasikan dari  $t$  sampai  $t + 1$ . Dengan selisih dari  $t + 1$  dan  $t$  adalah  $\Delta t$  maka akan didapatkan

$$\begin{aligned}
e^{k(t+1)}r(t+1) - e^{kt}r(t) &= \int_t^{t+1} k\theta e^{ku} du + \int_t^{t+1} \sigma e^{ku}\sqrt{r(u)} dW(u) \\
&= k\theta \frac{1}{k} (e^{k(t+1)} - e^{kt}) \\
&\quad + \int_t^{t+1} \sigma e^{ku}\sqrt{r(u)} dW(u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{k(t+1)}r(t+1) &= e^{kt}r(t) + \theta(e^{k(t+1)} - e^{kt}) \\
&\quad + \int_t^{t+1} \sigma e^{ku}\sqrt{r(u)} dW(u) \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Setelah itu, kedua ruas Persamaan (4.3) dikalikan dengan  $e^{-k(t+1)}$  sehingga diperoleh hasil penyelesaian sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r(t+1) &= e^{k(t-(t+1))}r(t) + \theta(1 - e^{k(t-(t+1))}) \\
&\quad + \int_t^{t+1} \sigma e^{-k(t+1-u)}\sqrt{r(u)} dW(u) \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.4) adalah penyelesaian dari Persamaan (2.1). Didapatkan penyelesaian rekursif untuk  $r(t+1)$  dalam bentuk nilai satu *step* sebelumnya  $r(t)$ . Dengan diberikan  $\Delta t =$

$(t + 1) - t$ . Maka Persamaan (4.4) dapat ditulis dalam bentuk persamaan transisi sebagai berikut

$$r(t + 1) = e^{-k\Delta t}r(t) + \theta(1 - e^{-k\Delta t}) + \epsilon(t + 1) \quad (4.5)$$

dengan

$$\epsilon(t + 1) = \int_t^{t+1} \sigma e^{-k((t+1)-u)} \sqrt{r(u)} dW(u)$$

Setelah mendapatkan penyelesaian dari model CIR, selanjutnya dicari rata-rata dan varians. Dengan menghitung rata-rata model CIR, bisa dibuktikan sifat *mean reversion* dari model CIR. Rata-rata model CIR didapat dengan menghitung ekspektasinya.

$$\begin{aligned} E[r(t + 1)] &= E[e^{-k\Delta t}r(t) + \theta(1 - e^{-k\Delta t}) \\ &\quad + \int_t^{t+1} \sigma e^{-k((t+1)-u)} \sqrt{r(u)} dW(u)] \quad (4.6) \end{aligned}$$

Karena nilai ekspektasi dari integral Ito adalah 0, maka Persamaan (4.6) menjadi

$$\begin{aligned} E[r(t + 1)] &= E[e^{-k\Delta t}r(t) + \theta(1 - e^{-k\Delta t})] \\ E[r(t + 1)] &= e^{-k\Delta t}r(t) + \theta(1 - e^{-k\Delta t}) \quad (4.7) \end{aligned}$$

Persamaan (4.7) adalah rata-rata dari model CIR. Dengan mengambil nilai  $t \rightarrow \infty$  akan didapatkan  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t + 1)] = \theta$ . Maka terbukti bahwa model CIR memiliki sifat *mean reversion* karena rata-rata jangka panjangnya adalah  $\theta$  yang merupakan *mean reversion level*.

Selanjutnya akan dihitung varians dari model CIR. Untuk menghitung varians, misalkan fungsi  $X(t) = f(t, r(t)) =$

$e^{kt}r(t)$  seperti pada Persamaan (4.1). Sebelumnya telah dihitung pada Persamaan (4.2)

$$\begin{aligned} dX(t) &= k\theta e^{kt} dt + \sigma e^{kt} \sqrt{r(t)} dW(t) \\ &= k\theta e^{kt} dt + \sigma e^{\frac{kt}{2}} \sqrt{X(t)} dW(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dengan cara yang sama seperti saat menghitung ekspektasi dari model CIR didapatkan:

$$\begin{aligned} X(t) - X(0) &= \int_0^t k\theta e^{ku} du + \int_0^t \sigma e^{\frac{ku}{2}} \sqrt{X(u)} dW(u) \\ X(t) &= r(0) + \theta(e^{kt} - 1) \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan:

$$E[X(t)] = r(0) + \theta(e^{kt} - 1) \quad (4.9)$$

Dengan menggunakan teorema Ito bisa dihitung

$$\begin{aligned} d(X^2(t)) &= 2X(t)dX(t) + (dX(t))^2 \\ &= 2X(t) \left[ k\theta e^{kt} dt + \sigma e^{\frac{kt}{2}} \sqrt{X(t)} dW(t) \right] \\ &\quad + \left[ k\theta e^{kt} dt + \sigma e^{\frac{kt}{2}} \sqrt{X(t)} dW(t) \right]^2 \\ &= 2k\theta e^{kt} X(t) dt + 2\sigma e^{\frac{kt}{2}} X^{\frac{3}{2}}(t) dW(t) \\ &\quad + \sigma^2 e^{kt} X(t) dt \end{aligned} \quad (4.10)$$

Selanjutnya dikenakan integral di kedua ruas Persamaan (4.10)

$$\begin{aligned}
 X^2(t) &= X^2(0) + (2k\theta + \sigma^2) \int_0^t e^{ku} X(u) d(u) \\
 &\quad + 2\sigma \int_0^t e^{\frac{ku}{2}} X^{\frac{3}{2}}(u) dW(u)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dihitung ekspektasi dari Persamaan (4.11). Karena ekspektasi dari integral Ito bernilai nol maka didapatkan:

$$\begin{aligned}
 E[X^2(t)] &= E \left[ X^2(0) + (2k\theta + \sigma^2) \int_0^t e^{ku} X(u) d(u) \right] \\
 &= X^2(t) + (2k\theta + \sigma^2) \int_0^t e^{ku} E[X(u)] d(u)
 \end{aligned}$$

Substitusikan Persamaan (4.9) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 E[X^2(t)] &= r^2(0) + (2k\theta + \sigma^2) \\
 &\quad \int_0^t e^{ku} (r(0) + \theta(e^{ku} - 1)) d(u) \\
 &= r^2(0) + (2k\theta + \sigma^2) \left[ \frac{r(0)}{k} (e^{kt} - 1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\theta}{2k} (e^{2kt} - 1) - \frac{\theta}{k} (e^{kt} - 1) \right] \\
 &= r^2(0) + \frac{1}{k} (2k\theta + \sigma^2) (r(0) - \theta) (e^{kt} - 1) \\
 &\quad + \frac{\theta}{2k} (2k\theta + \sigma^2) (e^{2kt} - 1)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya bisa dihitung

$$\begin{aligned}
 E[r^2(t)] &= e^{-2kt} E[X^2(t)] \\
 &= e^{-2kt} \left[ r^2(0) + \frac{1}{k} (2k\theta + \sigma^2) (r(0) - \theta) (e^{kt} - 1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\theta}{2k} (2k\theta + \sigma^2) (e^{2kt} - 1) \right] \\
 &= e^{-2kt} r^2(0) + \frac{1}{k} (2k\theta + \sigma^2) (r(0) - \theta) \\
 &\quad (e^{-kt} - e^{-2kt}) + \frac{\theta}{2k} (2k\theta + \sigma^2) \\
 &\quad (1 - e^{-2kt}) \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

Dari Persamaan (4.7) dan Persamaan (4.12) bisa dihitung varians dari model CIR.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(r(t)) &= E[r^2(t)] - (E[r(t)])^2 \\
 &= r(0) \left( \frac{\sigma^2}{k} \right) (e^{-kt} - e^{-2kt}) \\
 &\quad + \theta \left( \frac{\sigma^2}{2k} \right) (1 - e^{-2kt})^2 \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

Pada Subbab 4.1 ini sudah didapatkan penyelesaian, rata-rata, dan varians dari model suku bunga CIR. Yakni Persamaan (4.4), Persamaan (4.7), dan Persamaan (4.13). Sudah dibuktikan bahwa model CIR mempunyai sifat *mean reversion* dengan  $\theta$  merupakan rata-rata jangka panjang dari model CIR.

## 4.2 Estimasi Parameter Model CIR Menggunakan *Ordinary Least Square*

Nilai awal pada tahap estimasi parameter didapatkan dari metode OLS. Persamaan (2.1) diubah menjadi bentuk:

$$r_{t+1} - r_t = k(\theta - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{r_t}\varepsilon_t \quad (4.14)$$

dengan  $\varepsilon_t \sim N(0, \Delta t)$ . Untuk dapat menggunakan OLS, Persamaan (4.14) diubah menjadi

$$\frac{(r_{t+1} - r_t)}{\sqrt{r_t}} = \frac{k\theta\Delta t}{\sqrt{r_t}} - k\sqrt{r_t}\Delta t + \sigma\varepsilon_t \quad (4.15)$$

Jumlahan kuadrat dari bagian eror (RSS)  $\sum_{i=1}^{n-1}(\sigma\varepsilon_t)^2$  harus diminimalkan untuk mendapatkan estimator yang terbaik.

$$RSS = \sum_{i=1}^{n-1} (\sigma\varepsilon_t)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{(r_{t+1} - r_t)}{\sqrt{r_t}} - \frac{k\theta\Delta t}{\sqrt{r_t}} + k\sqrt{r_t}\Delta t \right)^2$$

Dengan meminimalkan RSS terhadap  $k$  dan  $\theta$  akan didapatkan estimator untuk  $\hat{k}$  dan  $\hat{\theta}$  sebagai berikut:

$$\hat{k} = \frac{n^2 - 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_{t+1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} - \sum_{i=1}^{n-1} r_t \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} - (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_{t+1}}{r_t}}{\left( n^2 - 2n + 1 - \sum_{i=1}^{n-1} r_t \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} \right) \Delta t}$$

$$\hat{\theta} = \frac{(n-1) \sum_{i=1}^{n-1} r_{t+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_{t+1}}{r_t} \sum_{i=1}^{n-1} r_t}{\left( n^2 - 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} r_{t+1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} - \sum_{i=1}^{n-1} r_t \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_t} - (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_{t+1}}{r_t} \right)}$$

Dan estimator untuk  $\hat{\sigma}$  adalah:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{(r_{t+1} - r_t)}{\sqrt{r_t}} - \frac{\hat{\theta}}{\sqrt{r_t}} + \hat{k}\sqrt{r_t} \right)^2}$$

Data yang digunakan dalam proses estimasi parameter ini adalah data suku bunga harian selama 1 tahun untuk *zero coupon bond* dari *Bank of England* sejak 2 Januari 2014 sampai 31 Desember 2014.

Dengan bantuan *software* Matlab, didapatkan hasil estimasi untuk parameter model CIR adalah 1.3898 untuk nilai  $k$ , 0.012 untuk nilai  $\theta$ , dan 0.0946 untuk nilai  $\sigma$ . Nilai parameter dari metode OLS ini akan digunakan sebagai inputan nilai awal pada metode *Kalman Filter*.

### 4.3 Estimasi Parameter dan State

Pada subbab ini dilakukan estimasi parameter dan tingkat suku bunga harian dari model CIR. Parameter yang akan diestimasi adalah  $k, \theta$ , dan  $\sigma$ . Sedangkan *state* yang akan diestimasi adalah nilai tingkat suku bunga harian yang mengikuti model CIR. Metode estimasi yang digunakan adalah *Kalman Filter* (KF) linear waktu diskrit, *Extended Kalman Filter* (EKF), dan *Ensemble Kalman Filter* (EnKF).

#### 4.3.1 Estimasi Menggunakan *Kalman Filter*

Parameter dan *state* yang akan diestimasi adalah  $k, \theta, \sigma$ , dan nilai suku bunga harian yang mengikuti model CIR. Karena  $k, \theta$ , dan  $\sigma$  merupakan suatu konstanta, maka persamaan transisi untuk parameter tersebut adalah:

$$\begin{aligned}k_{t+1} &= k_t \\ \theta_{t+1} &= \theta_t \\ \sigma_{t+1} &= \sigma_t\end{aligned}$$

Sedangkan persamaan transisi untuk tingkat suku bunga model CIR adalah penyelesaian dari model CIR pada Persamaan (4.6), yakni sebagai berikut:

$$r(t+1) = \theta(1 - e^{k\Delta t}) + e^{-k\Delta t}r(t) + \epsilon(t+1)$$

Sehingga didapatkan Model sistem untuk algoritma *Kalman Filter* adalah:

$$x_{t+1} = Ax_t + w_t$$

dengan  $x_t$  adalah vektor dari *state* yang akan diestimasi dan  $A$  adalah matriks transisi.

$$x_t = [k_t \quad \theta_t \quad \sigma_t \quad r_t]' \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-k\Delta t} & 0 & e^{-k\Delta t} \end{bmatrix}$$

Data pengukuran yang digunakan adalah data suku bunga harian selama 1 tahun untuk *zero coupon bond* untuk masa jatuh tempo 5 tahun pada lampiran A. Persamaan dari data pengukuran merupakan tingkat suku bunga majemuk untuk *zero coupon bond* seperti pada Persamaan (2.4) sebagai berikut:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)}$$

dengan  $P(t, T)$  pada Persamaan (2.3) maka didapatkan

$$\begin{aligned} R(t, T) &= -\frac{\ln A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}}{\tau(t, T)} \\ &= \frac{B(t, T)}{\tau} r(t) - \frac{\ln A(t, T)}{\tau} \end{aligned}$$

Pada metode *Kalman Filter*, model pengukuran seharusnya dalam bentuk linear terhadap masing-masing *state* yang diestimasi. Karena fungsi  $A(t, T)$  dan  $B(t, T)$  merupakan fungsi nonlinear yang tidak mudah dilinearisasi, maka persamaan untuk model pengukuran hanya berbentuk linear terhadap  $r(t)$  tetapi tetap nonlinear terhadap  $k, \theta$ , dan  $\sigma$ . Sehingga didapatkan model

pengukuran untuk algoritma *Kalman Filter* adalah:

$$z_t = Hx_t + D + v_t \quad (4.16)$$

dengan

$$H = [0 \quad 0 \quad 0 \quad B(t, T)/\tau], \text{ dan } D = -\ln A(t, T) / \tau$$

$$A(t, T) = \left[ \frac{2\gamma e^{(k+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + k)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{2k\theta/\sigma^2}$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + k)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

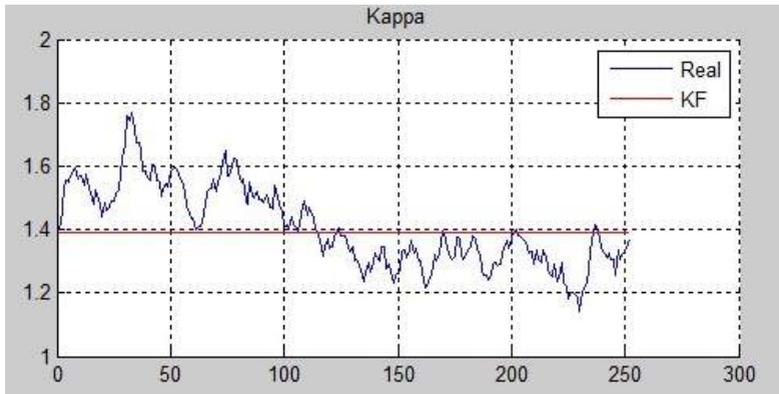
Setelah didapatkan model sistem dan pengukuran, selanjutnya dilakukan tahap inialisasi. Nilai awal dari parameter didapatkan dari hasil estimasi menggunakan OLS. Sedangkan nilai awal untuk  $r_t$  diambil dari data pertama, yakni nilai suku bunga pada tanggal 2 Januari 2014. Nilai inialisasi dan kovarians awal diberikan sebagai berikut:

$$\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 1.3898 \\ 0.0120 \\ 0.0946 \\ 0.0198 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk variansi dari *noise* sistem ( $Q$ ) dan variansi *noise* pengukuran ( $R$ ) diberikan:

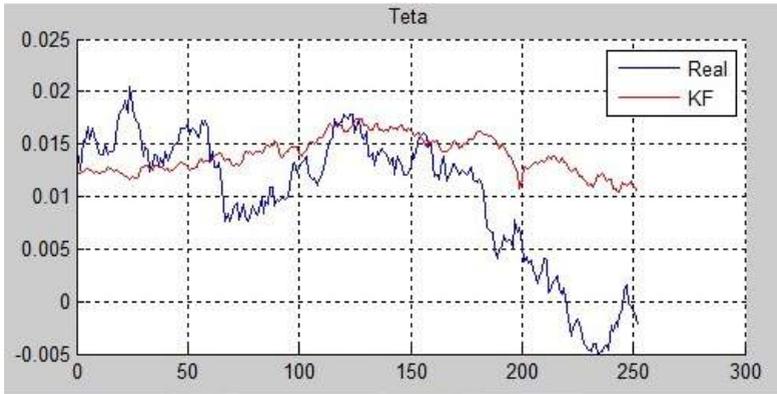
$$Q = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad R = 10^{-6}$$

Iterasi dijalankan sejumlah banyaknya data pengukuran yakni 252. Dengan bantuan *software* Matlab didapatkan hasil estimasi untuk masing-masing *state* sebagai berikut:



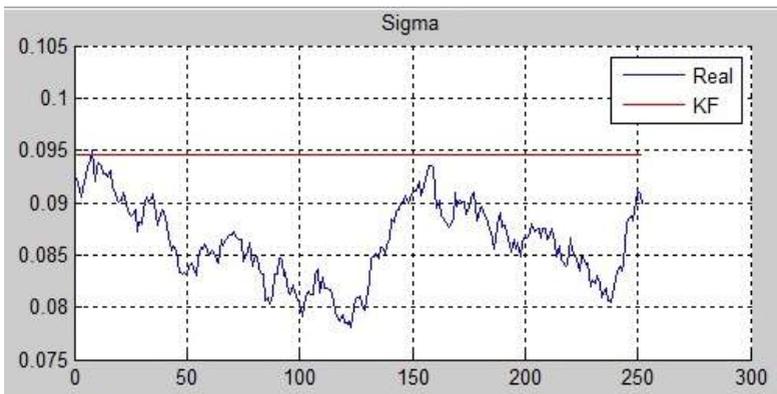
**Gambar 4.1** Hasil estimasi parameter  $k$  menggunakan *Kalman Filter*

Jika dilihat pada Gambar 4.1, hasil estimasi parameter  $k$  menggunakan *Kalman Filter* tidak cukup baik karena hasil estimasi yang ditunjukkan oleh grafik berwarna merah belum mendekati grafik berwarna biru yang merupakan nilai *real* dari sistem. Dari hasil estimasi ini didapatkan rata-rata nilai eror sebesar 0.23218.



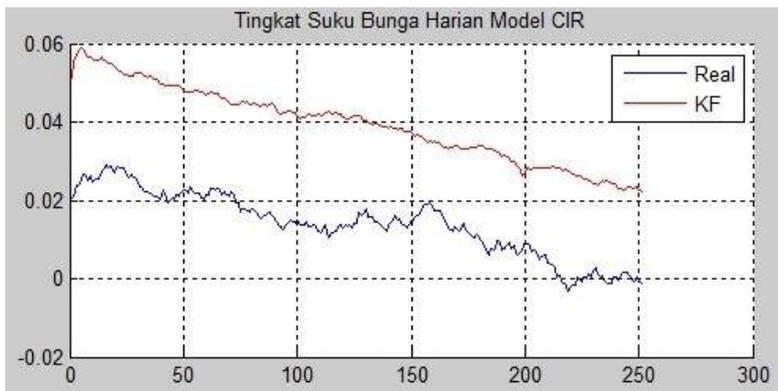
**Gambar 4.2** Hasil estimasi parameter  $\theta$  menggunakan *Kalman Filter*

Pada Gambar 4.2 menunjukkan hasil estimasi menggunakan *Kalman Filter* untuk parameter  $\theta$  tidak cukup baik. Karena terlihat grafik hasil estimasi menggunakan *Kalman Filter* menjauhi grafik nilai *real* dari sistem. Hasil estimasi untuk parameter  $\theta$  diperoleh rata-rata nilai eror sebesar 0.01176.



**Gambar 4.3** Hasil estimasi parameter  $\sigma$  menggunakan *Kalman Filter*

Gambar 4.3 menunjukkan hasil estimasi untuk parameter  $\sigma$ . Ternyata hasil estimasi yang didapat tidak jauh berbeda dengan parameter  $k$  dan  $\theta$ . Grafik hasil estimasi parameter  $\sigma$  menggunakan *Kalman Filter* jauh dari grafik dari sistem yang sebenarnya. Rata-rata nilai error untuk estimasi parameter  $\sigma$  adalah 0.01044.



**Gambar 4.4** Hasil estimasi tingkat suku bunga harian model CIR menggunakan *Kalman Filter*

Hasil estimasi tingkat suku bunga harian model CIR pada Gambar 4.4 menunjukkan hasil estimasi yang jauh dari nilai sistem yang sebenarnya. Terlihat selisih yang cukup jauh sekitar 0.04 dengan rata-rata error sebesar 0.02336.

Dari hasil estimasi parameter dan tingkat suku bunga harian menggunakan *Kalman Filter*, didapatkan rata-rata error estimasi untuk masing-masing parameter dan *state* seperti pada Tabel 4.1.

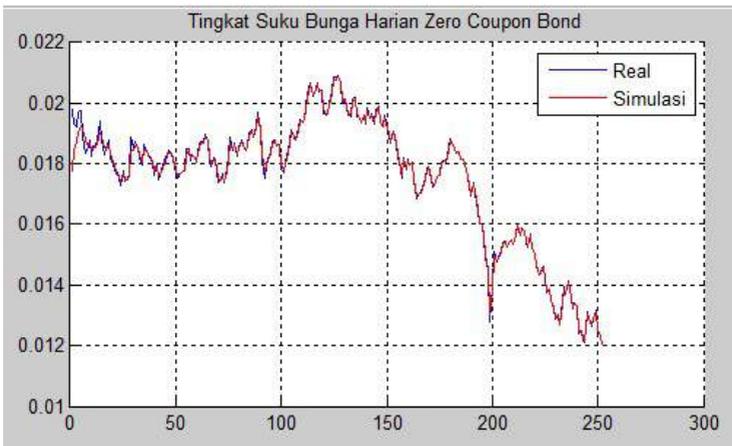
**Tabel 4.1** Rata-rata error estimasi parameter dan tingkat suku bunga CIR menggunakan *Kalman Filter*

Parameter dan <i>State</i>	Rata-rata Error Estimasi
$k$	0.23218
$\theta$	0.01176

$\sigma$	0.01044
$r(t)$	0.02336

Estimasi parameter  $k, \theta, \sigma$  dan tingkat suku bunga harian menggunakan *Kalman Filter* didapatkan hasil yang tidak cukup baik. Dilihat dari Gambar 4.1, 4.2, 4.3, dan 4.4 yang menunjukkan grafik estimasi menggunakan *Kalman Filter* belum bisa mendekati grafik dari sistem yang sebenarnya.

Setelah didapatkan hasil estimasi, dilakukan simulasi nilai tingkat suku bunga harian untuk zero coupon bond. Simulasi ini dilakukan untuk dapat melihat perbandingan data real dengan data simulasi yang nilai parameter dan suku bunganya didapatkan dari proses estimasi. Dengan bantuan software Matlab didapatkan hasil simulasi sebagai berikut:



**Gambar 4.5** Perbandingan grafik data *real* tingkat suku bunga harian untuk *zero coupon bond* dengan data simulasi

Dari Gambar 4.5 terlihat grafik data simulasi yang berwarna merah sangat mendekati grafik data *real* yang berwarna biru dengan rata-rata error sebesar 0.00017.

### 4.3.2 Estimasi Menggunakan *Extended Kalman Filter*

Karena persamaan penyelesaian dari model CIR merupakan persamaan nonlinear, maka digunakan metode *Extended Kalman Filter* (EKF) untuk mengestimasi parameter dan *state*. Seperti pada metode *Kalman Filter*, parameter dan *state* yang akan diestimasi adalah  $k, \theta, \sigma$ , dan nilai suku bunga harian yang mengikuti model CIR. Model sistem untuk algoritma EKF adalah persamaan transisi dari masing-masing *state* yang akan diestimasi, yakni sebagai berikut:

$$x_{t+1} = a(x_t, t) + w_t \quad (4.17)$$

dengan

$$x_t = [k_t \quad \theta_t \quad \sigma_t \quad r_t]'$$

$$a(x_t, t) = \begin{bmatrix} k_t \\ \theta_t \\ \sigma_t \\ (1 - e^{-k_t \Delta t})\theta_t + e^{-k_t \Delta t} r_t \end{bmatrix}.$$

Karena data pengukuran yang digunakan sama dengan data pengukuran saat metode *Kalman Filter*, maka model pengukuran pada EKF sama seperti pada Persamaan (4.16).

Selanjutnya adalah menghitung matriks Jacobian untuk  $a(x_t, t)$ . Matriks Jacobian didapatkan dengan cara menurunkan secara parsial fungsi  $a(x_t, t)$  terhadap masing-masing parameter dan *state* yang diestimasi.

$$\frac{\partial a_1}{\partial k_t} = 1, \quad \frac{\partial a_1}{\partial \theta_t} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial \sigma_t} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial r_t} = 0$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial k_t} = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \theta_t} = 1, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \sigma_t} = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial r_t} = 0$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial k_t} = 0, \quad \frac{\partial a_3}{\partial \theta_t} = 0, \quad \frac{\partial a_3}{\partial \sigma_t} = 1, \quad \frac{\partial a_3}{\partial r_t} = 0$$

$$\frac{\partial a_4}{\partial k_t} = (\theta - r)\Delta t e^{-k\Delta t}, \quad \frac{\partial a_4}{\partial \theta_t} = 1 - e^{-k\Delta t},$$

$$\frac{\partial a_4}{\partial \sigma_t} = 0, \quad \frac{\partial a_4}{\partial r_t} = e^{-k\Delta t}$$

Sehingga didapatkan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial k_t} & \frac{\partial a_1}{\partial \theta_t} & \frac{\partial a_1}{\partial \sigma_t} & \frac{\partial a_1}{\partial r_t} \\ \frac{\partial a_2}{\partial k_t} & \frac{\partial a_2}{\partial \theta_t} & \frac{\partial a_2}{\partial \sigma_t} & \frac{\partial a_2}{\partial r_t} \\ \frac{\partial a_3}{\partial k_t} & \frac{\partial a_3}{\partial \theta_t} & \frac{\partial a_3}{\partial \sigma_t} & \frac{\partial a_3}{\partial r_t} \\ \frac{\partial a_4}{\partial k_t} & \frac{\partial a_4}{\partial \theta_t} & \frac{\partial a_4}{\partial \sigma_t} & \frac{\partial a_4}{\partial r_t} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\theta - r)\Delta t e^{-k\Delta t} & 1 - e^{-k\Delta t} & 0 & e^{-k\Delta t} \end{bmatrix}$$

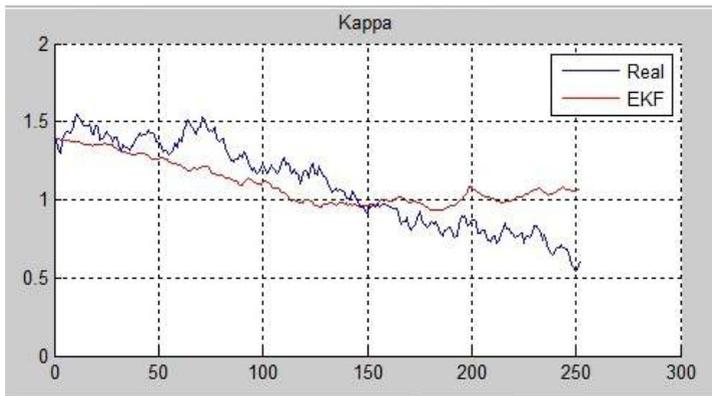
Nilai awal parameter didapatkan dari hasil estimasi menggunakan OLS. Sedangkan nilai awal untuk  $r_t$  diambil dari data pertama, yakni nilai suku bunga pada tanggal 2 Januari 2014. Pada tahap inisialisasi diberikan nilai awal  $\hat{x}_0$  dan kovarians awal  $P_0$  sebagai berikut:

$$\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 1.3898 \\ 0.0120 \\ 0.0946 \\ 0.0198 \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk variansi dari *noise* sistem ( $Q$ ) dan variansi *noise* pengukuran ( $R$ ) diberikan:

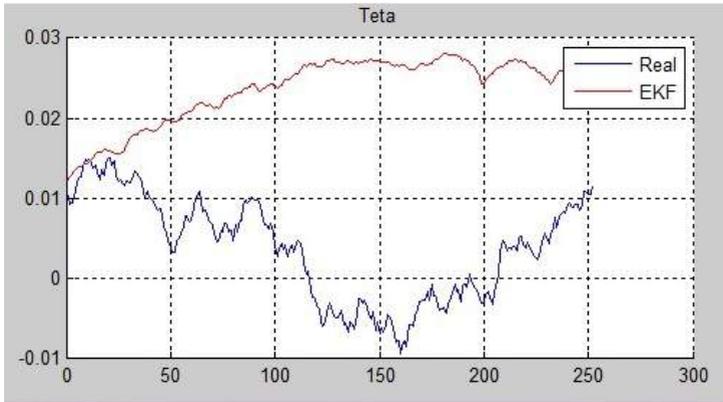
$$Q = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad R = 10^{-6}$$

Dilakukan iterasi sebanyak 252 kali, yakni sesuai dengan banyaknya data. Dengan bantuan software Matlab didapatkan hasil estimasi untuk masing-masing *state* sebagai berikut.



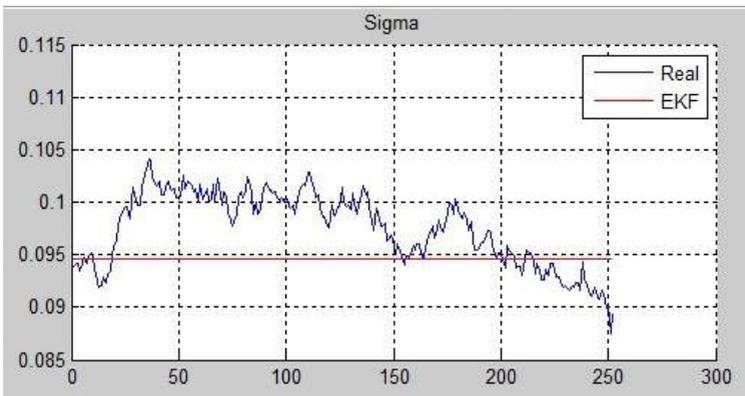
**Gambar 4.6** Hasil estimasi parameter  $k$  menggunakan *Extended Kalman Filter*

Dilihat dari Gambar 4.6, hasil estimasi parameter  $k$  menggunakan *Extended Kalman Filter* tidak cukup baik karena hasil estimasi yang ditunjukkan oleh grafik berwarna merah belum mendekati grafik berwarna biru yang merupakan nilai *real* dari sistem. Dari hasil estimasi ini didapatkan rata-rata nilai error sebesar 0.45706.



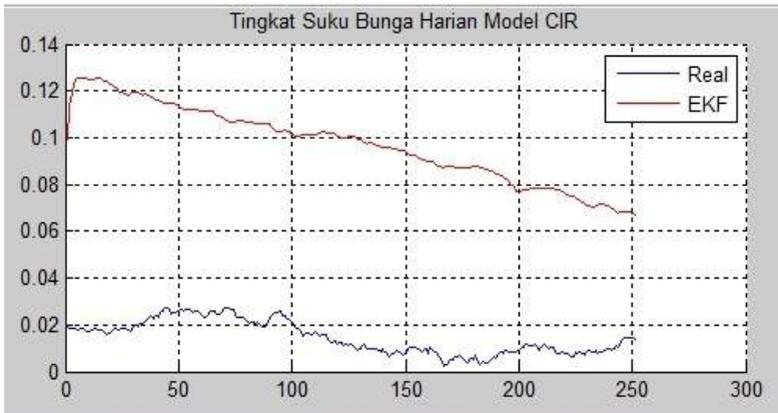
**Gambar 4.7** Hasil estimasi parameter  $\theta$  menggunakan *Extended Kalman Filter*

Pada Gambar 4.7 terlihat bahwa estimasi parameter  $\theta$  menggunakan *Extended Kalman Filter* memberikan hasil yang tidak cukup baik. Terlihat pada grafik hasil estimasi menggunakan EKF jauh dari grafik nilai *real* dari sistem. Hasil estimasi untuk parameter  $\theta$  diperoleh rata-rata nilai eror sebesar 0.01414.



**Gambar 4.8** Hasil estimasi parameter  $\sigma$  menggunakan *Extended Kalman Filter*

Gambar 4.8 menunjukkan hasil estimasi untuk parameter  $\sigma$ . Hasil estimasi yang didapat tidak jauh berbeda dengan parameter  $k$  dan  $\theta$ . Grafik hasil estimasi parameter  $\sigma$  menggunakan *Extended Kalman Filter* masih belum mendekati grafik dari sistem yang sebenarnya. Rata-rata nilai eror untuk estimasi parameter  $\sigma$  adalah 0.00506.



**Gambar 4.9** Hasil estimasi tingkat suku bunga harian model CIR menggunakan *Extended Kalman Filter*

Hasil estimasi tingkat suku bunga harian menggunakan EKF pada Gambar 4.9 menunjukkan hasil yang kurang baik. Terlihat selisih yang jauh antara grafik estimasi EKF yang berwarna merah dan grafik biru yang merupakan nilai *real* yang sebenarnya. Rata-rata nilai eror untuk estimasi tingkat suku bunga harian adalah sebesar 0.08386.

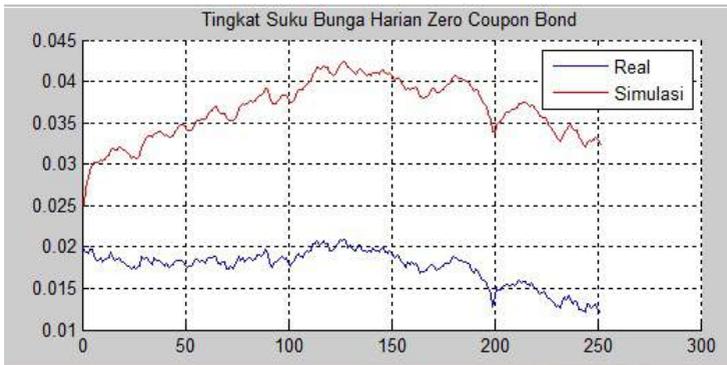
Dari hasil estimasi parameter dan tingkat suku bunga harian menggunakan *Extended Kalman Filter*, didapatkan rata-rata eror estimasi untuk masing-masing parameter dan *state* seperti pada Tabel 4.2.

**Tabel 4.2** Rata-rata eror estimasi parameter dan tingkat suku bunga CIR menggunakan *Extended Kalman Filter*

Parameter dan State	Rata-rata Eror Estimasi
$k$	0.45706
$\theta$	0.01414
$\sigma$	0.00506
$r(t)$	0.08386

Estimasi parameter  $k, \theta, \sigma$  dan tingkat suku bunga harian menggunakan *Extended Kalman Filter* didapatkan hasil yang tidak cukup baik. Terlihat dari Gambar 4.6, 4.7, 4.8, dan 4.9 yang menunjukkan grafik estimasi menggunakan *Extended Kalman Filter* belum bisa mendekati grafik dari sistem yang sebenarnya.

Setelah didapatkan hasil estimasi, dilakukan simulasi nilai tingkat suku bunga harian untuk *zero coupon bond*. Simulasi ini dilakukan untuk dapat melihat perbandingan data *real* dengan data simulasi yang nilai parameter dan suku bunganya didapatkan dari proses estimasi. Dengan bantuan *software* Matlab didapatkan hasil simulasi sebagai berikut:



**Gambar 4.10** Perbandingan grafik data *real* tingkat suku bunga harian untuk *zero coupon bond* dengan data simulasi

Dari Gambar 4.10 terlihat bahwa grafik data simulasi yang berwarna merah memiliki perbedaan jauh dengan grafik data *real* yang berwarna biru dengan rata-rata eror sebesar 0.0193. Sehingga dapat dikatakan bahwa hasil estimasi parameter dan suku bunga harian model CIR menggunakan *Extended Kalman Filter* belum cukup baik.

#### 4.3.3 Estimasi Menggunakan *Ensemble Kalman Filter*

Karena persamaan model CIR merupakan persamaan nonlinear, digunakan metode *Ensemble Kalman Filter* (EnKF) untuk mengestimasi parameter dan *state*. Seperti pada metode *Kalman Filter* dan EKF, parameter dan *state* yang akan diestimasi adalah  $k$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ , dan nilai suku bunga harian yang mengikuti model CIR. Model sistem untuk algoritma EnKF sama seperti pada EKF yakni pada Persamaan (4.18).

$$x_{t+1} = a(x_t, t) + w_t \quad (4.17)$$

dengan

$$x_t = [k_t \quad \theta_t \quad \sigma_t \quad r_t]'$$

$$a(x_t, t) = \begin{bmatrix} k_t \\ \theta_t \\ \sigma_t \\ (1 - e^{-k_t \Delta t})\theta_t + e^{-k_t \Delta t} r_t \end{bmatrix}.$$

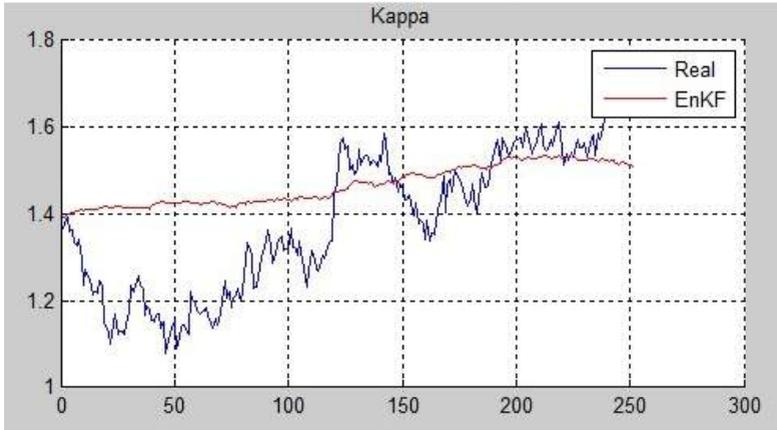
Karena data pengukuran yang digunakan untuk proses estimasi sama seperti yang digunakan pada metode *Kalman Filter* dan *Extended Kalman Filter* maka model pengukurannya sama seperti pada Persamaan (4.16). Nilai awal untuk parameter didapatkan dari hasil estimasi menggunakan OLS. Sedangkan nilai awal untuk  $r_t$  diambil dari data pengukuran pertama, yakni nilai suku bunga pada tanggal 2 Januari 2014.

$$\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 1.3898 \\ 0.0120 \\ 0.0946 \\ 0.0198 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk variansi dari *noise* sistem ( $Q$ ) dan variansi *noise* pengukuran ( $R$ ) diberikan:

$$Q = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad R = 10^{-6}$$

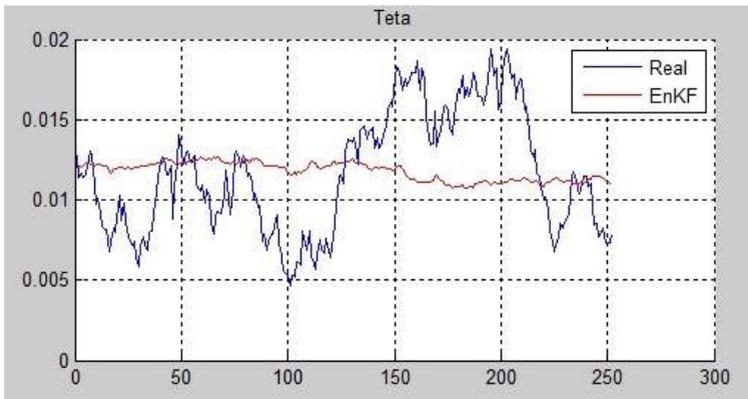
Proses ensemble dilakukan sebanyak 100. Banyaknya iterasi adalah sebanyak 252 kali sesuai dengan jumlah data pengukuran. Dengan bantuan software Matlab didapatkan hasil sebagai berikut.



**Gambar 4.11** Hasil estimasi parameter  $k$  menggunakan *Ensemble Kalman Filter*

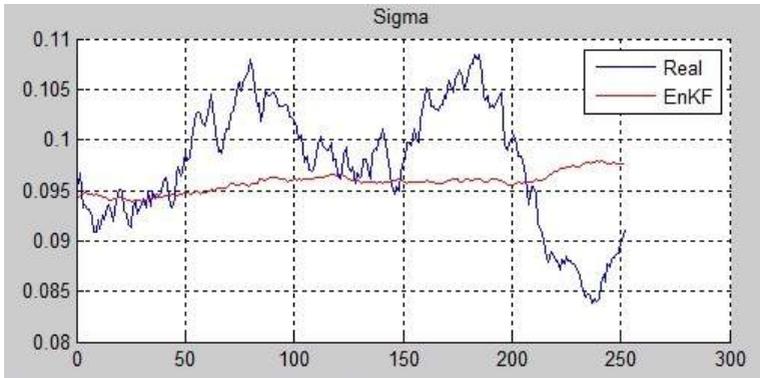
Dilihat dari Gambar 4.11, hasil estimasi menggunakan *Ensemble Kalman Filter* untuk parameter  $k$  belum cukup baik

karena hasil estimasi yang ditunjukkan oleh grafik berwarna merah belum mendekati grafik berwarna biru yang merupakan nilai *real* dari sistem. Nilai rata-rata eror untuk estimasi parameter  $k$  adalah sebesar 0.28074.



**Gambar 4.12** Hasil estimasi parameter  $\theta$  menggunakan *Ensemble Kalman Filter*

Pada Gambar 4.12 terlihat bahwa estimasi parameter  $\theta$  menggunakan *Ensemble Kalman Filter* memberikan hasil yang tidak cukup baik. Terlihat pada grafik bahwa hasil estimasi menggunakan EnKF jauh dari grafik nilai *real* dari sistem. Hasil estimasi untuk parameter  $\theta$  diperoleh rata-rata nilai eror sebesar 0.01414.



**Gambar 4.13** Hasil estimasi parameter  $\sigma$  menggunakan *Ensemble Kalman Filter*

Gambar 4.13 menunjukkan hasil estimasi menggunakan *Ensemble Kalman Filter* untuk parameter  $\sigma$ . Hasil estimasi yang didapat masih sama seperti pada *Kalman Filter* dan *Extended Kalman Filter*. Terlihat grafik hasil estimasi parameter  $\sigma$  menggunakan *Ensemble Kalman Filter* masih belum mendekati grafik dari sistem yang sebenarnya. Diperoleh rata-rata nilai eror untuk estimasi parameter  $\sigma$  adalah 0.009.



**Gambar 4.14** Hasil estimasi tingkat suku bunga harian model CIR menggunakan *Ensemble Kalman Filter*

Hasil estimasi tingkat suku bunga harian menggunakan EnKF pada Gambar 4.14 menunjukkan hasil estimasi yang tidak cukup baik. Terlihat selisih yang jauh antara grafik estimasi EnKF yang berwarna merah dengan grafik biru yang merupakan nilai *real* system yang sebenarnya. Rata-rata nilai error untuk estimasi tingkat suku bunga harian adalah sebesar 0.00736.

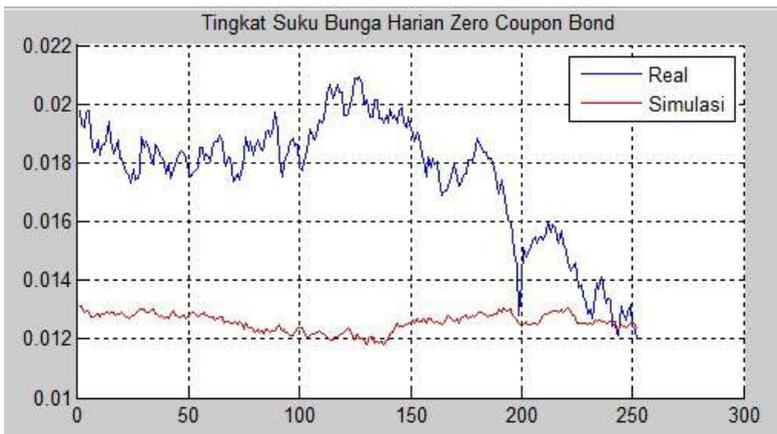
Dari hasil estimasi parameter dan tingkat suku bunga harian menggunakan *Kalman Filter*, didapatkan rata-rata error estimasi untuk masing-masing parameter dan *state* seperti pada Tabel 4.3.

**Tabel 4.3** Rata-rata error estimasi parameter dan tingkat suku bunga CIR menggunakan *Ensemble Kalman Filter*

Parameter dan <i>State</i>	Rata-rata Error Estimasi
$k$	0.28074
$\theta$	0.00930
$\sigma$	0.00900
$r(t)$	0.00736

Dari Gambar 4.11, 4.12, 4.13, dan 4.14 didapatkan hasil estimasi yang tidak jauh berbeda dengan metode *Kalman Filter* dan EKF. Metode EnKF memberikan hasil yang tidak cukup baik untuk mengestimasi parameter dan tingkat suku bunga harian model CIR.

Setelah didapatkan hasil estimasi, dilakukan simulasi nilai tingkat suku bunga harian untuk *zero coupon bond*. Simulasi ini dilakukan untuk dapat melihat perbandingan data *real* dengan data simulasi yang nilai parameter dan suku bunganya didapatkan dari proses estimasi. Dengan bantuan *software* Matlab didapatkan hasil simulasi sebagai berikut:



**Gambar 4.15** Perbandingan grafik data *real* tingkat suku bunga harian untuk *zero coupon bond* dengan data simulasi

Dari Gambar 4.15 terlihat bahwa grafik data simulasi yang berwarna merah memiliki perbedaan jauh dengan grafik data *real* yang berwarna biru dengan rata-rata eror sebesar 0.0193. Sehingga dapat dikatakan bahwa hasil estimasi parameter dan suku bunga harian model CIR menggunakan *Ensemble Kalman Filter* belum cukup baik.

#### 4.4 Estimasi Tingkat Suku Bunga Harian

Pada Subbab 4.3 dilakukan estimasi parameter dan tingkat suku bunga harian model CIR. Estimasi menggunakan *Kalman Filter*, *Extended Kalman Filter* dan *Ensemble Kalman Filter* menunjukkan hasil yang belum cukup baik. Oleh karena itu pada Subbab 4.4 ini dilakukan estimasi tingkat suku bunga harian model CIR menggunakan *Kalman Filter* dengan diberikan nilai parameter konstan hasil estimasi menggunakan OLS.

Dari hasil estimasi menggunakan OLS didapatkan nilai parameter model CIR untuk data suku bunga selama satu tahun dari *Bank of England* adalah 1.3898 untuk nilai  $k$ , 0.012 untuk nilai  $\theta$ , dan 0.0946 untuk nilai  $\sigma$ . Dengan menggunakan nilai parameter tersebut, dilakukan estimasi tingkat suku bunga harian yang mengikuti model CIR menggunakan metode Kalman Filter. Model dari sistem adalah bentuk diskrit dari Persamaan (4.5) sebagai berikut:

$$r_{t+1} = (1 - e^{-k\Delta t})\theta + e^{-k\Delta t}r_t + w_t$$

Karena data pengukuran yang digunakan pada proses estimasi sama seperti yang digunakan pada Subbab 4.3, maka model pengukurannya sama seperti pada Persamaan (4.16).

$$z_t = Hr_t + D + v_t$$

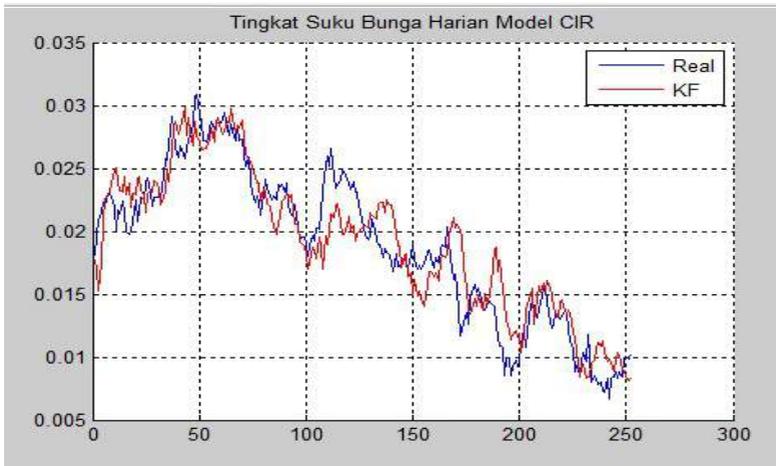
Setelah didapatkan model sistem dan pengukuran, selanjutnya adalah tahap inisialisasi. Nilai awal tingkat suku bunga adalah data pertama tingkat suku bunga pada tanggal 2 Januari 2015 yakni sebesar 0.0198. Nilai inisialisasi dan kovarians awal diberikan sebagai berikut:

$$\hat{r}_0 = [0.0198], \quad P_0 = [10^{-4}]$$

Selanjutnya untuk variansi dari *noise* sistem ( $Q$ ) dan variansi *noise* pengukuran ( $R$ ) diberikan:

$$Q = [10^{-6}], \quad R = 10^{-6}$$

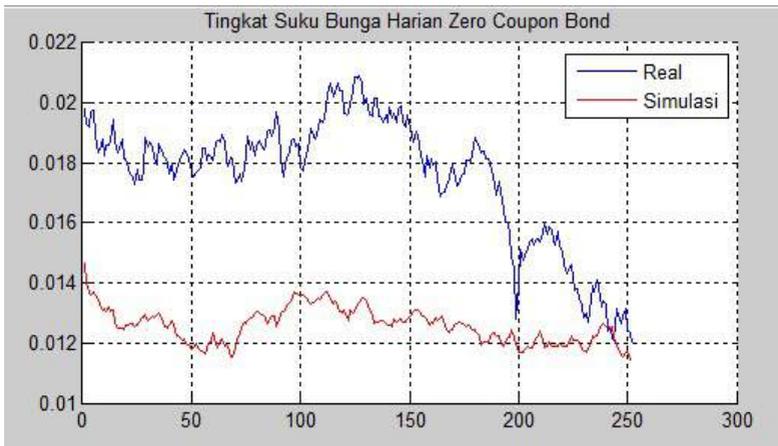
Proses iterasi dilakukan sebanyak 252 sesuai dengan jumlah banyaknya data pengukuran. Dengan menggunakan software Matlab didapatkan hasil estimasi untuk tingkat suku bunga harian adalah sebagai berikut:



**Gambar 4.16** Hasil estimasi tingkat suku bunga harian model CIR menggunakan metode *Kalman Filter*

Dari Gambar 4.16 didapatkan hasil estimasi yang baik untuk tingkat suku bunga harian model CIR. Karena terlihat pada grafik hasil estimasi yang karakteristiknya hamper sama dengan grafik nilai suku bunga dari sistem yang sebenarnya. Diperoleh rata-rata eror estimasi untuk suku bunga harian model CIR menggunakan *Kalman Filter* adalah sebesar 0.00274. Hasil estimasi ini nantinya akan digunakan pada simulasi harga *zero coupon bond*.

Setelah didapatkan hasil estimasi, dilakukan simulasi nilai tingkat suku bunga harian untuk *zero coupon bond*. Simulasi ini dilakukan untuk dapat melihat perbandingan data *real* dengan data simulasi yang nilai parameter dan suku bunganya didapatkan dari proses estimasi. Dengan bantuan *software* Matlab didapatkan hasil simulasi sebagai berikut:



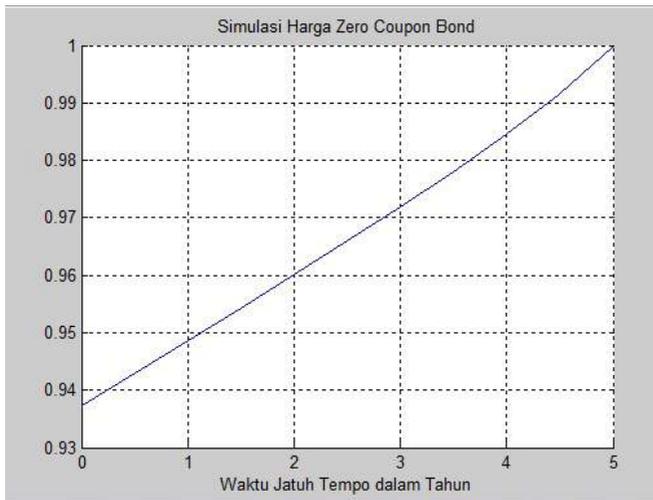
**Gambar 4.17** Perbandingan grafik data *real* tingkat suku bunga harian untuk *zero coupon bond* dengan data simulasi

Dari Gambar 4.17 terlihat bahwa grafik data simulasi yang berwarna merah memiliki perbedaan jauh dengan grafik data *real* yang berwarna biru dengan rata-rata eror sebesar 0.0053.

#### 4.5 Simulasi Harga *Zero Coupon Bond*

Pada Subbab 4.4 telah didapatkan hasil estimasi dari tingkat suku bunga harian yang mengikuti model CIR. Selanjutnya, dengan menggunakan tingkat suku bunga harian hasil estimasi *Kalman Filter* akan dilakukan simulasi harga *zero coupon bond*. Nilai parameter yang digunakan untuk simulasi adalah nilai parameter model CIR yang didapatkan dari metode OLS.

Misalkan dipilih satu hari yakni tanggal 1 Oktober 2014. Dari hasil estimasi suku bunga harian menggunakan metode *Kalman Filter* didapatkan tingkat suku bunga pada saat itu adalah sebesar 0.0187 atau 1.87%. Selanjutnya menggunakan rumus harga *zero coupon bond* pada Persamaan (2.3) maka didapatkan hasil simulasi sebagai berikut:



**Gambar 4.18** Simulasi harga *zero coupon bond*

Gambar 4.18 merupakan hasil simulasi harga *zero coupon bond* untuk tanggal 1 Oktober 2014 dengan masa jatuh tempo 5 tahun. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa harga *bond* mengalami kenaikan dari tahun ke tahun hingga waktu jatuh tempo. Semakin dekat dengan masa jatuh tempo, maka harga *zero coupon bond* semakin tinggi.

Dari grafik hasil simulasi, saat  $t = 0$  atau saat tanggal 1 Oktober 2014 harga *zero coupon bond* dengan masa jatuh tempo 5 tahun adalah sebesar 0.9373. Dan  $t = 5$  atau pada saat jatuh tempo, harga *zero coupon bond* adalah 1. Hal ini sesuai dengan

Definisi pada Subbab 2.5 bahwa nilai  $P(T, T) = 1$  untuk semua  $T$ . Jadi, misalkan pada tanggal 1 Oktober 2014 suatu perusahaan menerbitkan *bond* dengan masa jatuh tempo 5 tahun untuk uang senilai Rp. 10.000.000,- maka investor akan membeli *bond* tersebut seharga  $0.9373 \times 10000000$  yaitu sebesar Rp. 9.373.000,-. Penerbit *bond* akan membayar kepada investor saat masa jatuh tempo sebesar Rp. 10.000.000,-. Sehingga investor memperoleh untung sebesar Rp. 627.000,-.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **BAB V**

### **PENUTUP**

Bab ini berisi tentang beberapa kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan penelitian yang telah dilakukan. Di samping itu, pada bab ini juga dimasukkan beberapa saran yang dapat digunakan jika penelitian ini ingin dikembangkan.

#### **5.1 Kesimpulan**

Berdasarkan analisis terhadap hasil penelitian yang telah dilakukan maka dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS) didapatkan nilai parameter model CIR adalah 1.3898 untuk nilai  $k$ , 0.012 untuk nilai  $\theta$ , dan 0.0946 untuk nilai  $\sigma$ .
2. Metode *Kalman Filter*, *Extended Kalman Filter*, dan *Ensemble Kalman Filter* memberikan hasil yang kurang baik untuk estimasi parameter dan tingkat suku bunga model CIR. Hasil estimasi yang kurang baik ini bisa saja dikarenakan oleh model pengukuran yang hanya bisa memberikan informasi hubungan data pengukuran dengan tingkat suku bunga saja, sedangkan untuk nilai parameter tidak terdapat hubungan yang linear dengan data pengukuran. Namun metode *Kalman Filter* memberikan hasil yang baik untuk mengestimasi tingkat suku bunga harian dengan nilai parameter yang konstan. Dari proses estimasi didapatkan nilai eror untuk masing-masing metode adalah sebagai berikut.
3. Dari hasil estimasi tingkat suku bunga harian menggunakan metode *Kalman Filter* dilakukan simulasi harga *zero coupon bond*. Dari hasil simulasi didapatkan bahwa semakin dekat dengan masa jatuh tempo, harga *zero coupon bond* semakin tinggi.

## 5.2 Saran

Dengan melihat hasil yang dicapai pada penelitian ini, ada beberapa hal yang penulis sarankan untuk pengembangan selanjutnya yaitu untuk penelitian selanjutnya disarankan mencoba mengkombinasikan metode *Kalman Filter* dengan metode estimasi lain dengan harapan dapat memperoleh hasil estimasi yang lebih baik. Untuk nilai awal parameter bisa dicoba menggunakan metode *Conditional Least Square*.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Cox J.C., Ingersoll J.E., and Ross S.A. 1985. "A Theory of The Term Structure of Interest Rates". *Econometrica* Vol. 53, Issue 2, pp. 385-408.
- [2] Barokah A.R. 2009. "*Implementasi Model Cox Ingersoll Ross dalam Mengaproksimasi Tingkat Bunga Harian dan Harga Zero Coupon Bond*". Tugas Akhir. Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indonesia.
- [3] Kladviko, K. 2007. "Maximum Likelihood Estimation of The Cox-Ingersoll-Ross Process: The Matlab Implementation". *Technical Computing Prague*.
- [4] Vo, Long H. 2014. "Application of Kalman Filter on Modelling Interest Rates". *Journal of Management Science* Vol. 1, pp. 1-15.
- [5] Ross, S.M. 2011. "*An Elementary Introduction to Mathematical Finance, Third Edition*". New York: Cambridge University Press.
- [6] Brigo D., Mercurio F. 2006. "*Interest Rate Models – Theory and Practice, second edition*". Germany:Springer-Verlag Berlin Heiderlberg.
- [7] Chatterjee, S. 2005. "Application of The Kalman Filter for Estimating Continuous Time Term Structure Models: The Case of UK and Germany". Department of Economics, University of Glasgow.
- [8] Sypkens, R. 2010. "*Risk Properties and Parameter Estimation on Mean Reversion and GARCH Model*". Thesis. University of South Africa.
- [9] Lewis, F.L. 1986. "*Optimal Estimation with an Introduction to Stochastic Control Theory*". Canada: John Wiley & Sons, Inc.
- [10] <http://www.bankofengland.co.uk/statistics/Pages/yieldcurve/default.aspx>. Diakses pada 17 Maret 2015

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
LAMPIRAN A Data Tingkat Suku Bunga .....	55

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Eni Mariana, anak ketiga dari empat bersaudara yang lahir di Lamongan, 24 Agustus 1993. Tinggal dan dibesarkan di Kota Gresik. Sebelum menjadi mahasiswa, penulis menempuh pendidikan formal di SD Muhammadiyah 1 Kebomas Gresik, SMP Muhammadiyah 4 Kebomas Gresik dan melanjutkan di SMA Negeri 1 Gresik. Pada tahun 2011 penulis lulus dari SMA dan diterima di ITS Jurusan Matematika melalui jalur SNMPTN tulis.

Selama menjadi mahasiswa ITS, penulis mengikuti organisasi HIMATIKA, di tahun kedua penulis aktif sebagai Bendahara Departemen Dalam Negeri HIMATIKA ITS, dan di tahun ketiga penulis aktif sebagai staf Departemen Dalam Negeri HIMATIKA ITS. Organisasi memberikan banyak pengalaman dan pembelajaran yang sangat bermanfaat untuk kehidupan setelah lulus kuliah.

Dalam penulisan tugas akhir ini, masih terdapat banyak kekurangan dan ketidaksempurnaan. Untuk kritik, saran serta pertanyaan dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke [enimariana24@gmail.com](mailto:enimariana24@gmail.com)