



TUGAS AKHIR - SM0141501

**PENYELESAIAN PERSAMAAN BLACK-SCHOLES
DENGAN ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD**

NIRMALA PRATIWI
NRP 1211 100 078

Dosen Pembimbing:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Sentot Didik S., M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015

Halaman ini sengaja dikosongkan.



FINAL PROJECT - SM141501

**SOLUTION OF THE BLACK-SCHOLES
EQUATIONS BY THE ADOMIAN
DECOMPOSITION METHOD**

NIRMALA PRATIWI
NRP 1211 100 078

Supervisors:
Endah Rokhmati M.P., Ph.D
Drs. Sentot Didik S., M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LEMBAR PENGESAHAN

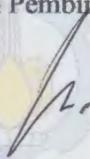
PENYELESAIAN PERSAMAAN BLACK-SCHOLES DENGAN ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

SOLUTION OF THE BLACK-SCHOLES EQUATIONS BY THE ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
NIRMALA PRATIWI
NRP. 1211 100 078

Menyetujui,
Dosen Pembimbing II


Drs. Sentot Didik S., M.Si
NIP. 19600527 198701 1 001

Dosen Pembimbing I


Endah Rokhmati M.P., Ph.D
NIP. 19761213 200212 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS



PENYELESAIAN PERSAMAAN *BLACK-SCHOLES DENGAN ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD*

Nama Mahasiswa : Nirmala Pratiwi
NRP : 1211 100 078
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing :
1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D
2. Drs. Sentot Didik S., M.Si

Abstrak

Adomian Decomposition Method (ADM) adalah sebuah metode penyelesaian berbentuk deret pendekatan yang digunakan untuk menyelesaikan Persamaan Black-Scholes dengan tipe Opsi Eropa. Dalam Tugas Akhir ini akan dibahas tentang cara menyelesaikan Persamaan Black-Scholes berupa Persamaan differensial parsial dengan call option dan opsi put dalam tipe Eropa dengan pembayaran dividen dan diselesaikan menggunakan Adomian Decomposition Method (ADM). Hasil penyelesaian yang didapat dari Adomian Decomposition Method akan dibandingkan dengan penyelesaian Persamaan difusi melalui program simulasi Matlab 2010a. Setelah didapatkan hasil bahwa Adomian Decomposition Method merupakan metode yang akurat karena hasil perhitungan yang didapat sama persis dengan hasil dari perhitungan difusi untuk menyelesaikan Persamaan Black-Scholes, sehingga disimpulkan bahwa Adomian Decomposition Method merupakan penyelesaian secara analitik untuk Persamaan Black-Scholes.

Kata-kunci: Adomian decomposition method, Persamaan Black-Scholes, Persamaan difusi, dividen, call option, put option

Halaman ini sengaja dikosongkan.

SOLUTION OF THE BLACK-SCHOLES EQUATIONS BY THE ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

Name : Nirmala Pratiwi
NRP : 1211 100 078
Department : Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors : 1. Endah Rokhmati M.P., Ph.D
2. Drs. Sentot Didik S., M.Si

Abstract

Adomian Decomposition Method (ADM) is applied to solve the Black-Scholes equation with boundary condition for European option. The final project's goal is to discuss the problem of pricing a European option in terms of a partial differential equation with dividend of call option and put option. The solutions of Adomian decomposition method is compared to Diffusion equation model using implementation Matlab 2010a. After getting the models, it's conclude that Adomian decomposition method is accurate solution to solve the Black-Scholes equation, because Adomian decomposition models exactly the same as a result of the Diffusion equation models. It concurrently Adomian decomposition method can be considered as analytical solution to solve the Black-Scholes equation.

Keywords: *Adomian Decomposition Method, Black-Scholes Equation, dividend, diffusion Equation, Call Option, Put Option*

Halaman ini sengaja dikosongkan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillaahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"PENYELESAIAN PERSAMAAN BLACK-SCHOLES DENGAN ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaiannya Tugas Akhir ini.
2. Ibu Endah Rokhmati M.P., Ph.D dan Bapak Drs. Sentot Didik S., M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Bapak dan Ibu dosen penguji atas semua saran dan masukan yang telah diberikan.

4. Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp selaku Kaprodi Sarjana Matematika FMIPA-ITS .
5. Bapak Drs. Nurul Hidayat, M.Kom selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Jurusan Matematika FMIPA ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis juga menyadari bahwa dalam penggerjaan ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga penulisan ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Juli 2015

Penulis

Special Thank's To

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Papa dan Mama, kedua orang tua ku tercinta. Yangti, Yangkung (Alm.), Mbahkung, Mbah Putri, Winda, dan Tya, terima kasih atas doa, kasih sayang, dukungan, motivasi, dan segalanya yang selalu dicurahkan kepada penulis selama ini.
2. —six—, sahabat-sahabat terbaik. Dyna Tsuroyya, Machmuda Nuril Zuchria, Ika Restu Affianti, Vimala Rachmawati, dan Rahmadana Junita. Terima kasih banyak atas segala doa, dukungan, kegilaan, keceriaan, waktu dan motivasi kalian
3. Business and Team, ICHIBO and Crew, C-DO, BANDIT'S Team. Terima kasih atas segala waktu, usaha, semangat, dan kerja keras kalian. Kalian team yang luar biasa, bangga bisa mengenal dan bekerjasama dengan kalian. See you on TOP, guys!
4. Teman-teman seperjuangan Tugas Akhir yang saling mendukung dan memotivasi satu sama lain dan terimakasih juga khususnya untuk mas Toni, Hesty Irna A, Agus Nur Ahmad, Handy Frank Willy, Zebrilia Dwi N, Ika Restu A, dan teman-teman lain yang sudah banyak membantu penulis dalam pembuatan program. Terimakasih banyak semua.
5. Teman-teman angkatan 2011, khususnya Menara'11 STI-46 terima kasih atas doa dan dukungan kalian selama ini. Kalian keluarga kedua di kampus perjuangan

- ini. Terima kasih atas semangat, kerja keras dan pengorbanan kalian.
6. Semua pihak yang tak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	4
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Penelitian Terdahulu	7
2.2 Persamaan Black-Scholes	8
2.3 Persamaan difusi	10
2.4 Opsi	10
2.4.1 <i>European Call Option</i>	11
2.4.2 <i>European Put Option</i>	13

2.5	<i>Put-Call Parity</i>	15
2.6	Dividen	15
2.7	<i>Adomian Decomposition Method</i>	16
BAB III	METODE PENELITIAN	19
3.1	Studi Literatur	19
3.2	Analisis Masalah	19
3.3	Penyelesaian <i>Black-Scholes</i> pada <i>European Option</i> dengan <i>Adomian Decomposition Method</i>	19
3.4	Persamaan Difusi dan Pembuatan Program Simulasi	20
3.5	Penarikan Kesimpulan dan Saran	20
3.6	Diagram Alir	20
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	21
4.1	<i>European Option</i> dengan <i>Adomian Decomposition Method</i>	21
4.2	Persamaan Difusi	37
4.3	Simulasi	51
	4.3.1 <i>Difusi Option</i> dengan pemberian dividen	51
	4.3.2 <i>Adomian European Option</i> dengan pemberian dividen	54
BAB V	PENUTUP	61
5.1	Kesimpulan	61
5.2	Saran	63
DAFTAR PUSTAKA		65
LAMPIRAN A	Biodata Penulis	67
LAMPIRAN A	Listing Program	69

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Harga <i>Call Option</i> Pada Saat Jatuh Tempo	12
Gambar 2.2	Harga <i>Put Option</i> Pada Saat Jatuh Tempo	14
Gambar 3.1	Diagram Alir Metodologi Penelitian . . .	20
Gambar 4.1	<i>Difusi call option</i> dengan Pembayaran Dividen	52
Gambar 4.2	<i>Difusi put option</i> dengan Pembayaran Dividen	54
Gambar 4.3	<i>Adomian call option</i> dengan Pembayaran Dividen . . .	57
Gambar 4.4	<i>Adomian put option</i> dengan Pembayaran Dividen . . .	59

Halaman ini sengaja dikosongkan.

Daftar Simbol

$C(S_t, T - t)$	Harga saham untuk difusi <i>call option</i> .
$P(S_t, T - t)$	Harga saham untuk difusi <i>put option</i> .
$V(x, T - t)$	Harga saham untuk <i>Adomian European call option</i> .
$W(x, T - t)$	Harga saham untuk <i>Adomian European put option</i> .
S_t	Harga saham pada waktu ke- t .
E	<i>Strike price</i> .
T	<i>Maturity/Expiration date</i> .
r	<i>interest rate</i> .
δ	dividen.
σ	<i>volatility parameter</i> .

Halaman ini sengaja dikosongkan.

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Asumsi Harga Saham	51
Tabel 4.2	<i>Difusi call option</i> dengan Pembayaran Dividen	51
Tabel 4.3	<i>Difusi Put Option</i> dengan Pembayaran Dividen	53
Tabel 4.4	Nilai x untuk <i>Adomian call option</i>	55
Tabel 4.5	<i>Adomian European call option</i>	55
Tabel 4.6	Nilai x untuk <i>Adomian put option</i>	58
Tabel 4.7	<i>Adomian European put option</i>	58

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang menjadi latarbelakang munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh. Adapun sistematika penulisan diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Berkembangnya ilmu teknologi, berdampak positif bagi perkembangan pola pikir masyarakat modern saat ini. Pola pikir yang dinamis dan visioner, membuat masyarakat semakin berfikir cerdas tentang masa depan. Terutama masalah *financial*. Keuangan yang mereka miliki tidak dibiarkan diam, tetapi diputar agar mendapatkan keuntungan dalam bentuk investasi. Dalam investasi, seorang investor memiliki pilihan untuk membeli aset yang diperdagangkan secara langsung di pasar keuangan atau membeli aset *derivative*, yaitu suatu instrumen keuangan yang nilainya bergantung kepada aset yang mendasarinya. Salah satu produk *derivative* yang banyak dikenal adalah opsi, yaitu suatu bentuk perjanjian atau investasi berupa kontrak yang memberikan pemegang opsi suatu hak untuk membeli atau menjual aset tertentu dengan harga dan pada jangka waktu tertentu. Berdasarkan jenis hak yang diberikan opsi dibedakan menjadi opsi beli (*call option*) dan opsi jual (*put option*). *Call option* adalah suatu tipe kontrak yang

memberikan hak kepada pemegang opsi untuk membeli dari penjual opsi sejumlah lembar saham tertentu pada harga dan jangka waktu yang ditentukan. *Put option* merupakan opsi yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual saham dalam jumlah tertentu kepada pembeli opsi pada waktu dan harga yang telah ditentukan. Sedangkan berdasarkan periode waktu penggunaan, opsi dapat dibedakan menjadi dua yaitu opsi tipe Eropa (*European option*) dan opsi tipe Amerika (*American option*) [3, 5].

Pada *European option*, hak pembelian atau penjualan kontrak hanya dapat dilaksanakan pada tanggal jatuh tempo yang telah ditentukan dalam kontrak. Pada *American option*, pemilik kontrak dapat melaksanakan haknya kapan saja selama tanggal pelaksanaan. **Fisher Black** dan **Mayor Scholes** pada tahun 1973 merumuskan suatu metode untuk menetapkan harga opsi. Metode tersebut dikenal dengan Persamaan *Black-Scholes*. Persamaan *Black-Scholes* merupakan salah satu model matematika yang digunakan dalam penentuan harga *European option*. Persamaan *Black-Scholes* dapat diselesaikan dengan beberapa metode, antara lain *Adomian decomposition method*(ADM) [1,2], *Homotopy* [8], *Variational iteration method* (VIM) [7], binomial atau trinomial [10], dan metode penyelesaian melalui Persamaan Difusi [9].

Penyelesaian Persamaan Black-Scholes dengan metode dekomposisi Adomian ini bertujuan untuk membandingkan penyelesaian Persamaan *Black-Scholes* menggunakan *Adomian decomposition method* dan metode Difusi. Maksud dari perbandingan kedua metode ini adalah karena metode tersebut merupakan metode yang bertujuan untuk menemukan solusi analitik dan memperoleh hasil perbandingan penyelesaian yang paling akurat untuk menyelesaikan Persamaan *Black-Scholes*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan permasalahan yang akan dibahas adalah:

1. Bagaimanakah penyelesaian Persamaan *Black-Scholes* menggunakan *Adomian decompositon method*.
2. Bagaimanakah keakuratan solusi *Adomian decompositon method* pada Persamaan *Black-Scholes* dibandingkan solusi dari *Diffution equation*.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan antara lain:

1. Tipe Opsi yang digunakan adalah *European option*.
2. *Interest rate* konstan bebas risiko.
3. Tidak terdapat biaya transaksi dan pajak.
4. Volatilitas/variansi harga saham bersifat konstan.
5. Saham yang digunakan memberikan dividen (pembagian keuntungan).

1.4 Tujuan

Tujuan yang dicapai adalah:

1. Mendapatkan penyelesaian Persamaan *Black-Scholes* menggunakan *Adomian decompositon method*.

2. Mendapatkan hasil perbandingan solusi dari *Adomian decomposition method* dengan *diffusion equation* untuk menyelesaikan Persamaan *Black-Scholes*.

1.5 Manfaat

Manfaat dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Memahami tentang aplikasi *Adomian decomposition method* untuk menyelesaikan Persamaan/model *Black-Scholes*.
2. Mendapatkan hasil perbandingan secara analitik maupun grafik antara *Adomian decomposition method* dan *diffusion equation* dalam menyelesaikan Persamaan *Black-Scholes*.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada Bab II berisi teori-teori utama maupun penunjang yang terkait dengan permasalahan, yaitu beberapa penelitian terdahulu, Persamaan *Black-Scholes*, Persamaan Difusi, *Option* meliputi *European call option* dan *European put option*, *Adomian decomposition method*.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Dalam bab ini dijelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penggerjaan. Tahapan-tahapan

tersebut antara lain studi literatur, selanjutnya dilakukan analisis masalah meliputi penyelesaian model *Black-Scholes* dan penyelesaian *Black-Scholes* pada *European option* dengan *Adomian decomposition method*. Selanjutnya tahap simulasi. Tahap terakhir adalah melakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan simulasi serta pembahasan yang telah dilakukan.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada Bab IV dibahas secara detail mengenai solusi analitik dari *European option* menggunakan *Adomian decomposition method* dan Persamaan difusi.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai landasan atau dasar teori dan materi pendukung lainnya yang terkait dalam permasalahan ini antara lain Persamaan *Black-Scholes*, *Adomian decomposition method*, Persamaan Difusi, dan Opsi.

2.1 Penelitian Terdahulu

Adomian decomposition method merupakan metode yang bertujuan menemukan solusi analitik untuk Persamaan differensial linear maupun non linear dalam bentuk deret. Pada beberapa penelitian sebelumnya, *Adomian decomposition method* digunakan untuk menyelesaikan Persamaan Differensial Abelian [11]. Pada penelitian ini, nilai batas awal pada Persamaan Abelian diselesaikan menggunakan metode Runge Kutta orde empat. Penyelesaian umum yang didapat, diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method* yang dinyatakan dalam rangkaian solusi deret. Pada penelitian lain, *Adomian decomposition method* digunakan sebagai metode penyelesaian dari Persamaan Schrodinger nonlinear [12]. Secara numerik, Persamaan ini diselesaikan menggunakan metode Beda Hingga. Hanya saja, solusi akhir yang didapat, masih mengandung error (belum maksimal) sehingga Persamaan Schrodinger nonlinier diselesaikan secara analitik dengan menggunakan *Adomian decomposition method* dan didapatkan pendekatan solusi eksak yang kemudian ditulis dalam bentuk deret.

Terdapat pula penelitian sebelumnya yang membahas tentang penyelesaian Persamaan *Black-Scholes* menggunakan

Adomian decomposition method [1,2]. Karakteristik dari Persamaan diferensial Abelian dan Persamaan Schrodinger nonlinier sama dengan Persamaan *Black-Scholes*, diselesaikan secara analitik dengan menggunakan *Adomian decomposition method*. Didapatkan hasil bahwa metode ini merupakan metode paling efisien dalam menyelesaikan Persamaan differensial parsial. Sehingga, penelitian inilah yang menjadi dasar referensi yang digunakan dalam pengajaran Tugas Akhir ini.

2.2 Persamaan Black-Scholes

Model *Black-Scholes* merupakan model yang digunakan untuk menentukan harga opsi yang telah banyak diterima oleh masyarakat keuangan. Model ini dikembangkan oleh **Fischer Black** dan **Myron Scholes** (1973). Model ini penggunaannya terbatas karena hanya dapat digunakan pada penentuan harga opsi tipe Eropa (*European option*) yang dijalankan pada waktu *expiration date* saja, sedangkan model ini tidak berlaku untuk opsi tipe Amerika (*American option*), karena *American option* dapat dijalankan setiap saat sampai waktu *expiration date*.

Model *Black-Scholes* menggunakan beberapa asumsi, antara lain:

1. Jenis opsi yang digunakan adalah opsi tipe Eropa. Opsi saham tipe Eropa adalah opsi saham yang hanya dapat dilaksanakan pada waktu jatuh temponya (*expiration date*), sehingga pelaksanaan opsi sebelum waktunya tidak akan menguntungkan karena tindakan mengeksekusi opsi akan menyebabkan pemegang opsi kehilangan premi waktu dari opsi tersebut.
2. Variansi harga saham bersifat konstan sepanjang usia opsi dan diketahui. Jika asumsi tersebut

tidak terpenuhi, maka model penetapan harga opsi tidak dapat dikembangkan sehingga memungkinkan perubahan variansi.

3. Tingkat suku bunga bebas resiko. Hal ini berarti suku bunga harga saham yang mendasari opsi tetap konstan.
4. Saham yang mendasari opsi tidak membayarkan dividen (pembagian keuntungan saham) selama usia opsi. Dividen merupakan sebagian keuntungan perusahaan yang dibagikan kepada pemegang saham. Model *Black-Scholes* digunakan bagi saham yang tidak memberikan dividen selama usia opsi. Apabila saham tersebut membayar dividen, maka akan mengurangi harga opsi sehingga model akan berubah.
5. Tidak dibutuhkan biaya transaksi untuk membeli atau menjual baik saham maupun opsinya. Model *Black-Scholes* mengasumsikan tidak terdapat pajak dan biaya transaksi.

Dengan Persamaan umum *Black-Scholes* adalah:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.2.1)$$

dengan

σ = volatilitas

r = suku bunga

V = harga opsi saham

S_T = harga saham pada waktu jatuh tempo

Persamaan diatas merupakan Persamaan differensial parsial *Black-Scholes* yang digunakan untuk menentukan harga opsi.

2.3 Persamaan difusi

Persamaan difusi adalah Persamaan analitik yang linear dan berorde dua, dimana Persamaan umumnya adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x, \tau > 0 \quad (2.3.1)$$

diberikan syarat awal, $u(x, 0) = u_0(x) = 0$ dan $u(0, \tau) = 1$ untuk $-\infty < x < \infty$, dengan nilai

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4\tau}} dv \quad (2.3.2)$$

2.4 Opsi

Opsi adalah hak untuk melakukan transaksi (jual/beli) atas suatu aset pada suatu periode tertentu dengan nilai pada saat jatuh tempo telah ditentukan. Dalam hal ini pemegang opsi dapat melakukan jual/beli aset sebelum atau pada saat jatuh tempo (*maturity date*) dimana nilai pada saat jatuh tempo tertentu dan nilai sebelumnya tidak ditentukan. Nilai pada saat jatuh tempo disebut (*strike price*).

Oleh karena itu, keputusan pemegang opsi melakukan transaksi (*meng-exercise*) atas asset sangat tergantung oleh harga pasar dari aset tersebut. Oleh sebab itu kontrak opsi ini disebut *contingent claim* (klaim yang tidak pasti). Opsi diperoleh apabila seseorang membeli opsi ke penjual opsi dan jual beli ini merupakan suatu ikatan dan disebut kontrak opsi yang memberikan hak dan kewajiban kepada penjual dan pembeli opsi. Pembeli opsi selaku pemegang opsi berhak menjual/membeli atas aset dengan nilai dan dalam kurun waktu sebagaimana dalam kontrak dengan kewajiban membayar sejumlah nilai tertentu yang disebut dengan premi. Sedangkan penjual opsi yang merupakan penulis opsi berkewajiban melakukan transaksi sesuai dengan kontrak dengan imbalan mendapat premi. Kemudian apabila

ditinjau dari hak melakukan transaksi, kontrak opsi dapat dibedakan menjadi dua yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Dan dari periode waktu kegunaan, opsi dibagi menjadi Tipe Eropa dan Tipe Amerika. Pada opsi tipe Eropa, hak pembelian atau penjualan kontrak hanya dapat dilaksanakan pada tanggal jatuh tempo yang telah ditentukan dalam kontrak. Opsi tipe Amerika, pemilik kontrak dapat melaksanakan haknya kapan saja selama tanggal pelaksanaan.

2.4.1 European Call Option

Call option atau opsi beli, memberikan hak kepada pemegang opsi untuk membeli aset yang ada di *option market*, dari penjual opsi seharga *strike price*. Misal S_T adalah harga saham pada saat jatuh tempo, E adalah harga saham yang ditetapkan (harga opsi), dan T adalah waktu jatuh tempo. Jika harga saham pada saat jatuh tempo lebih besar daripada harga pelaksanaan atau $S_T > E$, maka besar keuntungan yang diperoleh yaitu $S_T - E$. Sebaliknya, jika $S_T \leq E$ maka pemegang opsi beli tidak memperoleh keuntungan atau keuntungan yang diperoleh adalah 0.

Dengan demikian, harga opsi beli tipe Eropa (C) pada saat jatuh tempo adalah:

$$C = \begin{cases} S_T - E, & \text{untuk } S_T > E, \\ 0, & \text{untuk } S_T \leq E \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Sehingga, didapatkan Persamaan umum dari *Call Option* adalah:

$$C(S, T) = \max(S_T - E, 0) \quad (2.4.2)$$

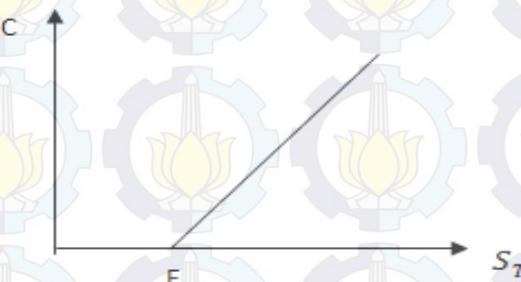
dengan

C = harga opsi beli pada waktu jatuh tempo

S_T = harga saham

E = *strike price*

Persamaan (2.4.1) dapat ditunjukkan melalui gambar



Gambar 2.1: Harga *Call Option* Pada Saat Jatuh Tempo

berikut:

Gambar 2.1 menunjukkan bahwa harga opsi beli akan bernilai nol jika harga pelaksanaan lebih tinggi dari harga saham. Sementara jika harga saham lebih tinggi dari harga pelaksanaan, maka harga opsi beli merupakan selisih dari harga saham dengan harga pelaksanaan.

Dari uraian tersebut, dapat diketahui bahwa [4]:

1. Pada saat harga saham lebih rendah daripada harga pelaksanaan ($S_T < E$), maka opsi beli bernilai nol dan dikatakan dalam keadaan *out of the money* (OTM). Dalam keadaan ini, pemegang opsi tidak akan menggunakan haknya dan akan mengalami kerugian sebesar premi yang telah dibayarkan.
2. Pada saat harga saham sama dengan harga pelaksanaan ($S_T = E$), maka nilai opsi beli dikatakan dalam keadaan *at the money* (ATM), sehingga opsi ini akan bernilai nol. Kerugian yang diderita pemegang opsi beli adalah sebesar premi yang telah dibayarkan kepada penjual opsi.

3. Pada saat harga saham lebih tinggi dari hari pelaksanaan ($S_T > E$) dan bernilai positif, maka opsi beli dikatakan dalam keadaan *in the money* (ITM). Dalam keadaan ini, pemilik opsi akan menggunakan opsinya karena akan memperoleh keuntungan atau dapat meminimalkan kerugian yang disebabkan karena telah membayar premi kepada penjual opsi.

2.4.2 European Put Option

Put option atau opsi *put* adalah memberikan hak kepada pemegang opsi (*taker*) untuk menjual sejumlah asset yang ada di *option market* seharga *strike price*. Misal, S_T adalah harga saham pada saat jatuh tempo, E adalah harga saham yang ditetapkan atau harga pelaksanaan, dan T adalah waktu jatuh tempo. Jika harga saham pada saat jatuh tempo lebih kecil daripada harga saham yang telah ditentukan (harga pelaksanaan) atau $S_T < E$, maka keuntungan yang diperoleh sebesar $E - S_T$. Sebaliknya, jika $S_T > E$ maka pemegang opsi jual tipe Eropa tidak melakukan haknya sehingga keuntungannya adalah nol.

Dengan demikian, harga opsi jual tipe Eropa (P) saat jatuh tempo adalah:

$$P = \begin{cases} E - S_T, & \text{untuk } S_T < E, \\ 0, & \text{untuk } S_T \geq E \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Sehingga, didapatkan Persamaan umum dari *put option* adalah:

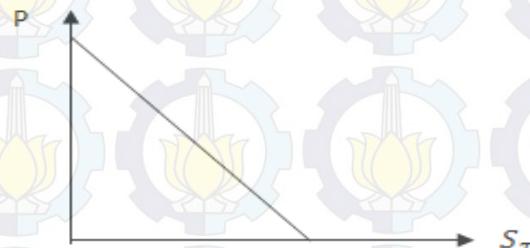
$$P(S, T) = \max(E - S_T, 0) \quad (2.4.4)$$

P = harga opsi beli pada waktu jatuh tempo

S_T = harga saham

E = harga pelaksanaan/*strike price*

Persamaan (2.4.3) dapat ditunjukkan melalui gambar berikut:



Gambar 2.2: Harga Put Option Pada Saat Jatuh Tempo

Dari gambar 2.2 menunjukkan bahwa harga opsi jual akan bernilai nol jika harga saham lebih tinggi dari harga pelaksanaan. Sebaliknya, jika harga saham lebih rendah dari harga pelaksanaan maka harga opsi jual akan bernilai positif, yaitu sebesar selisih antara harga pelaksanaan dengan harga saham. Dari uraian diatas, dapat diketahui bahwa [4]:

1. Pada saat harga saham lebih rendah dari harga pelaksanaan ($S_T < E$), maka opsi jual akan bernilai positif dan dikatakan dalam keadaan *in the money* (ITM). Dalam keadaan ini, pemegang opsi jual akan menggunakan haknya dan nilai opsi ini yaitu sebesar selisih antar harga pelaksanaan dan harga saham
2. Pada saat harga saham memiliki harga di pasar sama dengan harga pelaksanaan ($S_T = E$), maka opsi jual dikatakan dalam keadaan *at the money* (ATM), sehingga opsi ini akan bernilai nol dan pemegang opsi jual akan menanggung kerugian sebesar premi opsi yang telah dibayarkan.
3. Pada saat harga saham lebih tinggi daripada harga

pelaksanaan ($S_T > E$), maka opsi jual dikatakan dalam keadaan *out of the money* (OTM). Dapat dikatakan bahwa pemilik opsi tidak akan menggunakan opsinya karena ia dapat menjual saham dengan harga yang lebih tinggi di pasar saham. Kerugian maksimal yang diderita sama dengan harga premi opsi yang telah dibayarkan.

2.5 Put-Call Parity

Put-call parity yang dikembangkan oleh **Stoll** didefinisikan sebagai suatu hubungan antara harga opsi jual dan opsi beli. Hubungan tersebut menunjukkan bahwa nilai opsi beli tipe Eropa dengan harga *strike* dan waktu jatuh tempo tertentu dapat diperoleh dari nilai opsi jual dengan harga *strike* dan waktu jatuh tempo yang sama, dan berlaku sebaliknya [5]. *Put-call parity* harga opsi tipe Eropa adalah:

$$C(S(t), t) - P(S(t), t) = S(T) - Ee^{-r(T-t)} \quad (2.5.1)$$

dengan

$C(S(t), T)$	=	harga saham untuk <i>call option</i>
$P(S(t), T)$	=	harga saham untuk <i>put option</i>
E	=	<i>strike price</i>
$T - t$	=	harga saham pada waktu t
r	=	<i>interest rate</i>

Hal ini penting karena begitu menemukan harga opsi beli tipe Eropa, maka harga opsi jual tipe Eropa dapat ditentukan dengan menggunakan harga paritas opsi.

2.6 Dividen

Dividen merupakan keuntungan perusahaan yang dibagikan kepada pemegang saham. Biasanya tidak seluruh keuntungan perusahaan dibagikan kepada pemegang saham, tetapi ada bagian yang disimpan kembali. Besarnya dividen yang diterima oleh pemegang saham ditentukan dalam Rapat Umum Pemegang Saham (RUPS) perusahaan tersebut.

Perusahaan tidak selalu membagikan dividen kepada para pemegang saham karena tergantung kepada kondisi perusahaan itu sendiri. Artinya jika perusahaan mengalami kerugian tentu saja dividen tidak akan dibagikan pada tahun tersebut. Pembagian dividen pada saham merupakan proses stokastik. Pada saat *exdividend* (periode antara tanggal penandatangan kontrak hingga tanggal pembagian dividen), saham akan mengalami penurunan harga. Hal ini menyebabkan nilai opsi beli naik dan nilai opsi jual turun [5].

2.7 Adomian Decomposition Method

Adomian decomposition method (ADM) adalah metode yang dikemukakan oleh seorang Ahli Ilmu Matematika dari Amerika yaitu **George Adomian** (1922-1996). Metode ini bertujuan untuk menemukan solusi analitik Persamaan diferensial linier atau nonlinier dalam bentuk deret [2,6]. Kemudian, fungsi non-linear diuraikan dalam bentuk polinomial Adomian. Diberikan Persamaan differensial sebagai berikut:

$$Fu(t) = g(t) \quad (2.7.1)$$

dimana, $Fu(t)$ merupakan sebuah fungsi yang memuat fungsi linear dan fungsi nonlinear didalamnya. Fungsi linear merupakan fungsi yang pangkat tertinggi dan variabelnya adalah pangkat satu dan jika digambar dalam grafik, akan berbentuk sebuah garis lurus. Sedangkan fungsi nonlinear merupakan fungsi yang variabel dan pangkat tertingginya selain pangkat satu. Sehingga fungsi $Fu(t)$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Fu(t) = Lu(t) + Ru(t) + Nu(t) \quad (2.7.2)$$

$$Lu(t) + Ru(t) + Nu(t) = g(t) \quad (2.7.3)$$

$$Lu(t) = g(t) - Ru(t) - Nu(t) \quad (2.7.4)$$

dengan

L = Operator Linear

R = Sisa Operator Linear untuk mendapatkan nilai

N = Operator Non-Linear.

$u(t)$ pada Persamaan (2.7.4), maka L pada $Lu(t)$ harus dikenakan fungsi inversnya. Dimisalkan invers dari L adalah L^{-1} dengan $L = \frac{d}{dt}$ dan $L^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$, maka dikenakan operator L^{-1} pada kedua sisi sehingga didapat:

$$\begin{aligned} L^{-1}Lu(t) &= L^{-1}[g(t) - Ru(t) - Nu(t)] \\ L^{-1}Lu(t) &= L^{-1}g(t) - L^{-1}Ru(t) - L^{-1}Nu(t) \\ u(t) &= \varphi + L^{-1}g(t) - L^{-1}Ru(t) - L^{-1}Nu(t) \end{aligned}$$

dengan φ = konstanta
dan untuk suku nonlinier N $u(t)$ berbentuk:

$$N(u(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)).$$

Adomian mendefinisikan $u(t)$ sebagai jumlahan deret tak hingga, sehingga nilai $u(t)$ menjadi:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) \\ \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) &= \varphi + L^{-1}g(t) - L^{-1}R \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) - L^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t) \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

dengan menggunakan sifat dari relasi rekursif, maka Persamaan (2.7.5) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u_i(x, t) = \begin{cases} \varphi + L^{-1}g(t), & \text{untuk } i = 0, \\ -L^{-1}Ru_i(t) - L^{-1}A_i(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n), & \text{untuk } i \geq 0. \end{cases} \quad (2.7.6)$$

Sehingga, didapatkan nilai $u(t)$ adalah:

$$u(t) = \sum_{i=0}^n u_i(t). \quad (2.7.7)$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses penggerjaan Tugas Akhir. Metode penelitian terdiri atas lima tahap, antara lain: studi literatur, analisis masalah, tahap mencari solusi/ penyelesaian eksak model dengan *Adomian decomposition method*, tahap simulasi menggunakan software *Matlab 2010a*, dan penarikan kesimpulan.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan analisis model dan metode dengan mencari dan mempelajari literatur-literatur yang terkait yang berhubungan dengan model *Black-Scholes*, model Difusi, *European option*, dan *Adomian decomposition method*.

3.2 Analisis Masalah

Pada tahap ini, setelah referensi-refensi terkumpul, dan didapatkan beberapa metode penunjang, dilakukan analisis masalah dengan menyelesaikan penurunan rumus untuk mendapatkan model matematika pada Persamaan *Black-Scholes* untuk *European call option* dan *European put option*.

3.3 Penyelesaian *Black-Scholes* pada *European Option* dengan *Adomian Decomposition Method*

Pada tahap ini, setelah didapatkan hasil dari *European call option* dan *European put option*, selanjutnya diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method* untuk mendapatkan solusi secara eksak dalam bentuk deret.

3.4 Persamaan Difusi dan Pembuatan Program Simulasi

Setelah didapatkan hasil penyelesaian model, maka akan dibandingkan antara penurunan model difusi (yang telah ada) dengan model yang didapat dari penurunan *Adomian decomposition method*, menggunakan simulasi software *Matlab 2010a* untuk mengetahui metode yang paling efisien dalam penyelesaian Persamaan *Black-Scholes*.

3.5 Penarikan Kesimpulan dan Saran

Setelah dilakukan analisis dan pembahasan maka dapat ditarik suatu kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

3.6 Diagram Alir



Gambar 3.1. Diagram Alir Penelitian

Gambar 3.1: Diagram Alir Metodologi Penelitian

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai solusi analitik *European option*, meliputi *European call option* dan *European put option* yang akan diperoleh dari Persamaan differensial parsial *Black-Scholes* dan diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method*. Kemudian dilakukan perbandingan hasil yang diperoleh antara *Adomian decomposition method* dengan metode Difusi melalui simulasi program.

4.1 *European Option* dengan *Adomian Decomposition Method*

Pada tahap ini, dibahas mengenai solusi analitik dari *European call option* dan *European put option* dimana, solusi yang didapatkan akan diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method*.

A. European Call Option

Pada bagian ini dibahas tentang penyelesaian Persamaan *Black-Scholes* berdividen untuk mendapatkan solusi dari *European call option*. Diketahui Persamaan *Black-Scholes* secara umum dengan pembagian dividen adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial C(S(t), t)}{\partial t} + (r - \delta)S(t)\frac{\partial C(S(t), t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2\frac{\partial^2 C(S(t), t)}{\partial S(t)^2} - rC(S(t), t) = 0 \quad (4.1.1)$$

dengan

- $C(S(t), t)$ = harga saham pada waktu t untuk *call option*
 r = suku bunga bebas resiko

$$\begin{aligned}\sigma &= \text{volatilitas} \\ \delta &= \text{dividen.}\end{aligned}$$

Diberikan transformasi sebagai berikut:

$$S(t) = Ee^x \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned}t &= T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \\ &= T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$$C(S(t), t) = EV(x, \tau) \quad (4.1.4)$$

dengan:

T = exercise date (waktu jatuh tempo)

τ = $T-t$

E = harga kontrak opsi.

Dilakukan transformasi pada Persamaan (4.1.1) dengan menggunakan Persamaan (4.1.2)- (4.1.4) untuk mendapatkan model dari *Black-Scholes European call option* berdividen, sehingga dari transformasi yang diberikan, didapat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C(S(t), t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(EV(x, \tau)) \\ &= E \frac{\partial}{\partial t}V(x, \tau) \\ &= E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ &= E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} \left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}E\sigma^2 \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau}\end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C(S(t), t)}{\partial S(t)} &= \frac{\partial}{\partial S(t)}(EV(x, \tau)) \\
 &= E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S(t)} \\
 &= E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \frac{1}{Ee^x} \\
 &= e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 C(S(t), t)}{\partial S(t)^2} &= \frac{\partial}{\partial S(t)} \frac{\partial C(S(t), t)}{\partial S(t)} \\
 &= \frac{\partial}{\partial S(t)} \left(e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial S(t)} \\
 &= \left(-e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \\
 &\quad \frac{e^{-x}}{E}.
 \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Setelah didapatkan hasil transformasi pada Persamaan (4.1.5)-(4.1.7), hasil transformasi tersebut ditransformasikan kedalam Persamaan (4.1.1) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial C(S(t), t)}{\partial t} + (r - \delta)S(t) \frac{\partial C(S(t), t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 C(S(t), t)}{\partial S(t)^2} \\
 &- rC(S(t), t) = 0, \\
 &-\frac{1}{2}E\sigma^2 \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta)Ee^x e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 (Ee^x)^2 \\
 &\left(-e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \frac{e^{-x}}{E} - rEV(x, \tau) = 0, \\
 &-\frac{1}{2}E\sigma^2 \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta)Ee^x e^{-x} \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 E^2 e^{2x} \\
 &\left(-e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \frac{e^{-x}}{E} - rEV(x, \tau) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}E\sigma^2 \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta)E \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 Ee^x \\
& \left(-e^{-x} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 Ee^x e^{-x} \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} - rEV(x, \tau) = 0, \\
& -\frac{1}{2}E\sigma^2 \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta)E \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \\
& + \frac{1}{2}\sigma^2 E \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} - rEV(x, \tau) = 0.
\end{aligned}$$

Kedua ruas dibagi dengan $-\frac{1}{2}\sigma^2$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
& E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2}\sigma^2} E \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + E \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - E \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} \\
& + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} EV(x, \tau) = 0 \\
& E \left[\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2}\sigma^2} \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} \right. \\
& \left. + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} V(x, \tau) \right] = 0 \\
& \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2}\sigma^2} \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \\
& V(x, \tau) = 0 \\
& \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} - k^* \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + kV(x, \tau) = 0 \\
& \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + k^* \left(\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} \right) - kV(x, \tau).
\end{aligned}$$

Dimisalkan:

$$k^* = \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \text{ dan} \quad (4.1.8)$$

$$k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}. \quad (4.1.9)$$

Diperoleh model *Black-Scholes* dengan pembagian dividen untuk *European call option* adalah:

$$\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1) \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - kV(x, \tau) \quad (4.1.10)$$

Setelah didapatkan model *Black-Scholes* berdividen untuk *call option*, selanjutnya Persamaan (4.1.10) akan diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method*. Dikenakan operator linear L^{-1} pada kedua ruas, dengan $L = \frac{\partial}{\partial \tau}$ dan $L^{-1} = \int_0^\tau (\cdot) d\tau$ dengan tujuan mendapatkan nilai dari $V(x, \tau)$ untuk mendapatkan nilai dari $V(x, \tau)$ sehingga didapat:

$$\begin{aligned} L^{-1}V(x, \tau) &= L^{-1} [V_{xx}(x, \tau) + (k^* - 1)V_x(x, \tau) \\ &\quad - kV(x, \tau)] \\ V(x, \tau) - V(x, 0) &= \int_0^\tau [V_{xx}(x, \tau) + (k^* - 1)V_x(x, \tau) \\ &\quad - kV(x, \tau)] d\tau \\ V(x, \tau) &= V(x, 0) + \int_0^\tau [V_{xx}(x, \tau) + (k^* - 1)V_x(x, \tau) \\ &\quad - kV(x, \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Solusi Persamaan (4.1.11) dimisalkan sebagai jumlahan dari fungsi-fungsi yang dicari ($V_1(x, \tau), V_2(x, \tau), \dots, V_n(x, \tau)$), sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$V(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, \tau) \quad (4.1.12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, \tau) &= V(x, 0) + \int_0^\tau V_{xx}(\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, \tau)) d\tau + \int_0^\tau (k^* - 1) \\ &\quad V_x(\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, \tau)) d\tau - \int_0^\tau k(\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, \tau)) d\tau \\ &= V(x, 0) + \int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty} [(V_{xx}(V_n(x, \tau))) + (k^* - 1) \\ &\quad (V_x(V_n(x, \tau))) - k(V_n(x, \tau))] d\tau. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Agar lebih mudah mendapatkan jumlahan fungsi yang dicari dengan penjabaran *Adomian decomposition method*,

maka nilai $V(x, \tau)$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$V(x, \tau) = V(x, 0) - \int_0^\tau A_n(V_0, V_1, \dots, V_n) d\tau$$

dengan nilai A_n adalah:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{n=0}^{\infty} [(V_{xx}(V_n(x, \tau))) + (k^* - 1)(V_x(V_n(x, \tau))) \\ &\quad - k(V_n(x, \tau))] \\ &= V_{nxx}(x, \tau) + (k^* - 1)V_{nx}(x, \tau) - kV_n(x, \tau). \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Dilihat dari penjabaran nilai A_n diatas, maka nilai A_n dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A_n(V_n) &= V_{nxx} + (k^* - 1)V_{nx} - kV_n \\ A_0(V_0) &= V_{0xx} + (k^* - 1)V_{0x} - kV_0 \\ A_1(V_0, V_1) &= V_{1xx} + (k^* - 1)V_{1x} - kV_1 \\ A_2(V_0, V_1, V_2) &= V_{2xx} + (k^* - 1)V_{2x} - kV_2. \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat relasi rekursif, Persamaan (4.1.13) dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{cases} V_0(x, \tau) &= V(x, 0), \\ V_{n+1}(x, \tau) &= \int_0^\tau [V_{xx}(V_n(x, \tau)) + (k^* - 1)V_x(V_n(x, \tau)) \\ &\quad - k(V_n(x, \tau))] d\tau. \end{cases}$$

Tipe opsi yang digunakan pada tugas akhir ini adalah *European option*, sehingga diberikan syarat batas untuk *European call option* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C(S(t), T) &= \max(S(t) - E, 0) \\ EV(S(t), 0) &= \max(Ee^x - E, 0) \\ EV(S(t), 0) &= \max(E(e^x - 1), 0) \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

$$\begin{aligned} EV(S(t), 0) &= E \max(e^x - 1, 0) \\ V(S(t), 0) &= \max(e^x - 1, 0). \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Berdasarkan syarat batas yang diberikan, dan dari Persamaan (4.1.14) serta nilai V_{n+1} yang didapat, selanjutnya dengan mensubstitusikan nilai $n = 0$, maka didapat:

$$\begin{aligned} V_{n+1}(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_n(V_0, V_1, \dots, V_n) d\tau \\ V_{0+1}(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_0(V_0) d\tau \\ V_1(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_0(V_0) d\tau \\ &= - \int_0^\tau [-V_{xx}(V_0(x, \tau)) - (k^* - 1)V_x(V_0(x, \tau)) \\ &\quad + k(V_0(x, \tau))] d\tau \\ &= \int_0^\tau [V_{0xx}(x, \tau) + (k^* - 1)V_{0x}(x, \tau) \\ &\quad - k(V_0(x, \tau))] d\tau \\ &= \int_0^\tau [\max(e^x, 0) + (k^* - 1)\max(e^x, 0) - k \\ &\quad \max(e^x - 1, 0)] d\tau \\ &= \max(e^x\tau, 0) + (k^* - 1)(\max(e^x\tau, 0)) - k \\ &\quad (\max(e^x\tau - \tau, 0)) \\ &= [1 + k^* - 1]\max(e^x\tau, 0) - k(\max(e^x\tau - \tau, 0)) \\ &= k^*\max(e^x\tau, 0) - k(\max(e^x\tau - \tau, 0)) \\ V_1(x, \tau) &= (k^*\tau)\max(e^x, 0) - k\tau(\max(e^x - 1, 0)) \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Substitusikan untuk nilai $n = 1$ kedalam $V_{n+1}(x, \tau)$, sehingga didapat:

$$V_{n+1}(x, \tau) = - \int_0^\tau A_n(V_0, V_1, \dots, V_n) d\tau$$

$$\begin{aligned}
V_{1+1}(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_1(V_0, V_1) d\tau \\
V_2(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_1(V_0, V_1) d\tau \\
&= - \int_0^\tau [-V_{xx}(V_1(x, \tau)) - (k^* - 1)V_x(V_1(x, \tau)) + k \\
&\quad (V_1(x, \tau))] d\tau \\
&= \int_0^\tau [V_{1xx}(x, \tau) + (k^* - 1)V_{1x}(x, \tau) - k(V_1(x, \tau))] d\tau \\
&= \int_0^\tau [(k^*\tau) \max(e^x, 0) - k\tau(\max(e^x, 0)) + (k^* - 1) \\
&\quad [(k^*\tau) \max(e^x, 0) - k\tau(\max(e^x - 1, 0))] \\
&\quad - kk^*\tau(\max(e^x, 0)) - kk\tau(\max(e^x - 1, 0))] d\tau \\
&= \int_0^\tau [(k^*\tau) \max(e^x, 0) - k\tau(\max(e^x, 0)) \\
&\quad - k^{*2}\tau \max(e^x, 0) - k^*\tau(\max(e^x, 0)) + kk^*\tau(\max(e^x, 0)) + \\
&\quad k\tau(\max(e^x, 0)) - kk^*\tau(\max(e^x, 0)) + k^2\tau(\max(e^x - 1, 0))] d\tau \\
&= \int_0^\tau [-k^{*2}\tau \max(e^x, 0) + k^2\tau(\max(e^x - 1, 0))] d\tau \\
&= -\frac{1}{2}k^{*2}\tau^2 \max(e^x, 0) + \frac{1}{2}k^2\tau(\max(e^x\tau - \tau, 0)) \\
V_2(x, \tau) &= -\frac{1}{2}k^{*2}\tau^2 \max(e^x, 0) + \frac{1}{2}k^2\tau^2(\max(e^x - 1, 0)). \tag{4.1.18}
\end{aligned}$$

selanjutnya, substitusikan untuk nilai $n = 2$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
V_{n+1}(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_n(V_0, V_1, \dots, V_n) d\tau \\
V_{2+1}(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_2(V_0, V_1, V_2) d\tau \\
V_3(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_2(V_0, V_1, V_2) d\tau \\
&= - \int_0^\tau [-V_{xx}(V_2(x, \tau)) - (k^* - 1)V_x(V_2(x, \tau)) \\
&\quad + k(V_2(x, \tau))] d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau \left[\frac{1}{2} k^{*2} \tau^2 \max(e^x, 0) + \frac{1}{2} k^2 \tau^2 (\max(e^x, 0)) + \right. \\
&\quad (k^* - 1) \left[\frac{1}{2} k^{*2} \tau^2 \max(e^x, 0) + \frac{1}{2} k^2 \tau^2 (\max(e^x, 0)) \right] \\
&\quad \left. - k \left(-\frac{1}{2} k^{*2} \tau^2 \max(e^x, 0) + \frac{1}{2} k^2 \tau^2 (\max(e^x - 1, 0)) \right) \right] d\tau \\
&= \int_0^\tau \left[\frac{1}{2} k^{*2} \tau^2 \max(e^x, 0) + \frac{1}{2} k^2 \tau^2 (\max(e^x, 0)) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} k^{*3} \tau^2 \max(e^x, 0) - \frac{1}{2} k^{*2} \tau^2 \max(e^x, 0) + \frac{1}{2} k^* k^2 \tau^2 \\
&\quad \max(e^x, 0) - \frac{1}{2} k^2 \tau^2 \max(e^x, 0) - \frac{1}{2} k^{*2} k \tau^2 \max(e^x, 0) \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} k^3 \tau^2 \max(e^x - 1, 0) \right] d\tau \\
&= \int_0^\tau \left[\frac{1}{2} k^{*3} \tau^2 \max(e^x, 0) - \frac{1}{2} k^3 \tau^2 (\max(e^x - 1, 0)) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{3} (k^*)^3 \tau^3 \max(e^x, 0) - \frac{1}{2} \frac{1}{3} k^3 \tau^3 (\max(e^x - 1, 0)) \\
V_3(x, \tau) &= \frac{1}{6} (k^*)^3 \tau^3 \max(e^x, 0) - \frac{1}{6} k^3 \tau^3 (\max(e^x - 1, 0)). \quad (4.1.19)
\end{aligned}$$

Setelah didapatkan nilai $V_1(x, \tau)$, $V_2(x, \tau)$, $V_3(x, \tau)$, dan seterusnya dari penjabaran diatas, maka didapatkan solusi umum untuk *European call option* berdividen adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
V_n(x, \tau) &= \max(e^x - 1, 0) + \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} (((k^* t)^n) \max(e^x, 0) - (kt)^n \max(e^x - 1, 0)). \quad (4.1.20)
\end{aligned}$$

B. European Put Option

Sama halnya dengan *call option*, pada bagian ini dibahas tentang penyelesaian Persamaan *Black-Scholes* dengan pembagian dividen untuk mendapatkan solusi dari *European put option*. Diketahui Persamaan umum *Black-*

Scholes dengan pemberian dividen untuk *put option* adalah:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P(S(t), t)}{\partial t} + (r - \delta)S(t) \frac{\partial P(S(t), t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 P(S(t), t)}{\partial S(t)^2} \\ &= rP(S(t), t) \\ & \frac{\partial P(S(t), t)}{\partial t} + (r - \delta)S(t) \frac{\partial P(S(t), t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 P(S(t), t)}{\partial S(t)^2} \\ & - rP(S(t), t) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

dengan

- | | |
|--------------|--|
| $P(S(t), t)$ | = harga saham pada waktu t untuk <i>put option</i> |
| r | = suku bunga bebas resiko |
| σ | = volatilitas |
| δ | = dividen. |

Diberikan transformasi sebagai berikut:

$$S(t) = E(e^x) \quad (4.1.22)$$

$$\begin{aligned} t &= T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \\ &= T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

$$P(S(t), t) = EW(x, \tau) \quad (4.1.24)$$

dengan:

T = exercise date (waktu jatuh tempo)

τ = $T-t$

E = harga kontrak opsi.

Langkah selanjutnya, Persamaan (4.1.21) ditransformasikan menggunakan (4.1.22), (4.1.23), dan (4.1.24) untuk mendapatkan model dari *Black-Scholes European put option*, sehingga dari transformasi yang diberikan, didapat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(S(t), t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(EW(x, \tau)) \\ &= E \frac{\partial}{\partial t}W(x, \tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \\
 &= E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} \left(-\frac{\sigma^2}{2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} E \sigma^2 \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} \\
 &= \frac{\partial}{\partial S(t)} (E W(x, \tau))
 \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

$$\begin{aligned}
 &= E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S(t)} \\
 &= E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \frac{1}{E e^x} \\
 &= e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 P(S(t), t)}{\partial S(t)^2} \\
 &= \frac{\partial}{\partial S(t)} \left(\frac{\partial P(S(t), t)}{\partial S(t)} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial S(t)} \left(e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial S(t)} \\
 &= \left(-e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \frac{1}{E e^x} \\
 &= \left(-e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \\
 &\quad \frac{e^{-x}}{E}.
 \end{aligned} \tag{4.1.27}$$

Setelah didapatkan hasil transformasi pada Persamaan (4.1.25) - (4.1.27), Persamaan-Persamaan tersebut disubstitusikan kedalam Persamaan (4.1.21) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial P(S(t), t)}{\partial t} + (r - \delta) S(t) \frac{\partial P(S(t), t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 P(S(t), t)}{\partial S(t)^2} \\
 &- r P(S(t), t) = 0, \\
 &-\frac{1}{2} E \sigma^2 \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta) E(e^{-x}) e^x \left(\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (E(e^x))^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(-e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} \right) \frac{e^{-x}}{E} \right] - rEW(x, \tau) = 0, \\
& -\frac{1}{2} E\sigma^2 \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta)E(e^{-x})e^x \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(E^2e^{2x}) \\
& \left(\frac{-e^{-2x}}{E} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{e^{-2x}}{E} \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} \right) - rEW(x, \tau) = 0, \\
& -\frac{1}{2} E\sigma^2 \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta)E(\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x}) + \frac{1}{2}\sigma^2 Ee^x \\
& \left(-e^{-x} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 E \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} - rEW(x, \tau) = 0, \\
& -\frac{1}{2} E\sigma^2 \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} + (r - \delta)E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2 E \\
& \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 E \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} - rEW(x, \tau) = 0.
\end{aligned}$$

Kedua ruas dibagi dengan $-\frac{1}{2}\sigma^2$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
& E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2}\sigma^2} E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + E \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \\
& - E \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} EW(x, \tau) = 0, \\
& E \left[\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2}\sigma^2} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} \right. \\
& \left. - \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} W(x, \tau) \right] = 0, \\
& \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2}\sigma^2} \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \\
& W(x, \tau) = 0, \\
& \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} - k^* \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + kW(x, \tau) = 0 \\
& \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} = k^* \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} - kW(x, \tau) \\
& \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^*) \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - kW(x, \tau).
\end{aligned}$$

Menggunakan permisalan berikut,

$$k^* = \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \text{ dan} \quad (4.1.28)$$

$$k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad (4.1.29)$$

didapatkan model *Black-Scholes* dengan pembagian dividen untuk *European put option* adalah:

$$\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1) \frac{\partial W(x, \tau)}{\partial x} - kW(x, \tau). \quad (4.1.30)$$

Setelah didapatkan model *Black-Scholes* berdividen untuk *European put option*, Persamaan (4.1.30) yang diperoleh diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method*. Dikenakan operator linear L^{-1} pada kedua ruas, dengan $L = \frac{\partial}{\partial \tau}$ dan $L^{-1} = \int_0^\tau (\cdot) d\tau$ untuk mendapatkan nilai $W(x, \tau)$ sehingga didapat:

$$\begin{aligned} L^{-1}W_\tau(x, \tau) &= L^{-1}[W_{xx}(x, \tau) + (k^* - 1)W_x(x, \tau) - kW(x, \tau)] \\ W(x, \tau) - W(x, 0) &= \int_0^\tau [W_{xx}(x, \tau) + (k^* - 1)W_x(x, \tau) - kW(x, \tau)] d\tau \\ W(x, \tau) &= W(x, 0) + \int_0^\tau [W_{xx}(x, \tau) + (k^* - 1)W_x(x, \tau) - kW(x, \tau)] d\tau \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Solusi Persamaan (4.1.31) dimisalkan sebagai jumlahan dari fungsi-fungsi yang dicari ($W_1(x, \tau)$, $W_2(x, \tau)$, ..., $W_n(x, \tau)$) sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$W(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x, \tau) \quad (4.1.32)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(x, \tau) = W(x, 0) + \int_0^\tau W_{xx}(\sum_{n=0}^{\infty} W_n(x, \tau)) d\tau + \int_0^\tau (k^* - 1)$$

$$W_x(\sum_{n=0}^{\infty} W_n(x, \tau)) d\tau - \int_0^\tau k(\sum_{n=0}^{\infty} W_n(x, \tau)) d\tau$$

$$= W(x, 0) + \int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty} [(W_{xx}(W_n(x, \tau)) + (k^* - 1)(W_x(W_n(x, \tau)) - k(W_n(x, \tau))) d\tau.] \quad (4.1.33)$$

Sama halnya dengan *European call option*, nilai $W(x, \tau)$ pada *European put option* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$W(x, \tau) = W(x, 0) - \int_0^\tau A_n(W_0, W_1, \dots, W_n) d\tau$$

dengan nilai A_n adalah:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{n=0}^{\infty} [(W_{xx}(W_n(x, \tau))) + (k^* - 1)(W_x(W_n(x, \tau))) \\ &\quad - k(W_n(x, \tau))] \\ &= W_{nx}(x, \tau) + (k^* - 1)W_{nx}(x, \tau) - kW(x, \tau) \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

atau dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} A_n(W_n) &= W_{nx} + (k^* - 1)W_{nx} - kW_n \\ A_0(W_0) &= W_{0xx} + (k^* - 1)W_{0x} - kW_0 \\ A_1(W_0, W_1) &= W_{1xx} + (k^* - 1)W_{1x} - kW_1 \\ A_2(W_0, W_1, W_2) &= W_{2xx} + (k^* - 1)W_{2x} - kW_2. \end{aligned}$$

Menurut sifat relasi rekursif, Persamaan (4.1.33) dijabarkan menjadi:

$$W_n(x, \tau) = \begin{cases} W_0(x, \tau) &= W(x, 0), \\ W_{n+1}(x, \tau) &= \int_0^\tau [W_{xx}(W_n(x, \tau)) + (k^* - 1) \\ &\quad W_x(W_n(x, \tau)) - k(W_n(x, \tau))] d\tau. \end{cases}$$

Selanjutnya, dengan tipe syarat batas yang sama dengan *call option*, maka syarat batas untuk *European put option* adalah:

$$\begin{aligned} P(S(t), T) &= \max(E - S(t), 0) \\ EW(S(t), 0) &= \max(E - Ee^x, 0) \\ EW(S(t), 0) &= \max(E(1 - e^x), 0) \\ EW(S(t), 0) &= E \max(1 - e^x, 0) \\ W(S(t), 0) &= \max(1 - e^x, 0). \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

Berdasarkan syarat batas yang diberikan, maka dari Persamaan (4.1.34) serta nilai dari W_{n+1} yang didapat, selanjutnya disubstitusikan untuk nilai $n = 0$, sehingga didapat:

$$\begin{aligned}
 W_{n+1}(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_n(W_0, W_1, \dots, W_n) d\tau \\
 W_{0+1}(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_0(W_0) d\tau \\
 W_1(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_0(W_0) d\tau \\
 &= - \int_0^\tau [-W_{xx}(V_0(x, \tau)) - (k^* - 1)W_x(W_0(x, \tau)) \\
 &\quad + k(W_0(x, \tau))] d\tau \\
 &= \int_0^\tau [W_{0xx}(x, \tau) + (k^* - 1) \\
 &\quad W_{0x}(x, \tau) - k(W_0(x, \tau))] d\tau \\
 &= \int_0^\tau [\max(-e^x, 0) + (k^* - 1)\max(-e^x, 0) - k \max \\
 &\quad (1 - e^x, 0)] d\tau \\
 &= \max(-e^x \tau, 0) + (k^* - 1)(\max(-e^x \tau, 0)) - k(\max \\
 &\quad (\tau - e^x \tau, 0)) \\
 &= \max(-e^x \tau, 0) + (k^* - 1)(\max(-e^x \tau, 0)) - k\tau(\max \\
 &\quad (1 - e^x, 0)) \\
 &= [1 + k^* - 1] \max(-e^x \tau, 0) - k\tau(\max(1 - e^x, 0)) \\
 W_1(x, \tau) &= k^* \tau \max(-e^x, 0) - k\tau(\max(1 - e^x, 0)). \tag{4.1.37}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusi nilai $n = 1$ ke dalam Persamaan $W_{n+1}(x, \tau)$, sehingga didapat:

$$\begin{aligned}
 W_{n+1}(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_n(W_0, W_1, \dots, W_n) d\tau \\
 W_{1+1}(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_1(W_0, W_1) d\tau \\
 W_2(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_1(W_0, W_1) d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^\tau [-W_{xx}(W_1(x, \tau)) - (k^* - 1)W_x(W_1(x, \tau)) \\
&\quad + k(W_1(x, \tau))] d\tau \\
&= \int_0^\tau [W_{1xx}(x, \tau) + (k^* - 1)W_{1x}(x, \tau) - k(W_1(x, \tau))] d\tau \\
&= \int_0^\tau [(k^* \tau) \max(e^x, 0) + k\tau(\max(e^x, 0)) + (k^* - 1) \\
&\quad [(k^* \tau) \max(e^x, 0) + k\tau(\max(e^x, 0))] + kk^* \tau \\
&\quad (\max(e^x, 0)) + kk\tau(\max(1 - e^x, 0))] d\tau \\
&= \int_0^\tau [(k^* \tau) \max(e^x, 0) + k\tau(\max(e^x, 0)) - k^{*2} \tau \\
&\quad \max(e^x, 0) - kk^* \tau(\max(e^x, 0)) - k\tau(\max(e^x, 0)) + kk^* \tau \\
&\quad (\max(e^x, 0)) + k^2 \tau(\max(1 - e^x, 0))] d\tau \\
&= \int_0^\tau [-k^{*2} \tau \max(-e^x, 0) + k^2 \tau(\max(1 - e^x, 0))] d\tau \\
&= -\frac{1}{2} k^{*2} \tau^2 \max(-e^x, 0) + \frac{1}{2} k^2 \tau^2(\max(\tau - e^x, 0)) \\
W_2(x, \tau) &= -\frac{1}{2} k^{*2} \tau^2 \max(-e^x, 0) + \frac{1}{2} k^2 \tau^2(\max(1 - e^x, 0)). \quad (4.1.38)
\end{aligned}$$

substitusi nilai $n = 2$ ke dalam Persamaan $W_{n+1}(x, \tau)$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
W_{n+1}(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_n(W_0, W_1, \dots, W_n) d\tau \\
W_{2+1}(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_2(W_0, W_1, W_2) d\tau \\
W_3(x, \tau) &= - \int_0^\tau A_2(W_0, W_1, W_2) d\tau \\
&= - \int_0^\tau [-W_{xx}(W_2(x, \tau)) - (k^* - 1)W_x(W_2(x, \tau)) \\
&\quad + k(W_2(x, \tau))] d\tau \\
&= \int_0^\tau [W_{2xx}(x, \tau) + (k^* - 1)W_{2x}(x, \tau) \\
&\quad - k(W_2(x, \tau))] d\tau \\
&= \int_0^\tau \left[-\frac{1}{2} k^{*2} \tau^2 \max(-e^x, 0) - \frac{1}{2} k^2 \tau^2(\max(e^x, 0)) \right. \\
&\quad \left. + k(W_2(x, \tau)) \right] d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (k^* - 1) \left[\frac{1}{2} k^{*2} \tau^2 \max(e^x, 0) - \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} k^2 \tau^2 (\max(e^x, 0)) \right] - k \left(-\frac{1}{2} k^{*2} \tau^2 \max(-e^x, 0) + \right. \\
& \quad \left. \frac{1}{2} k^2 \tau^2 (\max(1 - e^x, 0)) \right] d\tau \\
= & \int_0^\tau \left[\frac{1}{2} k^{*2} \tau^2 \max(-e^x, 0) - \frac{1}{2} k^2 \tau^2 (\max(e^x, 0)) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} k^{*3} \tau^2 \max(e^x, 0) - \frac{1}{2} k^{*2} \tau^2 \max(e^x, 0) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} k^* k^2 \tau^2 \max(e^x, 0) + \frac{1}{2} k^2 \tau^2 \max(e^x, 0) + \frac{1}{2} k^{*2} k \tau^2 \right. \\
& \quad \left. \max(e^x, 0) - \frac{1}{2} k^3 \tau^2 \max(1 - e^x, 0) \right] d\tau \\
= & \int_0^\tau \left[\frac{1}{2} k^{*3} \tau^2 \max(-e^x, 0) - \frac{1}{2} k^3 \tau^2 (\max(1 - e^x, 0)) \right] \\
= & \frac{1}{2} \frac{1}{3} (k^*)^3 \tau^3 \max(-e^x, 0) - \frac{1}{2} \frac{1}{3} k^3 \tau^3 (\max(1 - e^x, 0)) \\
W_3(x, \tau) = & \frac{1}{6} (k^*)^3 \tau^3 \max(-e^x, 0) - \frac{1}{6} k^3 \tau^3 (\max(1 - e^x, 0)). \tag{4.1.39}
\end{aligned}$$

Diperoleh nilai $W_1(x, \tau)$, $W_2(x, \tau)$, $W_3(x, \tau)$, dan seterusnya, dari penjabaran tersebut maka didapatkan solusi umum untuk *European put option* berdividen adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W_n(x, \tau) = & \max(1 - e^x, 0) + \\
& \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} (k^* t)^n \max(-e^x, 0) - (kt)^n \max(1 - e^x, 0). \tag{4.1.40}
\end{aligned}$$

4.2 Persamaan Difusi

Setelah didapatkan penjabaran dari *European call option* dan *European put option* dengan menggunakan *Adomian decomposition method*, maka akan dijabarkan

Persamaan difusi guna mendapatkan model yang akan dibandingkan dengan model dari *Adomian decomposition method* menggunakan simulasi program.

Diketahui dari Persamaan (4.1.10) bahwa model umum *Black-Scholes* berdividen untuk *European call option* adalah:

$$\frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1) \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - kV(x, \tau).$$

Sama halnya seperti kondisi batas pada Persamaan (4.1.12), maka dapat dimisalkan $V(S(t), t)$ adalah:

$$V(S(t), t) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau). \quad (4.2.1)$$

Persamaan (4.2.1) diatas, ditransformasikan sehingga didapat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} (e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)) \\ &= \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)) \\ &= \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(S(t), t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x}) \\ &= \alpha \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \\ &\quad \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \\ &= \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \\ &\quad + \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \\ &= \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + 2 \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \end{aligned}$$

$$+ e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2}. \quad (4.2.4)$$

Setelah didapatkan hasil transformasi terhadap $V(S(t), t)$, maka Persamaan(4.2.2)-(4.2.4) disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.1.10) untuk memperoleh Persamaan umum dari *European call option*. langkah-langkah selanjutnya, dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 V(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1) \frac{\partial V(x, \tau)}{\partial x} - kV(x, \tau), \\ \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} &= \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \\ \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1)(\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) + e^{\alpha x + \beta \tau} \\ \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x}) - k e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau), \\ e^{\alpha x + \beta \tau} (\beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}) &= e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha^2 u(x, \tau) + 2\alpha \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \\ + \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1)\alpha u(x, \tau) + (k^* - 1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} - k u(x, \tau)), \\ \beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} &= \alpha^2 u(x, \tau) + 2\alpha \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \\ + (k^* - 1)\alpha u(x, \tau) + (k^* - 1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} - k u(x, \tau), \\ \beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} &= \alpha^2 u(x, \tau) - k u(x, \tau) + \alpha(k^* - 1)u(x, \tau) + \\ 2\alpha \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + (k^* - 1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2}, \\ \beta u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} &= (\alpha^2 - k + \alpha(k^* - 1))u(x, \tau) + 2\alpha \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \\ + (k^* - 1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Digunakan permasalan sebagai berikut, maka didapatkan nilai α adalah:

$$\begin{aligned}\beta &= (\alpha^2 - k + \alpha(k^* - 1)) \\ \frac{d\beta}{d\alpha} &= 2\alpha + (k^* - 1) \\ 0 &= 2\alpha + (k^* - 1)\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

$$\begin{aligned}2\alpha &= 1 - k^* \\ \alpha &= \frac{1 - k^*}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(k^* - 1).\end{aligned}\tag{4.2.6}$$

Setelah nilai α didapatkan, selanjutnya disubstitusikan kedalam Persamaan (4.2.5) untuk memperoleh nilai β , dengan penjabaran sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\beta &= (\alpha^2 - k + \alpha(k^* - 1)) \\ &= \left(-\frac{1}{2}(k^* - 1)\right)^2 - k + \left(-\frac{1}{2}(k^* - 1)(k^* - 1)\right) \\ &= \frac{1}{4}(k^{*2} - 2k^* + 1) - k - \frac{1}{2}(k^{*2} - 2k^* + 1) \\ &= \frac{1}{4}k^{*2} - \frac{1}{2}k^* + \frac{1}{4} - k - \frac{1}{2}k^* + k^* - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4}k^{*2} + \frac{1}{2}k^* - \frac{1}{4} - k \\ &= -\frac{1}{4}(k^* - 1)^2 - k \\ &= -\left(\frac{1}{4}(k^* - 1)^2 + k\right).\end{aligned}\tag{4.2.7}$$

Pada Persamaan (4.2.6) dan (4.2.7) yang diperoleh, disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.2.1) untuk memperoleh nilai dari $V(S(t), t)$, dengan diketahui bahwa:

$$V(S(t), \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau).$$

Oleh karena itu, didapatkan Persamaan umum untuk *European call option* berdividen adalah sebagai berikut:

$$V(S(t), \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} u(x, \tau). \quad (4.2.8)$$

Persamaan (4.2.8) ditransformasikan untuk mendapatkan penyederhanaan model.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} u(x, \tau) \right) \\ &= -(\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} \\ &\quad u(x, \tau) + e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} \left(-(\frac{1}{4}(k^*-1)^2 \right. \\ &\quad \left. + k)u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \right) \\ \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} u(x, \tau) \right) \\ &= -(\frac{1}{2}(k^*-1)e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} u(x, \tau) \\ &\quad + e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau}) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} \left(-(\frac{1}{2}(k^*-1) \right. \\ &\quad \left. u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 V(S(t), t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} \left(-\frac{1}{2}(k^*-1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} \left(-\frac{1}{2}(k^*-1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2}(k^*-1)e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{1}{2}(k^* - 1)u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right)$$

Setelah didapatkan hasil transformasi diatas, disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.1.10), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 & e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x-(\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau} \left(-\left(\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k \right)u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \right) = \\
 & e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x-(\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau} \left(-\frac{1}{2}(k^*-1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(k^*-1) \right. \\
 & \left. e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x-(\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau} \left(-\frac{1}{2}(k^*-1)u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) \right. \\
 & \left. + (k^*-1)e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x-(\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau} \left(-\frac{1}{2}(k^*-1)u(x, \tau) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) - ke^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x-(\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau} u(x, \tau), \right. \\
 & e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x-(\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau} \left(-\left(\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k \right)u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \right) = \\
 & e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x-(\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau} \left(-\frac{1}{2}(k^*-1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right. \\
 & \left. \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(k^*-1) \left(-\frac{1}{2}(k^*-1)u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) \right. \\
 & \left. + (k^*-1) \left(-\frac{1}{2}(k^*-1)u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \right) - ku(x, \tau), \right. \\
 & \left(-\left(\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k \right)u(x, \tau) + \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \right) = -\frac{1}{2}(k^*-1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \\
 & \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{4}(k^*-1)^2 u(x, \tau) - \frac{1}{2}(k^*-1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} \\
 & -\frac{1}{2}(k^*-1)(k-1)u(x, \tau) + (k-1) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} - ku(x, \tau), \\
 & \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.2.9}
 \end{aligned}$$

Terlihat bahwa Persamaan (4.2.9) merupakan Persamaan

difusi dengan diberikan nilai $u(x, \tau)$ adalah:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4\tau}} dv. \quad (4.2.10)$$

Dari Persamaan (4.2.8) diketahui bahwa

$$\begin{aligned} V(S(t), \tau) &= e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} u(x, \tau) \\ u(x, \tau) &= e^{\frac{1}{2}(k^*-1)x + (\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k)\tau} V(S(t), t) \\ u(x, 0) &= e^{\frac{1}{2}(k^*-1)x+0} V(S(t), 0) \\ u(x, 0) &= e^{\frac{1}{2}(k^*-1)x} \max(e^x - 1, 0) \\ &= \max(e^{\frac{1}{2}k^*x - \frac{1}{2}x + x} - e^{\frac{1}{2}(k^*-1)x}, 0) \\ &= \max(e^{\frac{1}{2}(k^*+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k^*-1)x}, 0). \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Pada Persamaan (4.2.11), disubstitusikan kedalam Persamaan (4.2.10) untuk mendapatkan nilai $u(x, \tau)$, dengan dimisalkan bahwa $u(x, 0) = f(v)$, sehingga didapat:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4\tau}} dv \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \max(e^{\frac{1}{2}(k^*+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k^*-1)x}, 0) \\ &\quad e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2} dv \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\frac{1}{2}(k^*+1)v} - e^{\frac{1}{2}(k^*-1)v}) \\ &\quad (e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2}) dv \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \left(\int_0^{\infty} \left[(e^{\frac{1}{2}(k^*+1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (e^{\frac{1}{2}(k^*-1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2}) \right] dv \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(k^*+1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2} \right) dv \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(k^*-1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2} \right) dv. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Dimisalkan nilai $u(x, \tau)$ yang didapat sebagai $u(x, \tau) = I_1 - I_2$, sehingga nilai I_1 dan I_2 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(k^*+1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2} \right) dv \\ I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(k^*+1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2} \right) dv \quad (4.2.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(k^*-1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2} \right) dv \\ I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(k^*-1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2} \right) dv. \quad (4.2.14) \end{aligned}$$

Pengerjaan I_1 dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(k^*+1)v} e^{-\frac{1}{4\tau}(x-v)^2} \right) dv \\ \frac{1}{2}(k^*+1)v - \frac{1}{4\tau}(x-v)^2 &= \frac{2\tau(k^*+1)v - (x-v)^2}{4\tau} \\ &= \frac{2\tau(k^*+1)v - (v^2 - 2xv + x^2)}{4\tau} \\ &= \frac{2\tau(k^*+1)v - v^2 + 2xv - x^2}{4\tau} \\ &= \frac{-v^2 + 2(x + \tau(k^*+1))v - x^2}{4\tau} \\ &= \frac{-[v - (x + \tau(k^*+1))]^2}{4\tau} \\ &\quad + \frac{[(x + \tau(k^*+1))^2 - x^2]}{4\tau} \\ &= \frac{-[v - (x + \tau(k^*+1))]^2}{4\tau} \\ &\quad + \frac{2x\tau(k^*+1) + \tau^2(k^*+1)^2}{4\tau} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{v - (x + \tau(k^*+1))}{\sqrt{2\tau}} \right]^2 \\ &\quad + \frac{2x(k^*+1) + \tau(k^*+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh nilai I_1 adalah:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}(k^*+1)v - \frac{1}{4\tau}(x-v)^2} dv \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v-(x+\tau(k^*+1))}{\sqrt{2\tau}}\right]^2 + \frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} dv \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v-(x+\tau(k^*+1))}{\sqrt{2\tau}}\right]^2} e^{\frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} dv \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} e^{\frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v-(x+\tau(k^*+1))}{\sqrt{2\tau}}\right]^2} dv. \quad (4.2.15)
 \end{aligned}$$

Misalkan,

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{v - (x + \tau(k^* + 1))}{\sqrt{2\tau}} \\
 &= \frac{v - x - \tau(k^* + 1)}{\sqrt{2\tau}}
 \end{aligned}$$

maka, Persamaan (4.2.15) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} e^{\frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v-(x+\tau(k^*+1))}{\sqrt{2\tau}}\right]^2} dv \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} e^{\frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2} dv \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} e^{\frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} \int_a^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2} \sqrt{2\tau} dz \\
 &= e^{\frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} \frac{1}{2\sqrt{\Pi}} \int_a^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
 &= e^{\frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} N(-a) \\
 I_1 &= e^{\frac{(2x(k^*+1)+\tau(k^*+1))^2}{4}} N(d1). \quad (4.2.16)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan distribusi normal, maka nilai $N(d_1)$ adalah:

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

dengan nilai $d_1 = -a$, maka nilai d_1 adalah:

$$\begin{aligned} d_1 &= -\left(\frac{x + \tau(k^* + 1)}{\sqrt{2\tau}} \right) \\ &= \frac{x + \tau(k^* + 1)}{\sqrt{2\tau}} \end{aligned}$$

Pengerjaan I_2 , dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^{\infty} (e^{\frac{1}{2}(k^*-1)v - \frac{1}{4\tau}(x-v)^2}) dv \\ \frac{1}{2}(k^*-1)v - \frac{1}{4\tau}(x-v)^2 &= \frac{2\tau(k^*-1)v - (x-v)^2}{4\tau} \\ &= \frac{2\tau(k^*-1)v - (x^2 - 2xv + v^2)}{4\tau} \\ &= \frac{2\tau(k^*-1)v - x^2 + 2xv - x^2}{4\tau} \\ &= \frac{-v^2 + 2(x + \tau(k^*-1))v - x^2}{4\tau} \\ &= \frac{-[v - (x + \tau(k^*-1))]^2}{4\tau} + \\ &\quad \frac{[(x + \tau(k^*-1))^2 - x^2]}{4\tau} \\ &= \frac{-[v - (x + \tau(k^*-1))]^2}{4\tau} + \\ &\quad \frac{2x\tau(k^*-1) + \tau^2(k^*-1)^2}{4\tau} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{v - (x + \tau(k^*-1))}{\sqrt{2\tau}} \right]^2 + \\ &\quad \frac{2x(k^*-1) + \tau(k^*-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh nilai I_2 adalah:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}(k^*-1)v - \frac{1}{4\tau}(x-v)^2} dv \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v-(x+\tau(k^*-1))}{\sqrt{2\tau}}\right]^2 + \frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} dv \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v-(x+\tau(k^*-1))}{\sqrt{2\tau}}\right]^2} e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} dv \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v-(x+\tau(k^*-1))}{\sqrt{2\tau}}\right]^2} dv. \quad (4.2.17)
 \end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{v - (x + \tau(k^* - 1))}{\sqrt{2\tau}} \\
 &= \frac{v - x - \tau(k^* - 1)}{\sqrt{2\tau}}
 \end{aligned}$$

maka Persamaan (4.2.17) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v-(x+\tau(k^*-1))}{\sqrt{2\tau}}\right]^2} dv \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2} dv \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\Pi\tau}} e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} \int_b^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2} \sqrt{2\tau} dz \\
 &\equiv e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} \frac{1}{2\sqrt{\Pi}} \int_b^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
 &= e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} N(-b) \\
 I_2 &= e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} N(d_2). \quad (4.2.18)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan distribusi normal, maka nilai $N(d_2)$ adalah:

$$N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\Pi)}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

dengan $d_2 = -b$, maka nilai d_2 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d_2 &= -\left(-\frac{x + \tau(k^* - 1)}{\sqrt{2\tau}}\right) \\ &= \frac{x + \tau(k^* - 1)}{\sqrt{2\tau}}. \end{aligned}$$

Diperoleh nilai I_1 dan I_2 pada Persamaan (4.2.16) dan (4.2.18), kemudian disubstitusikan ke dalam Persamaan $u(x, \tau) = I_1 - I_2$, sehingga didapat:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= I_1 - I_2 \\ &= e^{\frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} N(d1) - e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} \\ &\quad N(d2). \quad (4.2.19) \end{aligned}$$

Nilai $u(x, \tau)$ dari Persamaan (4.2.19), disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.2.8), sehingga didapatkan nilai $V(S(t), \tau)$ adalah:

$$\begin{aligned} V(S(t), \tau) &= e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau} u(x, \tau) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau} \left[e^{\frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} \right. \\ &\quad \left. N(d1) - e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} N(d2) \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau} e^{\frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} N(d1) \\ &\quad - e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau} e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} N(d2) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau + \frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}} N(d1) \\ &\quad - e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x - (\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau + \frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}} N(d2) \\ &= e^{-\frac{1}{2}k^*x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}k^*\tau + \frac{1}{2}k^*\tau - \frac{1}{4}\tau - k\tau + \frac{1}{2}k^*x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}k^*\tau + \frac{1}{2}k^*\tau + \frac{1}{4}\tau} \\ &\quad N(d1) \end{aligned}$$

$$V(S(t), \tau) = e^x N(d1) - e^{-k\tau} N(d2). \quad (4.2.20)$$

$-e^{-\frac{1}{2} k^* x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} k^* \tau + \frac{1}{2} k^* \tau - \frac{1}{4} \tau - k\tau + \frac{1}{2} k^* x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} k^* \tau - \frac{1}{2} k\tau + \frac{1}{4} \tau}$
 $N(d2)$

Diketahui transformasi pada *European call option* adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S(t) &= Ee^x \\ t &= T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \\ &= T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \\ C(S(t), t) &= EV(x, \tau) \\ k &= \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \\ k^* &= \frac{(r - \delta)}{\frac{1}{2}\sigma^2}. \end{aligned}$$

Dari transformasi dan Persamaan (4.2.20) yang diperoleh, maka model dari Persamaan Difusi untuk *European call option* adalah:

$$\begin{aligned} V(S(t), \tau) &= e^x N(d1) - e^{-k\tau} N(d2) \\ C(S(t), t) &= EV(x, \tau) \\ &= E(e^x N(d1) - e^{-k\tau} N(d2)) \\ &= Ee^x N(d1) - Ee^{-k\tau} N(d2) \\ &= S(t)N(d1) - Ee^{-r(T-t)} N(d2) \\ C(S(t), t) &= S(t)N(d1) - Ee^{-r(T-t)} N(d2). \quad (4.2.21) \end{aligned}$$

Setelah diketahui nilai difusi *call option* pada Persamaan (4.2.21), maka dengan menggunakan prinsip *put-call parity*,

diperoleh Persamaan Difusi untuk *put option* adalah:

$$\begin{aligned}
 C(S(t), t) - P(S(t), t) &= S(t) - Ee^{-r(T-t)} \\
 P(S(t), t) &= C(S(t), t) - S(t) + Ee^{-r(T-t)} \\
 P(S(t), t) &= Ee^{-r(T-t)} N(-d2) \\
 &\quad - S(t) N(-d1) \quad (4.2.22)
 \end{aligned}$$

dengan nilai $d1$ dan $d2$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 d1 &= \frac{x + \tau(k^* + 1)}{\sqrt{2\tau}} \\
 &= \frac{\ln(\frac{S(t)}{E}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)}{\sqrt{2(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t))}} \\
 d1 &= \frac{\ln(\frac{S(t)}{E}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} \\
 d2 &= \frac{x + \tau(k^* - 1)}{\sqrt{2\tau}} \\
 &= \frac{\ln(\frac{S(t)}{E}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1\right)}{\sqrt{2(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t))}} \\
 d2 &= \frac{\ln(\frac{S(t)}{E}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1\right)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}}.
 \end{aligned}$$

4.3 Simulasi

Sebagai simulasi dari model *European option* dan Difusi, maka diberikan beberapa parameter sebagai berikut :

4.3.1 *Difusi Option* dengan pemberian dividen

Diasumsikan $E = \$40$, $\tau = 1$, $r = 5\%$, $\sigma = 0.317$, $\delta = 0.03$.

1. *Difusi call option*

Dengan harga saham diasumsikan pada tabel berikut :

Tabel 4.1: Asumsi Harga Saham

No.	$S_t (\$)$	No.	$S_t (\$)$	No.	$S_t (\$)$
1.	0	8.	35	15	70
2.	5	9.	40	16	75
3.	10	10.	45	17	80
4.	15	11.	50	18	85
5.	20	12.	55	19	90
6.	25	13.	60	20	95
7.	30	14.	65	21	100

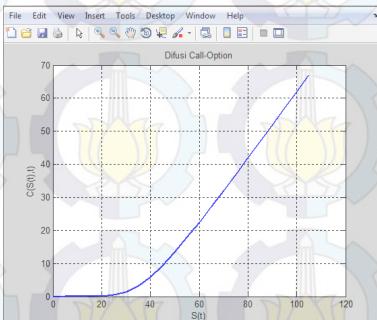
Berdasarkan Persamaan (4.2.21) diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut :

Tabel 4.2: *Difusi call option* dengan Pembayaran Dividen

No.	$S_t (\$)$	<i>call option</i> (\$)	No.	$S_t (\$)$	<i>call option</i> (\$)
1.	0	4.2932×10^{-11}	11.	50	17.8080
2.	5	1.5293×10^{-5}	12.	55	22.4477
3.	10	0.0034	13.	60	27.2365
4.	15	0.0663	14.	65	32.1143
5.	20	0.4118	15.	70	37.0442
6.	25	1.3816	16.	75	42.0042

No.	S_t (\$)	call option (\$)	No.	S_t (\$)	call option (\$)
7.	30	3.2132	17.	80	46.9813
8.	35	5.9288	18.	85	51.9683
9.	40	9.3920	19.	90	56.9609
10.	45	13.4108	20.	95	61.9566
			21.	100	66.9542

Sehingga berdasarkan Tabel 4.2 dapat diperoleh plot grafik sebagai berikut :



Gambar 4.1: Difusi call option dengan Pembayaran Dividen

Terlihat pada Gambar 4.1 bahwa dengan *strike price*, volatilitas, dan *interest rate* yang telah ditentukan serta dengan meningkatnya harga saham maka semakin meningkat pula harga *call option*.

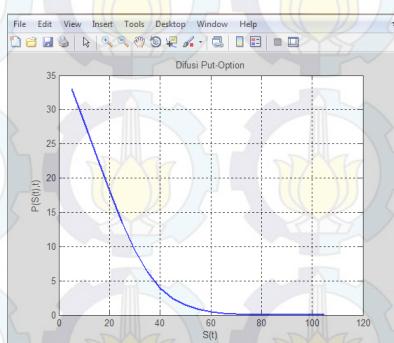
2. Difusi *put option*

Sedangkan untuk *Difusi put option* berdasarkan Persamaan (4.2.22) diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut :

Tabel 4.3: Difusi *Put Option* dengan Pembayaran Dividen

No.	$S_t(\$)$	<i>put option</i> (\\$)	No.	$S_t(\$)$	<i>put option</i> (\\$)
1.	0	33.0492	11.	50	0.8572
2.	5	28.0492	12.	55	0.4969
3.	10	23.0526	13.	60	0.2857
4.	15	18.1155	14.	65	0.1635
5.	20	13.4610	15.	70	0.0934
6.	25	9.4308	16.	75	0.0533
7.	30	6.2624	17.	80	0.0305
8.	35	3.9780	18.	85	0.0175
9.	40	2.4411	19.	90	0.0101
10.	45	1.4600	20.	95	0.0058
			21.	100	0.0034

Sehingga berdasarkan Tabel 4.3 dapat diperoleh plot grafik sebagai berikut :



Gambar 4.2: Difusi *put option* dengan Pembayaran Dividen

Terlihat pada Gambar 4.2 bahwa dengan *strike price*, volatilitas, dan *interest rate* yang telah ditentukan serta dengan meningkatnya harga saham maka harga *put option* semakin menurun.

4.3.2 *Adomian European Option* dengan pemberian dividen

Dibuat asumsi $E = \$40$, $\tau = 1$, $r = 5\%$, $\sigma = 0.317$ $\delta = 0.03$.

3. *Adomian call option*

Dari Persamaan (4.2.8) diketahui bahwa variabel yang terkandung dalam model umum dari *Adomian European call option* adalah variabel x , dengan x merupakan variabel dari harga saham ($S(t)$).

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah membandingkan antara Persamaan Difusi dan *Adomian decomposition method*, sehingga nilai x pada Persamaan Adomian, dikonversikan kedalam bentuk $S(t)$. Dimana diketahui bahwa $S(t) = Ee^x$, maka $x = \ln(S(t)/E)$.

Dari perhitungan, didapatkan nilai x pada tabel sebagai

berikut:

Tabel 4.4: Nilai x untuk *Adomian call option*

No.	$S_t(\$)$	x	No.	$S_t(\$)$	x
1.	0	-	11.	50	0.223144
2.	5	-2.07944	12.	55	0.318454
3.	10	-1.38629	13.	60	0.405465
4.	15	-0.98083	14.	65	0.485508
5.	20	-0.69315	15.	70	0.559616
6.	25	-0.47	16.	75	0.628609
7.	30	-0.28768	17.	80	0.693147
8.	35	-0.13353	18.	85	0.753772
9.	40	0	19.	90	0.81093
10.	45	0.117783	20.	95	0.864997
			21.	100	0.916291

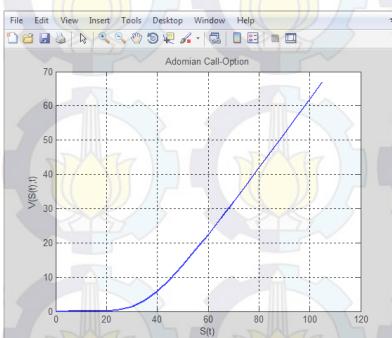
Dari tabel 4.4, didapatkan nilai-nilai untuk variabel x, sehingga dari Persamaan (4.2.8) didapatkan hasil serta nilai konversi *Adomian European call option* adalah sebagai berikut:

Tabel 4.5: *Adomian European call option*

No.	x	Call Option (\$)
1.	-	4.2932×10^{-11}
2.	-2.07944	1.5293×10^{-5}
3.	-1.38629	0.0034
4.	-0.98083	0.0663
5.	-0.69315	0.4118
6.	-0.47	1.3816

7.	-0.28768	3.2132
8.	-0.13353	5.9288
9.	0	9.392
10.	0.117783	13.4108
11.	0.223144	17.808
12.	0.318454	22.4477
13.	0.405465	27.2365
14.	0.485508	32.1143
15.	0.559616	37.0442
16.	0.628609	42.0042
17.	0.693147	46.9813
18.	0.753772	51.9683
19.	0.81093	56.9609
20.	0.864997	61.9566
21.	0.916291	66.9542

Sehingga berdasarkan Tabel 4.5 dapat diperoleh plot grafik sebagai berikut :



Gambar 4.3: *Adomian call option* dengan Pembayaran Dividen

Terlihat pada Gambar 4.3 bahwa dengan *strike price*, volatilitas, *interest rate*, dan dividen yang telah ditentukan serta dengan meningkatnya nilai x pada harga saham, maka semakin meningkat pula harga *call option*. Terlihat pula bahwa dari hasil plot Grafik *Adomian call option* sama persis dengan grafik dari Difusi, sehingga dapat disimpulkan bahwa *Adomian decomposition method* merupakan metode penyelesaian eksak yang dapat digunakan untuk menyelesaikan Persamaan *Black-Scholes* tanpa mengandung nilai eror pada saham.

4. *Adomian put option*

Sama halnya dengan *call option*, dari Persamaan (4.2.9) diketahui bahwa variabel yang terkandung dalam model umum dari *Adomian European put option* adalah variabel x , dengan x merupakan variabel dari harga saham ($S(t)$). Untuk nilai $S(t)$ dimisalkan bahwa $S(t) = Ee^x$, maka $x = \ln(S(t)/E)$.

Dari perhitungan dengan nilai $S(t)$ sama dengan *call option*, didapatkan nilai x untuk *put option* sebagai berikut:

Tabel 4.6: Nilai x untuk *Adomian put option*

No.	$S_t(\$)$	x	No.	$S_t(\$)$	x
1.	0	-	11.	50	0.223144
2.	5	-2.07944	12.	55	0.318454
3.	10	-1.38629	13.	60	0.405465
4.	15	-0.98083	14.	65	0.485508
5.	20	-0.69315	15.	70	0.559616
6.	25	-0.47	16.	75	0.628609
7.	30	-0.28768	17.	80	0.693147
8.	35	-0.13353	18.	85	0.753772
9.	40	0	19.	90	0.81093
10.	45	0.117783	20.	95	0.864997
			21.	100	0.916291

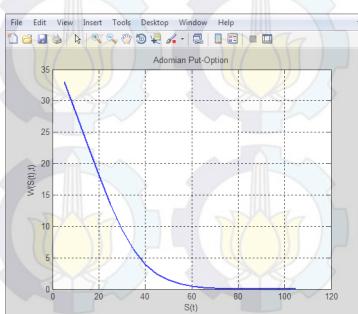
Dari tabel 4.6, didapatkan nilai-nilai untuk variabel x , sehingga dari Persamaan (4.2.9) didapatkan hasil perhitungan serta hasil konversi untuk *Adomian European put option* adalah sebagai berikut:

Tabel 4.7: *Adomian European put option*

No.	x	<i>put option</i> (\$)
1.	-	33.0492
2.	-2.07944	28.0492
3.	-1.38629	23.0526
4.	-0.98083	18.1155
5.	-0.69315	13.461
6.	-0.47	9.4308
7.	-0.28768	6.2624
8.	-0.13353	3.978

No.	x	<i>put option (\$)</i>
9.	0	2.4411
10.	0.117783	1.46
11.	0.223144	0.8572
12.	0.318454	0.4969
13.	0.405465	0.2857
14.	0.485508	0.1635
15.	0.559616	0.0934
16.	0.628609	0.0533
17.	0.693147	0.0305
18.	0.753772	0.0175
19.	0.81093	0.0101
20.	0.864997	0.0058
21.	0.916291	0.0034

Sehingga berdasarkan Tabel 4.7 dapat diperoleh plot grafik sebagai berikut :



Gambar 4.4: *Adomian put option* dengan Pembayaran Dividen

Terlihat pada Gambar 4.4 bahwa dengan *strike price*, volatilitas, *interest rate*, dan dividen yang telah ditentukan serta dengan meningkatnya nilai x pada harga saham, maka semakin menurun harga *put option*. Terlihat pula bahwa dari hasil plot Grafik *Adomian put option* sama persis dengan grafik dari Difusi, sehingga dapat disimpulkan bahwa *Adomian decomposition method* merupakan metode penyelesaian eksak yang dapat digunakan untuk menyelesaikan Persamaan *Black-Scholes* tanpa mengandung nilai eror pada saham.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Penyelesaian model Black-Scholes untuk *European call option* berdividen dengan *Adomian decomposition method* adalah :

$$V_n(x, \tau) = \max(e^x - 1, 0) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} (k^* t^n \max(e^x, 0) - (kt)^n \max(e^x - 1, 0)) \quad (5.1.1)$$

- Penyelesaian model Black-Scholes untuk *European put option* berdividen dengan *Adomian decomposition method* adalah :

$$W_n(x, \tau) = \max(1 - e^x, 0) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} (k^* t^n \max(-e^x, 0) - (kt)^n \max(1 - e^x, 0)) \quad (5.1.2)$$

dan penyelesaian model Black-Scholes untuk *European call option* berdividen dengan Persamaan Difusi adalah

$$\begin{aligned} C(S(t), t) - P(S(t), t) &= S(t) - Ee^{-r(T-t)} \\ C(S(t), t) &= S(t)N(d1) - Ee^{-r(T-t)}N(d2) \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

penyelesaian model Black-Scholes untuk *European put option* berdividen dengan Persamaan Difusi adalah :

$$\begin{aligned} P(S(t), t) &= C(S(t), t) - S(t) + Ee^{-r(T-t)} \\ P(S(t), t) &= P(S(t), t)N(-d2) - S(t)N(-d1) \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Berdasarkan distribusi normal, maka nilai $N(d_1)$ dan $N(d_2)$ adalah:

$$\begin{aligned} N(d1) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{d1} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ N(d2) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{d2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \end{aligned}$$

dengan nilai d1 dan d2 adalah:

$$\begin{aligned} d1 &= \frac{x + \tau(k^* + 1)}{\sqrt{2\tau}} \\ &= \frac{\log(\frac{S(t)}{E}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)}{\sqrt{2(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t))}} \\ d1 &= \frac{\log(\frac{S(t)}{E}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} \\ d2 &= \frac{x + \tau(k^* - 1)}{\sqrt{2\tau}} \\ &= \frac{\log(\frac{S(t)}{E}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1\right)}{\sqrt{2(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t))}} \\ d2 &= \frac{\log(\frac{S(t)}{E}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\left(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1\right)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} \end{aligned}$$

2. Berdasarkan simulasi dapat disimpulkan bahwa hasil perhitungan dari *Adomian decomposition method* sangat

sesuai dengan hasil perhitungan dari Difusi, sehingga disimpulkan bahwa *Adomian decomposition method* merupakan metode yang sesuai untuk menyelesaikan Persamaan *Black-Scholes*.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini belum dibahas mengenai penyelesaian *Black-Scholes* menggunakan *Adomian decomposition method* dengan tipe *American option* dan juga mengenai berbagai macam pengembangan asumsi model *Black-Scholes*. Oleh sebab itu, penulis menyarankan agar penelitian dapat dilanjutkan pada pembahasan tersebut.

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LAMPIRAN A

Biodata Penulis



Penulis bernama Nirmala Pratiwi, biasa dipanggil Nirmala. Penulis dilahirkan di Surabaya, 20 Maret 1994. Penulis merupakan putri dari pasangan Drs. Heru Pramono dan Drg. Dewajanti. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Dharma Wanita (1998-1999), SDN Jemurwonosari 1/417 (1999-2005), SMPN 1 Surabaya(2005-2008), dan SMAN 14 Surabaya(2008-2011). Kemudian penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya pada tahun 2011 dengan NRP 1211 100 078. Di Jurusan Matematika, penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selama kuliah, penulis memiliki pengalaman berorganisasi di KM ITS sebagai staf Dept. PSDM HIMATIKA ITS (2012-2013), staf dept Dana dan Usaha Ibnu Muqlah Matematika ITS (2013-2014), Pemandu Ekspresix FMIPA ITS (2013-2015), dan Kabiro Penelitian dan Pengembangan Dept. PSDM HIMATIKA ITS (2013-2014). Selain itu, penulis juga aktif dalam berbagai acara kemahasiswaan yaitu GERIGI, INTERN, FIA, OMITS, dan dalam pelatihan kemahasiswaan seperti LKMM Pra-TD, LKMM TD, PP-LKMM, dan LKMM TM.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir

ini dapat ditujukan ke penulis melalui email:
nirmalapratwi94@gmail.com

LAMPIRAN B

LISTING PROGRAM

A. Listing Program Difusi

```
clear all;
clc; close all;
syms z;
fun=exp(-0.5*z^2);
%-----Input Parameter-----%
E=40; %St=0:5:100;
r=0.05; sigma=0.317;
delta=0.03;
n=21; x=10:10:50;
nx=length(x);
%K=r/(0.5*sigma^2);
K=1; tau=1;
%kstar=(r-delta)/0.5*sigma^2;

for i=1:n
    St(i)=i^5;
    d1(i)=(log(St(i)/E)+tau*((r-delta)+0.5*sigma^2))+...
        /sqrt(sigma^2*tau);
    %dloo(i)=(log(st(i)/e)+((r-delta)+0.5*sigma^2)*tau)/(sigma*sqrt(tau));
    d2(i)=(log(St(i)/E)+tau*((r-delta)-0.5*sigma^2))/sqrt(sigma^2*tau);
    %Evaluate d2
    %d2oo(i)=d1(i)-sigma*sqrt(tau);

    Nd1(i)=0.5*(1+erf(d1(i)/sqrt(2)));
    Nd2(i)=0.5*(1+erf(d2(i)/sqrt(2)));
    N1(i)=0.5*(1+erf(-d1(i)/sqrt(2)));
    %Evaluate N(d1)
```

```

N2(i) = 0.5*(1+erf(-d2(i)/sqrt(2)));
%Evaluate N(d2)

Call(i)=St(i)*Nd1(i)-E*exp(-
r*tau)*Nd2(i);
Put(i)=E.*exp(-r*tau).*N2(i)-
St(i).* (N1(i));

payoffcall(i)=max(St(i)-E,0) ;
payoffput(i)=max(E-St(i),0) ;
end
w=0;
V0=0;
%-----Recall its values-----%
% d1,d2,Nd1,Nd2,Call,Put,V,W

%-----Plotting Call and Put-----%
figure(1)
plot([w St],[V0 Call], 'LineWidth',2)
xlabel('S(t)')
ylabel('C(S(t),t)')
title('Difusi Call-Option')
grid on

figure(2)
plot(St,Put, 'LineWidth',2)
xlabel('S(t)')
ylabel('P(S(t),t)')
title('Difusi Put-Option')
grid on

```

B. Listing Program Adomian Decomposition Method

```

clear all;
clc; close all;

```

```

E = 40;
sigma=0.317; r=0.05;
x=0:5:100;
delta=0.03;
tau=1;
k=r/0.5*sigma^2;
kstar=(r-delta)/0.5*sigma^2;

function [summation_call,
summation_put]=sumn(n,x,k,tau)
summation_call=0;summation_put=0;
for j=1:n
    summation_call = summation_call + (-1)^(j+1)*((k*tau)^j*max(exp(x),0)-...
        (k*tau)^j*max(exp(x)-1,0))/factorial(j);
    summation_put = summation_put + (-1)^(j+1)*((k*tau)^j*max(-exp(x),0)-...
        (k*tau)^j*max(1-exp(x),0))/factorial(j);
end

for n=1:N
    for i=1:length(x)
        [call,put]=sumn(n,x(i),kstar, k,tau);
        v(n,i)=max(exp(x(i))-1,0)+call;
        w(n,i)=max(1-exp(x(i)),0)+put;
    end
end
figure(1)
plot(x,v(N,:))
title('Adomian Call-Option')
xlabel('x')
ylabel('V(x,\tau)')
grid on
figure(2)
plot(x,w(N,:))

```

```
title('Adomian Put-Option')  
xlabel('x')  
ylabel('W(x,\tau)')  
grid on
```

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Biazar J, Goldoust F. (2013). **Adomian Decomposition Method for the Black-Scholes Equation**, Applied Mathematics and Pharmaceutical Sciences.Singapore
- [2] J.F.Price. (2013). **Optional mathematics is not optional**, Notices of the American Mathematical Society, 43: 964-971.
- [3] Husnan D. (2004). **Manajemen Keuangan Teori dan Penerapan (Keputusan Jangka Panjang)**. BPFE. Yogyakarta
- [4] Andriyanto. (2009). **Model investasi harga saham tipe eropa dengan menggunakan model black-scholes**.Universitas Negeri Yogyakarta. Yogyakarta
- [5] Satyahadewi,N,dkk. (2013). **Application of Mathematics and Statistic** Bimaster 2013 Vol II. Riau
- [6] L. Blanco-Cocom, E. Avilla-Vales. (2010). **The use of the Adomian decompositon method for a Sirc influenza model**, *Advances in Differensial Equations and Control Processes*, 5(2), 115-127
- [7] Rouparvar H, Salamatbakhsh. (2013). **Analytical Solution of The Black Scholes Equation by using Variational Iteration Method** *Apply Mathematics E-Notes*, 13: 243-248

- [8] Gulkac W. (2014). **The Homotopy Perturbation Method for The Black Scholes Equation.** *Science and Art Faculty*, Kocaeli University, Turkey
- [9] Wilmott P, dkk. (1996). **The Mathematics of Financial Derivative** Press Syndicate of The University of Cambrige, Australia
- [10] Muawanah N L.(2012). **Penurunan Model Black-Scholes dengan Metode Binomial untuk Saham Tipe Eropa** *Jurnal Matematika UNAND Vol II*: 49-57
- [11] Jaradat OK. (2008). **Adomian Decomposition Method for solving Abelian Differential Equation.** *Jurnal of Applied 8(10)*: 1962-1966
- [12] Bastian AM. (2012). **Penerapan metode dekomposisi adomian untuk menyelesaikan persamaan schrdinger nonlinier dimensi satu.** Universitas Brawijaya, Malang