PENYELESAIAN PERSAMAAN *BLACK-SCHOLES* DENGAN *ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD*

Nirmala Pratiwi, Endah Rokhmati M.P dan Sentot Didik S.
Matematika, Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
E-mail: endahrmp@matematika.its.ac.id

***Abstrak*— *Adomian decomposition method* (ADM) merupakan metode penyelesaian berbentuk sebuah deret pendekatan. Dalam Tugas Akhir ini akan dibahas tentang solusi analitik dari Persamaan *Black-Scholes* pada tipe Eropa, meliputi *European call option* dan *European put option* dengan pembayaran dividen dan diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method*, dimana solusi yang didapat akan dibandingkan dengan Persamaan difusi melalui simulasi program *Matlab* 2010a. Setelah didapatkan perbandingan model dari kedua metode, maka akan didapatkan model paling akurat dalam menyelesaikan Persamaan *Black-Scholes*.**

Kata kunci: Adomian decomposition method, Persamaan Black-Scholes, Persamaan Difusi, Opsi Call, Opsi Put.

I. PENDAHULUAN

Berkembangnya ilmu teknologi, berdampak positif bagi perkembangan pola pikir masyarakat modern saat ini. Pola pikir yang dinamis dan visioner, membuat masyarakat semakin berfikir cerdas tentang masa depan. Terutama masalah *financial*. Keuangan yang mereka miliki diolah agar mendapatkan keuntungan yang dirupakan dalam bentuk investasi. Dalam investasi, seorang investor memiliki pilihan untuk membeli aset yang diperdagangkan secara langsung di pasar keuangan atau membeli aset *derivative*, yaitu suatu instrumen keuangan yang nilainya bergantung kepada aset yang mendasarinya. Salah satu produk *derivative* yang banyak dikenal adalah opsi. yaitu suatu bentuk perjanjian atau investasi berupa kontrak yang memberikan pemegang opsi suatu hak untuk membeli atau menjual aset tertentu dengan harga dan pada jangka waktu tertentu.

Berdasarkan jenis hak yang diberikan opsi dibedakan menjadi opsi beli (*call option*) dan opsi jual (*put option*). *Call option* adalah suatu tipe kontrak yang memberikan hak kepada pemegang opsi untuk membeli dari penjual opsi sejumlah lembar saham tertentu pada harga dan jangka waktu yang ditentukan. *Put option* merupakan opsi yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk menjual saham dalam jumlah tertentu kepada pembeli opsi pada waktu dan harga yang telah ditentukan. Sedangkan berdasarkan periode waktu penggunaan, opsi dapat dibedakan menjadi dua yaitu *European option* dan *American option* [3].

Pada *European option*, hak pembelian atau penjualan kontrak hanya dapat dilaksanakan pada tanggal jatuh tempo yang telah ditentukan dalam kontrak. Pada *American option*, pemilik kontrak dapat melaksanakan haknya kapan saja selama tanggal pelaksanaan. Fisher Black dan Mayor Scholes pada tahun 1973 merumuskan suatu metode untuk menetapkan harga opsi. Metode tersebut dikenal dengan Persamaan *Black-Scholes*. Persamaan *Black-Scholes* merupakan salah satu model matematika yang digunakan dalam penentuan harga opsi. Persamaan *Black-Scholes* dapat diselesaikan dengan beberapa metode, antara lain *Adomian decompotition method* (ADM) tanpa pembagian dividen [1,2], *Homotophy* [5], *Variational iteration method* (VIM) [4], binomial atau trinomial [7], dan metode penyelesaian melalui Persamaan Difusi [6].

Pengembangan model *Black-Scholes* yang secara umum diselesaikan menggunakan Persamaan Difusi, akan diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method*, dan solusi yang didapatkan, dibandingkan dengan tujuan mendapatkan model penyelesaian yang paling efisien dengan asumsi pemberian dividen.

II. METODE PENELITIAN

Langkah - langkah sistematis yang digunakan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini adalah:

A. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan analisis model dan metode dengan mencari dan mempelajari literatur-literatur yang terkait yang berhubungan dengan model *Black-Scholes*, model difusi, *European option*, dan *Adomian decomposition method*.

B. Analisis Masalah

Pada tahap ini, setelah referensi terkumpul, dan didapatkan beberapa metode penunjang, dilakukan analisis masalah dengan menyelesaikan penurunan

rumus untuk mendapatkan model matematika pada Persamaan *Black-Scholes* menggunakan *European call option* dan *European put option*.

C. Penyelesaian *Black-Scholes* pada *European option* dengan *Adomian decomposition method*.

Pada tahap ini, setelah didapatkan hasil dari *European call option* dan *European put option*, selanjutnya diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method* untuk mendapatkan solusi secara eksak dalam bentuk deret.

D. Persamaan Difusi dan membuat program simulasi

Setelah didapatkan hasil penyelesaian model secara analitik, maka akan dibandingkan antara penurunan model difusi (yang telah ada) dengan model yang didapat dari penurunan *Adomian decomposition method*, menggunakan simulasi *software Matlab 2010a* untuk mengetahui metode yang paling akurat dalam penyelesaian Persamaan *Black-Scholes*.

E. Kesimpulan

Setelah dilakukan analisis dan pembahasan maka pada tahap terakhir penelitian ini adalah penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah didapatkan pada tahap sebelumnya.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang solusi analitik dari *European option* meliputi *call-option* dan *put-option* yang diperoleh dari Persamaan *Black-Scholes*. Kemudian, dilakukan simulasi program dari solusi analitik yang diperoleh antara *European option* dan Persamaan difusi.

3.1 Adomian Decomposition Method pada European Option

Pada tahap ini, dibahas mengenai solusi analitik dari *European call option* dan *European put option*, dimana solusi yang didapat akan diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method*

3.1.1 European Call Option dengan pembayaran dividen

Bagian ini membahas tentang penyelesaian Persamaan *Black-Scholes* berdividen untuk mendapatkan solusi dari *European call option*. Diketahui Persamaan umum *Black-Scholes* dengan pembagian dividen adalah sebagai berikut [6]:

$$\frac{\partial C(S(t),t)}{\partial t} + (r-\delta)\, S(t)\frac{\partial C(S(t),t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 C(S(t),t)}{\partial S(t)^2} - rC(S(t),t) = 0 \qquad (1)$$

dengan, C(S(t),t) = harga saham *call* pada waktu t

r = suku bunga bebas resiko

σ = volatilitas

δ = dividen.

Diberikan bentuk transformasi *European call option* sebagai berikut:

$$S(t) = Ee^x \qquad (2)$$

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} = T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \qquad (3)$$

$$C(S(t),t) = E\,V(x,\tau). \qquad (4)$$

Persamaan (1), ditransformasikan dengan menggunakan Persamaan (2), (3) dan (4) untuk mendapatkan model *Black-Scholes European call option*. Hasil transformasi tersebut disubstitusikan ke Persamaan (1), sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial V(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V(x,\tau)}{\partial x^2} + (k^*-1)\frac{\partial V(x,\tau)}{\partial x} - kV(x,\tau). \qquad (5)$$

Persamaan (5) diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method* dengan dikenakan invers dari operator linear (L) pada kedua sisi. Dimisalkan $L = \frac{d}{d\tau}$ dan $L^{-1} = \int_0^\tau (.)d\tau$, sehingga didapat

$$L^{-1}V_\tau(x,\tau) = L^{-1}[V_{xx}(x,\tau) + (k^*-1)V_x(x,\tau) - kV(x,\tau)]$$

$$V(x,\tau) = V(x,0) + \int_0^\tau [V_{xx}(x,\tau) + (k^*-1)V_x(x,\tau) - kV(x,\tau)]\, d\tau \qquad (6)$$

Solusi Persamaan (6) dimisalkan sebagai jumlahan dari fungsi-fungsi yang dicari, sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$V(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x,\tau) \qquad (7)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x,\tau) = V(x,0) + \int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty}[V_{xx}(V_n(x,\tau)) + (k^*-1)(V_x(V_n(x,\tau))) - k(V_n(x,\tau))d\tau]. \qquad (8)$$

Agar lebih mudah mendapatkan jumlahan fungsi yang dicari dengan penjabaran *Adomian decomposition method* untuk nonlinear, maka nilai $V(x,\tau)$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$V(x,\tau) = V(x,0) - \int_0^\tau A_n(V_0, V_1, \dots, V_n)d\tau$$

dengan nilai A_n adalah:

$$A_n = \sum_{n=0}^{\infty} [V_{xx}(V_n(x,\tau)) + (k^*-1)V_x(V_n(x,\tau)) - k(V_n(x,\tau))]$$

atau dapat dituliskan,

$$A_n(V_n(x,\tau)) = V_{nxx}(x,\tau) + (k^*-1)V_{nx}(x,\tau) - kV_n(x,\tau)\,. \qquad (9)$$

Berdasarkan sifat relasi rekursif, Persamaan (8) dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{cases} V_0(x,\tau) = V(x,0) \\ V_{n+1}(x,\tau) = \int_0^\tau [V_{xx}(V_n(x,\tau)) + (k^*-1)(V_x(V_n(x,\tau)) - k(V_n(x,\tau))]\, d\tau \\ \qquad = \int_0^\tau A_n(V_0, V_1, \dots, V_n)d\tau. \end{cases} \qquad (10)$$

Tipe opsi yang digunakan pada penelitian ini adalah *European option*, sehingga diberikan syarat batas untuk *European call option* sebagai berikut:

$$C(S(t),T) = \max(S(t) - E, 0) \quad (11)$$

$$EV(S(t),0) = \max(\mathrm{E\,e^x} - \mathrm{E}, 0), \quad S(t) = Ee^x$$

$$EV(S(t),0) = \max(E(e^x - 1), 0)$$

$$V(S(t),0) = \max(e^x - 1,0) \quad (12)$$

Berdasarkan syarat batas yang diberikan, Persamaan (9) dan (10), dituliskan sebagai berikut:

$$V_1(x,\tau) = (k^*\tau)\max(e^x,0) - k\tau(\max(e^x - 1,0))$$

$$V_2(x,\tau) = -\frac{1}{2}(k^*\tau)^2\max(e^x,0) + \frac{1}{2}(k\tau)^2(\max(e^x - 1,0))$$

$$V_3(x,\tau) = \frac{1}{6}(k^*\tau)^3\max(e^x,0) - \frac{1}{6}(k\tau)^3(\max(e^x - 1,0))$$

$$\vdots$$

untuk n=1, 2, 3, dan seterusnya. Sehingga, diperoleh solusi umum untuk *European call option* berdividen adalah sebagai berikut:

$$V_n(x,\tau) = \max(e^x - 1,0) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}(((k^*\tau)^n)\max(e^x,0) + (k\tau)^n\max(e^x - 1,0)) \quad (13)$$

3.1.2 *European Put Option* dengan pembagian berdividen

Pada tahap ini, sama halnya dengan *call* option, akan didapatkan penyelesaian Persamaan *Black-Scholes* berdividen untuk mendapatkan solusi dari *European put option*, dengan diketahui Persamaan umum *put option* adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial P(S(t),t)}{\partial t} + (r - \delta)\,S(t)\frac{\partial P(S(t),t)}{\partial S(t)} + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2\frac{\partial^2 P(S(t),t)}{\partial S(t)^2} - rP(S(t),t) = 0\,. \quad (14)$$

Diberikan bentuk transformasi untuk *European put option* sebagai berikut:

$$S(t) = Ee^x$$

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$$

$$P(S(t),t) = E\,W(x,\tau). \quad (15)$$

Persamaan (14) ditransformasikan menggunakan Persamaan (2), (3), (15) untuk mendapatkan model *Black-Scholes European put option*. Hasil transformasinya disubstitusikan kedalam Persamaan (14), sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial W(x,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W(x,\tau)}{\partial x^2} + (k^* - 1)\frac{\partial W(x,\tau)}{\partial x} - kW(x,\tau). \quad (16)$$

Persamaan (16) yang diperoleh, diselesaikan menggunakan *Adomian decomposition method* dengan dikenakan operator $L^{-1} = \int_0^\tau d\tau$ pada kedua sisi, sehingga didapatkan

$$L^{-1}W_\tau(x,\tau) = L^{-1}[W_{xx}(x,\tau) + (k^* - 1)\,W_x(x,\tau) - kW(x,\tau)]$$

$$W(x,\tau) = W(x,0) + \int_0^\tau[W_{xx}(x,\tau) + (k^* - 1)\,W_x(x,\tau) - kW(x,\tau)]\,d\tau \quad (17)$$

Solusi Persamaan (17) dimisalkan sebagai jumlahan dari fungsi-fungsi yang dicari, sehingga dapat dituliskan:

$$W(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x,\tau) \quad (18)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(x,\tau) = W(x,0) + \int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty}[W_{xx}(W_n(x,\tau)) + (k^* - 1)(W_x(W_n(x,\tau))) - k(W_n(x,\tau))d\tau] \quad (19)$$

Sama halnya *European call option*, nilai $W(x,\tau)$ pada *European put option* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$W(x,\tau) = W(x,0) - \int_0^\tau A_n(W_0, W_1, \dots, W_n)d\tau$$

dengan nilai A_n adalah:

$$A_n = \sum_{n=0}^{\infty}[W_{xx}(W_n(x,\tau)) + (k^* - 1)W_x(W(x,\tau)) - k(W_n(x,\tau))]$$

atau dapat dituliskan,

$$A_n(W_n(x,\tau)) = W_{nxx}(x,\tau) + (k^* - 1)W_{nx}(x,\tau) - kW(x,\tau)\,. \quad (20)$$

Berdasarkan sifat relasi rekursif, Persamaan (19),dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{cases} W_0(x,\tau) = W(x,0) \\ W_{n+1}(x,\tau) = \int_0^\tau[W_{xx}(W_n(x,\tau)) + (k^* - 1)(W_x(W_n(x,\tau)) - k(W_n(x,\tau))]\,d\tau \\ \quad = \int_0^\tau A_n(W_0, W_1, \dots, W_n)d\tau\,. \end{cases} \quad (21)$$

Diberikan syarat batas untuk *European put option* sebagai berikut:

$$P(S(t),T) = \max(E - S(t), 0) \quad (22)$$

$$EW(S(t),0) = \max(\mathrm{E} - \mathrm{E\,e^x}, 0), \quad S(t) = Ee^x$$

$$EW(S(t),0) = \max(E(1 - e^x), 0)$$

$$W(S(t),0) = \max(1 - e^x, 0) \quad (23)$$

Berdasarkan syarat batas yang diberikan, Persamaan (20) dan (21) dituliskan sebagai berikut:

$$W_1(x,\tau) = (k^*\tau)\max(-e^x,0) - k\tau(\max(1 - e^x,0))$$

$$W_2(x,\tau) = -\frac{1}{2}(k^*\tau)^2\max(-e^x,0) + \frac{1}{2}(k\tau)^2(\max(1 - e^x,0))$$

$$W_3(x,\tau) = \frac{1}{6}(k^*\tau)^3\max(-e^x,0) - \frac{1}{6}(k\tau)^3(\max(1 - e^x,0)).$$

$$\vdots$$

untuk n=1, 2, 3, dan seterusnya. Sehingga, diperoleh

solusi umum untuk *European put option* dengan pembagian dividen adalah sebagai berikut:

$$W_n(x,\tau) = \max(1-e^x,0) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$
$$(((k^*\tau)^n)\max(-e^x,0) + (k\tau)^n \max(1-e^x,0)) \quad (24)$$

3.2 Persamaan Difusi untuk model Black-Scholes

Pada bagian ini akan dijabarkan tentang Persamaan difusi untuk mendapatkan model Black-Scholes. Diketahui persamaaan umum difusi adalah sebagai berikut [6]:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x,\tau > 0 \qquad (25)$$

dengan

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{\frac{-(x-v)^2}{4\tau}}dv\,. \qquad (26)$$

Berdasarkan Persamaan (12), dimisalkan untuk nilai $V(S(t),t)$ adalah sebagai berikut:

$$V(S(t),t) = e^{\alpha x+\beta\tau}\,u(x,\tau) \quad ,$$

dengan $\alpha = -\frac{1}{2}(k^*-1)$ dan

$$\beta = -(\frac{1}{4}(k^*-1)^2 + k),$$

sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$V(S(t),t) = e^{-\frac{1}{2}(k^*-1)x-(\frac{1}{4}(k^*-1)^2+k)\tau}\,u(x,\tau). \qquad (27)$$

Apabila $\tau = 0$, maka nilai $u(x,0)$ adalah

$$u(x,0) = \max\left(e^{\frac{1}{2}(k^*+1)v} - e^{\frac{1}{2}(k^*-1)x},0\right)\,e^{\frac{-(x-v)^2}{4\tau}} \qquad (28)$$

dengan $u(x,0) = f(v)$.

Persamaan (27) dan (28) disubstitusikan ke Persamaan (26), sehingga diperoleh Persamaan sebagai berikut:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_0^{\infty}\left(e^{\frac{1}{2}(k^*+1)v}\,e^{\frac{-(x-v)^2}{4\tau}}\right)dv - \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_0^{\infty}\left(e^{\frac{1}{2}(k^*-1)v}\,e^{\frac{-(x-v)^2}{4\tau}}\right)dv$$

atau dapat disederhanakan menjadi,

$$u(x,\tau) = I_1 - I_2$$
$$= e^{\frac{2x(k^*+1)+\tau(k^*+1)^2}{4}}N(d_1) - e^{\frac{2x(k^*-1)+\tau(k^*-1)^2}{4}}N(d_2) \qquad (29)$$

Selanjutnya, Persamaan (29) disubstitusi ke Persamaan (27) dan diperoleh nilai $V(S(t),t)$ sebagai berikut:

$$V(S(t),t) = e^x N(d_1) - e^{-k\tau}N(d_2) \qquad (30)$$

Sehingga, dari transformasi *call-option* pada Persamaan (5) dan Persamaan (25), model umum untuk difusi c*all-option* adalah:

$$C(S(t),t) = S(t)N(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2) \qquad (31)$$

Menurut sifat dari *put-call parity*, maka model umum untuk difusi *put-option* adalah:

$$P(S(t),t) = Ee^{-r\tau}N(-d_2) - S(t)N(-d_1) \qquad (32)$$

dengan nilai d_1 dan d_2 adalah sebagai berikut:

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2}+1)}{\sqrt{\sigma^2\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2}-1)}{\sqrt{\sigma^2\tau}}$$

Berdasarkan distribusi normal, maka nilai $N(d_1)$ dan $N(d_2)$ adalah:

$$N(d_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz$$

$$N(d_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz$$

3.3 Simulasi untuk *Adomian Decomposition Method* dan Difusi

Melalui program *Matlab* 2010a, berikut ditampilkan beberapa simulasi terkait dengan *European option* dan Persamaan Difusi, dengan parameter sebagai berikut:

$E = \$40,\ \tau = 1,\ r = 5\%,\ \sigma = 0.317,\ \delta = 0.03$

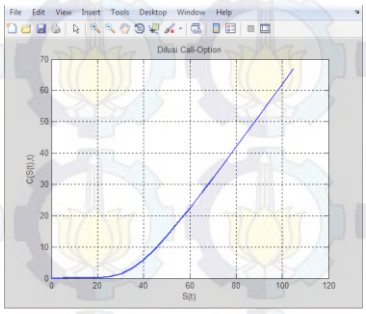
3.3.1 Difusi *Call Option* dengan pembagian dividen

Diberikan beberapa nilai inputan yang akan digunakan sebagai parameter pada simulasi program, dan dengan harga saham diasumsikan sebagai berikut, maka didapatkan nilai *call-option* adalah:

Tabel 3.1 Nilai Difusi *Call Option* berdividen

No.	S_t ($)	*Call Option* ($)	No.	S_t ($)	*Call Option* ($)
1.	0	4.2932×10^{-11}	11.	50	17.8080
2.	5	1.5293×10^{-5}	12.	55	22.4477
3.	10	0.0034	13.	60	27.2365
4.	15	0.0663	14.	65	32,1143
5.	20	0.4118	15.	70	37.0442
6.	25	1.3816	16.	75	42.0042
7.	30	3.2132	17.	80	46.9813
8.	35	5.9288	18.	85	51.9683
9.	40	9.3920	19.	90	56.9609
10.	45	13.4108	20.	95	61.9566
			21.	100	66.9542

Sehingga, berdasarkan Tabel 3.1, maka plot grafiknya adalah:



Gambar 1. Difusi *Call-Option dengan pembayaran dividen*

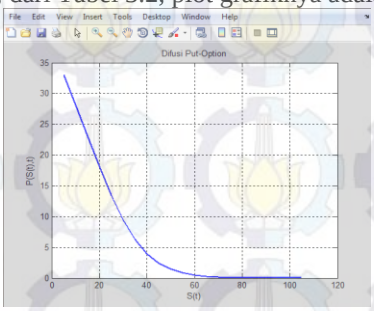
3.3.2 Difusi *Put Option* dengan pembagian dividen

Berdasarkan nilai inputan dan harga saham yang sama dengan *call option*, maka diperoleh nilai *put-option* adalah:

Tabel 3.2 Nilai Difusi *Put Option* berdividen

No.	S_t ($)	*Put Option* ($)	No.	S_t ($)	*Put Option* ($)
1.	0	33.0492	11.	50	0.8572
2.	5	28.0492	12.	55	0.4969
3.	10	23.0526	13.	60	0.2857
4.	15	18.1155	14.	65	0.1635
5.	20	13.4610	15.	70	0.0934
6.	25	9.4308	16.	75	0.0533
7.	30	6.2624	17.	80	0.0305
8.	35	3.9780	18.	85	0.0175
9.	40	2.4411	19.	90	0.0101
10.	45	1.46	20.	95	0.0058
			21.	100	0.0034

Sehingga, dari Tabel 3.2, plot grafiknya adalah:



Gambar 2. Difusi *Put-Option* dengan pembagian dividen

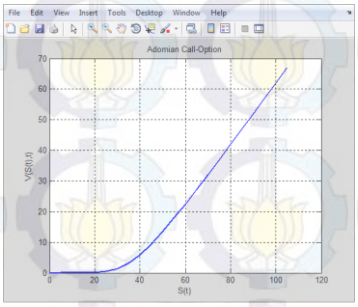
3.3.3 *Adomian Call Option* berdividen

Diasumsikan harga saham sama dengan Persamaan difusi, dan diketahui $x = \ln(S(t)/E)$ maka nilai x yang didapatkan untuk *call option* dikonversikan kedalam Persamaan difusi, maka nilai *Adomian call option* setelah konversi ditunjukkan pada Tabel 3.3 sebagai berikut:

Tabel 3.3 Nilai *Adomian European Call Option* dengan pembagian dividen

No.	x	Call ($)	No.	x	Call ($)
1.	-	4.2932 x10^{-11}	11.	0.223144	17.8080
2.	-2.07944	1.5293 x10^{-5}	12.	0.318454	22.4477
3.	-1.38629	0.0034	13.	0.405465	27.2365
4.	-0.98083	0.0663	14.	0.485508	32,1143
5.	-0.69315	0.4118	15.	0.559616	37.0442
6.	-0.47	1.3816	16.	0.628609	42.0042
7.	-0.28768	3.2132	17.	0.693147	46.9813
8.	-0.13353	5.9288	18.	0.753772	51.9683
9.	0	9.3920	19.	0.81093	56.9609
10.	0.117783	13.4108	20.	0.864997	61.9566
			21.	0.916291	66.9542

Sehingga, dari Tabel 3.3, didapat plot grafik sebagai berikut:



Gambar 3. *Adomian Call-Option* dengan pembagian dividen

3.3.4 *Adomian Put Option* berdividen

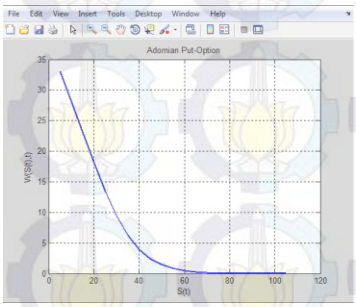
Sama halnya dengan *Adomian call option* nilai x yang diperoleh dari transformasi $x = \ln(S(t)/E)$ dikonversikan kedalam Persamaan difusi, sehingga nilai *Adomian put option* setelah konversi adalah sebagai berikut:

Tabel 3.4 Nilai *Adomian European Put Option* dengan pembagian dividen

No	x	*Put* ($)	No.	x	*Put* ($)
1.	-	33.0492	11.	0.223144	0.8572
2.	-2.07944	28.0492	12.	0.318454	0.4969
3.	-1.38629	23.0526	13.	0.405465	0.2857

4.	-0.98083	18.1155	14.	0.485508	0.1635
5.	-0.69315	13.4610	15.	0.559616	0.0934
6.	-0.47	9.4308	16.	0.628609	0.0533
7.	-0.28768	6.2624	17.	0.693147	0.0305
8.	-0.13353	3.9780	18.	0.753772	0.0175
9.	0	2.4411	19.	0.81093	0.0101
10.	0.117783	1.46	20.	0.864997	0.0058
			21.	0.916291	0.0034

Sehingga, dari Tabel 3.4, plot grafik yang didapat adalah sebagai berikut:



Gambar 4. *Adomian Put-Option* dengan pembagian dividen

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan uraian dan hasil simulasi *Matlab* di atas maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

a. Didapatkan solusi eksak model *Black-Scholes* untuk *European call-option* berdividen dengan *Adomian decomposition method* adalah:

$$V_n(x,\tau) = \max(e^x - 1{,}0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

$$(((k^*\tau)^n) \max(e^x, 0) + (k\tau)^n \max(e^x - 1{,}0))$$

Solusi eksak model *Black-Scholes* untuk *European put-option* berdividen dengan *Adomian decomposition method* adalah:

$$W_n(x,\tau) = \max(1 - e^x, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

$$(((k^*\tau)^n) \max(-e^x, 0) + (k\tau)^n \max(1 - e^x, 0))$$

Sedangkan, untuk solusi eksak model *Black-Scholes* untuk *European call-option* berdividen dengan Difusi adalah:

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1)}{\sqrt{\sigma^2\tau}}$$

dengan,

$$N(d_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

Solusi eksak model *Black-Scholes* untuk *European put-option* berdividen dengan Difusi adalah:

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S(t)}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau(\frac{r-\delta}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1)}{\sqrt{\sigma^2\tau}}$$

dengan,

$$N(d_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

b. Grafik dari *Adomian decomposition method* sangat sesuai dengan grafik dari Persamaan difusi, sehingga disimpulkan bahwa *Adomian decomposition method* merupakan metode yang sesuai untuk menyelesaikan Persamaan *Black-Scholes* dengan nilai eror lebih kecil dari 0,01%.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] Biazar J, Goldoust F. (2013). **Adomian Decomposition Method for the Black-Scholes Equation**, Applied Mathematics and Pharmaceutical Sciences.Singapore

[2] J.F.Price. 2013. **Optional mathemathics is not optional**, Notices of the American Mathematical Society, 43: 964-971.

[3] Husnan D. 2004."***Manajemen Keuangan Teori dan Penerapan*** *(Keputusan Jangka Panjang)"*. BPFEE. Yogyakarta

[4] Rouparvar H. 2013. "**Analytical Solution of The Black Scholes Equation by using Variational Iteration Method**" Apply Mathematics E-Notes, 13: 243-248

[5] Gülkac W. 2014. "**The Homotophy Pertubation Method for The Black Scholes Equation**". Science and Art Faculty. Turkey

[6] Wilmott P, dkk. 1996. "**The Mathematics of Financial Derivative**" Press Syndicate of The University of Cambrige, Australia

[7] Muawanah N L.2012."**Penurunan Model Black-Scholes dengan Metode Binomial untuk Saham Tipe Eropa**" Jurnal Matematika UNAND Vol II: 49-57