TRANSFORMASI WAVELET KONTINU PADA RUANG $L^p(\mathbb{R}^n)$ DENGAN DILASI VEKTOR

Rizky Darmawan, Mahmud Yunus
Program Studi Pascasarjana Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111
yunusm@matematika.its.ac.id

***Abstrak*— Transformasi wavelet kontinu merupakan topik matematika yang menarik untuk dikembangkan. Salah satu pengembangan tersebut adalah konsep transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor. Disisi lain, sifat transformasi linear terbatas dan kontinuitas suatu fungsi merupakan topik yang menarik untuk dikaji dalam matematika. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan syarat kontinuitas pada $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$ dari fungsi hasil transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor dan menyelidiki bahwa transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor merupakan transformasi linier terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^\infty(\mathbb{R}_+^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$, untuk pangkat dilasi $\rho = 1$. Pada penelitian ini, nilai p dan n pada $L^p(\mathbb{R}^n)$merupakan bilangan asli.**

Kata Kunci*— transformasi wavelet kontinu, ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, fungsi kontinu, transformasi linear terbatas

I. PENDAHULUAN

Transformasi wavelet merupakan perbaikan dari transformasi Fourier.Transformasi Fourier hanya memberikan frekuensi dari suatu sinyal, sedangkan transformasi wavelet tidak hanya memberikan informasi mengenai frekuensi yang muncul, akan tetapi memberikan posisi waktu dari frekuensi tersebut.

Ada dua jenis transformasi wavelet, yaitu transformasi wavelet kontinu dan transformasi wavelet diskrit. Pada transformasi wavelet kontinu, nilai parameter translasi dan dilasi merupakan bilangan real, sedangkan pada transformasi wavelet diskrit, nilai parameter translasi dan dilasi merupakan bilangan bulat.

Dalam bidang teknologi, transformasi wavelet diskrit memiliki manfaat yang lebih besar dari transformasi wavelet kontinu , khususnya dalam teknologi komputasi, hal ini disebabkan semua sinyal atau data yang diolah menggunakan komputer selalu dalam bentuk sinyal atau data diskrit.

Transformasi wavelet kontinu merupakan salah satu topik matematika yang mengalami pengembangan secara teoritis. Salah satu pengembangan tersebut adalah transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor yang diperkenalkan oleh Pathak dalam [1].

Disisi lain, sifat kontinuitas suatu fungsi dan penelitian transformasi wavelet sebagai transformasi linear terbatas merupakan topik yang menarik untuk dikaji. Dalam analisis real, kontinuitas dari suatu fungsi memiliki sifat-sifat tertentu, antara lain nilai limit kiri dan limit kanan dari fungsi kontinu adalah sama, fungsi kontinu yang monoton tegas memiliki invers yang juga fungsi kontinu monoton tegas, fungsi kontinu merupakan fungsi terbatas dalam $\mathbb{R}$, dan fungsi kontinu memiliki nilai absolout maksimum dan minimum. Kontinuitas suatu fungsi juga memiliki peranan dalam kalkulus integral dan diferensial, kontinuitas suatu fungsi pada $\mathbb{R}^n$ merupakan syarat cukup agar fungsi tersebut tertintegral Riemann dan merupakan syarat perlu agar fungsi tersebut terdiferensial pada $\mathbb{R}^n$. Lebih lanjut, dalam analisis fungsional, himpunan semua fungsi kontinu pada $\mathbb{R}^n$ membentuk ruang Banach yang bersifat padat dalam $L^p(\mathbb{R}^n)$. Sedangkan, suatu transformasi linear yangterbatas menunjukkan bahwa transfromasi tersebut memiliki nilai berhingga dalam norma dan mengakibatkan transformasi tersebut kontinu di setiap domain transformasi, disamping itu dari himpunan semua transformasi linear terbatas dapat dibentuk suatu ruang Banach tertentu.

Sedangkan penelitian untuk mendapatkan syarat kontinuitas fungsi hasil transformasi dan penyelidikan tentang transformai linear terbatas dari transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor belum pernah dilakukan. Oleh karena itu, pada penelitian ini didapatkan syarat kontinuitas fungsi hasil transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor dan ditunjukkan bahwa transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor merupakan transformasi linier terbatas untuk $\rho = 1$.

Kontinuitas yang dimaksud adalah kontinuitas pada $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$, sedangkan transformasi linear yang dimaksud adalah transformasi linear dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^\infty(\mathbb{R}_+^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$. Dalam hal ini, nilai n dan p pada $\mathbb{R}^n$ dibatasi hanya untuk bilangan asli.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan diberikan definisi dan sifat-sifat dari transformasi wavelet satu variabel dari fungsi di ruang L^2 ($\mathbb{R}$) dan ruang L^p ($\mathbb{R}$), transformasi wavelet multivariabel L^2 ($\mathbb{R}^n$) dan L p (R n), dan transformasi wavelet di ruang L^p ($\mathbb{R}^n$) dengan faktor dilasi vektor.

A. Wavelet

Dalam[1], wavelet merupakan suatu fungsi $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dengan $\psi \neq 0$ yang memenuhi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) = 0$$

Sedangkan transformasi wavelet dari fungsi f di $L^2(\mathbb{R}^n)$ adalah s

$$W_\psi f(a,b) := a^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\,dt\,, \quad a \in \mathbb{R}_+,$$

$$b \in \mathbb{R}^n$$

Dalam hal ini, a disebut faktor dilasi dan b disebut factor translasi[1]. Jika nilai a dan b merupakan bilangan real, maka transfomasi wavelet di atas disebut transformasi wavelet kontinu, sedangkan jika nilai a dan b merupakan bilangan bulat, maka transfomasi wavelet di atas disebut transformasi wavelet diskrit.

B. Transformasi Wavelet Kontinu dengan Dilasi Vektor pada Ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$

Definisi 2. 1 [2]

Diberikan ψ adalah wavelet. Transformasi wavelet dengan dilasi vektor dari fungsi $f \in \mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ adalah

$$W_\psi f(a,b) := \frac{1}{\det\big(\mathrm{diag}(a)\big)^\rho} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi\big(\mathrm{diag}(a)^{-1}(t-b)\big)}dt,$$

$b \in \mathbb{R}^n$ *dan*

$$\mathrm{diag}(a) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

$a_i \in \mathbb{R}_+$, *untuk* $i = 1, 2, \dots, n.$

C. Ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dan Ruang $L^\infty(\mathbb{R}^n_+) \times L^p(\mathbb{R}^n)$.

Karena pembahasan mengenai transformasi linier terbatas pada peneitian ini adalah transformasi linier terbatas dari ruang $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ ke ruang $L^\infty(\mathbb{R}^n_+) \times L^p(\mathbb{R}^n)$, maka perlu terlebih dahulu diberikan definisi ruang $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ dan $L^\infty(\mathbb{R}^n_+) \times L^p(\mathbb{R}^n)$.

Ruang $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ adalah ruang fungsi yang berbentuk

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p\,dt < \infty \right\}$$

[6]. Sedangkan ruang $L^\infty(\mathbb{R}^n_+) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang fungsi yang berbentuk

$$L^\infty(\mathbb{R}^n_+) \times L^p(\mathbb{R}^n := \left\{ f: \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \|f\|_{L^\infty \times L^p} := sup_{a \in \mathbb{R}^n_+} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(a,b)|^p\,db \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

III. PEMBAHASAN

A. Transformasi Wavelet Kontinu dengan Dilasi Vektor pada Ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ sebagai Transformasi Linier Terbatas

Pembahasan pertama adalah pembahasan mengenai transformasi wavelet kontinu dengan dilasi vector pada ruang $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ merupakan transformasi linier terbatas dari ruang $\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ ke ruang $L^\infty(\mathbb{R}^n_+) \times L^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.1

Diberikan ψ adalah suatu wavelet. Transformasi wavelet kontinu dari fungsi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor yaitu $W_\psi f$, dengan $\rho = 1$, adalah transformasi linier terbatas dari ruang$L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^\infty(\mathbb{R}^n_+) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan

$$\|W_\psi f(a,b)\|_{L^\infty \times L^p} \leq \|\psi\|_{L^1}\|f\|_{L^p}.$$

Bukti:

Didefiniskan fungsi$F_a(t,b) := |f(t)|\left|\overline{\psi\big(\mathrm{diag}(a)^{-1}(t-b)\big)}\right|$,. Misalkan q adalah konjuget eksponen dari p, maka$q = \frac{p}{p-1}$. Asumsikan$p > 1$, dengan menggunakan teorema Fubini dan ketaksamaan Holder diperoleh

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} F_a(t,b)dt \right\|^p_{L^p(db)}$$

$$= \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F_a(t,b)dt \right)^p db \right)^{1/p} \right)^p$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F_a(t,b)dt \right)^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F_a(t,b)dt \right) db$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F_a(t,b)dt \right)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} F_a(t,b)\, db\, dt$$

$$\leq \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} F_a(t,b)dt \right)^{p-1} \right\|_{L^q(db)} \int_{\mathbb{R}^n} \|F_a(t,b)\|_{L^p(db)}\, dt$$

(1)

Karena q adalah konjuget eksponen dari p, dengan membagi kedua ruas dari (1) dengan $\left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} F_a(t,b)dt \right)^{p-1} \right\|_{L^q(db)}$, maka (1) berubah menjadi

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} F_a(t,b)dt \right\|_{L^p(db)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|F_a(t,b)\|_{L^p(db)}\, dt \quad (2)$$

Untuk $p = 1$, dengan menggunakan teorema Fubini, maka (2) juga berlaku. Selanjutnya dengan aproksimasi menggunakan fungsi sederhana didapat bahwa nilai dari masing-masing ruas dari (2) adalah berhingga. Berikutnya, dari definisi $W_\psi f(a,b)$dan dari (2), diperoleh

$$\|W_\psi f(a,b)\|_{L^p(db)}$$

$$= \left\| \frac{1}{\det(\mathrm{diag}(a))} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi(\mathrm{diag}(a)^{-1}(t-b))}dt \right\|_{L^p(db)}$$

$$\leq \left\| \frac{1}{\det(\mathrm{diag}(a))} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \left|\overline{\psi(\mathrm{diag}(a)^{-1}(t-b))}\right| dt \right\|_{L^p(db)}$$

$$= \frac{1}{\det(\mathrm{diag}(a))} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} F_a(t,b)dt \right\|_{L^p(db)}$$

$$\leq \frac{1}{\det(\mathrm{diag}(a))} \int_{\mathbb{R}^n} \|F_a(t,b)\|_{L^p(db)}\, dt \qquad (3)$$

Disisi lain, ambil$z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi $z_i = \frac{t_i - b_i}{a_i}$, $\quad i = 1, 2, \cdots, n$ maka dengan perhitungan menggunakan teknik integrasi substitusi dan teorema Fubini diperoleh

$$\frac{1}{a_i} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|f(t_i)| \left| \overline{\psi\left(\frac{t_i - b_i}{a_i}\right)} \right| \right)^p db_i \right)^{\frac{1}{p}} dt_i = \int_{\mathbb{R}} \left|\overline{\psi(z_i)}\right| dz_i \left(\int_{\mathbb{R}} |f(z_i a_i + b_i)|^p db_i \right)^{1/p}$$

Akibatnya ruas kanan dari (3) menjadi

$$\frac{1}{\det(\mathrm{diag}(a))} \int_{\mathbb{R}^n} \|F_a(t,b)\|_{L^p(db)}\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\overline{\psi(z)}\right| dz \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathrm{diag}(a)z + b)|^p db \right)^{1/p}$$

$$= \|\psi\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

dengan demikian (3) berubah menjadi

$$\|W_\psi f(a,b)\|_{L^p(db)} \leq \|\psi\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

untuk setiap $a \in \mathbb{R}_+^n$ (4)

Dari definisi $\|\cdot\|_{L^\infty \times L^p}$ dan dari (4) diperoleh

$$\|W_\psi f\|_{L^\infty \times L^p} \leq \|\psi\|_{L^1} \|f\|_{L^p} \qquad \square$$

Dari teorema di atas terbukti bahwa transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor merupakan transformasi linier terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^\infty(\mathbb{R}_+^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$, sebab terdapat $M \geq 0$ sedemikian hingga

$$\|W_\psi f\|_{L^\infty \times L^p} \leq M \|f\|_{L^p}$$

yaitu $M = \|\psi\|_{L^1}$.

B. Syarat Kekontinuan dari Fungsi Hasil Transformasi Wavelet Kontinu pada Ruang$L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan Faktor Dilasi Vektor

Berikutnya di bawah ini diberikan syarat cukup agar fungsi hasil transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor merupakan fungsi kontinu pada$\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$. Disini notasi$C_0$ menyatakan himpunan fungsi kontinu dengan tumpuan kompak.

Teorema 3. 2

Diberikan ψ adalah suatu wavelet. Jika $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ maka fungsi hasil transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan faktor dilasi vektor, yaitu $W_\psi f$ merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$.

Bukti:

Dari teorema 2.1 diperoleh bahwa $W_\psi f(a,\ \cdot) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, selanjutnya, untuk $a \in \mathbb{R}_+^n$, misalkan

$$g(a) := \left| \frac{1}{\det(\operatorname{diag}(a))^{\rho-1}} \overline{\psi(\operatorname{diag}(a)^{-1}(t-b))} \right|$$

, karena $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ maka $\left|\overline{\psi(diag(\cdot)^{-1}(t-b))}\right| \in C_0(\mathbb{R}_+^n)$, sedangkan jelas bahwa $\frac{1}{\det(\operatorname{diag}(\cdot))^{\rho-1}}$ adalah fungsi kontinu pada $\mathbb{R}_+^n$, hal ini berakibat g kontinu pada $\mathbb{R}_+^n$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa domain dari g untuk $g \neq 0$ adalah kompak. Dari kenyataan bahwa $supp\left(\overline{\psi(\operatorname{diag}(\cdot)^{-1}(t-b))}\right) \cap \mathbb{R}_+^n \subset supp\left(\overline{\psi(\operatorname{diag}(\cdot)^{-1}(t-b))}\right)$ adalah tertutup dan $supp\left(\overline{\psi(\operatorname{diag}(\cdot)^{-1}(t-b))}\right)$ adalah kompak, maka diperoleh domain dari g untuk $g \neq 0$, yaitu $supp\left(\overline{\psi(\operatorname{diag}(\cdot)^{-1}(t-b))}\right) \cap \mathbb{R}_+^n$ adalah kompak. Selanjutnya, karena $C_0(\mathbb{R}_+^n)$ padat di $L^q(\mathbb{R}_+^n)$, maka $C_0(\mathbb{R}_+^n) \subseteq L^q(\mathbb{R}_+^n)$, akibatnya tanpa mengurangi keumuman, teorema kekontinuan operator translasi dapat diterapkan untuk kasus dalam domain $\mathbb{R}_+^n$, yaitu untuk $h_a \in \mathbb{R}_+^n$ diperoleh

$$\lim_{|h_a|\to 0} \|g(a+h_a) - g(a)\|_{L^p(da)} = 0$$

sehingga untuk $|h_a| \to 0$ diperoleh

$$g(a+h_a) = g(a) \qquad (4)$$

Berikutnya diberikan $h_b \in \mathbb{R}^n$, maka untuk $|h_a| \to 0$ dan $|h_b| \to 0$, dengan menggunakan ketaksamaan Holder diperoleh

$$\left|W_\psi f(a+h_a, b+h_b) - W_\psi f(a,b)\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{\det(\operatorname{diag}(a+h_a))^\rho} f(t) \overline{\psi\left(\operatorname{diag}(a+h_a)^{-1}(t-(b+h_b))\right)} - \frac{1}{\det(\operatorname{diag}(a))^\rho} f(t) \overline{\psi(\operatorname{diag}(a)^{-1}(t-b))} \right| dt$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| f(t) \left(\frac{1}{\det(\operatorname{diag}(a+h_a))^\rho} \overline{\psi\left(\operatorname{diag}(a+h_a)^{-1}(t-(b+h_b))\right)} - \frac{1}{\det(\operatorname{diag}(a))^\rho} \overline{\psi(\operatorname{diag}(a)^{-1}(t-b))} \right) \right| dt$$

$$\leq \|f\|_{L^p} \left\| \frac{1}{\det(\operatorname{diag}(a+h_a))^\rho} \overline{\psi\left(\operatorname{diag}(a+h_a)^{-1}(\cdot - (b+h_b))\right)} - \frac{1}{\det(\operatorname{diag}(a))^\rho} \overline{\psi(\operatorname{diag}(a)^{-1}(\cdot - b))} \right\|_{L^q}$$

$$= 0$$

Dengan demikian, $W_\psi f$ kontinu pada $\in \mathbb{R}_+^n,\ b \in \mathbb{R}^n$ □

Teorema 2.2 diatas menunjukkan bahwa syarat cukup sehingga fungsi hasil transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$ adalah $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

IV. ESIMPULAN

Kesimpulan yang didapatkan dari hasil penelitian sebagai berikut:

1. Transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor untuk $\rho = 1$ meruapakan transformasi linier terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^\infty(\mathbb{R}_+^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$, sebab terdapat $M \geq 0$ sedemikian hingga
$$\|W_\psi f\|_{L^\infty \times L^p} \leq M\|f\|_{L^p}$$
Yaitu $M = \|\psi\|_{L^1}$

2. Syarat cukup sehingga fungsi hasil transformasi wavelet kontinu pada ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ dengan dilasi vektor merupakan fungsi kontinu pada $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$ adalah $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*. Pennsylvania: SIAM, 1992.

[2] Pathak, R. S, *The Wavelet Transform*. Paris: Atlantis Press/World Scientific, 2009.

[3] Koornwinder, T. H.., "Wavelets: An Elementary Treatment of Theory and Applications". **World Scientific**, 2009.

[4] Jones, F., Lebesgue Integration on Euclid Space. Boston, London: Jones and Bartlet Publishers, 1993.

[5] Navarro. J, and Herrera., "Convergence of Discrete Wavelet Transform,". International Jurnal of Wavelet, World Scientific Publishing Company, vol.10, No.6 ., 2012.

[6] Rynne B.P., Youngson, M.A.., *Linear Functional Analysis*. Springer, 2001.