TUGAS AKHIR – SF184801

MEMBANGUN TIGA REPRESENTASI SPESIFIK GRUP LIE EKSEPSIONAL E_6

MUHAMAD ANDRI JAUHARI
NRP 01111640000071

Dosen Pembimbing:
Agus Purwanto, D.Sc

DEPARTEMEN FISIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

TUGAS AKHIR - SF184801

MEMBANGUN TIGA REPRESENTASI SPESIFIK GRUP LIE EKSEPSIONAL E_6

MUHAMAD ANDRI JAUHARI
NRP 01111640000071

Dosen Pembimbing:
Agus Purwanto, D.Sc

DEPARTEMEN FISIKA
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

Halaman ini sengaja dikosongkan

FINAL PROJECT - SF184801

CONSTRUCTING THREE SPECIFIC REPRESENTATION OF E_6 EXCEPTIONAL LIE GROUP

MUHAMAD ANDRI JAUHARI
NRP 01111640000071

Supervisor:
Agus Purwanto, D.Sc

DEPARTMENT OF PHYSICS
Faculty Science and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

Halaman ini sengaja dikosongkan

LEMBAR PENGESAHAN

MEMBANGUN TIGA REPRESENTASI SPESIFIK GRUP LIE EKSEPSIONAL E_6

CONSTRUCTING THREE SPECIFIC REPRESENTATION OF E_6 EXCEPTIONAL LIE GROUP

TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Bidang Fisika Teori
Program Studi S-1 Departemen Fisika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
Oleh

MUHAMAD ANDRI JAUHARI
NRP.01111640000071

Menyetujui
Dosen Pembimbing

Agus Purwanto, D.Sc.
NIP.19640811 199002 1 001

Surabaya, Juni 2020

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA
DEPARTEMEN FISIKA

Halaman ini sengaja dikosongkan

MEMBANGUN TIGA REPRESENTASI SPESIFIK GRUP LIE EKSEPSIONAL E_6

Nama	: MUHAMAD ANDRI JAUHARI
NRP	: 01111640000071
Departemen	: Fisika
Pembimbing 1	: Agus Purwanto, D.Sc

Abstrak

Teori Grup merupaka suatu cabang dalam ilmu matematika. Teori grup merupakan alat yang ampuh unntuk mempelahari simetri dari sistem fisis, terutama simetri dari sistem kuantum. Karena solusi eksak dari persamaan dinamis dalam teori kuantum secara umum sulit didapatkan, digunakan metode lain untuk menganalisa sifat-sifat dari sistemnya. Teori grup menyediakan metode efektif dengan menganalisa simetri dari sistem untuk mendapat informasi yang akurat dan dapat dibuktikan oleh observasi. Jenis teori grup yang sering digunakan dalam fisika teori adalah aljabar Lie dan grup Lie. Setiap anggota grup dapat direpresentasikan dalam bentuk matrik. Representasi matrik dari suatu grup Lie dapat dibangun menggunakan metode yang telah diperkenalkan oleh Cartan. Namun pada tugas akhir ini, digunakan metode lain untuk mendapatkan representasi matrik dari grup E_6. Representasi matrik **27** dan **78** dapat dibentuk menggunakan metode tensor. Sedangkan, representasi spinor dibentuk berdasarkan grup SL(3,$\mathbb{O}$).

Kata kunci : Aljabar Lie, Grup Lie, Grup E_6, Oktonion, Representasi Matrik

Halaman ini sengaja dikosongkan

CONSTRUCTING THREE SPECIFIC REPRESENTATION OF E_6 EXCEPTIONAL LIE GROUP

Name	: MUHAMAD ANDRI JAUHARI
NRP	: 01111640000071
Department	: Physics
Supervisor	: Agus Purwato, D.Sc

Abstract

Group Theory is one of many branch of mathematics. Group Theory is an effective tool to comprehend the symmetry of a physical system, especially a quantum system. Because dynamic equation within quantum theory, generally, is difficult to solve, other methods are used to analyze the characteristics of the system. Group theory provide an effective method by analyzing symmetry of the system to get accurate information and can be proved trough observation. Type of group theory that is often used in theoretical physics is Lie Algebra and Lie Group. Matrix representation of a Lie group can be constructed using methods introduced by Cartan. However, within this bachelor thesis, matrix representation of E_6 group is constructed using other methods. Tensor method used for constructing **27** and **78** matrix representation of E_6. SL(3,$\mathbb{O}$) used for constructing spinor representation of E_6.

Keywords : E_6 Group, Lie Algebra, Lie Group, Matrix Representation, Octonion

Halaman ini sengaja dikosongkan

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur dipanjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena telah melimpahkan rahmat, hidayah, petunjuk, kekuatan, dan rejeki, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul:

MEMBANGUN TIGA REPRESENTASI SPESIFIK GRUP LIE EKSEPSIONAL E_6

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Fisika FS ITS.

Penulisan Tugas Akhir ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa adanya bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Terimakasih disampaikan kepada semua pihak yang turut andil atas teselesaikannya Tugas Akhir ini:

1. Keluarga penulis terutama kedua orangtua, Mama Amidah, Papa Jauhari dan Adik Jihan yang telah memberikan doa, nasihat, dan motivasi kepada penulis selama masa kuliah, sampai diselesaikannya Tugas Akhir ini.

2. Bapak Agus Purwanto, D.Sc selaku dosen pembimbing penulis yang telah membimbing, mengarahkan, dan memberi masukan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Penulis juga berterimakasih karena telah diajarkan bahwa mempelajar

3. Bapak Bintoro Anang Subagyo, Ph.D yang telah mengajarkan banyak mata kuliah yang membuat penulis tertarik mendalami bidang fisika teori. Penulis juga berterimakasih atas bantuannya kepada penulis selama menjadi Kepala Laboratorium Fisika Fisika Teori dan Filsafat Alam (LaFTiFA).

4. Bapak Heru Sukamto, M.Si yang telah mengajarkan banyak mata kuliah yang membuat penulis tertarik mendalami bidang fisika teori. Penulis juga berterimakasih telah menunjukkan bahwa fisika teori membutuhkan ketenangan, dan kesabaran.

5. Bapak Dr. Rohedi Ali Yunus selaku dosen wali penulis yang telah memberikan semangat, masukan, dan motivasi selama penulis kuliah S1 ini.

6. Bapak Gatut Yudoyono, MT selaku kepala departemen fisika selama penulisan tugas akhir ini. Penulis juga berterimakasih atas ilmu dan nasihat yang telah diberikan selama waktu perkuliahan.

7. Teman-teman kuliah seperjuangan Maria Oktavia, Niko Panggabean, Hairunisa, Nisrina Lia, Iid Alawiyah, Lilid Maulidiyah, Rayhan Fiyan, Rahajeng Ayu yang telah banyak membantu penulis selama masa perkuliahan secara fisik, moral, dan ekonomi. Penulis juga berterimakasih kepada teman-teman SIRIUS 2016 yang telah mendukung, menyemangati, dan canda tawa bersama penulis, serta adik-adik 2017 dan 2018.

8. Teman-teman Laboratorium Fisika Teori (LaFTiFA),Afif, Gutivan, Lindung, Iqbal, Mas Nusur, Mas Dwi, Mas Kasyfil, Mas Doni, Mas Bayu, Mbak Rafika, Pak Nengah dan Mbak Siska atas canda tawa, diskusi, bantuan, semangat, dan pengalamanya.

9. Teman dekat penulis Aditya Permana yang telah menyemangati, memberi inspirasi, dan pencerahan, serta telah menunjukkan bahwa etos kerja yang baik merupakan bibit dari tercapainya kesuksesan.

10. Teman-teman warna-warni Dicky, Nauf, Mas Achul, Revo Endyana, Palupi Rendra, Aldo Nova, Kevin Julian, Ricky Pratama, Fariz Hapsoro, Jordan Lee yang pernah memberikan warna dalam kehidupan penulis, sehingga penulis berkembang menjadi pribadi yang lebih baik saat dituliskannya Tugas Akhir ini.

11. Seluruh pihak yang tidak bisa disebutkan satu-persatu, yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Penulis mengucapkan terima kasih yang sangat dalam atas doa dan semangat yang diberikan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan ini terdapat kekurangan, sehingga kritik dan saran konstruktif diharapkan untuk kesempurnaan Tugas Akhir ini. Penulis berharap Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis sendiri dan pembacanya.

Surabaya, Juni 2020

Penulis

Halaman ini sengaja dikosongkan

Daftar Isi

Halaman Judul **i**

Lembar Pengesahan **v**

Abstrak **vii**

Abstract **ix**

Daftar Isi **xv**

Daftar Tabel **xix**

Daftar Gambar **xxi**

1 Pendahuluan **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Tujuan 2
1.4 Batasan Masalah 3
1.5 Metodologi 3
1.6 Sistematika Penulisan 3

2 Bilangan Hiperkomplek **5**
2.1 Bilangan Komplek 5

2.2 Bilangan Kuarternion 9
2.2.1 Sifat dan Aljabar dari Bilangan Kuarternion 9
2.2.2 Pemetaan Konjugasi dalam Kuarternion 15
2.3 Oktonion 18
2.3.1 Sifat dan Aljabar dari Bilangan Oktonion 18
2.3.2 Pemetaan Konjugasi dalam Oktonion . 22

3 Grup Lie, dan Aljabar Lie 25
3.1 Grup dan Grup Lie 25
3.1.1 Grup dan Representasinya 25
3.1.2 Grup Lie 28
3.2 Grup Ortogonal Spesial 31
3.2.1 Defenisi Grup SO(N) 31
3.2.2 SO(2) 34
3.2.3 SO(3) 35
3.2.4 Bentuk Umum SO(N) 39
3.3 Grup Uniter Spesial 40
3.3.1 Defenisi Grup Uniter 40
3.3.2 Grup SU(2) dan Matriks Pauli 43
3.3.3 SU(2) Sebagai Representasi Spinor dari SO(3) 48
3.3.4 Grup SU(3) dan Diagram Dynkinnya . . 50
3.4 Transformasi Lorentz 53
3.4.1 Transformasi Lorentz dan Grup SO(p,q) 53
3.4.2 SO(1,1) dan SO(3,1) sebagai Grup Simetri Transformasi Lorentz 54
3.4.3 Bentuk Umum Transformasi Lorentz . . 60
3.4.4 SL(2,$\mathbb{C}$) sebagai Representasi Spinor Transformasi Lorentz 62
3.4.5 SL(2,$\mathbb{H}$) sebagai Representasi Spinor Transformasi Lorentz 66

3.4.6 SL(2,$\mathbb{O}$) sebagai Representasi Spinor Transformasi Lorentz 69
3.5 Akar, Bobot, dan Diagram Dynkin 72
3.5.1 Bobot 72
3.5.2 Akar 73
3.5.3 Diagram Dynkin 75
3.5.4 Diagram Dynkin Grup SU(3) 79
3.6 Klasifikasi *Killing-Cartan* 82
3.7 Automorfisme $\mathbb{O}$ sebagai Grup Eksepsional G_2 84

4 Representasi Fundamental, Adjoint, dan Spinor Grup E_6 93
4.1 Representasi Fundametal dan Adjoint Grup E_6 93
4.1.1 Subgrup Maksimal E_6 93
4.1.2 Transformasi Representasi Fundamental Grup E_6 94
4.1.3 Representasi Fundamental Grup E_6 . . 100
4.1.4 Representasi Adjoint Grup E_6 105
4.2 Representasi Spinor Grup E_6 108
4.2.1 Representasi Spinor Grup E_6 108
4.2.2 Penanaman SL(2,$\mathbb{O}$) 109
4.2.3 Notasi Transformasi Baru untuk Kategori 3 112
4.2.4 Generator dari grup SL(3,$\mathbb{O}$) 113
4.2.5 Kebergantungan Linear 117

5 Penutup 121
5.1 Kesimpulan 121
5.2 Saran 122

Daftar Pustaka 123

Lampiran A Bukti Persamaan Euler 127

Lampiran B Bukti Sifat dari Determinan Eksponen Matrik **129**

Lampiran C Notasi Bra-Ket Dirac **131**

Lampiran D Transformasi dalam Grup SL(2,$\mathbb{H}$) **133**

Lampiran E Transformasi dalam Grup SL(2,$\mathbb{O}$) **135**

Lampiran F Skrip MATLAB Representasi Fundamental dan Adjoint Grup E_6 **143**

Lampiran G Representasi Fundamental Grup E_6 **153**

Lampiran H Representasi Adjoint Grup E_6 **233**

Lampiran I Generator Representasi Spinor Grup E_6 **249**

Daftar Tabel

3.1 Tabel Operasi Grup C_3 28
3.2 Bentuk Transformasi dalam Grup SL(2,$\mathbb{O}$) . . . 72
3.3 Tabel Hubungan $(p-q)(p'-q')$, $\theta_{\alpha\beta}$, dan Diagram Dynkin 80

4.1 Penghapusan Akar dari Diagram Dynkin E_6 diperpanjang 95
4.2 Pasangan Bidang Transformasi dalam Notasi Baru 113

Halaman ini sengaja dikosongkan

Daftar Gambar

1.1 Diagram Alir Tugas Akhir 4

2.1 Koordinat Polar dari Bilangan Komplek 9
2.2 Diagram Perkalian antara Unit Kuarternion . . 11
2.3 Bidang Fano 19

3.1 Rotasi Segitiga 27
3.2 Ilustrasi orientasi Koordinat 32
3.3 Diagram Dynkin dari Setiap Kategori Grup Lie 83
3.4 Bidang-bidang yang Menuju Unit Imajiner kl . 90
3.5 Transformasi A_{kl} dan G_{kl} 91

4.1 Diagram Dynkin E_6 yang diperpanjang 95
4.2 Penanaman X, θ, dan $\theta^\dagger$ dalam χ 110

Halaman ini sengaja dikosongkan

Bab 1

Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Dewasa ini, peradaban banyak dipengaruhi oleh perkembangan teknologi. Perkembangan teknologi yang pesat tidak dapat terjadi tanpa adanya sains yang menjadi pondasi pendukungnya. Sains telah banyak membantu peradaban manusia untuk mencapai kemudahan hidupnya manusia saat ini. Salah satu disiplin ilmu yang berkontribusi dalam peradaban manusia adalah Fisika Teoritis. Dalam fisika teoritis, para ilmuwan fisika membuat model dalam upaya menjelaskan keteraturan alam. Model-model ini dapat digunakan untuk memprediksi hasil-hasil eksperimen dan pengamatan.

Pada pertengahan dekade 1920, pemahaman mengenai teori representasi dari grup (terutama grup Lie) dan teori kuantum berkembang pesat, hampir pada saat yang bersamaan [1]. Beberapa ilmuwan yang bekerja di kedua bidang tersebut melihat potensi untuk menghubungkan antara keduanya. Sehingga, dimulailah penggunaan teori grup dalam fisika teori yang dipelopori oleh W. Heisenberg, E. Wigner, P.A.M Dirac, dan lain lain. Tidak lama setelah berkembangnya teori kuan-

tum, mereka mempelajari konsekuensi simetri dalam sistem multipartikel untuk mempelajari spektrum atom.

Dalam grup Lie terdapat klasifikasi, dimana diantaranya terdapat 5 grup yang "langka" yang disebut grup eksepsional [2]. Grup eksepsional pertama kali digunakan fisikawan asal italia bernama Guilio Racah dalam artikelnya yang berjudul *The Theory of Complex Spectra* (1949) untuk menjelaskan spektra yang kompleks dari atom tanah jarang [3]. Namun, penggunaan grup eksepsional ini masih jarang digunakan karena diperlukannya pengetahuan grup eksepsional yang cukup luas untuk menggunakannya. Hal ini berubah ketika Grup eksepsional juga digunakan oleh Feza G*ü*rsey dan Pierre Ramond dalam artikelnya yang berjudul "*A Universal Gauge Theory Model Based on* E_6" sebagai kandidat grup dalam Teori Kemanunggalan Agung. Keduanya mempelopori penggunaannya dengan memperkenalkan secara gamblang grup eksepsional kepada fisikawan [4]. Dimana, keduanya mempelajarinya berdarkan metode formal yang diperkenalkan oleh Ellie Cartan. Pertanyaan menarik adalah, Apakah mungkin mengkonstuksikan representasi grup E_6 dengan metode lain? Oleh karena itu, dalam Tugas akhir ini disajikan cara konstruksi representasi grup eksepsional E_6 non-Cartan.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusah masalah dari tugas akhir ini adalah bagaimana cara membangun bentuk representasi fundamental, adjoint dan spinor dari grup lie eksepsional E_6.

1.3 Tujuan

Tujuan yang akan diperoleh dalam tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan bentuk representasi fundamental, adjoint

dan spinor dari grup E_6.

1.4 Batasan Masalah

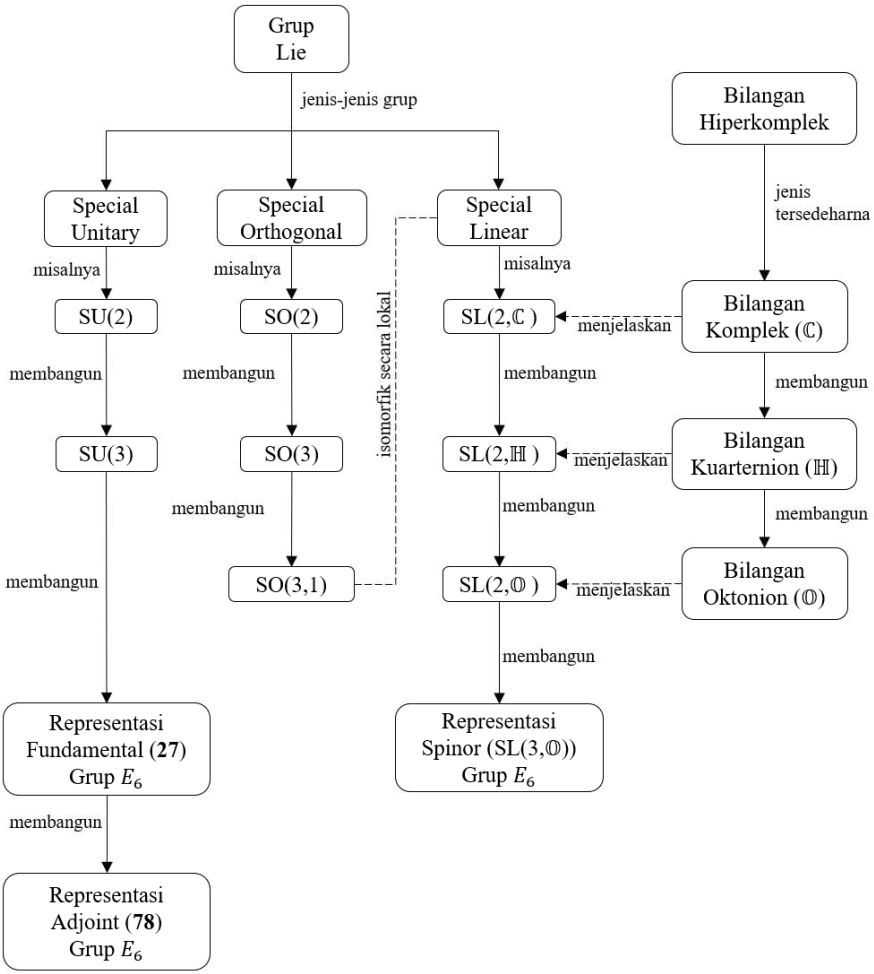
Tugas akhir ini dibatasi hanya untuk membahas pembangunan matrik representasi fundamental, adjoint, dan spinor dari grup lie eksepsional E_6. Pada tugas akhir ini tidak dibahas representasi diferensial dari grup E_6.

1.5 Metodologi

Tugas akhir ini dilaksanakan menggunakan metodologi yang mengikuti diagram alir pada gambar 1.5.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini diberikan sebagai berikut. Pendahuluan dipaparkan pada Bab 1. Bab 2 membahas tentan jenis-jenis bilangan hiperkompleks. Dasar - dasar mengenai grup Lie dan aljabar Lie akan diuraikan pada Bab 3. Bab 4 . Bab 5 berisi tentang pembangunan representasi fundamental, adjoint, dan spinor dari grup Lie eksepsional E_6. Tugas akhir ini disimpulkan pada bab 6.



Gambar 1.1: Diagram Alir Tugas Akhir

Bab 2

Bilangan Hiperkomplek

2.1 Bilangan Komplek

Bilangan komplek yang biasanya dituliskan sebagai $\mathbb{C}$ secara umum memiliki bentuk,

$$z = a + bi. \tag{2.1}$$

Dengan, a dan b merupakan bilangan riil yang dapat pula dituliskan sebagai ($\mathbb{R}$). Pada persamaan (2.1), i disebut sebagai bilangan imajiner. Bilangan i diperkenalkan sebagai bilangan yang memiliki kuadrat -1 (atau solusi dari persamaan $x^2 = -1$), karena tidak ada bilangan riil yang memenuhi dapat memenuhi sifat ini. Secara formal, bilangan komplek ($\mathbb{C}$) dapat dikatakan sebagai perluasan dari bilangan riil ($\mathbb{R}$). Hal ini disebabkan dengan menambahkan bilangan imajiner i, dapat membuka berbagai jenis bilangan baru yang tidak bisa didapatan hanya dengan menggunakan bilangan riil. Perluasan dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{C}$ secara matematis dituliskan dengan bentuk

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i. \tag{2.2}$$

Perluasan ini menyebakan bilangan komplek secara umum (seperti pada persamaan (2.1)) terdiri dari bagian yang dibentuk oleh bilangan riil saja yang disebut bagian riil dari bilangan komplek ($Re(z)$), dan bagian bilangan riil yang dikalikan dengan bilangan imajiner yang disebut bagian imajiner i ($Im(z)$). Pada persamaan (2.1), bagian riil dari z adalah a ($Re(z) = a$), dan bagian imajiner dari z adalah b ($Im(z) = b$) [7].

Metode perluasan dari bilangan riil ke bilangan komplek dengan memperkenalkan bilangan imajiner disebut konstruksi Cayley-Dickson. Konstruksi Cayley-Dickson ini tidak hanya dapat digunakan untuk memperluas bilangan riil ke bilangan komplek, namun dapat pula memperluas bilangan yang lebih tinggi dari bilangan komplek yang bilangan hiperkomplek (*hypercomplex number*)[5].

Perkalian antara dua bilangan komplek dapat dilakukan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= (a+b\,i)c + (a+b\,i)d\,i, && \text{(2.3a)}\\ &= ac + bc\,i + ad\,i + bd\,i^2. && \text{(2.3b)}\\ &= (ac-bd) + i(bc+ad). && \text{(2.3c)}\end{aligned}$$

Pada perhitungan perkalian bilangan komplek (2.3), dapat dilihat beberapa sifat dari bilangan komplek.

1. Sifat distributif berlaku pada bilangan komplek dan terdapat pada langkah (2.3a).

2. Kuadrat dari bilangan imajiner i, $i^2 = -1$. Sifat ini dapat dilihat pada langkah (2.3b) ke langkah (2.3c).

3. Sifat komutatif dari bilangan imajiner i, dengan bilangan riil pada langkah (2.3a) ke (2.3b).

4. Digunakan pula sifat asosiatif dari 3 bilangan komplek x, y, dan z, yaitu

$$(x\ y)z = x(y\ z).$$

Sehingga, bilangan kompleks memiliki sifat yang sama dengan bilangan riil, ditambahkan sifat bilangan imajiner [7].

Pada bilangan komplek terdapat konsep komplek sekawan (*complex conjugate*). komplek sekawan $\bar{z}$ dari bilangan komplek $z = a + b\ i$ adalah

$$\bar{z} = a - b\ i$$

yang mengubah tanda dari bilangan imajinernya. Norm (besar) dari bilangan komplek z dapat dituliskan sebagai $|z|$ didefenisikan menjadi

$$|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2. \tag{2.4}$$

Satu-satunya bilangan komplek dengan besar 0 adalah angka 0 sendiri. Selanjutnya, bilangan komplek bukan nol memiliki invers yang bila dihitung perkaliannya menghasilkan angka 1, yaitu

$$\begin{aligned} zz^{-1} &= 1, \\ z^{-1} &= \frac{1}{z}, \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Besar dari perkalian antara 2 bilangan dipertahankan, atau secara matematis

$$|x\ y| = |x|\ |y| \tag{2.6}$$

yang dapat dibuktikan dengan dengan mengambil besar dari persamaan (2.3),

$$\begin{aligned}(ac-bd)^2+(bc+ad)^2 &= (ac)^2-2abcd+(bd)^2+(bc)^2+\\ &\quad 2abcd+(ad)^2\\ &= (ac)^2+(bd)^2+(bc)^2+(ad)^2\\ &= a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)\\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Jika diambil besar dari $|x|^2=(a^2+b^2)$ dan $|y|^2=(c^2+d^2)$, maka terbukti bahwa besarnya memenuhi persamaan (2.6). Kelompok bilangan yang memenuhi sifat ini disebut Aljabar Hurwitz [5].

Bentuk polar dari suatu bilangan imajiner bisa dituliskan menggunakan berdasarkan persamaan Euler. persamaan Euler memiliki bentuk,

$$e^{i\theta}=cos(\theta)+sin(\theta)i \tag{2.8}$$

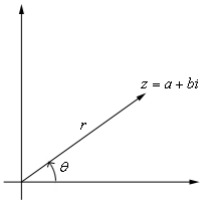
yang dibuktikan pada lampiran A. Sehingga, bilangan komplek z dapat dituliskan berdasarkan besarnya (r) dan sudut fasenya (θ) dalam bentuk

$$z=r\ e^{i\theta}. \tag{2.9}$$

Berdasarkan persamaan (2.9) dapat dilihat bahwa besarnya $|z|=|r|$. Karena,

$$\begin{aligned}|e^{i\theta}| &= e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}}\\ &= e^{i\theta}e^{-i\theta}\\ &= 1.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Maka setiap bilangan komplek memiliki "arah" terkait dengan nilai Sudut fase θ-nya.



Gambar 2.1: Koordinat Polar dari Bilangan Komplek

Dengan meggunakan bentuk polar dari bilangan komplek seperti pada Gambar (2.1), terdapat intrepretasi geometri dari operasi bilangan komplek. Bentuk polar dari bilangan komplek dapat digunakan mendapatkan intrepretasi geometri dari perkalian dua bilangan komplek,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}, \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Hal ini menunjukkan bahwa perkalian dari dua bilangan komplek memiliki besar yang sama dengan hasil perkalian besar setiap kedua bilangan tersebut. Sedangkan, sudut fasenya merupakan hasil penjumlahan dari kedua sudut fase bilangan tersebut [5].

2.2 Bilangan Kuarternion

2.2.1 Sifat dan Aljabar dari Bilangan Kuarternion

Sama seperti bilangan komplek yang dihasilkan dari perluasan bilangan riil ($\mathbb{R}$). Perluasan dari bilangan komplek ($\mathbb{C}$) didapatkan dengan cara memperkenalkan bilangan imajiner baru j yang merupakan akar dari -1. Untuk mengatasi

hasil perkalian antara dua bilangan imajiner i dan j, diperkenalkan bilangan imajiner lain $k \equiv i\,j$ dan menyebut sistem bilangan ini bilangan kuarternion ($\mathbb{H}$). Secara formal, pembangunan bilangan kuarternion ini dilakukan melalui konstruksi Cayley-Dickson,

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\, j. \tag{2.12}$$

Pembagunan ini menunjukkan bilangan kuarternion merupakan gabungan dari bilangan komplek (dengan bilangan imajiner i) dan bilangan komplek yang dikalikan dengan bilangan imajiner baru j. Jika terdapat 4 bilangan riil q_1, q_2, q_3, q_4 yang membentuk 2 bilangan komplek $(q_1 + q_2\, i)$ dan $(q_3 + q_4\, i)$, maka

$$\begin{aligned} q &= (q_1 + q_2 i) + (q_3 + q_4 i) j, \\ &= q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k. \end{aligned} \tag{2.13}$$

merupakan bentuk umum dari kuarternion [5].

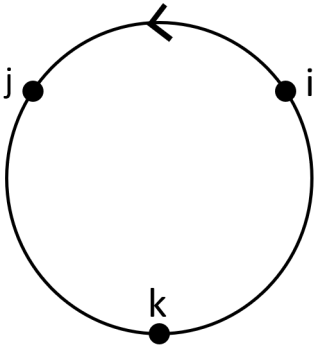
Bilangan imajiner i, j, dan k disebut sebagai unit imajiner kuarternion. Unit imajiner kuarternion ini memiliki sifat antikomut yaitu memenuhi persamaan

$$\begin{aligned} ab + ba &= 0, \\ ab &= -ba \end{aligned} \tag{2.14}$$

dengan a, b merupakan unit imajiner kuarternion ($a, b = i\, j\, k$). Maka, perkalian dari unit kuarternion dapat dituliskan menjadi

$$i\, j = -j\, i = k, \tag{2.15a}$$
$$j\, k = -k\, j = i, \tag{2.15b}$$
$$k\, i = -i\, k = j. \tag{2.15c}$$

Berdasarkan persamaan (2.15), antikomutnya unit kuarternion menunjukkan pertukaran urutan perkalian menghasilkan



Gambar 2.2: Diagram Perkalian antara Unit Kuarternion

perubahan tanda positif dan negatif. Walaupun bilangan kuarternion tidak komutatif, bulangan kuarternion asosiatif.

$$(i\,j)\,k = i\,(j\,k) \tag{2.16}$$

Dapat dilihat pula bahwa perkalian antara unit kuarternion bersifat siklik, sehingga untuk mempermudah perkalian diberikan diagram pada Gambar (2.2). Tanda panah pada diagram (2.2) menunjukkan perkalian antara dua unit kuarternion yang positif, bila dilakukan perkalian pada arah yang melawan panah tersebut, menghasilkan unit kuarternion negatif [5].

Sama seperti bilangan komplek, bilangan kuarternion memiliki besar yang didefenisikan

$$|q|^2 = q\,\bar{q}. \tag{2.17}$$

Didefenisikan pula,

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}, \tag{2.18}$$

yang menunjukkan bahwa setiap bilangan kuarternion bukan nil q memiliki invers yang unik [5].

Pada bilangan kuarternion dapat dilakukan operasi penjumlahan maupun perkalian. Pada operasi penjumlahan dapat digunakan bentuk kuarternion (2.13). Apabila terdapat dua kuarternion $q_1\,, q_2$, maka penjumlahannya adalah

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Berdasarkan sifat tidak komutatifnya bilangan kuarternion, perkalian antara bilangan kuarternion dapat dipermudah dengan mengambil bentuk polar

$$q = r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} j. \tag{2.20}$$

Maka,

$$q_a\, q_b = (r_{1a} e^{i\theta_{1a}} + r_{2a} e^{i\theta_{2a}} j)(r_{1b} e^{i\theta_{1b}} + r_{2b} e^{i\theta_{2b}} j), \tag{2.21a}$$

$$\begin{aligned} &= r_{1a} r_{1b} e^{i(\theta_{1a}+\theta_{1b})} + r_{1a} r_{2b} e^{i(\theta_{1a}+\theta_{2b})} j \\ &+ r_{2a} r_{1b} e^{i\theta_{2a}} j e^{i\theta_{1b}} + r_{2a} r_{2b} e^{i\theta_{2a}} j e^{i\theta_{2b}} j, \end{aligned} \tag{2.21b}$$

$$\begin{aligned} &= r_{1a} r_{1b} e^{i(\theta_{1a}+\theta_{1b})} + r_{1a} r_{2b} e^{i(\theta_{1a}+\theta_{2b})} j \\ &+ r_{2a} r_{1b} e^{i(\theta_{2a}-\theta_{1b})} j - r_{2a} r_{2b} e^{i(\theta_{2a}-\theta_{2b})}. \end{aligned} \tag{2.21c}$$

Perhatikan pada langkah (2.21b) ke (2.21c), digunakan sifat antikomutnya unit kuarternion. Dapat dihitung pula besar dari hasil perkalian antara dua bilangan kuarternion

$$\begin{aligned} |q_a\, q_b|^2 &= (r_{1a}\, r_{1b})^2 + (r_{1a}\, r_{2b})^2 + (r_{2a}\, r_{1b})^2 + (r_{2a}\, r_{2b})^2, \\ &= {r_{1a}}^2({r_{1b}}^2 + {r_{2b}}^2) + {r_{2a}}^2({r_{1b}}^2 + {r_{2b}}^2), \\ &= ({r_{1a}}^2 + {r_{2a}}^2)({r_{1b}}^2 + {r_{2b}}^2), \\ &= |q_a|^2 |q_b|^2. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Pada persamaan (2.22), besar dari hasil perkalian bilangan kuarternion memenuhi sifat dari Aljabar Hurwitz, sehingga bilangan kuarternion merupakan bagian dari Aljabar Hurwitz [5].

Sekawan kuarternion dituliskan

$$\bar{q} = q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k, \tag{2.23}$$

yang mengganti tanda positif menjadi negatif pada setiap unit kuarternion. Adapun menggunakan perhitungan langsungpun dapat diketahui bahwa dua kuarternion q_1, dan q_2 memiliki sifat

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q_1} + \bar{q_2} \tag{2.24}$$

yang menunjukkan bahwa sekawan dari penjumlahan kuarternion adalah penjumlahan dari sekawan kuarternion. Sedangkan sifat dari perkalian sekawan kuarternion dapat dihitung dari hasil perhitungan (2.21c)

$$\begin{aligned}
\overline{q_a\, q_b} &= \overline{r_{1a} r_{1b} e^{i(\theta_{1a}+\theta_{1b})}} + \overline{r_{1a} r_{2b} e^{i(\theta_{1a}+\theta_{2b})} j} \\
&+ \overline{r_{2a} r_{1b} e^{i(\theta_{2a}-\theta_{1b})} j} - \overline{r_{2a} r_{2b} e^{i(\theta_{2a}-\theta_{2b})}} \\
&= r_{1a} r_{1b} e^{-i(\theta_{1a}+\theta_{1b})} - r_{1a} r_{2b}\, j\, e^{-i(\theta_{1a}+\theta_{2b})} \\
&- r_{2a} r_{1b}\, j\, e^{-i(\theta_{2a}-\theta_{1b})} - r_{2a} r_{2b} e^{-i(\theta_{2a}-\theta_{2b})} \\
&= r_{1b} e^{-i\theta_{1b}} (r_{1a} e^{-i\theta_{1a}} - r_{2a} j e^{-i\theta_{2a}}) \\
&+ r_{2b} j\, e^{-i\theta_{2b}} (r_{1a} e^{-i\theta_{1a}} - r_{2a} j e^{-i\theta_{2a}}) \\
&= \overline{(r_{1b} e^{i\theta_{1b}} + r_{2b} e^{i\theta_{2b}} j)}\, \overline{(r_{1a} e^{i\theta_{1a}} + r_{2a} e^{i\theta_{2a}} j)} \\
&= \bar{q}_b\, \bar{q}_a,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

yang menunjukkan sekawan dari hasil kali bilangan kuarternion adalah merupakan hasil kali dari sekawan bilangan kuarternion, namun urutannya dibalik. Berdasarkan persamaan

(2.25), dapat pula diperlajari kasus khusus yang berlaku kepada unit imajiner kuarternion (i, j, k). Apabila diperlakukan hal ini kepada unit imajiner kuarternion dapat diketahui sifat-sifat berikut,

$$\begin{aligned} i\bar{i} &= \overline{-1} = -1 \\ i\bar{i} &= \overline{i}\overline{i} = (-i)(-i) = i^2 = -1 \end{aligned} \tag{2.26a}$$

$$\begin{aligned} i\bar{j} &= \bar{k} = -k \\ i\bar{j} &= \overline{j}\overline{i} = (-j)(-i) = ji = -k \end{aligned} \tag{2.26b}$$

$$\begin{aligned} j\bar{j} &= \overline{-1} = -1 \\ j\bar{j} &= \overline{j}\overline{j} = (-j)(-j) = j^2 = -1 \end{aligned} \tag{2.26c}$$

$$\begin{aligned} j\bar{k} &= \bar{i} = -i \\ j\bar{k} &= \bar{k}\bar{j} = (-k)(-j) = kj = -i \end{aligned} \tag{2.26d}$$

$$\begin{aligned} k\bar{k} &= \overline{-1} = -1 \\ k\bar{k} &= \bar{k}\bar{k} = (-k)(-k) = k^2 = -1 \end{aligned} \tag{2.26e}$$

$$\begin{aligned} k\bar{i} &= \overline{-1} = -j \\ k\bar{i} &= \overline{i}\overline{k} = (-i)(-k) = ik = -j \end{aligned} \tag{2.26f}$$

sedangkan sifat yang tidak dituliskan dapat dihitung sebagai sekawan dari yang telah dituliskan [5].

Jika q' merupakan bilangan imajiner murni yang memiliki bentuk

$$q' = b\,i + c\,j + d\,k, \tag{2.27}$$

maka dapat dihitung pula kuadratnya q'^2

$$\begin{aligned} q'^2 &= (b\,i + c\,j + d\,k)(b\,i + c\,j + d\,k), \\ &= -b^2 - c^2 - d^2 + bc(ij + ji) + bd(ik + ki) + cd(jk + kj), \\ &= -b^2 - c^2 - d^2 + bc(ij - ij) + bd(ik - ik) + cd(jk - jk), \\ &= -b^2 - c^2 - d^2, \end{aligned} \tag{2.28}$$

yang menunjukkan bahwa nilai kuadrat dari bagian imajiner kuarternion ternyata bernilai negatif [5].

Bilangan kuarternion dapat dibagikan pula, namun cara dibagikannya tidak sama dengan bilangan komplek. Hal ini dikarenakan bilangan komplek yang komutatif, sedangkan bilangan kuarternion tidak memiliki sifat komutatif. Sehingga perkalian antara kuarternion q_1 dan x yang menghasilkan kuarternion q_2 memiliki dua cara perkalian,

$$q_1 x = q_2, \tag{2.29a}$$
$$x q_1 = q_2. \tag{2.29b}$$

Solusi dari persamaan (2.29a) sebagai *left quotient* atau "hasil bagi kiri" dari q_2 oleh q_1 yang dituliskan dengan x_l,

$$\begin{aligned} |q_1|^2 x_l &= \bar{q_1} q_2 \\ x_l &= \frac{\bar{q_1} q_2}{|q_1|^2}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Sedangkan, solusi dari persamaan (2.29b) disebut sebagai *right quotient* atau "hasil bagi kanan"dari q_2 oleh q_1 yang dituliskan dengan x_r,

$$\begin{aligned} x_r |q_1|^2 &= q_2 \bar{q_1} \\ x_r &= \frac{q_2 \bar{q_1}}{|q_1|^2}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Sedangkan pada kasus bilangkan komplek, nilai dari bilangan hasil bagi kiri dan kanan memiliki nilai yang sama, karena sifat perkaliannya yang komutatif [6]

2.2.2 Pemetaan Konjugasi dalam Kuarternion

Secara umum sekawan kuarternion dapat mengganti tanda positif menjadi tanda negatif (dan sebaliknya) pada bagian

imajiner dari bilangan kuarternion. Dimana nilai negatif dan positifnya setiap suku bergantung dari sudut fase bilangan kuarternion bila dituliskan dalam bentuk polarnya seperti pada persamaan (2.20). Pemetaan konjugasi dapat diperkenalkan sebagai pemetaan yang dapat mengubah sudut fase dalam bilangan kuarternion (seperti rotasi pada bidang unit imajiner kuarternion) tanpa mengubah besarnya. Sehingga, pemetaan ini dapat mengubah tanda positif menjadi negatif pada suku tertentu saja dalam bilangan kuarternion. Oleh karena itu, pemetaan konjugasi dapat dikatakan sebagai perluasan dari sekawan kuarternion. Pemetaan ini dapat dilakukan dengan menggunakan cara memetakan bilangan kuarternion sembarang q oleh bilangan kuarternion p yang memiliki besar 1 ($|p|^2 = 1$),

$$q \to q' = pqp^{-1}. \tag{2.32}$$

Perlu diperhatikan bahwa, bila diambil q dan p pada sebagai bilangan riil atau komplek, maka dapat digunakan sifat komutatif,

$$\begin{aligned} q' &= pqp^{-1}, \\ &= pp^{-1}q, \\ &= q, \end{aligned} \tag{2.33}$$

yang menunjukkan bahwa pemetaan konjugasi ini tidak mengubah bilangan riil atau komplek. Secara formal, pemetaan konjugasi dikatakan ekivalen dengan operasi identitas [5].

Untuk mempertahankan besar bilangan kuarternionnya, digunakan p yang memiliki besar 1. Jenis bilangan ini disebut juga unit kuarternion yang dapat dituliskan dalam bentuk $e^{u\theta}$ dengan u merupakan unit kuarternion i, j, atau k. Untuk mendemonstrasikan pemetaan konjugasi, diberikan contoh pe-

metaan konjugasi q oleh $e^{i\theta}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} q &\rightarrow e^{i\theta} q e^{-i\theta} \\ &= e^{i\theta}(r_1 e^{i\alpha} + r_2 e^{i\beta} j) e^{-i\theta} \\ &= e^{i\theta}(r_1 e^{i\alpha} + r_2 e^{i\beta} j) e^{-i\theta} \\ &= e^{i\theta} r_1 e^{i\alpha} e^{-i\theta} + e^{i\theta} r_2 e^{i\beta} j e^{-i\theta} \\ &= r_1 e^{i\alpha} + e^{i\theta} r_2 e^{i\beta} e^{i\theta} j \\ &= r_1 e^{i\alpha} + r_2 e^{i(\beta+2\theta)} j. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Contoh ini menujukkan bahwa pemetaan konjugasi oleh unit kuarternion $e^{i\theta}$ menyebabkan rotasi sebesar (2θ) pada bidang (j,k) yang tegak lurus dengan i. Sedangkan, pemetaan konjugasi oleh unit kuarternion $e^{j\theta}$ menyebabkan q

$$\begin{aligned} q &\rightarrow e^{j\theta} q e^{-j\theta} \\ &= e^{j\theta}(r_1 e^{j\alpha} + r_2 e^{j\beta} k) e^{-j\theta} \\ &= e^{j\theta}(r_1 e^{j\alpha} + r_2 e^{j\beta} k) e^{-j\theta} \\ &= e^{j\theta} r_1 e^{j\alpha} e^{-j\theta} + e^{j\theta} r_2 e^{j\beta} k e^{-j\theta} \\ &= r_1 e^{j\alpha} + e^{j\theta} r_2 e^{j\beta} e^{j\theta} k \\ &= r_1 e^{j\alpha} + r_2 e^{j(\beta+2\theta)} k, \end{aligned} \tag{2.35}$$

berotasi sejauh 2θ. Serta, pemetaan konjugasi oleh unit kuarternion $e^{j\theta}$ menyebabkan q

$$\begin{aligned} q &\rightarrow e^{k\theta} q e^{-k\theta} \\ &= e^{k\theta}(r_1 e^{k\alpha} + r_2 e^{k\beta} i) e^{-k\theta} \\ &= e^{k\theta}(r_1 e^{k\alpha} + r_2 e^{k\beta} i) e^{-k\theta} \\ &= e^{k\theta} r_1 e^{k\alpha} e^{-k\theta} + e^{k\theta} r_2 e^{k\beta} i e^{-k\theta} \\ &= r_1 e^{k\alpha} + e^{k\theta} r_2 e^{k\beta} e^{k\theta} i \\ &= r_1 e^{k\alpha} + r_2 e^{k(\beta+2\theta)} i, \end{aligned} \tag{2.36}$$

berotasi sejauh 2θ pada bidang (i,j) [14].

Terdapat pemetaan khusus yang disebut *flip*, yang menyebabkan bidang berotasi sejauh 2π. Pemetaan ini bisa dilakukan dengan memasukan nilai π sebagai sudut fase pengkonjugasi. Maka, nilai dari bilangan dalam bidang (j,k) menjadi minus dari nilai sebelum pemetaan ini, oleh karena itu disebut *flip* [14].

2.3 Oktonion

2.3.1 Sifat dan Aljabar dari Bilangan Oktonion

Menggunakan konstruksi Cayley-Dickson, bilangan kuarternion ($\mathbb{H}$) dapat diperluas menjadi bilangan hiperkomplek yang lebih tinggi yang disebut bilangan oktonion ($\mathbb{O}$). Bilangan oktonion dapat dibangun dari bilangan kuarternion dan diperkenalkan bilangan imajiner baru l. Secara formal konstruksi Cayley-Dicksonnya dapat dituliskan menjadi,

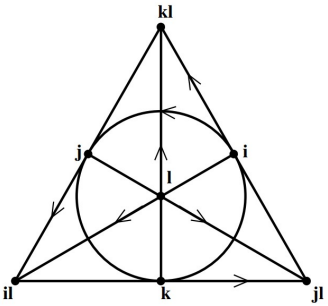
$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\, l. \tag{2.37}$$

Sehingga, dua bilangan kuarternion sembarang $(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k)$, dan $(x_4 + x_5 i + x_6 j + x_7 k)$ dapat digunakan untuk membangun bilangan oktonion sembarang,

$$\begin{aligned} x &= (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) + (x_4 + x_5 i + x_6 j + x_7 k) l, \\ &= x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4 kl + x_5 jl + x_6 il + x_7 l. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Oleh karena itu, bilangan Oktonion ($\mathbb{O}$) merupakan jenis bilangan hiperkompleks yang memiliki 7 suku imajiner (i, j, k, l, kl, jl, il) [5].

Pada bilangan hiperkompleks, penting untuk mengetahui operasi antar unit oktonionnya, matematikawan biasanya menggunakan diagram pada Gambar 2.3 yang disebut bidang Fano



Gambar 2.3: Bidang Fano

(*Fano plane*). Perkalian dari unit oktonion i, j, dan k masih sama seperti kuaternion, yang dilambangkan oleh lingkaran pada Gambar 2.3. Sedangkan, perkalian antar unit oktonion dilambangkan oleh garis pada bidang Fano ini. Sebuah garis pada bidang Fano menunjukan sub-kuarternion dari oktonion. Untuk mendemonstrasikan perkaliannya diberikan contoh-contoh sebagai berikut,

$$k \cdot l = (kl) \tag{2.39a}$$
$$l \cdot (kl) = k \tag{2.39b}$$
$$(kl) \cdot k = l, \tag{2.39c}$$

dan setiap hasil kali ini antikomut, artinya, pertukaran urutan perkalian menghasilkan tanda minus yang juga merupakan sifat dari kuarternion. Adapun sifat asosiatif kuarternion yang tidak dimiliki oleh oktonion, contohnya adalah bila diambil 3 unit oktonion i, j, dan l,

$$(i \cdot j) \cdot l = k \cdot l = (kl) \tag{2.40}$$
$$i \cdot (j \cdot l) = i \cdot (jl) = -(kl) \tag{2.41}$$

yang menunjukkan hasil perkalian kiri dan kanan mempengaruhi hasil perkaliannya. Namun, oktonion memiliki sifat asosiatif yang lebih lemah yang disebut alternatif. Sifat alternatif oktonion berlaku bila diambil 2 oktonion (misalnya x, dan y), maka berlaku

$$(xy)x = x(yx), \tag{2.42a}$$
$$(xy)y = xy^2. \tag{2.42b}$$

Sifat ini juga berlaku kepada sekawannya. Sehingga persamaan (2.42), dapat dituliskan pula menjadi,

$$\begin{aligned}(xy)\bar{x} &= x(y\bar{x}),\\ (xy)\bar{y} &= x|y|^2.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Sifat ini berlaku karena operasi ini berada dalam subkuarternion dari oktonion.

Bilangan Oktonion ($\mathbb{O}$) merupakan bagian dari Aljabar Hurwitz. Suatu sistem bilangan dikatakan merupakan bagian dari Aljabar Hurwitz bila besarnya hasil kali antara dua oktonion sama dengan hasil kali dari besarnya dua oktonion tersebut. Untuk membuktikan ini dimisalkan suatu unit imajiner oktonion a, dan b sembarang dengan bentuk,

$$\begin{aligned}a &= \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_4(kl) + a_5(jl) + a_6(il) + a_7(l)}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2 + {a_5}^2 + {a_6}^2 + {a_7}^2}},\\ b &= \frac{b_1 i + b_2 j + b_3 k + b_4(kl) + b_5(jl) + b_6(il) + b_7(l)}{\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 + {b_4}^2 + {b_5}^2 + {b_6}^2 + {b_7}^2}}.\end{aligned} \tag{2.44}$$

Sehingga dapat dibentuk bilangan oktonion x dan y dari kedua unit imajiner tersebut,

$$\begin{aligned}x &= |x|e^{a\theta},\\ y &= |y|e^{b\phi}.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Kemudian dapat dicari besar dari perkalian x dan y,

$$\begin{aligned} |xy|^2 &= (xy)\overline{(xy)}, \\ &= (|x|\,|y|e^{a\theta}\,e^{b\phi})\overline{(|x|\,|y|e^{a\theta}\,e^{b\phi})}, \\ &= (|x|\,|y|e^{a\theta}e^{b\phi})(|x|\,|y|e^{-b\phi}e^{-a\theta}), \\ &= |x|^2|y|^2(e^{a\theta}e^{b\phi}e^{-b\phi}e^{-a\theta}), \\ &= |x|^2|y|^2. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Oleh karena itu, terbukti bahwa bilangan oktonion merupakan bagian dari Aljabar Hurwitz [14].

Sama seperti bilangan kuarternion, bilangan oktonion juga merupakan bilangan yang tidak komutatif. Oleh karena itu, sama seperti bilangan kuarternion pula, bilangan oktonion memiliki dua jenis hasil pembagian, hasil bagi kiri dan hasil bagi kanan oktonion. Hasil bagi kiri oktonion x_l merupakan solusi dari persamaan oktonion,

$$\begin{aligned} q_1 x_l &= q_2 \\ \bar{q_1} q_1 x_l &= \bar{q_1} q_2 \\ |q_1|^2 x_l &= \bar{q_1} q_2 \\ x_l &= \frac{\bar{q_1} q_2}{|q_1|^2}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Sedangkan yang dimaksud dengan hasil bagi kanan x_r merupakan solusi dari persamaan oktonion,

$$\begin{aligned} x_r q_1 &= q_2 \\ x_r q_1 \bar{q_1} &= q_2 \bar{q_1} \\ x_r |q_1|^2 &= q_2 \bar{q_1} \\ x_r &= \frac{q_2 \bar{q_1}}{|q_1|^2}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Dimana bilangan oktonion q_1 tidak boleh bernilai 0 [6].

2.3.2 Pemetaan Konjugasi dalam Oktonion

Sama seperti kuarternion, operasi dapat konjugasi dilakukan. Namun pengaruh dari konjugasi tidak hanya merotasikan 1 bidang, Untuk mendemonstrasikan, dilakukan operasi konjugasi oleh unit oktonion $e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} q &\rightarrow e^{i\theta}qe^{-i\theta} \\ &= e^{i\theta}(r_1e^{i\phi_1} + r_2e^{i\phi_2}j \\ &+ r_3e^{i\phi_3}(kl) + r_4e^{i\phi_4}l)e^{-i\theta} \\ &= e^{i\theta}r_1e^{i\phi_1}e^{-i\theta} + e^{i\theta}r_2e^{i\phi_2}je^{-i\theta} \\ &+ e^{i\theta}r_3e^{i\phi_3}(kl)e^{-i\theta} + e^{i\theta}r_4e^{i\phi_4}le^{-i\theta} \\ &= r_1e^{i\phi_1} + r_2e^{i(\phi_2+2\theta)}j \\ &+ r_3e^{i(\phi_3+2\theta)}kl + r_4e^{i(\phi_4+2\theta)}l \end{aligned} \tag{2.49}$$

Hal ini menujukkan, konjugasi oleh unit oktonion menyebabkan rotasi pada tiga bidang unit oktonion. Pada (2.49) rotasi terjadi pada bidang (j,k), (kl,jl), dan (l,il) [5].

Supaya bisa merotasikan salah satu bidang saja dapat digunakan konsep geometri yang menyebutkan dua kali refleksi pada suatu bidang sama dengan rotasi. Untuk melakukan rotasi sejauh θ dilakukan refleksi terhadap salah satu garis (yang melewati titik pusat bidang), lalu dilakukan refleksi lagi terhadap garis lain yang memiliki sudut $\theta/2$ dari garis pertama. Pada kasus bidang imajiner (u,v), dapat digunakan flip terhadap unit oktonion u, karena flip merupakan rotasi oleh sejauh π rad yang setara dengan refleksi. Untuk melakukan refleksi terhadap garis yang memiliki sudut $\theta/2$ terhadap garis refleksi awalnya, dapat digunakan flip terhadap unit oktonion $ucos(\frac{\theta}{2}) + vsin(\frac{\theta}{2})$. Sehingga, transformasi ini dapat tuliskan menjadi

$$
\begin{aligned}
q \to & (ucos(\frac{\theta}{2}) + vsin(\frac{\theta}{2}))(uq(-u))(-ucos(\frac{\theta}{2}) - vsin(\frac{\theta}{2})) \\
& = (ucos(\frac{\theta}{2}) + vsin(\frac{\theta}{2}))(uqu)(ucos(\frac{\theta}{2}) + vsin(\frac{\theta}{2})).
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

Bila diambil q $\in \mathbb{H}$, dan dilakukan rotasi pada bidang (i,j). Maka persamaan (2.50) menjadi asosiatif, dan dapat dituliskan menjadi

$$
\begin{aligned}
& (icos(\frac{\theta}{2}) + jsin(\frac{\theta}{2}))(iqi)(icos(\frac{\theta}{2}) + jsin(\frac{\theta}{2})) \\
& = (-cos(\frac{\theta}{2}) - k\,sin(\frac{\theta}{2}))q(-cos(\frac{\theta}{2}) + ksin(\frac{\theta}{2})) \\
& = e^{k\theta} q e^{-k\theta}.
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

Hal ini menunjukkan bahwa bila *double flip* terhadap bidang (u,v) bekerja pada kuarternion sama dengan pemetaan konjugasi oleh unit oktonion (uv). Transformasi dalam bentuk ini disebut pulang *nesting*, karena bentuk transformasinya yang menyerupai sangkar (*nest*) [5].

Halaman ini sengaja dikosongkan

Bab 3

Grup Lie, dan Aljabar Lie

3.1 Grup dan Grup Lie

3.1.1 Grup dan Representasinya

Teori grup merupakan perangkat paling efektif dalam memahami permasalahan dibidang kristalografi dan fisika partikel. Menggunakan teori grup dapat dihindari kerumitan matematis yang tidak perlu didalam proses perhitungan. Teori grup digunakan dengan memperhatikan simetri sistem fisis yang bersangkutan [8].

Grup sendiri merupakan himpunan $\mathrm{G} = g_1, g_2, g_3, \ldots, g_i, \ldots$ yang beroperasi dengan suatu produk biner. Maksudnya operasi biner adalah yang operasi yang bekerja dengan dua anggota himpunan. Contoh dari operasi biner adalah penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Grup ini memiliki sifat-sifat sebagai berikut,

- Tertutup (*Closure*). Sifat ini memastikan bahwa produk dari elemen grup G merupakan anggota grup G. Sehing-

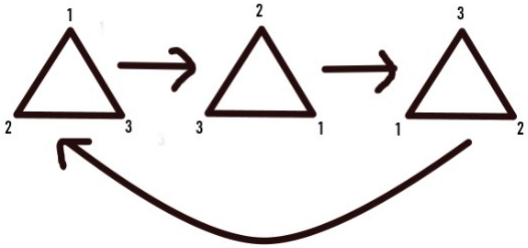
ga memenuhi hubungan,

$$g_i \circ g_j = g_k \in G \tag{3.1}$$

- Identitas. Sifat ini memastikan terdapat elemen e $\in G$ yang disebut elemen identitas. Elemen ini memenuhi hubungan,
$$e \circ g_i = g_i \circ e = g_i \tag{3.2}$$
- Invers. Sifat ini memastikan terdapat elemen invers g_i^{-1} untuk setiap g_i sehingga produk keduanya adalah elemen identitas. Sehingga memenuhi hubungan,
$$g_i^{-1} \circ g_i = e \tag{3.3}$$
- Asosiatif. Sifat ini memastikan bahwa untuk setiap elemen grup sembarang g_i, g_j, g_k memenuhi hubungan
$$(g_i \circ g_j) \circ g_k = g_i \circ (g_j \circ g_k). \tag{3.4}$$

Perlu diketahui secara umum $g_i \circ g_j \neq g_j \circ g_i$. Artinya, hasil produk antara elemen grup tidak komutatif. Sehingga, perlu diperhatikan urutan dari operasi produk antara elemennya. Adapun jenis grup yang memenuhi sifat komutatif, grup dengan sifat ini disebut grup abelian (*Abelian Group*) [9].

Salah satu contoh dari grup adalah rotasi titik sudut dari segitiga yang mempertahankan bentuk awal segitiganya. Pada grup ini operasi binernya adalah rotasi berurutan. Sedangkan, untuk mengetahui anggota himpunan dari grup ini dapat diperhatikan Gambar (3.1.1), yang setiap tanda panah menunjukkan rotasi sejauh 120° atau $\frac{2\pi}{3}$. Berdasarkan Gambar (3.1.1), dapat dilihat bahwa rotasi sejauh 120° atau $\frac{2\pi}{3}$ (R), pengulangannya sebanyak 2 kali yang menghasilkan rotasi 240° (R^2), dan 3 kali yang menghasilkan rotasi 360° (R^3)



Gambar 3.1: Rotasi Segitiga

yang beroperasi pada segitiga tersebut membentuk suatu grup yang disebut Grup Siklik Berorde 3 atau C_3. Identitas dari grup ini didapatkan dengan tidak melakukan rotasi sama sekali (e) atau melakukan rotasi sebanyak 3 kali, secara matematis $R^3 = e$. Adapun rotasi yang menjadi invers dari rotasi lain. Misalnya sekali rotasi (sejauh 120°), memiliki invers berupa rotasi sebanyak 2 kali (120°). Sedangkan untuk mengetahui sifat tertutup dan asosiatif dari grup ini dapat dipermudah dengan membentuk tabel operasi (yang disebut pula tabel Cayley) seperti pada Tabel (3.1). Menggunakan tabel tersebut, dapat dilihat bahwa operasi antara setiap dua anggota himpunan dari grup C_3 menghasilkan anggota himpunan grup ini pula, jadi sifat tertutup/*closure* terpenuhi. Sifat asosiatif dipenuhi pula oleh ketiga anggota grup ini [9].

Contoh lain himpunan yang membentuk grup adalah bilangan bulat modulo 3 $\{0, 1, 2\}$ dibawah operasi penjumlahan, serta $\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$ dibawah operasi pekalian. Uniknya, kedua grup ini memiliki tabel Cayley yang sama dengan grup rotasi segitiga yang sesuai dengan Tabel (3.1). Hal ini dapat dilihat dengan jelas bila diambil nilai R yang tepat. Pada grup dengan himpunan bilangan bulat modulo 3 $\{0, 1, 2\}$ dibawah operasi penjumlahan, dapat diambil nilai $R \equiv 1$. Sedangkan

Tabel 3.1: Tabel Operasi Grup C_3

$\circ$	R	R^2	R^3
R	R^2	R^3	R
R^2	R^3	R	R^2
R^3	R	R^2	R^3

pada grup dengan himpunan $\{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$ dibawah operasi pekalian, dapat diambil $R \equiv e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Ini menunjukkan bahwa ketiga grup yang telah disebutkan sebelumnya sama-sama menjelaskan grup C_3. Sehingga, suatu grup ternyata dapat dituliskan atau direpresentasikan dengan banyak cara. Ketiga penulisan yang telah disebutkan sebagai Representasi Grup C_3. [9].

Representasi grup, secara formal, adalah representasi matematis grup dalam suatu sistem. Dalam fisika terdapat 3 representasi matrik dari grup yang sering digunakan,

1. Representasi Fundamental Merupakan representasi matrik dari grup yang memiliki ukuran sesuai dengan orde dari grup tersebut.

2. Representasi Adjoint Merupakan representasi matrik dari grup yang memiliki ukuran sesuai dengan konstanta strukur aljabar dari grup tersebut.

3. Representasi Spinor Merupakan representasi matrik yang bekerja ke suatu objek yang disebut spinor.

Penjelasan ini akan dibahas lebih lanjut pada bagian berikutnya [9].

3.1.2 Grup Lie

Grup kontinu merupakan grup yang memiliki tak hingga elemen grup dan elemen-elemen dalam grup ini dapat dipa-

rameterisasi dengan satu atau lebih variabel kontinu. Grup Kontinu yang banyak digunakan dalam fisika adalah grup Lie. Grup Lie secara sederhana dapat diartikan sebagai grup kontinu yang dapat diparameterisasi oleh n variabel parameter riel $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Bila $g_i \in G$, maka elemen grup G dapat dituliskan sebagai,

$$g_i \equiv g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{3.5}$$

adapun elemen identitas e didefenisikan sebagai

$$e = g(0, 0, \ldots, 0). \tag{3.6}$$

Grup Lie disebut kompak bila jumlah parameter yang melabeli setiap elemennya berhingga, dan nonkompak bisa tak behingga [8].

Elemen $g(\epsilon)$ dari suatu grup lie 1-parameter dapat melakukan tranformasi yang dekat identitas I yang dituliskan

$$g(\epsilon) = I + i\epsilon H. \tag{3.7}$$

H merupakan suatu objek yang disebut generator. Apabila transformasi kecil ini dilakukan berulang-ulang, dapat dibangkitkan transformasi sembarang $h(\theta)$,

$$h(\theta) = (I + i\epsilon H)(I + i\epsilon H)(I + i\epsilon H)\cdots = (I + i\epsilon H)^k. \tag{3.8}$$

Simbol k menunjukkan seberapa banyak diulangnya transformasi ini. Jika θ merupakan suatu parameter berhingga sembarang dan N merupakan angka sangat besar, maka didapatkan hubungan berikut,

$$\epsilon = \frac{\theta}{N}. \tag{3.9}$$

Sedangkan persamaan (3.7) dapat dituliskan menjadi,

$$g(\theta) = I + i\frac{\theta}{N}H. \tag{3.10}$$

Transformasi $g(\theta)$ merupakan transformasi infinitesimal, oleh karena itu diinginkan $N \to \infty$. Untuk mendapatkan transformasi berhingga dari transformasi infinitesimal, perlu diulang sebanyak tak-hingga kali transformasi infinitesimalnya

$$g(\theta) = \lim_{N\to\infty} (I + i\frac{\theta}{N}H)^N. \tag{3.11}$$

Sehingga anggota sembarang dari grup Lie dengan 1-parameter dapat dituliskan sebagai,

$$h(\theta) = exp(i\theta H). \tag{3.12}$$

Bentuk eksponen ini menghubungkan anggota grup Lie dan generator generatornya [11].

Secara umum, apabila terdapat grup Lie dengan n buah parameter, grup ini memiliki n generator. Hal ini dikarenakan setiap generator merupakan anggota grup yang melakukan transformasi infinitesimal untuk setiap parameternya. Generator ke-j dari grup lie n-parameter dapat dituliskan sebagai berikut,

$$g(0, 0, \ldots, \epsilon, \ldots, 0) = I + i\epsilon H_j. \tag{3.13}$$

Apabila θ_j adalah parameter ke-j dari grup ini maka,

$$h(0, 0, \ldots, \theta_j, \ldots, 0) = exp(i\theta_j H_j). \tag{3.14}$$

Menggunakan cara yang sama, dapat diketahui anggota sembarang dari grup ini yang dibangkitkan oleh n generator sebagai berikut,

$$h(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = exp(i\sum_{k=1}^{n} \theta_k H_k) \equiv exp(i\theta_k H_k). \tag{3.15}$$

Pada persamaan (3.15), digunakan notasi Einstein yang menunjukkan bila terdapat indeks yang berulang, maka suku tersebut dijumlahkan untuk setiap indeksnya. Pada kasus ini,

indeks j berjalan dari 1 sampai dengan n yang menunjukkan penjumlahan seluruh parameter dan generatornya [11].

Munggunakan persamaan (3.15), dapat dicari tahu kembali generator suatu grup, apabila diketahui bentuk umum transformasi dari suatu grup. Apabila ingin mengetahui bentuk generator ke-j dari bentuk umum tersebut, dapat digunakan turunan pertama dari eksponensial tersebut terhadap parameter ke-j

$$\frac{\partial(exp(i\theta_k H_k))}{\partial\theta_j} = iH_j exp(i\theta_k H_k). \tag{3.16}$$

Namun masih terdapat eksponensial dalam bentuk ini, sehingga perlu diambil nilai semua parameternya 0, supaya nilai bagian eksponennya bernilai 1

$$\frac{\partial(exp(i\theta_k H_k))}{\partial\theta_j}|_{\alpha=0} = iH_j. \tag{3.17}$$

Sehingga,

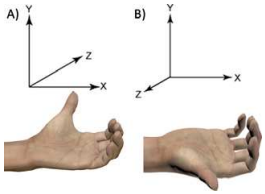
$$H_j = -i\frac{\partial(exp(i\theta_k H_k))}{\partial\theta_j}|_{\alpha=0} \tag{3.18}$$

yang dapat menghitung bentuk generator suatu grup ke-j apabila diketahui bentuk umum dari anggota suatu grup [11].

3.2 Grup Ortogonal Spesial

3.2.1 Defenisi Grup SO(N)

Grup ortogonal merupakan grup yang berisikan transformasi yang mempertahankan orientasinya (*orientation preserving*) dan panjang vektor yang ditransformasikannya, grup ini juga disebut grup rotasi. Orientasi menunjukkan ke-"tangan-kiri"-an atau ke-"tangan-kanan"-an dari suatu koordinat. Contoh koordinat tangan kiri dan tangan kanan dapat dilihat pada



Gambar 3.2: Ilustrasi orientasi Koordinat

gambar (3.2). Ini artinya ketika ditransformasikan koordinat yang dipakai untuk mendeskripsikan suatu objek tetap memiliki ke-"tangan-kiri"-an atau ke-"tangan-kanan"-an yang sama [5].

Untuk mempelajari grup ini, misalkan terdapat vektor v dalam ruang vektor n-dimensi,

$$v = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T \tag{3.19}$$

dipetakan menjadi $w = M\,v$, dengan M memiliki bentuk

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+ & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

dengan anggota dari matrik M dan kompenen dari vektor v merupakan bilangan riil. Besar dari vektor v dapat dihitung,

$$\begin{aligned} |v|^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T, \\ &= v^T\,v. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Misalkan vektor w merupakan hasil transformasi M kepada vektor v,

$$w = M\,v. \tag{3.22}$$

Maka dapat dihitung pula,

$$w^T\, w = (M\, v)^T\, (M\, v) = v^T M^T R v. \tag{3.23}$$

Supaya memenuhi sifat dari grup ini, harus dipenuhi

$$M\, M^T = M^T M = I_n. \tag{3.24}$$

Sehingga panjangnya vektor w tetap. Mengingat determinan tidak berubah oleh operasi transponse, maka berlaku

$$\begin{aligned} &det(M^T) = det(M), \\ &det(M)^2 = det(I_n), \\ &det(M) = \pm 1. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Oleh karena itu, grup ortogonal dapat didefenisikan sebagai berikut:

$$O(N) = \{M \in \mathbb{R}^{N\times N} | M\, M^T = I_2\}, \tag{3.26a}$$

$$SO(N) = \{M \in \mathbb{R}^{N\times N} | M\, M^T = I_2, det(M) = 1\}. \tag{3.26b}$$

O merupakan singkatan dari ortogonal, sedangkan SO merupakan singkatan dari *Special Ortogonal*. Alasan digunakannya $det(M) = 1$ daripada -1 adalah syarat grup (3.1) yang tidak terpenuhi jika diambil pemilihan -1 [5].

Grup SO(N) merotasikan setiap bidang dalam ruang vektor $\mathbb{R}^N$. Untuk menghitung jumlah jenis rotasi pada grup ini, dapat dihitung menggunakan jumlah bidang dalam ruang vektor tempat bekerjanya. Dalam ruang vektor $\mathbb{R}^N$ terdapat N sumbu (misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_N$), dan setiap bidang terbentuk dari 2 sumbu (misalkan (x_a, x_b)). Perhitungan jumlah bidang ini ekivalen dengan permasalahan kombinasi dari N sumbu dan hanya bisa diambil 2 sumbu yang membentuk suatu bidang. Oleh karena itu

$$|SO(N)| = \begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{N!}{2!\,(N-2)!}, \tag{3.27}$$

adalah jumlah dari jenis rotasi yang ada dalam grup SO(N). Pada setiap bidang rotasi dapat dipadankan dengan satu parameter. Sehingga jumlah generatorya sama dengan jumlah bidang yang dirotasikan grup ini [8].

3.2.2 SO(2)

Untuk mempelajari lebih dekat mengenai grup SO(N), diperkenalkan grup SO(2). Grup ini adalah grup yang merotasikan suatu benda dalam suatu bidang. Hal ini juga terlihat berdasarkan persamaan 3.27 jika diambil nilai N = 2. Yang menunjukkan rotasi ini hanya merotasikan sesuatu dalam satu bidang saja. Dalam bidang ini, dapat digunakan basis vektor $\hat{x}$ dan $\hat{y}$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Apabila terdapat rotasi pada bidang ini, menggunakan konsep transformasi rotasi dari geometri yang merotasikan titik (x,y) menjadi (x',y') sejauh α. Dapat dituliskan transformasinya sebagai berikut,

$$\begin{aligned} x' &= cos(\alpha)\, x + sin(\alpha)\, y, \\ y' &= -sin(\alpha)\, x + cos(\alpha)\, y. \end{aligned} \tag{3.29}$$

yang merotasikan titik (x,y) berlawanan arah jarum jam. x' dapat diaggap sebagai basis dan dituliskan dalam bentuk basis vektor,

$$\begin{aligned} \hat{x'} &= cos(\alpha)\hat{x} + sin(\alpha)\hat{y} \\ &= cos(\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + sin(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dengan cara yang sama dapat dituliskan pula,

$$\hat{y'} = \begin{pmatrix} -sin(\alpha) \\ cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Dalam bentuk matrik, transformasi rotasi pada bidang (x,y) ini dapat dituliskan menjadi,

$$R_{(xy)} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Matrik inilah yang merupakan anggota grup umum dari SO(2) [8].

Menggunakan persamaan (3.18), dapat dihitung generator J dari grup ini

$$\begin{aligned} J &= -i\frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}|_{\alpha=0} \\ &= -i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Karena hanya terdapat satu parameter saja pada grup ini, maka hanya terdapat satu generator saja. Cara penulisan transformasi akibat grup SO(2) seperti ini disebut *defining representation* (representasi defenisi) atau representasi fundamental. Karena, pembangunan representasinya berdasarkan defenisi dari grup ini [5].

3.2.3 SO(3)

Grup SO(3) merotasikan 3 basis pada ruang 3 dimensi $\mathbb{R}^3$. Dalam bidang ilmu matematika, grup SO(3) juga disebut grup

B_1. Basis-basis yang dirotasikan adalah $\hat{x}\,\hat{y}\,\hat{z}$. Ketiga basis merupakan basis yang ortonormal. Menggunakan persamaan (C.5), ketiga basis ini dituliskan menjadi

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

Ketiga basis ini mengalami rotasi akibat transformasi oleh grup SO(3) [5].

Menggunakan konsep rotasi suatu bidang dalam geometri yang mentransformasikan titik (x,y,z) menjadi (x',y',z') dengan

$$\begin{aligned} x' &= cos(\alpha)\, x + sin(\alpha)\, y, \\ y' &= -sin(\alpha)\, x + cos(\alpha)\, y, \\ z' &= z \end{aligned} \tag{3.35}$$

yang merotasikan titik (x,y) sejauh α berlawanan arah jarum jam. x' dapat diaggap sebagai basis dan dituliskan dalam bentuk (3.34),

$$\begin{aligned} \hat{x'} &= cos(\alpha)\hat{x} + sin(\alpha)\hat{y} + 0\hat{z} \\ &= cos(\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + sin(\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} cos(\alpha) \\ sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Dengan cara yang sama dapat dituliskan pula,

$$\hat{y'} = \begin{pmatrix} -sin(\alpha) \\ cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Sedangkan basis $\hat{z'}$ tidak mengalami perubahan. Dalam bentuk matrik, transformasi rotasi pada bidang (x,y) ini dapat dituliskan menjadi,

$$R_{(xy)} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Menggunakan metode yang sama dapat pula dituliskan rotasi pada bidang lainnya yaitu,

$$R_{(xz)} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & 0 & -sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\alpha) & 0 & cos(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{3.39a}$$

$$R_{(yz)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{3.39b}$$

Serta generator J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}

$$J_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.40a}$$

$$J_{xz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.40b}$$

$$J_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.40c}$$

yang dapat dihitung menggunakan cara yang sama yang ditunjukkan oleh persamaan (3.33). Bila ketiga generator atau transformasi dari grup ini dibandingkan dengan generator SO(2), dapat dilihat bahwa ketiga generator atau transformasi ini dapat dibangun dengan menanamkan generator atau SO(2) ke

matrik berukuran 3×3. Hal ini disebabkan grup SO(2) merupakan subgrup dari SO(3). Secara umum, hal ini juga berlaku, yaitu suatu grup dapat dibangun dari subgrupnya [11].

Generator J_{xy}, J_{xz}, dan J_{yz} dapat dipelajari sifatnya dengan memperkenalkan operasi komutator $[a, b] = ab - ba$. Bila terdapat a, dan b dan memenuhi [a,b]=0, maka a, dan b dikatakan komut. Sifat dari operasi komutator ini adalah antrisimetrik saat ditukar urutan operasinya ($[a, b] = -[b, a]$) [9].

Untuk mempermudah perhitungan dapat diambil notasi baru $J_1 \equiv -J_{xz}$, $J_2 \equiv J_{xy}$, dan $J_3 \equiv J_{yz}$. Operasi Komutator antara J_1 dan J_2 dapat dihitung menjadi $[J_1, J_2]$

$$\begin{aligned}
[J_1, J_2] &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\
&= iJ_3.
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama didapatkan bahwa

$$[J_3, J_1] = iJ_2 \tag{3.41}$$

$$[J_2, J_3] = iJ_1 \tag{3.42}$$

Ketiga hubungan komutasi di atas dari generator J_1, J_2, J_3 ditambah setiap generatornya yang komut dengan dirinya sendiri, disebut sebagai aljabar so(3). Dalam bentuk kompak

aljabarnya dapat dituliskan sebagai,

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \tag{3.43}$$

dengan i,j,k = 1,2,3. Sedangkan ϵ_{ijk} memiliki sifat,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{jika } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{jika } ijk = 132, 321, 213 \\ 0 & \text{jika } i = j,\ j = k,\ k = i \end{cases} \tag{3.44}$$

yang disebut tensor Levi-Civita. Tensor Levi-Civita ϵ_{ijk} pada aljabar so(3) dalam aljabar lie disebut sebagai konstanta struktur. Secara umum konstanta struktur ini adalah konstanta yang menghubungkan anggota suatu aljabar lie (yaitu generator) dan hasil produk *lie bracket* (operasi komutator) [11].

Dapat diperhatikan bahwa nilai dari komponen matrik generator pertama $(J_1)_{ab}$ dapat dituliskan sebagai $i\epsilon_{1ab}$. Sedangkan generator J_2 dan J_3 dapat dituliskan (secara berurutan) sebagai $i\epsilon_{2ab}$ dan $i\epsilon_{3ab}$. Hal ini menunjukkan bahwa konstanta strukturnya aljabar SO(3) dapat digunakan untuk membangun suatu representasi. Representasi ini disebut representasi adjoint [15].

3.2.4 Bentuk Umum SO(N)

Berdasarkan bagian sebelumnya, telah diketahui bahwa suatu grup dapat dibangun menggunakan subgrupnya. Sehingga, apabila ingin dibentuk transformasi grup SO(4), dapat dibangun dengan menanamkan transformasi grup SO(3) ke dalam matrik 4×4. Hal yang sama berlaku pula untuk grup SO(N) yang dapat dibangun menggunakan subgrup SO(N-1)-nya. Secara umum, apabila terdapat ruang berukuran N,

yang memiliki basis vektor $e_1, e_2, \ldots, e_N$. Maka anggota grup SO(N) merotasikan bidang (e_a, e_b) $(a, b = 1, 2, \ldots, N.)$ (Serta, $a < b$) dengan matrik transformasi M_{e_a,e_b} yang memiliki anggota

$$(M_{e_a,e_b})_{(a,a)} = (M_{e_a,e_b})_{(b,b)} = cos(\alpha), \tag{3.45a}$$
$$(M_{e_a,e_b})_{(a,b)} = -(M_{e_a,e_b})_{(b,a)} = -sin(\alpha), \tag{3.45b}$$
$$(M_{e_a,e_b})_{(c,c)} = 1(\text{jika, } c \neq a \text{ dan } c \neq b) \tag{3.45c}$$

yang merotasikan bidang (e_a, e_b) sejauh α [14].

3.3 Grup Uniter Spesial

3.3.1 Defenisi Grup Uniter

Grup Uniter U(N) didefenisikan sebagai grup dengan himpunan matrik berukuran 2×2 dengan operasi perkalian matrik serta memenuhi hubungan,

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \leftrightarrow U^\dagger = U^{-1} \tag{3.46}$$

. Matrik-matrik yang memenuhi (3.46) disebut matrik uniter [10].

Dalam grup U(N), terdapat subgrup yang disebut SU(N). SU(N) merupakan sekumpulan matrik uniter yang memiliki determinan 1(*Special*) [10].

Konjugasi hermitian dari (3.12),

$$U^\dagger = exp(-i\alpha_j H_j^\dagger). \tag{3.47}$$

Berdasarkan sifat (3.46),

$$U^\dagger = U^{-1}$$

$$exp(-i\alpha_j H_j^\dagger) = exp(-i\alpha_j H_j)$$

atau,

$$H_j^\dagger = H_j. \tag{3.48}$$

Sehingga dapat diketahui matrik H_j merupakan matrik Hermitian. Adapun nilai $j = 1, 2, \ldots, N^2 - 1$ dan penulisannya dalam notasi Einstein [10] [11].

Untuk mempermudah perhitungan diambil permisalan untuk pangkatanya $i\alpha_j H_j = A$, maka U dapat dituliskan sebagai e^A. Menggunakan sifat $det(e^A) = e^{tr(A)}$ yang dibuktikan dalam Lampiran (B), dan nilai determinan dari elemen grup SU(N), dapat diketahui

$$1 = e^{tr(A)} \tag{3.49a}$$
$$e^0 = e^{tr(A)} \tag{3.49b}$$
$$0 = tr(A) \tag{3.49c}$$
$$= tr(i\alpha_j H_j) \tag{3.49d}$$

atau,

$$tr(H_j) = 0. \tag{3.50}$$

Hal ini menunjukkan bahwa generator dari grup SU(N) *traceless* [10].

Pada representasi Fundamental N, generator H dapat dituliskan sebagai,

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} & \ldots & a_{1n} + ib_{1n} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} + ib_{22} & \ldots & a_{2n} + ib_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + ib_{n1} & a_{n2} + ib_{n2} & \ldots & a_{nn} + ib_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

Memperhatikan sifat hermitian (3.48),

$$H = H^\dagger \tag{3.52}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+ib_{11} & a_{12}+ib_{12} & \dots & a_{1n}+ib_{1n} \\ a_{21}+ib_{21} & a_{22}+ib_{22} & \dots & a_{2n}+ib_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+ib_{n1} & a_{n2}+ib_{n2} & \dots & a_{nn}+ib_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-ib_{11} & a_{21}-ib_{21} & \dots & a_{n1}-ib_{n1} \\ a_{12}-ib_{12} & a_{22}-ib_{22} & \dots & a_{n2}-ib_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}-ib_{1n} & a_{2n}-ib_{2n} & \dots & a_{nn}-ib_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

Meninjau elemen diagonal (ke-ii)

$$\begin{aligned} a_{ii}+ib_{ii} &= a_{ii}-ib_{ii}, \\ b_{ii} &= -b_{ii} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.54}$$

yang menunjukkan elemen diagonalnya riil. Meninjau elemen ke-ij

$$a_{ij}+ib_{ij} = a_{ji}-ib_{ji}. \tag{3.55}$$

Diambil suku riil dan kompleknya beruturut-turut,

$$a_{ij} = a_{ji} \tag{3.56a}$$

$$b_{ij} = -b_{ji}. \tag{3.56b}$$

Jadi matrik generator H dapat dituliskan menjadi,

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}-ib_{21} & \dots & a_{n1}-ib_{n1} \\ a_{21}+ib_{21} & a_{22} & \dots & a_{n1}-ib_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+ib_{n1} & a_{n2}+ib_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Memperhatikan sifat *traceless* (3.50),

$$tr(H) = tr \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}-ib_{21} & \dots & a_{n1}-ib_{n1} \\ a_{21}+ib_{21} & a_{22} & \dots & a_{n1}-ib_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+ib_{n1} & a_{n2}+ib_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$0 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$
$$a_{nn} = -(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}) \tag{3.57}$$

Sehingga generator H dapat dituliskan menjadi,

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} - ib_{21} & \dots & a_{n1} - ib_{n1} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} & \dots & a_{n1} - ib_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + ib_{n1} & a_{n2} + ib_{n2} & \dots & -(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{(n-1)(n-1)}) \end{pmatrix}. \tag{3.58}$$

Melihat persamaan (3.58), dapat diketahui jumlah parameternya. Pertama pada bagian diagonal, terdapat N parameter. Namun karena salah satu elemennya dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari elemen diagonal lainnya sesuai persamaan (3.57), maka terdapat N-1 parameter bebas pada elemen diagonal. Sedangkan pada elemen non-diagonalnya terdapat $2(N^1 - (N-1))$ parameter, dikali 2 karena terdapat bagian riil dan kompleksya. Namun karena elemen non-diagonal yang berada di atas elemen diagonal (elemen yang berada pada segitiga atas) dapat menyatakan elemen non-diagonal yang berada dibawah elemen diagonal, maka terdapat $2\frac{N^2-N}{2}$ parameter bebas pada elemen non-diagonal. Jadi generator H grup SU(N) memiliki

$$N - 1 + N(N-1) = N - 1 + N^2 - N = N^2 - 1 \tag{3.59}$$

parameter bebas [10].

3.3.2 Grup SU(2) dan Matriks Pauli

Untuk mendemonstrasikan grup SU(N), dipelajari grup SU(N) yang paling kecil yaitu SU(2). Pada grup SU(2) terda-

pat $2^2 - 1 = 3$ parameter dan generatornya dapat dituliskan sebagai berikut,

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} - ib_{21} \\ a_{21} + ib_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}. \tag{3.60}$$

Bila diambil nilai $a_{11} = 1$, dan nilai parameter lainnya bernilai 0. Maka generatornya menjadi,

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

Bila diambil nilai $a_{21} = 1$, dan nilai parameter lainnya bernilai 0. Maka generatornya menjadi,

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

Bila diambil nilai $b_{21} = 1$, dan nilai parameter lainnya bernilai 0. Maka generatornya menjadi,

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.63}$$

Jadi, H_1,H_2, dan H_3 inilah yang merupakan generator dari grup SU(2) [5].

Untuk mempelajari sifat generator-generator H_1, H_2, H_3, didefenisikan operasi komutator, $[a, b] = ab - ba$. Bila terdapat a, dan b dan memenuhi [a,b]=0, maka a, dan b dikatakan

komut. Bila dilakukan operasi $[H_1, H_2]$,

$$\begin{aligned}
[H_1, H_2] &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2iH_3.
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama didapatkan bahwa

$$[H_3, H_1] = 2iH_2 \tag{3.64}$$
$$[H_2, H_3] = 2iH_1 \tag{3.65}$$

Ketiga hubungan komutasi di atas dari generator H_1, H_2, H_3 ditambah setiap generatornya yang komut dengan dirinya sendiri, disebut sebagai aljabar su(2). Dalam bentuk kompak aljabarnya dapat dituliskan sebagai,

$$[H_i, H_j] = i2\epsilon_{ijk}H_k \tag{3.66}$$

dengan i,j,k = 1,2,3. Sedangkan ϵ_{ijk} merupakan tensor levi-civita yang memiliki sifat,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{jika } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{jika } ijk = 132, 321, 213 \\ 0 & \text{jika } i = j,\ j = k,\ k = i \end{cases} \tag{3.67}$$

Ketiga generator di atas dikenal sebagai Matrik Pauli. Matrik pauli digunakan oleh fisikawan dalam menghitung bilangan kuantum spin dari elektron. Pauli menotasikan σ_1 untuk

H_1 , σ_2 untuk H_3, dan σ_3 untuk H_2. Sehingga bentuk kompak (3.66) dapat ditulis menjadi,

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{3.68}$$

sebagai aljabar su(2) [10].

Bila dihitung kuadrat dari matrik pauli,

$$\sigma_1{}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.69a}$$

$$\sigma_2{}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.69b}$$

$$\sigma_2{}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.69c}$$

Dapat dilihat bahwa matrik pauli memiliki kuadrat berupa matrik identitas berukuran 2×2 [8].

Untuk mendapatkan anggota dari grup SU(2), bisa digunakan generator grup $SU(2)$ yaitu matrik pauli ke dalam persamaan (3.12). Contohnya matrik pauli pertama σ_1,

$$e^{i\alpha\sigma_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha\sigma_1)^n}{n!}. \tag{3.70}$$

Dapat diperhatikan perilaku bilangan imajiner i dan matrik pauli σ_1 terhadap pangkat,

$$\begin{aligned} i^0 &= 1, & i^1 &= i, \\ i^0 &= -1, & i^1 &= -i, \\ i^4 &= 1 = i^0, \end{aligned} \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1{}^0 &= I, & \sigma_1{}^1 &= \sigma_1, \\ \sigma_1{}^2 &= I = \sigma_1{}^0. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Oleh karena itu dapat dipisahkan sigmanya menjadi menjadi beberapa suku,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha\sigma_1)^n}{n!} &= I\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^{4n}}{(4n)!} + i\sigma_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^{4n+1}}{(4n+1)!} \\
&\quad - I\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^{4n+2}}{(4n+2)!} - i\sigma_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^{4n+3}}{(4n+3)!}, \\
&= I\big((\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^{4n}}{(4n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^{4n+2}}{(4n+2)!}\big) \\
&\quad + i\sigma_1\big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^{4n+1}}{(4n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)^{4n+3}}{(4n+3)!}\big), \qquad (3.73) \\
&= I\big(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots\big) \\
&\quad + i\sigma_1\big(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!}\dots\big), \\
&= Icos(\alpha) + isin(\alpha), \\
&= \begin{pmatrix} cos(\alpha) & isin(\alpha) \\ isin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Menggunakan cara yang sama, dapat dihitung 2 bentuk transformasi grup SU(2) yang dibangkitkan oleh σ_2, dan σ_3. Sehingga bentuk dari matrik transformasi dalam grup SU(2) adalah

$$M_1 = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & isin(\alpha) \\ isin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad (3.74a)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad (3.74b)$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \qquad (3.74c)$$

(3.74d)

yang masing-masing dibangkitkan oleh matrik pauli σ_1, σ_2, dan σ_3 [5].

3.3.3 SU(2) Sebagai Representasi Spinor dari SO(3)

Mengingat kembali ketiga Matrik Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.75}$$

Transformasi SU(2) yang dibangkitkan oleh ketiga Matrik Pauli ini bekerja ke suatu vektor $v \in \mathbb{C}^2$

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 i \\ b_1 + b_2 i \end{pmatrix}, \tag{3.76}$$

atau dapat pula dilihat sebagai elemen dari $\mathbb{R}^4$. Diambil suatu matrik X,

$$X = v\, v^\dagger = \begin{pmatrix} |a|^2 & a\bar{b} \\ b\bar{a} & |b|^2 \end{pmatrix} \tag{3.77}$$

yang memiliki determinan 0;

$$det(X) = |a|^2 \, |b|^2 - |ab|^2 = 0. \tag{3.78}$$

Jika diasumsikan v ternormalisasi yaitu,

$$v^\dagger v = |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{3.79}$$

Serta dimisalkan,

$$x = a_1 b_1 + a_2 b_2, \tag{3.80a}$$

$$y = a_1 b_2 - a_2 b_1, \tag{3.80b}$$

$$z = \frac{|a|^2 - |b|^2}{2}. \tag{3.80c}$$

Maka,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + z & x - yi \\ x + yi & \frac{1}{2} - z \end{pmatrix} \tag{3.81}$$

Matrik X ini bertransformasi dengan cara

$$X \to X' = MXM^{\dagger}. \tag{3.82}$$

Pada persamaan (3.82), M merupakan anggota dari grup SU(2). Bila dihitung determinan dari hasil transformasinya,

$$\begin{aligned} det(MXM^{\dagger}) &= det(M)det(X)det(M^{\dagger}) \\ &= det(X) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Hal ini menunjukkan bahwa nilai determinan matrik X dipertahankan oleh transformasi ini [5].

Bila diperhatikan lebih lanjut menggunakan bentuk X pada persamaan (3.81), determinannya menghasilkan persamaan

$$\begin{aligned} det(X) &= \frac{1}{4} - (x^2 + y^2 + z^2), \\ 0 &= \frac{1}{4} - (x^2 + y^2 + z^2), \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Maka, nilai $x^2 + y^2 + z^2$ tidak mengalami perubahan juga saat dilakukan transformasi (3.82). Hal ini menunjukkan SU(2) bekerja pada $\mathbb{R}^3$ menghasilkan rotasi. Namun, hal ini juga berlaku bila mengganti M dengan (-M). Sehingga, SU(2) merotasikan $\mathbb{R}^3$ 2 kali, atau disebut SU(2) merupakan *double cover*

dari SO(3). Grup yang merupakan *double cover* dari SO(3) disebut Spin(3), jadi dapat ditulis menjadi

$$SU(2) \cong Spin(3). \tag{3.85}$$

Grup Spin(3) bekerja ke suatu objek bernama "Spinor". Oleh karena itu, SU(2) dapat disebut sebagai Representasi Spinor dari SO(3) [5].

3.3.4 Grup SU(3) dan Diagram Dynkinnya

Representasi fundamental grup SU(3) dibangkitkan oleh 8 generator $g^a = \frac{\lambda^a}{2}$. Kedelapan matrik λ^a memiliki bentuk,

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.86a}$$

$$\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.86b}$$

$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.86c}$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \tag{3.86d}$$

yang disebut matrik Gell-Mann. Matrik Gell-Mann memenuhi sifat

$$tr(\lambda^a, \lambda^b) = 2\delta^{ab} \tag{3.87}$$

Sifat ini disebut kondisi normalisasi [15].

Bila diperhatikan terdapat beberapa keuninkan dari matrik Gell-Mann,

1. λ^1, λ^2 membentuk generator grup SU(2) bersama λ^3,
2. λ^3, λ^8 memeiliki bentuk diagonal,
3. λ^4, λ^5 dibangun dari matrik pauli σ_1, σ_2 namum berada pada sektor 1-3,
4. λ^6, λ^7 dibangun dari matrik pauli σ_1, σ_2 namum berada pada sektor 1-3.

Untuk mendapat subgrup SU(2) lainnya bisa digunakan hubungan komutasi

$$\begin{aligned}
[\lambda^4, \lambda^5] &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \\
&= 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
&= i(\lambda^3 + \sqrt{3}\lambda^8),
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}
[\lambda^6, \lambda^7] &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \right], \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \\
&= 2i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
&= i(-\lambda^3 + \sqrt{3}\lambda^8).
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Sedangkan hubungan komutasi antara matrik diagonal

$$\begin{aligned}[\lambda^3, \lambda^8] &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right], \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.90}$$

yang menunjukkan matrik diagonal λ^3, λ^8 saling komut. Jumlah matrik yang saling komut, atau komutatif disebut sebagai *Rank* dari grup. Sehingga *Rank* dari grup ini adalah 2. Kedua anggota grup ini disebut sebagai subaljabar Cartan [15].

Untuk membentuk aljabar su(3) yang memiliki bentuk umum

$$[g_a, g_b] = i f_{abc} g_c, \tag{3.91}$$

digunakan operasi komutasi dari setiap anggota grup. Menggunakan cara yang telah didemonstrasikan sebelumnya, konstanta struktur f^{abc} bisa didapatkan yaitu

$$f_{123} = 1, \tag{3.92a}$$

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \tag{3.92b}$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{3.92c}$$

serta f_{abc} bernilai 0 untuk konstanta struktur yang tidak berhubungan dengan (3.92) [16].

3.4 Transformasi Lorentz

3.4.1 Transformasi Lorentz dan Grup SO(p,q)

Transformasi Lorentz merupakan transformasi yang menghubungkan antar prespektif. Prespektif dalam fisika diformalisasikan menggunakan konsep yang disebut kerangka dan dibahas dalam Teori Relativitas Khusus. Secara geometri, transformasi ini mempertahankan "besar" (kuadrat) dari interval ruang-waktu [5].

Pada ruang-waktu 1 (ruang) + 1 (waktu) dimensi, dan digunakann satuan natural (c = 1),

$$v = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

yang menunjukkan kejadian pada waktu t dan posisi x. Besar (kuadrat) v didefenisikan sebagai,

$$|v|^2 = x^2 - t^2 \tag{3.94}$$

dan menunjukkan interval ruang-waktu antara (t,x) dan titik awal (*origin*). Dengan memperkenalkan metrik g, yang memiliki bentuk

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.95}$$

Sehingga intervalnya dapat ditulis menjadi

$$|v|^2 = v^T g v \tag{3.96}$$

yang merupakan bentuk matrik dari interval ruang-waktu (1+1) dimensi [5]

Metrik dengan bentuk (3.95) dikatakan memiliki tanda (*signature*) (1,1). Sedangkan, jika mengambil metrik dengan bentuk matrik identitas berukuran 2×2, dapat dikatakan metrik tersebut memiliki tanda (2,0). Secara umum suatu matrik

dikatakan memiliki tanda (p,q) jika memiliki bentuk diagonal, yang terdari p buah angka 1, dan q buah angka -1 [5].

Transformasi Lorentz dapat dibayangkan sebagai rotasi. Rotasi merupakan transformasi yang dilakukan oleh grup ortogonal. Transformasi linear M pada v menyebabkan,

$$\begin{aligned} v^T v &\rightarrow v'^T v' \\ &= (Mv)^T g(Mv), \\ &= v^T M^T g M v. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Transformasi ini dapat mempertahankan besar v jika berlaku,

$$M^T g M = g. \tag{3.98}$$

Sehingga dapat didefenisikan grup ortogonal SO(N) dengan tanda (p,q),

$$SO(p,q) = \{M \in \mathbb{R}^{(p+q)\times(p+q)} | M^T g M = g, det(M) = 1\} \tag{3.99}$$

dengan g memiliki tanda (p,q). Jika q=0 (atau p=0), grup SO(p,q) menjadi grup SO(N) dengan metrik identias yang memenuhi defenisi (3.26). Jika q = 1, maka dapat dikatakan pada ruang tersebut terdapat 1 arah *time-like*, dan grup yang memiliki metrik ini disebut grup Lorentz yang bekerja ke ruang-waktu Minkowski. Untuk menyertakan tanda (p,q) dalam suatu ruang vektor, dituliskan $\mathbb{R}^{p,q}$ [5].

3.4.2 SO(1,1) dan SO(3,1) sebagai Grup Simetri Transformasi Lorentz

Salah satu grup yang kecil dari keluarga grup SO(p,q) adalah grup SO(1,1). Grup SO(1,1) memiliki anggota M dengan bentuk,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{3.100}$$

Menggunakan sifat (3.98),

$$\begin{aligned} g &= M^T g M, \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -a^2 + c^2 & -ab + cd \\ -ab + cd & -b^2 + d^2. \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.101}$$

Maka berlaku,

$$a^2 - c^2 = -1, \tag{3.102a}$$
$$-ab + cd = 0, \tag{3.102b}$$
$$d^2 - b^2 = 1. \tag{3.102c}$$

Diambil permisalan,

$$\begin{aligned} a^2 &= cosh^2(\theta), \\ a &= e^{i\alpha} cosh(\theta). \end{aligned} \tag{3.103}$$

Dengan cara yang sama, dapat dimisalkan pula

$$d = e^{i\gamma} cosh(\phi) \tag{3.104}$$

Pada trigonometri hiperbolik berlaku

$$cosh^2(\theta) - sinh^2(\theta) = 1, \tag{3.105}$$
$$cosh(\theta) sinh(\phi) - sinh(\theta) cosh(\phi) = sinh(\phi - \theta) \tag{3.106}$$

Dari sifat tersebut, didapatkan nilai b, dan c

$$\begin{aligned} b &= e^{i\beta} sinh(\phi), \\ c &= e^{i\delta} sinh(\theta). \end{aligned} \tag{3.107}$$

Menggunakan persamaan (3.102b), berlaku

$$\begin{aligned} ab &= cd, \\ e^{i\alpha}cosh(\theta)e^{i\beta}sinh(\phi) &= e^{i\delta}cosh(\phi)e^{i\gamma}sinh(\theta), \\ e^{i(\alpha+\beta-\delta-\gamma)}cosh(\theta)sinh(\phi) &= cosh(\phi)sinh(\theta). \end{aligned} \tag{3.108}$$

Pada bagian eksponensial berlaku,

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta-\delta-\gamma)} &= 1 \\ &= e^0 \\ \alpha+\beta-\delta-\gamma &= 0, \\ \alpha+\beta-\delta &= \gamma. \end{aligned} \tag{3.109}$$

Berlaku pula,

$$\begin{aligned} cosh(\theta)sinh(\phi) - sinh(\theta)cosh(\phi) &= 0, \\ sinh(\theta-\phi) &= sinh(0), \\ \theta-\phi &= 0, \\ \phi &= \theta. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Karena M merupakan elemen dari grup SO(p,q), maka determinannya 1,

$$det(M) = ad - bc, \tag{3.111a}$$

$$ad - bc = 1, \tag{3.111b}$$

$$1 = e^{i(2\alpha+\beta-\delta)}cosh^2(\theta) - e^{i(\beta+\delta)}sinh^2(\theta). \tag{3.111c}$$

Supaya persamaan (3.111c) dipenuhi, eksponensial pada kedua suku harus bernilai 1, atau

$$\begin{aligned} e^{i(2\alpha+\beta-\delta)} &= 1, \\ 2\alpha+\beta-\delta &= 0, \\ \delta &= 2\alpha+\beta, \end{aligned} \tag{3.112}$$

dan,

$$\begin{aligned} e^{i(\beta+\delta)} &= 1, \\ \beta + \delta &= 0, \\ \delta &= -\beta. \end{aligned} \tag{3.113}$$

Menyamakan kedua nilai δ,

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= -\beta, \\ 2\alpha &= -2\beta, \\ \beta &= -\alpha. \end{aligned} \tag{3.114}$$

Untuk mendapatkan nilai α bisa digunakan sifat hermitian dari matrik M,

$$M^{\dagger} = M,$$
$$\begin{pmatrix} e^{-i\alpha}cosh(\theta) & e^{-i\alpha}sinh(\theta) \\ e^{i\alpha}sinh(\theta) & e^{i\alpha}cosh(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}cosh(\theta) & e^{-i\alpha}sinh(\theta) \\ e^{i\alpha}sinh(\theta) & e^{i\alpha}cosh(\theta) \end{pmatrix}. \tag{3.115}$$

Sifat hermitian ini hanya bisa dipenuhi, jika dan hanya jika,

$$\begin{aligned} e^{i\alpha}cosh(\theta) &= e^{-i\alpha}cosh(\theta), \\ e^{i2\alpha} &= 1, \\ \alpha &= 0. \end{aligned} \tag{3.116}$$

Oleh karena itu, anggota umum dari grup SO(1,1) adalah

$$M = \begin{pmatrix} cosh(\theta) & sinh(\theta) \\ sinh(\theta) & cosh(\theta) \end{pmatrix}. \tag{3.117}$$

Transformasi vektor v oleh matrik M menghasilkan,

$$\begin{aligned} v' &= Mv, \\ \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} cosh(\theta) & sinh(\theta) \\ sinh(\theta) & cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cosh(\theta)\, t + sinh(\theta)\, x \\ sinh(\theta)\, t + cosh(\theta)\, x \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.118}$$

atau,

$$t \to t' = cosh(\theta)\, t + sinh(\theta)\, x, \tag{3.119a}$$
$$x \to x' = sinh(\theta)\, t + cosh(\theta)\, x. \tag{3.119b}$$

Transformasi (3.119) disebut Transformasi Lorentz pada ruang Minkowski (1+1) dimensi. Dalam teori relativitas khusus transformasi jenis ini disebut sebagai boost pada sumbu x dengan kecepatan $v = tanh(\theta)$. Boost pada sumbu x dapat dikatakan sebagai rotasi pada bidang (t,x) [14].

Untuk mendapatkan anggota dari grup SO(p,q) yang lebih besar, dapat dibangun dari grup yang lebih kecil misalnya SO(1,1). Salah satu grup yang dapat dibangun dari grup SO(1,1) adalah grup SO(3,1). Grup ini merupakan grup simetri dari transformasi Lorentz pada ruang Minkowski (3+1) dimensi [5].

Grup SO(3,1) bekerja ke suatu objek v

$$v = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3.120}$$

yang disebut vektor-4. Grup ini memiliki metrik dengan tanda(3,1). Jadi interval ruang waktu yang dipertahankan oleh grup ini memiliki bentuk

$$|v|^2 = v^T g v = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2. \tag{3.121}$$

Pada grup ini terdapat

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \quad \text{bidang rotasi.} \tag{3.122}$$

Keenam bidang rotasi ini meliputi bidang (t,x), (t,y), (t,z), (x,y), (x,z), dan (y,z) [5].

Rotasi pada bidang (t,x), (t,y), dan (t,z) ekivalen dengan boost pada sumbu x, y, dan x (secara berurutan). Grup SO(1,1) dapat digunakan untuk membangun jenis rotasi ini. Namun karena bekerjanya pada ruang $\mathbb{R}^{1,1}$, grup ini akan ditanamkan pada ruang $\mathbb{R}^{3,1}$ tempat grup SO(3,1) bekerja. Boost pada sumbu x pada ruang $\mathbb{R}^{1,1}$ akan mentransformasikan komponen waktu t, dan ruang x namun tidak mempengaruhi komponen ruang y, dan z. Oleh karena itu, boost pada sumbu x yang bekerja dalam $\mathbb{R}^{3,1}$ berbentuk

$$R_{(t,x)} = \begin{pmatrix} cosh(\theta) & sinh(\theta) & 0 & 0 \\ sinh(\theta) & cosh(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.123}$$

Sedangkan boost pada sumbu lain bisa didapatkan dengan mentransformasikan komponen sumbu t dan sumbu yang mengalami boost. Bentuk transformasinya memiliki bentuk yang sama dengan transformasi (3.119) tetapi x diganti dengan sumbu yang mengalami boost. Sumbu ruang yang tidak mengalami boost, tidak berubah nilai komponennya. Jadi, $R_{(t,y)}$ dan $R_{(t,z)}$ memiliki bentuk

$$R_{(t,y)} = \begin{pmatrix} cosh(\theta) & 0 & sinh(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sinh(\theta) & 0 & cosh(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.124a}$$

$$R_{(t,z)} = \begin{pmatrix} cosh(\theta) & 0 & 0 & sinh(\theta) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sinh(\theta) & 0 & 0 & cosh(\theta) \end{pmatrix}. \tag{3.124b}$$

Setiap transformasi ini melakukan boost pada suatu kerangka dengan kecepatan $tanh(\theta)$ dengan arah sesuai sumbu boostnya [14].

Bentuk transformasi lainnya mengikuti bentuk rotasi yang berada pada grup SO(3) yang ditanamkan dengan cara yang sama seperti sebelumnya,

$$R_{(xy)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.125a}$$

$$R_{(xz)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & 0 & -sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & sin(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{pmatrix}, \tag{3.125b}$$

$$R_{(yz)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}. \tag{3.125c}$$

Transformasi ini merotasikan bidang (x,y), (y,z), dan (x,z) [5].

3.4.3 Bentuk Umum Transformasi Lorentz

Menggunakan grup SO(1,1) dan SO(3,1), dapat dibangun grup yang SO(k,1) ($k > 3$) lainnya yang lebih besar. Secara umum, apabila terdapat vektor x dalam ruang vektor (k+1) yang memiliki tanda (k,1). Maka, dapat dituliskan x

$$\begin{pmatrix} t & x_2 & x_3 & \dots & x_k & x_{k+1} \end{pmatrix}^T \tag{3.126}$$

dengan $t, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ merupakan bilangan riil. Sedangkan besar dari vektor x dapat dituliskan

$$|x|^2 = xgx^T = t^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 - \dots {x_k}^2 - {x_{k+1}}^2. \tag{3.127}$$

Apabila nilai dari $|x|^2 = 0$, vektor x disebut vektor null. Matrik transformasi M dalam Grup SO(k,1) bekerja kepada vek-

tor x dalam ruang ini dan memiliki sifat

$$|x|^2 = |Mx|^2 \tag{3.128}$$

yang mempertahankan besar dari vektor tersebut [14].

Transformasi Lorentz bekerja pada ruang vektor (k+1) dimensi dalam bentuk grup SO(k,1). Apabila, ruang ini menggunakan basis/"sumbu" $(e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1})$. Maka, komponen matrik M_{e_a,e_b} (mengasumsikan $a < b$) dalam grup SO(k,1) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}
(M_{e_1,e_b})_{(1,1)} &= (M_{e_1,e_b})_{(b,b)} = cosh(\alpha) \\
(M_{e_1,e_b})_{(1,b)} &= (M_{e_1,e_b})_{(b,1)} = sinh(\alpha) \\
(M_{e_1,e_b})_{(c,c)} &= 1 \text{ (jika, } c \neq 1 \text{ dan } c \neq b)
\end{aligned} \tag{3.129a}$$

sedangkan saat $a \neq 1$,

$$\begin{aligned}
(M_{e_a,e_b})_{(a,a)} &= (M_{e_a,e_b})_{(b,b)} = cosh(\alpha) \\
(M_{e_a,e_b})_{(a,b)} &= -(M_{e_a,e_b})_{(b,a)} = -sinh(\alpha) \\
(M_{e_a,e_b})_{(c,c)} &= 1 \text{ (jika, } c \neq a \text{ dan } c \neq b)
\end{aligned} \tag{3.129b}$$

yang dapat merotasikan sembarang bidang dalam ruang vektor (k+1) ini sejauh α. Sehingga, bila dituliskan dalam bentuk matrik, M_{e_1,e_3} dan $M_{e_2,e_{k+1}}$ adalah

$$M_{e_1,e_3} = \begin{pmatrix}
cosh(\alpha) & 0 & sinh(\alpha) & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
sinh(\alpha) & 0 & cosh(\alpha) & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix} \tag{3.130}$$

$$M_{e_2,e_{k+1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & 0 & \dots & 0 & -sin(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & sin(\alpha) & 0 & \dots & 0 & cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.131)$$

Sembarang transformasi lorentz dapat dituliskan sebagai kombinasi dari matrik M_{e_1,e_2}, M_{e_1,e_3}, ..., $M_{e_1,e_{k+1}}$, M_{e_2,e_3}, ..., $M_{e_k,e_{k+1}}$ tentunya dengan sudut yang tepat [5] [14].

3.4.4 SL(2,$\mathbb{C}$) sebagai Representasi Spinor Transformasi Lorentz

Telah dibahas sebelumnya bahwa pada ruang (3+1), transformasi bekerja ke suatu vektor-4 dengan bentuk

$$v = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.132)$$

Transformasi lorentz ini dapat pula bekerja dengan vektor dengan bentuk,

$$\begin{aligned} X &= t\mathbf{I} + x\boldsymbol{\sigma_1} + y\boldsymbol{\sigma_2} + z\boldsymbol{\sigma_3}, \\ &= \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Namun, tentunya dengan representasi yang berbeda karena ukuran vektor dan matrik tranformasinya tidak cocok untuk dilakukan operasi perkalian matrik. Representasi ini yang bekerja ke matrik ini diseut representasi spinor. Menarik pula diketahui bahwa matrik (3.133) hermitian, karena matrik identitas dan matrik pauli hermitian. Sehingga matrik yang

mentransformasikan vektor ini perlu mempertahankan sifat hermitian pula [5].

Sama seperti pada bagian (3.4) transformasi lorentz perlu mempertahankan besar dari interval ruang waktu,

$$|\mathbf{v}|^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2. \tag{3.134}$$

Pada (3.4) besar interval ruang waktu bisa didapatkan dari determinannya,

$$-det(X) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2. \tag{3.135}$$

Sehingga dibutuhkan transformasi yang dapat mempertahankan nilai $det(X)$. Menggunakan transformasi pada bagian (3.82), maka vektor X bertransformasi dengan cara,

$$X \to X' = MXM^\dagger. \tag{3.136}$$

Namun bila digunakan bilangan hiperkomplek sebagai elemen bukan diagonal dari X, transformasi (3.136) tidak berlaku secara umum [5].

Bila digunakan bilangan komplek sebagai elemen bukan diagonal dari X, maka bentuknya sama seperti 3.133. Sifat hermitian dari transformasinya dapat dijamin,

$$\begin{aligned} det(X') &= det(MX'M^\dagger), \\ &= det(M)det(X')det(M^\dagger), \\ &= det(M)det(M^\dagger)det(X'), \end{aligned} \tag{3.137}$$

jika berlaku

$$det(M) = det(M^\dagger) = 1. \tag{3.138}$$

Hal ini menunjukkan bahwa suatu matrik M merupakan suatu grup dengan determinan 1, serta memiliki ukuran 2×2.

Grup dengan sifat ini disebut sebagai grup $SL(2,\mathbb{C})$. Sehingga (setidakya secara lokal) berlaku,

$$SL(2,\mathbb{C}) \cong SO(3,1). \tag{3.139}$$

Sedangkan sifat hermitiannya,

$$\begin{aligned} X' &= X'^{\dagger}, \\ MXM^{\dagger} &= (MXM^{\dagger})^{\dagger}, \\ MXM^{\dagger} &= MXM^{\dagger}, \end{aligned} \tag{3.140}$$

tetap berlaku [5].

Anggota dari matrik SL(2,$\mathbb{C}$) merupakan representasi spinor dari grup SO(3,1). Maka, terdapat transformasinya dapat dikategorikan menjadi transformasi *boost* dan rotasi. Transformasi rotasi dalam grup SL(2,$\mathbb{C}$) bisa didapatkan menggunakan transformasi dalam SU(2). Karena, SU(2) merupakan representasi spinor dari grup SO(3). Salah satu transformasi dalam grup SU(2) adalah

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & isin(\alpha) \\ isin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{3.141}$$

yang merotasikan bidang (y,z) dan dapat dilihat bila dilakukan pada vektor (X),

$$\begin{aligned} X' = &\begin{pmatrix} cos(\alpha) & isin(\alpha) \\ isin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -isin(\alpha) \\ -isin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} t+cos(2\alpha)z - sin(2\alpha)y & -isin(2\alpha)z + x - icos(2\alpha)y \\ isin(2\alpha)z + x + icos(2\alpha)y & t - cos(2\alpha)z + sin(2\alpha)y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.142}$$

atau,

$$\begin{aligned} t \to t' &= t, \\ x \to x' &= x, \\ y \to y' &= cos(2\alpha)y + sin(2\alpha)z, \\ z \to z' &= -sin(2\alpha)y + cos(2\alpha)z. \end{aligned} \tag{3.143}$$

Menggunakan metode yang sama didapatkan bentuk transformasi rotasi lainnya,

$$M_{xy}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \; M_{xz}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{3.144}$$

yang (secara berurutan) merotasikan bidang (x,y) dan (x,z) [5]. Transformasi *boost* yang me-"rotasi"-kan bidang sumbu t dengan sumbu ruang x, y, atau z secara geometris merupakan rotasi menggunakan fungsi hiperbolik. Untuk mendapatan bentuk boostnya dari grup $SL(2,\mathbb{C})$ dapat digunakan hasil transformasi Lorentz pada bagian (3.4.2). Sehingga *boost* pada sumbu z memiliki bentuk

$$M_{tz}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}. \tag{3.145}$$

Dengan bentuk transformasinya,

$$X \to X' = M_{tz} X {M_{tz}}^{\dagger} \tag{3.146}$$

. Bila dihitung, komponen vektor-4nya bertransformasi dengan bentuk,

$$\begin{aligned} t \to t' &= cosh(2\alpha)t + sinh(2\alpha)z, \\ x \to x' &= x, \\ y \to y' &= y, \\ z \to z' &= sinh(2\alpha)t + cosh(2\alpha)z, \end{aligned} \tag{3.147}$$

yang menunjukkan ada *boost* pada bidang (t,z) sejauh 2α, dengan kecepatan relatif $c\,tanh(2\alpha)$. Menggunakan cara yang sama bisa didapatkan boost pada sumbu x, dan y sebagai berikut,

$$M_{tx}(\alpha) = \begin{pmatrix} cosh(\alpha) & sinh(\alpha) \\ sinh(\alpha) & cosh(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{3.148}$$

$$M_{ty}(\alpha) = \begin{pmatrix} cosh(\alpha) & -i\,sinh(\alpha) \\ i\,sinh(\alpha) & cosh(\alpha) \end{pmatrix} \tag{3.149}$$

yang masing-masing (secara berurutan) me-"rotasi"-kan bidang (t,x) dan (t,y) [5].

3.4.5 SL(2,$\mathbb{H}$) sebagai Representasi Spinor Transformasi Lorentz

Grup SL(2,$\mathbb{H}$) bekerja ke suatu ruang vektor dengan elemen yang berbentuk,

$$X = \begin{pmatrix} t+z & \bar{q} \\ q & t-z \end{pmatrix}. \tag{3.150}$$

Dimana q merupakan bilangan kuarternion ($\mathbb{H}$) yang berbentuk,

$$q = q_1 + q_i i + q_j j + q_k k \tag{3.151}$$

Untuk membangun matrik X, dimisalkan matrik w yang memenuhi,

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= iw \\ w &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.152}$$

Sehingga matrik pauli dapat dituliskan menjadi,

$$\begin{aligned}
\sigma_x = \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\sigma_z = \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\sigma_i = i\,w &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
\sigma_j = j\,w &= \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \\
\sigma_k = k\,w &= \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.153}$$

Maka matrik X,

$$X = tI + q_1\sigma_x + q_i\sigma_i + q_j\sigma_j + q_k\sigma_k + +z\sigma_z, \tag{3.154}$$

yang dibangun dari perluasan matrik pauli. Perlu diperhatikan disini bahwa penggunaan bilangan kuarternion menjadikan vektor X (5+1) dimensi. Oleh karena itu, dapat dikatakan SL(2,$\mathbb{H}$) merupakan representasi spinor dari grup SO(5,1) [5] [14].

Sama seperti grup pada umumnya, grup ini dapat dibangun dari grup yang lebih kecil, yaitu grup SL(2,$\mathbb{C}$). Selain memiliki matrik transformasi (3.73), (3.144), (3.145), dan (3.148), matrik ini memiliki jenis transformasi lainnya juga. Diperlukan pula transformasi yang dapat merotasikan bidang yang terdapat unit imajiner kuarternion i, j, atau k, seperti bidang (t,k), (x,j), (z,k), dan (j,k). Pada kasus, transformasi yang merotasikan bidang (x,u) dengan u adalah unit imajiner kuarternion. Dapat digunakan bentuk (M_{xy}), namun megganti i dengan u,

$$M_{x,u} = \begin{pmatrix} e^{-u\alpha} & 0 \\ 0 & e^{u\alpha} \end{pmatrix}. \tag{3.155}$$

Untuk mendemonstrasikan cara transformasi representasi spinor oleh rotasi dengan bidang (x,u), diberikan contoh berikut,

$$X \to M_{x,j} X M_{x,j}^{\dagger}, \tag{3.156a}$$

$$M_{x,j} X M_{x,j}^{\dagger} = \begin{pmatrix} e^{-j\alpha} & 0 \\ 0 & e^{j\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t+z & \bar{q} \\ q & t-z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{j\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-j\alpha} \end{pmatrix}, \tag{3.156b}$$

$$= \begin{pmatrix} t+z & e^{-j\alpha}\bar{q}e^{-j\alpha} \\ e^{j\alpha}qe^{j\alpha} & t-z \end{pmatrix}, \tag{3.156c}$$

$$= \begin{pmatrix} t+z & e^{-j\alpha}(r_1 e^{-j\alpha} + r_2 e^{-j\beta}k)e^{-j\alpha} \\ e^{j\alpha}(r_1 e^{j\alpha} + r_2 e^{j\beta}k)e^{j\alpha} & t-z \end{pmatrix}, \tag{3.156d}$$

$$= \begin{pmatrix} t+z & (r_1 e^{-j(\alpha+2\alpha)} + r_2 e^{-j\beta}k \\ r_1 e^{j(\alpha+2\alpha)} + r_2 e^{j\beta}k & t-z \end{pmatrix}, \tag{3.156e}$$

yang merotasikan bidang (x,j) sejauh 2α [5] [14].

Menggunakan metode untuk mendapatkan transformasi (3.155), rotasi pada bidang dengan bentuk (t,u) dan (z,u) secara berturut-urut dapat dilakukan dengan menggunakan transformasi dengan bentuk,

$$M_{t,u} = \begin{pmatrix} cosh\alpha & -usinh\alpha \\ usinh\alpha & cosh\alpha \end{pmatrix}, \tag{3.157}$$

$$M_{z,u} = \begin{pmatrix} cos\alpha & -usin\alpha \\ usin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.158}$$

Sedangkan, transformasi yang merotasikan bidang dengan bentuk (u,v) dengan u,v adalah unit imajiner i,j, atau k, dapat dilakukan dengan meggunakan pemetaan konjugasi. Namun, karena transformasi ini bekerja kepada matrik berukuran 2×2 maka unit imajiner kuarternionnya dikalikan dengan matrik

identitas berukuran 2×2. Sehingga, dapat dilakukan rotasi pada bidang (u,v) dengan bentuk transformasi

$$M_{u,v} = e^{uv\alpha} I_{2\times 2}. \tag{3.159}$$

Untuk mendemonstrasikan transformasi jenis ini, dilakukan perhitungan sebagai berikut,

$$X \to M_{j,k} X M_{j,k}^{\dagger} \tag{3.160a}$$

$$M_{j,k} X R_{j,k}^{\dagger} = e^{i\alpha} I_{2\times 2} \begin{pmatrix} t+z & \bar{q} \\ q & t-z \end{pmatrix} e^{-i\alpha} I_{2\times 2} \tag{3.160b}$$

$$= \begin{pmatrix} t+z & e^{i\alpha}\bar{q}e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha}qe^{-i\alpha} & t-z \end{pmatrix} \tag{3.160c}$$

$$= \begin{pmatrix} t+z & r_1 e^{-k\alpha} + r_2 e^{-k(\beta+2\alpha)i} \\ r_1 e^{k\alpha} + r_2 e^{k(\beta+2\alpha)i} & t-z \end{pmatrix}. \tag{3.160d}$$

Dalam perhitungan (3.160), pada langkah (3.160c) ke (3.160d) digunakan persamaan (2.36) yang merupakan pemetaan konjugasi oleh unit kuarternion $e^{i\alpha}$. Sebagai kelengkapan dituliskan seluruh bentuk transformasi yang berada dalam grup SL(2,$\mathbb{H}$) pada lampiran (D)[5] [14].

3.4.6 SL(2,$\mathbb{O}$) sebagai Representasi Spinor Transformasi Lorentz

SL(2,$\mathbb{O}$) bekerja ke suatu vektor X,

$$X = \begin{pmatrix} t+z & a \\ \bar{a} & t-z \end{pmatrix}, \tag{3.161}$$

dengan a merupakan oktonion (a $\in \mathbb{O}$). Matrik X ini dibangun dari perluasan matrik pauli sebagai berikut,

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.162a}$$

$$\sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.162b}$$

$$\sigma_i = i\,w = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.162c}$$

$$\sigma_j = j\,w = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \tag{3.162d}$$

$$\sigma_k = k\,w = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.162e}$$

$$\sigma_{kl} = (kl)\,w = \begin{pmatrix} 0 & -(kl) \\ (kl) & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.162f}$$

$$\sigma_{jl} = (jl)\,w = \begin{pmatrix} 0 & -(jl) \\ (jl) & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.162g}$$

$$\sigma_{il} = (il)\,w = \begin{pmatrix} 0 & -(il) \\ (il) & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.162h}$$

$$\sigma_l = l\,w = \begin{pmatrix} 0 & -l \\ l & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.162i}$$

Maka matrik X,

$$\begin{aligned} X =& tI + q_1\sigma_x + q_i\sigma_i + q_j\sigma_j + q_k\sigma_k \\ &+ q_{kl}\sigma_{kl} + q_{jl}\sigma_{jl} + q_{il}\sigma_{il} + q_l\sigma_l + z\sigma_z. \end{aligned} \tag{3.163}$$

Sama seperti grup SL(2,H), penggunaan bilangan oktonion menyebabkan bertambahnya dimensi. Vektor X menjadi berdimensi (9+1). Oleh karena itu grup SL(2,$\mathbb{O}$) merupakan representasi spinor dari grup SO(9,1) [5] [14].

Karena merupakan Transformasi Lorentz, grup ini merotasikan setiap bidang dalam matriks tersebut. Sehingga, dapat digunakan matriks transformasi yang berada dalam SL(2,$\mathbb{H}$) tentunya dengan unit imajiner oktonion. Transformasi yang menghasilkan *boost* dikategorikan sebagai transformasi kategori 1. Sedangkan, transformasi kategori 2 mengkelompokkan transformasi yang menghasilkan rotasi [14].

Perlu diperhatikan bahwa operasi konjugasi pada oktonion tidak menghasilkan rotasi pada 1 bidang saja, tetapi pada 3 bidang sekaligus. Oleh karena itu perlu digunakan bentuk transformasi baru yang hanya merotasikan 1 bidang saja. Pada bagian (2.3), telah dibahas bagaimana merotasikan satu bidang saja, yaitu dengan menggunakan metode *double flip*. Metode ini dapat digunakan pula pada matriks dengan mengalikan penkojugasinya dengan matriks identitas 2×2. Sehingga, bentuk transformasinya dapat dituliskan menjadi

$$X \to I_{2\times2}(ucos(\frac{\alpha}{2})+vsin(\frac{\alpha}{2}))(u\mathbb{X}u)I_{2\times2}(ucos(\frac{\alpha}{2})+vsin(\frac{\alpha}{2})), \tag{3.164}$$

dengan u, dan v merupakan unit imajiner yang saling tegak lurus (u⊥v) dan membentuk bidang yang akan ditransformasikan. Sehingga didapatkan seluruh bentuk transformasi dalam grup SL(2,$\mathbb{O}$). Transformasi ini dikategorikan sebagai transformasi kategori 3 yaitu rotasi bidang imajiner [5] [14].

Secara lengkap, transformasi dalam grup ini dapat dituliskan,

$$X \to \begin{cases} MXM^{\dagger} & \text{untuk kategori 1 dan 2,} \\ M_2(M_1XM_1{}^{\dagger})M_2{}^{\dagger} & \text{untuk kategori 3,} \end{cases} \tag{3.165}$$

yang matrik transformasinya memiliki bentuk dalam tabel (3.2) serta dipisahkan berdasarkan kategorinya. Semua jenis transformasi dalam grup ini dapat dilihat pada lampiran (E). Dengan, u dan v adalah unit imajiner oktonion yang saling tegak lurus. Pada tabel ini transformasi dalam grup ini dikategorikan menjadi 3 kategori. Kategori 1 merupakan transformasi boost, sedangkan kategori 2 merupakan transformasi pada bidang yang dibentuk oleh sumbu x, atau z. Kategori 3 merupakan transformasi yang menghasilkan rotasi pada bidang

Tabel 3.2: Bentuk Transformasi dalam Grup SL(2,$\mathbb{O}$)

Kategori	Bentuk Transformasi
Kategori 1 : Boost	$B_{tz} \quad t \longleftrightarrow z \quad M = \begin{pmatrix} exp(\frac{\alpha}{2}) & 0 \\ 0 & exp(\frac{-\alpha}{2}) \end{pmatrix}$
	$B_{tx} \quad t \longleftrightarrow z \quad M = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$
	$B_{tu} \quad t \longleftrightarrow u \quad M = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & -u\ sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ u\ sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$
Kategori 2 : Rotasi	$R_{xu} \quad x \longleftrightarrow u \quad M = \begin{pmatrix} exp(u\frac{\alpha}{2}) & 0 \\ 0 & exp(-u\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$
	$R_{xz} \quad x \longleftrightarrow z \quad M = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2}) & -sin(\frac{\alpha}{2}) \\ sin(\frac{\alpha}{2}) & cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$
	$R_{zu} \quad z \longleftrightarrow u \quad M = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2}) & u\ sin(\frac{\alpha}{2}) \\ u\ sin(\frac{\alpha}{2}) & cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$
Kategori 3 : Rotasi Bidang Imajiner	$R_{uv} \quad u \longleftrightarrow v \quad M_1 = u\ I_{2\times 2}$ $M_2 = \left(u\ cos(\frac{\alpha}{2}) + v\ sin(\frac{\alpha}{2})\right) I_{2\times 2}$

(u,v). Penting untuk diingat kembali bahwa $R_{a,b}$ hanya mempengaruhi bidang (a,b). Maka, $R_{a,b}(\alpha)+R_{a,b}(\phi) = R_{a,b}(\alpha+\phi)$ untuk sembarang $\alpha, \phi \in \mathbb{R}$ [5] [14].

3.5 Akar, Bobot, dan Diagram Dynkin

3.5.1 Bobot

Mengingat kembali dalam bagian (3.3.4), terdapat 2 generator yang saling komut yang membentuk subaljabar Cartan dari aljabar su(3). Setiap generator yang berada dalam subaljabar Cartan ini disebut Generator Cartan [15].

Secara umum, dalam suatu representasi tertentu (misalnya D), terdapat beberapa (misalnya m) generator H_i ($i =$

$1, 2, \ldots, m$) yang memiliki sifat Hermitian dan saling komut,

$$H_i = H_i^\dagger \tag{3.166}$$

$$[H_i, H_j] = 0 \tag{3.167}$$

serta memenuhi kondisi

$$Tr(H_i H_j) = k\delta_{ij} \tag{3.168}$$

untuk $i, j = 1$ sampai m. Pada kondisi normalisasinya, k merupakan konstanta yang bergantung dari representasi dan normalisasi dari generator. Bilangan bulat m ini disebut sebagai rank dari aljabar dari grup ini [15].

Generator Cartan H_i dapat bekerja ke suatu keadaan $|\mu, D\rangle$,

$$H_i |\mu, D\rangle = \mu_i |\mu, D\rangle \tag{3.169}$$

dengan D adalah jenis representasi yang digunakan, dan $|\mu, D\rangle$ merupakan vektor yang koresponden dengan suatu keadaan yang memiliki vetor eigen μ dalam representasi D. Penuliskan vektor keadaan sebagai $|\mu, D\rangle$ disebut sebagai notasi braket Dirac yang lebih banyak dijelaskan lagi dalam (C). Nilai eigen μ_i dari keadaan ini disebut bobot. Nilai dari bobot ini riil, karena merupakan nilai eigen dari operator hermitian. Vektor dengan m-komponen dengan komponen μ_i disebut sebagai vektor bobot [15].

3.5.2 Akar

Pada representasi adjoint, suatu keadaan yang koreponden dengan generator sembarang X_a dapat dituliskan sebagai

$$|X_a\rangle . \tag{3.170}$$

Keadaan yang koresponden dengan generator dalam representasi ini memliki produk skalar sebagai beirkut,

$$\langle X_a | X_b \rangle = \lambda^{-1} Tr(X_a^\dagger X_b) \tag{3.171}$$

(λ merupakan k dalam representasi ini). Untuk menghitung pengaruh suatu generator terhadap suatu keadaan, dapat digunakan (3.171). Sehingga pengaruhnya adalah

$$\begin{aligned} X_a \left|X_b\right\rangle &= \left|X_c\right\rangle \left\langle X_c|X_a|X_b\right\rangle = X_c[T_a]cb \\ &= -i\, f_{acb} \left|X_c\right\rangle = i\, f_{abc} \left|X_c\right\rangle \\ &= \left|i\, f_{abc}\, X_c\right\rangle = \left|[X_a, X_b]\right\rangle \end{aligned} \tag{3.172}$$

yang menunjukkan ternyata keadaan hasilnya koresponden dengan komutasi antara kedua generator yang dioperasikan [15].

Akar merupakan bobot dalam representasi adjoint. Karena generator Cartan komut, $[H_i, H_j] = 0$, maka keadaannya memiliki bobot nol

$$H_i \left|H_j\right\rangle = \left|[H_i, H_j]\right\rangle = 0. \tag{3.173}$$

Sifat ini juga berlaku untuk generator Cartan dalam representasi adjoint. Berdasarkan persamaan (3.168), keadaan yang koresponden dengan generator Cartan ortonormal,

$$\langle H_i|H_j\rangle = \lambda^{-1} Tr(H_i H_j) = \delta_{ij}. \tag{3.174}$$

Sedangkan, keadaan lain dalam representasi adjoint yang tidak korespondedn dengan generator Cartan, memiliki vektor bobot bukan nol, α_i, dengan komponen α_i.

$$H_i \left|E_\alpha\right\rangle = \alpha_i \left|E_\alpha\right\rangle \tag{3.175}$$

yang artinya generator koresponden tersebut memenuhi persamaan

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha. \tag{3.176}$$

Berbeda dengan generator Cartan H_i, generator E_α tidak hermitian. Generator $E_\alpha^\dagger$, yang merupakan sekawan hermitian dari generator E_α, memiliki akar yang minus dari akar generator sekawan hermitiannya

$$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha} \leftrightarrow [H_i, E_\alpha^\dagger] = -\alpha E_\alpha^\dagger. \tag{3.177}$$

Keadaan-keadaan yang koresponden dengan bobot yang berbeda harus ortogonal, karena mereka memilikki nilai eigen yang setidaknya beberda satu dari generator Cartan. Maka dapat dipilih normalisasi dari keadaan dalam representasi adjoint

$$\langle E_\alpha | E_\beta \rangle = \lambda^{-1} Tr(E_\alpha^\dagger E_\beta) = \delta_{\alpha\beta}. \tag{3.178}$$

Bobot α_i ini yang disebut akar, yang merupakan komponen ke-i dari vektor α yang disebut vektor akar. Adapun yang disebut akar positif, yaitu akar yang memiliki komponen pertama bukan nolnya positif. Sedangkan adapula yang disebut akar simpel, yang merupakan akar yang tidak adapat ditulis sebagai penjumlahan akar positif lainnya [15].

3.5.3 Diagram Dynkin

Generator $E_{\pm\alpha}$ merupakan operator tangga untuk bobot, karena keadaan $E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle$ memiliki bobot $\mu \pm \alpha$,

$$\begin{aligned} H_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle &= [H_i, E_{\pm\alpha}] |\mu, D\rangle + E_{\pm\alpha} H_i |\mu, D\rangle \\ &= (\mu \pm \alpha)_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle \end{aligned} \tag{3.179}$$

yang berlaku untuk sembarang representasi [15].

Pada representasi adjoint, keadaan $E_\alpha |E_{-\alpha}\rangle$ memiliki bobot $\alpha - \alpha = 0$. Berdasarkan bagian sebelum telah diketahui bahwa generator Cartan memiliki bobot 0, oleh karena itu keadaan ini merupakan keadaan yang koresponden dengan kombinasi linear dari generator Cartan,

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha \cdot H. \tag{3.180}$$

Sehingga dapat dikatakan bahwa komutasi antara pasangan generator yang memiliki akar $\pm\alpha$ koresponden dengan kombinasi linear dari generator Cartan [15].

Setiap pasangan generator Cartan dengan akar $\pm\alpha$, terdapat subaljabar grup SU(2), dengan generator

$$\begin{aligned} E^{\pm} &\equiv |\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha} \\ E_3 &\equiv |\alpha|^{-2} \alpha \cdot \alpha. \end{aligned} \tag{3.181}$$

Apabila terdapat keadaan $|\mu, D\rangle$, operator E_3 bekerja ke keadaan ini

$$E_3 \, |\mu, D\rangle = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} \, |\mu, D\rangle \, . \tag{3.182}$$

Karena keadaan $|\mu, D\rangle$ koresponden dengan representasi berhingga yang memiliki spin maksimal j. Maka, terdapat keadaan yang tidak dapat dinaikkan lagi nilai bobotnya menggunakan E^+. Misalkan terdapat bilangan bulat p tidak negatif yang memenuhi sifat

$$(E^+)^{p+1} \, |\mu, D\rangle = 0. \tag{3.183}$$

Jadi dalam representasi ini, bobot maksimalnya adalah $\mu + p\,\alpha$. Pengaruh generator E_3 terhadap keadaan (3.183) dengan bobot maksimal adalah

$$\frac{\alpha \cdot (\mu + p\,\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p = j. \tag{3.184}$$

Dengan menggunakan cara yang sama terdapat pula bilangan bulat q yang memenuhi sifat

$$(E^-)^{q+1} \, |\mu, D\rangle = 0. \tag{3.185}$$

Sehingga dalam representasi ini, bobot minimalnya adalah $\mu - q\,\alpha$. Pengaruh generator E_3 terhadap keadaan (3.185) dengan bobot minimal adalah

$$\frac{\alpha \cdot (\mu - q\,\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} - q = -j. \tag{3.186}$$

Menjumlahkan persamaan (3.184) dan (3.186),

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p - q = 0 \tag{3.187}$$

atau

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q) \tag{3.188}$$

. Apabila persamaan ini diberlakukan kepada akar, dapat diketahui sifat dari akar dalam suatu aljabar. Apabila terdapat akar α dan β, maka berlaku

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} &= -\frac{1}{2}(p - q), \\ \frac{\beta \cdot \alpha}{\beta^2} &= -\frac{1}{2}(p' - q), \end{aligned} \tag{3.189}$$

Mengalikan kedua persamaan ini menjadi,

$$\frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(p - q)(p' - q')}{4}. \tag{3.190}$$

Hal yang menarik adalah bagian kiri dari persamaan (3.190) sama dengan $cos^2(\theta_{\alpha\beta})$, jadi dapat dituliskan menjadi

$$cos^2(\theta_{\alpha\beta}) = \frac{(p - q)(p' - q')}{4}. \tag{3.191}$$

Sehingga dapat dikatakan akar α dan β membentuk sudut $\theta_{\alpha\beta}$. Karena nilai $(p - q)$ dan $(p' - q')$ merupakan bilangan bulat, maka $(p - q)(p' - q')$ bernilai bulat juga [15].

Diagram Dynkin merupakan cara mempersingkat penulisan akar simpel. Setiap akar simpel dituliskan dengan bentuk lingkaran. Pasangan lingkaran dihubungkan dengan garis. Jumlah garis antara akar-akar simpel bergantung nilai dari $(p - q)(p' - q')$ dan dapat dilihat dalam Tabel (3.3). Adapun kemungkinan jika besar yang berbeda dari dua akar simpel

yang ada, untuk membedakan kedua jenis akar ini di berikan tanda panah dari akar yang memiliki besar lebih besar ke akar yang memiliki besar lebih kecil [15].

Terdapat 4 kemungkinan nilai $(p-q)(p'-q')$ yang koresponden dengan nilai sudut $\theta_{\alpha\beta}$ dan diagram Dynkin masing-masing:

1. Dua akar yang memiliki nilai $(p-q)(p'-q')=0$ berarti memiliki 0 garis penghubung dalam diagram Dynkinnya. Sedangkan menggunakan nilai $(p-q)(p'-q')$-nya pula dapat dihitung sudut diantaranya,

$$\begin{aligned} cos^2(\theta_{\alpha\beta}) &= 0, \\ cos(\theta_{\alpha\beta}) &= 0, \\ \theta_{\alpha\beta} &= 90^\circ. \end{aligned} \tag{3.192}$$

   Sehingga, sudut diantara kedua akar ini adalah 90°.

2. Dua akar yang memiliki nilai $(p-q)(p'-q')=1$ berarti memiliki 1 garis penghubung dalam diagram Dynkinnya. Sedangkan menggunakan nilai $(p-q)(p'-q')$-nya pula dapat dihitung sudut diantaranya,

$$\begin{aligned} cos^2(\theta_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{4}, \\ cos(\theta_{\alpha\beta}) &= \pm\frac{1}{2}, \\ \theta_{\alpha\beta} &= 60^\circ \text{ atau } 120^\circ. \end{aligned} \tag{3.193}$$

   Sehingga, sudut diantara kedua akar ini adalah 60° atau 120°.

3. Dua akar yang memiliki nilai $(p-q)(p'-q')=2$ berarti memiliki 2 garis penghubung dalam diagram Dynkinnya.

Sedangkan menggunakan nilai $(p-q)(p'-q')$-nya pula dapat dihitung sudut diantaranya,

$$\begin{aligned} cos^2(\theta_{\alpha\beta}) &= \frac{2}{4}, \\ cos(\theta_{\alpha\beta}) &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \theta_{\alpha\beta} &= 45^\circ \text{ atau } 135^\circ. \end{aligned} \tag{3.194}$$

Sehingga, sudut diantara kedua akar ini adalah 45° atau 135°.

4. Dua akar yang memiliki nilai $(p-q)(p'-q') = 3$ berarti memiliki 3 garis penghubung dalam diagram Dynkinnya. Sedangkan menggunakan nilai $(p-q)(p'-q')$-nya pula dapat dihitung sudut diantaranya,

$$\begin{aligned} cos^2(\theta_{\alpha\beta}) &= \frac{3}{4}, \\ cos(\theta_{\alpha\beta}) &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \theta_{\alpha\beta} &= 30^\circ \text{ atau } 150^\circ. \end{aligned} \tag{3.195}$$

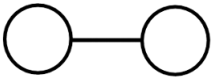
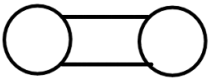
Sehingga, sudut diantara kedua akar ini adalah 30° atau 150°.

Kemungkinan $(p-q)(p'-q') = 4$, koresponden dengan sudut 0° atau 180°. Kedua Akar yang memiliki sifat ini merupakan akar yang sama (0°) atau minus dari akar lainnya (180°), sehingga tidak menunjukkan akar yang unik. Keempat kemungkinan ini Tabel (3.3) [15].

3.5.4 Diagram Dynkin Grup SU(3)

Untuk mempelajari lebih lanjut mengenai grup akar dan bobot, dibahas akar dan bobot dari grup SU(3). Akar dan bo-

Tabel 3.3: Tabel Hubungan $(p-q)(p'-q')$, $\theta_{\alpha\beta}$, dan Diagram Dynkin

$(p-q)(p'-q')$	$\theta_{\alpha\beta}$	Diagram Dynkin
0	90°	
1	60° atau 120°	
2	45° atau 135°	
3	35° atau 150°	

bot dapat dipelajari dengan memperhatikan subaljabar Cartannya. Karena bentuknya yang diagonal, dapat langsung diketahui vektor eigennya

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.196}$$

Nilai eigen untuk g_3 adalah $({\mu_1}^3, {\mu_2}^3, {\mu_3}^3) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ (sesuai dengan vektor eigennya). Sedangkan nilai eigennya g_8 adalah $({\mu_1}^8, {\mu_2}^8, {\mu_3}^8) = (\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$. Bila nilai eigen dari setiap vektor eigen digabungkan

$$w_1 = ({\mu_1}^3, {\mu_1}^8) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}), \tag{3.197a}$$

$$w_2 = ({\mu_2}^3, {\mu_2}^8) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}), \tag{3.197b}$$

$$w_3 = ({\mu_3}^3, {\mu_3}^8) = (0, -\frac{\sqrt{3}}{3}). \tag{3.197c}$$

Ketiga w_i ini disebut bobot (*weights*) dari aljabar su(3). Adapun objek yang disebut akar (*roots*) yang membawa satu bobot ke bobot lainnya. Untuk mendapatkan nilai akar, dapat menggunakan selisih dari bobot. Maka akar dari aljabar su(3) adalah

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= w_1 - w_2 \\ &= (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}) - (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}) \\ &= (1, 0), \end{aligned} \tag{3.198}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= w_3 - w_2 \\ &= (0, -\frac{\sqrt{3}}{3}) - (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}) \\ &= (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \end{aligned} \tag{3.199}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= w_1 - w_3 \\ &= (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}) - (0, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \\ &= (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{aligned} \tag{3.200}$$

serta $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3$ [15].

Pada aljabar su(3) yang merupakan akar positif adalah α_1, α_2, dan α_3. Pada aljabar terdapat 2 akar simpel yaitu α_1 dan α_2, karena $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$. Sedangkan sudut antara kedua

akar simpelnya,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= |\alpha_1|\,|\alpha_2| cos(\theta), \\ cos(\theta) &= \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{|\alpha_1|\,|\alpha_3 2|}, \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1}, \\ &= -\frac{1}{2}, \\ \theta &= 120^o. \end{aligned} \tag{3.201}$$

Oleh karena itu, pada diagram dynkin Grup SU(3) adalah yang memiliki 1 garis saja pada seperti yang ada di Tabel (3.3) [15].

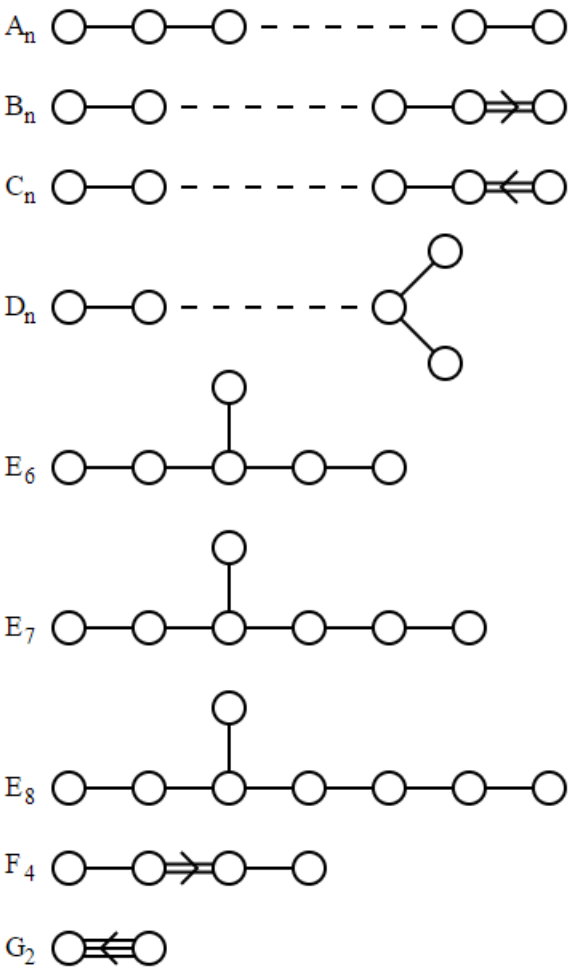
3.6 Klasifikasi *Killing-Cartan*

Klasifikasi *Killing-Cartan* atau *Killing-Cartan Classification* merupakan klasifikasi jenis grup yang pertama kali dilakukan oleh Wilhelm Killing, dan kemudian disempurnakan oleh Ellie Cartan. Killing, dan Cartan mengklasifikasikan grup Lie menjadi 7 kategori. Ketujuh kategori tersebut meliputi A, B, C, D, E, F dan G. Kategori ini memiliki notasi yang berbeda dengan grup yang digunakan fisikawan.

1. A_l yang merupakan grup dengan rank l dan disebut sebagai grup SU$(l+1)$ oleh fisikawan.

2. B_l yang merupakan grup dengan rank l dan disebut sebagai grup SO$(2l+1)$ oleh fisikawan.

3. C_l yang merupakan grup dengan rank l dan disebut sebagai grup Sp$(2l)$ oleh fisikawan.



Gambar 3.3: Diagram Dynkin dari Setiap Kategori Grup Lie

4. D_l yang merupakan grup dengan rank l dan disebut sebagai grup SO($2l$) oleh fisikawan.

5. Grup E_6 , E_7 , E_8 , F_4, dan G_2 disebut grup eksepsional. Karena hanya terdapat beberapa grup saja dalam satu kategori.

Perlu diperhatikan bahwa rotasi pada ruang berdimensi ganjil dan genap berbeda secara matematis. Perlu diperhatikan pula grup eksepsional tidak memiliki anggota kategori yang tak hingga. Sebagai kelengkapan diberikan diagram dynkin dari semua kategori klasifikasi Killing-Cartan pada Gambar (3.3) [15][16].

3.7 Automorfisme $\mathbb{O}$ sebagai Grup Eksepsional G_2

Berdasarkan klasifikasi *Killing-Cartan* terdapat grup yang disebut grup eksepsional. Untuk mengenal grup eksepsional, akan dibahas grup eksepsional G_2. Grup G_2 bisa diperlajari berdasarkan simetri yang dimiliki unit imajiner bilangan Oktonion. Pada bilangan oktonion terdapat 7 unit imajiner (i, j, k, l, kl, jl, il). Tentunya pemilihan unit imajiner oktonion ini merupakan salah satu dari banyak pemilihan. Pemilihan (secara formal disebut pemetaan) ϕ unit imajiner oktonion ini dapat dilakukan, jika $x, y \in \mathbb{O}$, selama dipenuhi hubungan,

$$\phi(x)\phi(y) = \phi(xy). \tag{3.202}$$

Jenis pemetaan yang memenuhi (3.202) disebut Automorfisme (*Automorphism*). Secara formal automorfisme merupakan pemetaan yang membawa anggota himpunan ke anggota himpunan lainnya, namun tetap dalam himpunan yang sama. Sedangkan, pemetaan pemilihan unit oktonion lama ke pemilihan unit oktonion baru, dan memenuhi (3.202) disebut $Aut(O)$. Salah satu pemetaan automorfisme adalah pemetaan

konjugasi, yang apabila digunakan jenis bilangannya oktonion ($\mathbb{O}$) disebut juga *double-flip* dengan bentuk

$$\phi(x) = qx\bar{q} \quad (q\bar{q} = 1\ q, x \in \mathbb{O}) \tag{3.203}$$

yang dapat merotasikan bidang unit imajiner tertenu dalam oktonion [5].

Pemetaan automorfisme manapun harus membawa unit imajiner i ke unit imajiner oktonion lainnya,

$$i \to \phi(i). \tag{3.204}$$

Terdapat 6 pemilihan unit oktonion sebagai hasil pemetaan unit imajiner i (7 unit imajiner oktonion - 1 unit imajiner oktonion yang telah dipetakan). Berikutnya, automorfisme ini harus membawa unit imajiner j ke unit imajiner lainnya

$$\begin{aligned} i &\to \phi(i), \\ j &\to \phi(j). \end{aligned} \tag{3.205}$$

Namun karena salah satu unit imajiner sudah dipakai sebagai hasil pemetaan unit imajiner i, maka terdapat 5 pemilihan unit oktonion. Sedangkan, unit imajiner k pemetaannya sudah dipilih oleh berdasarkan sifat pemetaan automorfisme

$$\begin{aligned} i &\to \phi(i), \\ j &\to \phi(j), \\ k &\to \phi(k) = \phi(i)\phi(j). \end{aligned} \tag{3.206}$$

Unit imajiner l harus dipetakan ke unit imajiner yang tegak lurus dengan unit imajiner hasil pemetaan i, j, dan k

$$\begin{aligned} i &\to \phi(i), \\ j &\to \phi(j), \\ k &\to \phi(k) = \phi(i)\phi(j), \\ l &\to \phi(l). \end{aligned} \tag{3.207}$$

Oleh karena itu, pemetaan ini hanya bisa memilih $6-3=3$ unit imajiner oktonion. Sedangkan unit imajiner oktonion il, jl, dan kl sudah dibatasi berdasarkan sifat pemetaan automorfisme sendiri

$$\begin{aligned} i &\to \phi(i), \\ j &\to \phi(j), \\ k &\to \phi(k) = \phi(i)\phi(j), \\ l &\to \phi(l), \\ kl &\to \phi(kl) = \phi(k)\phi(l), \\ jl &\to \phi(jl) = \phi(j)\phi(l), \\ il &\to \phi(il) = \phi(i)\phi(l). \end{aligned} \tag{3.208}$$

Sehingga, berdasarkan perhitungan ini terdapat $6+5+3=14$ pemetaan automorfisme dalam bilangan $(\mathbb{O})$,

$$|Aut(\mathbb{O})| = 14. \tag{3.209}$$

Grup yang dibentuk oleh pemetaan autmorfisme unit imajiner oktonion disebut grup eksepsional G_2 atau secara matematis dapat dituliskan menjadi,

$$G_2 = Aut(\mathbb{O}). \tag{3.210}$$

Grup G_2 merupakan grup eksepsional terkecil dan [5].

Pada grup ini terdapat 14 jenis transformasi. Untuk mengetahui bentuk transformasinya, dibahas automorfisme yang merotasikan bidang (i, j) dalam suatu bilangan oktonion. Rotasi ini dapat dituliskan menjadi pemetaan *double-flip* dari bilangan oktonion x,

$$\phi(x) = (e^{k-\frac{\theta}{2}}l)\{l[(e^{k\frac{\theta}{2}}j)(ixi)(-je^{k\frac{\theta}{2}})]l\}(-le^{-k\frac{\theta}{2}}) \tag{3.211}$$

Jika terdapat bilangan oktonion yang terdapat di bidang (i, j), maka bilangan oktonion ini dapat dituliskan menjadi $cos(\alpha)i+$

$sin(\alpha)j$ atau $e^{k\alpha}j$. Oleh karena itu, dapat diketahui pengaruh pemetaan ϕ terhadap bilangan oktonion ini,

$$\begin{aligned}
&\phi(e^{k\alpha}j)\\
&= (e^{k-\frac{\theta}{2}}l)\{l[(e^{k\frac{\theta}{2}}j)(ie^{k\alpha}ji)(-je^{k\frac{\theta}{2}})]l\}(-le^{-k\frac{\theta}{2}})\\
&= e^{k\theta}e^{k\alpha}je^{-k\theta}\\
&= e^{k(\alpha+\theta)}j\\
&= cos(\alpha+\theta)i + sin(\alpha+\theta)j.
\end{aligned} \tag{3.212}$$

Pemetaan ϕ ini mempertahankan unit imajiner k, karena suku yang memiliki unit imajiner k komutatif dengan $e^{k\theta}$,

$$\begin{aligned}
&\phi(k)\\
&= (e^{k-\frac{\theta}{2}}l)\{l[(e^{k\frac{\theta}{2}}j)(iki)(-je^{k\frac{\theta}{2}})]l\}(-le^{-k\frac{\theta}{2}})\\
&= e^{k\theta}ke^{-k\theta}\\
&= k.
\end{aligned} \tag{3.213}$$

Dapat diperhatikan pula bahwa unit imajiner k, merupakan unit imajiner yang tegak lurus terhadap bidang (i, j), dan rotasi suatu bidang, tidak merotasikan sumbu unit imajiner yang tegak lurus terhadapnya [5].

Transformasi ini juga menyebabkan bilangan oktonion yang berada dalam bidang (jl, il) mengalami rotasi. Apabila bilangan oktonion yang berada dalam bidang (l, kl) adalah $cos(\alpha)(jl)+sin(\alpha)(il)$ atau $e^{k\alpha}l$, maka pemetaan ϕ akan merotasikan,

$$\begin{aligned}
&\phi(e^{k\alpha}(jl))\\
&= (e^{k-\frac{\theta}{2}}(jl))\{(jl)[(e^{k\frac{\theta}{2}}j)(i(e^{k\alpha}(jl))i)(-je^{k\frac{\theta}{2}})](-jl)\}((-jl)e^{-k\frac{\theta}{2}})\\
&= e^{k\theta}(e^{k\alpha}(jl))e^{-k\theta}\\
&= e^{k(\alpha+\theta)}(jl)\\
&= cos(\alpha+\theta)(jl) + sin(\alpha+\theta)(il)
\end{aligned} \tag{3.214}$$

yang mengalami rotasi akibat sifat pemetaan automorfisme [5].

Transformasi ϕ tidak merotasikan bidang (l, kl). Hal ini dapat terlihat dari pemetaan ϕ suatu bilangan oktonion yang berada pada bidang (l, kl) yaitu $cos(\alpha)l + sin(\alpha)(kl)$ atau $e^{k\alpha}l$,

$$\begin{aligned}
&\phi(e^{k\alpha}l)) \\
&= (e^{k-\frac{\theta}{2}}(jl))\{(jl)[(e^{k\frac{\theta}{2}}j)(i(e^{k\alpha}l)i)(-je^{k\frac{\theta}{2}})](-jl)\}((-jl)e^{-k\frac{\theta}{2}}) \\
&= e^{k\theta}(e^{k\alpha}l)e^{k\theta} \\
&= e^{k(\alpha)}l \\
&= cos(\alpha)l + sin(\alpha)(kl).
\end{aligned} \tag{3.215}$$

Sehingga dapat dilihat bahwa hasilnya tidak mengalai rotasi atau tidak berubah akibat trasformasi ini [5]. Transformasi ϕ ini dapat dituliskan menjadi,

$$\begin{aligned}
i &\rightarrowtail i\,cos(\alpha) - j\,sin(\alpha), \\
j &\rightarrowtail i\,sin(\alpha) + j\,cos(\alpha), \\
k &\rightarrowtail k, \\
l &\rightarrowtail l, \\
kl &\rightarrowtail kl, \\
jl &\rightarrowtail il\,sin(\alpha) + jl\,cos(\alpha), \\
il &\rightarrowtail il\,cos(\alpha) - jl\,sin(\alpha),
\end{aligned} \tag{3.216}$$

yang merupakan automorfisme dari bilangan oktonion untuk setiap nilai α. *Double-flip* yang merotasikan bidang (i, j) sejauh α dapat dituliskan menjadi $R_{(i,j)}(\alpha)$. Sehingga automorfisme (3.216) dapat dituliskan menjadi

$$R_{(i,j)}(\alpha) \circ R_{(jl,il)}(-\alpha) \tag{3.217}$$

yang merotasikan bidang (i, j) sejauh α dan (jl, il) sejauh $-\alpha$ [5].

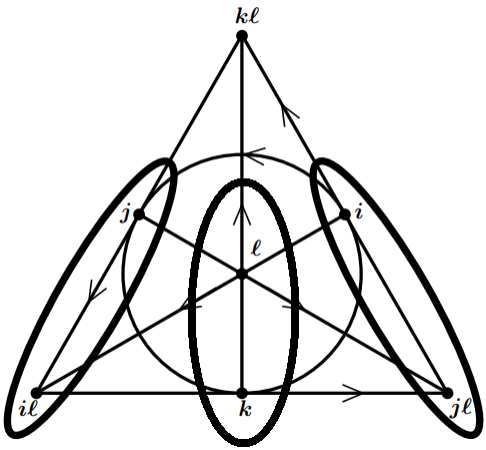
Untuk mengetahui seluruh jenis tranformasi automorfisme yang ada, dapat digeneralisasi metode sebelumnya. Untuk suatu automorfisme yang merotasikan suatu bidang, terdapat bidang lain pula yang mengalami rotasi namun dengan besar sudut yang berlawan (*equal but opposite rotations in two planes*). Hal ini tercermin ketika dirotasikan bidang (i, j) sejauh α, sedangkan bidang rotasi (jl, il) mengalami rotasi sejauh $-\alpha$ atau sejauh $-\alpha$ pada bidang (il, jl). Bidang (i, j) dan (jl, il) dapat dikatakan merupakan bidang yang "menuju" k. Pada oktonion terdapat 7 unit imajiner yang dituju. Serta, untuk setiap unit imajiner yang dituju terdapat 3 bidang yang menuju unit imajiner tersebut. Sehingga terdapat 3 cara pemilihan automorfisme. Jadi terdapat 21 automorfisme, tetapi tidak semuaya independen [5].

Pada kasus unit imajiner k, terdapat 3 bidang yang menuju k. Ketiga bidang tersebut adalah bidang (i, j),(jl, il), dan (l, kl),

$$k = ij = (jl)(il) = l(kl). \tag{3.218}$$

Setiap unit imajiner dan 3 bidang yang menuju satu unit imajiner dapat dilihat pada bidang fano. Sebagai contoh, dalam Gambar (3.4), ketiga pasangan unit imajiner yang dilingkari menuju unit imajiner kl. Namun, kombinasi dari 2 automorfisme (dengan besar sudut rotasi berlawanan) yang menuju unit imajiner sama menghasilkan automorfisme yang merotasikan bidang ketiga. Sehingga dalam grup G_2 terdapat 7×2 $= 14$ transformasi automorfisme independen [5].

Ke-14 transformasi yang independen dapat dipilih dari ke-21 transformasi dependen. Berdasarkan konstruksi transformasi yang telah dibahas, bidang (i, j) dan (jl, il) dirotasikan dengan besar sudut yang sama dan berlawanan, serta tidak mempengaruhi bidang (l, kl), sebut saja transformasi (3.216) sebagai A_k (A karena besarnya yang sama namun berlawanan

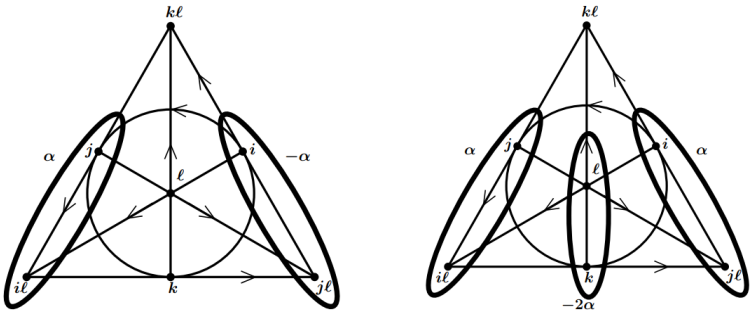


Gambar 3.4: Bidang-bidang yang Menuju Unit Imajiner kl

atau *anti-symmetric*, dan menuju unit imajiner k). Sedangkan, kedua automorfisme sisanya digabungkan, dengan besar sudut yang sama, sebut saja transformasi G_k (karena merupakan bagian dari grup G_2). Transformasi G_k, merotasikan bidang (i, j), dan (jl, il) sejauh sudut yang sama, sedangkan bidang (l, kl) mengalami rotasi dengan besar sudut yang berlawanan. Transformasi G_k ini dapat dituliskan menggunakan notasi *double-flip* sebagai berikut

$$G_k(\alpha) = R_{(i,j)}(\alpha) \circ R_{(jl,il)}(\alpha) \circ R_{(l,kl)}(-\alpha) \tag{3.219}$$

Contoh lain dari konstruksi tranformasi ini adalah A_{kl} pada diagram pertama, dan G_{kl} dalam diagram kedua pada Gambar (3.5). Pada diagram pertama dalam Gambar (3.5), transformasi A_{kl} merupakan transformasi yang merotasikan unit imajiner yang menuju kl dalam bidang fano. Pada transformasi ini bidang yang mengalami transformasi adalah garis (dilingkari pada gambar) yang koresponden dengan bidang (j, il)



Gambar 3.5: Transformasi A_{kl} dan G_{kl}

dan (i, jl), yaitu kedua garis miring di segitiga bidang fano tersebut. Transformasi ini masing-masing memiliki parameter (secara berurutan) α dan $-\alpha$. Sedangkan, diagram kedua dalam Gambar (3.5) menunjukkan transformasi G_{kl}. Dalam diagram ini ditunjukkan (dengan dilingkari) bidang yang mengalami rotasi yaitu (j, il), (k, l), dan (jl, i) yang masing-masing memiliki parameter (secara berurutan) α, α, dan -2α [5].

Sebagai kelengkapan dituliskan transformasi A_q dan G_q (q merupakan unit imajiner oktonion) lainnya,

$$A_i = R_{(j,k)}(\alpha) \circ R_{(kl,jl)}(-\alpha) \tag{3.220}$$
$$G_i = R_{(j,k)}(\alpha) \circ R_{(kl,jl)}(\alpha) \circ R_{(l,il)}(-\alpha) \tag{3.221}$$
$$A_j = R_{(k,i)}(\alpha) \circ R_{(il,kl)}(-\alpha) \tag{3.222}$$
$$G_j = R_{(k,i)}(\alpha) \circ R_{(il,kl)}(\alpha) \circ R_{(l,jl)}(-\alpha) \tag{3.223}$$
$$A_k = R_{(i,j)}(\alpha) \circ R_{(jl,il)}(-\alpha) \tag{3.224}$$
$$G_k = R_{(i,j)}(\alpha) \circ R_{(jl,il)}(\alpha) \circ R_{(l,kl)}(-\alpha) \tag{3.225}$$
$$A_{kl} = R_{(jl,i)}(\alpha) \circ R_{(j,il)}(-\alpha) \tag{3.226}$$
$$G_{kl} = R_{(jl,i)}(\alpha) \circ R_{(j,il)}(\alpha) \circ R_{(k,l)}(-\alpha) \tag{3.227}$$

$$A_{jl} = R_{(i,kl)}(\alpha) \circ R_{(il,k)}(-\alpha) \tag{3.228}$$

$$G_{jl} = R_{(i,kl)}(\alpha) \circ R_{(il,k)}(\alpha) \circ R_{(j,l)}(-\alpha) \tag{3.229}$$

$$A_{il} = R_{(kl,j)}(\alpha) \circ R_{(k,jl)}(-\alpha) \tag{3.230}$$

$$G_{il} = R_{(kl,j)}(\alpha) \circ R_{(k,jl)}(\alpha) \circ R_{(i,l)}(-\alpha) \tag{3.231}$$

$$A_{l} = R_{(il,i)}(\alpha) \circ R_{(jl,j)}(-\alpha) \tag{3.232}$$

$$G_{l} = R_{(il,i)}(\alpha) \circ R_{(jl,j)}(\alpha) \circ R_{(kl,k)}(-\alpha) \tag{3.233}$$

Terdapat satu transformasi lagi disebut S_m dan menuju unit imajiner m. Transformasi ini merotasikan ketiga bidang yang menuju unit imajiner m dengan besar sudut yang sama. Sebagai contoh, transformasi S_k merotasikan bidang (i, j), (jl, il), dan (l, kl) dengan sudut yang sama dan arah yang sama. Transformasi S_k dalam notasi *double-flip* dapat dituliskan sebagai berikut

$$S_k(\alpha) = R_{(i,j)}(\alpha) \circ R_{(jl,il)}(\alpha) \circ R_{(l,kl)}(\alpha). \tag{3.234}$$

Transformasi S_m tentunya tidak berada dalam G_2. Namun, transformasi inilah yang dibutuhkan untuk memperluas grup G_2 menjadi $SO(7)$ [5].

Bab 4

Representasi Fundamental, Adjoint, dan Spinor Grup E_6

4.1 Representasi Fundametal dan Adjoint Grup E_6

4.1.1 Subgrup Maksimal E_6

Untuk mendapatkan representasi fundamental dan adjoint dari grup grup E_6, dilakukan pembangunan dari subgrup maksimalnya. Subgrup maksimal merupakan subgrup *proper* yang paling besar dalam grup tersebut. Adapun subgrup *proper* adalah subgrup yang bukan merupakan subgrup yang terbentuk dari hanya elemen identitas, atau grup itu sendiri. Untuk mendapatkan subgrup maksimal, dapat digunakan diagram dynkin. Diagram dynkin menggunakan aljabar dari suatu grup, dan digunakan untuk mencari subaljabarnya. Caranya dengan menambahkan satu akar (satu lingkaran) pada salah satu akhir dari diagram dynkin. Diagram yang telah

ditambahkan akarnya ini disebut *Extended Dynkin Diagram* atau diagram dynkin diperpanjang. Lalu, dihilangkan satu atau beberapa akar dalam diagram tersebut. Kemudian, diagram dynkin yang tersisa diidentifikasi sebagai subaljabar yang koresponden dengan subgrup dari grup tersebut. Bila jumlah dari rank dari subgrup yang tersisa tidak sama dengan rank dari grup tersebut, terdapat subgrup U(1) yang menambahkan 1 rank subgrup tersebut [17] [18].

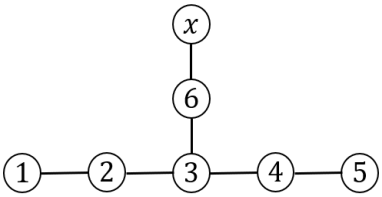
Grup E_6 memiliki bentuk diagram dynkin diperpanjang seperti pada gambar (4.1) yang telah diberi label untuk membedakan semua akar-akarnya. Pada diagram ini akar yang ditambahkan diberi label x. Lalu dihapus salah satu atau beberapa akar dari diagram ini. Terdapat beberapa cara dihapusnya akar dari diagram ini yang disimpulkan dalam tabel (4.1.1) [18].

Penghapusan salah satu akar pada ujung diagram dynkin yang diperpanjang disebut trivial. Karena, penghapusannya menghasilkan grup E_6 itu sendiri yang bukan merupakan subgrup *proper* [18].

Pada kasus $SU(2)\times SU(6)$, rank dari grup $SU(2)$ adalah 2, sedangkan ranknya $SU(6)$ adalah 5. Oleh karena itu, jumlah ranknya adalah 6 dan tidak membutuhkan tambahan subgrup $U(1)$. Hal ini juga terjadi pada kasus $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$ yang setiap $SU(3)$-nya memiliki rank 2. Namun pada kasus subgrup $SO(10)$, jumlah ranknya 5. Supaya ranknya menjadi 6, maka terdapat subgrup $U(1)$ disini. Maka Subgrup maksimalnya adalah $SO(10) \times U(1)$ [18].

4.1.2 Transformasi Representasi Fundamental Grup E_6

Pada subgrup maksimal $SU(3)\times SU(3)\times SU(3)$,digunakan label $SU(3)_C \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ untuk membedakan ketiga subgrup $SU(3)$-nya. Di bawah subgrup maksimal ini, repre-



Gambar 4.1: Diagram Dynkin E_6 yang diperpanjang

Tabel 4.1: Penghapusan Akar dari Diagram Dynkin E_6 diperpanjang

Penghapusan akar		Subgrup yang koresponden dengan akar sisanya
Jumlah akar	Label akar	
1	1 atau 5 atau x	E_6
1	2 atau 4 atau 6	$SU(2) \times SU(6)$
1	3	$SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$
2	(1 dan 5) atau (1 dan x) atau (5 dan x)	$SO(10)$

sentasi dari grup E_6 dapat didekomposisi menjadi tiga angka / triplet (F,G,H) dimana angka di dalam triplet ini menunjukan dekomposisi dibawah setiap subgrup maksimal. Dengan F menunjukan dekomposisi dibawah $SU(3)_C$. G menunjukan dekomposisi dibawah $SU(3)_L$. Serta, H menunjukan dekomposisi dibawah $SU(3)_R$. Representasi fundamental dari grup ini adalah **27** dan dapat didekomposisi menjadi,

$$\mathbf{27} \rightarrow \mathbf{(3,\bar{3},1)} + \mathbf{(1,3,\bar{3})} + \mathbf{(\bar{3},1,3)} \tag{4.1}$$

sedangkan representasi adjointnya adalah **78** dapat didekomposisi menjadi,

$$\begin{aligned}\mathbf{78} \rightarrow \mathbf{(8,1,1)} + \mathbf{(1,8,1)} + \mathbf{(1,1,8)} \\ +\mathbf{(3,3,3)} + (\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}})\end{aligned} \tag{4.2}$$

Semua generator dari grup E_6 dalam representasi **27** akan mentransformasikan suatu vektor ψ_μ ($\mu = 1, 2, 3, ..., 27$). Vektor ini dapat dituliskan dalam bentuk triple matriks (L, M, N) dengan setiap matriks L, M, dan N berukuran 3×3. Setiap matriks ini mewakili dekomposisi **27**,

$$L = L_\alpha{}^a \sim \mathbf{(3,\bar{3},1)} \tag{4.3a}$$

$$M = M_a{}^p \sim \mathbf{(1,3,\bar{3})} \tag{4.3b}$$

$$N = N_p{}^\alpha \sim \mathbf{(\bar{3},1,3)} \tag{4.3c}$$

Matriks L, M dan N dapat dituliskan memilki elemen sebagai berikut,

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix}, \\ M &= \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}, \\ N &= \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Sedangkan dualnya $(\bar{\psi}^\mu)$ dapat dituliskan sebagai triplet

$$(L^+, M^+, N^+). \tag{4.5}$$

Perlu diingat bahwa vektor ψ_μ dan dualnya berada dalam ruang $\mathbb{C}^{27\times 27}$ [19].

Untuk mengetahui pengaruh generator terhadap ψ_μ, generator grup E_6 dibagi menjadi dua jenis. Pertama, generator ${T_C}^A, {T_L}^A, {T_R}^A$ berturut-turut yang koresponden dengan dekomposisi **(8,1,1) + (1,8,1) + (1,1,8)** dalam persamaan (4.2). Aksi dari generator - generator ini dapat direpresentasikan oleh kedepalan matriks Gell-Mann $\lambda^A/2$ sama sesuai dalam SU(3). Bila generatornya bekerja pada dekomposisi subaljabar **3**, matriks (L,M,N) dikalikan $\lambda^A/2$ dari kiri. Bila generatornya bekerja pada $\bar{\mathbf{3}}$, maka matriks (L,M,N) dikalikan -$\lambda^A/2$ dari kanan. Sedangkan pengaruhnya generator bernilai 0, saat bekerja kepada **1** [19] [20].

Perkalian dari kiri ataupun kanan ini terinspirasi dari cara bertansformasinya spinor θ dibawah generator SU(3) dalam representasi (**3**) dan dual spinor $\theta^\dagger$ dibawah generator dalam representasi ($\bar{\mathbf{3}}$). Hubungan generator dalam representasi **3** (g^a) dan $\bar{\mathbf{3}}$ ($g{*}^a$) dapat dituliskan,

$$g{*}^a = -g^a. \tag{4.6}$$

Hubungan generator SU(3) dalam representasi Spinor bertranformasi sebagai berikut,

$$\theta' = g^a\theta, \tag{4.7}$$

yang menunjukkan perkalian dari kiri. Sedangkan, dual spinor $\theta^\dagger$ bertansformasi,

$$\begin{aligned}
\theta'^\dagger &= (g^a\theta)^\dagger, \\
&= \theta^\dagger (g^a)^\dagger, \\
&= \theta^\dagger \big(-i\frac{\partial U}{\partial \alpha^b}\big)\big|_{\alpha=0}{}^\dagger, \\
&= \theta^\dagger \big(-i\frac{\partial\ exp(ig_a\alpha^a)}{\partial \alpha^b}\big)\big|_{\alpha=0}{}^\dagger, \\
&= \theta^\dagger (g^b), \\
&= \theta^\dagger (-g{*}^b),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

yang menunjukkan spinornya dikalikan dari kanan [18] [21].

Sehingga pengaruh generatornya dapat dituliskan sebagai berikut,

$$T_C{}^A(L,M,N) = \Big(\frac{1}{2}\lambda^A L, 0, -\frac{1}{2}N\lambda^A\Big) \tag{4.9a}$$

$$T_L{}^A(L,M,N) = \Big(-\frac{1}{2}L\lambda^A, \frac{1}{2}\lambda^A M, 0\Big) \tag{4.9b}$$

$$T_R{}^A(L,M,N) = \Big(0, -\frac{1}{2}M\lambda^A, \frac{1}{2}\lambda^A N\Big) \tag{4.9c}$$

Untuk mendemonstrasikan transformasi matriks (L,M,N), diberikan contoh $T_C{}^1$ bekerja kepada matrik L. Menggunakan persamaan (4.9a) dan menggunakan matrik Gell-Mann g^1 pada persamaan (3.86) didapatkan,

$$\begin{aligned} T_C{}^1 L &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L11&L12&L13\\L21&L22&L23\\L31&L32&L33\end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}L21&L22&L23\\L11&L12&L13\\0&0&0\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Serta dilakukan hal yang sama untuk matriks M, N,

$$T_C{}^1 M = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{4.11}$$

$$T_C{}^1 N = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}N_{12}&N_{11}&0\\N_{22}&N_{21}&0\\N_{32}&N_{31}&0\end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Dapat dilihat disini bahwa generator-generator ini menyebabkan adanya permutasi antara elemen dalam matriks tersebut. Dengan cara yang sama dapat didapatkan hasil transformasi matriks L, M, dan N akibat generator yang koresponden dengan subgrup SU(3) lainnya [19] [20].

Kedua, generator $T_{\alpha aq}$ dan $\bar{T}^{\alpha aq}$ yang koresponden dengan dekomposisi **(3,3,3)** dan **($\bar{3}$,$\bar{3}$,$\bar{3}$)**. Aksi dari generator - generator ini memenuhi hubungan,

$$T_{\alpha ap}L_\beta{}^b = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\delta_a{}^b N_p{}^\gamma \quad \bar{T}^{\alpha ap}L_\beta{}^b = -\epsilon^{abc}\delta_\beta{}^\alpha M_c{}^p \quad (4.13a)$$
$$T_{\alpha ap}M_b{}^q = \epsilon_{abc}\delta_p{}^q L_\alpha{}^c \quad \bar{T}^{\alpha ap}M_b{}^q = -\epsilon^{pqr}\delta_b{}^a N_r{}^\alpha \quad (4.13b)$$
$$T_{\alpha ap}N_q{}^\beta = \epsilon_{pqr}\delta_\alpha{}^\beta M_a{}^r \quad \bar{T}^{\alpha ap}N_q{}^\beta = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\delta_q{}^p L_\gamma{}^a \quad (4.13c)$$

Persamaan (4.13a), (4.13b), (4.13c) dituliskan menggunakan notasi einstein.

Untuk mendemonstrasikan pengaruh generator pada matriks (L, M, N). misalkan T_{111} bekerja kepada $L_2{}^1$, karena **(3,3,3)** bekerja kepada **(3,$\bar{3}$,1)** sesuai dengan (4.2). Maka,

$$\begin{aligned} T_{111}L_2{}^1 &= \epsilon_{12\gamma}\delta_1{}^1 N_1{}^\gamma \\ &= \epsilon_{121}\delta_1{}^1 N_1{}^1 + \epsilon_{122}\delta_1{}^1 N_1{}^2 + \epsilon_{123}\delta_1{}^1 N_1{}^3 \\ &= N_1{}^3 \end{aligned} \quad (4.14)$$

dengan cara yang sama dapat dihasilkan transformasi matriks L,M, dan N akibat generator jenis ini. Hal yang menarik disini adalah operasi generator $T_{\alpha aq}$ dan $\bar{T}^{\alpha aq}$ merupakan generator yang dapat mengganti jenis matriks elemennya, sehingga seperti pada (4.14) yang awalnya merupakan elemen matrik L menjadi elemen matrik N.

Selain menggunakan kedua jenis generator ini, diperlukan pula untuk mengkonstruksikan parameter sebanyak generator E_6 untuk mentransformasi vektor ψ_μ. Parameter u_A yang koresponden dengan $T_C{}^A$, parameter v_A yang koresponden dengan $T_L{}^A$, serta parameter w_A yang koresponden dengan $T_R{}^A$, dengan A dapat bernilai 1, 2, ..., 8. Parameter $x_{\alpha ap}$ yang koresponden dengan $T^{\alpha ap}$, dan parameter $y_{\alpha ap}$ yang koresponden dengan $\bar{T}^{\alpha ap}$, dengan parameter α, a, p masing-masing dapapt bernilai 1, 2, dan 3. Sehingga, secara keseluruhan

terdapat 78 parameter yang sesuai dengan jumlah generator. Dengan demikian, dapat dituliskan

$$U(u,v,w,x,y) = \mathbf{1} + iu_A {T_C}^A + iv_A {T_L}^A + iw_A {T_R}^A + ix_{\alpha ap} T^{\alpha ap} + iy_{\alpha ap} \bar{T}^{\alpha ap} \tag{4.15}$$

sebagai matriks transformasi U infinitesimal dari grup E_6 [19] [20].

4.1.3 Representasi Fundamental Grup E_6

Berdasarkan bagian 4.1.2, telah diketahui jika Grup E_6 dapat direpresentasikan dalam **27** dan **78**. Berarti generator-generator grup ini dapat dituliskan dalam bentuk matriks 27×27 dalam representasi fundamentalnya dan 78×78 dalam representasi adjointnya [19] [20].

Untuk mempermudah penulisan digunakan indeks generator sebagai berikut ${}_k\tilde{T}$. Dengan,

$${}_1\tilde{\tilde{T}} \ldots {}_8\tilde{T} \rightarrow SU(3)_C, \tag{4.16a}$$

$${}_9\tilde{T} \ldots {}_{16}\tilde{T} \rightarrow SU(3)_L, \tag{4.16b}$$

$${}_{17}\tilde{T} \ldots {}_{24}\tilde{T} \rightarrow SU(3)_R \tag{4.16c}$$

Sehingga, generator yang merepresentasikan Subaljabar Cartannya adalah ${}_3\tilde{T}, {}_8\tilde{T}$, ${}_{11}\tilde{T}, {}_{16}\tilde{T}, {}_{19}\tilde{T}, {}_{24}\tilde{T}$. Sedangkan generator ${}_{25}\tilde{T}$ sampai ${}_{78}\tilde{T}$ merupakan generator-generator yang didefenisikan oleh persamaan (4.13a) - (4.13c). Menggunakan notasi indeks ini, transformasi (4.15) dapat dibentuk dari 78 matriks ${}_k\tilde{T}$ dan parameter ϵ^k yang bekerja terhadap vektor ψ 27-dimensi

$$U(\epsilon)\psi = (\mathbf{1} + i\, \epsilon^k {}_k\tilde{T} + \ \ldots\ )\psi. \tag{4.17}$$

Matriks L, M, N menjadi vektor kolom dan parameter transformasinya diatur sebagai berikut:

$$\psi = (L_{11}, L_{12}, \ldots, M_{11}, \ldots, N_{11}, \ldots, N_{33})^T \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\epsilon =&(u^1, u^2, \ldots, v^1, \ldots, w^1, \ldots x^{111}, \ldots,\\ &y^{111}, \ldots, y^{333})^T.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Lalu, untuk mendapat bentuk eksplisit dari matriks generator, digunakan notasi bra-ket Dirac. Serta, didefenisikan $|\psi_i\rangle$ memiliki merupakan suatu keadaan yang koresponden dengan elemen ke-i vektor ψ. $|\psi_i\rangle$ ini dapat dituliskan sebagai matriks berukuran 27×1. Berikutnya, didefenisikan pula $\langle\psi_i|$ sebagai konjugasi hermitian dari $|\psi_i\rangle$ yang dalam bentuk matriks,

$$|\psi_i\rangle = \underbrace{(0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{\text{terdapat i-1 0}}, 1\ , 0\ ,\ \ldots, 0)^T \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}\langle\psi_i| &= |\psi_i\rangle^\dagger\\ &= \underbrace{(0,\ 0,\ \ldots,\ 0}_{\text{terdapat i-1 0}}, 1\ , 0\ ,\ \ldots, 0).\end{aligned} \tag{4.21}$$

Serta perlu diingat operasi perkalian dalam (inner product) yang didefenisikan pada (C.4) yaitu,

$$\langle\psi_j|\psi_i\rangle = \delta_{ij} \tag{4.22}$$

yang menunjukkan bahwa $|\psi_i\rangle$ dapat dijadikan sebagai basis ortonormal dalam ruang vektor $\mathbb{C}^{27}$. $|\psi_i\rangle$ dapat dikatakan basis ortonormal karena memenuhi sifat ortogonal yaitu bila terdapat 2 basis yang berbeda dan diambil perkalian dalam diantara kedua basis tersebut ($\langle\psi_a|\psi_b\rangle$), menghasilkan nilai 0 sesuai persamaan (4.22) (terlihat dari nilai delta yang bernilai 0 saat $i \neq j$). Serta, memenuhi sifat ternomalisasi yaitu ketika suatu basis diambil nilai perkalian dalam dengan dirinya sendiri ($\langle\psi_a|\psi_a\rangle$) menghasilkan nilai 1 yang sesuai pula dengan persamaan (4.22) [19] [20].

Terakhir, untuk mendapat representasi matrik baris ke-i dan kolom-j dari generator ${}_k\tilde{T}$ digunakan formula,

$$({}_kT)_{ij} = \langle\psi_i|\,{}_k\tilde{T}\,|\psi_j\rangle\,. \tag{4.23}$$

Untuk mendemonstrasikan cara membentuk matriks generator grup E_6 dalam representasi 27×27, dihitung matriks generator ${}_1\tilde{T}$. Menggunakan hasil dari (4.10), (4.11), (4.12), elemen-elemen matriksnya diatur dalam bentuk matriks kolom seperti persamaan (4.18), sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned}{}_1\tilde{T}\psi = \frac{1}{2}(&L_{21}, L_{22}, L_{23}, L_{11}, L_{12}, L_{13}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,\\ &- N_{12}, -N_{11}, 0, -N_{22}, -N_{21}, 0, -N_{32}, -N_{31}, 0)^T.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Dari hasil (4.24) dapat dilihat bahwa nilai elemen matriks yang bukan nol adalah

$${}_1\tilde{T}\,|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\,|\psi_4\rangle\,, \qquad {}_1\tilde{T}\,|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\,|\psi_5\rangle\,, \tag{4.25a}$$

$${}_1\tilde{T}\,|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}\,|\psi_6\rangle\,, \qquad {}_1\tilde{T}\,|\psi_4\rangle = \frac{1}{2}\,|\psi_1\rangle\,, \tag{4.25b}$$

$${}_1\tilde{T}\,|\psi_5\rangle = \frac{1}{2}\,|\psi_2\rangle\,, \qquad {}_1\tilde{T}\,|\psi_6\rangle = \frac{1}{2}\,|\psi_3\rangle\,, \tag{4.25c}$$

$${}_1\tilde{T}\,|\psi_{19}\rangle = -\frac{1}{2}\,|\psi_{20}\rangle\,, \qquad {}_1\tilde{T}\,|\psi_{20}\rangle = -\frac{1}{2}\,|\psi_{19}\rangle\,, \tag{4.25d}$$

$${}_1\tilde{T}\,|\psi_{22}\rangle = -\frac{1}{2}\,|\psi_{23}\rangle\,, \qquad {}_1\tilde{T}\,|\psi_{23}\rangle = -\frac{1}{2}\,|\psi_{22}\rangle\,, \tag{4.25e}$$

$${}_1\tilde{T}\,|\psi_{25}\rangle = -\frac{1}{2}\,|\psi_{26}\rangle\,, \qquad {}_1\tilde{T}\,|\psi_{26}\rangle = -\frac{1}{2}\,|\psi_{25}\rangle\,. \tag{4.25f}$$

Kemudian untuk mendapatkan elemen matriks representasi generator ${}_1\tilde{T}$ pada baris ke-i dan kolom ke-j digunakakan persamaan (4.23)

$$({}_1\tilde{T})_{ij} = \langle\psi_i|\,{}_1\tilde{T}\,|\psi_j\rangle \tag{4.26}$$

berdasarkan (4.25) dan (4.26), maka yang elemen matrik yang bukan nol adalah,

$$\langle\psi_4|_1\tilde{T}\,|\psi_1\rangle = \frac{1}{2} \qquad \langle\psi_5|_1\tilde{T}\,|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} \tag{4.27a}$$

$$\langle\psi_6|_1\tilde{T}\,|\psi_3\rangle = \frac{1}{2} \qquad \langle\psi_1|_1\tilde{T}\,|\psi_4\rangle = \frac{1}{2} \tag{4.27b}$$

$$\langle\psi_2|_1\tilde{T}\,|\psi_5\rangle = \frac{1}{2} \qquad \langle\psi_6|_1\tilde{T}\,|\psi_6\rangle = \frac{1}{2} \tag{4.27c}$$

$$\langle\psi_{20}|_1\tilde{T}\,|\psi_{19}\rangle = -\frac{1}{2} \qquad \langle\psi_{19}|_1\tilde{T}\,|\psi_{20}\rangle = -\frac{1}{2} \tag{4.27d}$$

$$\langle\psi_{23}|_1\tilde{T}\,|\psi_{22}\rangle = -\frac{1}{2} \qquad \langle\psi_{22}|_1\tilde{T}\,|\psi_{23}\rangle = -\frac{1}{2} \tag{4.27e}$$

$$\langle\psi_{26}|_1\tilde{T}\,|\psi_{25}\rangle = -\frac{1}{2} \qquad \langle\psi_{25}|_1\tilde{T}\,|\psi_{26}\rangle = -\frac{1}{2} \tag{4.27f}$$

Sehingga dapat dituliskan representasi generator ${}_1\tilde{T}$ berupa

matriks berukuran 27×27 sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0

$$\sum_{k=1}^{78} {}_kT\ {}_kT = \frac{26}{3}\mathbf{1}_{27}. \tag{4.31}$$

Walaupun perhitungannya tidak sulit, namun perhitungan ini cukup monoton dan dapat dikerjakan lebih baik menggunakan aplikasi komputasi. Oleh karena itu, perhitungan ini dilakukan menggunakan aplikasi MATLAB R2019a. Skrip yang digunakan untuk menghitung seluruh generator dalam representasi fundamental grup E_6 berada pada Lampiran (F). Ke-78 generator grup E_6 dalam representasi fundamental terdapat pada Lampiran (G) [19] [20].

4.1.4 Representasi Adjoint Grup E_6

Generator-generator grup E_6 dapat dituliskan dalam bentuk matriks 27×27 yang memenuhi bentuk komutasi

$$[{}_kT\ ,\ {}_lT] = if_{klm}\,{}_mT. \tag{4.32}$$

Nilai f_{klm} dapat dihitung dengan memasukan nilai k dan l ke dalam persamaan (4.32). Mengingat kembali representasi adjoint dibentk dari konstanta struktur. Maka, pada bagian ini dihitung konstanta struktur menggunakan generator dalam representasi fundamental (**27**) Persamaan komutasi dari generator yang berasal dari subgrup $SU(3)\times SU(3)_L\times SU(3)_R$ dalam notasi indeks sebelumnya

$$[T_A, T_B] = if_{ABC}T_C \tag{4.33a}$$
$$[T_A{}^L, T_B{}^L] = if_{ABC}T_C{}^L \tag{4.33b}$$
$$[T_A{}^R, T_B{}^R] = if_{ABC}T_C{}^R \tag{4.33c}$$
$$[T_A, T_B{}^L] = [T_A, T_B{}^R] = [T_A{}^R, T_B{}^L] = 0, \tag{4.33d}$$

Dengan nilai f_{ABC} merupakan konstanta struktur dari grup SU(3). Sehingga dalam notasi indeks yang baru konstanta

struktur yang bukan nol adalah

$$f_{123} = 1 \tag{4.34a}$$

$$\begin{aligned} f_{147} &= f_{246} = f_{345} \\ &= -f_{156} = -f_{367} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4.34b}$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4.34c}$$

$$f_{9(10)(11)} = 1 \tag{4.34d}$$

$$\begin{aligned} f_{9(12)(15)} &= f_{(10)(12)(14)} = f_{(11)(12)(13)} \\ &= -f_{9(13)(14)} = -f_{(11)(14)(15)} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4.34e}$$

$$f_{(12)(13)(16)} = f_{(14)(15)(16)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4.34f}$$

$$f_{(17)(18)(19)} = 1 \tag{4.34g}$$

$$\begin{aligned} f_{(17)(20)(23)} &= f_{(18)(20)(22)} = f_{(19)(20)(21)} \\ &= -f_{(17)(21)(22)} = -f_{(19)(22)(23)} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4.34h}$$

$$f_{(20)(21)(24)} = f_{(22)(23)(24)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{4.34i}$$

Perlu diingat bahwa konstanta struktur antisimterik terhadap pertukaran indeksnya, oleh karena itu hasil permutasi siklik dari indeksnya konstanta struktur yang telah dituliskan pada (4.34), tidak diperlu dituliskan lagi. Serta yang tidak dituliskan dari permutasi siklik dalam (4.34) bernilai 0 [19] [20].

Untuk generator dari subgrup $SU(3) \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ dan generator berbentuk $T_{\alpha ap}$ serta $T^{\alpha ap}$ memenuhi persamaan komutasi berikut:

$$[T_A, T_{\alpha ap}] = -\frac{1}{2}(\lambda_A)^{\beta}_{\alpha} T_{\beta ap}, \; [T_A, T^{\alpha ap}] = \frac{1}{2}(\lambda_A)^{\alpha}_{\beta} T^{\beta ap} \tag{4.35}$$

$$[T^L_A, T_{\alpha ap}] = -\frac{1}{2}(\lambda_A)^{b}_{a} T_{\alpha bp}, \; [T^L_A, T^{\alpha ap}] = \frac{1}{2}(\lambda_A)^{a}_{b} T^{\alpha bp} \tag{4.36}$$

$$[T_A^R, T_{\alpha ap}] = -\frac{1}{2}(\lambda_A)_p^q T_{\beta aq},\ [T_A^R, T^{\alpha ap}] = \frac{1}{2}(\lambda_A)_q^p T^{\beta aq} \quad (4.37)$$

yang membentuk subaljabar tersendiri. Sedangkan, persamaan komutasi antara generator berbentuk $T_{\alpha ap}$ dan $T^{\alpha ap}$ sebagai berikut,

$$[T_{\alpha ap}, T_{\beta bq}] = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{abc}\epsilon_{pqr}T^{\gamma cr} \quad (4.38)$$

$$[T^{\alpha ap}, T^{\beta bq}] = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{abc}\epsilon^{pqr}T_{\gamma cr} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned}[T^{\alpha ap}, T_{\beta bq}] =& (\lambda_A)_\beta^\alpha \delta_b^a \delta_q^p T_A + \delta_\beta^\alpha (\lambda_A)_b^a \delta_q^p T_A^L \\ &+ \delta_\beta^\alpha \delta_b^a (\lambda_A)_q^p T_A^R \end{aligned} \quad (4.40)$$

Sehingga, hubungan komutasi antara generator yang berasal dari subgrup $SU(3) \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ dan generator yang memiliki bentuk (4.29a) dapat dihitung menjadi,

$$\begin{aligned}[T_A,\ {}_k T] &= [T_A, \frac{1}{2}(T_{\alpha ap} + T^{\alpha ap})] \\ &= [T_A, \frac{1}{2}T_{\alpha ap}] + [T_A, \frac{1}{2}T^{\alpha ap}] \\ &= \frac{1}{2}([T_A, T_{\alpha ap}] + T_A, T_{\alpha ap}]) \\ &= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}(\lambda_A)_\alpha^\beta T_{\beta ap} + \frac{1}{2}(\lambda_A)_\beta^\alpha T^{\beta ap}) \\ &= \frac{1}{4}((\lambda_A)_\alpha^\beta T_{\beta ap} + (\lambda_A)_\beta^\alpha T^{\beta ap}). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Untuk mendemonstrasikan persamaan (4.41) ini diberikan con-

toh komutasi antara T_1 dan ${}_{25}T$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
[T_1,\ {}_{25}T] &= [T_A, \frac{1}{2}(T_{111} + T^{111})] \\
&= [T_1, \frac{1}{2}T_{111}] + [T_1, \frac{1}{2}T^{111}] \\
&= \frac{1}{2}([T_1, T_{111}] + T_1, T_{111}]) \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}(\lambda_1)^{\beta}_{1}T_{\beta 11} + \frac{1}{2}(\lambda_1)^{1}_{\beta}T^{\beta 11}) \\
&= \frac{1}{4}((\lambda_1)^{\beta}_{1}T_{\beta 11} + (\lambda_1)^{1}_{\beta}T^{\beta 11}) \\
&= \frac{1}{4}(T_{211} + T^{211}) \\
&= i\frac{1}{2}\frac{(T_{211} + T^{211})}{2} \\
&= i\frac{1}{2}\,{}_{61}T.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Hasil dari perhitungan (4.42) menunjukkan $f_{1(25)(61)} = \frac{1}{2}$. Dengan menggunakan persamaan (4.35), (4.36), (4.37), (4.38), (4.39), (4.40), (4.29a), dan (4.29b) dapat dihitung pula hasil komutasi dengan bentuk yang lain. Sama seperti perhitungan generator dalam representasi fundamental, perhitungan generator dalam representasi adjoin juga lebih efektif menggunakan aplikasi komputasi dan menggunakan skrip pada lampiran (F). Sebagai kelengkapan seluruh generator dalam representasi ini dituliskan pada lampiran (H) [19] [20].

4.2 Representasi Spinor Grup E_6

4.2.1 Representasi Spinor Grup E_6

Vektor dari Representasi Spinor Representasi spinor dari grup E_6 bekerja ke suatu vektor yang berbentuk matrik ok-

tonionik χ berukuran (3×3). Karena vektor χ adalah elemen ruang $\mathbb{O}^{3\times3}$ tempat representasi spinor E_6 bekerja, vektor ini bersifat hermitian. Oleh karena itu χ memiliki bentuk,

$$\chi = \begin{pmatrix} p & a & \bar{c} \\ \bar{a} & m & b \\ c & \bar{b} & n \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Lalu, sama seperti representasi spinor lainnya, transformasi dari representasi ini perlu mempertahankan determinan χ. Oleh karena itu nilai determinannya 1. Berdasarkan nilai determinannya yang 1, beranggotakan oktonion, dan memiliki ukuran 3×3 grup dari representasi ini disebut SL(3,$\mathbb{O}$) [14]. Pada (4.43), a, b, dan c merupakan oktonion ($a, b, c \in \mathbb{O}$), dan p,m, dan n merupakan bilangan real ($p, m, n \in \mathbb{R}$). Didalam matrik χ terdapat vektor X yang merupakan matrik oktonion hermitian berukuran 2×2, spinor oktonion $\theta \in (\mathbb{O} \oplus \mathbb{O})$ yang dapat dituliskan sebagai matrik kolom dengan 2 komponen, dan dual spinor oktonion $\theta^\dagger \in (\mathbb{O} \oplus \mathbb{O})^*$ yang dituliskan sebagai konjugat hermitian dari spinor θ [14].

4.2.2 Penanaman SL(2,$\mathbb{O}$)

Grup SL(2,$\mathbb{O}$) merupakan subgrup dari SL(3,$\mathbb{O}$). Pada bagian (3.4.6) telah dibahas transformasi yang berada dalam SL(2,2$\mathbb{O}$). Oleh karena itu, dapat dilakukan penanaman SL(2,$\mathbb{O}$) kedalam SL(3,$\mathbb{O}$). Sebelum ditanamkan matrik transformasinya, perlu dibahas terlebih dahulu penanaman matrik X kedalam χ. Terdapat 3 cara ditanamkannya X kedalam χ yang dapat dilihat pada gambar (4.2). Pada setiap cara penanamannya, matrik χ terpecah sehingga memiliki struktur blok yang menyisakan submatrik berukuran 2×1 dan 1×2, serta merupakan konjugat hermitian satu sama lain. Kedua submatrik ini diidentifikasi (secara berurutan) sebagai spinor dan dual-spinor [14].

$$\text{Lokasi 1:} \qquad \left(\begin{array}{c|c} X & \theta \\ \hline \theta^\dagger & \cdot \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} t+z & a & \bar{c} \\ \bar{a} & t-z & b \\ \hline c & \bar{b} & n \end{array}\right)$$

$$\text{Lokasi 2 :} \qquad \left(\begin{array}{c|c} \cdot & \theta^\dagger \\ \hline \theta & X \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} p & a & \bar{c} \\ \bar{a} & t+z & b \\ \hline c & \bar{b} & t-z \end{array}\right)$$

$$\text{Lokasi 3 :} \qquad \left(\begin{array}{c|c|c} X_{22} & \theta_2 & X_{21} \\ \hline \bar{\theta_2} & \cdot & \bar{\theta_1} \\ \hline X_{21} & \theta_1 & X_{11} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} t-z & a & \bar{c} \\ \hline \bar{a} & m & b \\ \hline c & \bar{b} & t+z \end{array}\right)$$

Gambar 4.2: Penanaman X, θ, dan $\theta^\dagger$ dalam χ

Sesuai dengan bentuk transformasi spinor (4.7), dual spinor (4.8), dan vektor (3.165), setiap transformasi lorentz $R \in SL(2,\mathbb{O})$ diekspresikan sebagai *nesting* terhadap matrik transformasi $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Maka dapat dituliskan R,

$$R(X) = M_n(\ldots(M_2(M_1 X {M_1}^\dagger){M_2}^\dagger)\ldots){M_n}^\dagger, \tag{4.44a}$$

$$R(\theta) = M_n(\ldots(M_1\theta)\ldots), \tag{4.44b}$$

$$R(\theta^\dagger) = (\ldots(\theta^\dagger {M_1}^\dagger)\ldots){M_n}^\dagger. \tag{4.44c}$$

Bila diperlakukan submatrik 2×2 kiri-atas sebagai vektor seperti dalam Lokasi 1 dalam gambar (4.2), dan M adalah sebuah matrik 2×2 yang ditanamkan di kiri-atas submatrik 2×2 dari sebuah matrik N yang berukuran 3×3 dan elemen $N_{33} = 1$, maka konjugasi χ oleh N menghasilkan struktur blok seba-

gai berikut,

$$\begin{aligned} &\chi \to N\chi N^\dagger \\ ,\left(\begin{array}{c|c} X & \theta \\ \hline \theta^\dagger & \cdot \end{array}\right) &\to \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X & \theta \\ \hline \theta^\dagger & \cdot \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)^\dagger, \\ &= \left(\begin{array}{c|c} MXM^\dagger & M\theta \\ \hline (M\theta)^\dagger & n \end{array}\right). \end{aligned} \tag{4.45}$$

Sehingga jika dilakukan transformasi sebanyak n kali χ bertransformasi,

$$\begin{aligned} \chi &\to N_n(\dots(N_1\chi {N_1}^\dagger)\dots){N_n}^\dagger \\ &= \left(\begin{array}{c|c} M_n(\dots(M_1 X {M_1}^\dagger)\dots){M_n}^\dagger & M_n(\dots(M_1\theta)\dots) \\ \hline (\dots(\theta^\dagger {M_1}^\dagger)\dots){M_n}^\dagger & n \end{array}\right), \\ &= \left(\begin{array}{c|c} R(X) & R(\theta) \\ \hline R(\theta^\dagger) & n \end{array}\right). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Dapat dilihat pada (4.46) bahwa submatrik dalam χ bertansformasi sesuai dengan (4.44). Hasil ini dapat dilihat pula bila digunakan lokasi submatrik X lain dalam gambar (4.2) [14].

Konstruksi matrik χ berdasarkan ketiga lokasi dalam gambar (4.2) dapat digeneralisasikan. Misalkan suatu pemetaan

$$T^{(a)} := \mathbb{O}^{2\times 2} \to \mathbb{O}^{3\times 3} \tag{4.47}$$

yang menanamkan matrik 2×2 ke matrik 3×3 yang menghasilkan,

$$T^{(1)}(M) = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \tag{4.48a}$$

$$T^{(2)}(M) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right), \tag{4.48b}$$

$$T^{(3)}(M) = \left(\begin{array}{c|c|c} M_{22} & 0 & M_{21} \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline M_{12} & 0 & M_{11} \end{array}\right), \tag{4.48c}$$

dengan a=1,2, dan 3. Pemetaan semacam ini disebut pemetaan diskrit. Suatu matrik M berukuran 2×2 yang mengalami pemetaan $T^{(a)}$, untuk mempermudah penulisan, dapat disikat menjadi $M^{(a)}$. Sedangkan, bila transformasi Lorentz R yang memiliki matrik transformasi $M^{(a)}$ dapat dituliskan sebagai $R^{(a)}$ yang dibaca "Tranformasi tipe a" [14].

4.2.3 Notasi Transformasi Baru untuk Kategori 3

Penanaman SL(2,$\mathbb{O}$) kedalam SL(3,$\mathbb{O}$) menyebabkan terdapat 135 jenis transformasi yang koresponden dengan 135 generator. Namun, pada grup E_6 hanya terdapat 78 generator saja. Mengingat dalam suatu grup, generator koresponden dengan transformasi yang tidak gayut atau independen secara linear antara satu sama lain. Sehingga, diantara 135 jenis tranformasi dalam representasi spinor ini terdapat transformasi yang dibentuk dari jenis transformasi lainnya. Menurut Wangberg, untuk mempermudah mendapatkan jenis transformasi ini dapat diperkenalkan notasi tranformasi baru untuk transformasi dalam kategori 3. Jika q adalah unit imajiner oktonion, notasi baru transformasi kategori 3 dapat dituliskan sebagai A_q, G_q, dan S_q. Untuk menunjukkan hubungan antara notasi baru ini dengan transformasi dalam notasi lama, digunakan unit imajiner oktonion l, maka bentuk A_l, G_l, dan S_l,

$$A_l(\alpha) = R_{il,i}(\alpha) \circ R_{jl,j}(-\alpha), \tag{4.49}$$

$$G_l(\alpha) = R_{il,i}(\alpha) \circ R_{jl,j}(\alpha) \circ R_{kl,k}(-2\alpha), \tag{4.50}$$

$$S_l(\alpha) = R_{il,i}(\alpha) \circ R_{jl,j}(\alpha) \circ R_{kl,k}(\alpha). \tag{4.51}$$

Tabel 4.2: Pasangan Bidang Transformasi dalam Notasi Baru

Unit	Pasangan Bidang Imajiner ke-n		
Imajiner	1	2	3
i	(j,k)	(kl,jl)	(l,il)
j	(k,i)	(il,kl)	(l,jl)
k	(i,j)	(jl,il)	(l,kl)
kl	(jl,i)	(j,il)	(k,l)
jl	(i,kl)	(il,k)	(jl,l)
il	(kl,j)	(k,jl)	(i,l)
l	(il,i)	(jl,j)	(kl,k)

Urutan komposisi transformasi dalam (4.49), (4.50), dan (4.51) tidak mempengaruhi hasil perhitungan, atau komutatif. Komutatifnya komposisi ini dikarenakan setiap transforasi yang dikomposisikan menghasilkan rotasi pada bidang yang saling ortogonal. Pasangan bidang yang dirotasikan oleh setiap transformasi lorentz dalam notasi baru dapat dilihat dalam Tabel (4.2). Berdasakan notasi baru ini dapat dibangun kembali transformasi dalam notasi lama, contohnya :

$$R_{il,i}(6\alpha) = A_l(3\alpha) \circ G_l(\alpha) \circ S_l(2\alpha). \tag{4.52}$$

Digunakan 3α, 2α dan α supaya rotasi pada bidang selain (il,i) saling menghapus satu sama lain [14].

4.2.4 Generator dari grup SL(3,$\mathbb{O}$)

Generator g^a dari suatu grup Lie secara umum dapat dihubungkan dengan anggota grup Lie U berdasarkan persamaan (3.12), atau,

$$g^a = \frac{\partial U}{\partial \alpha_a}\Big|_{\alpha=0}. \tag{4.53}$$

Namun, pada representasi spinor E_6 yaitu SL(3,$\mathbb{O}$) terdapat tranformasi kategori 3 yang memiliki bentuk *nesting*. Menu-

rut Wangberg, generator dihitung dengan melakukan trasformasi R ke ruang $\mathbb{O}^{3\times 3}$ terlebih dahulu. Kemudian dihitung turunannya. Oleh karena itu, generator tranformasi R dari representasi spinor dapat dihitung,

$$\frac{\partial R(\alpha)}{\partial \alpha}(\chi)\big|_{\alpha=0}. \tag{4.54}$$

Untuk mempermudah penulisan, generator dari transformasi R dalam representasi ini dituliskan menjadi $\dot{R}$ [14].

Untuk mendemonstrasikan cara menghitung generator transformasi dalam representasi ini dihitung generator dari transformasi ${A_l}^{(1)}$, $\dot{A}_l^{(1)}$. Pertama-tama, dihitung terlebih dahulu pengaruh transformasi ${A_l}^{(1)}$ terhadap matrik χ,

$$\begin{aligned} {A_l}^{(1)}(\alpha)(\chi) &= \big({R_{jl,j}}^{(1)}(-\alpha) \circ {R_{il,i}}^{(1)}(\alpha)\big)(\chi), \\ &= \begin{pmatrix} t+z & a' & \bar{c'} \\ \bar{a'} & t-z & b' \\ c' & \bar{b'} & n \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

dengan,

$$\begin{aligned} a' &= (e^{-l\frac{\alpha}{2}}(jl)) \\ &\quad \big[(jl)\{(e^{l\frac{\alpha}{2}}(il))[(il)a(-il)]((-il)e^{-l\frac{\alpha}{2}})\}(-jl)\big] \qquad (4.56a) \\ &\quad ((-jl)e^{-l\frac{\alpha}{2}}), \\ b' &= (e^{-l\frac{\alpha}{2}}(jl))\big[(jl)\{(e^{l\frac{\alpha}{2}}(il))[(il)a]\}\big], \qquad (4.56b) \\ c' &= \big[\{[a(-il)]((-il)e^{-l\frac{\alpha}{2}})\}(-jl)\big]((-jl)e^{l\frac{\alpha}{2}}). \qquad (4.56c) \end{aligned}$$

Nilai a' dapat dihitung dengan memisahkan suku-sukunya a kedalam subaljabar kompleknya yang pasangannya diambil sesuai dengan pasangan bidang dalam tabel(4.2),

$$a = a_1 e^{l\theta_1} + a_2 e^{l\theta_2}(il) + a_3 e^{l\theta_3}(jl) + a_4 e^{l\theta_4}(kl). \tag{4.57}$$

Lalu dihitung untuk setiap sukunya, pada suku pertama

$$
\begin{aligned}
&a_1(e^{l\frac{\alpha}{2}}(il))[(il)e^{l\theta_1}(-il)]((-il)e^{-l\frac{\alpha}{2}}),\\
&= a_1(e^{l\frac{\alpha}{2}}(il))e^{-l\theta_1}((-il)e^{-l\frac{\alpha}{2}}),\\
&= a_1(cos(\frac{\alpha}{2})(il) + sin(\frac{\alpha}{2})i)e^{-l\theta_1}(-cos(\frac{\alpha}{2})(il) - sin(\frac{\alpha}{2})i),\\
&= a_1(cos^2(\frac{\alpha}{2})e^{l\theta_1} + sin^2(\frac{\alpha}{2})e^{l\theta_1}) + (-\frac{1}{2}sin(\alpha)le^{l\theta_1} + \frac{1}{2}sin(\alpha)le^{l\theta_1}),\\
&= a_1e^{l\theta_1},
\end{aligned}
\tag{4.58a}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_1(e^{-l\frac{\alpha}{2}}(jl))[(jl)e^{-l\theta_1}(-jl)]((-jl)e^{l\frac{\alpha}{2}}),\\
&= a_1(cos(\frac{\alpha}{2})(jl) + sin(\frac{\alpha}{2})(-j))e^{-l\theta_1}(cos(\frac{\alpha}{2})(-jl) + sin(\frac{\alpha}{2})(j)),\\
&= a_1(cos^2(\frac{\alpha}{2})e^{l\theta_1} + sin^2(\frac{\alpha}{2})e^{l\theta_1}) + (-\frac{1}{2}sin(\alpha)le^{l\theta_1} + \frac{1}{2}sin(\alpha)le^{l\theta_1}),\\
&= a_1e^{l\theta_1}.
\end{aligned}
\tag{4.58b}
$$

Dapat pula dilakukan hal yang sama untuk suku lainnya. Sehingga hasil perhitungannya a' adalah

$$a' = a_1e^{l\theta_1} + a_2e^{l\theta_2+\alpha}(il) + a_3e^{l\theta_3-\alpha}(jl) + a_4e^{l\theta_4}(kl). \tag{4.59}$$

Dengan cara yang sama dapat dihitung pula nilai b' dan c' yaitu,

$$b' = b_1e^{l\theta_1} + b_2e^{l\theta_2+\alpha}(il) + b_3e^{l\theta_3-\alpha}(jl) + b_4e^{l\theta_4}(kl), \tag{4.60}$$

$$c' = c_1e^{l\theta_1} + c_2e^{l\theta_2+\alpha}(il) + c_3e^{l\theta_3-\alpha}(jl) + c_4e^{l\theta_4}(kl). \tag{4.61}$$

Generatornya dapat dihitung menjadi,

$$\dot{A}_l^{(1)} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{pmatrix} t+z & a' & \bar{c'} \\ \bar{a'} & t-z & b' \\ c' & \bar{b'} & n \end{pmatrix}_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & a'_1 & \bar{c'_1} \\ \bar{a'_1} & 0 & b'_1 \\ c'_1 & \bar{b'_1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.62}$$

dengan,

$$a_1' = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(a_1 e^{l\theta_1} + a_2 e^{l\theta_2+\alpha}(il) + a_3 e^{l\theta_3-\alpha}(jl) + a_4 e^{l\theta_4}(kl)\right)_{\alpha=0}, \tag{4.63a}$$

$$b_1' = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(b_1 e^{l\theta_1} + b_2 e^{l\theta_2+\alpha}(il) + b_3 e^{l\theta_3-\alpha}(jl) + b_4 e^{l\theta_4}(kl)\right)_{\alpha=0}, \tag{4.63b}$$

$$c_1' = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(c_1 e^{l\theta_1} + c_2 e^{l\theta_2+\alpha}(il) + c_3 e^{l\theta_3-\alpha}(jl) + c_4 e^{l\theta_4}(kl)\right)_{\alpha=0}. \tag{4.63c}$$

Nilai a_1' dapat dihitung yaitu,

$$\begin{aligned} a_1' &= a_2 l e^{l\theta_2}(il) - a_3 l e^{l\theta_3}(jl), \\ &= a_2 i e^{-l\theta_2} - a_3 j e^{-l\theta_3}, \\ &= a_2(cos(\theta)i - sin(\theta)(il)) - a_3(cos(\theta)j - sin(\theta)(jl)), \\ &= -a_i(il) + a_{il}i - a_{jl}j + a_j(jl). \end{aligned} \tag{4.64}$$

Pada (4.64) diambil permisalan,

$$\begin{aligned} a_i &= a_2 sin(\theta), \\ a_{il} &= a_2 cos(\theta), \\ a_{jl} &= a_3 cos(\theta), \\ a_j &= a_3 sin(\theta). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Menggunakan cara yang sama dapat diketahui pula nilai b_1' dan c_1' yaitu,

$$b_1' = -b_i(il) + b_{il}i - b_{jl}j + b_j(jl), \tag{4.66}$$

$$c_1' = -c_i(il) + c_{il}i - c_{jl}j + c_j(jl). \tag{4.67}$$

Indek dari suku setiap permisalan diambil dari unit imajiner yang dimilikinya ketika sebelum diturunkan terhadap α. Perlu diperhatikan pula pengaruh transformasi ke elemen matrik

a, b, dan c tidak secara umum sama, karena ketiganya bertransformasi sesuai dengan (secara berurutan) vektor X, spinor θ, dan dual spinor $\theta^\dagger$. Berdasarkan cara yang ditunjukkan dalam contoh ini, dapat dihitung seluruh generator dalam representasi ini. Sebagai kelengkapan seluruh generator dalam representasi ini dituliskan dalam Lampiran (I) [14].

4.2.5 Kebergantungan Linear

Seperti yang telah dibahas dalam bagian (4.2.3), terdapat kebergantungan linear antara transformasi pada representasi spinor E_6 yaitu SL(3,$\mathbb{O}$) yang dibangun dari SL(2,$\mathbb{O}$). Menggunakan hasil perhitungan generator pada lampiran (I), dapat diperhatikan kebergantungan linearnya [14].

Perhatikan generator dalam kategori 3. Dari ke-21 transformasi (setiap tipe dihitung transformasi berbeda) A_q, G_q, dan S_q dapat dilihat bahwa berlaku,

$$\dot{A}_q^{(1)} = \dot{A}_q^{(2)} = \dot{A}_q^{(3)}, \tag{4.68}$$

$$\dot{G}_q^{(1)} = \dot{G}_q^{(2)} = \dot{G}_q^{(3)}. \tag{4.69}$$

untuk setiap unit imajiner oktonion q. Hal ini menunjukkan bahwa transformasi A_q dan G_q tidak bergantung tipenya (*type independent*), yang memperbolehkan dihapusnya notasi tipe pada generator, dan ditulis secara simpel menjadi $\dot{A}_q$ dan $\dot{G}_q$. Keempat belas transformasi ini membangun subgrup $G_2 = Aut(\mathbb{O})$, yang merupakan grup eksepsional terkecil. Sifat *type independent* ini disebabkan oleh sifat trialitas oktonion. Saat menambahkan keempat belas tranformasi G_2 kepada ketujuh transformasi $S_q^{(a)}$ untuk setiap tipe a (dengan a = 1, 2, dan 3), terbentuk subgrup $SO(7)$ (terdapat 3 $SO(7)$). Namun tranformasi $S_q^{(a)}$ tidak *type independent*, karena generatornya memenuhi,

$$\dot{S}_q^{(1)} + \dot{S}_q^{(2)} + \dot{S}_q^{(3)} = 0. \tag{4.70}$$

Maka, gabungan dari dua subgrup $SO(7)$ mengandung yang ketiga. Secara spesifik, dapat digunakan transformasi $S_q^{(a)}$ tipe 1 dan 2 untuk menghasilkan transformasi tipe 3 $S_q^{(3)}$. Kebergantungan linear ini telah mengurangi tranformasi yang telah dihitung dari 145 menjadi 100 [14].

Pada transformasi kategori 2, terdapat hubungan

$$\dot{R}_{xq}^{(1)} + \dot{R}_{xq}^{(2)} + \dot{R}_{xq}^{(3)} = 0. \tag{4.71}$$

Hubungan ini memperbolehkan dieliminasinya 7 trnasformasi lagi, dan dapat dipilih untuk mempetahankan transformasi tipe 1 dan 2. Transformasi $\dot{R}_{xq}^{(a)}$ tipe a bila ditambahkan dengan tranformasi tipe a dalam grup $SO(7)$ membentuk subgrup $SO(8)$. Tetapi kebergantungan antara tiap tipe transformasi $\dot{R}_{xq}^{(a)}$ mengindikasikan $\dot{R}_{xq}^{(3)}$ dapat diperoleh dari transformasi grup $\dot{R}_{xq}^{(1)}$ dan $\dot{R}_{xq}^{(2)}$. Sehingga, gabungan dari SO(8) tipe 1 dan 2 mengandung grup $SO(8)$ tipe 3 [14].

Kebergantungan linier lainnya terdapat pada transformasi kategori 2 dan kategori 3 yang mengeliminasi 14 transformasi lagi, dan mengabungkan semua tipe $SO(8)$ menjadi satu. Setelah mengeleminasi tranformasi S_q dan R_{xq} tipe 3, kebergantungan linier ini menyebabkan transformasi tipe 2 sebagai kombinasi linear dari transformasi tipe 1. Generator transformasi tipe 2 memenuhi hubungan,

$$\dot{R}_{xq}^{(2)} = -\frac{1}{2}\dot{R}_{xq}^{(1)} + \frac{1}{2}\dot{S}_q^{(1)}, \tag{4.72}$$

$$\dot{S}_q^{(2)} = -\frac{3}{2}\dot{R}_{xq}^{(1)} - \frac{1}{2}\dot{S}_q^{(1)}. \tag{4.73}$$

Maka, dapat dituliskan transformasi $\dot{R}_{xq}^{(2)}$ dan $\dot{S}_q^{(2)}$ dalam transformasi $\dot{R}_{xq}^{(1)}$ dan $\dot{S}_q^{(1)}$ yang terdapat dalam subgrup $SO(8)$ tipe 1. Oleh karena itu, hanya terdapat 1 subgrup $SO(8)$ saja. Jadi dalam subgrup $SO(8)$ ini terdapat 3 subgrup $SO(8)$ [14].

Sejauh ini 135 transformasi telah dikurangi menggunakan hubungan kebergantungan linier sebanyak 56, dan menyisakan 79 tranformasi. Hubungan kebergantungan linier terakhir terdapat pada tranformasi *boost* dalam kategori 1 yang memenuhi,

$$\dot{B}^{(1)}_{tz} + \dot{B}^{(2)}_{tz} + \dot{B}^{(3)}_{tz} = 0. \tag{4.74}$$

Dari ketiga tipe boost $\dot{B}^{(1)}_{tz}$, $\dot{B}^{(2)}_{tz}$, dan $\dot{B}^{(3)}_{tz}$ dapat dipilih untuk mempertahankan $\dot{B}^{(1)}_{tz}$ dan $\dot{B}^{(2)}_{tz}$ [14].

Berdasarkan kebergantungan linier yang telah didapat, tersisa 78 generator tranformasi $SL(3, \mathbb{O})$. Oleh karena itu, dapat diketahui seluruh generator ini sudah tidak saling bergantung satu sama lain lagi [14].

Halaman ini sengaja dikosongkan

Bab 5

Penutup

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pengerjaan Tugas Akhir ini dapat disimpulkan bahwa:

1. Representasi Fundamental (**27**) dari grup E_6 didapatkan menggunakan pembangunan dari subgrup maksimal $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$. Menggunakan metode tensor dapat dilakukan pembangunan representasinya berdasarkan bentuk cara bertransformasinya. Representasi ini memiliki bentuk matrik berukuran 27×27 dengan elemen matrik berupa bilangan komplek ($\mathbb{C}$). Representasi ini dapat digunakan dalam menjelaskan pola keterbelitan bipartit dalam dua qutrit dalam Teori Gravitasi Super atau *Supergravity Theory* di 5-dimensi.

2. Representasi Adjoint (**78**) dari grup E_6 didapatkan dengan cara yang sama dalam mendapatkan representasi fundamental (**27**) yaitu menggunakan subgrup maksimal $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$. Dengan menghitung komutasi antara generator dalam representasi (**27**), dapat

diketahui konstanta struktur yang merupakan representasi adjoint (**78**) tersebut. Representasi ini memiliki bentuk matrik berukuran 78×78 dengan elemen matrik berupa bilangan komplek ($\mathbb{C}$). Representasi ini dapat digunakan dalam mempelajari sifat-sifat partikel boson yang menjadi mediator gaya-gaya fundamental dalam Teori Kemanunggalan Agung atau *Grand Unified Theory*.

3. Representasi Spinor dari grup E_6 isomorfik dengan grup SL(3,$\mathbb{O}$). Representasi ini dapat dibagun dengan menanamkan grup SL(2,$\mathbb{O}$) yang merupakan representasi spinor dari transformasi Lorentz. Lalu untuk menghindari kebergantungan linier antara transformasi diperhatikan generator dari masing-masing transformasinya. Representasi ini memiliki bentuk matrik berukuran 3×3 dengan elemen matrik berupa bilangan oktonion ($\mathbb{O}$). Representasi ini dalam fisika dapat digunakan dalam Teori Kemanunggalan Agung atau *Grand Unified Theory* dalam menjelaskan simetri tera atau *gauge symmetry* yang mendasari partikel-partikel yang ada di alam semesta.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini masih terdapat beberapa masalah yang belum diteliti. Penelitian selanjutnya dapat lebih mendalami dalam aspek komputasi yang melibatkan bilangan hiperkomplek dalam aljabar hurwitz. Selain itu dapat diteliti lebih lanjut representasi diferensial dari grup E_6 dan bentuk persamaan yang simetrik dibawah grup ini. Sedangkan dalam aspek fisika,serta penggunaan grup E_6 sebagai simetri dalam sistem fisis misalnya "Teori Kemanunggalan Agung".

Daftar Pustaka

[1] Miller, G. (1964). **The Evolution of Group Theory**. The Mathematics Teacher, 57(1), 26-30 JSTOR, www.jstor.org/stable/27956961. Accessed 8 June 2020.

[2] Tung, W. K. (1985). **Group Theory in Physics: an Introduction to Symmetry Principles, Group Representations, and Special Functions in Classical and Quantum Physics**. World Scientific Publishing Company.

[3] Racah, G. (1942). **Theory of Complex Spectra. I**. Physical Review, 61(3-4), 186.

[4] Gürsey, F., Ramond, P., dan Sikivie, P. (1976). **A Universal Gauge Theory Model Based on E6**. Physics Letters B, 60(2), 177-180.

[5] Dray, T., dan Manogue, C. A. (2015). **The Geometry of The Octonions**. World Scientific.

[6] Kantor, I. L., dan Solodovnikov, A. S. (1989). **Hypercomplex Numbers: an Elementary Introduction to algebras**. Springer.

[7] Boas, M. L. (2006). **Mathematical Methods in the Physcal Sciences : Third Edition**. New York : Wiley

[8] Purwanto, A. (2004). **Teori Grup dalam Fisika**. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[9] Jones, H.F. (1998). **Groups, Representations and Physics : Second Edition**. London: *Institute of Physics Publishing*.

[10] Nusur,F. (2018). **Teori Kemanunggalan Agung Berbasis Grup SU(5) Tanpa Peluruhan Proton**. ITS, Surabaya.

[11] Schwichtenberg, J. (2015). **Physics from Symmetry**. Heidelberg: Springer.

[12] Purwanto, A. (2014). **Mekanika Kuantum**. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember

[13] Purwanto, A. (2016). **Fisika Kuantum : Edisi 2**. Yogyakarta: Penerbit Gava Media

[14] Wangberg, A. (2007). **The Structure of E6**. arXiv preprint arXiv:0711.3447.

[15] Georgi, H. (1999). **Lie algebras in particle physics**. Front. Phys., 54, 1-320.

[16] Zee, A. (2016). **Group Theory in a Nutshell for Physicists**. Princeton University Press.

[17] Dynkin, E. B. (1952). **Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras**. Matematicheskii Sbornik, 72(2), 349-462.

[18] Pal, P. B. (2019). **A Physicist's Introduction to Algebraic Structures: Vector Spaces, Groups, Topological Spaces and More**. Cambridge University Press.

[19] Kephart, T. W., dan Vaughn, M. T. (1983). **Tensor Methods for the Exceptional Group E6**. Annals of Physics, 145(1), 162-184.

[20] Deppisch, T. (2017). **E6Tensors: a Mathematica Package for E6 Tensors**. Computer Physics Communications, 213, 130-135.

[21] Pal, P. B. (2014). **An Introductory Course of Particle Physics**. Taylor and Francis.

Halaman ini sengaja dikosongkan

Lampiran A

Bukti Persamaan Euler

Diketahui ekspansi deret McLaurin suatu fungsi $f(x)$ memiliki bentuk

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}}{k!}x^k + \ldots. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Menggunakan ekspansi McLaurin tersebut bisa didapatkan ekspansi 3 fungsi berikut,

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{(2n+1)} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \tag{A.2}$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{(2n)} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \tag{A.3}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{A.4}$$

Mensubtitusi $x = i\,y$ pada persamaan (A.4) menghasilkan,

$$\begin{aligned} e^{(iy)} &= 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \ldots, \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \ldots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots\right)}_{\text{ekspansi dari } cos(y)} + i\underbrace{\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \ldots\right)}_{\text{ekspansi dari } sin(y)} \\ &= cos(y) + i\,sin(y). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Sehigga, terbukti Persamaan Euler (2.9).

Lampiran B

Bukti Sifat dari Determinan Eksponen Matrik

Untuk membuktikan sifat $det(e^A) = e^{tr(A)}$, didiagonalisasikan matriks e^A menjadi,

$$e^A = Pe^D P^{-1}. \tag{B.1}$$

Bila diambil determinannya maka,

$$\begin{aligned} det(e^A) &= det(P)det(e^D)det(P^{-1}) \\ &= det(e^D) \end{aligned} \tag{B.2}$$

Misalkan matriks A memiliki nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$,

$$\begin{aligned} det(e^D) &= e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \ldots e^{\lambda_n} \\ &= e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} \\ &= e^{tr(D)}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Sekarang diambil nilai trace dari matriks A yang telah didiagonalisasi,

$$\begin{aligned} tr(A) &= tr(PDP^{-1}) \\ &= tr(P^{-1}PD) \\ &= tr(D) \end{aligned} \tag{B.4}$$

Dengan mensubtitusi (B.4) ke (B.3) didapatkan,

$$\begin{aligned} det(e^A) =& e^{tr(A)} \\ & (terbukti) \end{aligned} \tag{B.5}$$

Lampiran C

Notasi Bra-Ket Dirac

Di dalam mekanika kuantum sistem fisis dinyatakan oleh vektor keadaan di dalam ruang vektor kompleks. Untuk penyedernaan dan kemudahan Dirac memperkenalkan notasi ket dengan $|\alpha\rangle$ yang dibaca ket-α. Dua vektor ket $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ dapat ditambahkan

$$|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle \tag{C.1}$$

vektor ket ini berada dalam ruang vektor yang disebut ruang ket.

Dual vektor dari $|\alpha\rangle$ merupakan $\langle\alpha|$ yang dibaca sebagai bra-α. $\langle\alpha|$ memiliki hubungan dengan vektornya,

$$\langle\alpha| = |\alpha\rangle^{\dagger} \tag{C.2}$$

Dual vektor ini dapat dikatakan berada dalam ruang cermin dari ruang ket, yang disebut sebagai ruang bra. Selanjutya didefenisikan perkalian dalam (*inner product*) antara bra dan ket dapat dituliskan

$$(\langle\beta|)(|\alpha\rangle) = \langle\beta|\alpha\rangle \tag{C.3}$$

Perkalian dalam jelas tidak sama dengan perkalian skalar dari dua vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ karena $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$, sedangkan pada perkalian dalam $\langle\beta|\alpha\rangle$ merupakan dual dari $\langle\alpha|\beta\rangle$.

Bila suatu $|\alpha\rangle$ koresponden dengan suatu keadaan eigen dari operator A. Maka, $|\alpha\rangle$ membentuk basis dari ruang vektor keadaannya. Perkalian dalam antara dua keadaan eigen $\langle\alpha|\beta\rangle$ dapat dituliskan menjadi,

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \tag{C.4}$$

δ_{ij} merupakan delta kroneker yang memiliki sifat,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } i = j \\ 0 & \text{jika } i \neq j \end{cases} \tag{C.5}$$

Basis yang memenuhi hubungan ini disebut sebagai basis ortonormal.

Lampiran D

Transformasi dalam Grup SL(2,$\mathbb{H}$)

Pada grup SL(2,$\mathbb{H}$), vektor X (3.150) bertransformasi dengan bentuk,

$$X \rightarrow M_{uv} X {M_{uv}}^{\dagger} \tag{D.1}$$

. Dengan bentuk M merupakan transformasi pada bidang (u,v). Berikut adalah bentuk matrik M untuk setiap transformasi,

$$M_{tx} = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{D.2}$$

$$M_{ti} = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & -i\, sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ i\, sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} \tag{D.3}$$

$$M_{tj} = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & -j\, sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ j\, sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} \tag{D.4}$$

$$M_{tk} = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & -k\, sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ k\, sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} \tag{D.5}$$

$$M_{tz} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \tag{D.6}$$

$$M_{xz} = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2}) & -sin(\frac{\alpha}{2}) \\ sin(\frac{\alpha}{2}) & cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{D.7}$$

$$M_{xi} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \tag{D.8}$$

$$M_{xj} = \begin{pmatrix} e^{j\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-j\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \tag{D.9}$$

$$M_{xk} = \begin{pmatrix} e^{k\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-k\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \tag{D.10}$$

$$M_{zi} = \begin{pmatrix} cos\frac{\alpha}{2} & -i\,sin\frac{\alpha}{2} \\ i\,sin\frac{\alpha}{2} & cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \tag{D.11}$$

$$M_{zj} = \begin{pmatrix} cos\frac{\alpha}{2} & -j,sin\frac{\alpha}{2} \\ j\,sin\frac{\alpha}{2} & cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \tag{D.12}$$

$$M_{zk} = \begin{pmatrix} cos\frac{\alpha}{2} & -k,sin\frac{\alpha}{2} \\ k\,sin\frac{\alpha}{2} & cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \tag{D.13}$$

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} e^{k\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{k\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \tag{D.14}$$

$$M_{jk} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}, \tag{D.15}$$

$$M_{ki} = \begin{pmatrix} e^{j\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{j\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}. \tag{D.16}$$

Lampiran E

Transformasi dalam Grup SL(2,$\mathbb{O}$)

Pada grup SL(2,$\mathbb{O}$), vektor X (3.161) bertransformasi dengan bentuk,

$$X \rightarrow \begin{cases} M_{u,v} X {M_{u,v}}^{\dagger} & \text{untuk kategori 1 dan 2} \\ M_{2\,u,v}(M_{1\,u,v} X {M_{1\,u,v}}^{\dagger}){M_{2\,u,v}}^{\dagger} & \text{untuk kategori 3} \end{cases} \tag{E.1}$$

Dengan bentuk $M_{u,v}$ merupakan transformasi pada bidang (u,v). Berikut adalah bentuk matrik M untuk setiap transformasi yang dikelompokan berdasarkan kategorinya.

Kategori 1 : *Boost*

$$M_{t,x}(\alpha) = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.2}$$

$$M_{t,i}(\alpha) = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & -i\,sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ i\,sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.3}$$

$$M_{t,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & -j\,sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ j\,sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.4}$$

$$M_{t,k}(\alpha) = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & -k\,sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ k\,sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.5}$$

$$M_{t,kl}(\alpha) = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & -(kl)\,sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ (kl)\,sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.6}$$

$$M_{t,jl}(\alpha) = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & -(jl)\,sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ (jl)\,sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.7}$$

$$M_{t,il}(\alpha) = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & -(il)\,sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ (il)\,sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.8}$$

$$M_{t,l}(\alpha) = \begin{pmatrix} cosh(\frac{\alpha}{2}) & -l\,sinh(\frac{\alpha}{2}) \\ l\,sinh(\frac{\alpha}{2}) & cosh(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.9}$$

$$M_{t,z}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \tag{E.10}$$

$$M_{x,z}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2}) & -sin(\frac{\alpha}{2}) \\ sin(\frac{\alpha}{2}) & cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.11}$$

$$M_{x,i}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{i(\frac{\alpha}{2})} & 0 \\ 0 & e^{-i(\frac{\alpha}{2})} \end{pmatrix}, \tag{E.12}$$

$$M_{x,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{j(\frac{\alpha}{2})} & 0 \\ 0 & e^{-j(\frac{\alpha}{2})} \end{pmatrix}, \tag{E.13}$$

$$M_{x,k}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{k(\frac{\alpha}{2})} & 0 \\ 0 & e^{-k(\frac{\alpha}{2})} \end{pmatrix}, \tag{E.14}$$

$$M_{x,kl}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{(kl)(\frac{\alpha}{2})} & 0 \\ 0 & e^{-(kl)(\frac{\alpha}{2})} \end{pmatrix}, \tag{E.15}$$

$$M_{x,jl}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{(jl)(\frac{\alpha}{2})} & 0 \\ 0 & e^{-(jl)(\frac{\alpha}{2})} \end{pmatrix}, \tag{E.16}$$

$$M_{x,il}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{(il)(\frac{\alpha}{2})} & 0 \\ 0 & e^{-(il)(\frac{\alpha}{2})} \end{pmatrix}, \tag{E.17}$$

$$M_{x,l}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{l(\frac{\alpha}{2})} & 0 \\ 0 & e^{-l(\frac{\alpha}{2})} \end{pmatrix}, \tag{E.18}$$

$$M_{z,i}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2}) & -i\,sin(\frac{\alpha}{2}) \\ i\,sin(\frac{\alpha}{2}) & cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.19}$$

$$M_{z,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2}) & -j,sin(\frac{\alpha}{2}) \\ j\,sin(\frac{\alpha}{2}) & cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.20}$$

$$M_{z,k}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2}) & -k,sin(\frac{\alpha}{2}) \\ k\,sin(\frac{\alpha}{2}) & cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.21}$$

$$M_{z,kl}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2}) & -(kl),sin(\frac{\alpha}{2}) \\ (kl)\,sin(\frac{\alpha}{2}) & cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.22}$$

$$M_{z,jl}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2}) & -(jl),sin(\frac{\alpha}{2}) \\ (jl)\,sin(\frac{\alpha}{2}) & cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.23}$$

$$M_{z,il}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2}) & -(il),sin(\frac{\alpha}{2}) \\ (il)\,sin(\frac{\alpha}{2}) & cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.24}$$

$$M_{z,l}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2}) & -l,sin(\frac{\alpha}{2}) \\ l\,sin(\frac{\alpha}{2}) & cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \tag{E.25}$$

$$M_{1\,i,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$M_{2\,i,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})i + cos(\frac{\alpha}{2})j & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})i + cos(\frac{\alpha}{2})j \end{pmatrix}, \tag{E.26}$$

$$M_{1\,k,i}(\alpha) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix},$$

$$M_{2\,k,i}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})k + cos(\frac{\alpha}{2})i & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})k + cos(\frac{\alpha}{2})i \end{pmatrix}, \tag{E.27}$$

$$M_{1\,i,kl}(\alpha) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$M_{2\,i,kl}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})i + cos(\frac{\alpha}{2})kl & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})ik + cos(\frac{\alpha}{2})kl \end{pmatrix}, \tag{E.28}$$

$$M_{1\,jl,i}(\alpha) = \begin{pmatrix} -jl & 0 \\ 0 & -jl \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,jl,i}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})jl + cos(\frac{\alpha}{2})i & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})jl + cos(\frac{\alpha}{2})i \end{pmatrix}, \tag{E.29}$$

$$M_{1\,il,i}(\alpha) = \begin{pmatrix} -il & 0 \\ 0 & -il \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,il,i}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})il + cos(\frac{\alpha}{2})i & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})il + cos(\frac{\alpha}{2})i \end{pmatrix}, \tag{E.30}$$

$$M_{1\,i,l}(\alpha) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,i,l}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})i + cos(\frac{\alpha}{2})l & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})i + cos(\frac{\alpha}{2})l \end{pmatrix}, \tag{E.31}$$

$$M_{1\,j,k}(\alpha) = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,j,k}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})j + cos(\frac{\alpha}{2})k & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})j + cos(\frac{\alpha}{2})k \end{pmatrix}, \tag{E.32}$$

$$M_{1\,kl,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} -kl & 0 \\ 0 & -kl \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,kl,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})kl + cos(\frac{\alpha}{2})j & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})kl + cos(\frac{\alpha}{2})j \end{pmatrix}, \tag{E.33}$$

$$M_{1\,kl,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} -kl & 0 \\ 0 & -kl \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,kl,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})kl + cos(\frac{\alpha}{2})j & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})kl + cos(\frac{\alpha}{2})j \end{pmatrix}, \tag{E.34}$$

$$M_{1\,jl,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} -jl & 0 \\ 0 & -jl \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,jl,j}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})jl + cos(\frac{\alpha}{2})j & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})jl + cos(\frac{\alpha}{2})j \end{pmatrix}, \tag{E.35}$$

$$M_{1\,j,il}(\alpha) = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,j,il}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})j + cos(\frac{\alpha}{2})il & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})j + cos(\frac{\alpha}{2})il \end{pmatrix}, \tag{E.36}$$

$$M_{1\,j,l}(\alpha) = \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,j,l}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})j + cos(\frac{\alpha}{2})l & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})j + cos(\frac{\alpha}{2})l \end{pmatrix}, \tag{E.37}$$

$$M_{1\,kl,k}(\alpha) = \begin{pmatrix} -kl & 0 \\ 0 & -kl \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,kl,k}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})kl + cos(\frac{\alpha}{2})k & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})kl + cos(\frac{\alpha}{2})k \end{pmatrix}, \tag{E.38}$$

$$M_{1\,k,jl}(\alpha) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,k,jl}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})k + cos(\frac{\alpha}{2})jl & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})k + cos(\frac{\alpha}{2})jl \end{pmatrix}, \tag{E.39}$$

$$M_{1\,il,k}(\alpha) = \begin{pmatrix} -il & 0 \\ 0 & -il \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,il,k}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})il + cos(\frac{\alpha}{2})k & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})il + cos(\frac{\alpha}{2})k \end{pmatrix}, \tag{E.40}$$

$$M_{1\,k,l}(\alpha) = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,k,l}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})k + cos(\frac{\alpha}{2})l & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})k + cos(\frac{\alpha}{2})l \end{pmatrix}, \tag{E.41}$$

$$M_{1\,kl,jl}(\alpha) = \begin{pmatrix} -kl & 0 \\ 0 & -kl \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,kl,jl}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})kl + cos(\frac{\alpha}{2})jl & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})kl + cos(\frac{\alpha}{2})jl \end{pmatrix}, \tag{E.42}$$

$$M_{1\,il,kl}(\alpha) = \begin{pmatrix} -il & 0 \\ 0 & -il \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,il,kl}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})il + cos(\frac{\alpha}{2})kl & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})il + cos(\frac{\alpha}{2})kl \end{pmatrix}, \tag{E.43}$$

$$M_{1\,l,kl}(\alpha) = \begin{pmatrix} -l & 0 \\ 0 & -l \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,l,kl}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})l + cos(\frac{\alpha}{2})kl & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})l + cos(\frac{\alpha}{2})kl \end{pmatrix}, \tag{E.44}$$

$$M_{1\,jl,il}(\alpha) = \begin{pmatrix} -jl & 0 \\ 0 & -jl \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,jl,il}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{(\frac{\alpha}{2})}{2})jl + cos(\frac{\alpha}{2})il & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})jl + cos(\frac{\alpha}{2})il \end{pmatrix}, \tag{E.45}$$

$$M_{1\,l,jl}(\alpha) = \begin{pmatrix} -l & 0 \\ 0 & -l \end{pmatrix},$$
$$M_{2\,l,jl}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2})l + cos(\frac{\alpha}{2})jl & 0 \\ 0 & cos(\frac{\alpha}{2})l + cos(\frac{\alpha}{2})jl \end{pmatrix}. \tag{E.46}$$

Halaman ini sengaja dikosongkan

Lampiran F

Skrip MATLAB Representasi Fundamental dan Adjoint Grup E_6

Representasi fundamental dan adjoint dari grup E_6 dapat dihitung menggunakan aplikasi komputasi MATLAB.

Pada awalnya dibuat terlebih dahulu skrip fungsi yang dapat bekerja seperti delta kronecker $\delta_{a,b}$,

```
1 function y=delta(a,b)
2 if a==b
3     y=1;
4 else
5     y=0;
6 end
```

Serta, tensor levi civita ϵ_{abc},

```
function [n]=levi_civita(a) % a=[i j k ...]
if sum(sort (a)~=(1:length(a)))>0
    n=0;
else
    n=(-1)^mod(permutation_count(a),2);
end

% Menghitung permutasi objek
function n=permutation_count(a)
[b,n]=bubble_sort(a);

% a bubble sort with a permutation count
function [b,n]=bubble_sort(a) % n = jumlah permutasinya
b=a;
n=0;
m=length(a);
if m>1
    for i=1:m-1
        if b(i)>b(i+1)
            c=b(i);b(i)=b(i+1);b(i+1)=c;
            n=n+1;
        end
    end
    [c,k]=bubble_sort(b(1:m-1));
    b=[c b(m)];
    n=n+k;
end
```

Setelah itu, didefenisikan pula matrik Gell-Mann berdasarkan (3.86) sebagai objek berbentuk matrik dengan ukuran $(3 \times 3 \times 8)$,

```
lambda(:,:,1)=[0 1 0; 1 0 0; 0 0 0];
lambda(:,:,2)=[0 -i 0; i 0 0; 0 0 0];
lambda(:,:,3)=[1 0 0; 0 -1 0; 0 0 0];
lambda(:,:,4)=[0 0 1; 0 0 0; 1 0 0];
lambda(:,:,5)=[0 0 -i; 0 0 0; i 0 0];
lambda(:,:,6)=[0 0 0; 0 0 1; 0 1 0];
lambda(:,:,7)=[0 0 0; 0 0 -i; 0 i 0];
lambda(:,:,8)=1/sqrt(3)*[1 0 0; 0 1 0; 0 0
    -2];
```

Lalu, digunakan matrik L, M, N untuk membentuk vektor ψ_μ seperti pada (4.4),

```
L=sym('L%d%d',[3,3]);
M=sym('M%d%d',[3,3]);
N=sym('N%d%d',[3,3]);
psi=[reshape(L.',9,1);reshape(M.',9,1);
   reshape(N.',9,1)];
```

Kemudian, didefenisikan matrik 'gen' berukuran $(27 \times 27 \times 78)$ sebagai tempat hasil perhitungan generatornya. Serta didefenisikann indeks h sebagai indeks urutan generatornya.

```
gen=zeros(27,27,78);
h=0;
```

Dalam notasi bra-ket Dirac dapat dihitung pengaruh generator pada vektor $|\psi_\mu\rangle$. Untuk generator yang berasal dari dekomposisi

$$\mathbf{(8,1,1)} + \mathbf{(1,8,1)} + \mathbf{(1,1,8)},$$

dilakukan transformasi sesuai dengan (4.9a), (4.9b), dan (4.9c). Untuk mendapat matrik generator 'gen' hasil dekomposisi ini, digunakan sifat ortonormal bra-ket sesuai dengan (4.22),

```
for A=1:8
    h=h+1
    L1=1/2*lambda(:,:,A)*L;
    M1=zeros(size(M));
    N1=-1/2*N*lambda(:,:,A);
    psin=[reshape(L1.',9,1);reshape(M1
       .',9,1);reshape(N1.',9,1)];
    for i=1:27
    for j=1:27
        if psin(j)==0
        gen(j,i,h)=0;
        elseif psi(i)== psin(j)/coeffs(
           psin(j),psi(i))
        gen(j,i,h)=coeffs(psin(j),psi(i));
        else
        gen(j,i,h)=0;
        end
    end
    end
end
 for A=1:8
     h=h+1
     L1=-1/2*L*lambda(:,:,A);
     M1=1/2*lambda(:,:,A)*M;
     N1=zeros(size(N));
     psin=[reshape(L1.',9,1);reshape(M1
        .',9,1);reshape(N1.',9,1)];
     for i=1:27
     for j=1:27
         if psin(j)==0
```

```
28            gen(j,i,h)=0;
29            elseif psi(i)== psin(j)/coeffs(
                 psin(j),psi(i))
30            gen(j,i,h)=coeffs(psin(j),psi(i))
                 ;
31            else
32            gen(j,i,h)=0;
33            end
34        end
35        end
36    end
37    for A=1:8
38        h=h+1
39        L1=zeros(size(L));
40        M1=-1/2*M*lambda(:,:,A);
41        N1=1/2*lambda(:,:,A)*N;
42        psin=[reshape(L1.',9,1);reshape(M1
             .',9,1);reshape(N1.',9,1)];
43        for i=1:27
44        for j=1:27
45            if psin(j)==0
46            gen(j,i,h)=0;
47            elseif psi(i)== psin(j)/coeffs(
                 psin(j),psi(i))
48            gen(j,i,h)=coeffs(psin(j),psi(i))
                 ;
49            else
50            gen(j,i,h)=0;
51            end
52        end
53        end
54    end
```

Sedangkan, generator yang berasal dari dekomposisi

$$\mathbf{(3,3,3)} + (\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}}), \tag{F.1}$$

melakukan transformasi sesuai dengan (4.13a),(4.13b), dan (4.13c). Lalu hasil transformasi dimasukkan kedalam sifat ortonarmalitas (4.22) untuk mendapatkan elemen dari matrik generator 'gen'.

```
for alpha=1:3
for a=1:3
for p=1:3
    L1=sym(zeros(3));M1=L1; N1=L1;
    for beta=1:3
    for b=1:3
    for gamma=1:3
        L1(beta,b)=L1(beta,b)+levi_civita
           ([alpha beta gamma])*delta(a,b)
           *N(p,gamma);
        end
    end
    end
    for b=1:3
    for q=1:3
    for c=1:3
        M1(b,q)=M1(b,q)+levi_civita([a b c
           ])*delta(p,q)*L(alpha,c);
        end
    end
    end
    for q=1:3
    for beta=1:3
    for r=1:3
        N1(q,beta)=N1(q,beta)+levi_civita
           ([p q r])*delta(alpha,beta)*M(a
```

```
            ,r);
23          end
24      end
25      end
26      psin=[reshape(L1.',9,1);reshape(M1
            .',9,1);reshape(N1.',9,1)];
27      h=h+1
28      for ii=1:27
29      for jj=1:27
30          if psin(jj)==0
31          gen(jj,ii,h)=0;
32          elseif psi(ii)== psin(jj)/coeffs(
               psin(jj),psi(ii))
33          gen(jj,ii,h)=coeffs(psin(jj),psi(
               ii));
34          else
35          gen(jj,ii,h)=0;
36          end
37       end
38       end
39  end
40  end
41  end
42  for alpha=1:3
43  for a=1:3
44  for p=1:3
45      L1=sym(zeros(3));M1=L1; N1=L1;
46      for beta=1:3
47      for b=1:3
48      for c=1:3
49          L1(beta,b)=L1(beta,b)-levi_civita
               ([a b c])*delta(beta,alpha)*M(c
               ,p);
```

```
50        end
51        end
52        end
53        for b=1:3
54        for q=1:3
55        for r=1:3
56            M1(b,q)=M1(b,q)-levi_civita([p q
                r])*delta(b,a)*N(r,alpha);
57        end
58        end
59        end
60        for q=1:3
61        for beta=1:3
62        for gamma=1:3
63            N1(q,beta)=N1(q,beta)-levi_civita
                ([alpha beta gamma])*delta(q,p
                )*L(gamma,a);
64        end
65        end
66        end
67        psin=[reshape(L1.',9,1);reshape(M1
             .',9,1);reshape(N1.',9,1)];
68        h=h+1
69        for ii=1:27
70        for jj=1:27
71            if psin(jj)==0
72            gen(jj,ii,h)=0;
73            elseif psi(ii)== psin(jj)/coeffs(
                psin(jj),psi(ii))
74            gen(jj,ii,h)=coeffs(psin(jj),psi(
                ii));
75            else
76            gen(jj,ii,h)=0;
```

```
77              end
78          end
79          end
80  end
81  end
82  end
```

Sifat hermitian pada generator dari dekomposisi (F) terjamin dibangun dari matrik Gell-Mann yang hermitian. Sedangkan generator dari dekomposisi (F.1) tidak terjamin. Untuk menjamin sifat hermitiannya diambil notasi baru sesuai dengan persamaan (4.29a) dan (4.29b),

```
1  for h=25:51
2      genk(:,:,h)=0.5*(gen(:,:,h)+gen(:,:,h
           +27));
3      genk(:,:,h+27)=0.5i*(gen(:,:,h)-gen
           (:,:,h+27));
4  end
5  gen(:,:,25:78)=genk(:,:,25:78);
```

Sehingga sudah didapatkan semua Generator dalam representasi ini fundamental.

Generator dalam representasi adjoint bisa didapatkan menggunakan konstanta struktur yang telah dibahas pada bagian (**??**). Untuk mempermudah proses komputasi dari konstanta struktur, digunakan sifat (4.30) dan (4.32),

$$\begin{aligned} 3 &= tr({}_m T_m T) \\ &= tr(\frac{[{}_k T, {}_l T]}{i f_{klm}}{}_m T) \\ f_{klm} &= -\frac{i}{3} tr([{}_k T, {}_l T]_m T) \end{aligned} \tag{F.2}$$

Maka skrip komputasi MATLABnya memiliki bentuk,

```
for m=1:78
for l=1:78
for k=1:78
f(k,l,m)=tr((gen(:,:,k)*gen(:,:,l)-gen
   (:,:,l)*gen(:,:,k))*gen(:,:,m);
end
end
end
f=-(i/3)*f
```

Lampiran G

Representasi Fundamental Grup E_6

Sebagai kelengkapan, dituliskan bentuk eksplisit dari semua generator grup E_6 dalam representasi fundamental

$$
{}_1T = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0

$$
{}_2T = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0

$$
{}_3T = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0

$$
{}_4T = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0

$$
{}_5T = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0

$$
{}_6T = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0

$$
{}_7T = \begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_8T = \frac{1}{\sqrt{3}}
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0

$$
{}_9T = \begin{pmatrix}
0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.9}
$$

$$
{}_{10}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.10}
$$

$$
{}_{11}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.11}
$$

$$
{}_{12}T = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccc}
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \tag{G.12}
$$

$$
{}_{13}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0

$$
{}_{14}T =
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.14}
$$

$$
{}_{15}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\tag{G.15}
$$

$$
{}_{16}T = \frac{1}{\sqrt{3}}
\begin{pmatrix}
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.16}
$$

$$
{}_{17}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{18}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{19}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{20}T = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\

$$
{}_{21}T =
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{22}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{23}T =
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{24}T = \frac{1}{\sqrt{3}}
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\tag{G.24}
$$

$$
{}_{25}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.25}
$$

$$
{}_{26}T = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\tag{G.26}
$$

$$
{}_{27}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0

$$
{}_{28}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0\\
\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\tag{G.28}
$$

$$
{}_{29}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
\frac{1}{2} & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,\frac{1}{2} & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0
\end{pmatrix}
\tag{G.29}
$$

$$
{}_{30}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & \frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & \frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
\frac{1}{2} & 0\,0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & \frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0\,0 & 0 & 0\,\frac{1}{2} & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.30}
$$

$$
{}_{31}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & \frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & \frac{1}{2}\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
-\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & \frac{1}{2} & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0
\end{pmatrix}
\tag{G.31}
$$

$$
{}_{32}T =
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0

$$
{}_{33}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{2}\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
-\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,-\frac{1}{2} & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,\frac{1}{2}\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\\
0 & 0\,0\,0\,0\,\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.33}
$$

$$
{}_{34}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,\frac{1}{2}\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,\frac{1}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.34}
$$

$$
{}_{35}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,\frac{1}{2}\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,\frac{1}{2}\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
-\frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,\frac{1}{2}\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0
\end{pmatrix}
\tag{G.35}
$$

$$
{}_{36}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0\,\frac{1}{2} & 0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.36}
$$

$$
{}_{37}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{38}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.38}
$$

$$
{}_{39}T = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\tag{G.39}
$$

$$
{}_{40}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0
\end{pmatrix}
\tag{G.40}
$$

$$
{}_{41}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\tfrac{1}{2} & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\tfrac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & \tfrac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & \tfrac{1}{2}\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & -\tfrac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,\tfrac{1}{2}\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & -\tfrac{1}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\tfrac{1}{2} & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,\tfrac{1}{2}\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & -\tfrac{1}{2} & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & \tfrac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 \\
0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0
\end{pmatrix}
\tag{G.41}
$$

$$
{}_{42}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{43}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & \frac{1}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.43}
$$

$$
{}_{44}T =
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right)
\tag{G.44}
$$

$$
{}_{45}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,\frac{1}{2}\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0
\end{pmatrix}
\tag{G.45}
$$

$$
{}_{46}T =
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc

$$
{}_{47}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{48}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{49}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{50}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{51}T =
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc

$$
{}_{52}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\tag{G.52}
$$

$$
{}_{53}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{54}T =
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0

$$
{}_{55}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0\\
\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\tag{G.55}
$$

$$
{}_{56}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\tag{G.56}
$$

$$
{}_{57}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\tag{G.57}
$$

$$
{}_{58}T =
\left(\begin{array}{ccccccc

$$
{}_{59}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,\frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & \frac{i}{2} & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & \frac{i}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
-\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & \frac{i}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,\frac{i}{2} & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,\frac{i}{2} & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0
\end{pmatrix}
\tag{G.59}
$$

$$
{}_{60}T = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc}
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & \frac{i}{2} & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & -\frac{i}{2} & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & \frac{i}{2} \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & -\frac{i}{2} & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{i}{2}&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
-\frac{i}{2} & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&\frac{i}{2}&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & -\frac{i}{2} & 0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & \frac{i}{2} & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & -\frac{i}{2} & 0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & 0 & 0&0&\frac{i}{2}&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0 \\
0 & 0&0&0&0 & -\frac{i}{2} & 0&0&0&0&0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0&0&0&0&0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\tag{G.60}
$$

$$
{}_{61}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\tag{G.61}
$$

$$
{}_{62}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\tag{G.62}
$$

$$
{}_{63}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,\frac{i}{2}\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,\frac{i}{2}\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,\frac{i}{2}\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & \frac{i}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
\frac{i}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.63}
$$

$$
{}_{64}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\frac{i}{2}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0

$$
{}_{65}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{66}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{67}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,-\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,\frac{i}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0

$$
{}_{68}T =
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{69}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,\frac{i}{2} & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,\frac{i}{2}\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & \frac{i}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & \frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & \frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0\,\frac{i}{2} & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.69}
$$

$$
{}_{70}T =
$$

$$
\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccc}
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & \frac{i}{2} & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&\frac{i}{2}&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&\frac{i}{2} \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & -\frac{i}{2} & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & \frac{i}{2} & 0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & -\frac{i}{2} & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&\frac{i}{2}&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
-\frac{i}{2} & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & \frac{i}{2} & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0 \\
0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0&0&-\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0&0&0&0&0&0 & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0&0&0
\end{array}\right)
\tag{G.70}
$$

$$
{}_{71}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & \frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,\frac{i}{2}\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{i}{2} \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & \frac{i}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,\frac{i}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
-\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,\frac{i}{2}\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0\,0\,0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{G.71}
$$

$$
{}_{72}T =
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccccc

$$
{}_{73}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&

$$
{}_{74}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & \tfrac{i}{2}\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\tfrac{i}{2} & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & -\tfrac{i}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & \tfrac{i}{2}\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\tfrac{i}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & -\tfrac{i}{2} \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & \tfrac{i}{2} & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,\tfrac{i}{2}\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0

$$
{}_{75}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & \frac{i}{2}\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,\frac{i}{2} & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,\frac{i}{2} & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,\frac{i}{2} & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & \frac{i}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,\frac{i}{2}\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0 \\
0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0
\end{pmatrix}
\tag{G.75}
$$

$$
{}_{76}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,\frac{i}{2} & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,-\frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,\frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,-\frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,\frac{i}{2}\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & -\frac{i}{2}\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0

$$
{}_{77}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & \frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,\frac{i}{2}\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & \frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & -\frac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & -\frac{i}{2} \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,\frac{i}{2}\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0 & 0 \\
0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0\,0\,0\,0 & 0 & 0\,0\,0

$$
{}_{78}T =
$$

$$
\begin{pmatrix}
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,\tfrac{i}{2}\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,-\tfrac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,\tfrac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,-\tfrac{i}{2} & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 \\
0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0 & 0\,0\,0

Halaman ini sengaja dikosongkan

Lampiran H

Representasi Adjoint Grup E_6

Pada lampiran ini dituliskan konstanta struktur dari grup E_6. Nilai konstanta struktur yang tidak dituliskan memiliki nilai 0 bila tidak memiliki indeks yang merupakan permutasi dari indeks konstanta struktur dalam lampiran ini. Sedangkan nilai konstanta struktur sisanya dapat dituliskan menggunakan sifat antisimetrik dari aljabar grup E_6 (4.32).

$$f_{1(25)(61)} = \frac{1}{2} \qquad f_{1(26)(62)} = \frac{1}{2} \qquad f_{1(27)(63)} = \frac{1}{2} \tag{H.1}$$

$$f_{1(28)(64)} = \frac{1}{2} \qquad f_{1(29)(65)} = \frac{1}{2} \qquad f_{1(30)(66)} = \frac{1}{2} \tag{H.2}$$

$$f_{1(31)(67)} = \frac{1}{2} \qquad f_{1(32)(68)} = \frac{1}{2} \qquad f_{1(33)(69)} = \frac{1}{2} \tag{H.3}$$

$$f_{1(34)(52)} = \frac{1}{2} \qquad f_{1(35)(53)} = \frac{1}{2} \qquad f_{1(36)(54)} = \frac{1}{2} \tag{H.4}$$

$$f_{1(37)(55)} = \frac{1}{2} \qquad f_{1(38)(56)} = \frac{1}{2} \qquad f_{1(39)(57)} = \frac{1}{2} \tag{H.5}$$

$$f_{1(40)(58)} = \frac{1}{2} \qquad f_{1(41)(59)} = \frac{1}{2} \qquad f_{1(42)(60)} = \frac{1}{2} \tag{H.6}$$

$$f_{2(25)(34))} = \frac{1}{2} \qquad f_{2(26)(35)} = \frac{1}{2} \qquad f_{2(27)(36)} = \frac{1}{2} \tag{H.7}$$

$$f_{2(28)(37))} = \frac{1}{2} \qquad f_{2(29)(38)} = \frac{1}{2} \qquad f_{2(30)(39)} = \frac{1}{2} \tag{H.8}$$

$$f_{2(31)(40))} = \frac{1}{2} \qquad f_{2(32)(41)} = \frac{1}{2} \qquad f_{2(33)(42)} = \frac{1}{2} \tag{H.9}$$

$$f_{2(52)(61)} = \frac{1}{2} \qquad f_{2(53)(62)} = \frac{1}{2} \qquad f_{2(54)(63)} = \frac{1}{2} \tag{H.10}$$

$$f_{2(55)(64)} = \frac{1}{2} \qquad f_{2(56)(65)} = \frac{1}{2} \qquad f_{2(57)(66)} = \frac{1}{2} \tag{H.11}$$

$$f_{2(58)(67)} = \frac{1}{2} \qquad f_{2(59)(68)} = \frac{1}{2} \qquad f_{2(60)(69)} = \frac{1}{2} \tag{H.12}$$

$$f_{3(25)(52)} = \frac{1}{2} \qquad f_{3(26)(53)} = \frac{1}{2} \qquad f_{3(27)(54)} = \frac{1}{2} \tag{H.13}$$

$$f_{3(28)(55)} = \frac{1}{2} \qquad f_{3(29)(56)} = \frac{1}{2} \qquad f_{3(30)(57)} = \frac{1}{2} \tag{H.14}$$

$$f_{3(31)(58)} = \frac{1}{2} \qquad f_{3(32)(59)} = \frac{1}{2} \qquad f_{3(33)(60)} = \frac{1}{2} \tag{H.15}$$

$$f_{3(34)(61)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{3(35)(62)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{3(36)(63)} = -\frac{1}{2} \tag{H.16}$$

$$f_{3(37)(64)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{3(38)(65)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{3(39)(66)} = -\frac{1}{2} \tag{H.17}$$

$$f_{3(40)(67)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{3(41)(68)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{3(42)(69)} = -\frac{1}{2} \tag{H.18}$$

$$f_{3(40)(67)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{3(41)(68)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{3(42)(69)} = -\frac{1}{2} \tag{H.19}$$

$$f_{4(25)(70)} = \frac{1}{2} \qquad f_{4(26)(71)} = \frac{1}{2} \qquad f_{4(27)(72)} = \frac{1}{2} \tag{H.20}$$

$$f_{4(28)(73)} = \frac{1}{2} \qquad f_{4(29)(74)} = \frac{1}{2} \qquad f_{4(30)(75)} = \frac{1}{2} \tag{H.21}$$

$$f_{4(31)(76)} = \frac{1}{2} \qquad f_{4(32)(77)} = \frac{1}{2} \qquad f_{4(33)(78)} = \frac{1}{2} \tag{H.22}$$

$$f_{4(43)(52)} = \frac{1}{2} \qquad f_{4(44)(53)} = \frac{1}{2} \qquad f_{4(45)(54)} = \frac{1}{2} \tag{H.23}$$

$$f_{4(46)(55)} = \frac{1}{2} \qquad f_{4(47)(56)} = \frac{1}{2} \qquad f_{4(48)(57)} = \frac{1}{2} \tag{H.24}$$

$$f_{4(49)(58)} = \frac{1}{2} \qquad f_{4(50)(59)} = \frac{1}{2} \qquad f_{4(51)(60)} = \frac{1}{2} \tag{H.25}$$

$$f_{5(25)(43)} = \frac{1}{2} \qquad f_{5(26)(44)} = \frac{1}{2} \qquad f_{5(27)(45)} = \frac{1}{2} \tag{H.26}$$

$$f_{5(28)(46)} = \frac{1}{2} \qquad f_{5(29)(47)} = \frac{1}{2} \qquad f_{5(30)(48)} = \frac{1}{2} \tag{H.27}$$

$$f_{5(31)(49)} = \frac{1}{2} \qquad f_{5(32)(50)} = \frac{1}{2} \qquad f_{5(33)(51)} = \frac{1}{2} \tag{H.28}$$

$$f_{5(52)(70)} = \frac{1}{2} \qquad f_{5(53)(71)} = \frac{1}{2} \qquad f_{5(54)(72)} = \frac{1}{2} \tag{H.29}$$

$$f_{5(55)(73)} = \frac{1}{2} \qquad f_{5(56)(74)} = \frac{1}{2} \qquad f_{5(57)(75)} = \frac{1}{2} \tag{H.30}$$

$$f_{5(58)(76)} = \frac{1}{2} \qquad f_{5(59)(77)} = \frac{1}{2} \qquad f_{5(60)(78)} = \frac{1}{2} \tag{H.31}$$

$$f_{6(34)(70)} = \frac{1}{2} \qquad f_{6(35)(71)} = \frac{1}{2} \qquad f_{6(36)(72)} = \frac{1}{2} \tag{H.32}$$

$$f_{6(37)(73)} = \frac{1}{2} \qquad f_{6(38)(74)} = \frac{1}{2} \qquad f_{6(39)(75)} = \frac{1}{2} \tag{H.33}$$

$$f_{6(40)(76)} = \frac{1}{2} \qquad f_{6(41)(77)} = \frac{1}{2} \qquad f_{6(42)(78)} = \frac{1}{2} \tag{H.34}$$

$$f_{6(43)(61)} = \frac{1}{2} \qquad f_{6(44)(62)} = \frac{1}{2} \qquad f_{6(45)(63)} = \frac{1}{2} \tag{H.35}$$

$$f_{6(46)(64)} = \frac{1}{2} \qquad f_{6(47)(65)} = \frac{1}{2} \qquad f_{6(48)(66)} = \frac{1}{2} \tag{H.36}$$

$$f_{6(49)(67)} = \frac{1}{2} \qquad f_{6(50)(68)} = \frac{1}{2} \qquad f_{6(51)(69)} = \frac{1}{2} \tag{H.37}$$

$$f_{7(34)(43)} = \frac{1}{2} \qquad f_{7(35)(44)} = \frac{1}{2} \qquad f_{7(36)(45)} = \frac{1}{2} \tag{H.38}$$

$$f_{7(37)(46)} = \frac{1}{2} \qquad f_{7(38)(47)} = \frac{1}{2} \qquad f_{7(39)(48)} = \frac{1}{2} \tag{H.39}$$

$$f_{7(40)(49)} = \frac{1}{2} \qquad f_{7(41)(50)} = \frac{1}{2} \qquad f_{7(42)(51)} = \frac{1}{2} \tag{H.40}$$

$$f_{7(61)(70)} = \frac{1}{2} \qquad f_{7(62)(71)} = \frac{1}{2} \qquad f_{7(63)(72)} = \frac{1}{2} \tag{H.41}$$

$$f_{7(64)(73)} = \frac{1}{2} \qquad f_{7(65)(74)} = \frac{1}{2} \qquad f_{7(66)(75)} = \frac{1}{2} \tag{H.42}$$

$$f_{7(67)(76)} = \frac{1}{2} \qquad f_{7(68)(77)} = \frac{1}{2} \qquad f_{7(69)(78)} = \frac{1}{2} \tag{H.43}$$

$$f_{8(25)(52)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{8(26)(53)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{8(27)(54)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{H.44}$$

$$f_{8(28)(55)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{8(29)(56)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{8(30)(57)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{H.45}$$

$$f_{8(31)(58)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{8(32)(59)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{8(33)(60)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{H.46}$$

$$f_{8(34)(61)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{8(35)(62)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{8(36)(63)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{H.47}$$

$$f_{8(37)(64)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{8(38)(65)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{8(39)(66)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{H.48}$$

$$f_{8(40)(67)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{8(41)(68)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{8(42)(69)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{H.49}$$

$$f_{8(43)(70)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad f_{8(44)(71)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad f_{8(45)(72)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.50}$$

$$f_{8(46)(73)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad f_{8(47)(74)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad f_{8(48)(75)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.51}$$

$$f_{8(49)(76)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad f_{8(50)(77)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad f_{8(51)(78)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.52}$$

$$f_{9(25)(55)} = \frac{1}{2} \qquad f_{9(26)(56)} = \frac{1}{2} \qquad f_{9(27)(57)} = \frac{1}{2} \tag{H.53}$$

$$f_{9(28)(52)} = \frac{1}{2} \qquad f_{9(29)(53)} = \frac{1}{2} \qquad f_{9(30)(54)} = \frac{1}{2} \tag{H.54}$$

$$f_{9(34)(64)} = \frac{1}{2} \qquad f_{9(35)(65)} = \frac{1}{2} \qquad f_{9(36)(66)} = \frac{1}{2} \tag{H.55}$$

$$f_{9(37)(61)} = \frac{1}{2} \qquad f_{9(38)(62)} = \frac{1}{2} \qquad f_{9(39)(63)} = \frac{1}{2} \tag{H.56}$$

$$f_{9(43)(73)} = \frac{1}{2} \qquad f_{9(44)(74)} = \frac{1}{2} \qquad f_{9(45)(75)} = \frac{1}{2} \tag{H.57}$$

$$f_{9(46)(70)} = \frac{1}{2} \qquad f_{9(47)(71)} = \frac{1}{2} \qquad f_{9(48)(72)} = \frac{1}{2} \tag{H.58}$$

$$f_{10(25)(28)} = \frac{1}{2} \qquad f_{10(26)(29)} = \frac{1}{2} \qquad f_{10(27)(30)} = \frac{1}{2} \tag{H.59}$$

$$f_{10(34)(37)} = \frac{1}{2} \qquad f_{10(35)(38)} = \frac{1}{2} \qquad f_{10(36)(39)} = \frac{1}{2} \tag{H.60}$$

$$f_{10(43)(46)} = \frac{1}{2} \qquad f_{10(44)(47)} = \frac{1}{2} \qquad f_{10(45)(48)} = \frac{1}{2} \tag{H.61}$$

$$f_{10(52)(55)} = \frac{1}{2} \qquad f_{10(53)(56)} = \frac{1}{2} \qquad f_{10(54)(57)} = \frac{1}{2} \tag{H.62}$$

$$f_{10(61)(64)} = \frac{1}{2} \qquad f_{10(62)(65)} = \frac{1}{2} \qquad f_{10(63)(66)} = \frac{1}{2} \tag{H.63}$$

$$f_{10(70)(73)} = \frac{1}{2} \qquad f_{10(71)(74)} = \frac{1}{2} \qquad f_{10(72)(75)} = \frac{1}{2} \tag{H.64}$$

$$f_{11(25)(52)} = \frac{1}{2} \qquad f_{11(26)(53)} = \frac{1}{2} \qquad f_{11(27)(54)} = \frac{1}{2} \tag{H.65}$$

$$f_{11(28)(55)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{11(29)(56)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{11(30)(57)} = -\frac{1}{2} \tag{H.66}$$

$$f_{11(34)(61)} = \frac{1}{2} \qquad f_{11(35)(62)} = \frac{1}{2} \qquad f_{11(36)(63)} = \frac{1}{2} \tag{H.67}$$

$$f_{11(37)(64)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{11(38)(65)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{11(39)(66)} = -\frac{1}{2} \tag{H.68}$$

$$f_{11(43)(70)} = \frac{1}{2} \qquad f_{11(44)(71)} = \frac{1}{2} \qquad f_{11(45)(72)} = \frac{1}{2} \tag{H.69}$$

$$f_{11(46)(73)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{11(47)(74)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{11(48)(75)} = -\frac{1}{2} \tag{H.70}$$

$$f_{12(25)(58)} = \frac{1}{2} \qquad f_{12(26)(59)} = \frac{1}{2} \qquad f_{12(27)(60)} = \frac{1}{2} \tag{H.71}$$

$$f_{12(31)(52)} = \frac{1}{2} \qquad f_{12(32)(53)} = \frac{1}{2} \qquad f_{12(33)(54)} = \frac{1}{2} \tag{H.72}$$

$$f_{12(34)(67)} = \frac{1}{2} \qquad f_{12(35)(68)} = \frac{1}{2} \qquad f_{12(36)(69)} = \frac{1}{2} \tag{H.73}$$

$$f_{12(40)(61)} = \frac{1}{2} \qquad f_{12(41)(62)} = \frac{1}{2} \qquad f_{12(42)(63)} = \frac{1}{2} \tag{H.74}$$

$$f_{12(43)(76)} = \frac{1}{2} \qquad f_{12(44)(77)} = \frac{1}{2} \qquad f_{12(45)(78)} = \frac{1}{2} \tag{H.75}$$

$$f_{12(49)(70)} = \frac{1}{2} \qquad f_{12(50)(71)} = \frac{1}{2} \qquad f_{12(51)(72)} = \frac{1}{2} \tag{H.76}$$

$$f_{13(25)(31)} = \frac{1}{2} \qquad f_{13(26)(32)} = \frac{1}{2} \qquad f_{13(27)(33)} = \frac{1}{2} \tag{H.77}$$

$$f_{13(34)(40)} = \frac{1}{2} \qquad f_{13(35)(41)} = \frac{1}{2} \qquad f_{13(36)(42)} = \frac{1}{2} \tag{H.78}$$

$$f_{13(43)(49)} = \frac{1}{2} \qquad f_{13(44)(50)} = \frac{1}{2} \qquad f_{13(45)(51)} = \frac{1}{2} \tag{H.79}$$

$$f_{13(52)(58)} = \frac{1}{2} \qquad f_{13(53)(59)} = \frac{1}{2} \qquad f_{13(54)(60)} = \frac{1}{2} \tag{H.80}$$

$$f_{13(61)(67)} = \frac{1}{2} \qquad f_{13(62)(68)} = \frac{1}{2} \qquad f_{13(63)(69)} = \frac{1}{2} \tag{H.81}$$

$$f_{13(70)(76)} = \frac{1}{2} \qquad f_{13(71)(77)} = \frac{1}{2} \qquad f_{13(72)(78)} = \frac{1}{2} \tag{H.82}$$

$$f_{14(28)(58)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(29)(59)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(30)(60)} = \frac{1}{2} \tag{H.83}$$

$$f_{14(31)(55)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(32)(56)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(33)(57)} = \frac{1}{2} \tag{H.84}$$

$$f_{14(37)(67)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(38)(68)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(39)(69)} = \frac{1}{2} \tag{H.85}$$

$$f_{14(37)(67)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(38)(68)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(39)(69)} = \frac{1}{2} \tag{H.86}$$

$$f_{14(40)(64)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(41)(65)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(42)(66)} = \frac{1}{2} \tag{H.87}$$

$$f_{14(46)(76)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(47)(77)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(48)(78)} = \frac{1}{2} \tag{H.88}$$

$$f_{14(49)(73)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(50)(74)} = \frac{1}{2} \qquad f_{14(51)(75)} = \frac{1}{2} \tag{H.89}$$

$$f_{15(28)(31)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(29)(32)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(30)(33)} = \frac{1}{2} \tag{H.90}$$

$$f_{15(37)(40)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(38)(41)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(39)(42)} = \frac{1}{2} \tag{H.91}$$

$$f_{15(46)(49)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(47)(50)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(48)(51)} = \frac{1}{2} \tag{H.92}$$

$$f_{15(55)(58)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(56)(59)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(57)(60)} = \frac{1}{2} \tag{H.93}$$

$$f_{15(64)(67)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(65)(68)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(66)(69)} = \frac{1}{2} \tag{H.94}$$

$$f_{15(64)(67)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(65)(68)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(66)(69)} = \frac{1}{2} \tag{H.95}$$

$$f_{15(73)(76)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(74)(77)} = \frac{1}{2} \qquad f_{15(75)(78)} = \frac{1}{2} \tag{H.96}$$

$$f_{16(25)(52)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{16(26)(53)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{16(27)(54)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{H.97}$$

$$f_{16(28)(55)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{16(29)(56)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{16(30)(57)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{H.98}$$

$$f_{16(31)(58)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad f_{16(32)(59)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad f_{16(33)(60)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.99}$$

$$f_{16(34)(61)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{16(35)(62)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{16(36)(63)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{H.100}$$

$$f_{16(37)(64)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{16(38)(65)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad f_{16(39)(66)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{H.101}$$

$$f_{16(40)(67)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad f_{16(41)(68)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad f_{16(42)(69)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.102}$$

$$f_{16(43)(70)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{16(44)(71)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{16(45)(72)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{H.103}$$

$$f_{16(46)(73)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{16(47)(74)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{16(48)(75)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{H.104}$$

$$f_{16(49)(76)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad f_{16(50)(77)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad f_{16(51)(78)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.105}$$

$$f_{17(25)(53)} = \frac{1}{2} \quad f_{17(26)(52)} = \frac{1}{2} \quad f_{17(28)(56)} = \frac{1}{2} \tag{H.106}$$

$$f_{17(29)(55)} = \frac{1}{2} \quad f_{17(31)(59)} = \frac{1}{2} \quad f_{17(32)(58)} = \frac{1}{2} \tag{H.107}$$

$$f_{17(34)(62)} = \frac{1}{2} \quad f_{17(35)(61)} = \frac{1}{2} \quad f_{17(37)(65)} = \frac{1}{2} \tag{H.108}$$

$$f_{17(38)(64)} = \frac{1}{2} \quad f_{17(40)(68)} = \frac{1}{2} \quad f_{17(41)(67)} = \frac{1}{2} \tag{H.109}$$

$$f_{17(43)(71)} = \frac{1}{2} \quad f_{17(44)(70)} = \frac{1}{2} \quad f_{17(46)(74)} = \frac{1}{2} \tag{H.110}$$

$$f_{18(25)(26)} = \frac{1}{2} \quad f_{18(28)(29)} = \frac{1}{2} \quad f_{18(31)(32)} = \frac{1}{2} \tag{H.111}$$

$$f_{18(34)(35)} = \frac{1}{2} \quad f_{18(37)(38)} = \frac{1}{2} \quad f_{18(40)(41)} = \frac{1}{2} \tag{H.112}$$

$$f_{18(43)(44)} = \frac{1}{2} \quad f_{18(46)(47)} = \frac{1}{2} \quad f_{18(49)(50)} = \frac{1}{2} \tag{H.113}$$

$$f_{18(52)(53)} = \frac{1}{2} \qquad f_{18(55)(56)} = \frac{1}{2} \qquad f_{18(58)(59)} = \frac{1}{2} \tag{H.114}$$

$$f_{18(61)(62)} = \frac{1}{2} \qquad f_{18(64)(65)} = \frac{1}{2} \qquad f_{18(67)(68)} = \frac{1}{2} \tag{H.115}$$

$$f_{18(70)(71)} = \frac{1}{2} \qquad f_{18(73)(74)} = \frac{1}{2} \qquad f_{18(76)(77)} = \frac{1}{2} \tag{H.116}$$

$$f_{19(25)(52)} = \frac{1}{2} \qquad f_{19(26)(53)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{19(28)(55)} = \frac{1}{2} \tag{H.117}$$

$$f_{19(29)(56)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{19(31)(58)} = \frac{1}{2} \qquad f_{19(32)(59)} = -\frac{1}{2} \tag{H.118}$$

$$f_{19(34)(61)} = \frac{1}{2} \qquad f_{19(35)(62)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{19(37)(64)} = \frac{1}{2} \tag{H.119}$$

$$f_{19(38)(65)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{19(40)(67)} = \frac{1}{2} \qquad f_{19(41)(68)} = -\frac{1}{2} \tag{H.120}$$

$$f_{19(43)(70)} = \frac{1}{2} \qquad f_{19(44)(71)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{19(46)(73)} = \frac{1}{2} \tag{H.121}$$

$$f_{19(47)(74)} = -\frac{1}{2} \qquad f_{19(49)(76)} = \frac{1}{2} \qquad f_{19(50)(77)} = -\frac{1}{2} \tag{H.122}$$

$$f_{20(25)(54)} = \frac{1}{2} \qquad f_{20(27)(52)} = \frac{1}{2} \qquad f_{20(28)(57)} = \frac{1}{2} \tag{H.123}$$

$$f_{20(30)(55)} = \frac{1}{2} \qquad f_{20(31)(60)} = \frac{1}{2} \qquad f_{20(33)(58)} = \frac{1}{2} \tag{H.124}$$

$$f_{20(34)(63)} = \frac{1}{2} \qquad f_{20(36)(61)} = \frac{1}{2} \qquad f_{20(37)(66)} = \frac{1}{2} \tag{H.125}$$

$$f_{20(39)(64)} = \frac{1}{2} \qquad f_{20(40)(69)} = \frac{1}{2} \qquad f_{20(42)(67)} = \frac{1}{2} \tag{H.126}$$

$$f_{20(43)(72)} = \frac{1}{2} \qquad f_{20(45)(70)} = \frac{1}{2} \qquad f_{20(46)(75)} = \frac{1}{2} \tag{H.127}$$

$$f_{20(48)(73)} = \frac{1}{2} \qquad f_{20(49)(78)} = \frac{1}{2} \qquad f_{20(51)(76)} = \frac{1}{2} \tag{H.128}$$

$$f_{21(25)(27)} = \frac{1}{2} \qquad f_{21(28)(30)} = \frac{1}{2} \qquad f_{21(31)(33)} = \frac{1}{2} \tag{H.129}$$

$$f_{21(34)(36)} = \frac{1}{2} \qquad f_{21(37)(39)} = \frac{1}{2} \qquad f_{21(40)(42)} = \frac{1}{2} \tag{H.130}$$

$$f_{21(43)(45)} = \frac{1}{2} \qquad f_{21(46)(48)} = \frac{1}{2} \qquad f_{21(49)(51)} = \frac{1}{2} \tag{H.131}$$

$$f_{21(52)(54)} = \frac{1}{2} \qquad f_{21(55)(57)} = \frac{1}{2} \qquad f_{21(58)(60)} = \frac{1}{2} \tag{H.132}$$

$$f_{21(61)(63)} = \frac{1}{2} \qquad f_{21(64)(66)} = \frac{1}{2} \qquad f_{21(67)(69)} = \frac{1}{2} \tag{H.133}$$

$$f_{21(70)(72)} = \frac{1}{2} \qquad f_{21(73)(75)} = \frac{1}{2} \qquad f_{21(76)(78)} = \frac{1}{2} \tag{H.134}$$

$$f_{22(26)(54)} = \frac{1}{2} \qquad f_{22(27)(53)} = \frac{1}{2} \qquad f_{22(29)(57)} = \frac{1}{2} \tag{H.135}$$

$$f_{22(30)(56)} = \frac{1}{2} \qquad f_{22(32)(60)} = \frac{1}{2} \qquad f_{22(33)(59)} = \frac{1}{2} \tag{H.136}$$

$$f_{22(35)(63)} = \frac{1}{2} \qquad f_{22(36)(62)} = \frac{1}{2} \qquad f_{22(38)(66)} = \frac{1}{2} \tag{H.137}$$

$$f_{22(39)(65)} = \frac{1}{2} \qquad f_{22(41)(69)} = \frac{1}{2} \qquad f_{22(42)(68)} = \frac{1}{2} \tag{H.138}$$

$$f_{22(44)(72)} = \frac{1}{2} \qquad f_{22(45)(71)} = \frac{1}{2} \qquad f_{22(47)(75)} = \frac{1}{2} \tag{H.139}$$

$$f_{22(48)(74)} = \frac{1}{2} \qquad f_{22(50)(78)} = \frac{1}{2} \qquad f_{22(51)(77)} = \frac{1}{2} \tag{H.140}$$

$$f_{23(26)(27)} = \frac{1}{2} \qquad f_{23(29)(30)} = \frac{1}{2} \qquad f_{23(32)(33)} = \frac{1}{2} \tag{H.141}$$

$$f_{23(35)(36)} = \frac{1}{2} \qquad f_{23(38)(39)} = \frac{1}{2} \qquad f_{23(41)(42)} = \frac{1}{2} \tag{H.142}$$

$$f_{23(44)(45)} = \frac{1}{2} \qquad f_{23(47)(48)} = \frac{1}{2} \qquad f_{23(50)(51)} = \frac{1}{2} \tag{H.143}$$

$$f_{23(53)(54)} = \frac{1}{2} \qquad f_{23(56)(57)} = \frac{1}{2} \qquad f_{23(59)(60)} = \frac{1}{2} \tag{H.144}$$

$$f_{23(62)(63)} = \frac{1}{2} \qquad f_{23(65)(66)} = \frac{1}{2} \qquad f_{23(68)(69)} = \frac{1}{2} \tag{H.145}$$

$$f_{23(71)(72)} = \frac{1}{2} \qquad f_{23(74)(75)} = \frac{1}{2} \qquad f_{23(77)(78)} = \frac{1}{2} \tag{H.146}$$

$$f_{24(25)(52)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(26)(53)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(27)(54)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.147}$$

$$f_{24(28)(55)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(29)(56)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(30)(57)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.148}$$

$$f_{24(31)(58)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(32)(59)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(33)(60)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.149}$$

$$f_{24(34)(61)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(35)(62)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(36)(63)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.150}$$

$$f_{24(37)(64)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(38)(65)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(39)(66)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.151}$$

$$f_{24(40)(67)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(41)(68)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(42)(69)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.152}$$

$$f_{24(43)(70)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(44)(71)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(45)(72)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.153}$$

$$f_{24(46)(73)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(47)(74)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(48)(75)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.154}$$

$$f_{24(49)(76)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(50)(77)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad f_{24(51)(78)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{H.155}$$

Halaman ini sengaja dikosongkan

Lampiran I

Generator Representasi Spinor Grup E_6

Berdasarkan bagian (4.2.4), dapat dihitung generator grup E_6 dalam representasi spinor. Perhitungan generator transformasi dengan bentuk, $\dot{A}_q^{(n)}$, $\dot{G}_q^{(n)}$, $\dot{S}_q^{(n)}$, dan $\dot{R}_{xq}^{(n)}$ dapat dihasilkan bentuk umum generatornya sebagai berikut,

$$\begin{pmatrix} 0 & a_n & \bar{c}_n \\ \bar{a}_n & 0 & b_n \\ c_n & \bar{b}_n & 0 \end{pmatrix} \tag{I.1}$$

untuk setiap unit imajiner oktonion q dan tipe transformasi n ($n = 1, , 2, 3$).

Pada $\dot{A}_i^{(1)}$,

$$a_1 = a_j k - a_k j - a_{kl} jl + a_{jl} kl, \tag{I.2a}$$
$$b_1 = b_j k - b_k j - b_{kl} jl + b_{jl} kl, \tag{I.2b}$$
$$c_1 = c_j k - c_k j - c_{kl} jl + c_{jl} kl. \tag{I.2c}$$

Pada $\dot{A}_i^{(2)}$,

$$a_2 = a_j k - a_k j - a_{kl} jl + a_{jl} kl, \tag{I.3a}$$
$$b_2 = b_j k - b_k j - b_{kl} jl + b_{jl} kl, \tag{I.3b}$$
$$c_2 = c_j k - c_k j - c_{kl} jl + c_{jl} kl. \tag{I.3c}$$

Pada $\dot{A}_i^{(3)}$,

$$a_3 = a_j k - a_k j - a_{kl} jl + a_{jl} kl, \tag{I.4a}$$
$$b_3 = b_j k - b_k j - b_{kl} jl + b_{jl} kl, \tag{I.4b}$$
$$c_3 = c_j k - c_k j - c_{kl} jl + c_{jl} kl. \tag{I.4c}$$

Pada $\dot{A}_j^{(1)}$,

$$a_1 = a_k i - a_i k - a_{il} kl + a_{kl} il, \tag{I.5a}$$
$$b_1 = b_k i - b_i k - b_{il} kl + b_{kl} il, \tag{I.5b}$$
$$c_1 = c_k i - c_i k - c_{il} kl + c_{kl} il. \tag{I.5c}$$

Pada $\dot{A}_j^{(2)}$,

$$a_2 = a_k i - a_i k - a_{il} kl + a_{kl} il, \tag{I.6a}$$
$$b_2 = b_k i - b_i k - b_{il} kl + b_{kl} il, \tag{I.6b}$$
$$c_2 = c_k i - c_i k - c_{il} kl + c_{kl} il. \tag{I.6c}$$

Pada $\dot{A}_j^{(3)}$,

$$a_3 = a_k i - a_i k - a_{il} kl + a_{kl} il, \tag{I.7a}$$
$$b_3 = b_k i - b_i k - b_{il} kl + b_{kl} il, \tag{I.7b}$$
$$c_3 = c_k i - c_i k - c_{il} kl + c_{kl} il. \tag{I.7c}$$

Pada $\dot{A}_k^{(1)}$,

$$a_1 = a_i j - a_j i - a_{jl} il + a_{il} jl, \tag{I.8a}$$
$$b_1 = b_k i - b_i k - b_{il} kl + b_{kl} il, \tag{I.8b}$$
$$c_1 = c_k i - c_i k - c_{il} kl + c_{kl} il. \tag{I.8c}$$

Pada $\dot{A}_k^{(2)}$,

$$a_2 = a_i j - a_j i - a_{jl} il + a_{il} jl, \tag{I.9a}$$
$$b_2 = b_k i - b_i k - b_{il} kl + b_{kl} il, \tag{I.9b}$$
$$c_2 = c_k i - c_i k - c_{il} kl + c_{kl} il. \tag{I.9c}$$

Pada $\dot{A}_k^{(3)}$,

$$a_3 = a_i j - a_j i - a_{jl} il + a_{il} jl, \tag{I.10a}$$
$$b_3 = b_k i - b_i k - b_{il} kl + b_{kl} il, \tag{I.10b}$$
$$c_3 = c_k i - c_i k - c_{il} kl + c_{kl} il. \tag{I.10c}$$

Pada $\dot{A}_{kl}^{(1)}$,

$$a_1 = a_{jl} i - a_i jl - a_j il + a_{il} j, \tag{I.11a}$$
$$b_1 = b_{jl} i - b_i jl - b_j il + b_{il} j, \tag{I.11b}$$
$$c_1 = c_{jl} i - c_i jl - c_j il + c_{il} j. \tag{I.11c}$$

Pada $\dot{A}^{(2)}_{kl}$,

$$a_2 = a_{jl}i - a_ijl - a_jil + a_{il}j, \tag{I.12a}$$
$$b_2 = b_{jl}i - b_ijl - b_jil + b_{il}j, \tag{I.12b}$$
$$c_2 = c_{jl}i - c_ijl - c_jil + c_{il}j. \tag{I.12c}$$

Pada $\dot{A}^{(3)}_{kl}$,

$$a_3 = a_{jl}i - a_ijl - a_jil + a_{il}j, \tag{I.13a}$$
$$b_3 = b_{jl}i - b_ijl - b_jil + b_{il}j, \tag{I.13b}$$
$$c_3 = c_{jl}i - c_ijl - c_jil + c_{il}j. \tag{I.13c}$$

Pada $\dot{A}^{(1)}_{jl}$,

$$a_1 = a_ikl - a_{kl}i - a_{il}k + a_kil, \tag{I.14a}$$
$$b_1 = b_ikl - b_{kl}i - b_{il}k + b_kil, \tag{I.14b}$$
$$c_1 = c_ikl - c_{kl}i - c_{il}k + c_kil. \tag{I.14c}$$

Pada $\dot{A}^{(2)}_{jl}$,

$$a_2 = a_ikl - a_{kl}i - a_{il}k + a_kil, \tag{I.15a}$$
$$b_2 = b_ikl - b_{kl}i - b_{il}k + b_kil, \tag{I.15b}$$
$$c_2 = c_ikl - c_{kl}i - c_{il}k + c_kil. \tag{I.15c}$$

Pada $\dot{A}^{(3)}_{jl}$,

$$a_3 = a_ikl - a_{kl}i - a_{il}k + a_kil, \tag{I.16a}$$
$$b_3 = b_ikl - b_{kl}i - b_{il}k + b_kil, \tag{I.16b}$$
$$c_3 = c_ikl - c_{kl}i - c_{il}k + c_kil. \tag{I.16c}$$

Pada $\dot{A}_{il}^{(1)}$,

$$a_1 = a_{kl}i - a_ikl - a_kjl + a_{jl}k, \tag{I.17a}$$
$$b_1 = b_{kl}i - b_ikl - b_kjl + b_{jl}k, \tag{I.17b}$$
$$c_1 = c_{kl}i - c_ikl - c_kjl + c_{jl}k. \tag{I.17c}$$

Pada $\dot{A}_{il}^{(2)}$,

$$a_2 = a_{kl}i - a_ikl - a_kjl + a_{jl}k, \tag{I.18a}$$
$$b_2 = b_{kl}i - b_ikl - b_kjl + b_{jl}k, \tag{I.18b}$$
$$c_2 = c_{kl}i - c_ikl - c_kjl + c_{jl}k. \tag{I.18c}$$

Pada $\dot{A}_{il}^{(3)}$,

$$a_3 = a_{kl}i - a_ikl - a_kjl + a_{jl}k, \tag{I.19a}$$
$$b_3 = b_{kl}i - b_ikl - b_kjl + b_{jl}k, \tag{I.19b}$$
$$c_3 = c_{kl}i - c_ikl - c_kjl + c_{jl}k. \tag{I.19c}$$

Pada $\dot{A}_{l}^{(1)}$,

$$a_1 = a_{il}i - a_iil - a_{jl}j + a_jjl, \tag{I.20a}$$
$$b_1 = b_{il}i - b_iil - b_{jl}j + b_jjl, \tag{I.20b}$$
$$c_1 = c_{il}i - c_iil - c_{jl}j + c_jjl. \tag{I.20c}$$

Pada $\dot{A}_{l}^{(2)}$,

$$a_2 = a_{il}i - a_iil - a_{jl}j + a_jjl, \tag{I.21a}$$
$$b_2 = b_{il}i - b_iil - b_{jl}j + b_jjl, \tag{I.21b}$$
$$c_2 = c_{il}i - c_iil - c_{jl}j + c_jjl. \tag{I.21c}$$

Pada $\dot{A}_l^{(3)}$,

$$a_3 = a_{il}i - a_i il - a_{jl}j + a_j jl, \tag{I.22a}$$
$$b_3 = b_{il}i - b_i il - b_{jl}j + b_j jl, \tag{I.22b}$$
$$c_3 = c_{il}i - c_i il - c_{jl}j + c_j jl. \tag{I.22c}$$

Pada $\dot{G}_i^{(1)}$,

$$a_1 = a_j k - a_k j + a_{kl} jl - a_{jl} kl - 2a_l il + 2a_{il} l, \tag{I.23a}$$
$$b_1 = b_j k - b_k j + b_{kl} jl - b_{jl} kl - 2b_l il + 2b_{il} l, \tag{I.23b}$$
$$c_1 = c_j k - c_k j + c_{kl} jl - c_{jl} kl - 2c_l il + 2c_{il} l. \tag{I.23c}$$

Pada $\dot{G}_i^{(2)}$,

$$a_2 = a_j k - a_k j + a_{kl} jl - a_{jl} kl - 2a_l il + 2a_{il} l, \tag{I.24a}$$
$$b_2 = b_j k - b_k j + b_{kl} jl - b_{jl} kl - 2b_l il + 2b_{il} l, \tag{I.24b}$$
$$c_2 = c_j k - c_k j + c_{kl} jl - c_{jl} kl - 2c_l il + 2c_{il} l. \tag{I.24c}$$

Pada $\dot{G}_i^{(3)}$,

$$a_3 = a_j k - a_k j + a_{kl} jl - a_{jl} kl - 2a_l il + 2a_{il} l, \tag{I.25a}$$
$$b_3 = b_j k - b_k j + b_{kl} jl - b_{jl} kl - 2b_l il + 2b_{il} l, \tag{I.25b}$$
$$c_3 = c_j k - c_k j + c_{kl} jl - c_{jl} kl - 2c_l il + 2c_{il} l. \tag{I.25c}$$

Pada $\dot{G}_j^{(1)}$,

$$a_1 = a_k i - a_i k + a_{il} kl - a_{kl} il - 2a_l jl + 2a_{jl} l, \tag{I.26a}$$
$$b_1 = b_k i - b_i k + b_{il} kl - b_{kl} il - 2b_l jl + 2b_{jl} l, \tag{I.26b}$$
$$c_1 = c_k i - c_i k + c_{il} kl - c_{kl} il - 2c_l jl + 2c_{jl} l. \tag{I.26c}$$

Pada $\dot{G}_j^{(2)}$,

$$a_2 = a_k i - a_i k + a_{il} kl - a_{kl} il - 2a_l jl + 2a_{jl} l, \tag{I.27a}$$
$$b_2 = b_k i - b_i k + b_{il} kl - b_{kl} il - 2b_l jl + 2b_{jl} l, \tag{I.27b}$$
$$c_2 = c_k i - c_i k + c_{il} kl - c_{kl} il - 2c_l jl + 2c_{jl} l. \tag{I.27c}$$

Pada $\dot{G}_j^{(3)}$,

$$a_3 = a_k i - a_i k + a_{il} kl - a_{kl} il - 2a_l jl + 2a_{jl} l, \tag{I.28a}$$
$$b_3 = b_k i - b_i k + b_{il} kl - b_{kl} il - 2b_l jl + 2b_{jl} l, \tag{I.28b}$$
$$c_3 = c_k i - c_i k + c_{il} kl - c_{kl} il - 2c_l jl + 2c_{jl} l. \tag{I.28c}$$

Pada $\dot{G}_k^{(1)}$,

$$a_1 = a_i j - a_j i + a_{jl} il - a_{il} jl - 2a_l kl + 2a_{kl} l, \tag{I.29a}$$
$$b_1 = b_k i - b_i k + b_{il} kl - b_{kl} il - 2b_l kl + 2b_{kl} l, \tag{I.29b}$$
$$c_1 = c_k i - c_i k + c_{il} kl - c_{kl} il - 2c_l kl + 2c_{kl} l. \tag{I.29c}$$

Pada $\dot{G}_k^{(2)}$,

$$a_2 = a_i j - a_j i + a_{jl} il - a_{il} jl - 2a_l kl + 2a_{kl} l, \tag{I.30a}$$
$$b_2 = b_k i - b_i k + b_{il} kl - b_{kl} il - 2b_l kl + 2b_{kl} l, \tag{I.30b}$$
$$c_2 = c_k i - c_i k + c_{il} kl - c_{kl} il - 2c_l kl + 2c_{kl} l. \tag{I.30c}$$

Pada $\dot{G}_k^{(3)}$,

$$a_3 = a_i j - a_j i + a_{jl} il - a_{il} jl - 2a_l kl + 2a_{kl} l, \tag{I.31a}$$
$$b_3 = b_k i - b_i k + b_{il} kl - b_{kl} il - 2b_l kl + 2b_{kl} l, \tag{I.31b}$$
$$c_3 = c_k i - c_i k + c_{il} kl - c_{kl} il - 2c_l kl + 2c_{kl} l. \tag{I.31c}$$

Pada $\dot{G}^{(1)}_{kl}$,

$$a_1 = a_{jl}i - a_i jl + a_j il - a_{il}j - 2a_k l + 2a_l k, \tag{I.32a}$$
$$b_1 = b_{jl}i - b_i jl + b_j il - b_{il}j - 2b_k l + 2b_l k, \tag{I.32b}$$
$$c_1 = c_{jl}i - c_i jl + c_j il - c_{il}j - 2c_k l + 2c_l k. \tag{I.32c}$$

Pada $\dot{G}^{(2)}_{kl}$,

$$a_2 = a_{jl}i - a_i jl + a_j il - a_{il}j - 2a_k l + 2a_l k, \tag{I.33a}$$
$$b_2 = b_{jl}i - b_i jl + b_j il - b_{il}j - 2b_k l + 2b_l k, \tag{I.33b}$$
$$c_2 = c_{jl}i - c_i jl + c_j il - c_{il}j - 2c_k l + 2c_l k. \tag{I.33c}$$

Pada $\dot{G}^{(3)}_{kl}$,

$$a_3 = a_{jl}i - a_i jl + a_j il - a_{il}j - 2a_k l + 2a_l k, \tag{I.34a}$$
$$b_3 = b_{jl}i - b_i jl + b_j il - b_{il}j - 2b_k l + 2b_l k, \tag{I.34b}$$
$$c_3 = c_{jl}i - c_i jl + c_j il - c_{il}j - 2c_k l + 2c_l k. \tag{I.34c}$$

Pada $\dot{G}^{(1)}_{jl}$,

$$a_1 = a_i kl - a_{kl}i + a_{il}k - a_k il - 2a_j l + 2a_l j, \tag{I.35a}$$
$$b_1 = b_i kl - b_{kl}i + b_{il}k - b_k il - 2b_j l + 2b_l j, \tag{I.35b}$$
$$c_1 = c_i kl - c_{kl}i + c_{il}k - c_k il - 2c_j l + 2c_l j. \tag{I.35c}$$

Pada $\dot{G}^{(2)}_{jl}$,

$$a_2 = a_i kl - a_{kl}i + a_{il}k - a_k il - 2a_j l + 2a_l j, \tag{I.36a}$$
$$b_2 = b_i kl - b_{kl}i + b_{il}k - b_k il - 2b_j l + 2b_l j, \tag{I.36b}$$
$$c_2 = c_i kl - c_{kl}i + c_{il}k - c_k il - 2c_j l + 2c_l j. \tag{I.36c}$$

Pada $\dot{G}^{(3)}_{jl}$,

$$a_3 = a_i kl - a_{kl} i + a_{il} k - a_k il - 2a_j l + 2a_l j, \tag{I.37a}$$
$$b_3 = b_i kl - b_{kl} i + b_{il} k - b_k il - 2b_j l + 2b_l j, \tag{I.37b}$$
$$c_3 = c_i kl - c_{kl} i + c_{il} k - c_k il - 2c_j l + 2c_l j. \tag{I.37c}$$

Pada $\dot{G}^{(1)}_{il}$,

$$a_1 = a_{kl} j - a_j kl + a_{jl} k - a_k jl - 2a_i l + 2a_l i, \tag{I.38a}$$
$$b_1 = b_{kl} j - b_j kl + b_{jl} k - b_k jl - 2b_i l + 2b_l i, \tag{I.38b}$$
$$c_1 = c_{kl} j - c_j kl + c_{jl} k - c_k jl - 2c_i l + 2c_l i. \tag{I.38c}$$

Pada $\dot{G}^{(2)}_{il}$,

$$a_2 = a_{kl} j - a_j kl + a_{jl} k - a_k jl - 2a_i l + 2a_l i, \tag{I.39a}$$
$$b_2 = b_{kl} j - b_j kl + b_{jl} k - b_k jl - 2b_i l + 2b_l i, \tag{I.39b}$$
$$c_2 = c_{kl} j - c_j kl + c_{jl} k - c_k jl - 2c_i l + 2c_l i. \tag{I.39c}$$

Pada $\dot{G}^{(3)}_{il}$,

$$a_3 = a_{kl} j - a_j kl + a_{jl} k - a_k jl - 2a_i l + 2a_l i, \tag{I.40a}$$
$$b_3 = b_{kl} j - b_j kl + b_{jl} k - b_k jl - 2b_i l + 2b_l i, \tag{I.40b}$$
$$c_3 = c_{kl} j - c_j kl + c_{jl} k - c_k jl - 2c_i l + 2c_l i. \tag{I.40c}$$

Pada $\dot{G}^{(1)}_{l}$,

$$a_1 = a_{il} i - a_i il + a_{jl} j - a_j jl - 2a_{kl} k + 2a_k kl, \tag{I.41a}$$
$$b_1 = b_{il} i - b_i il + b_{jl} j - b_j jl - 2b_{kl} k + 2b_k kl, \tag{I.41b}$$
$$c_1 = c_{il} i - c_i il + c_{jl} j - c_j jl - 2c_{kl} k + 2c_k kl. \tag{I.41c}$$

Pada $\dot{G}_l^{(2)}$,

$$a_2 = a_{il}i - a_i il + a_{jl}j - a_j jl - 2a_{kl}k + 2a_k kl, \tag{I.42a}$$
$$b_2 = b_{il}i - b_i il + b_{jl}j - b_j jl - 2b_{kl}k + 2b_k kl, \tag{I.42b}$$
$$c_2 = c_{il}i - c_i il + c_{jl}j - c_j jl - 2c_{kl}k + 2c_k kl. \tag{I.42c}$$

Pada $\dot{G}_l^{(3)}$,

$$a_3 = a_{il}i - a_i il + a_{jl}j - a_j jl - 2a_{kl}k + 2a_k kl, \tag{I.43a}$$
$$b_3 = b_{il}i - b_i il + b_{jl}j - b_j jl - 2b_{kl}k + 2b_k kl, \tag{I.43b}$$
$$c_3 = c_{il}i - c_i il + c_{jl}j - c_j jl - 2c_{kl}k + 2c_k kl. \tag{I.43c}$$

Pada $\dot{S}_i^{(1)}$,

$$a_1 = a_j k - a_k j + a_l il - a_{il}l + a_{kl}jl - a_{jl}kl, \tag{I.44a}$$
$$b_1 = \frac{3}{2}b_x i - \frac{3}{2}b_i - \frac{1}{2}b_j k + \frac{1}{2}b_k j - \frac{1}{2}b_{kl}jl + \frac{1}{2}b_{jl}kl - \frac{1}{2}b_l il + \frac{1}{2}b_{il}l, \tag{I.44b}$$
$$c_1 = -\frac{3}{2}b_x i + \frac{3}{2}c_i - \frac{1}{2}c_j k + \frac{1}{2}c_k j - \frac{1}{2}c_{kl}jl + \frac{1}{2}c_{jl}kl - \frac{1}{2}c_l il + \frac{1}{2}c_{il}l. \tag{I.44c}$$

Pada $\dot{S}_i^{(2)}$,

$$a_2 = -\frac{3}{2}a_x i + \frac{3}{2}a_i - \frac{1}{2}a_j k + \frac{1}{2}a_k j - \frac{1}{2}a_{kl}jl + \frac{1}{2}a_{jl}kl - \frac{1}{2}a_l il + \frac{1}{2}a_{il}l, \tag{I.45a}$$
$$b_2 = b_j k - b_k j + b_l il - b_{il}l + b_{kl}jl - b_{jl}kl, \tag{I.45b}$$
$$c_3 = \frac{3}{2}b_x i - \frac{3}{2}c_i - \frac{1}{2}c_j k + \frac{1}{2}c_k j - \frac{1}{2}c_{kl}jl + \frac{1}{2}c_{jl}kl - \frac{1}{2}c_l il + \frac{1}{2}c_{il}l. \tag{I.45c}$$

Pada $\dot{S}_i^{(3)}$,

$$a_3 = \frac{3}{2}a_x i - \frac{3}{2}a_i - \frac{1}{2}a_j k + \frac{1}{2}a_k j - \frac{1}{2}a_{kl} jl + \frac{1}{2}a_{jl} kl - \frac{1}{2}a_l il + \frac{1}{2}a_{il} l, \tag{I.46a}$$

$$b_3 = -\frac{3}{2}b_x i + \frac{3}{2}b_i - \frac{1}{2}b_j k + \frac{1}{2}b_k j - \frac{1}{2}b_{kl} jl + \frac{1}{2}b_{jl} kl - \frac{1}{2}b_l il + \frac{1}{2}b_{il} l, \tag{I.46b}$$

$$c_3 = c_j k - c_k j + c_l il - c_{il} l + c_{kl} jl - c_{jl} kl. \tag{I.46c}$$

Pada $\dot{S}_j^{(1)}$,

$$a_1 = a_k i - a_i k + a_{il} kl - a_{kl} il + a_l jl - a_{jl} l, \tag{I.47a}$$

$$b_1 = \frac{3}{2}b_x j - \frac{3}{2}b_j - \frac{1}{2}b_k i + \frac{1}{2}b_i k - \frac{1}{2}b_{il} kl + \frac{1}{2}b_{kl} il - \frac{1}{2}b_l jl + \frac{1}{2}b_{jl} l, \tag{I.47b}$$

$$c_1 = -\frac{3}{2}c_x j + \frac{3}{2}c_j - \frac{1}{2}c_k i + \frac{1}{2}c_i k - \frac{1}{2}c_{il} kl + \frac{1}{2}c_{kl} il - \frac{1}{2}c_l jl + \frac{1}{2}c_{jl} l. \tag{I.47c}$$

Pada $\dot{S}_j^{(2)}$,

$$a_2 = -\frac{3}{2}a_x j + \frac{3}{2}a_j - \frac{1}{2}a_k i + \frac{1}{2}a_i k - \frac{1}{2}a_{il} kl + \frac{1}{2}a_{kl} il - \frac{1}{2}a_l jl + \frac{1}{2}a_{jl} l, \tag{I.48a}$$

$$b_2 = b_k i - b_i k + b_{il} kl - b_{kl} il + b_l jl - b_{jl} l, \tag{I.48b}$$

$$c_3 = \frac{3}{2}c_x j - \frac{3}{2}c_j - \frac{1}{2}c_k i + \frac{1}{2}c_i k - \frac{1}{2}c_{il} kl + \frac{1}{2}c_{kl} il - \frac{1}{2}c_l jl + \frac{1}{2}c_{jl} l. \tag{I.48c}$$

Pada $\dot{S}_j^{(3)}$,

$$a_3 = \frac{3}{2}a_x j - \frac{3}{2}a_j - \frac{1}{2}a_k i + \frac{1}{2}a_i k - \frac{1}{2}a_{il}kl + \frac{1}{2}a_{kl}il - \frac{1}{2}a_l jl + \frac{1}{2}a_{jl}l, \tag{I.49a}$$

$$b_3 = -\frac{3}{2}b_x j + \frac{3}{2}b_j - \frac{1}{2}b_k i + \frac{1}{2}b_i k - \frac{1}{2}b_{il}kl + \frac{1}{2}b_{kl}il - \frac{1}{2}b_l jl + \frac{1}{2}b_{jl}l, \tag{I.49b}$$

$$c_3 = c_k i - c_i k + c_{il}kl - c_{kl}il + c_l jl - c_{jl}l. \tag{I.49c}$$

Pada $\dot{S}_k^{(1)}$,

$$a_1 = a_i j - a_j i + a_{jl}il - a_{il}jl + a_l kl - a_{kl}l, \tag{I.50a}$$

$$b_1 = \frac{3}{2}b_x k - \frac{3}{2}b_k - \frac{1}{2}b_i j + \frac{1}{2}b_j i - \frac{1}{2}b_{jl}il + \frac{1}{2}b_{il}jl - \frac{1}{2}b_l kl + \frac{1}{2}b_{kl}l, \tag{I.50b}$$

$$c_1 = -\frac{3}{2}c_x k + \frac{3}{2}c_k - \frac{1}{2}c_i j + \frac{1}{2}c_j i - \frac{1}{2}c_{jl}il + \frac{1}{2}c_{il}jl - \frac{1}{2}c_l kl + \frac{1}{2}c_{kl}l. \tag{I.50c}$$

Pada $\dot{S}_k^{(2)}$,

$$a_2 = -\frac{3}{2}a_x k + \frac{3}{2}a_k - \frac{1}{2}a_i j + \frac{1}{2}a_j i - \frac{1}{2}a_{jl}il + \frac{1}{2}a_{il}jl - \frac{1}{2}a_l kl + \frac{1}{2}a_{kl}l \tag{I.51a}$$

$$b_2 = b_i j - b_j i + b_{jl}il - b_{il}jl + b_l kl - b_{kl}l, \tag{I.51b}$$

$$c_3 = \frac{3}{2}c_x k - \frac{3}{2}c_k - \frac{1}{2}c_i j + \frac{1}{2}c_j i - \frac{1}{2}c_{jl}il + \frac{1}{2}c_{il}jl - \frac{1}{2}c_l kl + \frac{1}{2}c_{kl}l. \tag{I.51c}$$

Pada $\dot{S}_k^{(3)}$,

$$a_3 = \frac{3}{2}a_x k - \frac{3}{2}a_k - \frac{1}{2}a_i j + \frac{1}{2}a_j i - \frac{1}{2}a_{jl} il + \frac{1}{2}a_{il} jl - \frac{1}{2}a_l kl + \frac{1}{2}a_{kl} l, \tag{I.52a}$$

$$b_3 = -\frac{3}{2}b_x k + \frac{3}{2}b_k - \frac{1}{2}b_i j + \frac{1}{2}b_j i - \frac{1}{2}b_{jl} il + \frac{1}{2}b_{il} jl - \frac{1}{2}b_l kl + \frac{1}{2}b_{kl} l, \tag{I.52b}$$

$$c_3 = c_i j - c_j i + c_{jl} il - c_{il} jl + c_l kl - c_{kl} l. \tag{I.52c}$$

Pada $\dot{S}_{kl}^{(1)}$,

$$a_1 = a_{jl} i - a_i jl + a_j il - a_{il} j + a_k l - a_l k, \tag{I.53a}$$

$$b_1 = \frac{3}{2}b_x kl - \frac{3}{2}b_{kl} - \frac{1}{2}b_{jl} i + \frac{1}{2}b_i jl - \frac{1}{2}b_j il + \frac{1}{2}b_{il} j - \frac{1}{2}b_k l + \frac{1}{2}b_l k, \tag{I.53b}$$

$$c_1 = -\frac{3}{2}c_x kl + \frac{3}{2}c_{kl} - \frac{1}{2}c_{jl} i + \frac{1}{2}c_i jl - \frac{1}{2}c_j il + \frac{1}{2}c_{il} j - \frac{1}{2}c_k l + \frac{1}{2}c_l k. \tag{I.53c}$$

Pada $\dot{S}_{kl}^{(2)}$,

$$a_2 = -\frac{3}{2}a_x kl + \frac{3}{2}a_{kl} - \frac{1}{2}a_{jl} i + \frac{1}{2}a_i jl - \frac{1}{2}a_j il + \frac{1}{2}a_{il} j - \frac{1}{2}a_k l + \frac{1}{2}a_l k \tag{I.54a}$$

$$b_2 = b_{jl} i - b_i jl + b_j il - b_{il} j + b_k l - b_l k, \tag{I.54b}$$

$$c_3 = \frac{3}{2}c_x kl - \frac{3}{2}c_{kl} - \frac{1}{2}c_{jl} i + \frac{1}{2}c_i jl - \frac{1}{2}c_j il + \frac{1}{2}c_{il} j - \frac{1}{2}c_k l + \frac{1}{2}c_l k. \tag{I.54c}$$

Pada $\dot{S}^{(3)}_{kl}$,

$$a_3 = \frac{3}{2}a_x kl - \frac{3}{2}a_{kl} - \frac{1}{2}a_{jl}i + \frac{1}{2}a_i jl - \frac{1}{2}a_j il + \frac{1}{2}a_{il}j - \frac{1}{2}a_k l + \frac{1}{2}a_l k, \tag{I.55a}$$

$$b_3 = -\frac{3}{2}b_x kl + \frac{3}{2}b_{kl} - \frac{1}{2}b_{jl}i + \frac{1}{2}b_i jl - \frac{1}{2}b_j il + \frac{1}{2}b_{il}j - \frac{1}{2}b_k l + \frac{1}{2}b_l k, \tag{I.55b}$$

$$c_3 = c_{jl}i - c_i jl + c_j il - c_{il}j + c_k l - c_l k. \tag{I.55c}$$

Pada $\dot{S}^{(1)}_{jl}$,

$$a_1 = a_i kl - a_{kl}i + a_{il}k - a_k il + a_j l - a_l j, \tag{I.56a}$$

$$b_1 = \frac{3}{2}b_x jl - \frac{3}{2}b_{jl} - \frac{1}{2}b_i kl + \frac{1}{2}b_{kl}i - \frac{1}{2}b_{il}k + \frac{1}{2}b_k il - \frac{1}{2}b_j l + \frac{1}{2}b_l j, \tag{I.56b}$$

$$c_1 = -\frac{3}{2}c_x jl + \frac{3}{2}c_{jl} - \frac{1}{2}c_i kl + \frac{1}{2}c_{kl}i - \frac{1}{2}c_{il}k + \frac{1}{2}c_k il - \frac{1}{2}c_j l + \frac{1}{2}c_l j. \tag{I.56c}$$

Pada $\dot{S}^{(2)}_{jl}$,

$$a_2 = -\frac{3}{2}a_x jl + \frac{3}{2}a_{jl} - \frac{1}{2}a_i kl + \frac{1}{2}a_{kl}i - \frac{1}{2}a_{il}k + \frac{1}{2}a_k il - \frac{1}{2}a_j l + \frac{1}{2}a_l j, \tag{I.57a}$$

$$b_2 = b_i kl - b_{kl}i + b_{il}k - b_k il + b_j l - b_l j, \tag{I.57b}$$

$$c_3 = \frac{3}{2}c_x jl - \frac{3}{2}c_{jl} - \frac{1}{2}c_i kl + \frac{1}{2}c_{kl}i - \frac{1}{2}c_{il}k + \frac{1}{2}c_k il - \frac{1}{2}c_j l + \frac{1}{2}c_l j. \tag{I.57c}$$

Pada $\dot{S}^{(3)}_{jl}$,

$$a_3 = \frac{3}{2}a_x jl - \frac{3}{2}a_{jl} - \frac{1}{2}a_i kl + \frac{1}{2}a_{kl}i - \frac{1}{2}a_{il}k + \frac{1}{2}a_k il - \frac{1}{2}a_j l + \frac{1}{2}a_l j, \tag{I.58a}$$

$$b_3 = -\frac{3}{2}b_x jl + \frac{3}{2}b_{jl} - \frac{1}{2}b_i kl + \frac{1}{2}b_{kl}i - \frac{1}{2}b_{il}k + \frac{1}{2}b_k il - \frac{1}{2}b_j l + \frac{1}{2}b_l j, \tag{I.58b}$$

$$c_3 = c_i kl - c_{kl}i + c_{il}k - c_k il + c_j l - c_l j. \tag{I.58c}$$

Pada $\dot{S}^{(1)}_{il}$,

$$a_1 = a_{kl}j - a_j kl + a_k jl - a_{jl}k + a_i l - a_l i, \tag{I.59a}$$

$$b_1 = \frac{3}{2}b_x il - \frac{3}{2}b_{il} - \frac{1}{2}b_{kl}j + \frac{1}{2}b_j kl - \frac{1}{2}b_k jl + \frac{1}{2}b_{jl}k - \frac{1}{2}b_i l + \frac{1}{2}b_l i, \tag{I.59b}$$

$$c_1 = -\frac{3}{2}c_x il + \frac{3}{2}c_{il} - \frac{1}{2}c_{kl}j + \frac{1}{2}c_j kl - \frac{1}{2}c_k jl + \frac{1}{2}c_{jl}k - \frac{1}{2}c_i l + \frac{1}{2}c_l i. \tag{I.59c}$$

Pada $\dot{S}^{(2)}_{il}$,

$$a_2 = -\frac{3}{2}a_x il + \frac{3}{2}a_{il} - \frac{1}{2}a_{kl}j + \frac{1}{2}a_j kl - \frac{1}{2}a_k jl + \frac{1}{2}a_{jl}k - \frac{1}{2}a_i l + \frac{1}{2}a_l i, \tag{I.60a}$$

$$b_2 = b_{kl}j - b_j kl + b_k jl - b_{jl}k + b_i l - b_l i, \tag{I.60b}$$

$$c_3 = \frac{3}{2}c_x il - \frac{3}{2}c_{il} - \frac{1}{2}c_{kl}j + \frac{1}{2}c_j kl - \frac{1}{2}c_k jl + \frac{1}{2}c_{jl}k - \frac{1}{2}c_i l + \frac{1}{2}c_l i. \tag{I.60c}$$

Pada $\dot{S}_{il}^{(3)}$,

$$a_3 = \frac{3}{2}a_x il - \frac{3}{2}a_{il} - \frac{1}{2}a_{kl}j + \frac{1}{2}a_j kl - \frac{1}{2}a_k jl + \frac{1}{2}a_{jl}k - \frac{1}{2}a_i l + \frac{1}{2}a_l i, \tag{I.61a}$$

$$b_3 = -\frac{3}{2}b_x il + \frac{3}{2}b_{il} - \frac{1}{2}b_{kl}j + \frac{1}{2}b_j kl - \frac{1}{2}b_k jl + \frac{1}{2}b_{jl}k - \frac{1}{2}b_i l + \frac{1}{2}b_l i, \tag{I.61b}$$

$$c_3 = c_{kl}j - c_j kl + c_k jl - c_{jl}k + c_i l - c_l i. \tag{I.61c}$$

Pada $\dot{S}_{l}^{(1)}$,

$$a_1 = a_{il}i - a_i il + a_{jl}j - a_j jl + a_{kl}k - a_k kl, \tag{I.62a}$$

$$b_1 = \frac{3}{2}b_x l - \frac{3}{2}b_l - \frac{1}{2}b_{il}i + \frac{1}{2}b_i il - \frac{1}{2}b_{jl}j + \frac{1}{2}b_j jl - \frac{1}{2}b_{kl}k + \frac{1}{2}b_k kl, \tag{I.62b}$$

$$c_1 = -\frac{3}{2}c_x l + \frac{3}{2}c_l - \frac{1}{2}c_{il}i + \frac{1}{2}c_i il - \frac{1}{2}c_{jl}j + \frac{1}{2}c_j jl - \frac{1}{2}c_{kl}k + \frac{1}{2}c_k kl. \tag{I.62c}$$

Pada $\dot{S}_{l}^{(2)}$,

$$a_2 = -\frac{3}{2}a_x l + \frac{3}{2}a_l - \frac{1}{2}a_{il}i + \frac{1}{2}a_i il - \frac{1}{2}a_{jl}j + \frac{1}{2}a_j jl - \frac{1}{2}a_{kl}k + \frac{1}{2}a_k kl, \tag{I.63a}$$

$$b_2 = b_{il}i - b_i il + b_{jl}j - b_j jl + b_{kl}k - b_k kl, \tag{I.63b}$$

$$c_3 = \frac{3}{2}c_x l - \frac{3}{2}c_l - \frac{1}{2}c_{il}i + \frac{1}{2}c_i il - \frac{1}{2}c_{jl}j + \frac{1}{2}c_j jl - \frac{1}{2}c_{kl}k + \frac{1}{2}c_k kl. \tag{I.63c}$$

Pada $\dot{S}_l^{(3)}$,

$$a_3 = \frac{3}{2}a_x l - \frac{3}{2}a_l - \frac{1}{2}a_{il}i + \frac{1}{2}a_i il - \frac{1}{2}a_{jl}j + \frac{1}{2}a_j jl - \frac{1}{2}a_{kl}k + \frac{1}{2}a_k kl, \tag{I.64a}$$

$$b_3 = -\frac{3}{2}b_x l + \frac{3}{2}b_l - \frac{1}{2}b_{il}i + \frac{1}{2}b_i il - \frac{1}{2}b_{jl}j + \frac{1}{2}b_j jl - \frac{1}{2}b_{kl}k + \frac{1}{2}b_k kl, \tag{I.64b}$$

$$c_3 = c_{il}i - c_i il + c_{jl}j - c_j jl + c_{kl}k - c_k kl. \tag{I.64c}$$

Pada $\dot{R}_{xi}^{(1)}$,

$$a_1 = a_x i - a_i, \tag{I.65a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x i + \frac{1}{2}b_i - \frac{1}{2}b_j k + \frac{1}{2}b_k j - \frac{1}{2}b_{kl}jl + \frac{1}{2}b_{jl}kl - \frac{1}{2}b_l il + \frac{1}{2}b_{il}l, \tag{I.65b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}b_x i + \frac{1}{2}c_i + \frac{1}{2}c_j k - \frac{1}{2}c_k j + \frac{1}{2}c_{kl}jl - \frac{1}{2}c_{jl}kl + \frac{1}{2}c_l il - \frac{1}{2}c_{il}l. \tag{I.65c}$$

Pada $\dot{R}_{xi}^{(2)}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x i + \frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}a_j k - \frac{1}{2}a_k j + \frac{1}{2}a_{kl}jl - \frac{1}{2}a_{jl}kl + \frac{1}{2}a_l il - \frac{1}{2}a_{il}l, \tag{I.66a}$$

$$b_1 = b_x i - b_i, \tag{I.66b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x i + \frac{1}{2}c_i - \frac{1}{2}c_j k + \frac{1}{2}c_k j - \frac{1}{2}c_{kl}jl + \frac{1}{2}c_{jl}kl - \frac{1}{2}c_l il + \frac{1}{2}c_{il}l. \tag{I.66c}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{xi}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x i + \frac{1}{2}a_i - \frac{1}{2}a_j k + \frac{1}{2}a_k j - \frac{1}{2}a_{kl} jl + \frac{1}{2}a_{jl} kl - \frac{1}{2}a_l il + \frac{1}{2}a_{il} l, \tag{I.67a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x i + \frac{1}{2}b_i + \frac{1}{2}b_j k - \frac{1}{2}b_k j + \frac{1}{2}b_{kl} jl - \frac{1}{2}b_{jl} kl + \frac{1}{2}b_l il - \frac{1}{2}b_{il} l, \tag{I.67b}$$

$$c_1 = c_x i - c_i. \tag{I.67c}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{xj}$,

$$a_1 = a_x j - a_j, \tag{I.68a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x j + \frac{1}{2}b_j - \frac{1}{2}b_k i + \frac{1}{2}b_i k - \frac{1}{2}b_{il} kl + \frac{1}{2}b_{kl} il - \frac{1}{2}b_l jl + \frac{1}{2}b_{jl} l, \tag{I.68b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x j + \frac{1}{2}c_j + \frac{1}{2}c_k i - \frac{1}{2}c_i k + \frac{1}{2}c_{il} kl - \frac{1}{2}c_{kl} il + \frac{1}{2}c_l jl - \frac{1}{2}c_{jl} l. \tag{I.68c}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{xj}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x j + \frac{1}{2}a_j + \frac{1}{2}a_k i - \frac{1}{2}a_i k + \frac{1}{2}a_{il} kl - \frac{1}{2}a_{kl} il + \frac{1}{2}a_l jl - \frac{1}{2}a_{jl} l, \tag{I.69a}$$

$$b_1 = b_x j - b_j, \tag{I.69b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x j + \frac{1}{2}c_j - \frac{1}{2}c_k i + \frac{1}{2}c_i k - \frac{1}{2}c_{il} kl + \frac{1}{2}c_{kl} il - \frac{1}{2}c_l jl + \frac{1}{2}c_{jl} l. \tag{I.69c}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{xj}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x j + \frac{1}{2}a_j - \frac{1}{2}a_k i + \frac{1}{2}a_i k - \frac{1}{2}a_{il}kl + \frac{1}{2}a_{kl}il - \frac{1}{2}a_l jl + \frac{1}{2}a_{jl}l, \tag{I.70a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x j + \frac{1}{2}b_j + \frac{1}{2}b_k i - \frac{1}{2}b_i k + \frac{1}{2}b_{il}kl - \frac{1}{2}b_{kl}il + \frac{1}{2}b_l jl - \frac{1}{2}b_{jl}l, \tag{I.70b}$$

$$c_1 = c_x j - c_j. \tag{I.70c}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{xk}$,

$$a_1 = a_x k - a_k, \tag{I.71a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x k + \frac{1}{2}b_k - \frac{1}{2}b_i j + \frac{1}{2}b_j i - \frac{1}{2}b_{jl}il + \frac{1}{2}b_{il}jl - \frac{1}{2}b_l kl + \frac{1}{2}b_{kl}l, \tag{I.71b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x k + \frac{1}{2}c_k + \frac{1}{2}c_i j - \frac{1}{2}c_j i + \frac{1}{2}c_{jl}il - \frac{1}{2}c_{il}jl + \frac{1}{2}c_l kl - \frac{1}{2}c_{kl}l. \tag{I.71c}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{xk}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x k + \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}a_i j - \frac{1}{2}a_j i + \frac{1}{2}a_{jl}il - \frac{1}{2}a_{il}jl + \frac{1}{2}a_l kl - \frac{1}{2}a_{kl}l, \tag{I.72a}$$

$$b_1 = b_x k - b_k, \tag{I.72b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x k + \frac{1}{2}c_k - \frac{1}{2}c_i j + \frac{1}{2}c_j i - \frac{1}{2}c_{jl}il + \frac{1}{2}c_{il}jl - \frac{1}{2}c_l kl + \frac{1}{2}c_{kl}l. \tag{I.72c}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{xk}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x k + \frac{1}{2}a_k - \frac{1}{2}a_i j + \frac{1}{2}a_j i - \frac{1}{2}a_{jl} il + \frac{1}{2}a_{il} jl - \frac{1}{2}a_l kl + \frac{1}{2}a_{kl} l, \tag{I.73a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x k + \frac{1}{2}b_k + \frac{1}{2}b_i j - \frac{1}{2}b_j i + \frac{1}{2}b_{jl} il - \frac{1}{2}b_{il} jl + \frac{1}{2}b_l kl - \frac{1}{2}b_{kl} l, \tag{I.73b}$$

$$c_1 = c_x k - c_k. \tag{I.73c}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{x(kl)}$,

$$a_1 = a_x kl - a_{kl}, \tag{I.74a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x kl + \frac{1}{2}b_{kl} - \frac{1}{2}b_{jl} i + \frac{1}{2}b_i jl - \frac{1}{2}b_{il} j + \frac{1}{2}b_{il} j - \frac{1}{2}b_k l + \frac{1}{2}b_l k, \tag{I.74b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x kl + \frac{1}{2}c_{kl} + \frac{1}{2}c_{jl} i - \frac{1}{2}c_i jl + \frac{1}{2}c_{il} j - \frac{1}{2}c_{il} j + \frac{1}{2}c_k l - \frac{1}{2}c_l k. \tag{I.74c}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{x(kl)}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x kl + \frac{1}{2}a_{kl} + \frac{1}{2}a_{jl} i - \frac{1}{2}a_i jl + \frac{1}{2}a_{il} j - \frac{1}{2}a_{il} j + \frac{1}{2}a_k l - \frac{1}{2}a_l k, \tag{I.75a}$$

$$b_1 = b_x kl - b_{kl}, \tag{I.75b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x kl + \frac{1}{2}c_{kl} - \frac{1}{2}c_{jl} i + \frac{1}{2}c_i jl - \frac{1}{2}c_{il} j + \frac{1}{2}c_{il} j - \frac{1}{2}c_k l + \frac{1}{2}c_l k. \tag{I.75c}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{x(kl)}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x kl + \frac{1}{2}a_{kl} - \frac{1}{2}a_{jl}i + \frac{1}{2}a_i jl - \frac{1}{2}a_{il}j + \frac{1}{2}a_{il}j - \frac{1}{2}a_k l + \frac{1}{2}a_l k, \tag{I.76a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x kl + \frac{1}{2}b_{kl} + \frac{1}{2}b_{jl}i - \frac{1}{2}b_i jl + \frac{1}{2}b_{il}j - \frac{1}{2}b_{il}j + \frac{1}{2}b_k l - \frac{1}{2}b_l k, \tag{I.76b}$$

$$c_1 = c_x kl - c_{kl}. \tag{I.76c}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{x(jl)}$,

$$a_1 = a_x jl - a_{jl}, \tag{I.77a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x jl + \frac{1}{2}b_{jl} - \frac{1}{2}b_k il + \frac{1}{2}b_{il}k - \frac{1}{2}b_i kl + \frac{1}{2}b_{kl}i - \frac{1}{2}b_j l + \frac{1}{2}b_l j, \tag{I.77b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x jl + \frac{1}{2}c_{jl} + \frac{1}{2}c_k il - \frac{1}{2}c_{il}k + \frac{1}{2}c_i kl - \frac{1}{2}c_{kl}i + \frac{1}{2}c_j l - \frac{1}{2}c_l j. \tag{I.77c}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{x(jl)}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x jl + \frac{1}{2}a_{jl} + \frac{1}{2}a_k il - \frac{1}{2}a_{il}k + \frac{1}{2}a_i kl - \frac{1}{2}a_{kl}i + \frac{1}{2}a_j l - \frac{1}{2}a_l j, \tag{I.78a}$$

$$b_1 = b_x jl - b_{jl}, \tag{I.78b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x jl + \frac{1}{2}c_{jl} - \frac{1}{2}c_k il + \frac{1}{2}c_{il}k - \frac{1}{2}c_i kl + \frac{1}{2}c_{kl}i - \frac{1}{2}c_j l + \frac{1}{2}c_l j. \tag{I.78c}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{x(jl)}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x jl + \frac{1}{2}a_{jl} - \frac{1}{2}a_k il + \frac{1}{2}a_{il}k - \frac{1}{2}a_i kl + \frac{1}{2}a_{kl}i - \frac{1}{2}a_j l + \frac{1}{2}a_l j, \tag{I.79a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x jl + \frac{1}{2}b_{jl} + \frac{1}{2}b_k il - \frac{1}{2}b_{il}k + \frac{1}{2}b_i kl - \frac{1}{2}b_{kl}i + \frac{1}{2}b_j l - \frac{1}{2}b_l j, \tag{I.79b}$$

$$c_1 = c_x jl - c_{jl}. \tag{I.79c}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{x(il)}$,

$$a_1 = a_x il - a_{il}, \tag{I.80a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x il + \frac{1}{2}b_{il} - \frac{1}{2}b_{kl}j + \frac{1}{2}b_j kl - \frac{1}{2}b_k jl + \frac{1}{2}b_{jl}k - \frac{1}{2}b_i l + \frac{1}{2}b_l i, \tag{I.80b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x il + \frac{1}{2}c_{il} + \frac{1}{2}c_{kl}j - \frac{1}{2}c_j kl + \frac{1}{2}c_k jl - \frac{1}{2}c_{jl}k + \frac{1}{2}c_i l - \frac{1}{2}c_l i. \tag{I.80c}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{x(il)}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x il + \frac{1}{2}a_{il} + \frac{1}{2}a_{kl}j - \frac{1}{2}a_j kl + \frac{1}{2}a_k jl - \frac{1}{2}a_{jl}k + \frac{1}{2}a_i l - \frac{1}{2}a_l i, \tag{I.81a}$$

$$b_1 = b_x il - b_{il}, \tag{I.81b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x il + \frac{1}{2}c_{il} - \frac{1}{2}c_{kl}j + \frac{1}{2}c_j kl - \frac{1}{2}c_k jl + \frac{1}{2}c_{jl}k - \frac{1}{2}c_i l + \frac{1}{2}c_l i. \tag{I.81c}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{x(il)}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x il + \frac{1}{2}a_{il} - \frac{1}{2}a_{kl}j + \frac{1}{2}a_j kl - \frac{1}{2}a_k jl + \frac{1}{2}a_{jl}k - \frac{1}{2}a_i l + \frac{1}{2}a_l i, \tag{I.82a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x il + \frac{1}{2}b_{il} + \frac{1}{2}b_{kl}j - \frac{1}{2}b_j kl + \frac{1}{2}b_k jl - \frac{1}{2}b_{jl}k + \frac{1}{2}b_i l - \frac{1}{2}b_l i, \tag{I.82b}$$

$$c_1 = c_x il - c_{il}. \tag{I.82c}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{xl}$,

$$a_1 = a_x l - a_l, \tag{I.83a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x l + \frac{1}{2}b_l - \frac{1}{2}b_{il}i + \frac{1}{2}b_i il - \frac{1}{2}b_{jl}j + \frac{1}{2}b_j jl - \frac{1}{2}b_{kl}k + \frac{1}{2}b_k kl, \tag{I.83b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x l + \frac{1}{2}c_l + \frac{1}{2}c_{il}i - \frac{1}{2}c_i il + \frac{1}{2}c_{jl}j - \frac{1}{2}c_j jl + \frac{1}{2}c_{kl}k - \frac{1}{2}c_k kl. \tag{I.83c}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{xl}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x l + \frac{1}{2}a_l + \frac{1}{2}a_{il}i - \frac{1}{2}a_i il + \frac{1}{2}a_{jl}j - \frac{1}{2}a_j jl + \frac{1}{2}a_{kl}k - \frac{1}{2}a_k kl, \tag{I.84a}$$

$$b_1 = b_x l - b_l, \tag{I.84b}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}c_x l + \frac{1}{2}c_l - \frac{1}{2}c_{il}i + \frac{1}{2}c_i il - \frac{1}{2}c_{jl}j + \frac{1}{2}c_j jl - \frac{1}{2}c_{kl}k + \frac{1}{2}c_k kl. \tag{I.84c}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{xl}$,

$$a_1 = -\frac{1}{2}a_x l + \frac{1}{2}a_l - \frac{1}{2}a_{il}i + \frac{1}{2}a_i il - \frac{1}{2}a_{jl}j + \frac{1}{2}a_j jl - \frac{1}{2}a_{kl}k + \frac{1}{2}a_k kl, \tag{I.85a}$$

$$b_1 = -\frac{1}{2}b_x l + \frac{1}{2}b_l + \frac{1}{2}b_{il}i - \frac{1}{2}b_i il + \frac{1}{2}b_{jl}j - \frac{1}{2}b_j jl + \frac{1}{2}b_{kl}k - \frac{1}{2}b_k kl, \tag{I.85b}$$

$$c_1 = c_x l - c_l. \tag{I.85c}$$

Sedangkan, untuk sisa generatornya tidak mengikuti bentuk umum (I.1). Maka pada $\dot{B}^{(1)}_{tz}$,

$$\begin{pmatrix} p & 0 & -\frac{1}{2}\bar{c} \\ 0 & -m & -\frac{1}{2}\bar{b} \\ \frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}\bar{b} & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.86}$$

Pada $\dot{B}^{(2)}_{tz}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}\bar{c} \\ \frac{1}{2}\bar{a} & m & 0 \\ -\frac{1}{2}c & 0 & -n \end{pmatrix}. \tag{I.87}$$

Pada $\dot{B}^{(3)}_{tz}$,

$$\begin{pmatrix} -p & -\frac{1}{2}a & 0 \\ -\frac{1}{2}\bar{a} & 0 & \frac{1}{2}b \\ 0 & \frac{1}{2}\bar{b} & n \end{pmatrix}. \tag{I.88}$$

Pada $\dot{B}^{(1)}_{tx}$,

$$\begin{pmatrix} a_x & t & \frac{1}{2}b \\ t & a_x & \frac{1}{2}\bar{c} \\ \frac{1}{2}\bar{b} & \frac{1}{2}c & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.89}$$

Pada $\dot{B}^{(2)}_{tx}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\bar{c} & \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}c & t & b_x \\ \frac{1}{2}\bar{a} & b_x & t \end{pmatrix}. \tag{I.90}$$

Pada $\dot{B}^{(3)}_{tx}$,

$$\begin{pmatrix} t & \frac{1}{2}\bar{b} & c_x \\ \frac{1}{2}b & 0 & \frac{1}{2}\bar{a} \\ c_x & \frac{1}{2}a & t \end{pmatrix}. \tag{I.91}$$

Pada $\dot{B}^{(1)}_{ti}$,

$$\begin{pmatrix} a_i & t\,i & \frac{1}{2}i\,b \\ -t\,i & a_i & -\frac{1}{2}i\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,i & \frac{1}{2}c\,i & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.92}$$

Pada $\dot{B}^{(2)}_{ti}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,i & \frac{1}{2}a\,i \\ \frac{1}{2}i\,c & b_i & t\,i \\ -\frac{1}{2}i\,\bar{a} & -t\,i & b_i \end{pmatrix}. \tag{I.93}$$

Pada $\dot{B}^{(3)}_{ti}$,

$$\begin{pmatrix} c_i & -\frac{1}{2}i\,\bar{b} & -t\,i \\ \frac{1}{2}b\,i & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,i \\ i\,t & \frac{1}{2}i\,a & c_i \end{pmatrix}. \tag{I.94}$$

Pada $\dot{B}^{(1)}_{tj}$,

$$\begin{pmatrix} a_j & t\,j & \frac{1}{2}j\,b \\ -t\,j & a_j & -\frac{1}{2}j\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,j & \frac{1}{2}c_x i & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.95}$$

Pada $\dot{B}^{(2)}_{tj}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,j & \frac{1}{2}a\,j \\ \frac{1}{2}j\,c & b_j & t\,j \\ -\frac{1}{2}j\,\bar{a} & -t\,j & b_j \end{pmatrix}. \tag{I.96}$$

Pada $\dot{B}^{(3)}_{tj}$,

$$\begin{pmatrix} c_j & -\frac{1}{2} j\,\bar{b} & -t\,j \\ \frac{1}{2} b\,j & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,j \\ j\,t & \frac{1}{2} j\,a & c_j \end{pmatrix}. \tag{I.97}$$

Pada $\dot{B}^{(1)}_{tk}$,

$$\begin{pmatrix} a_k & t\,k & \frac{1}{2} k\,b \\ -t\,k & a_k & -\frac{1}{2} k\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,k & \frac{1}{2} c\,k & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.98}$$

Pada $\dot{B}^{(2)}_{tk}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,k & \frac{1}{2} a\,k \\ \frac{1}{2} k\,c & b_k & t\,k \\ -\frac{1}{2} k\,\bar{a} & -t\,k & b_k \end{pmatrix}. \tag{I.99}$$

Pada $\dot{B}^{(3)}_{tk}$,

$$\begin{pmatrix} c_k & -\frac{1}{2} k\,\bar{b} & -t\,k \\ \frac{1}{2} b\,k & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,k \\ k\,t & \frac{1}{2} k\,a & c_k \end{pmatrix}. \tag{I.100}$$

Pada $\dot{B}^{(1)}_{t(kl)}$,

$$\begin{pmatrix} a_{kl} & t\,(kl) & \frac{1}{2}(kl)\,b \\ -t\,(kl) & a_{kl} & -\frac{1}{2}(kl)\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,(kl) & \frac{1}{2} c\,(kl) & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.101}$$

Pada $\dot{B}^{(2)}_{t(kl)}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,(kl) & \frac{1}{2} a\,(kl) \\ \frac{1}{2}(kl)\,c & b_{kl} & t\,(kl) \\ -\frac{1}{2}(kl)\,\bar{a} & -t\,(kl) & b_{kl} \end{pmatrix}. \tag{I.102}$$

Pada $\dot{B}^{(3)}_{t(kl)}$,

$$\begin{pmatrix} c_{kl} & -\frac{1}{2}(kl)\,\bar{b} & -t\,(kl) \\ \frac{1}{2} b\,(kl) & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,(kl) \\ (kl)\,t & \frac{1}{2}(kl)\,a & c_{kl} \end{pmatrix}. \tag{I.103}$$

Pada $\dot{B}^{(1)}_{t(jl)}$,

$$\begin{pmatrix} a_{jl} & t\,(jl) & \frac{1}{2}(jl)\,b \\ -t\,(jl) & a_{jl} & -\frac{1}{2}(jl)\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,(jl) & \frac{1}{2}c_x i & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.104}$$

Pada $\dot{B}^{(2)}_{t(jl)}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,(jl) & \frac{1}{2}a\,(jl) \\ \frac{1}{2}(jl)\,c & b_{jl} & t\,(jl) \\ -\frac{1}{2}(jl)\,\bar{a} & -t\,(jl) & b_{jl} \end{pmatrix}. \tag{I.105}$$

Pada $\dot{B}^{(3)}_{t(jl)}$,

$$\begin{pmatrix} c_{jl} & -\frac{1}{2}(jl)\,\bar{b} & -t\,(jl) \\ \frac{1}{2}b\,(jl) & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,(jl) \\ (jl)\,t & \frac{1}{2}(jl)\,a & c_{jl} \end{pmatrix}. \tag{I.106}$$

Pada $\dot{B}^{(1)}_{t(il)}$,

$$\begin{pmatrix} a_{il} & t\,(il) & \frac{1}{2}(il)\,b \\ -t\,(il) & a_{il} & -\frac{1}{2}(il)\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,(il) & \frac{1}{2}c_x i & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.107}$$

Pada $\dot{B}^{(2)}_{t(il)}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,(il) & \frac{1}{2}a\,(il) \\ \frac{1}{2}(il)\,c & b_{il} & t\,(il) \\ -\frac{1}{2}(il)\,\bar{a} & -t\,(il) & b_{il} \end{pmatrix}. \tag{I.108}$$

Pada $\dot{B}^{(3)}_{t(il)}$,

$$\begin{pmatrix} c_{il} & -\frac{1}{2}(il)\,\bar{b} & -t\,(il) \\ \frac{1}{2}b\,(il) & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,(il) \\ (il)\,t & \frac{1}{2}(il)\,a & c_{il} \end{pmatrix}. \tag{I.109}$$

Pada $\dot{B}^{(1)}_{tl}$,

$$\begin{pmatrix} a_l & t\,l & \frac{1}{2}l\,b \\ -t\,l & a_l & -\frac{1}{2}l\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,l & \frac{1}{2}c\,l & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.110}$$

Pada $\dot{B}^{(2)}_{tl}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,l & \frac{1}{2}a\,l \\ \frac{1}{2}l\,c & b_l & t\,l \\ -\frac{1}{2}l\,\bar{a} & -t\,l & b_l \end{pmatrix}. \tag{I.111}$$

Pada $\dot{B}^{(3)}_{tl}$,

$$\begin{pmatrix} c_l & -\frac{1}{2}l\,\bar{b} & -t\,l \\ \frac{1}{2}b\,l & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,l \\ l\,t & \frac{1}{2}l\,a & c_l \end{pmatrix}. \tag{I.112}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{xz}$,

$$\begin{pmatrix} -a_x & z & -\frac{1}{2}b \\ z & a_x & \frac{1}{2}\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b} & \frac{1}{2}c & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.113}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{xz}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c} & \frac{1}{2}a \\ -\frac{1}{2}c & -b_x & z \\ \frac{1}{2}\bar{a} & z & b_x \end{pmatrix}. \tag{I.114}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{xz}$,

$$\begin{pmatrix} c_x & \frac{1}{2}\bar{b} & \\ \frac{1}{2}b & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a} \\ z & -\frac{1}{2}a & -c_x \end{pmatrix}. \tag{I.115}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{zi}$,

$$\begin{pmatrix} a_i & -z\,i & \frac{1}{2}i\,b \\ i\,z & -a_i & \frac{1}{2}i\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,i & -\frac{1}{2}c\,i & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.116}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{zi}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,i & -\frac{1}{2}a\,i \\ \frac{1}{2}i\,c & b_i & -i\,z \\ \frac{1}{2}i\,\bar{a} & i\,z & -b_i \end{pmatrix}. \tag{I.117}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{zi}$,

$$\begin{pmatrix} -c_i & \frac{1}{2}i\,\bar{b} & i\,z \\ -\frac{1}{2}b\,i & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,i \\ -i\,z & \frac{1}{2}i\,a & c_i \end{pmatrix}. \tag{I.118}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{zj}$,

$$\begin{pmatrix} a_j & -z\,j & \frac{1}{2}j\,b \\ z\,j & -a_j & \frac{1}{2}j\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,j & -\frac{1}{2}c\,j & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.119}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{zj}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,j & -\frac{1}{2}a\,j \\ \frac{1}{2}j\,c & b_j & -z\,j \\ \frac{1}{2}j\,\bar{a} & z\,j & -b_j \end{pmatrix}. \tag{I.120}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{zj}$,

$$\begin{pmatrix} -c_j & \frac{1}{2}j\,\bar{b} & z\,j \\ -\frac{1}{2}b\,j & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,j \\ -j\,z & \frac{1}{2}j\,a & c_j \end{pmatrix}. \tag{I.121}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{zk}$,

$$\begin{pmatrix} a_k & -z\,k & \frac{1}{2}k\,b \\ z\,k & -a_k & \frac{1}{2}k\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,k & -\frac{1}{2}c\,k & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.122}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{zk}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,k & -\frac{1}{2}a\,k \\ \frac{1}{2}k\,c & b_k & -z\,k \\ \frac{1}{2}k\,\bar{a} & z\,k & -b_k \end{pmatrix}. \tag{I.123}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{zk}$,

$$\begin{pmatrix} -c_k & \frac{1}{2}k\,\bar{b} & z\,k \\ -\frac{1}{2}b\,k & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,k \\ -k\,z & \frac{1}{2}k\,a & c_k \end{pmatrix}. \tag{I.124}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{z(kl)}$,

$$\begin{pmatrix} a_{kl} & -z\,(kl) & \frac{1}{2}(kl)\,b \\ z\,(kl) & -a_{kl} & -\frac{1}{2}(kl)\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,(kl) & \frac{1}{2}c\,(kl) & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.125}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{z(kl)}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,(kl) & -\frac{1}{2}a\,(kl) \\ \frac{1}{2}(kl)\,c & b_{kl} & -z\,(kl) \\ \frac{1}{2}(kl)\,\bar{a} & z\,(kl) & -b_{kl} \end{pmatrix}. \tag{I.126}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{z(kl)}$,

$$\begin{pmatrix} -c_{kl} & \frac{1}{2}(kl)\,\bar{b} & z\,(kl) \\ -\frac{1}{2}b\,(kl) & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,(kl) \\ -(kl)\,z & \frac{1}{2}(kl)\,a & c_{kl} \end{pmatrix}. \tag{I.127}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{z(jl)}$,

$$\begin{pmatrix} a_{jl} & -z\,(jl) & \frac{1}{2}(jl)\,b \\ z\,(jl) & -a_{jl} & \frac{1}{2}(jl)\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,(jl) & -\frac{1}{2}c\,(jl) & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.128}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{z(jl)}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,(jl) & -\frac{1}{2}a\,(jl) \\ \frac{1}{2}(jl)\,c & b_{jl} & -z\,(jl) \\ \frac{1}{2}(jl)\,\bar{a} & z\,(jl) & -b_{jl} \end{pmatrix}. \tag{I.129}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{z(jl)}$,

$$\begin{pmatrix} -c_{jl} & \frac{1}{2}(jl)\,\bar{b} & z\,(jl) \\ -\frac{1}{2}b\,(jl) & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,(jl) \\ -(jl)\,z & \frac{1}{2}(jl)\,a & c_{jl} \end{pmatrix}. \tag{I.130}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{z(il)}$,

$$\begin{pmatrix} a_{il} & -z\,(il) & \frac{1}{2}(il)\,b \\ z\,(il) & -a_{il} & \frac{1}{2}(il)\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,(il) & -\frac{1}{2}c\,(il) & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.131}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{z(il)}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,(il) & -\frac{1}{2}a\,(il) \\ \frac{1}{2}(il)\,c & b_{il} & -z\,(il) \\ \frac{1}{2}(il)\,\bar{a} & z\,(il) & -b_{il} \end{pmatrix}. \tag{I.132}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{z(il)}$,

$$\begin{pmatrix} -c_{il} & \frac{1}{2}(il)\,\bar{b} & z\,(il) \\ -\frac{1}{2}b\,(il) & 0 & -\frac{1}{2}\bar{a}\,(il) \\ -(il)\,z & \frac{1}{2}(il)\,a & c_{il} \end{pmatrix}. \tag{I.133}$$

Pada $\dot{R}^{(1)}_{zl}$,

$$\begin{pmatrix} a_l & -z\,l & \frac{1}{2}l\,b \\ z\,l & -a_l & \frac{1}{2}l\bar{c} \\ -\frac{1}{2}\bar{b}\,l & -\frac{1}{2}c\,l & 0 \end{pmatrix}. \tag{I.134}$$

Pada $\dot{R}^{(2)}_{zl}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\bar{c}\,l & -\frac{1}{2}a\,l \\ \frac{1}{2}l\,c & b_l & -z\,l \\ \frac{1}{2}l\,\bar{a} & z\,l & -b_l \end{pmatrix}. \tag{I.135}$$

Pada $\dot{R}^{(3)}_{zl}$,

$$\begin{pmatrix} -c_l & \frac{1}{2} l\, \bar{b} & z\, l \\ -\frac{1}{2} b\, l & 0 & -\frac{1}{2} \bar{a}\, l \\ -l\, z & \frac{1}{2} l\, a & c_l \end{pmatrix}. \tag{I.136}$$

BIODATA PENULIS

Penulis bernama Muhamad Andri Jauhari, dan biasanya dipanggil Andri oleh teman-temannya. Penulis lahir di Jakarta, 10 Mei 2000. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Pendidikan primer penulis dimulai di SD Muhammadiyah 2 Kupang, lalu SMPN 2 Kota Kupang, dan SMAN 1 Kota Kupang. Penulis saat dituliskannya Tugas Akhir ini sedang menempuh kuliah di Departemen Fisika Institut Teknoologi Sepuluh Nopember (ITS) semenjak 2016. Penulis masuk ke ITS melalui jalur SBMPTN. Penulis yang memasuki kuliah pada umur yang 16 tahun, sangat menggemari fisika dan matematika, dan menginginkan bergabung bidang minat Fisika Teori. Semasa perkuliahan, penulis aktif menjadi asisten dosen pada mata kuliah Fisika Dasar, dan Fisika Statistik. Penulis aktif pula menjadi asisten laboratorium fisika dasar, asisten laboratorium fisika madya (fisika modern dan fisika optik). Selain pada bidang akademik, penulis tertarik dalam debat bahasa inggris kompetitif, dan telah menjadi *adjudicator* (juri) pada lomba debat bahasa inggris univeritas nasional (NUDC). Menggunakan ilmu yang telah didapat semasa kuliah, penulis bertekad untuk dapat mengedukasi fisika dan berpikir saintifik dan logis kepada orang-orang secara luas, serta dapat membangun *stereotype* bahwa fisika, dan sains secara umum merupakan sesuatu yang menarik.