TUGAS AKHIR - KM184801

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP PEMETAAN KONTRAKSI BANACH DI DALAM RUANG b-METRIK PARSIAL

MUHAMMAD ABDUL AZIZ
NRP 06111540000045

Dosen Pembimbing
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si

Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

FINAL PROJECT – KM184801

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF FIXED POINT OF BANACH CONTRACTION MAPPING IN PARTIAL b- METRIC SPACES

MUHAMMAD ABDUL AZIZ
NRP 06111540000045

Supervisors
Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si

Mathematics Department
Faculty of Sains and Data Analytics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2020

LEMBAR PENGESAHAN

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP PEMETAAN KONTRAKSI BANACH DI DALAM RUANG b-METRIK PARSIAL

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF FIXED POINT OF BANACH CONTRACTION MAPPING IN PARTIAL b-METRIC SPACES

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat untuk
memperoleh gelar Sarjana Sains pada bidang studi Analisis
dan Aljabar Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
Muhammad Abdul Aziz
NRP. 06111540000045

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II	Dosen Pembimbing I
Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si	Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP: 19600527 198701 1 001	NIP. 19660414 199102 2 001

Mengetahui,
Ketua Departemen Matematika FSAD-ITS

Subchan, Ph.D
NIP: 19710513 199702 1 001

Surabaya, Juni 2020

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP PEMETAAN KONTRAKSI BANACH DI DALAM RUANG b-METRIK PARSIAL

Nama Mahasiswa	: Muhammad Abdul Aziz
NRP	: 06111540000045
Departemen	: Matematika
Dosen Pembimbing	: Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
	Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si

Abstrak

Ruang metrik merupakan salah satu konsep yang dikaji dalam analisis fungsional. Salah satu perkembangan dari ruang metrik adalah ruang metrik parsial dan ruang b-metrik. Generalisasi dari ruang – ruang tersebut membentuk suatu ruang lain yang disebut ruang b-metrik parsial, ruang ini merupakan gabungan konsep ruang metrik parsial dan ruang b-metrik. Masalah yang sering dibahas di dalam ruang metrik adalah masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraksi Banach.. Pada tugas akhir ini diperoleh syarat cukup dari eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraksi Banach pada ruang b-metrik. Lebih lanjut di konstruksi contoh yang menunjukkan masalah eksistensi dan ketunggaln titik tetap pemetaan kontraksi Banach pada ruang b-metrik.

Kata kunci : *ruang metrik parsial, ruang b-metrik, ruang b-metrik parsial, titik tetap, pemetaan kontraksi Banach.*

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF FIXED POINT OF BANACH CONTRACTION MAPPING IN PARTIAL b-METRIC SPACES

Name of Student	: Muhammad Abdul Aziz
NRP	: 06111540000045
Departement	: Mathematics
Supervisors	: Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si
	Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si

Abstract

Metric space is one of the concepts studied in functional analysis. One of the developments of the metric space is the partial metric space and the b-metric space. The generalization of these spaces forms another kind of space called partial b-metric, which is a combination of the partial metric space and b-metric space. The problem that is frequently discussed in the metric space is the problem of the existence and uniqueness of the Banach fixed-point contraction mapping. This thesis obtained the sufficient conditions of the existence and uniqueness of the Banach fixed-point contraction mapping in the b-metric space. Furthermore, an example is constructed that demonstrates the existence and uniqueness of the Banach fixed-point contraction mapping problem on the b-metric space.

Keywords: partial metric space, b-metric space, partial b-metric space, fixed point, Banach contraction mapping.

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, karena dengan limpahan rahmat, taufiq, dan ridho-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul

"**EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP PEMETAAN KONTRAKSI BANACH DI DALAM RUANG b-METRIK PARSIAL"**

yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya. Sholawat serta salam tak lupa tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat kerja sama, bantuan, dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal tersebut, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kepala Departemen Matematika FSAD ITS.
2. Sekretaris I Departemen Matematika ITS.
3. Sekretaris II Departemen Matematika ITS.
4. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si dan Bapak. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah membimbing penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
5. Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si, Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si dan Ibu Soleha, S.Si, M.Si selaku Dosen Penguji Tugas Akhir.
6. Bapak Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si selaku Dosen Wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika ITS.

7. Seluruh jajaran dosen dan staf Departemen Matematika ITS.
8. Keluarga tercinta yang senantiasa memberikan dukungan dan do'a yang tak terhingga.
9. Sie Evan Setiawan, Aufa Biahdillah dan Mohamad Ilham Dwi Firmansyah, selaku *partner* penulis yang membantu dan mengarahkan penulis selama proses pembuatan Tugas Akhir ini.
10. Teman-teman UKM Catur ITS, LDJ Ibnu Muqlah, dan Matematika ITS angkatan 2015.
11. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih telah membantu sampai terselesaikannya Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari pembaca. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Juni 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
LEMBAR PENGESAHAN.....v
Abstrak vii
Abstract ix
KATA PENGANTAR.....xi
DAFTAR ISI xiii
DAFTAR SIMBOL xv
DAFTAR GAMBAR.....xvi
BAB 1 PENDAHULUAN.....1
1.1 Latar Belakang Masalah.....1
1.2 Rumusan Masalah 2
1.3 Tujuan.....2
1.4 Manfaat.....2
1.5 Sistematika Penulisan.....3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA 5
2.1 Penelitian Terdahulu 5
2.2Ruang Metrik 6
2.3Ruang Metrik Parsial.....6
2.4Ruang b-metrik.....16
2.5Prinsip Kontraksi Banach.....22

BAB III METODE PENELITIAN 25
3.1 Studi Literatur 25
3.2 Mengkaji Ruang b-Metrik Parsial 25
3.3 Mengkaji Prinsip Kontraksi Banach.....26
3.4 Mengkonstruksi Contoh Eksistensi dan Ketunggalan Titik Tetap Pemetaan Kontraksi Banach Didalam Ruang b-Metrik Parsial 26
3.5 Penarikan Kesimpulan dan Pembukuan Tugas Akhir 26
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN 28
4.1 Ruang b-Metrik Parsial 28
4.2 Konvergensi Barisan dan Kelengkapan pada Ruang b-Metrik Parsial 53
4.3 Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraksi Banach di Dalam Ruang b-Metrik Parsial.....59
BAB V PENUTUP 82
DAFTAR PUSTAKA.....83
BIODATA PENULIS.....84

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{R}$: bilangan real
$\mathbb{R}^+$: bilangan real positif
$\mathbb{R}^n$: Himpunan hasil kartesian bilangan real dimensi n
$\mathbb{N}$: bilangan asli
$\emptyset$: Himpunan kosong
$\sum$: Notasi Sigma
$\in$: elemen atau anggota
$\neq$: tidak sama dengan
$\cup$: union atau gabungan
$>$: lebih besar
$<$: lebih kecil
$\geq$: lebih besar sama dengan
$\leq$: lebih kecil sama dengan
$\equiv$: ekuivalen
$|x|$: harga mutlak dari x
Tx : hasil pemetaan dari x oleh T
d : metrik
d_b : b-metrik
d_p : metrik parsial
d_{rb} : b-metrik parsial
d_{rb} : b-metrik rectangular
$d_{rb\mathbb{C}}$: b-metrik rectangular bernilai kompleks
ε : epsilon
λ : delta

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Titik Tetap 23
Gambar 4.1 Hubungan Ruang Metrik dan Generalisasinya. 29

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam perkembangan analisis fungsional salah satu bahasan yang sering dikaji oleh ilmuwan adalah konsep ruang metrik. Ruang metrik pertama kali dikenalkan oleh ilmuan matematika bernama Maurice Fr´echet pada tahun 1906 [1]. Sejak saat itu banyak ilmuan melakukan penelitian terkait ruang metrik dan memperkenalkan jenis-jenis ruang metrik yang lain. Sebagai contoh perkembangan konsep ruang metrik, seorang ilmuan bernama S.Crewzick memperkenalkan konsep ruang b-metrik pada tahun 1993[2]. Dia membuktikan prinsip kontraksi Banach di ruang tersebut. Adapun prinsip kontraksi Banach dikenalkan oleh Stefan Banach. Karena beragamnya penerapan dari prinsip kontraksi Banach, banyak matematikawan meneliti keberadaan dan keunikan dari titik tetap. Adapun perbedaan ruang metrik dengan ruang b-metrik adalah pertidaksamaan segitiganya dan meringkas sifat ruang metrik yang awalnya adalah empat menjadi tiga sifat. Pertidaksamaan segitiga pada ruang metrik diperluas dengan mengalikan suatu bilangan $s \geq 1$.

Pada tahun 1994 seorang ilmuan komputer Matthews mengenalkan konsep ruang metrik parsial[3]. Ruang metrik parsial ini memiliki perbedaan dengan ruang metrik. Pada ruang metrik parsial, jarak suatu titik ke dirinya sendiri tidak selalu nol berbeda dengan ruang metrik jarak suatu titik ke dirinya sendiri selalu nol. Selain itu, Matthews juga mengembangkan perluasan prinsip kontraksi Banach dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial.

Perluasan dari ruang metrik parsial dan ruang b-metrik dikenalkan pertama kali oleh S.Shukla pada tahun 2014 yaitu ruang b-metrik parsial[4]. Salah satu objek yang di teliti oleh

Shukla pada penilitiannya mengenai ruang b-metrik parsial adalah masalah titik tetap pada pemetaan kontraksi Banach didalam ruang b-metrik parsial.

Penelitian terkait dengan ruang b-metrik parsial ini masih sedikit ilmuan matematika yang melakukan menilitian lebih lanjut. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini akan dikaji kembali tentang konsep ruang b-metrik parsial, sifat-sifat barisannya, eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan pada ruang b-metrik parsial, dan akan diberikan contoh-contoh pemetaan yang berlaku teorema titik tetap pada ruang tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diberikan pada subbab sebelumnya, didapat beberapa rumusan masalah pada penelitian ini sebagai berikut :

1. Bagaimana syarat cukup eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraksi Banach didalam ruang b-metrik parsial?
2. Bagaimana contoh-contoh himpunan dan pemetaan yang menunjukkan eksistensi dan ketungglan titik tetap pemetaan pada ruang b-metrik parsial?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah ada, diperoleh tujuan penulisan penilitian ini antara lain:

1. Mendapatkan syarat cukup eksistensi dan ketunggalan titik tetap di suatu pemetaan didalam ruang b-metrik parsial.
2. Memperoleh contoh-contoh lain ruang dan pemetaan yang memiliki titik tetap dan tunggal didalam ruang b-metrik parsial.

1.4 Manfaat

Manfaat penelitian ini antara lain:

1. Sebagai bahan acuan pembelajaran analisis fungsional khususnya teorema titik tetap didalam ruang b-metrik parsial.
2. Memperluas pengetahuan tentang konsep ruang b-metrik parsial.

1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan adalah sebagai berikut :

1 BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang gambaran umum dari penulisan ini yang meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

2 BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang materi-materi yang mendukung, antara lain penelitian terdahulu, ruang metrik, ruang b-metrik, ruang metrik parsial, ruang b-metrik parsial, dan prinsip kontraksi Banach.

3 BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini berisi pembahasan tentang langkah-langkah yang digunakan mulai dari studi literatur hingga terakhir yaitu penarikan kesimpulan dan pembukuan.

4 BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi penjelasan secara rinci mengenai pembuktian prinsip kontraksi Banach pada ruang b-metrik parsial serta diberikan contohnya.

5 BAB V PENUTUP

Pada bab ini berisi kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan. Kemudian, berdasarkan penelitian tersebut, diberikan saran yang perlu dilakukan untuk penelitian berkaitan yang akan datang.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Terdahulu

Ruang metrik pertama kali dikenalkan oleh M. Frechet [1] pada tahun 1906 yang merupakan momen awal perkembangan ruang metrik. Setelah itu tidak sedikit ilmuwan matematika memperluas konsep ruang metrik dan menemukan berbagai jenis ruang metrik. Salah satu diantaranya matematikawan tersebut bernama S.Crewzick yang memperkenalkan konsep ruang b-metrik pada tahun 1993 [2]. Konsep ruang b-metrik ini memiliki perbedaan dengan ruang metrik yang dikenalkan Frechet. Hal yang membedakan antara ruang metrik dan ruang b-metrik ialah pertidaksamaan segitiganya dan meringkas sifat ruang metrik yang awalnya adalah empat menjadi tiga sifat[2]. Pertidaksamaan segitiga pada ruang metrik diperluas dengan mengalikan suatu bilangan $s \geq 1$.

Seiring dengan berkembangnya konsep ruang metrik, ilmuwan bernama Matthews pada tahun 1994 mengenalkan konsep ruang metrik parsial [3]. Ruang metrik parsial ini memiliki perbedaan dengan ruang metrik. Pada ruang metrik parsial, jarak suatu titik ke dirinya sendiri tidak selalu nol berbeda dengan ruang metrik jarak suatu titik ke dirinya sendiri selalu nol.

Pada tahun 2014 seorang matematikawan dari India bernama S. Shukla memperkenalkan pengembangan ruang b-metrik dan ruang metrik parsial yaitu ruang b-metrik parsial [4]. Pada penelitian tersebut S. Shukla tidak hanya membahas tentang ruang b-metrik parsial dan sifat kelengkapan ruang yang berlaku didalamnya, namun juga dibahas tentang masalah teorema titik tetap pemetaan pada b-metrik parsial dengan prinsip pemetaan kontraksi Banach. Adapun prinsip kontraksi Banach dikenalkan oleh Stefan Banach 1992. Karena beragamnya penerapan dari

prinsip kontraksi Banach, banyak matematikawan meneliti keberadaan dan ketunggalan dari titik tetap.

2.2 Ruang Metrik

Pada bagian ini, diberikan definisi ruang metrik serta sebuah contoh ruang metrik.

Definisi 2.2.1 [1] *Ruang metrik adalah sebuah koleksi* (X, d) *dengan* X *adalah himpunan tak kosong dan* d *adalah metrik pada* X *(atau fungsi jarak pada* X*) yang terdefinisi sebagai* $d: X \times X \to \mathbb{R}$ *sedemikian hingga untuk semua* $x, y, z \in X$ *memenuhi :*

(M1) $d(x, y) \geq 0$
(M2) $d(x, y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$
(M3) $d(x, y) = d(y, x)$
(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Berikut ini diberikan sebuah contoh ruang metrik

Contoh 2.1 [1] Diberikan himpunan $X = \mathbb{R}^2$. Untuk setiap $x = (x_1, x_2) \in X$ dan $y = (y_1, y_2) \in X$, didefinisikan

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

maka (X, d) ruang metrik.

Penjelasan untuk Contoh 2.1 dapat diuraikan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y, z \in X$, didapat

(M1) $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ karena $|x_1 - y_1| \geq 0$ dan $|x_2 - y_2| \geq 0$ maka diperoleh $d(x, y) \geq 0$.

(M2) ($\Rightarrow$) Ambil $d(x, y) = 0$, maka

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$$
$$|x_1 - y_1| = -|x_2 - y_2|$$

Sedangkan $|x_1 - y_1| \geq 0$ dan $|x_2 - y_2| \geq 0$, maka haruslah $|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = 0$ sehingga $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$ artinya $x = y$

($\Leftarrow$) Ambil $x = y$, maka

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &= |x_1 - x_1| + |x_2 - x_2| \end{aligned}$$

$$= 0$$

Sehingga $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
$= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$
$= d(y, x)$

Sehingga $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
$= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2|$
$\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$
$= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + |z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|$
$= d(x, z) + d(z, y)$

Sehingga $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Karena d memenuhi *(M1)* – *(M4)* maka (X, d) ruang metrik.

Contoh 2.2 [1] Diberikan $X = \mathbb{R}^n$ dan didefinisikan $\forall\, x, y \in X$ dengan $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. Jika didefinisikan fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.1)$$

untuk setiap $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ maka d merupakan suatu fungsi metrik.

Penjelasan untuk Contoh 2.2 dapat diuraikan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y, z \in X$ dengan $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ dan $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$.

(M1) Berdasarkan bentuk fungsi d pada (2.1), jelas bahwa d merupakan fungsi bernilai non- negatif atau dengan kata lain $d(x, y) \geq 0$. Hal tersebut menunjukkan bahwa sifat *(M1)* terpenuhi.

(M2) ($\Rightarrow$) Jika $d(x, y) = 0$ dan diketahui bahwa $(x_i - y_i)^2 \geq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, maka agar persamaan tersebut terpenuhi haruslah $(x_i - y_i)^2 = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ atau dapat ditulis $x_i - y_i = 0$ sehingga

$x_i = y_i$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. Sehingga terbukti $x = y$.

($\Leftarrow$) Jika $x = y$, maka $x_i = y_i$ atau $x_i - y_i = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. Sehingga didapat

$$\begin{aligned} d(x, y) &= (\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena terbukti dari kanan dan kiri maka sifat *(M2)* terpenuhi.

(M3)

$$\begin{aligned} d(x, y) &= (\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{n}((-1)(y_i - x_i))^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^2(y_i - x_i)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= d(x, y) \end{aligned}$$

Maka sifat *(M3)* terpenuhi.

(*M4*) Untuk menunjukkan sifat *(M4)*, gunakan Ketaksamaan Minkowski

$$(\textstyle\sum_{i=1}^{n}|a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ dan $p \geq 1$.

Dengan menggunakan ketaksamaan (2.2) didapat

$$\begin{aligned} d(x, y) &= (\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{n}|(x_i - z_i) + (z_i - y_i)|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\textstyle\sum_{i=1}^{n}|x_i - z_i|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n}|z_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Sehingga sifat *(M4)* terpenuhi.

Karena d memenuhi *(M1)* – *(M4)* maka (X, d) ruang metrik.

Pada konsep yang akan dibahas di subbab berikutnya yaitu prinsip kontraksi Banach terdapat suatu definisi lengkap dalam ruang metrik. Berikut ini akan diberikan kekonvergenan barisan, barisan Cauchy, dan kelengkapan dalam ruang metrik.

Definisi 2.2.2 [1] *Diberikan* (X, d) *adalah ruang metrik,* $\{x_n\}$ *adalah barisan di* X *dan* $x \in X$ *maka barisan* $\{x_n\}$ *disebut konvergen ke* $x \in (X, d)$ *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga* $d(x_n, x) < \varepsilon$ *untuk setiap* $n > n_0$ *dan dinyatakan dengan* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *atau* $x_n \to x$ *untuk* $n \to \infty$.

Definisi 2.2.3.[1] *Diberikan* (X, d) *adalah ruang metrik,* $\{x_n\}$ *adalah barisan di* X *maka barisan* $\{x_n\}$ *disebut barisan Cauchy dalam* (X, d) *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *untuk setiap* $n, m > n_0$.

Definisi 2.2.4.[1] *Diberikan* (X, d) *adalah ruang metrik,* $\{x_n\}$ *adalah barisan di* X*, maka* (X, d) *disebut ruang metrik lengkap jika setiap barisan Cauchy di* X *konvergen ke suatu titik* $x \in X$.

2.3 Ruang Metrik Parsial

Pada bagian ini, diberikan definisi ruang metrik serta sebuah contoh ruang metrik.

Definisi 2.3.1.[3] *Diberikan himpunan tak kosong* X. *Fungsi* $d_p : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *dikatakan metrik parsial pada* X *jika untuk setiap* $x, y, z \in X$ *memenuhi :*

(PM1)$x = y$ *jika dan hanya jika* $d_p(x, x) = d_p(x, y) = d_p(y, y)$;

(PM2) $d_p(x, x) \leq d_p(x, y)$;

(PM3) $d_p(x, y) = d_p(y, x)$;

(PM4) $d_p(x, y) \leq d_p(x, z) + d_p(z, y) - d_p(z, z)$.

Pasangan (X, d_p) *dikatakan sebagai ruang metrik parsial.*

Berdasarkan Definisi 2.3.1, jika $d_p(x,y) = 0$, maka menggunakan sifat (*PM2*) diperoleh $d_p(x,y) \leq 0$ akibatnya $d_p(x,x) = 0$ sehingga didapat $d_p(x,x) = d_p(x,y)$. Berdasarkan (*PM1*) berlaku $x = y$, namun tidak berlaku sebaliknya.

Contoh 2.3.[5] Diberikan himpunan $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Fungsi $d_p : X \times X \to X$ yang didefinisikan sebagai $d_p(x,y) = \max(x,y)$ untuk setiap $x, y \in X$. Fungsi d_p merupakan fungsi metrik parsial pada X.

Penjelasan untuk Contoh 2.3 dapat ditunjukkan sebegai berikut. Ambil sebarang $x, y, z \in X$.

(PM1) ($\Rightarrow$) Jika $x = y$, maka berdasarkan definisi fungsi d_p diperoleh $d_p(x,x) = d_p(x,y) = d_p(y,y)$.

($\Leftarrow$) Diketahui $d_p(x,x) = d_p(x,y)$

$$\begin{aligned} d_p(x,x) &= \max(x,x) \\ &= x \\ &= \max(x,y) \\ &= d_p(x,y) \end{aligned}$$

sehingga didapat $y \leq x$.

Diketahui $d_p(x,y) = d_p(y,y)$

$$\begin{aligned} d_p(y,y) &= \max(y,y) \\ &= y \\ &= \max(x,y) \\ &= d_p(x,y) \end{aligned}$$

sehingga didapat $x \leq y$.

Karena $y \leq x$ dan $x \leq y$ berlaku $x = y$, sehingga berlaku sifat *(PM1).*

(PM2) Untuk menunjukkan $d_p(x,x) \leq d_p(x,y)$ akan dibagi menjadi beberapa kondisi.

a)Untuk $x < y$, diperoleh

$$\begin{aligned} d_p(x,x) &= \max(x,x) \\ &= x \end{aligned}$$

$< \max(x, y)$
$= d_p(x, y)$,

dengan kata lain $d_p(x, x) < d_p(x, y)$.

b) Untuk $y \leq x$, diperoleh

$$\begin{aligned} d_p(x, x) &= \max(x, x) \\ &= x \\ &= \max(x, y) \\ &= d_p(x, y), \end{aligned}$$

dengan kata lain $d_p(x, x) = d_p(x, y)$.

Dari a) dan b) berlaku sifat *(pM2).*

(PM3) $d_p(x, y) = \max(x, y) = \max(y, x) = d_p(y, x)$, sehingga sifat *(PM3)* terpenuhi.

*(PM4)*Untuk membuktikan *(PM4)*, perlu dibagi beberapa kasus :

(1) Untuk x ≥ y ≥ z

Berdasarkan definisi fungsi d_p,

$d_p(x, z) = d_p(x, x) = x$, $d_p(x, y) = \max(x, y) = x$, $d_p(y, z) = \max(z, y) = y$. Karena y ≥ z atau dengan kata lain $y - z \geq 0$, akibatnya berlaku

$$\begin{aligned} x &\leq x + z - y \\ d_p(x, y) &\leq d_p(x, z) + d_p(z, y) - d_p(z, z) \end{aligned}$$

(2) Untuk $x \geq y$ dan $y < z$

Jika $x \geq z$, maka didapat $d_p(x, z) = \max(x, z) = x$.

$$\begin{aligned} x &\leq x + z - z \\ &= \max(x, z) + \max(z, y) - \max(z, z) \\ &= d_p(x, z) + d_p(z, y) - d_p(z, z) \\ d_p(x, y) &\leq d_p(x, z) + d_p(z, y) - d_p(z, z) \end{aligned}$$

Jika $x < z$, maka didapat $d_p(x, z) = \max(x, z) = z$.

$$\begin{aligned} x &\leq z + z - z \\ &= \max(x, z) + \max(z, y) - \max(z, z) \\ &= d_p(x, z) + d_p(z, y) - d_p(z, z) \end{aligned}$$

$d_p(x,y) \leq d_p(x,z) + d_p(z,y) - d_p(z,z)$

(3) Untuk $x < y$ dan $y \geq z$

Jika $x \geq z$ maka $x - z \geq 0$, akibatnya

$$\begin{aligned} y &\leq x + y - z \\ &= \max(x,z) + \max(z,y) - \max(z,z) \\ &= d_p(x,z) + d_p(z,y) - d_p(z,z) \end{aligned}$$

$d_p(x,y) \leq d_p(x,z) + d_p(z,y) - d_p(z,z)$

Jika $x < z$, maka didapat $d_p(x,z) = \max(x,z) = z$.

$$\begin{aligned} y &\leq z + y - z \\ &= \max(x,z) + \max(z,y) - \max(z,z) \\ &= d_p(x,z) + d_p(z,y) - d_p(z,z) \end{aligned}$$

$d_p(x,y) \leq d_p(x,z) + d_p(z,y) - d_p(z,z)$

(4) Untuk $x < y < z$

Berlaku $y = z + y - z$, yang berarti $d_p(x,y) = d_p(x,z) + d_p(z,y) - d_p(z,z)$.

Karena (1) – (4) terpenuhi maka sifat (*pM4*) terpenuhi.

Karena terpenuhi sifat *(PM1)* sampai *(PM4)*, maka (X, d_p) adalah ruang metrik parsial. Namun (X, d_p) bukan ruang metrik hal tersebut dapat dilihat jika dengan mengambil sebarang $x \in X$ dengan $x \neq 0$, maka $d_p(x,x) \neq 0$.

Contoh 2.4.[6] Diberikan $X = \mathbb{R}$. Jika didefinisikan suatu fungsi $d_p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dengan

$$d_p(x,y) = \frac{|x|+|y|+|x-y|}{2},$$

Untuk setiap $x, y \in X$ maka d_p adalah metrik parsial pada X.

Penjelasan untuk Contoh 2.4 dapat ditunjukkan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y, z \in X$,

(PM1) (⇒) Jika $x = y$

$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= \frac{|x|+|y|+|x-y|}{2} \\ &= \frac{|x|+|x|+|x-x|}{2} \\ &= d_p(x,x) \end{aligned}$$

$$d_p(x,y) = \frac{|x|+|y|+|x-y|}{2}$$
$$= \frac{|y|+|y|+|y-y|}{2}$$
$$= d_p(y,y)$$

maka $d_p(x,y) = d_p(x,x) = d_p(y,y)$

($\Leftarrow$) Jika $d_p(x,x) = d_p(x,y) = d_p(y,y)$

$$d_p(x,y) = d_p(x,x)$$
$$= \frac{|x|+|x|+|x-x|}{2}$$
$$= |x|$$

$$d_p(x,y) = d_p(y,)$$
$$= \frac{|y|+|y|+|y-y|}{2}$$
$$= |y|$$

maka $x = y$. Karena terbukti dari kanan dan kiri maka sifat *(PM1)* terpenuhi.

(PM2) Untuk menunjukkan sifat *(PM2)* akan dibagi menjadi 2 kasus.

(1) $|x| \geq |y|$

$$|x-y| \geq |x| - |y|$$
$$|x-y| + |x| + |y| \geq |x| - |y| + |x| + |y|$$
$$|x-y| + |x| + |y| \geq |x| + |x| + |x-x|$$
$$\frac{|x|+|y|+|x-y|}{2} \geq \frac{|x|+|x|+|x-x|}{2}$$
$$d_p(x,y) \geq d_p(x,x)$$

(2) $|x| < |y|$

$$\frac{|x|+|y|+|x-y|}{2} > \frac{|x|+|x|+|x-x|}{2}$$
$$d_p(x,y) > d_p(x,x)$$

Dari (1) dan (2) maka sifat *(PM2)* terpenuhi.

(PM3) Karena $|x-y|$ bernilai mutlak, sehingga berlaku sifat komutatif yang berakibat

$$d_p(x,y) = \frac{|x|+|y|+|x-y|}{2}$$
$$= \frac{|y|+|x|+|y-x|}{2}$$
$$= d_p(y,x)$$

sehingga sifat *(PM3)* terpenuhi.

(PM4) $$d_p(x,y) = \frac{|x|+|y|+|x-y|}{2}$$
$$= \frac{|x|+|y|+|x-z+z-y|+2|z|-2|z|-|z-z|}{2}$$
$$\leq \frac{|x|+|y|+|x-z|+|z-y|+2|z|-2|z|-|z-z|}{2}$$
$$= \frac{|x|+|z|+|x-z|}{2} + \frac{|y|+|z|+|y-z|}{2} - \frac{|z|+|z|+|z-z|}{2}$$
$$d_p(x,y) \leq d_p(x,z) + d_p(z,y) - d_p(z,z)$$

Sehingga sifat *(PM4)* terpenuhi. Karena *(PM1)* sampai *(PM4)* terpenuhi maka d_p adalah metrik parsial pada *X*.

Berkaitan dengan definisi ruang metrik parsial yang telah diberikan beserta contoh dan penjelasannya, terlihat jelas bahwa ruang metrik parsial merupakan perumuman dari ruang metrik. Hal tersebut dapat dilihat dari jarak antara suatu titik ke dirinya sendiri pada masing-masing ruang tersebut. Pada ruang metrik biasa jarak suatu titik ke dirinya selalu nol, sedangkan untuk ruang metrik parsial tidak selalu nol, sehingga dapat disimpulkan bahwa setiap ruang metrik adalah ruang metrik parsial, namun tidak berlaku sebaliknya.

Berikut dibawah ini diberikan sebuah teorema yang menjelaskan tentang kaitan antara ruang metrik dengan ruang metrik parsial. Teorema dibawah ini menerangkan bahwa untuk suatu sembarang fungsi metrik dapat dikonstruksi dari suatu fungsi metrik parsial.

Teorema 2.3.2.[3] *Diberikan d_p adalah suatu metrik parsial pada himpunan tak kosong X. Jika didefinisikan fungsi $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan*

$$d(x,y) = 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y), \quad \forall x,y \in X,$$

maka d adalah metrik pada X.

Bukti. Ambil sebarang $x, y, z \in X$,

(M1) Diketahui d_p adalah metrik parsial sehingga memenuhi (*PM2*) dan (*PM3*) pada Definisi 2.3.1, akibatnya diperoleh

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y) \\ &= d_p(x,y) - d_p(x,x) + d_p(x,y) - d_p(y,y) \\ &= d_p(x,y) - d_p(x,x) + d_p(y,x) - d_p(y,y) \\ &\geq 0\ . \end{aligned}$$

Sifat *(M1)* terpenuhi.

(M2)($\Rightarrow$) Diketahui $d(x,y) = 0$, akibatnya

$$0 = 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y),$$

sehingga

$$d_p(x,y) + d_p(x,y) = d_p(x,x) + d_p(y,y).$$

Persamaan tersebut terpenuhi jika $d_p(x,y) = d_p(x,x)$ dan $d_p(x,y) = d_p(y,y)$ atau $d_p(x,y) = d_p(x,x) = d_p(y,y)$. Karena d_p memenuhi sifat *(PM1)* pada Definisi 2.3.1 berakibat $x = y$.

($\Leftarrow$) Diketahui $x = y$ berakibat

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y) \\ &= 2d_p(x,x) - d_p(x,x) - d_p(x,x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi sifat *(M2)* terpenuhi.

*(M3)*Diketahui d_p merupakan metrik parsial sehingga memenuhi sifat *(PM3)* pada Definisi 2.3.1 yang berakibat

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y) \\ &= 2d_p(y,x) - d_p(y,y) - d_p(x,x) \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

Jadi sifat *(M3)* terpenuhi.

*(M4)*Diketahui d_p merupakan metrik parsial sehingga memenuhi sifat *(PM4)* pada Definisi 2.3.1 yang berakibat

$$
\begin{aligned}
&d(x,y)\\
&= 2d_p(x,y) - d_p(x,x) - d_p(y,y)\\
&\leq 2\left(d_p(x,z) + d_p(z,y) - d_p(z,z)\right) - d_p(x,x) - d_p(y,y)\\
&= 2d_p(x,z) + 2d_p(z,y) - 2d_p(z,z) - d_p(x,x) - d_p(y,y)\\
&= 2d_p(x,z) - d_p(x,x) - d_p(z,z) + 2d_p(z,y) - d_p(z,z) - d_p(y,y)\\
&= d(x,z) + d(z,y)
\end{aligned}
$$

Jadi sifat *(M4)* terpenuhi.

Karena *(M4)*, *(M2)*, *(M3)*, dan *(M4)* terpenuhi maka (X,d) adalah ruang metrik.

Kemudian, diberikan defnisi yang berkaitan dengan defnisi barisan konvergen pada ruang metrik parsial, barisan Cauchy pada ruang metrik parsial serta bagaimana defnisi kelengkapan ruangnya.

Definisi 2.3.3.[3] *Diberikan (X,d_p) adalah ruang metrik parsial dan $\{x_n\}$ barisan di X maka barisan $\{x_n\}$ konvergen ke titik $x \in X$ jika dan hanya jika*

$$\lim_{n\to\infty} d_p(x,x_n) = d_p(x,x)$$

Definisi 2.3.4.[3] *Diberikan (X,d_p) adalah ruang metrik parsial dan $\{x_n\}$ barisan di X maka barisan $\{x_n\}$ dikatakan barisan Cauchy pada (X,d_p) jika*

$$\lim_{m,n\to\infty} d_p(x_n,x_m)$$

ada dan berhingga

Definisi 2.3.5.[3] *Diberikan (X,d_p) adalah ruang metrik parsial dan $\{x_n\}$ barisan di X maka barisan $\{x_n\}$ dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ pada X konvergen ke titik $x \in X$ sehingga*

$$\lim_{m,n\to\infty} d_p(x_n,x_m) = \lim_{n\to\infty} d_p(x_n,x) = d_p(x,x).$$

2.4 Ruang b-metrik

Ruang b-metrik berbeda dengan ruang metrik, perbedaannya terletak pada pertidaksamaan segitiga dimana

terdapat bilangan real $s \geq 1$. Selengkapnya, berikut ini adalah definisi dari ruang b-metrik.

Definisi 2.4.1 [2] *Diberikan X adalah suatu himpunan tak kosong dan diberikan $s \geq 1$ bilangan riil. Suatu fungsi $d_b : X \times X \to \mathbb{R}^+$ disebut b-metrik, untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku*
(bM1) $d_b(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
(bM2) $d_b(x, y) = d_b(y, x)$;
(bM3)Terdapat $s \geq 1$ sedemikian sehingga

$$d_b(x, y) \leq s(d_b(x, z) + d_b(z, y)).$$

Maka d_b disebut b-metrik pada X dan (X, d_b) disebut ruang b-metrik.

Berdasarkan definisi ruang b-metrik, terlihat bahwa setiap ruang metrik adalah ruang b-metrik dengan koefisien $s = 1$ akan tetapi tidak berlaku sebaliknya. Dalam menentukan koefisien s pada suatu ruang b-metrik dapat diperoleh melalui iterasi pada syarat *(bM3)* terhadap himpunan X hingga menemukan koefisien s yang berlaku pada *(bM3)* untuk semua anggota X. Berikut ini diberikan sebuah contoh ruang b-metrik yang bukan ruang metrik.

Contoh 2.5.[7] Diberikan $X = \mathbb{N}$ dan $d_b : X \times X \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh

$$d_b(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{, jika } m = n \\ \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| & \text{, jika } m \text{ dan } n \text{ genap} \\ 5 & \text{, jika } m \text{ dan } n \text{ ganjil} \\ 2 & \text{, selainnya} \end{cases}$$

maka (X, d_b) ruang b-metrik dengan koefisien $s = \frac{5}{4}$

Penyelesaian :

Ambil sebarang $m, n, p \in X$ berbeda, didapat

(bM1) ($\Rightarrow$) Ambil $d_b(m, n) = 0$ maka $m = n$

($\Leftarrow$) Ambil $m = n$ maka $d_b(m, n) = 0$

Sehingga $d_b(m, n) = 0 \Leftrightarrow m = n$

(bM2) Kasus 1. Ambil m genap dan n genap maka

$$d_b(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = d_b(n,m)$$

Kasus 2. Ambil m genap dan n ganjil maka

$$d_b(m,n) = 2 = d_b(n,m)$$

Kasus 3. Ambil m ganjil dan n ganjil maka

$$d_b(m,n) = 5 = d_b(n,m)$$

Kasus 4. Ambil m ganjil dan n genap maka

$$d_b(m,n) = 2 = d_b(n,m)$$

Sehingga $d_b(m,n) = d_b(n,m)$

(bM3) Kasus 1. Ambil m,n ganjil dan p genap, maka

$$d_b(m,n) = 5 = \frac{5}{4}(2+2) = \frac{5}{4}\big(d_b(m,p) + d_b(p,n)\big)$$

Kasus 2. Ambil m,n ganjil dan p ganjil, maka

$$\begin{aligned} d_b(m,n) &= 5 \\ &< 5+5 \\ &< \tfrac{5}{4}(5+5) \\ &= \frac{5}{4}\big(d_b(m,p) + d_b(p,n)\big) \end{aligned}$$

Kasus 3. Ambil m,n genap dan p genap, maka

$$\begin{aligned} d_b(m,n) &= \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \\ &= \left|\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n}\right| \\ &= \left|\left(\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{p}\right) + \left(\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n}\right)\right| \\ &\leq \left|\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{p}\right| + \left|\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n}\right| \\ &< \tfrac{5}{4}\left(\left|\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{p}\right| + \left|\tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n}\right|\right) \\ &= \tfrac{5}{4}\big(d_b(m,p) + d_b(p,n)\big) \end{aligned}$$

Kasus 4. Ambil m,n genap dan p ganjil, maka

$$\begin{aligned} d_b(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| &< 2+2 \\ &< \frac{5}{4}(2+2) \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{4}\left(d_b(m,p) + d_b(p,n)\right)$$

Kasus 5. Ambil m genap, n ganjil, dan p genap, maka

$$d_b(m,n) = 2 \leq \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right| + 2$$
$$< \frac{5}{4}\left(\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right| + 2\right)$$
$$= \frac{5}{4}\left(d_b(m,p) + d_b(p,n)\right)$$

Kasus 6. Ambil m genap, n ganjil, dan p ganjil, maka

$$d_b(m,n) = 2 < 2 + 5$$
$$< \frac{5}{4}(2+5)$$
$$= \frac{5}{4}\left(d_b(m,p) + d_b(p,n)\right)$$

Kasus 7. Ambil m ganjil, n genap, dan p genap, maka

$$d_b(m,n) = 2 \leq 2 + \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right|$$
$$< \frac{5}{4}\left(2 + \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right|\right)$$
$$= \frac{5}{4}\left(d_b(m,p) + d_b(p,n)\right)$$

Kasus 8. Ambil m ganjil, n genap, dan p ganjil, maka

$$d_b(m,n) = 2 < 5 + 2$$
$$< \frac{5}{4}(5+2)$$
$$= \frac{5}{4}\left(d_b(m,p) + d_b(p,n)\right)$$

Sehingga $d_b(m,n) \leq \frac{5}{4}\left(d_b(m,p) + d_b(p,n)\right)$

Karena d_b memenuhi *(bM1)* – *(bM3)* dengan koefisien $s = \frac{5}{4}$ maka $d_b(x,y)$ adalah b-metrik di X. Perhatikan bahwa dengan mengambil $m = 1$, $n = 3$, dan $p = 2$ didapat $d_b(1,3) =$

$5 > 2 + 2 = d_b(1,2) + d_b(2,3)$ terlihat bahwa d_b adalah b-metrik tetapi bukan metrik.

Contoh 2.6.[8] Diberikan (X, d) ruang metrik dan $d_b : X \times X \to \mathbb{R}^+$ didefinisikan dengan

$$d_b(x, y) = [d(x, y)]^p ,$$

untuk setiap $x, y \in X$, dan $p > 1$, maka (X, d_b) adalah ruang b-metrik dengan koefisien $2^{p-1} > 1$.

Penjelasan untuk Contoh 2.6 dapat ditunjukkan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y, z \in X$,

(bM1) (⇒)Diketahui jika $d(x, y)$ adalah metrik, sehingga memenuhi sifat *(M2)* yang berakibat

$$\begin{aligned} d_b(x, y) &= 0 \\ [d(x, y)]^p &= 0 \\ d(x, y) &= 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

(⇐) Jika $x = y$ maka $d(x, y) = 0$. Lalu pangkatkan p sehingga didapat,

$$\begin{aligned} [d(x, y)]^p &= 0 \\ d_b(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

karena terbukti dari kanan dan kiri maka sifat *(bM1)* terpenuhi.

(bM2) Diketahui jika $d(x, y)$ adalah metrik, sehingga memenuhi sifat *(M3)* yang berakibat,

$$\begin{aligned} d_b(x, y) &= [d(x, y)]^p \\ &= [d(y, x)]^p \\ &= d_b(y, x) \end{aligned}$$

jadi sifat *(bM2)* terpenuhi.

(bM3) Untuk menunjukkan sifat *(bM3)*, gunakan Ketaksamaan Power Mean.

Untuk $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1 \geq k_2$, dan $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+$ berlaku

$$\sqrt[k_1]{\frac{a_1^{k_1} + a_2^{k_1} + \cdots + a_n^{k_1}}{n}} \geq \sqrt[k_2]{\frac{a_1^{k_2} + a_2^{k_2} + \cdots + a_n^{k_2}}{n}}$$

Ambil $k_2 = 1$ dan $k_1 = p > 1$. Perhatikan $d(x, y)$ adalah metrik, sehingga memenuhi sifat *(M4)* yang berakibat,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$
$$[d(x,y)]^p \leq [d(x,z) + d(z,y)]^p$$

Misalkan $d(x,z) = a$ dan $d(z,y) = b$.

Dengan menggunakan Ketaksamaan Power Mean didapat

$$\sqrt[p]{\frac{a^p + b^p}{2}} \geq \frac{a + b}{2}$$
$$\frac{a^p + b^p}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^p$$
$$2^{p-1}(a^p + b^p) \geq (a+b)^p$$

Yang berakibat

$$[d(x,y)]^p \leq [d(x,z) + d(z,y)]^p$$
$$\leq 2^{p-1}([d(x,z)]^p + [d(x,z)]^p)$$
$$[d(x,y)]^p \leq 2^{p-1}([d(x,z)]^p + [d(x,z)]^p)$$
$$d_b(x,y) \leq 2^{p-1}(d_b(x,z) + d_b(z,y)).$$

Didapat $s = 2^{p-1} > 1$ dan sifat *(bM4)* terpenuhi. Karena $d_b(x,y)$ memenuhi *(bM1)* – *(bM3)* dengan koefisien $s = 2^{p-1} > 1$ maka d_b adalah b-metrik.

Kemudian, diberikan defnisi yang berkaitan dengan defnisi barisan konvergen pada ruang metrik parsial, barisan Cauchy pada ruang metrik parsial serta bagaimana defnisi kelengkapan ruangnya.

Definisi 2.4.2. [9] *Diberikan (X, d_b) adalah ruang b-metrik dan $\{x_n\}$ barisan di X. Barisan $\{x_n\}$ disebut konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_b(x_n, x) < \varepsilon$ untuk setiap $n > n_0$ dan dinyatakan dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ atau $d_b(x_n, x) \to 0$ dengan $n \to \infty$.*

Definisi 2.4.3. [9] *Diberikan (X, d_b) adalah ruang b-metrik dan $\{x_n\}$ barisan di X maka barisan $\{x_n\}$ dikatakan barisan Cauchy pada (X, d_b) jika $d_b(x_n, x_m) \to 0$ dengan $n, m \to \infty$.*

Definisi 2.4.4. [9] *Diberikan* (X, d_b) *adalah ruang b-metrik dan* $\{x_n\}$ *barisan di* X *maka barisan* $\{x_n\}$ *dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy* $\{x_n\}$ *pada* X *adalah konvergen ke* $x \in X$ *.*

2.5 Prinsip Titik Tetap Banach

Pada bagian ini dijelaskan prinsip titik tetap Banach pada ruang metrik. Prinsip titik tetap Banach ini menjelaskan teorema untuk menentukan ketunggalan titik tetap pada ruang metrik X. Sebelumnya, berikut ini diberikan definisi titik tetap.

Definisi 2.5.1 [1] *Titik tetap dari suatu pemetaan* $T: X \to X$ *pada himpunan* X *adalah titik* $x \in X$ *yang dipetakan ke dirinya sendiri (ditetapkan oleh* T*) yaitu*

$$T(x) = x$$

Untuk lebih jelasnya, berikut ini diberikan sebuah contoh titik tetap pada bilangan real.

Contoh 2.7 Diberikan pemetaan $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $T(x) = x^2$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Titik tetap pada pemetaan tersebut adalah titik $x_1 = 0$ dan $x_2 = 1$.

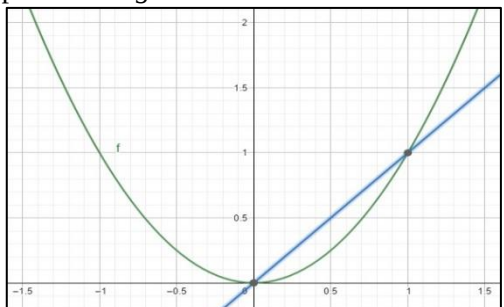
Penyelesaian :

Untuk menemukan titik tetap dari T maka dicari titik $x \in \mathbb{R}$ yang memetakan ke titik itu sendiri, didapat

$$\begin{aligned} T(x) &= x \\ x^2 &= x \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \\ x_1 = 0 \text{ atau } x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Sehingga titik tetap dari pemetaan T adalah $x_1 = 0$ dan $x_2 = 1$.

Berdasarkan Contoh 2.7 dapat dilihat bahwa titik tetap merupakan perpotongan dari pemetaan T dengan garis $y = x$. Berikut ini diberikan ilustrasi dari titik tetap pada Contoh 2.7 menggunakan aplikasi *Geogebra*



Gambar 2.1 Titik Tetap

Pada prinsip titik tetap Banach terdapat definisi pemetaan kontraksi, oleh karena itu perlu pula diketahui definisi dari pemetaan kontraksi yaitu sebagai berikut :

Definisi 2.5.2.[1] *Diberikan* (X, d) *adalah ruang metrik. Pemetaan* $T: X \to X$ *disebut kontraksi pada* X *jika terdapat bilangan real positif* $\alpha < 1$ *sedemikian hingga untuk setiap* $x, y \in X$ *berlaku*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

Berikut ini diberikan teorema titik tetap Banach (teorema kontraksi). Selengkapnya akan dijelaskan dalam teorema berikut ini

Teorema 2.5.3.[1] *Diberikan sebuah ruang metrik* (X, d). *Jika* X *lengkap dan diberikan* $T: X \to X$ *adalah pemetaan kontraksi pada* X, *maka* T *memiliki tepat satu titik tetap*

Berikut ini diberikan contoh kasus titik tetap pemetaan kontraksi Banach di dalam ruang metrik.

Contoh 2.8. Diberikan ruang metrik (X, d) lengkap dengan $X = [0,1]$ dan dengan $d: X \times X \to \mathbb{R}$ dimana

$$d(x, y) = |x - y| \tag{2.3}$$

untuk setiap $x, y \in X$. Jika didefinisikan $T: X \to X$ dengan

$$T(x) = \frac{x}{2}, \text{ untuk setiap } x \in X \tag{2.4}$$

maka T merupakan pemetaan yang memilitik titik tetap tunggal. Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut. Akan ditunjukkan

bahwa T merupakan pemetaan kontraksi Banach, atau dengan kata lain terdapat $\alpha \in [0,1)$ yang memenuhi

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y) \tag{2.5}$$

Perhatikan bahwa untuk $x = y$ jelas bahwa pemetaan yang diberikan memenuhi memenuhi (2.5). Selanjutnya perhatikan untuk $x \neq y$ diperoleh

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= d(\tfrac{x}{2},\tfrac{y}{2}) \\ &= \left|\tfrac{x}{2} - \tfrac{y}{2}\right| \end{aligned}$$

dan

$$\alpha d(x,y) = \alpha|x-y|$$

Selanjutnya dicari $\alpha \in [0,1)$ sedemikian hingga memenuhi

$$\begin{aligned} \left|\tfrac{x}{2} - \tfrac{y}{2}\right| &\leq \alpha|x-y| \\ \tfrac{1}{2}|x-y| &\leq \alpha|x-y| \\ \tfrac{1}{2} &\leq \alpha \end{aligned} \tag{2.6}$$

Berdasarkan (2.6) terdapat α yang dapat dipilih $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$, akibatnya T memenuhi prinsip pemetaan kontraksi Banach. Akibatnya berdasarkan Teorema 2.5.3 T memiliki titik tetap tunggal. Berdasarkan definisi pemetaan, titik tetap yang dimaksud yaitu di $x = 0 \in X$.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan tentang bagaimana metode atau langkah-langkah dalam mengerjakan tugas akhir.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dijelaskan beberapa referensi yang berkaitan dengan ruang b-metrik parsial dan masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraksi Banach di dalam ruang metrik tersebut. Referensi yang mendukung tugas akhir ini meliputi pengertian dari definisi ruang metrik, ruang b-metrik, dan ruang parsial dan diberikan beberapa contoh dari masing-masing ruang tersebut. Kemudian, dijelaskan tentang definisi titik tetap pemetaan pada ruang metrik dan prinsip pemetaan kontraksi Banach yang berlaku pada ruang metrik.

Pada studi literatur, referensi-referensi yang diperlukan dapat diperoleh melalui jurnal-jurnal atau paper yang sesuai dengan topik pada tugas akhir ini. Selain melalui jurnal- jurnal atau paper yang terkait, studi literatur dapat diperoleh melalui buku teks yang berkaitan dengan ruang b-metrik parsial dan masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraksi Banach di dalam ruang tersebut.

3.2 Mengkaji Ruang b-Metrik Parsial

Pada bagian ini dijelaskan tentang definisi formal dari ruang b-metrik parsial, kemudian diberikan beberapa contoh himpunan dan fungsi metriknya yang memenuhi kriteria-kriteria dari ruang b-metrik parsial. Selanjutnya diberikan teorema-teorema yang menjelaskan kaitan atau hubungan antara ruang b-metrik parsial dengan ruang b-metrik, kaitan disini berarti dapat mengonstruksi ruang b-metrik parsial dari ruang metrik parsial dan ruang b-metrik ataupun sebaliknya.

Selanjutnya, diberikan definisi barisan konvergen, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan pada ruang b-metrik parsial, dimana sifat kelengkapan tersebut akan dipakai untuk mengetahui eksistensi dan ketunggalan titik tetap pada ruang b-metrik parsial.

3.3 Mengkaji Prinsip Kontraksi Banach

Selanjutnya adalah mengkaji prinsip kontraksi Banach pada ruang b-metrik parsial. Pada tahap ini akan dikaji prinsip kontraksi Banach kemudian membuktikan prinsip kontraksi Banach pada ruang b-metrik parsial. Tahap ini merupakan langkah untuk menjawab rumusan masalah yang pertama.

3.4 Mengkonstruksi Contoh Eksistensi dan Ketunggalan Titik Tetap Pemetaan Kontraksi Banach Didalam Ruang b-Metrik Parsial

Pada bagian ini menjawab rumusan masalah yang kedua pada bab pendahuluan. Setelah mengkaji karakterisasi dan pembuktian dari eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraksi Banach di dalam ruang b-metrik parsial, kemudian pada bagian ini dikonstruksi contoh baru dan pemetaan yang seperti apa yang menunjukkan masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap didalam ruang b-metrik parsial dengan pemetaanya memenuhi prinsip pemetaan kontraksi Banach.

3.5 Penarikan Kesimpulan dan Pembukuan Tugas Akhir

Tahap ini adalah tahapan terakhir pada pengerjaan tugas akhir ini. Tahap ini menjelaskan dan memaparkan kesimpulan dan hasil-hasil apa saja yang didapat selama pengerjaan Tugas akhir.

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini diuraikan mengenai ruang b-metrik parsial, serta kaitan kelengkapan ruang antara ruang b-metrik parsial dan ruang b-metrik. Kemudian diberikan juga definisi pemetaan kontraksi Banach di dalam ruang b-metrik parsial dan kaitannya dengan eksistensi dan ketunggalan pemetaan di dalamnya. Tidak hanya itu, dikonstruksi contoh ruang b-metrik parsial dan pemetaan di dalamnya yang menunjukkan eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraksi Banach.

4.1 Ruang b-Metrik Parsial

Berikut diberikan definisi dari ruang b-metrik parsial yang merupakan perumuman dari ruang metrik parsial dan ruang b-metrik yang didefinisikan oleh S.Sukhla [4].

Definisi 4.1.1. *Diberikan himpunan tak kosong X. Fungsi $d_{pb} : X \times X \to \mathbb{R}^+$ dikatakan b-metrik parsial pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi :*

(PbM1) $x = y$ *jika dan hanya jika* $d_{pb}(x,x) = d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$;

(PbM2) $d_{pb}(x,x) \leq d_{pb}(x,y)$;

(PbM3) $d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,x)$;

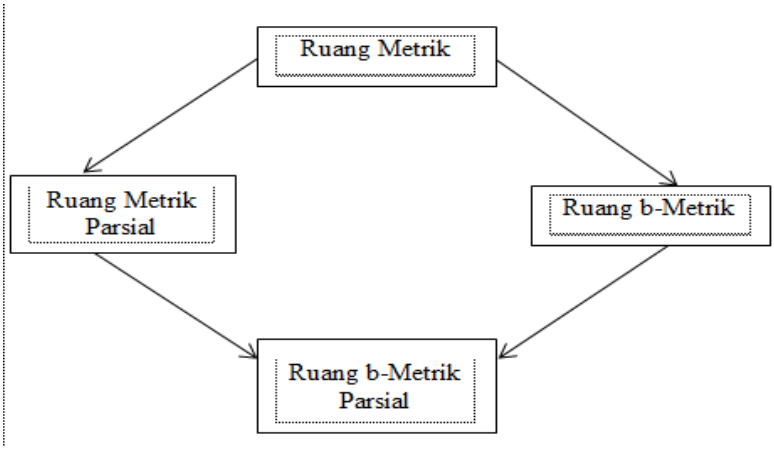
(PbM4) $d_{pb}(x,y) \leq s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z)$.

Ruang b-metrik parsial adalah pasangan (X, d_{pb}) *dan s disebut koefisien* (X, d_{pb}).

Berdasarkan Definisi 4.1.1, jika $d_{pb}(x,y) = 0$, maka menggunakan sifat (*PbM2*) diperoleh $d_{pb}(x,x) \leq 0$ akibatnya $d_{pb}(x,x) = 0$ sehingga didapat $d_{pb}(x,x) = d_{pb}(x,y)$.

Berdasarkan (*PbM1*) berlaku $x = y$, namun tidak berlaku sebaliknya.

Pada Bab II dapat dilihat bahwa setiap ruang metrik adalah ruang b-metrik, setiap ruang metrik adalah ruang metrik parsial. Dari Definisi 4.1.1 dapat ditarik kesimpulan bahwa setiap ruang b-metrik adalah ruang b-metrik parsial, setiap ruang metrik parsial adalah ruang b-metrik parsial. Lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 4.1. Hubungan Ruang Metrik dan Generalisasinya

Berikut diberikan oleh Sukhla [4] pada contoh himpunan dan fungsi yang berlaku di dalamnya yang memenuhi definisi dari ruang b-metrik parsial.

Contoh 4.1. Diberikan $X = \mathbb{R}^+$, $p > 1$ adalah konstan dan $d_{pb} : X \times X \to X$ didefinisikan

$$d_{pb}(x, y) = [\max(x, y)]^p + |x - y|^p \textit{ untuk setiap } x, y \in X$$

maka (X, d_{pb}) adalah ruang b-metrik parsial dengan koefisien $s = 2^p > 1$. Tapi ini bukan ruang b-metrik maupun ruang metrik parsial.

Penjelasan untuk Contoh 4.1 dapat ditunjukkan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y, z \in X$,

(PbM1)(⇒) diketahui $x = y$ maka,

$$\begin{aligned} d_{pb}(x,y) &= [\max(x,y)]^p + |x-y|^p \\ &= [\max(x,x)]^p + |x-x|^p \\ &= d_{pb}(x,x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{pb}(x,y) &= [\max(x,y)]^p + |x-y|^p \\ &= [\max(y,y)]^p + |y-y|^p \\ &= d_{pb}(y,y) \end{aligned}$$

Akibatnya $d_{pb}(x,x) = d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$

(⇐) diketahui $d_{pb}(x,x) = d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$

$$\begin{aligned} d_{pb}(x,y) &= d_{pb}(x,x) \\ &= [\max(x,x)]^p + |x-x|^p \\ &= x^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{pb}(x,y) &= d_{pb}(y,y) \\ &= [\max(y,y)]^p + |y-y|^p \\ &= y^p \end{aligned}$$

Didapat $x = y$ sehingga sifat *(PbM1)* terpenuhi.

(PbM2) Kasus 1: Untuk $x > y$

$$\begin{aligned} [\max(x,x)]^p &= [\max(x,y)]^p \\ [\max(x,x)]^p + |x-x|^p &\leq [\max(x,x)]^p + |x-y|^p \\ d_{pb}(x,x) &\leq d_{pb}(x,y) \end{aligned}$$

Kasus2 : Untuk $x \leq y$

$$[\max(x,x)]^p \leq [\max(x,y)]^p$$

$$[\max(x,x)]^p + |x-x|^p \leq [\max(x,x)]^p + |x-y|^p$$
$$d_{pb}(x,x) \leq d_{pb}(x,y)$$

Sehingga sifat *(PbM2)* terpenuhi.

(PbM3) $d_{pb}(x,y) = [\max(x,y)]^p + |x-y|^p$
$$= [\max(y,x)]^p + |y-x|^p$$
$$= d_{pb}(y,x)$$

Sehingga sifat *(PbM3)* terpenuhi.

(PbM4) Untuk menunjukkan sifat *(PbM4)* maka menggunakan Ketaksamaan Power Mean

$$d_{pb}(x,y)$$
$$= [\max(x,y)]^p + |x-y|^p$$
$$\leq [\max(x,z) + \max(y,z) - \max(z,z)]^p + |x-z+z-y|^p$$
$$\leq [\max(x,z) + \max(y,z) - \max(z,z)]^p + (|x-z| + |z-y|)^p$$
$$\leq [\max(x,z) + \max(y,z)]^p + (|x-z| + |z-y|)^p - [\max(z,z)]^p$$

Misalkan $\max(x,z) = a_1$, $\max(y,z) = a_2$, $|x-z| = b_1$, dan $|z-y| = b_2$. Ambil juga $k_1 = p > 1$ dan $k_2 = 1$

$$\sqrt[p]{\frac{a_1^p + a_2^p}{2}} \geq \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Pada pertidaksamaan diatas terdapat akibat langsung yang berbunyi

$$\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \geq \sqrt[p]{\frac{a_1^p + a_2^p}{2}} \geq \frac{a_1 + a_2}{2}$$

Sehingga didapat

$$\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \geq \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$a_1^p + a_2^p \geq (\frac{a_1 + a_2}{2})^p$$

$$2^p\left(a_1^p + a_2^p\right) \geq (a_1 + a_2)^p \qquad (4.1)$$

Dengan cara yang sama didapat

$$2^p\left(b_1^p + b_2^p\right) \geq (b_1 + b_2)^p \qquad (4.2)$$

Jumlahkan (4.1) dan (4.2) didapat

$$2^p\left(a_1^p + a_2^p\right) + 2^p\left(b_1^p + b_2^p\right) \geq (a_1 + a_2)^p + (b_1 + b_2)^p$$

$$2^p\left[\left(a_1^p + a_2^p\right) + \left(b_1^p + b_2^p\right)\right] \geq (a_1 + a_2)^p + (b_1 + b_2)^p$$

$$2^p\ [(\max(x,z)^p + \max(z,y)^p + |x-z|^p + |z-y|^p] \geq (\max(x,z) + \max(z,y))^p + (|x-z| + |y-z|)^p$$

Sehingga berakibat

$$d_{pb}(x,y)$$

$$\leq 2^p\ [(\max(x,z)^p + \max(z,y)^p + |x-z|^p + |z-y|^p] - \max(z,z)^p + |\mathrm{z} - \mathrm{z}|^p$$

$$= 2^p[(\max(x,z)^p + |x-z|^p + \max(z,y)^p + |z-y|^p] - \max(z,z)^p + |\mathrm{z} - \mathrm{z}|^p$$

$$= 2^p\ \left(d_{pb}\ (x,z) + d_{pb}(z,y)\right) - d_{pb}(z,z)$$

Jadi sifat *(PbM4)* terpenuhi dengan koefisien $s = 2^p > 1$.

Karena sifat *(PbM1)* sampai *(PbM4)* terpenuhi maka d_{pb} adalah b-metrik parsial pada X. Namun d_{pb}bukan b-metrik pada X, ambil $x > 0$ sehingga $d_{pb}\ (x,x) = x^p \neq 0$. Dan $d_{pb}(x,y)$ bukan metrik parsial pada X, ambil $x = 5$, $y = 1$ dan $z = 4$. Sehingga $d_{pb}\ (x,y) = 5^p + 4^p$

dan

$$d_{pb}\ (x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z) = 5^p + 1 + 4^p + 3^p - 4^p$$

$$= 5^p + 1 + 3^p.$$

$$d_{pb}\ (x,y) = 5^p + 4^p$$

$$> 5^p + 1 + 3^p \qquad \forall\ p > 1$$

$$= d_{pb}\ (x,z) + d_{pb}(z,y) - \ d_{pb}(z,z).$$

Contoh 4.2. Diberikan $X = \{1,2,3,4\}$ dan $d_{pb} : X \times X \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$d_{pb}(x,y) = \begin{cases} max(x,y) + \ (x-y)^2 & \text{, jika} \neq y\ ; \\ x & \text{, jika} = y \neq 1\ ; \\ 0 & \text{, jika} = y = 1\ ; \end{cases}$$

Maka (X, d_{pb}) ruang b-metrik parsial dengan $s \geq 2$.

Penjelasan untuk Contoh 4.2 dapat ditunjukkan sebagai berikut. Ambil sebarang $x,y,z \in X$,

(*PbM1*)(⇒) diketahui $x = y$.Untuk menunjukkan sifat (*PbM1*) dari kiri, akan dibagi dalam 2 kasus.

kasus 1 : $\boldsymbol{x = y = 1}$

$d_{pb}(x,y) = 0 = d_{pb}(x,x) = d_{pb}(y,y)$

kasus 2 : $\boldsymbol{x = y \neq 1}$

$d_{pb}(x,y) = x = d_{pb}(x,x) = d_{pb}(y,y)$

Dari kasus 1 dan kasus 2 maka didapat $d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,x) = d_{pb}(y,y)$.

(⇐)Diketahui $d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,x) = d_{pb}(y,y)$. Untuk menunjukkan sifat (*PbM1*) dari kanan, akan dibagi dalam 2 kasus.

kasus 1 : $\boldsymbol{x = y = 1}$

$$\begin{aligned} d_{pb}(x,y) &= d_{pb}(x,x) \\ &= 0 \\ d_{pb}(x,y) &= d_{pb}(y,y) \\ &= d_{pb}(x,x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga $x = y$

kasus 2 : $\boldsymbol{x = y \neq 1}$

$$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,x)$$
$$= x$$
$$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$$
$$= d_{pb}(x,x)$$
$$= x$$

Sehingga $x = y$

Dari kasus 1 dan kasus 2 maka didapat $x = y$.

Karena terpenuhi syarat cukup dan syarat perlu maka sifat (*PbM1*) terpenuhi.

(*PbM2*) Untuk menunjukkan sifat (*PbM2*), akan dibagi dalam 5 kasus.

kasus 1 : $\boldsymbol{x = y = 1}$

Dari (PbM1) didapat $d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,x)$.

kasus 2 : $\boldsymbol{x = y \neq 1}$

Dari (PbM1) didapat $d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,x)$.

kasus 3 : $\boldsymbol{x > y}$

$$d_{pb}(x,x) = x$$
$$= max(x,y)$$
$$< max(x,y) + (x-y)^2$$
$$= d_{pb}(x,y)$$

kasus 4 : $\boldsymbol{y > x = 1}$

$$d_{pb}(x,x) = 0$$
$$< y$$
$$= max(x,y)$$
$$< max(x,y) + (x-y)^2$$

$= d_{pb}(x, y)$

kasus 5 : $\boldsymbol{y > x \neq 1}$

$d_{pb}(x, x) = x$

$< y$

$= max(x, y)$

$< max(x, y) + (x - y)^2$

$= d_{pb}(x, y)$

Dari kasus 1 sampai kasus 5 maka sifat (*PbM2*) terpenuhi.

(PbM3) Untuk menunjukkan sifat (*PbM3*), akan dibagi dalam 3 kasus.

kasus 1 : $\boldsymbol{x \neq y}$

$d_{pb}(x, y) = max(x, y) + (x - y)^2$

$= max(y, x) + (y - x)^2$

$= d_{pb}(y, x).$

kasus 2 : $\boldsymbol{x = y \neq 1}$

$d_{pb}(x, y) = x$

$= y$

$= d_{pb}(y, x).$

kasus 3 : $\boldsymbol{x = y = 1}$

$d_{pb}(x, y) = 0 = d_{pb}(y, x)$

Dari kasus 1 sampai kasus 3 maka sifat (*PbM3*) terpenuhi.

(*PbM4*) Untuk menunjukkan sifat (*PbM4*), akan dibagi dalam 13 kasus.

kasus 1 : $\boldsymbol{x > y = z = 1}$ **atau** $\boldsymbol{y > x = z = 1}$

$max(x,y) + (x-y)^2 = max(x,z) + (x-z)^2$

$$\begin{aligned} d_{pb}(x,y) &= d_{pb}(x,z) + 0 - 0 \\ &= d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z) \\ &\leq s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z)) \\ &\leq s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z) \end{aligned}$$

Sehingga didapat $s \geq 1$.

kasus 2 : $\boldsymbol{x > y = z \neq 1}$ atau $\boldsymbol{y > x = z \neq 1}$

$$\begin{aligned} max(x,y) + (x-y)^2 &= max(x,z) + (x-z)^2 \\ d_{pb}(x,y) &= d_{pb}(x,z) + z - z \\ &= d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z) \\ &\leq s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z)) \\ &\leq s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z) \end{aligned}$$

Sehingga didapat $s \geq 1$.

kasus 3 : $\boldsymbol{x > y > z = 1}$ atau $\boldsymbol{y > x > z = 1}$

$$\begin{aligned} max(x,y) + (x-y)^2 &< max(x,z) + (x-z)^2 \\ d_{pb}(x,y) &< d_{pb}(x,z) \\ &< d_{pb}(x,z) + max(z,y) + (z-y)^2 \\ &= d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - 0 \\ &= d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z) \\ &< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z)) \\ &< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z) \end{aligned}$$

Sehingga didapat $s \geq 1$.

kasus 4 : $\boldsymbol{x > y > z \neq 1}$ atau $\boldsymbol{y > x > z \neq 1}$

$max(x,y) + (x-y)^2 < max(x,z) + (x-z)^2 + max(z,y) + (z-y)^2 - z$

$d_{pb}(x,y) < d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z)$

$< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z))$

$< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z)$

Sehingga didapat $s \geq 1$.

kasus 5 : $\boldsymbol{x > z > y}$ atau $\boldsymbol{y > z > x}$

$max(x,y) + (x-y)^2 = max(x,z) + max(z,y) + (x-y)^2 - z$

$d_{pb}(x,y) < max(x,z) + max(z,y) + 2((x-z)^2 + (z-y)^2) - z$

$< 2(max(x,z) + (x-z)^2 + max(z,y) + (z-y)^2 - z)$

$< 2(max(x,z) + (x-z)^2 + max(z,y) + (z-y)^2) - z$

$d_{pb}(x,y) < 2(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z)$

Sehingga didapat $s \geq 2$.

kasus 6 : $\boldsymbol{x = z > y}$ atau $\boldsymbol{y = z > x}$

$max(x,y) + (x-y)^2 = z + max(z,y) + (z-y)^2 - z$

$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z)$

$\leq s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z))$

$\leq s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z)$

Sehingga didapat $s \geq 1$.

kasus 7 : $\boldsymbol{x = y > z = 1}$

$x < max(x,z) + (x-z)^2 + max(z,y) + (z-y)^2 - 0$

$d_{pb}(x,y) < d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z)$

$< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z))$

$< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z)$

Sehingga didapat $s \geq 1$.

kasus 8 : $\boldsymbol{x = y > z \neq 1}$

$x < max(x,z) + (x-z)^2 + max(z,y) + (z-y)^2 - z$

$d_{pb}(x,y) < d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z)$

$$< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z))$$
$$< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z)$$

Sehingga didapat $s \geq 1$.

kasus 9 : $\boldsymbol{z > x = y = 1}$

$$0 < max(x,z) + (x-z)^2 + max(z,y) + (z-y)^2 - z$$
$$d_{pb}(x,y) < d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z)$$
$$< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z))$$
$$< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z)$$

Sehingga didapat $s \geq 1$.

kasus 10 : $\boldsymbol{z > x = y \neq 1}$

$$x < max(x,z) + (x-z)^2 + max(z,y) + (z-y)^2 - z$$
$$d_{pb}(x,y) < d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z)$$
$$< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z))$$
$$< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z)$$

Sehingga didapat $s \geq 1$.

kasus 11 : $\boldsymbol{z > x > y}$ atau $\boldsymbol{z > y > x}$

$$max(x,y) + (x-y)^2 < max(x,z) + (x-z)^2 + max(z,y) + (z-y)^2 - z$$
$$d_{pb}(x,y) < d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z)$$
$$< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z))$$
$$< s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z)$$

Sehingga didapat $s \geq 1$.

kasus 12 : $\boldsymbol{z = x = y = 1}$

$$0 = 0 + 0 - 0$$
$$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z)$$
$$= s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z))$$
$$= s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z)$$

Sehingga didapat $s \geq 1$.

kasus 13 : $z = x = y = 1$

$x = x + x - x$

$$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z)$$
$$\leq s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y) - d_{pb}(z,z))$$
$$\leq s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z)$$

Sehingga didapat $s \geq 1$.

Dari kasus 1 sampai kasus 13 menunjukkan bahwa sifat (*PbM4*) terpenuhi dengan $s \geq 2$.

Karena sifat *(PbM1)* sampai *(PbM4)* terpenuhi maka d_{pb} adalah b-metrik parsial pada X.

Berikut oleh Sukhla [4] diberikan proposisi yang menjelaskan bahwa dapat dikonstruksi fungsi b-metrik parsial dari sembarang fungsi metrik parsial dan b-metrik.

Proposisi 4.1.2. *Diberikan X himpunan tak kosong dengan d_p adalah metrik parsial dan d_b adalah b-metrik dengan koefisien $s > 1$ untuk X. Maka fungsi $d_{pb} : X \times X \to \mathbb{R}^+$ yang didefinisikan dengan*

$$d_{pb}(x,y) = d_p(x,y) + d_b(x,y) \text{ untuk setiap } x, y \in X$$

adalah b-metrik parsial untuk X, (X, d_{pb}) adalah ruang b-metrik parsial.

Bukti. Ambil sebarang $x, y, z \in X$

*(PbM1)*Karena d_p adalah metrik parsial sehingga memenuhi sifat *(PM1)* dan d_b adalah b-metrik sehingga memenuhi sifat *(bM1)* berakibat

(⇒) Diketahui $x = y$

$$d_{pb}(x,y) = d_p(x,y) + d_b(x,y)$$

$$= d_p(x,x) + d_b(x,x)$$
$$= d_{pb}(x,x)$$
$$d_{pb}(x,y) = d_p(x,y) + d_b(x,y)$$
$$= d_p(y,y) + d_b(y,y)$$
$$= d_{pb}(y,y)$$

sehingga $d_{pb}(x,x) = d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$

($\Leftarrow$) diketahui $d_{pb}(x,x) = d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$

$$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,x)$$
$$= d_p(x,x) + d_b(x,x) \quad (4.3)$$

didapat $x = y$.

$$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$$
$$= d_p(y,y) + d_b(y,y) \quad (4.4)$$

didapat $x = y$. Dari (4.3) dan (4.4) dapat disimpulkan $x = y$. Karena terbukti dari kanan dan kiri maka sifat *(PbM1)* terpenuhi.

(PbM2) Karena d_p adalah metrik parsial maka memenuhi sifat *(PM2)* dan d_b adalah b-metrik maka memenuhi sifat *(bM1)* berakibat

$$d_p(x,x) \leq d_p(x,y)$$
$$d_p(x,x) + d_b(x,x) \leq d_p(x,y) + d_b(x,y)$$
$$d_{pb}(x,x) \leq d_{pb}(x,y)$$

Sehingga sifat *(PbM2)* terpenuhi.

(PbM3) Karena d_p adalah metrik parsial maka memenuhi sifat *(PM3)* dan d_b adalah b-metrik maka memenuhi sifat *(bM2)* berakibat

$$d_{pb}(x,y) = d_p(x,y) + d_b(x,y)$$
$$= d_p(y,x) + d_b(y,x)$$

$$= d_{pb}(y, x)$$

Sehingga sifat *(PbM3)* terpenuhi.

*(PbM4)*Karena d_p adalah metrik parsial maka memenuhi sifat *(PM4)* dan d_b adalah b-metrik maka memenuhi sifat *(bM3)* berakibat

$$d_{pb}(x, y)$$
$$= d_p(x, y) + d_b(x, y)$$
$$\leq d_p(x, z) + d_p(z, y) - d_p(z, z) + s(d_b(x, z) + d_b(z, y))$$
$$\leq s(d_p(x, z) + d_p(z, y) - d_p(z, z) + d_b(x, z) + d_b(z, y))$$
$$= s(d_p(x, z) + d_b(x, z) + d_p(z, y) + d_b(z, y) - (d_p(z, z) + d_b(z, z))$$
$$= s(d_{pb}(x, z) + d_{pb}(z, y) - d_{pb}(z, z))$$
$$\leq s(d_{pb}(x, z) + d_{pb}(z, y)) - d_{pb}(z, z)$$

Sehingga sifat *(PbM4)* terpenuhi. Karena sifat *(PbM1)* sampai *(PbM4)* terpenuhi maka d_{pb} adalah b-metrik parsial pada *X*.

Proposisi 4.1.3. *Diberikan* (X, d_p) *adalah ruang metrik parsial,* $q \geq 1$, *maka* (X, d_{pb}) *adalah ruang b-metrik parsial dengan koefisien* $s \geq 1$, *dimana* d_{pb} *didefinisikan dengan*

$$d_{pb}\,(x, y) = [d_p\,(x, y)]^q$$

Bukti. Ambil sebarang $x, y, z \in X$,

(PbM1) karena d_p adalah metrik pasial maka berlaku sifat *(PM1)* sehingga

(⇒) Diketahui $x = y$

$$d_{pb}(x, y) = [d_p\,(x, y)]^q$$
$$= [d_p\,(x, x)]^q$$

$$= d_{pb}(x,x)$$

$$d_{pb}(x,y) = [d_p(x,y)]^q$$

$$= [d_p\ (y,y)]^q$$

$$= d_{pb}(y,y)$$

Akibatnya $d_{pb}(x,x) = d_{pb}\ (x,y) = d_{pb}\ (y,y)$

($\Leftarrow$) diketahui $d_{pb}(x,x) = d_{pb}\ (x,y) = d_{pb}\ (y,y)$

$$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,x)$$

$$= [d_p\ (x,x)]^q$$

$$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$$

$$= [d_p\ (y,y)]^q$$

Didapat $x = y$. Karena berlaku dari kanan dan kiri maka sifat *(PbM1)* terpenuhi.

(PbM2) karena d_p adalah metrik pasial maka berlaku sifat *(PM2)* sehingga

$$d_p(x,x) \leq d_p(x,y)$$

$$[d_p(x,x)]^q \leq [d_p(x,y)]^q$$

$$d_{pb}(x,x) \leq d_{pb}(x,y)$$

Sehingga berlaku sifat *(PbM2).*

(PbM3) karena d_p adalah metrik pasial maka berlaku sifat *(PM3)* sehingga

$$d_{pb}(x,y) = [d_p(x,y)]^q$$

$$= [d_p(y,x)]^q$$

$$= d_{pb}(y,x)$$

Sehingga berlaku sifat *(PbM3).*

(PbM4) karena d_p adalah metrik pasial maka berlaku sifat *(PM4)* sehingga

$$
\begin{aligned}
d_{pb}(x,y) &= [d_p\ (x,y)]^q \\
&\leq [d_p\ (x,z) + \ d_p\ (z,y) - \ d_p\ (z,z)\ ]^q \\
&\leq s[d_p\ (x,z) + \ d_p\ (z,y) - \ d_p\ (z,z)\ ]^q \\
&\leq s([d_p\ (x,z) + \ d_p\ (z,y)\ ]^q - \left[\ d_p\ (z,z)\ \right]^q) \\
&\leq s([d_p\ (x,z) + \ d_p\ (z,y)\ ]^q) - [\ d_p\ (z,z)\ ]^q
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti contoh 2.6 pada sifat *(bM3)* didapat $s = 2^{q-1}$.

$$
\begin{aligned}
&d_{pb}(x,y) \\
&\leq 2^{q-1}([d_p\ (x,z)]^q + d_p\ (z,y)]^q) - [d_p\ (z,z)]^q \\
&\leq 2^{q-1}\ (d_{pb}\ (x,z) + d_{pb}\ (z,y)) - d_{pb}(z,z)
\end{aligned}
$$

sehingga sifat *(PbM4)* terpenuhi.

Karena sifat *(PbM1)* sampai *(PbM4)* maka d_{pb} adalah b-metrik parsial pada *X*.

□

Berikut oleh penulis diberikan contoh untuk Proposisi 4.1.2.

Contoh 4.3 Diberikan $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $s \geq 1$ koefisien pada b-metrik parsial dengan fungsi $d_{pb} : X \times X \to X$ yang didefinisikan

$$d_{pb}(x,y) = max(x,y) + \ (x-y)^2$$

untuk setiap $x, y \in X$, adalah b-metrik parsial untuk X, (X, d_{pb}) adalah ruang b-metrik parsial.

Penjelasan untuk Contoh 4.3 dapat ditunjukkan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y, z \in X$,

(PbM1)($\Rightarrow$) Jika $x = y$ maka berdasarkan definisi fungsi d_{pb} diperoleh

$$d_{pb}(x,y) = max(x,y) + \ (x-y)^2$$

$$= max(x,x) + (x-x)^2$$
$$= d_{pb}(x,x)$$

$$d_{pb}(x,y) = max(x,y) + (x-y)^2$$
$$= max(y,y) + (y-y)^2$$
$$= d_{pb}(y,y)$$

Sehingga $d_{pb}(x,x) = d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$

($\Leftarrow$) diketahui $d_{pb}(x,x) = d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$

$$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,x)$$
$$= max(x,x) + (x-x)^2$$
$$= x$$

$$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$$
$$= max(y,y) + (y-y)^2$$
$$= y$$

maka didapat $x = y$. Karena terbukti dari kanan dan kiri maka sifat *(PbM1)* terpenuhi.

(PbM2) Untuk menunjukkan sifat *(PbM2)* akan dibagi dua kasus.

Kasus 1 : $x < y$

$$max(x,x) < max(x,y)$$
$$max(x,x) + (x-x)^2 < max(x,y) + (x-y)^2$$
$$d_{pb}(x,x) < d_{pb}(x,y)$$

Kasus 2 : $x \geq y$

$$max(x,x) = max(x,y)$$
$$max(x,x) + (x-x)^2 \leq max(x,y) + (x-y)^2$$
$$d_{pb}(x,x) \leq d_{pb}(x,y)$$

Dari kasus 1 dan kasus 2 maka sifat *(PbM2)* terpenuhi.

(PbM3) $d_{pb}(x,y) = max(x,y) + (x-y)^2$

$$= max(y,x) + (y-x)^2$$
$$= d_{pb}(y,x)$$

Sehingga berlaku sifat *(PbM3)*.

(PbM4) Dengan menggunakan Contoh 2.3 (*PM4*) dan Ketaksamaan Power Mean pada Contoh 2.5 didapat

$$d_{pb}(x,y)$$
$$= max(x,y) + (x-y)^2$$
$$\leq max(x,z) + max(z,y) - max(z,z) + (x-y)^2$$
$$= max(x,z) + max(z,y) - max(z,z) + (x-z+z-y)^2$$
$$\leq max(x,z) + max(z,y) - max(z,z) + 2((x-z)^2 + (x-z)^2)$$
$$= 2(max(x,z) + (x-z)^2 + max(z,y) + (x-z)^2 - \max(z,z))$$
$$\leq 2(max(x,z) + (x-z)^2 + max(z,y) + (x-z)^2) - max(z,z)$$
$$= 2(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - (\max(z,z) + (z-z)^2)$$
$$\leq 2\left(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)\right) - d_{pb}(z,z)$$

Sehingga sifat *(PbM4)* terpenuhi.

Karena sifat *(PbM1)* sampai *(PbM4)* terpenuhi maka d_{pb} adalah b-metrik parsial pada X dengan $s = 2$.

Berikut akan ditunjukkan oleh penulis cara lain pengkonstruksian ruang b-metrik parsial dari ruang b- metrik.

Teorema 4.1.4. *Diberikan sebarang (X, d_b) adalah ruang b-metrik dengan $X = \mathbb{R}^+$. Jika didefinisikan suatu fungsi $d_{pb} : X \times X \to X$ dengan*

$$d_{pb}(x,y) = \frac{|x|+|y|+d_b(x,y)}{2}$$

Untuk setiap $x, y \in X$, maka d_{pb} adalah b-metrik parsial pada X.

Bukti. *Ambil sebarang $x, y, z \in X$*

(PbM1) Karena d_b adalah b-metrik sehingga berlaku sifat *(bM1)*

($\Rightarrow$) Diketahui $x = y$

$$d_{pb}(x,y) = \frac{|x|+|y|+d_b\ (x,y)}{2}$$
$$= \frac{|x|+|x|+d_b\ (x,x)}{2}$$
$$= d_{pb}\ (x,x)$$
$$d_p(x,y) = \frac{|x|+|y|+d_b\ (x,y)}{2}$$
$$= \frac{|y|+|y|+d_b\ (y,y)}{2}$$
$$= d_{pb}(y,y)$$

maka $d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,x) = d_{pb}(y,y)$

($\Leftarrow$) diketahui $d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,x) = d_{pb}(y,y)$

$$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(x,x)$$
$$= \frac{|x| + |x| + d_b\ (x,x)}{2}$$
$$= |x|$$
$$d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$$
$$= \frac{|y|+|y|+d_b\ (y,y)}{2}$$
$$= |y|$$

maka $x = y$. Karena terbukti dari kanan dan kiri maka sifat *(PbM1)* terpenuhi.

(PbM2) Karena d_b adalah b-metrik sehingga berlaku sifat *(bM1)*

$$d_{pb}(x,y) = \frac{|x|+|y|+d_b\ (x,y)}{2}$$
$$2d_{pb}(x,y) = |x| + |y| + d_b\ (x,y)$$
$$2d_{pb}(x,y) \geq |x| + |y|$$
$$2d_{pb}(x,y) \geq d_{pb}(x,x) + d_{pb}(y,y)$$

$$2d_{pb}(x,y) \geq d_{pb}(x,x) + d_{pb}(x,x)$$
$$2d_{pb}(x,y) \geq 2d_{pb}(x,x)$$
$$d_{pb}(x,y) \geq d_{pb}(x,x)$$

Maka sifat (PbM2) terpenuhi.

(PbM3) Karena d_b adalah b-metrik sehingga berlaku sifat *(bM2)*

$$d_{pb}(x,y) = \frac{|x|+|y|+d_b\,(x,y)}{2}$$
$$= \frac{|x|+|y|+d_b\,(y,x)}{2}$$
$$= d_{pb}(y,x)$$

Maka sifat *(PbM3)* terpenuhi.

(PbM4) Karena d_b adalah b-metrik sehingga berlaku sifat *(bM1)* dan *(bM3)*

$$d_{pb}(x,y)$$
$$= \frac{|x| + |y| + d_b\,(x,y)}{2}$$
$$= \frac{|x| + |y| + (2|z| - 2|z|) + d_b\,(x,y) - d_b\,(z,z)}{2}$$
$$\leq \frac{|x| + |y| + (2|z| - 2|z|) + s(d_b\,(x,z) + d_b\,(z,y)) - d_b\,(z,z)}{2}$$
$$\leq \frac{s(|x| + |z| + d_b\,(x,z) + |z| + |y| + d_b\,(z,y)) - (|z| + |z| + d_b\,(z,z)))}{2}$$
$$= s\left(\frac{|x| + |z| + d_b\,(x,z)}{2} + \frac{|z| + |y| + d_b\,(z,y))}{2}\right) - \frac{|z| + |z| + d_b\,(z,z)}{2}$$
$$= s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(z,y)) - d_{pb}(z,z)$$

Maka sifat *(PbM4)* terpenuhi.

Karena sifat *(PbM1)* sampai *(PbM4)* terpenuhi maka d_{pb} adalah b-metrik parsial pada *X*. □

Berikut akan ditunjukkan pula pengonstruksian ruang b-metrik dari sebarang ruang b-metrik parsial.

Teorema 4.1.5. *Diberikan X himpunan tak kosong, jika* (X, d_{pb}) *adalah ruang b-metrik parsial dan didefinisikan* $d_b: X \times X \to \mathbb{R}^+$ *dengan*

$$d_b\ (x, y) = 2d_{pb}(x, y) - d_{pb}(x, x) - d_{pb}(y, y)$$

Untuk setiap $x, y \in X$, *maka* d_b *adalah b-metrik pada* X.

Bukti. *Ambil sebarang* $x, y, z \in X$

(bM1) Karena d_{pb} adalah b-metrik parsial maka memenuhi sifat *(PbM1)*(⇒) diketahui $d_b\ (x, y) = 0$

$2d_{pb}(x, y) - d_{pb}(x, x) - d_{pb}(y, y) = 0$

Supaya persamaan diatas terpenuhi maka

$d_{pb}(x, y) - d_{pb}(x, x) = 0$

dan

$d_{pb}(x, y) - d_{pb}(y, y) = 0,$

sehingga $d_{pb}(x, y) = d_{pb}(x, x) = d_{pb}(y, y)$. Didapat $x = y$.

(⇐) diketahui $x = y$

$$\begin{aligned} d_b\ (x, y) &= 2d_{pb}(x, y) - d_{pb}(x, x) - d_{pb}(y, y) \\ &= 2d_{pb}(x, x) - d_{pb}(x, x) - d_{pb}(x, x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena terpenuhi dari kanan dan kiri maka sifat *(bM1)* terpenuhi.

(bM2) Karena d_{pb} adalah b-metrik parsial maka memenuhi sifat *(PbM3)*

$$\begin{aligned} d_b\ (x, y) &= 2d_{pb}(x, y) - d_{pb}(x, x) - d_{pb}(y, y) \\ &= 2d_{pb}(y, x) - d_{pb}(y, y) - d_{pb}(x, x) \\ &= d_b\ (y, x) \end{aligned}$$

Maka sifat *(bM2)* terpenuhi.

(bM3) Karena d_{pb} adalah b-metrik parsial maka memenuhi sifat *(PbM4)*

$d_b\ (x, y)$

$= 2d_{pb}(x, y) - \ d_{pb}(x, x) - d_{pb}(y, y)$

$\leq \mathrm{s}(2d_{pb}(x, y) - \ d_{pb}(x, x) - d_{pb}(y, y))$

$\leq \mathrm{s}(2((d_{pb}(x, z) + \ d_{pb}(z, y)) - \ d_{pb}(z, z)) - \ d_{pb}(x, x) - d_{pb}(y, y))$

$= s\ (2d_{pb}(x, z) - d_{pb}(x, x) - d_{pb}(z, z)\ +\ 2d_{pb}(z, y) - d_{pb}(z, z)) - \ d_{pb}(y, y)$

$d_b\ (x, y) \leq \mathrm{s}\ (d_b\ (x, z) + \ d_b\ (z, y))$

Maka sifat *(bM3)* terpenuhi. Karena sifat *(bM1)* sampai *(bM3)* terpenuhi maka d_b adalah b-metrik pada X. □

Berikut oleh penulis diberikan teorema yang menjelaskan bahwa dapat dikonstruksi fungsi b-metrik parsial dari sembarang fungsi metrik parsial.

Teorema 4.1.6 *Diberikan sebarang ruang metrik parsial* (X, d_p) *dan konstanta* $a > 0$, *jika didefinisikan suatu fungsi* $d_{pb} : X \times \mathrm{X} \to \mathbb{R}^+$ *dengan*

$$d_{pb}(x, y) = \ d_p(x, y) + a \text{ untuk setiap } x, y \in X,$$

maka d_{pb} *adalah b-metrik parsial pada* X.

Bukti. *Ambil sebarang* $x, y, z \in X$

(PbM1) karena d_p adalah metrik pasial maka berlaku sifat *(PM1)* sehingga

(⇒) Diketahui $x = y$

$$\begin{aligned} d_{pb}(x, y) &= d_p(x, y) + a \\ &= d_p(x, x) + a \\ &= d_{pb}(x, x) \\ d_{pb}(x, y) &= d_p(x, y) + a \\ &= d_p(y, y) + a \end{aligned}$$

$$= d_{pb}(y, y)$$

Akibatnya $d_{pb}(x, x) = d_{pb}(x, y) = d_{pb}$ *(y,y)*

($\Leftarrow$) Diketahui $d_{pb}(x, x) = d_{pb}(x, y) = d_{pb}$ *(y,y)*

$$d_{pb}(x, y) = d_{pb}(x, x)$$
$$= d_p(x, x) + a$$
$$d_{pb}(x, y) = d_{pb}(y, y)$$
$$= d_p(y, y) + a$$

Didapat $x = y$. Karena berlaku dari kanan dan kiri maka sifat *(PbM1)* terpenuhi.

(PbM2) karena d_p adalah metrik pasial maka berlaku sifat *(PM2)* sehingga

$$d_p(x, x) \leq d_p(x, y)$$
$$d_p(x, x) + a \leq d_p(x, y) + a$$
$$d_{pb}(x, x) \leq d_{pb}(x, y)$$

Sehingga berlaku sifat *(PbM2).*

(PbM3) karena d_p adalah metrik pasial maka berlaku sifat *(PM3)* sehingga

$$d_{pb}(x, y) = d_p(x, y) + a$$
$$= d_p(y, x) + a$$
$$= d_{pb}(y, x)$$

Sehingga berlaku sifat *(PbM3).*

(PbM4) karena d_p adalah metrik pasial maka berlaku sifat *(PM4)* sehingga

$$d_p(x, y) \leq d_p(x, z) + d_p(z, y) - d_p(z, z)$$
$$d_p(x, y) + a \leq (d_p(x, z) + d_p(z, y) - d_p(z, z)) + a + (a - a)$$
$$= d_p(x, z) + a + d_p(z, y) + a - (d_p(z, z) + a)$$

$$
\begin{aligned}
d_{pb}(x,y) &\leq d_{pb}(x,z) + d_{pb}(y,z) - d_{pb}(z,z) \\
&\leq s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(y,z) - d_{pb}(z,z)) \\
&\leq s(d_{pb}(x,z) + d_{pb}(y,z)) - d_{pb}(z,z)
\end{aligned}
$$

Karena sifat *(PbM1)* sampai *(PbM4)* terpenuhi maka d_{pb} adalah b-metrik parsial pada *X*.

□

Berikut oleh Sukhla [4] diberikan contoh untuk Teorema 4.1.6

Contoh 4.4 Diberikan $X = \mathbb{R}^+$, $a > 0$ adalah konstanta dan didefinisikan $d_{pb} : X \times X \to X$ dengan

$$d_{pb}\ (x,y) = \max(x,y) + a \text{ untuk setiap } x,y \in X$$

Maka (X, d_{pb}) adalah ruang b-metrik parsial dengan koefisien $s \geq 1$.

Penjelasan untuk Contoh 4.4 dapat ditunjukkan sebagai berikut. Ambil sebarang $x, y, z \in X$,

(PbM1)(⇒) Jika $x = y$ maka berdasarkan definisi fungsi d_{pb} diperoleh

$$
\begin{aligned}
d_{pb}(x,y) &= \max(x,y) + a \\
&= \max(x,x) + a \\
&= d_{pb}(x,x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{pb}(x,y) &= \max(x,y) + a \\
&= \max(y,y) + a \\
&= d_{pb}(y,y)
\end{aligned}
$$

Yang berarti $d_{pb}(x,x) = d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$

(⇐) Diketahui $d_{pb}(x,x) = d_{pb}(x,y) = d_{pb}(y,y)$

$$
\begin{aligned}
d_{pb}(x,x) &= \max(x,x) + a \\
&= x + a
\end{aligned}
$$

$= d_{pb}(x, y)$
$= \max(x, y) + a$

sehingga didapat $y \leq x$

$d_{pb}(y, y) = \max(y, y) + a$
$= y + a$
$= d_{pb}(x, y)$
$= \max(x, y) + a$

sehingga didapat $x \leq y$. Karena $y \leq x$ dan $x \leq y$ berlaku $x = y$, sehingga berlaku sifat *(PbM1).*

(PbM2) Untuk menunjukkan sifat *(PbM2)* dibagi menjadi beberapa kondisi.

a) Untuk $x < y$, diperoleh

$d_{pb}(x, x) = \max(x, x) + a$
$= x + a$
$< y + a$
$= \max(x, y) + a$
$= d_{pb}(x, y)$

dengan kata lain $d_{pb}(x, x) < d_{pb}(x, y)$.

b) Untuk $x \geq y$, diperoleh

$d_{pb}(x, x) = \max(x, x) + a$
$= x + a$
$= \max(x, y) + a$
$= d_{pb}(x, y)$

dengan kata lain $d_{pb}(x, x) = d_{pb}(x, y)$.

Dari a) dan b) berlaku sifat *(PbM2).*

(PbM3) $d_{pb}(x, y) = \max(x, y) + a = \max(y, x) + a = d_{pb}(y,x)$, sehingga sifat *(PbM3)* terpenuhi.

(PbM4)$d_{pb}(x,y) = \max(x,y) + a$

Pada Contoh 2.3 (PM4) sudah dibuktikan max $(x,y) \leq$ max $(x,z) +$ max $(z,y) -$ max (z,z) sehingga didapat

$d_{pb}(x,y)$

$\leq [\max(x,z) + \max(z,y) - \max(z,z)] + a + a - a$

$= \max(x,z) + a + \max(z,y) + a - (\max(z,z) + a)$

$= d_{pb}\ (x,z) + d_{pb}\ (x,z) - d_{pb}(z,z)$

$\leq s[d_{pb}\ (x,z) + d_{pb}\ (x,z) - d_{pb}(z,z)]$

$\leq s[d_{pb}\ (x,z) + d_{pb}\ (x,z)] - d_{pb}(z,z)$

maka sifat *(PbM4)* terpenuhi.

Karena sifat *(PbM1)* sampai *(PbM4)* terpenuhi maka d_{pb} adalah b-metrik parsial pada *X*.

4.2 Konvergensi Barisan dan Kelengkapan pada Ruang b-Metrik Parsial

Pada subbab ini dibahas tentang sifat-sifat barisan pada ruang b-metrik parsial meliputi barisan konvergen, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan b-metrik parsial. Kemudian, dibahas kaitan kelengkapan ruang antara ruang b-metrik parsial dengan ruang metrik parsial. Berikut oleh Shukla [4] diberikan definisi dari topologi di dalam ruang b-metrik parsial.

Definisi 4.2.1. *Untuk setiap b-metrik parsial "*d_{pb}*" adalah himpunan tak kosong X menghasilkan topologi* $\tau_{d_{pb}}$ *pada X yang mendasar adalah keluarga dari bola buka* $B_{d_{pb}}(x,\varepsilon)$ *dimana* $\tau_{d_{pb}} = \{B_{d_{pb}}(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ *dan* $B_{d_{pb}}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d_{pb}(x,y) < \varepsilon + d_{pb}(x,x)\}$. *Jelas, ruang topologi* $(X, \tau_{d_{pb}})$ *adalah* T_0*, tapi tidak diharuskan* T_1*.*

Selanjutnya, diberikan definisi dari barisan konvergen di dalam ruang b-metrik parsial oleh Shukla[4].

Definisi 4.2.2. *Diberikan* (X, d_{pb}) *ruang b-metrik parsial dengan koefisien s dan barisan* $\{x_n\}$ *didalam ruang tersebut. Barisan* $\{x_n\}$ *dikatakan konvergen ke* $x \in X$ *jika*

$$\lim_{n \to \infty} d_{pb}(x_n, x) = d_{pb}(x, x)$$

atau dengan kata lain untuk setiap $\varepsilon > 0$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga* $d_{pb}(x_n, x) - d_{pb}(x, x) < \varepsilon$ *untuk* $n \geq n_0$.

Pada definisi barisan konvergen di dalam ruang b-metrik parsial, hakikatnya sama dengan definisi barisan konvergen di ruang metrik. Jika ruang metrik (X, d), misalkan diberikan barisan $\{x_n\}$ pada X, berdasarkan Definisi 2.2.2 barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen pada X jika terdapat $x \in X$ sedemikian hingga $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$, atau dengan kata lain nilai dari $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x)$ adalah mendekati nilai jarak x ke dirinya sendiri. Sehingga dapat dituliskan $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = d(x, x)$, hal tersebut sama seperti definisi barisan konvergen dalam ruang b-metrik parsial, hal yang sedikit membedakan adalah pada nilai $\lim_{n \to \infty} d_{pb}(x_n, x)$ tidak selalu nol sebab mengacu pada sifat jarak suatu titik ke dirinya sendiri pada ruang b-metrik parsial.

Selanjutnya, diberikan definisi dari barisan Cauchy di dalam ruang b-metrik parsial oleh Shukla[4]. Barisan Cauchy ini memiliki peranan penting dalam pembuktian teorema titik tetap pemetaan kontraksi Banach di ruang b-metrik parsial.

Definisi 4.2.3. *Barisan* $\{x_n\}$ *di dalam ruang b-metrik parsial disebut barisan Cauchy dalam* (X, d_{pb}) *jika*

$$\lim_{m,n \to \infty} d_{pb}(x_m, x_n)$$

ada dan berhingga.

Berdasarkan Definisi 4.2.3 terdapat sedikit perbedaan antara barisan Cauchy di dalam ruang b-metrik parsial dan ruang

metrik. Pada ruang metrik (X, d) barisan $\{x_n\}$ pada X disebut barisan Cauchy jika nilai dari $\lim_{m,n \to \infty} d(x_m, x_n) = 0$. Sedangkan pada ruang b-metrik parsial (X, d_{pb}) barisan $\{x_n\}$ di X dikatakan barisan Cauchy jika nilai $lim_{m,n \to \infty} d_{pb}(x_m, x_n)$ ada dan berhingga, tidak harus mendekati nol.

Kemudian, diberikan definisi kelengkapan dari ruang b-metrik parsial oleh Shukla[4]. Sifat kelengkapan ini penting untuk diketahui, sebab digunakan untuk mengetahui eksistensi titik tetap pemetaan kontraksi Banach di dalam ruang b-metrik parsial.

Definisi 4.2.4. *Diberikan (X, d_{pb}) ruang b-metrik parsial disebut lengkap, jika untuk setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di X, terdapat $x \in X$ sedemikian hingga*

$$\lim_{m,n \to \infty} d_{pb}(x_m, x_n) = \lim_{n \to \infty} d_{pb}(x_n, x) = d_{pb}(x, x)$$

Berikut oleh Shukla [4] diberikan contoh kasus yang menjelasakan masalah konvergensi barisan dan kelengkapan di dalam ruang b-metrik parsial.

Contoh 4.5 Diberikan $X = \mathbb{R}^+$, $a > 0$ adalah konstanta dan didefinisikan $d_{pb} : X \times X \to X$ dengan

$$d_{pb}\,(x, y) = \max(x, y) + a \text{ untuk setiap } x, y \in X$$

maka (X, d_{pb}) adalah ruang b-metrik parsial dengan koefisien $s \geq 1$. Sekarang didefinisikan barisan $\{x_n\}$ di X dengan $x_n = 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $y \geq 1$ didapat $d_{pb}(x_n, y) = y + a = d_{pb}\,(y, y)$. Oleh karena itu $\lim_{n \to \infty} d_{pb}(x_n, y) = d_{pb}\,(y, y)$ untuk setiap $y \geq 1$. Dengan demikian limit dari barisan konvergen dalam b-metrik parsial tidak tunggal.

Berikut dikonstruksi beberapa teorema yang menjelaskan kaitan sifat kelengkapan antara ruang b-metrik parsial dan ruang b-metrik.

Teorema 4.2.5. *Diberikan sembarang ruang b-metrik parsial* (X, d_{pb}) *dan jika dikonstruksi fungsi* d_b *dengan*

$$d_b\,(x,y) = 2d_{pb}(x,y) - d_{pb}(x,x) - d_{pb}(y,y) \qquad (4.5)$$

Untuk setiap $x, y \in X$, *maka* d_b *adalah b-metrik pada* X. *Berdasarkan hal tersebut, ruang* (X, d_{pb}) *ruang b-metrik parsial lengkap jika dan hanya jika* (X, d_b) *ruang b-metrik lengkap.*

Bukti. Pada Teorema 4.1.5 telah dibuktikan bahwa (X, d_b) ruang b-metrik. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa (X, d_{pb}) lengkap jika dan hanya jika (X, d_b) lengkap.

(⇒) Diketahui (X, d_{pb}) lengkap. Ambil sebarang barisan Cauchy $\{x_n\}$ di (X, d_{pb}), sehingga berdasarkan Definisi 4.2.3 nilai $lim_{m,n\to\infty}\, d_{pb}(x_m, x_n)$ ada dan berhingga. Misalkan nilai dari

$$\begin{aligned} lim_{m,n\to\infty}\, d_{pb}(x_m, x_n) &= lim_{n\to\infty}\, d_{pb}(x_n, x_n) \\ &= lim_{m\to\infty}\, d_{pb}(x_m, x_m) \\ &= a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \end{aligned}$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned} &\lim_{m,n\to\infty} d_b(x_m, x_n) \\ &= lim_{m,n\to\infty}[2\, d_{pb}(x_m, x_n) - d_{pb}(x_n, x_n) - d_{pb}(x_m, x_m) \\ &= lim_{m,n\to\infty}\, 2d_{pb}(x_m, x_n) - lim_{n\to\infty}\, d_{pb}(x_n, x_n) - \\ &\quad lim_{m\to\infty}\, d_{pb}(x_m, x_m) \\ &= 2a - a - a \\ &= 0. \end{aligned}$$

Artinya $lim_{m,n\to\infty}\, d_b(x_m, x_n) = 0$, berdasarkan Definisi 2.4.3 dapat disimpulkan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy pada (X, d_b). Karena (X, d_{pb}) lengkap berakibat barisan Cauchy $\{x_n\}$ konvergen, katakanlah $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$ sehingga berdasarkan Definisi 4.2.2 dan Definisi 4.2.4 diperoleh

$$lim_{n\to\infty}\, d_{pb}(x_n, x_n) = lim_{n\to\infty}\, d_{pb}(x_n, x) = d_{pb}(x, x) \qquad (4.6)$$

Berdasarkan (4.6) diperoleh

$lim_{n\to\infty}(d_{pb}(x_n,x) - d_{pb}(x_n,x_n)) = 0$

dan

$lim_{n\to\infty}(d_{pb}(x_n,x) - d_{pb}(x,x)) = 0,$

sehingga diperoleh

$\lim\limits_{n\to\infty} d_b(x_n,x)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}[2\, d_{pb}(x_n,x) - d_{pb}(x_n,x_n) - d_{pb}(x,x)]$

$= lim_{n\to\infty}(d_{pb}(x_n,x) - d_{pb}(x_n,x_n)) + lim_{n\to\infty}(d_{pb}(x_n,x) - d_{pb}(x,x))$

$= 0 + 0$

$= 0$

Artinya $lim_{n\to\infty} d_b(x_n,x) = 0$, berdasarkan Definisi 4.2.4 barisan $\{x_n\}$ konvergen juga di (X,d_b), sehingga karena setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di (X,d_b) konvergen di X terbukti (X,d_b) lengkap.

($\Leftarrow$) Diketahui (X,d_b) lengkap. Ambil sembarang barisan Cauchy $\{x_n\}$ di X, berdasarkan Definisi 2.4.3 didapat
$lim_{m,n\to\infty} d_b(x_m,x_n) = 0$

atau

$$\lim\limits_{m,n\to\infty}[2\, d_{pb}(x_m,x_n) - d_{pb}(x_n,x_n) - d_{pb}(x_m,x_m) = 0 \tag{4.7}$$

Dengan menggunakan sifat *(PbM3)* pada Definisi 4.1.1 didapat

$$\begin{aligned} 2d_{pb}(x_n,x_n) &\leq 2d_{pb}(x_m,x_n) \\ d_{pb}(x_n,x_n) &\leq 2d_{pb}(x_m,x_n) - d_{pb}(x_n,x_n) \\ d_{pb}(x_n,x_n) - d_{pb}(x_m,x_m) &\leq 2d_{pb}(x_m,x_n) - d_{pb}(x_n,x_n) - d_{pb}(x_m,x_m) \end{aligned}$$

$d_{pb}(x_n, x_n) - d_{pb}(x_m, x_m) \leq d_b(x_m, x_n)$

Atau dapat dituliskan

$|d_{pb}(x_n, x_n) - d_{pb}(x_m, x_m)| \leq d_b(x_m, x_n)$, sehingga barisan $\{d_{pb}(x_n, x_n)\}$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ atau nilai $lim_{n \to \infty} d_{pb}(x_n, x_n) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ akibatnya berdasar (4.7) diperoleh $lim_{m,n \to \infty} d_{pb}(x_m, x_n)$ ada dan berhingga, berdasarkan Definisi 4.2.3 sihingga $\{x_n\}$ barisan Cauchy di (X, d_{pb}). Selanjutnya karena (X, d_b) lengkap akibatnya barisan Cauchy $\{x_n\}$ konvergen di (X, d_b), misalkan saja $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$, berdasarkan Definisi 2.4.2 diperoleh nilai dari $lim_{n \to \infty} d_b(x_n, x) = 0$ atau dapat dituliskan

$$lim_{n \to \infty}[2\, d_{pb}(x_n, x) - d_{pb}(x_n, x_n) - d_{pb}(x, x)] = 0 \qquad (4.8)$$

Berdasarkan (4.8) didapat

$$\lim_{n \to \infty} (d_{pb}(x_n, x) - d_{pb}(x_n, x_n)) = 0$$

dan

$lim_{n \to \infty}(d_{pb}(x_n, x) - d_{pb}(x, x)) = 0$ sehingga didapat

$$lim_{n \to \infty} d_{pb}(x_n, x_n) = lim_{n \to \infty} d_{pb}(x_n, x) = d_{pb}(x, x) \qquad (4.9)$$

Dari (4.9) berdasarkan Definisi 4.2.2 $\{x_n\}$ konvergen di (X, d_{pb}), sehingga setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di (X, d_{pb}) konvergen di X terbukti bahwa (X, d_{pb}) lengkap. Jadi terbukti (X, d_{pb}) lengkap jika dan hanya jika (X, d_b) lengkap. □

Berikut dikonstruksi teorema yang menunjukkan kaitan kelengkapan ruang antara ruang b-metrik parsial dan ruang metrik parsial, dengan pendefinisian b-metrik parsial dibangun oleh metrik parsial.

Teorema 4.2.5. *Jika diberikan (X, d_p) sembarang ruang metrik parsial lengkap dan dikonstruksikan fungsi d_{pb} dengan*

$$d_{pb}(x, y) = d_p(x, y) + a \text{ untuk setiap } x, y \in X, \qquad (4.10)$$

dengan $a > 0$ *maka* (X, d_{pb}) *adalah ruang b-metrik parsial lengkap.*

Bukti. Pada Teorema 4.1.6 telah dibuktikan bahwa (X, d_{pb}) adalah ruang b-metrik parsial. Selanjutnya akan dibuktikan jika (X, d_p) lengkap maka (X, d_{pb}) lengkap. Ambil sebarang barisan Cauchy $\{x_n\}$ di (X, d_p), dengan menggunakan Definisi 2.3.3 didapat nilai $lim_{n,m \to \infty} d_p(x_n, x_m) = k$. Sehingga berdasarkan (4.10) diperoleh

$$\begin{aligned} lim_{n,m \to \infty} d_{pb}(x_n, x_m) &= lim_{n,m \to \infty}[d_p(x_n, x_m) + a] \\ &= lim_{n,m \to \infty} d_p(x_n, x_m) + a \\ &= k + a \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dan didapat nilai $lim_{n,m \to \infty} d_{pb}(x_n, x_m) \in \mathbb{R}^+$atau dengan kata lain nilai $lim_{n,m \to \infty} d_{pb}(x_n, x_m)$ ada dan berhingga. Berdasarkan Definisi 4.2.3 didapat bahwa $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di $\{x_n\}$. Selanjutnya karena (X, d_p) lengkap akibatnya sembarang barisan Cauchy $\{x_n\}$ konvergen di (X, d_p), berdasarkan Definisi 2.3.3 diperoleh $lim_{n \to \infty} d_p(x_n, x) = k$, sehingga berdasarkan definisi dari d_{pb} diperoleh

$$\lim_{n \to \infty} d_{pb}(x_n, x) = \lim_{n \to \infty} d_p(x_n, x) + a = k + a = d_{pb}(x, x) \tag{4.12}$$

sehingga dari (4.12) terbukti bahwa $\{x_n\}$ di (X, d_{pb}). Karena setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ di (X, d_{pb}) konvergen di (X, d_p) sehingga dapat disimpulkan (X, d_{pb}) lengkap.

□

4.3 Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraksi Banach di Dalam Ruang b-Metrik Parsial

Permasalahan titik tetap pemetaan merupakan objek yang menarik untuk dikaji di dalam ruang b-metrik parsial. Membahas

tentang titik tetap, titik tetap sendiri pada terapannya sering digunakan untuk menyelesaikan permasalahan penyelesaian persamaan linear dan persamaan integral, tidak hanya itu titik tetap juga dapat digunakan untuk menyelidiki eksistensi penyelesaian masalah syarat awal dan syarat batas dari sistem persamaan diferensial serta membantu menyelesaikannya.

Titik tetap juga sering digunakan dalam bidang komputasi yaitu pada saat mengkonstruksi sebuah iterasi dalam suatu perhitungan. Sebuah iterasi yang konveregen merupakan iterasi yang diinginkan dan dapat diperoleh sebuah informasi di dalamnya. Hal tersebut dapat dikatakan bahwa iterasi tersebut memiliki titik tetap.

Prinsip kontraksi Banach dikenalkan oleh Stefan Banach pada tahun 1992. Penerapan dari prinsip kontraksi Banach sangat beragam, seperti pada persamaan linear, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, persamaan integral, dll, banyak matematikawan meneliti keberadaan dan keunikan dari titik tetap.

Hasil penelitian tersebut coba diterapkan oleh S. Sukhla di dalam ruang b-metrik parsial dapat dilihat di [4]. Penelitian yang dilakukan oleh Sukhla mengungkapkan jika suatu pemetaan yang memenuhi prinsip pemetaan kontraksi Banach pada ruang (X, d_{pb}) ruang b-metrik parsial lengkap maka pemetaan tersebut memiliki titik tetap yang bersifat tunggal. Tidak hanya itu, jika $u \in X$ merupakan titik tetap oleh T maka $d_{pb}(u,u) = 0$ [4].

Berikut ini diberikan teorema yang menunjukkan eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan di dalam ruang metrik parsial rectangular. Dalam teorema ini diperlukan ruang b-metrik parsial lengkap sehingga setiap barisan Cauchy di ruang tersebut konvergen di dalam ruang tersebut.

Teorema 4.3.1. *Diberikan* (X, d_{pb}) *ruang b-metrik parsial lengkap dengan koefisien* $s \geq 1$ *dan* $T : X \to X$ *menjadi pemetaan yang memenuhi kondisi berikut :*

$$d_{pb}\,(Tx, Ty) \leq \lambda\, d_{pb}(x, y) \qquad (4.13)$$

Untuk setiap $x, y \in X$, *dengan* $\lambda \in [0,1)$, *maka* T *memiliki titik tetap tunggal* $u \in X$ *dan* $d_{pb}(u, u) = 0$.

Bukti. Pertama akan ditunjukkan jika titik tetap dari T ada, maka T tunggal. Diberikan $v, u \in X$ dua titik tetap yang berbeda dari T artinya $Tu = u,\ Tv = v$. Dari (4.13) didapat

$$d_{pb}(u, v) = d_{pb}\,(Tu, Tv) \leq \lambda\, d_{pb}(u, v) < d_{pb}(u, v)$$

adalah kontradiksi. Karena itu seharusnya $d_{pb}(u, v) = 0$ sehingga $u = v$. Jadi, jika titik tetap dari T ada maka T tunggal. Lebih jauh lagi, jika u adalah titik tetap dari T dan $d_{pb}(u, u) > 0$ maka dari (4.13) didapat

$$d_{pb}(u, u) = d_{pb}\,(Tu, Tu) \leq \lambda\, d_{pb}(u, u) < d_{pb}(u, u)$$

adalah kontradiksi, sehingga $d_{pb}(u, u) = 0$.

Untuk eksistensi dari titik tetap dengan $\lambda \in (0,1]$ dan $0 < \varepsilon < 1$. Ambil T memenuhi (4.13), ambil sebarang titik $x_0 \in X$ dan didefinisikan barisan $\{x_n\}$ memenuhi $x_n = T^n x_0$. Dari (4.13) didapat

$$\begin{aligned} d_{pb}(x_n, x_{n+1}) &= d_{pb}(T^n x_0, T^{n+1} x_0) \\ &= d_{pb}\big(T(T^{n-1} x_0), T(T^n x_0)\big) \\ &= d_{pb}(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq \lambda d_{pb}(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

dengan menggunakan (4.13) lagi, didapat

$$d_{pb}(x_{n-1}, x_n) \leq \lambda d_{pb}(x_{n-2}, x_{n-1}) \qquad (4.14)$$

dan dengan (4.14) didapat

$$d_{pb}(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^2 d_{pb}(x_{n-2}, x_{n-1})$$

Jika hal ini dilanjutkan maka didapat

$$d_{pb}(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d_{pb}(x_0, x_1) \qquad (4.15)$$

Atau dengan kata lain

$$d_{pb}(T^n x_0, T^n x_1) \leq \lambda^n d_{pb}(x_0, x_1)$$

$$d_{pb}(T^n x, T^n y) \leq \lambda^n d_{pb}(x, y) \tag{4.16}$$

dengan menggunakan *(PbM4)* dan (4.15) untuk sebarang $n, m \in \mathbb{N}$ dengan $n < m$ diperoleh

$$\begin{aligned}
&d_{pb}(x_n, x_m) \\
&\leq s(d_{pb}(x_n, x_{n+1}) + d_{pb}(x_{n+1}, x_m)) - d_{pb}(x_{n+1}, x_{n+1}) \\
&\leq s\left[d_{pb}(x_n, x_{n+1})\right] + s^2[d_{pb}(x_{n+1}, x_{n+2}) + d_{pb}(x_{n+2}, x_m)] \\
&\leq s\left[d_{pb}(x_n, x_{n+1})\right] + s^2\left[d_{pb}(x_{n+1}, x_{n+2})\right] + \\
&\quad s^3\left[d_{pb}(x_{n+2}, x_{n+3})\right] + \cdots + s^{m-n}\left[d_{pb}(x_{m-1}, x_m)\right] \\
&\leq (s\lambda^n + s^2\lambda^{n+1} + s^3\lambda^{n+2} + \cdots + s^{m-n}\lambda^{m-1}) d_{pb}(x_0, x_1) \\
&= s\lambda^n[1 + s\lambda + (s\lambda)^2 + (s\lambda)^3 + \cdots + (s\lambda)^{m-n-1}] d_{pb}(x_0, x_1) \\
&\leq s\lambda^n[1 + s\lambda + (s\lambda)^2 + (s\lambda)^3 + \cdots] d_{pb}(x_0, x_1) \\
&= \frac{s\lambda^n}{1 - s\lambda} d_{pb}(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$d_{pb}(x_n, x_m) \leq \frac{s\lambda^n}{1-s\lambda} d_{pb}(x_0, x_1) \tag{4.17}$$

$$\left|d_{pb}(x_n, x_m)\right| \leq \frac{s\lambda^n}{1-s\lambda} \left|d_{pb}(x_0, x_1)\right|$$

Karena $\lambda \in [0,1)$ dengan mengambil limit $n \to \infty$ didapat

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{s\lambda^n}{1-s\lambda} \left|d_{pb}(x_0, x_1)\right| &= \frac{s\left|d_{pb}(x_0, x_1)\right|}{1-s\lambda} \lim_{n\to\infty} \lambda^n \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dengan kata lain $\lambda^n \to 0$ dengan $n \to \infty$. Sehingga didapat $\lambda^n < \frac{\varepsilon}{4s}$ dan menggunakan (4.15) didapat

$$d_{pb}(x_n, x_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{4s} \tag{4.18}$$

Sekarang diberikan

$$B_{d_{pb}}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \{\, y \in X : d_{pb}\,(x_k, y) < \frac{\varepsilon}{2} + d_{pb}\,(x_k, x_k)\}$$

dengan $k \in \mathbb{N}$ dan $F \equiv T^n$. Akan ditunjukkan bahwa F memetakan $B_{d_{pb}}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ke dalam dirinya sendiri. Jelas bahwa $x_k \in B_{d_{pb}}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ sehingga $B_{d_{pb}}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ tidak kosong.

Diberikan sebarang $z \in B_{d_{pb}}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ maka dengan menggunakan (4.16) didapat

$$\begin{aligned} d_{pb}(Fz, Fx_k) &\leq \lambda^n d_{pb}(z, x_k) \\ &< \frac{\varepsilon}{4s}\left(\frac{\varepsilon}{2} + d_{pb}\,(x_k, x_k)\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{4s}(1 + d_{pb}\,(x_k, x_k)) \end{aligned}$$

Dan juga

$$d_{pb}(Fx_k, x_k) = d_{pb}(x_{k+1}, x_k) < \frac{\varepsilon}{4s}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} d_{pb}(Fz, x_k) &\leq s[d_{pb}(Fz, Fx_k) + d_{pb}(Fx_k, x_k)] - d_{pb}(x_k, x_k) \\ &< s[\frac{\varepsilon}{4s}(1 + d_{pb}\,(x_k, x_k)) + \frac{\varepsilon}{4s}] - d_{pb}(x_k, x_k) \\ &< \frac{\varepsilon}{4}(1 + d_{pb}\,(x_k, x_k)) + \frac{\varepsilon}{4} - d_{pb}(x_k, x_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\, d_{pb}\,(x_k, x_k)) + \frac{\varepsilon}{4} - d_{pb}(x_k, x_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + (\frac{\varepsilon}{4} - 1)\, d_{pb}\,(x_k, x_k) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + d_{pb}\,(x_k, x_k) \end{aligned}$$

Didapat, $Fz \in B_{d_{pb}}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Jadi F memetakan $B_{d_{pb}}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ke dirinya sendiri.

Perhatikan, $x_k \in B_{d_{pb}}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ sehingga $Fx_k \in B_{d_{pb}}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ dan dengan proses pengulangan didapat

$F^n x_k \in B_{d_{pb}}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Ambil $x_m \in B_{d_{pb}}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ dan $x_n \in B_{d_{pb}}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ dengan $m, n > k$ didapat

$$d_{pb}(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + d_{pb}(x_k, x_k) \text{ untuk setiap } m, n > k \quad (4.19)$$

Dan barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy. Dengan (PbM2) dan (4.18) didapat

$$d_{pb}(x_k, x_k) \leq d_{pb}(x_k, x_{k+1}) < \frac{\varepsilon}{4s} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.20)$$

Sehingga

$$d_{pb}(x_n, x_m) < \varepsilon \quad (4.21)$$

Dengan kelengkapan dari X terdapat $u \in X$ sedemikian hingga

$$\lim_{m,n \to \infty} d_{pb}(x_m, x_n) = \lim_{n \to \infty} d_{pb}(x_n, u) = d_{pb}(u, u) = 0 \quad (4.22)$$

Akan ditunjukkan u titik tetap pada T. Ambil sebarang $n \in \mathbb{N}$ sehingga

$$\begin{aligned} d_{pb}(u, Tu) &\leq s\left[d_{pb}(u, x_{n+1}) + d_{pb}(x_{n+1}, Tu)\right] - d_{pb}(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq s d_{pb}(u, x_{n+1}) + s d_{pb}(x_{n+1}, Tu) \\ &= s d_{pb}(u, x_{n+1}) + s d_{pb}(Tx_n, Tu) \\ &\leq s d_{pb}(u, x_{n+1}) + s\lambda d_{pb}(x_n, u) \\ &\leq s \lim_{n \to \infty} d_{pb}(u, x_{n+1}) + s\lambda \lim_{n \to \infty} d_{pb}(x_n, u) \\ &= s d_{pb}(u, u) + s\lambda d_{pb}(u, u) \\ &= s.0 + s\lambda.0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi $d_{pb}(u, Tu) = 0$ yang berakibat $Tu = u$. Dengan demikian u adalah titik tetap T dan u merupakan titik tetap tunggal dari T.

□

Berikut dibawah ini akan diberikan beberapa contoh kasus yang menunjukkan masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraksi Banach di dalam ruang b-metrik parsial. Beberapa contoh yang diberikan berasal dari hasil modifikasi pada referensi Shukla [4]. Modifikasi disini dapat berupa mengubah ruang yang telah diberikan, mengubah fungsi b-metrik parsial yang telah ada, dan atau mengubah pemetaan yang diberikan pada referensi.

Selain itu juga, beberapa contoh lain yang diberikan merupakan hasil konstruksi penulis untuk menjawab rumusan masalah. Salah satu cara penulis untuk mengkonstruksi contoh adalah dengan menggunakan teorema-teorema yang sudah diberikan pada bahasan sebelumnya. Teorema yang digunakan seperti halnya teorema untuk mengkonstruksi fungsi metrik parsial dari fungsi b-metrik, atau teorema yang menunjukkan kaitan kelengkapan antara ruang b-metrik parsial dan ruang b-metrik.

Contoh 4.6. Diberikan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $d_{pb} : X \times X \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$d_{pb}(x, y) = \begin{cases} max(x, y) + (x - y)^2 & \text{, jika} \neq y \text{ ;} \\ x & \text{, jika } x = y \neq 1 \text{ ;} \\ 0 & \text{, jika} = y = 1 \text{ ;} \end{cases}$$

Didefinisikan $T : X \to X$ dengan

$$T1 = T2 = 1, T3 = T4 = 2,$$

maka T memiliki titik tetap dan bersifat tunggal.

Penjelasan dari Contoh 4.6 dapat diuraikan sebagai berikut. Berdasarkan Contoh 4.2 terbukti bahwa Contoh 4.6 adalah ruang b-metrik parsial dengan $s \geq 2$. Kemudian karena X adalah diskrit, artinya jika diberikan sembarang barisan Cauchy (X, d_{pb}) maka barisan tersebut konvergen di (X, d_{pb}), akibatnya (X, d_{pb}) lengkap. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa T

memenuhi prinsip pemetaan kontraksi Banach dengan kata lain akan ditunjukkan terdapat $\lambda \in [0,1)$ memenuhi

$$d_{pb}\ (Tx, Ty) \leq \lambda\ d_{pb}(x, y) \qquad (4.23)$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Kemudian untuk menunjukkan hal tersebut dibagi beberapa kasus seperti dibawah ini :

Kasus 1

Misalkan $x, y \in \{1, 2\}$, jelas bahwa untuk setiap $\lambda \in [0,1)$ memenuhi (4.23) sebab $d_{pb}\ (Tx, Ty) = 0$.

Kasus 2

Jika $x, y \in \{3, 4\}$

1. Untuk $x = y = 3$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (2,2) &= 2 \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (3, 3) \\ &\leq 3\lambda \end{aligned}$$

Didapat $\frac{2}{3} \leq \lambda$

2. Untuk $x = y = 4$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (2,2) &= 2 \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (4, 4) \\ &\leq 4\lambda \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1}{2} \leq \lambda$

3. Untuk $x = 3, y = 4$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (2,2) &= 2 \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (3, 4) \\ &\leq 5\lambda \end{aligned}$$

Didapat $\frac{2}{5} \leq \lambda$

Kasus 3

Misalkan $x \in \{1,2\}$ dan $y \in \{3,4\}$ maka $d_{pb}\ (T1,T3) = d_{pb}\ (T1,T4) = d_{pb}\ (T2,T3) = d_{pb}\ (T2,T4) = d_{pb}\ (1,2) = max(1,2) + (1-2)^2 = 2 + 1 = 3.$

1. Ambil $x = 1$ dan $y = 3$ didapat

   $d_{pb}\ (1,2) \leq \lambda\ d_{pb}(1,3)$

   $3 \leq \lambda\ [max(1,3) + (1-3)^2]$

   $= 7\lambda$

   sehingga $\frac{3}{7} \leq \lambda$.

2. Ambil $x = 1$ dan $y = 4$ didapat

   $d_{pb}\ (1,2) \leq \lambda\ d_{pb}(1,4)$

   $3 \leq \lambda\ [max(1,4) + (1-4)^2]$

   $= 13\lambda$

   sehingga $\frac{3}{13} \leq \lambda$.

3. Ambil $x = 2$ dan $y = 3$ didapat

   $d_{pb}\ (1,2) \leq \lambda\ d_{pb}(2,3)$

   $3 \leq \lambda\ [max(2,3) + (2-3)^2]$

   $= 4\lambda$

   sehingga $\frac{3}{4} \leq \lambda$.

4. Ambil $x = 2$ dan $y = 4$ didapat

   $d_{pb}\ (1,2) \leq \lambda\ d_{pb}(2,4)$

   $3 \leq \lambda\ [max(2,4) + (2-4)^2]$

   $= 8\lambda$

   sehingga $\frac{3}{8} \leq \lambda$.

Berdasarkan perhitungan diatas dapat dipilih $\lambda \in [\frac{3}{4}, 1)$ akibatnya (4.23) terpenuhi untuk setiap $x, y \in X$, sehingga dapat disimpulkan bahwa T memenuhi prinsip pemetaan kontraksi Banach. Dengan demikian berdasarkan Teorema 4.3.1 dapat disimpulkan T memiliki titik tetap yang bersifat tunggal, dapat dilihat dari definisi pemetaan titik tunggal yang dimaksud yaitu di $x = 1 \in X$.

Berikut ini dikonstruksi contoh lain ruang b-metrik parsial dan didefinisikan suatu pemetaan didalamnya yang memenuhi pemetaan kontraksi Banach dan memiliki titik tetap tunggal.

Contoh 4.6 Diberikan $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $a > 0$ adalah konstanta dan didefinisikan $d_{pb} : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$d_{pb}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{, jika } x = y = 0 \\ \frac{|x|+|y|+|x-y|}{2} + a & \text{,jika } x,y \text{ yang lain} \end{cases}$$

Maka (X, d_{pb}) adalah ruang b-metrik parsial. Kemudian didefinisikan pemetaan $T : X \to X$ dengan

$$T0 = T2 = \cdots = T10 = 0,$$

$$T1 = T3 = T5 = T7 = T9 = 1,$$

maka T memiliki titik tetap dan bersifat tunggal.

Penjelasan dari Contoh 4.6 dapat diuraikan sebagai berikut. Jika didefinisikan fungsi $d_{pb} : X \times X \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in X$, berdasar Contoh 2.1 diperoleh (X, d_b) merupakan ruang metrik sekaligus ruang b-metrik. Lalu berdasar Contoh 2.4 dan Teorema 4.1.1, $d_p(x, y) = \frac{|x|+|y|+|x-y|}{2}$ diperoleh (X, d_p) ruang metrik parsial sekaligus ruang b-metrik parsial. Berdasarkan Teorema 4.1.4 maka diperoleh (X, d_{pb}) merupakan ruang b-metrik parsial. Karena (X, d) lengkap berdasarkan Definisi 2.4.4 maka (X, d_b) ruang b-metrik lengkap. Karena (X, d_b) ruang b-metrik lengkap, berdasarkan Definisi 2.3.4 maka

(X, d_p) ruang metrik parsial lengkap. Karena (X, d_p) ruang metrik parsial lengkap berdasarkan Teorema 4.2.6 maka (X, d_{pb}) lengkap. Selanjutnya akan diselidiki apakah T memenuhi prinsip pemetaan kontraksi Banach di (X, d_{pb}), artinya akan ditunjukkan terdapat $\lambda \in [0, 1)$ yang memenuhi

$$d_{pb}\,(Tx, Ty) \leq \lambda\, d_{pb}(x, y) \qquad (4.24)$$

untuk setiap $x, y \in X$.

Kemudian untuk menunjukkan hal tersebut dibagi beberapa kasus seperti dibawah ini :

Kasus 1 : Jika $x, y \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, jelas bahwa untuk setiap $\lambda \in [0,1)$ memenuhi (4.24) sebab $d_{pb}\,(Tx, Ty) = 0$.

Kasus 2 : Jika $x, y \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

1. Untuk $x = y = 1$

$$\begin{aligned} d_{pb}\,(1,1) &= \frac{|1|+|1|+|1-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\,(1, 1) \\ &= \lambda\left(\frac{|1|+|1|+|1-1|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(1 + a) \end{aligned}$$

Didapat $1 \leq \lambda$

2. Untuk $x = y = 3$

$$\begin{aligned} d_{pb}\,(1,1) &= \frac{|1|+|1|+|1-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\,(3, 3) \\ &= \lambda\left(\frac{|3|+|3|+|3-3|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(3 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{3+a} \leq \lambda$

3. Untuk $x = y = 5$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (1,1) &= \frac{|1|+|1|+|1-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (5,5) \\ &= \lambda\left(\frac{|5|+|5|+|5-5|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(5 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{5+a} \leq \lambda$

4. Untuk $x = y = 7$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (1,1) &= \frac{|1|+|1|+|1-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (7,7) \\ &= \lambda\left(\frac{|7|+|7|+|7-7|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(7 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{7+a} \leq \lambda$

5. Untuk $x = y = 9$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (1,1) &= \frac{|1|+|1|+|1-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (9,9) \\ &= \lambda\left(\frac{|9|+|9|+|9-9|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(9 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{9+a} \leq \lambda$

Kasus 3 : $x = 0, y \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

1. Untuk $x = 0, y = 1$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (0,1) \end{aligned}$$

$$= \lambda\left(\frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(1 + a)$$

Didapat $1 \leq \lambda$

2. Untuk $x = 0, y = 3$

$$d_{pb}\ (0,1) = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$
$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (0,3)$$
$$= \lambda\left(\frac{|0|+|3|+|0-3|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(3 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{3+a} \leq \lambda$

3. Untuk $x = 0, y = 5$

$$d_{pb}\ (0,1) = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$
$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (0,5)$$
$$= \lambda\left(\frac{|0|+|5|+|0-5|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(5 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{5+a} \leq \lambda$

4. Untuk $x = 0, y = 7$

$$d_{pb}\ (0,1) = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$
$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (0,7)$$
$$= \lambda\left(\frac{|0|+|7|+|0-7|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(7 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{7+a} \leq \lambda$

5. Untuk $x = 0, y = 9$

$$
\begin{aligned}
d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\
&= 1 + a \\
&\leq \lambda d_{pb}\ (0,9) \\
&= \lambda\left(\frac{|0|+|9|+|0-9|}{2} + a\right) \\
&= \lambda(9 + a)
\end{aligned}
$$

Didapat $\frac{1+a}{9+a} \leq \lambda$

Kasus 4 : $x = 2, y \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

1. Untuk $x = 2, y = 1$

$$
\begin{aligned}
d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\
&= 1 + a \\
&\leq \lambda d_{pb}\ (2,1) \\
&= \lambda\left(\frac{|2|+|1|+|2-1|}{2} + a\right) \\
&= \lambda(2 + a)
\end{aligned}
$$

Didapat $\frac{1+a}{2+a} \leq \lambda$

2. Untuk $x = 2, y = 3$

$$
\begin{aligned}
d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\
&= 1 + a \\
&\leq \lambda d_{pb}\ (2,3) \\
&= \lambda\left(\frac{|2|+|3|+|2-3|}{2} + a\right) \\
&= \lambda(3 + a)
\end{aligned}
$$

Didapat $\frac{1+a}{3+a} \leq \lambda$

3. Untuk $x = 2, y = 5$

$$
\begin{aligned}
d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\
&= 1 + a \\
&\leq \lambda d_{pb}\ (2,5) \\
&= \lambda\left(\frac{|2|+|5|+|2-5|}{2} + a\right) \\
&= \lambda(5 + a)
\end{aligned}
$$

Didapat $\frac{1+a}{5+a} \leq \lambda$

4. Untuk $x = 2, y = 7$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (2,7) \\ &= \lambda\left(\frac{|2|+|7|+|2-7|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(7 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{7+a} \leq \lambda$

5. Untuk $x = 2, y = 9$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (0,10) \\ &= \lambda\left(\frac{|2|+|9|+|2-9|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(9 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{9+a} \leq \lambda$

Kasus 5 : $x = 4, y \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

1. Untuk $x = 4, y = 1$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (4,1) \\ &= \lambda\left(\frac{|4|+|1|+|4-1|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(4 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{4+a} \leq \lambda$

2. Untuk $x = 4, y = 3$

$$d_{pb}\ (0,1) = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$

$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (0, 10)$$
$$= \lambda\left(\frac{|4|+|3|+|4-3|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(4 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{4+a} \leq \lambda$

3. Untuk $x = 4, y = 5$

$$d_{pb}\ (0,1) \quad = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$
$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (0, 10)$$
$$= \lambda\left(\frac{|4|+|5|+|4-5|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(5 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{5+a} \leq \lambda$

4. Untuk $x = 4, y = 7$

$$d_{pb}\ (0,1) \quad = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$
$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (0, 10)$$
$$= \lambda\left(\frac{|4|+|7|+|4-7|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(7 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{7+a} \leq \lambda$

5. Untuk $x = 4, y = 9$

$$d_{pb}\ (0,1) \quad = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$
$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (0, 10)$$
$$= \lambda\left(\frac{|4|+|9|+|4-9|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(9 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{9+a} \leq \lambda$

Kasus 6 : $x = 6, y \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

1. Untuk $x = 6, y = 1$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (0, 10) \\ &= \lambda\left(\frac{|6|+|1|+|6-1|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(6 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{6+a} \leq \lambda$

2. Untuk $x = 6, y = 3$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (6, 3) \\ &= \lambda\left(\frac{|6|+|3|+|6-3|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(6 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{6+a} \leq \lambda$

3. Untuk $x = 6, y = 5$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (6, 5) \\ &= \lambda\left(\frac{|6|+|5|+|6-5|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(6 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{6+a} \leq \lambda$

4. Untuk $x = 6, y = 7$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (6,7\ ) \end{aligned}$$

$$= \lambda\left(\frac{|6|+|7|+|6-7|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(7 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{7+a} \leq \lambda$

5. Untuk $x = 6, y = 9$

$$d_{pb}\ (0,1) = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$
$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (6, 9)$$
$$= \lambda\left(\frac{|6|+|9|+|6-9|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(9 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{9+a} \leq \lambda$

Kasus 7 : $x = 8, y \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

1. Untuk $x = 8, y = 1$

$$d_{pb}\ (0,1) = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$
$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (8, 1)$$
$$= \lambda\left(\frac{|8|+|1|+|8-1|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(8 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{8+a} \leq \lambda$

2. Untuk $x = 8, y = 3$

$$d_{pb}\ (0,1) = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$
$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (8, 3)$$
$$= \lambda\left(\frac{|8|+|3|+|8-3|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(8 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{8+a} \leq \lambda$

3. Untuk $x = 8, y = 5$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (8,5) \\ &= \lambda\left(\frac{|8|+|5|+|8-5|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(8 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{8+a} \leq \lambda$

4. Untuk $x = 8, y = 7$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (8,7) \\ &= \lambda\left(\frac{|8|+|7|+|8-7|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(8 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{8+a} \leq \lambda$

5. Untuk $x = 8, y = 9$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (8,9) \\ &= \lambda\left(\frac{|8|+|9|+|8-9|}{2} + a\right) \\ &= \lambda(9 + a) \end{aligned}$$

Didapat $\frac{1+a}{9+a} \leq \lambda$

Kasus 8 : $x = 10, y \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

1. Untuk $x = 10, y = 1$

$$\begin{aligned} d_{pb}\ (0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\ &= 1 + a \\ &\leq \lambda d_{pb}\ (10,1) \end{aligned}$$

$$= \lambda\left(\frac{|10|+|1|+|1-10|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(10 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{10+a} \leq \lambda$

2. Untuk $x = 10, y = 3$

$$d_{pb}\ (0,1) = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$
$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (10, 3)$$
$$= \lambda\left(\frac{|10|+|3|+|10-3|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(10 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{10+a} \leq \lambda$

3. Untuk $x = 10, y = 5$

$$d_{pb}\ (0,1) = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$
$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (10, 5)$$
$$= \lambda\left(\frac{|10|+|5|+|10-5|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(10 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{10+a} \leq \lambda$

4. Untuk $x = 10, y = 7$

$$d_{pb}\ (0,1) = \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a$$
$$= 1 + a$$
$$\leq \lambda d_{pb}\ (0, 10)$$
$$= \lambda\left(\frac{|10|+|7|+|10-7|}{2} + a\right)$$
$$= \lambda(10 + a)$$

Didapat $\frac{1+a}{10+a} \leq \lambda$

5. Untuk $x = 10, y = 9$

$$
\begin{aligned}
d_{pb}\,(0,1) &= \frac{|0|+|1|+|0-1|}{2} + a \\
&= 1 + a \\
&\leq \lambda d_{pb}\,(0,10) \\
&= \lambda\left(\frac{|10|+|9|+|10-9|}{2} + a\right) \\
&= \lambda(10 + a)
\end{aligned}
$$

Didapat $\frac{1+a}{10+a} \leq \lambda$

Berdasarkan perhitungan diatas dapat dipilih $\lambda = 1$ akibatnya (4.24) terpenuhi untuk setiap $x, y \in X$, sehingga dapat disimpulkan bahwa T memenuhi prinsip pemetaan kontraksi Banach. Dengan demikian berdasarkan Teorema 4.3.1 dapat disimpulkan T memiliki titik tetap yang bersifat tunggal, dapat dilihat dari definisi pemetaan titik tunggal yang dimaksud yaitu di $x = 0 \in X$.

Contoh 4.7. Diberikan himpunan $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Fungsi $d_{pb} : X \times X \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $d_{pb}(x, y) = max(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$. Jika didefinisikan pemetaan $T : X \to X$ dengan

$$Tx = ax, 0 < a < 1$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka T memeliki titik tetap dan titik tetap tersebut bersifat tunggal. Fungsi d_{pb} merupakan fungsi b-metrik parsial pada X.

Penjelasan dari Contoh 4.7 dapat diuraikan sebagai berikut. Pasangan terurut (X, d_{pb}) merupakan ruang b-metrik parsial dijamin oleh Proposisi 4.1.2. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa T memenuhi prinsip pemetaan kontraksi Banach. Ambil sebarang $x, y \in X$, misalkan $x = y = 0$ jelas bahwa prinsip pemetaan kontraksi Banach terpenuhi. Selanjutnya misalkan $x = y \neq 0$ perhatikan bahwa $d_{pb}(Tx, Ty) = d_{pb}(ax, ay) = ax$, sehingga

$d_{pb}(Tx, Ty) \leq \lambda d_{pb}(x, y)$

$$ax \leq \lambda x$$
$$a \leq \lambda$$

Kemudian untuk $x \neq y$ tanpa mengurangi perumunan, misalkan $x > y$, karena $x > y$ diperoleh $ax > ay$ sehingga didapat $d_{pb}(Tx, Ty) = d_{pb}(ax, ay) = \max(ax, ay) = ax$. Dengan (4.24) didapat

$$d_{pb}(Tx, Ty) \leq \lambda d_{pb}(x, y)$$
$$ax \leq \lambda x$$
$$a \leq \lambda$$

Kemudian untuk $x \neq y$ tanpa mengurangi perumunan, misalkan $x < y$, karena $x < y$ diperoleh $ax < ay$ sehingga didapat $d_{pb}(Tx, Ty) = d_{pb}(ax, ay) = \max(ax, ay) = ay$. Dengan (4.24) didapat

$$d_{pb}(Tx, Ty) \leq \lambda d_{pb}(x, y)$$
$$ay \leq \lambda y$$
$$a \leq \lambda \tag{4.25}$$

Berdasarkan (4.25) dapat dipastikan terdapat λ yang dipilih dari $\lambda \in [a, 1)$ dengan $0 < a < 1$, sehingga dapat disimpulkan T memenuhi prinsip pemetaan kontraksi Banach. Sehingga berdasarkan Teorema 4.3.1 dapat disimpulkan T memiliki titik tetap yang bersifat tunggal. Sehingga akan dicari $x^* \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ yang merupakan titik tetap oleh T atau $Tx^* = x^*$. Sebelum itu dikonstruksi baisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = T^n x_0$ untuk suatu $x_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Berdasarkan pada pembuktian Teorema 4.3.1 titik tetap T adalah limit konvergensi dari barisan Cauchy $\{x_n\}$. Sehingga akan diselidiki terlebih dahulu bahwa barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Ambil sebarang $x_0 \in X$ perhatikan bahwa

$$Tx_0 = ax_0$$
$$T^2 x_0 = T(Tx_0) = Tax_0 = a^2 x_0$$

$\vdots$

$T^n x_0 = a^n x_0$

Sehingga didapat $x_n = a^n x_0$ untuk sebarang $x_0 \in X$ dan $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} lim_{m,n\to\infty}\, d_{pb}(x_m,\, x_n) &= lim_{m,n\to\infty}\, d_{pb}(T^m x_0,\, T^n x_0) \\ &= lim_{m,n\to\infty}\, d_{pb}(a^m x_0,\, a^n x_0) \\ &= lim_{m,n\to\infty}\, max(a^m x_0,\, a^n x_0) \qquad (4.26) \\ &= \max(0, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan (4.26) didapat bahwa $\{x_n\}$ barisan Cauchy. Karena ruang (X, d_{pb}) lengkap, akibatnya dapat dipastikan barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = Tx_{n-1}$ konvergen di X. Sehingga dapat dituliskan terdapat $x^* \in X$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} lim_{m,n\to\infty}\, d_{pb}(x_m,\, x_n) &= lim_{n\to\infty}\, d_{pb}(x^*,\, x_n) = d_{pb}(x^*, x^*) \\ &= lim_{n\to\infty}\, d_{pb}(x^*,\, a^n x_0) \\ &= d_{pb}(x^*,\, 0) \\ &= \max(x^*, 0) \\ &= 0 \\ &= \max(0, 0) \\ &= \max(x^*, x^*) \qquad (4.27) \end{aligned}$$

Berdasarkan (4.27) diperoleh $x^* = 0$ sehingga titik tetap oleh T yang bersifat tunggal adalah $x^* = 0 \in X$.

BAB V
PENUTUP

Berdasarkan uraian dari bab-bab sebelumnya, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari tugas akhir ini serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, kesimpulan dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Syarat cukup dari ketunggalan titik tetep pemetaan kontraksi Banach di dalam ruang b-metrik parsial adalah ruang tersebut harus lengkap dan pemetaan yang diberikan memenuhi prinsip pemetaan kontraksi Banach.
2. Dalam tugas akhir ini telah dikonstruksi contoh ruang b-metrik parsial dan pemetaan didalamnya yang menunjukkan masalah eksistensi dan ketunggalan titik tetap pemetaan kontraksi Banach pada ruang tersebut.
3. Terdapat hubungan antara ruang b-metrik parsial dan ruang b-metrik. Hubungan disini artinya dapat dikonstruksi suatu fungsi b-metrik parsial dari sembarang fungsi b-metrik , begitu juga sebaliknya. Serta terdapat hubungan antara ruang b-metrik parsial dan ruang metrik parsial. Hubungan disini artinya dapat dikonstruksi suatu fungsi b-metrik parsial dari sembarang fungsi metrik parsial, namun tidak dengan sebaliknya.

5.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah mengkaji penerapan prinsip teorema titik tetap Banach pada perluasan ruang metrik yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kreyzig, E., (1978). “Introductory Functional Analysis with Applications”. New York: John Wiley.

[2] S.Crewzick. (1993). “Contraction Mappings in b-Metric Spaces”. **Acta Math. Inform.Univ. Ostraviensis**, 1:5–11.

[3] Matthews, SG (1994). “Partial Metric Topology”. **Annals of the New York Academy of Sciences**, 183-197.

[4] S. Shukla. (2014). “Partial b-Metric Spaces and Fixed Point Theorems”. **Mediterranian Journal of Mathematics**, 703-711.

[5] Alghamdi, M. A., Shahzad, N., & Valero, O. (2012). “On Fixed point theory in partial metric spaces”. **Fixed Point Theory and Applications**, 2012 (1), 175.

[6] Sihombing, K. (2018). “Ruang Metrik dan Ruang Metrik Parsial”. Yogyakarta : Budi Utama.

[7] Kadelburg, Z. and S. Radenovic. (2015). “Pata-type Common Fixed Point Results in b-metric and b-rectangular Metric Spaces”. **J. Nonlinear Sci. Appl. Vol 8.** Hal 944 – 954.

[8] Sintunavarat, W. (2016). “Fixed Point Result in b-Metric Spaces Approach to the Existance of Solution for Nonlinier Integral Equations”. **Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Serie a Matemathics**, 585-600.

[9] Kamran,T., Samreen, A., Ain, Q. (2017). “A Generalization of b-Metric Space and Some Fixed Point Theorems”. MDPI. Mathematics 2017, 5, 19.

BIODATA PENULIS

Penulis bernama lengkap Muhammad Abdul Aziz, lahir di Nganjuk, 23 Mei 1996. Terlahir sebagai anak pertama. Penulis telah menempuh pendidikan formal dari TK Baitul Halim, SDN Banaran I, SMPN 1 Kertosono, SMA Kertosono, dan mengambil S1 Matematika di Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Selama sekolah dan kuliah, penulis aktif dan sempat mendapat amanah dalam beberapa organisasi, diantaranya, Wakil Ketua SKI SMAKER (Sie Kerohanian Islam SMA Kertosono) 2013 – 2014, Wakil Ketua UKM Catur ITS 2017, dan Sie Syiar Dakwah LDJ Ibnu Muqlah 2017 – 2018. Penulis juga sempat aktif dalam olimpiade matematika selama menjalani pendidikan di SD, SMP, dan SMA. Penulis mengambil bidang minat Analisis dan Aljabar selama menempuh pendidikan S1 di Matematika ITS. Jika membutuhkan informasi berkaitan dengan Tugas Akhir ini, maka dapat menghubungi penulis melalui email di muhammadabdulaziz.oke@gmail.com