

# Penerapan Metode *Extended Kalman Filter* untuk Estimasi Transmisi *Filariasis*

Mochamad Isman Safii, dan Erna Apriliani

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia

email : april@matematika.its.ac.id

**Abstrak**— *Filariasis* merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh cacing filaria yang ditularkan melalui berbagai jenis nyamuk. Penularan *Filariasis* melibatkan manusia dan nyamuk. Dalam permasalahan tersebut dilakukan analisis model transmisi penyakit *Filariasis* dengan proses pengobatan. Pada model ini didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan pada setiap titik kesetimbangan tersebut yang digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Selain itu dilakukan simulasi kestabilan lokal, hasil dari simulasi pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik menunjukkan stabil asimtotik. Pada model ini juga akan diestimasi penyebarannya dengan menggunakan *Extended Kalman Filter*. *Extended Kalman Filter* adalah perluasan dari metode *Kalman Filter* yang dapat digunakan untuk mengestimasi model sistem nonlinear dan kontinu. Awalnya dilakukan pendiskritan model terhadap waktu. Hasil akhir dari estimasi tersebut berupa grafik dan nilai error ( $ne$ ) pada setiap populasinya. Pada populasi  $S_h$  diinterval  $0.27 < ne < 0.74$ , pada populasi  $A$  diinterval  $0.04 < ne < 0.12$ , pada populasi  $K$  diinterval  $0.48 < ne < 1.16$ , pada populasi  $S_v$  diinterval  $0.14 < ne < 0.32$ , dan pada populasi  $I_v$  diinterval  $0.21 < ne < 0.94$ .

**Kata kunci** — Model Transmisi Penyakit *Filariasis* dengan Pengobatan, *Extended Kalman Filter*

## I. PENDAHULUAN

Diperkirakan sekitar 20% penduduk dunia atau 1,1 milyar penduduk di 83 negara beresiko terinfeksi *Filariasis*, terutama di daerah tropis dan beberapa daerah subtropis. Penyakit ini dapat menyebabkan kecacatan, stigma sosial, hambatan psikososial, dan penurunan produktifitas kerja penderita, keluarga dan masyarakat sehingga menimbulkan kerugian ekonomi yang besar [1].

Berdasarkan hasil survei cepat *Filariasis* di Indonesia 42% dari 7.000 kuesioner pada tahun 2.000, jumlah penderita kronis yang dilaporkan sebanyak 6.233 orang yang tersebar di 674 puskesmas, 1.553 desa di 231 Kabupaten, 26 propinsi. Data ini belum menggambarkan keadaan yang sebenarnya karena hanya dilaporkan oleh 42% puskesmas dari 7.221 Puskesmas. Tingkat endemisitas *Filariasis* di Indonesia berdasarkan hasil survei darah jari tahun 1999 masih tinggi dengan prevalensi mikrofilaremia 3,1% [1].

Dari data dinas kesehatan provinsi Jawa Timur di ketahui bahwa pada tahun 2012 dengan jumlah penduduk

sekitar 38.052.950 jiwa terdapat 341 penderita *Filariasis* dirawat di puskesmas yang tersebar di kota/kabupaten di Jawa Timur. Pada tahun 2013 jumlah penduduk Jawa Timur sekitar 38.318.719 jiwa dan orang yang terkena *Filariasis* sekitar 359 orang.

Sampai pada tahun 2013 di Jawa Timur jumlah penderitanya paling banyak adalah kabupaten Lamongan. Penderitanya sebanyak 56 orang dari jumlah penduduknya sebanyak 1.200.558 jiwa.

Transmisi *Filariasis* di suatu daerah dapat diformulasikan dalam bentuk model matematika. Pemodelan matematika yang diperoleh tersebut kemudian digunakan untuk mengestimasi penyebaran *Filariasis* pada suatu daerah menggunakan *Extended Kalman Filter*. Diharapkan hasil dari estimasi tersebut digunakan untuk mempercepat penanggulangan dan pencegahan proses transmisi *Filariasis* di suatu daerah. Dan dilakukan analisa kestabilan model transmisi penyakit *Filariasis*

## II. METODOLOGI PENELITIAN

### A. Studi Literatur

Sebelum melakukan pemodelan matematika dari transmisi *Filariasis*, dilakukan pengkajian literatur yang sesuai untuk menunjang pemodelan tersebut, mempelajari *Extended Kalman Filter*, dan metode Beda Hingga serta mencari parameter – parameter yang terkait.

### B. Pemodelan Persamaan Transmisi *Filariasis*

Pada tahap ini akan dikaji tentang model dari transmisi *Filariasis* dengan pengobatan sehingga dapat dibuat model kompartemen proses pengobatan dari penyakit *Filariasis* dan akan diestimasi penyebarannya menggunakan metode *Extended Kalman Filter*

### C. Tahap Mencari Titik Kesetimbangan

Pada tahap ini akan dilakukan analisis model transmisi *Filariasis* dengan pengobatan sehingga didapat titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

### D. Tahap Menganalisis Kestabilan Lokal

Tahap ini akan dicari kestabilan lokal dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik dengan memasukkan nilai kesetimbangan kedalam matriks Jacobian, sehingga didapat nilai akar – akar karakteristik dari matriks Jacobian untuk mengetahui kestabilan asimtotik lokal pada titik – titik tersebut.

### E. Estimasi Transmisi *Filariasis* dengan Metode *Extended Kalman Filter*

Model persamaan matematika dari transmisi *Filariasis* yang telah diperoleh kemudian dilakukan estimasi terhadap populasi manusia sehat yang rentan terhadap filaria, populasi manusia pembawa penyakit, populasi manusia cacat kronis, populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filaria dan populasi nyamuk terinfeksi. Kelima estimasi tersebut merepresentasikan transmisi penyakit *Filariasis*.

#### F. Tahap Simulasi Model

Pada tahap ini pemodelan estimasi transmisi *Filariasis* tersebut disimulasikan dengan bantuan program MATLAB. Dalam kegiatan ini penulis akan mencoba untuk membuat simulasi dari model yang didapat untuk mengetahui grafik kestabilan dan grafik *Extended Kalman Filter* dari transmisi *Filariasis*.

#### G. Tahap Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini, dilakukan penarikan kesimpulan mengenai penerapan metode *Extended Kalman Filter* dalam estimasi transmisi *Filariasis* dan saran yang diperlukan untuk penelitian lebih lanjut.

### III. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

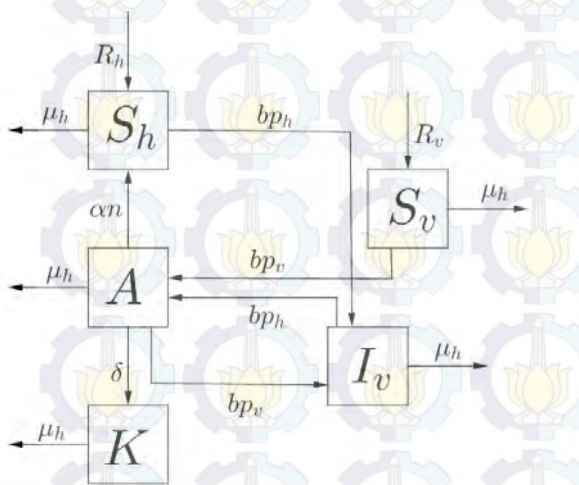
#### A. Model Transmisi Penyakit *Filariasis* dengan Pengobatan

Pada model transmisi penyakit *Filariasis* mempunyai definisi – definisi sebagai berikut :

a. Populasi dibagi menjadi 5 kelompok individu yaitu :

- $S_h$  adalah populasi manusia sehat yang rentan terhadap *Filariasis*.
- $A$  adalah populasi manusia terinfeksi filaria tanpa gejala klinis dan dapat menularkan penyakit.
- $K$  adalah populasi manusia cacat kronis
- $S_v$  adalah populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi filarial.
- $I_v$  adalah populasi nyamuk terinfeksi.

Dari definisi – definisi tersebut maka didapatkan diagram kompartemen sebagai berikut :



Gambar 1. Diagram Kompartemen Model Transmisi *Filariasis* dengan Pengobatan

Model dapat dituliskan sebagai berikut [3]:

$$\frac{dS_h}{dt} = R_h + \alpha \frac{A}{N_h} nK - bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \mu_h S_h \quad (1)$$

$$\frac{dA}{dt} = bI_v \frac{S_h}{N_h} p_h - \delta A - \alpha \frac{A}{N_h} nK - \mu_h A \quad (2)$$

$$\frac{dK}{dt} = \delta A - \mu_h K \quad (3)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = R_v - bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v S_v \quad (4)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = bS_v \frac{A}{N_h} p_v - \mu_v I_v \quad (5)$$

$$S_h(0) > 0, \quad A(0) \geq 0, \quad K(0) \geq 0, \\ S_v(0) > 0, \quad I_v(0) \geq 0$$

Pada populasi total manusia jumlahnya tetap maka dapat dinyatakan  $\frac{dN_h}{dt} = 0$  dengan

$$N_h = S_h + A + K \\ \frac{dN_h}{dt} = \frac{dS_h}{dt} + \frac{dA}{dt} + \frac{dK}{dt} \\ = R_h - (\mu_h S_h + \mu_h A + \mu_h K) \\ = R_h - \mu_h N_h$$

$$\text{sehingga didapat } N_h = \frac{R_h}{\mu_h}$$

Sedangkan populasi total nyamuk jumlahnya juga tetap maka dapat dinyatakan  $\frac{dN_v}{dt} = 0$  dengan

$$N_v = S_v + I_v \\ \frac{dN_v}{dt} = \frac{dS_v}{dt} + \frac{dI_v}{dt} \\ = R_v - (\mu_v S_v + \mu_v I_v) \\ = R_v - \mu_v N_v$$

$$\text{sehingga didapat } N_v = \frac{R_v}{\mu_v}$$

Keadaan bebas penyakit terjadi saat populasi  $A = 0, K = 0, I_v = 0$  dengan menghitung  $\frac{dS_h}{dt} = 0, \frac{dA}{dt} = 0, \frac{dK}{dt} = 0, \frac{dS_v}{dt} = 0, \frac{dI_v}{dt} = 0$  maka akan diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_0 = \left( \frac{R_h}{\mu_h}, 0, 0, \frac{R_v}{\mu_v}, 0 \right)$$

Karena  $S_h = N_h$  dan  $S_v = N_v$ , sehingga akan direduksi persamaan laju populasi  $S_h$  dan persamaan laju populasi  $S_v$  dengan mensubstitusi  $S_h = N_h = \frac{R_h}{\mu_h}$  kedalam persamaan (2) dan persamaan (1) dieliminasi dan mensubstitusi  $S_v = N_v = \frac{R_v}{\mu_v}$  kedalam persamaan (5) dan persamaan (4) dieliminasi, sehingga didapat persamaan baru dari model hasil reduksi sebagai berikut :

$$\frac{dA}{dt} = bI_v p_h \left( \frac{R_h - A\mu_h - K\mu_h}{R_h} \right) - \delta A - \alpha \frac{A\mu_h}{R_h} nK - \mu_h A \quad (6)$$

$$\frac{dK}{dt} = \delta A - \mu_h K \quad (7)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = b \left( \frac{R_v - I_v\mu_v}{\mu_v} \right) \frac{A\mu_h}{R_h} p_v - \mu_v I_v \quad (8)$$

#### B. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan endemik adalah suatu keadaan dimana terjadi infeksi penyakit di dalam populasi. Titik Kesetimbangan Endemik didapatkan dengan

$$\frac{dA}{dt} = 0, \quad \frac{dK}{dt} = 0, \quad \frac{dI_v}{dt} = 0$$

dari persamaan (6) – (8) sehingga didapatkan titik kesetimbangan endemik  $E_2 = (A^*, K^*, I_v^*)$  dengan

$$K^* = \frac{\delta A^*}{\mu_h} \quad (9)$$

$$I_v^* = \frac{bR_v A^* \mu_h p_v}{bA^* \mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h} \quad (10)$$

Sedangkan untuk  $A^*$  ada tiga kondisi yaitu :

$$A_1^* = 0$$

$$A_2^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$A_3^* = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dengan

$$a = -b\mu_v \mu_h p_v \alpha n \delta$$

$$b = -b^2 R_v \mu_h^2 p_v p_h - b^2 R_v \mu_h p_v p_h \delta - b\mu_v \mu_h p_v \delta R_h - b\mu_v \mu_h^2 p_v R_h - \mu_v^2 R_h \alpha n \delta$$

$$c = b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h - \mu_v^2 R_h^2 \delta - \mu_v^2 R_h^2 \mu_h$$

Terlihat bahwa nilai  $a < 0$  dan  $b < 0$

untuk  $c < 0$  jika  $b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h < \mu_v^2 R_h^2 \delta + \mu_v^2 R_h^2 \mu_h$

untuk  $c > 0$  jika  $b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h > \mu_v^2 R_h^2 \delta + \mu_v^2 R_h^2 \mu_h$

Akan diselidiki pada persamaan  $A_2^*$  dan  $A_3^*$  sehingga diperoleh :

- Untuk  $a < 0, b < 0, c < 0$  maka didapat Nilai  $A_2^* < 0$  dengan syarat  $b^2 > 4ac$  Nilai  $A_3^* > 0$  dengan syarat  $b^2 > 4ac$  dan  $\sqrt{b^2 - 4ac} > b$
- Untuk  $a < 0, b < 0, c > 0$  maka didapat Nilai  $A_2^* < 0$  Nilai  $A_3^* > 0$  dengan syarat  $\sqrt{b^2 - 4ac} > b$

Setelah diselidiki, maka  $A_2^*$  bukan titik kesetimbangan karena bernilai negatif atau  $A_2^* < 0$  maka  $A_1^*$  dan  $A_3^*$  disubstitusikan ke persamaan (9) dan (10) sehingga diperoleh :

- Saat  $A_1^* = 0$  maka didapat  $K_1^* = 0$  dan  $I_{v(1)}^* = 0$
- Saat  $A_3^* = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  maka didapat  $K_3^* = \frac{\delta A_3^*}{\mu_h}$  dan  $I_{v(3)}^* = \frac{bR_v A_3^* \mu_h p_v}{bA_3^* \mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h}$

Karena pada kondisi pertama didapat  $A_1^*, K_1^*$ , dan  $I_{v(1)}^*$  bernilai nol. ini menunjukkan bahwa pada kondisi pertama dalam keadaan bebas penyakit sehingga didapatkan titik kesetimbangannya adalah

$$E_1 = (A_1^*, K_1^*, I_{v(1)}^*) = (0, 0, 0)$$

Sedangkan pada kondisi kedua menunjukkan bahwa pada kondisi tersebut adalah titik kesetimbangan endemik untuk model transmisi penyakit *Filariasis* dapat ditulis sebagai berikut:

$$E_2 = (A_3^*, K_3^*, I_{v(3)}^*)$$

### C. Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Model transmisi penyakit *Filariasis* merupakan model persamaan yang tak

linier, sehingga perlu dilakukan pelinieran terlebih dahulu sebelum melakukan analisis kestabilan.

Matriks Jacobian persamaan (6) sampai (8) di titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1 = (0, 0, 0)$  menjadi

$$\begin{bmatrix} -(\delta + \mu_h) & 0 & bp_h \\ \delta & -\mu_h & 0 \\ \frac{b\mu_h p_v R_v}{R_h \mu_v} & 0 & -\mu_v \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J| = 0$$

Sehingga didapat akar – akar karakteristik sebagai berikut :

$$(\lambda + \delta + \mu_h)(\lambda + \mu_h)(\lambda + \mu_v) - \frac{b\mu_h p_v R_v}{R_h \mu_v} (\lambda + \mu_h) bp_h = 0 \quad (11)$$

Persamaan (11) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

dengan

$$a_1 = \mu_v + 2\mu_h + \delta$$

$$a_2 = 2\mu_h \mu_v + \mu_v \delta + \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v}$$

$$a_3 = \delta \mu_h \mu_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v}$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit dikatakan stabil jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, b_1 > 0$ . Dengan rumus Routh Hurwitz dapat dituliskan dalam tabel berikut ini :

Tabel 1. Routh – Hurwitz

$a_0 = 1$	$a_2$	$a_4 = 0$
$a_1$	$a_3$	$a_5 = 0$
$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	0
$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	0

- Terlihat bahwa nilai  $a_1$  bernilai positif ( $a_1 > 0$ )
- Nilai  $b_1$  akan bernilai positif ( $a_1 a_2 - a_3 > 0$ ) jika  $a_2$  bernilai positif ( $a_2 > 0$ ) dan  $a_1 a_2 > a_3$
- Akibatnya nilai  $a_2$  harus bernilai positif maka  $(2\mu_h \mu_v + \mu_v \delta + \delta \mu_h + \mu_h^2) > \left(\frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v}\right)$
- Untuk nilai  $a_1 a_2 > a_3$
- Nilai  $c_1$  akan bernilai positif jika ( $a_3 > 0$ )
- Akibatnya nilai  $a_3$  harus bernilai positif maka  $(\delta \mu_h \mu_v + \mu_h^2 \mu_v) > \left(\frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v}\right)$

Dari tabel Routh-Hurwitz dapat dilihat bahwa variabel- variabel pada kolom pertama memiliki nilai yang sama yaitu bertanda positif. Titik kesetimbangan bebas penyakit untuk model transmisi penyakit *Filariasis* terbukti stabil asimtotik lokal jika memenuhi  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ , dan  $a_1 a_2 > a_3$

Titik kesetimbangan endemik

Saat  $A_3^* = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$  maka didapat  $K_3^* = \frac{\delta A_3^*}{\mu_h}$  dan

$$I_{v(3)}^* = \frac{bR_v A_3^* \mu_h p_v}{bA_3^* \mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J| = 0$$

Sehingga didapat akar – akar karakteristik sebagai berikut :

$$\left( \lambda + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \delta + \mu_h \right) (\lambda + \mu_h) \left( \lambda + bA_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v \right) - \left( \frac{b\mu_h p_v}{R_h} \left( \frac{R_v - I_{v(3)}^* \mu_v}{\mu_v} \right) \right) (\lambda + \mu_h) b p_h \left( \frac{R_h - A_3^* \mu_h - K_3^* \mu_h}{R_h} \right) - \left( \lambda + bA_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v \right) \delta \left( - \left( \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h + \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) \right) = 0 \quad (12)$$

Persamaan (12) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

dengan

$$a_1 = bA_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \mu_v + 2\mu_h + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^*}{R_h} + \delta$$

$$a_2 = 2bA_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + 2\mu_h \mu_v + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \mu_v + \delta \mu_h + \mu_h^2 - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{\delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h}$$

$$a_3 = \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \delta \mu_h \mu_v + b A_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v + \mu_h^2 \mu_v - \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} - \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} + \frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h}$$

Titik kesetimbangan endemik dari model dikatakan stabil jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya  $a_1 > 0$ ,  $b_1 > 0$ ,  $c_1 > 0$ . Dengan rumus Routh Hurwitz pada Tabel 1. dengan analisa sebagai berikut :

- Terlihat bahwa nilai  $a_1$  bernilai positif ( $a_1 > 0$ )
- Nilai  $b_1$  akan bernilai positif ( $a_1 a_2 - a_3 > 0$ ) jika  $a_2$  bernilai positif ( $a_2 > 0$ ) dan  $a_1 a_2 > a_3$
- Akibatnya nilai  $a_2$  harus bernilai positif maka

$$\left( 2bA_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + 2\mu_h \mu_v + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h n K_3^* \mu_v}{R_h} + \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^*}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h}{R_h} p_v + \delta \mu_v + \delta \mu_h + \mu_h^2 + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \right)$$

$$\left( \frac{\delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{\delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) > \left( \frac{b^2 \mu_h p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} \right)$$

- Untuk nilai  $a_1 a_2 > a_3$
  - Nilai  $c_1$  akan bernilai positif jika ( $a_3 > 0$ )
  - Akibatnya nilai  $a_3$  harus bernilai positif maka
- $$\left( \frac{bI_{v(3)}^* p_h \mu_h^2 \mu_v}{R_h} + \frac{\alpha \mu_h^3 n K_3^* b A_3^* p_v}{R_h^2} + \frac{\alpha \mu_h^2 n K_3^* \mu_v}{R_h} + \delta b A_3^* \frac{\mu_h^2}{R_h} p_v + \delta \mu_h \mu_v + b A_3^* \frac{\mu_h^3}{R_h} p_v + \mu_h^2 \mu_v + \frac{b^2 \mu_h^2 p_v I_{v(3)}^* p_h}{R_h} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h A_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v R_v p_h K_3^*}{R_h^2 \mu_v} + \frac{A_3^* p_v \delta b^2 I_{v(3)}^* p_h \mu_h^2}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta b I_{v(3)}^* p_h \mu_h}{R_h} + \frac{b p_v \delta \alpha (A_3^*)^2 \mu_h^2 n}{R_h^2} + \frac{\mu_v \delta \alpha A_3^* \mu_h n}{R_h} \right) > \left( \frac{b^2 \mu_h^2 p_v R_v p_h}{R_h \mu_v} + \frac{b^2 \mu_h^3 p_v I_{v(3)}^* p_h K_3^*}{R_h^2} \right)$$

Dari tabel Routh-Hurwitz dapat dilihat bahwa variabel – variabel pada kolom pertama memiliki nilai yang sama yaitu bertanda positif. Titik kesetimbangan endemik untuk model transmisi penyakit *Filariasis* terbukti stabil asimtotik lokal jika memenuhi  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ , dan  $a_1 a_2 > a_3$

#### D. Hasil Simulasi Kestabilan Lokal

parameter dan nilai awal yang digunakan sebagai berikut [3] :

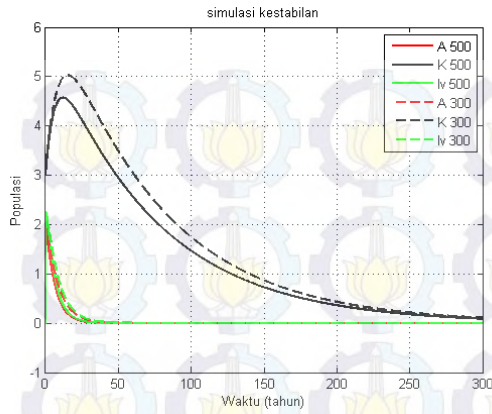
Tabel 2. Nilai Parameter

NO	Parameter	Nilai Parameter
1	$R_h$	235
2	$\mu_h$	0.014
3	$p_h$	0.001
4	$\delta$	0.2
5	$R_v$	45000
6	$\mu_v$	12.67
7	$p_v$	0.5
8	$n_1$	300
9	$n_2$	500
10	$\alpha$	0.9

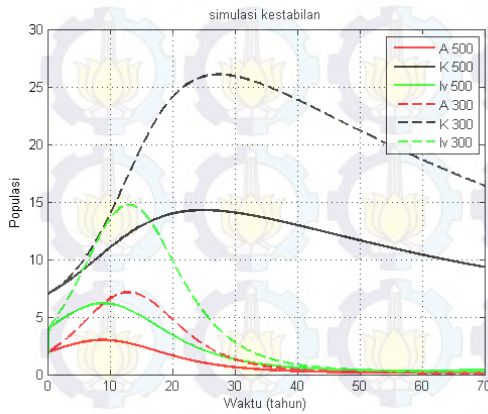
Tabel 3. Nilai awal

No	Populasi ketika $t = 0$	Nilai awal
1	$A$	2
2	$I_v$	0

Hasil simulasi dengan mengambil parameter dan nilai awal berdasarkan yang terdapat pada Tabel 2 dan Tabel 3. Didapatkan grafik kestabilan sebagai berikut:

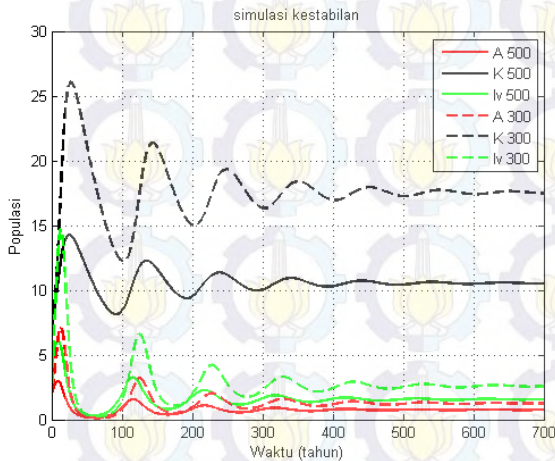


**Gambar 2.** Grafik Kestabilan Bebas Penyakit dengan  $b = 143, K = 3, t = 300$



**Gambar 3.** Grafik Kestabilan Endemik dengan  $b = 243, K = 7, t = 70$

Gambar 3 menunjukkan bahwa untuk grafik populasi  $A, K,$  dan  $I_v$  pada  $n = 300$  grafiknya lebih tinggi atau titik kesetimbangan turun saat  $n = 500$ .



**Gambar 4.** Grafik Kestabilan Endemik dengan  $b = 243, K = 7, t = 700$

Pada Gambar 3 t-nya diperpanjang hingga mencapai 700 tahun, dengan  $b = 243, K = 7$ . Dari gambar tersebut terlihat bahwa populasi  $A, K,$  dan  $I_v$  sudah menunjukkan ke arah titik setimbang dan stabil pada titik tersebut.

### E. Penerapan Extended Kalman Filter

Diskritisasi dilakukan dengan metode beda hingga maju untuk perubahan variabel terhadap waktu. Dilakukan pendiskritan pada persamaan (1) – (5) maka didapat persamaan berikut :

$$S_{h(i+1)} = \left( R_h + \alpha \frac{A_i}{N_h} n K_i - b I_{v(i)} \frac{S_{h(i)}}{N_h} p_h - \mu_h S_{h(i)} \right) \Delta t + S_{h(i)} \quad (13)$$

$$A_{i+1} = \left( b I_{v(i)} \frac{S_{h(i)}}{N_h} p_h - \delta A_i - \alpha \frac{A_i}{N_h} n K_i - \mu_h A_i \right) \Delta t + A_i \quad (14)$$

$$K_{i+1} = (\delta A_i - \mu_h K_i) \Delta t + K_i \quad (15)$$

$$S_{v(i+1)} = \left( R_v - b S_{v(i)} \frac{A_i}{N_h} p_v - \mu_v S_{v(i)} \right) \Delta t + S_{v(i)} \quad (16)$$

$$I_{v(i+1)} = \left( b S_{v(i)} \frac{A_i}{N_h} p_v - \mu_v I_{v(i)} \right) \Delta t + I_{v(i)} \quad (17)$$

Dengan memisalkan

$$x_1 = S_h$$

$$x_2 = A$$

$$x_3 = K$$

$$x_4 = S_v$$

$$x_5 = I_v$$

Maka dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} \left( R_h + \alpha \frac{x_2(i)}{N_h} n x_3(i) - b x_5(i) \frac{x_1(i)}{N_h} p_h - \mu_h x_1(i) \right) \Delta t + x_1(i) \\ \left( b x_5(i) \frac{x_1(i)}{N_h} p_h - \delta x_2(i) - \alpha \frac{x_2(i)}{N_h} n x_3(i) - \mu_h x_2(i) \right) \Delta t + x_2(i) \\ (\delta x_2(i) - \mu_h x_3(i)) \Delta t + x_3(i) \\ \left( R_v - b x_4(i) \frac{x_2(i)}{N_h} p_v - \mu_v x_4(i) \right) \Delta t + x_4(i) \\ \left( b x_4(i) \frac{x_2(i)}{N_h} p_v - \mu_v x_5(i) \right) \Delta t + x_5(i) \end{bmatrix}$$

Definisikan State Space

$$x_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_k$$

Model sistem

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_k$$

Persamaan pengukuran

$$z_k = H x_k + v_k$$

Kemudian aplikasikan algoritma *Extended Kalman Filter* terhadap persamaan (13) – (17)

### F. Hasil Simulasi EKF

Parameter dan nilai awal yang digunakan dalam simulasi sebagai berikut[3]:

**Tabel 4.** Nilai Parameter

NO	Parameter	Nilai Parameter
1	$R_h$	235
2	$\mu_h$	0.014
3	$p_h$	0.001
4	$b$	243
5	$\delta$	0.2
6	$R_v$	45000

7	$\mu_v$	12.67
8	$p_v$	0.5
10	$n$	500
11	$\alpha$	0.9
12	$N_h$	87
13	$dt$	0.001

Tabel 5. Nilai awal dari masing- masing populasi

No	Sub populasi ketika $t = 0$	Nilai awal
1	$S_h$	80
2	$A$	2
2	$K$	7
4	$S_v$	15
3	$I_v$	0

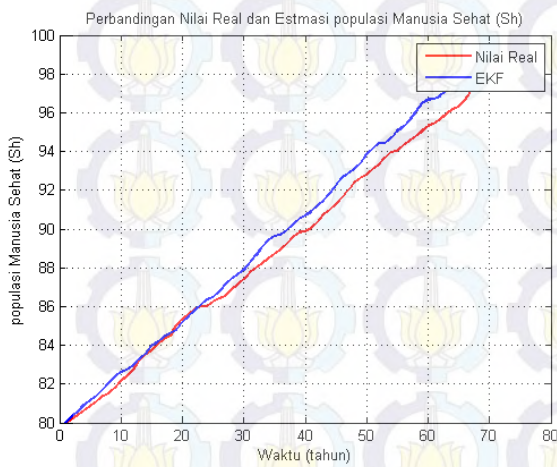
Dengan menggunakan

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

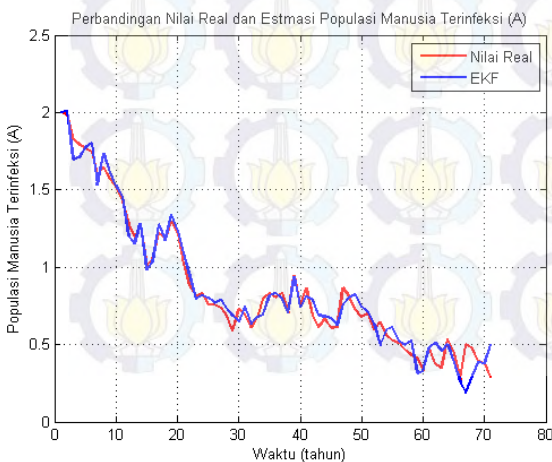
$$Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.001$$

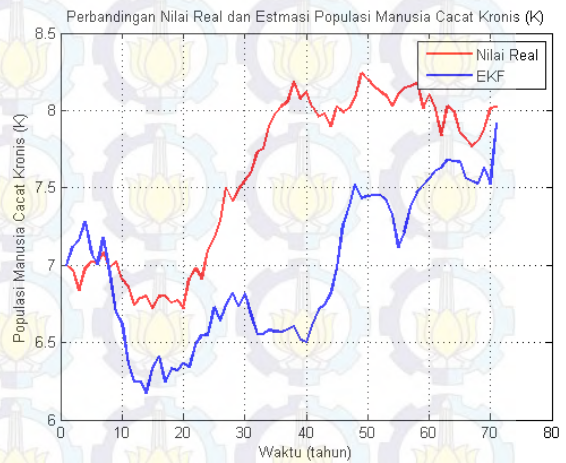
Hasil simulasi dan nilai RMSE dengan mengambil parameter dan nilai awal berdasarkan yang terdapat pada Tabel 4 dan Tabel 5 dengan iterasi sebanyak 70 didapatkan grafik dengan waktu komputasi sebesar 3,183017 detik sebagai berikut:



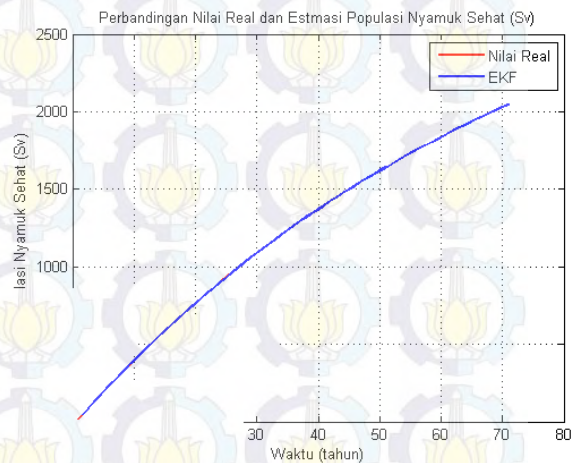
Gambar 5. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Manusia Sehat ( $S_h$ )



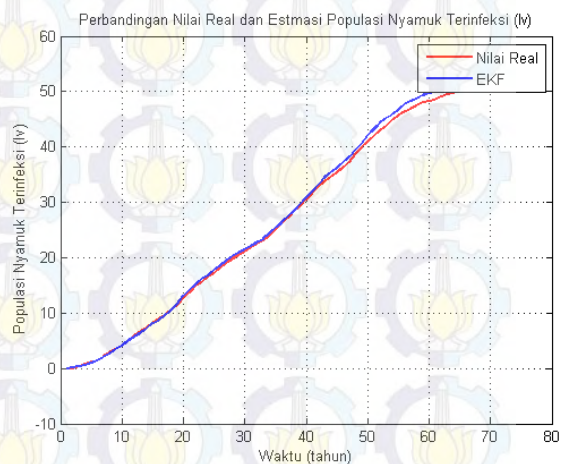
Gambar 6. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Manusia Terinfeksi (A)



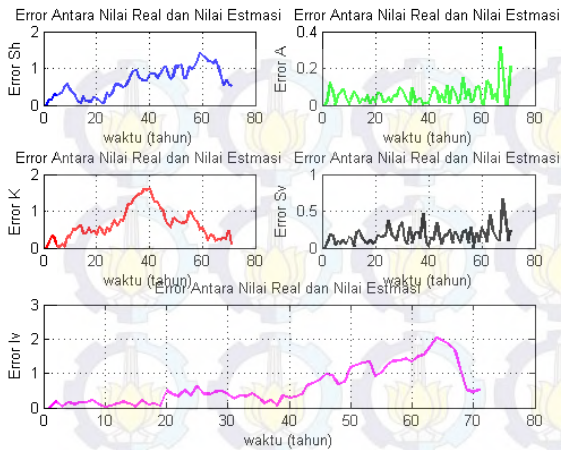
Gambar 7. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Manusia Cacat Kronis (K)



Gambar 8. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Nyamuk Sehat ( $S_v$ )



Gambar 9. Grafik Perbandingan Nilai Real dan Estimasi Populai Nyamuk Terinfeksi ( $I_v$ )



**Gambar 10.** Grafik Error antara Nilai Real dan Nilai Estimasi Semua Populasi

**Tabel 6.** Nilai rata – rata RMSE

Simulasi ke	Nilai rata – rata RMSE				
	$S_h$	$A$	$K$	$S_v$	$I_v$
1	0.7414	0.0728	0.7725	0.2042	0.8377
2	0.5243	0.0578	0.4831	0.1449	0.6182
3	0.7098	0.0926	0.5330	0.2341	0.9467
4	0.4393	0.0536	0.8032	0.1743	0.3232
5	0.3166	0.0777	0.9310	0.2119	0.2119
6	0.2698	0.0492	1.1651	0.1692	0.4359
7	0.3713	0.0917	0.5593	0.1956	0.7022
8	0.4690	0.0966	0.5283	0.2512	0.8088
9	0.6099	0.0627	0.7904	0.3287	0.5126
10	0.3817	0.1237	0.5199	0.2536	0.4587

Pada Tabel 6 terlihat bahwa nilai RMSE dari setiap populasi relatif kecil yaitu nilai *error* (*ne*) pada populasi  $S_h$  diinterval  $0.27 < ne < 0.74$ , pada populasi  $A$  diinterval  $0.04 < ne < 0.12$ , pada populasi  $K$  diinterval  $0.48 < ne < 1.16$ , pada populasi  $S_v$  diinterval  $0.14 < ne < 0.32$ , dan pada populasi  $I_v$  diinterval  $0.21 < ne < 0.94$ . Sehingga secara keseluruhan hal ini dapat dikatakan bahwa metode EKF cocok untuk mengestimasi transmisi penyakit *Filariasis*.

#### IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah diberikan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Model transmisi penyakit *Filariasis* yang telah dikaji, telah didapatkan titik setimbang dan analisis kestabilan sebagai berikut :

a. Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_1 = (A_1^*, K_1^*, I_{v(1)}^*) = (0, 0, 0)$$

Stabil asimtotik lokal terpenuhi jika  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ , dan  $a_1 a_2 > a_3$

b. Titik kesetimbangan endemik

$$E_2 = (A_3^*, K_3^*, I_{v(3)}^*)$$

dengan

$$K_3^* = \frac{\delta A_3^*}{\mu_h}$$

$$I_{v(3)}^* = \frac{b R_v A_3^* \mu_h p_v}{b A_3^* \mu_v \mu_h p_v + \mu_v^2 R_h}$$

$$A_3^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dengan pemisalan dipersamaan  $A_2^*$  dan  $A_3^*$

$$a = -b \mu_v \mu_h p_v \alpha n \delta$$

$$b = -b^2 R_v \mu_h^2 p_v p_h - b^2 R_v \mu_h p_v p_h \delta -$$

$$b \mu_v \mu_h p_v \delta R_h - b \mu_v \mu_h^2 p_v R_h - \mu_v^2 R_h \alpha n \delta$$

$$c = b^2 R_v \mu_h p_v p_h R_h - \mu_v^2 R_h^2 \delta - \mu_v^2 R_h^2 \mu_h$$

Stabil asimtotik lokal terpenuhi jika  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ , dan  $a_1 a_2 > a_3$

2. Metode *Extended Kalman Filter* yang digunakan dapat diterapkan untuk mengestimasi transmisi *Filariasis*. Hal ini berdasarkan RMS Error yang diperoleh relatif kecil setiap statenya.

#### V. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anonim. (2006). "Epidemiologi *Filariasis*". Departemen kesehatan republik Indonesia, direktorat jenderal PP & PL, Jakarta.
- [2] Supriana, A.K., Serviana, H., Soewono, E. (2008). "A Mathematical Model to Investigate the Long-Term Effects of the Lymphatic *Filariasis* Medical Treatment in Jati Sampurna, West Java". ITB: Bandung
- [3] Husain, H. S., (2007). "Model penebaran Penyakit Kaki Gajah di kelurahan Jati Sampurna". ITB : Bandung
- [4] Djoko, Luknanto. (2003). "Model Matematika". Universitas Gadjah Mada: Yogyakarta..
- [6] Welch, G. Dan Bishop, G. (2011). "An introduction to the Kalman Filter". University of North Carolina: Chapel Hil, Amerika.
- [7] Thieme HR. (1992). "Epidemic and Demographic Interaction in The Spread of Potentially Fatal Diseases in Growing Populatio". Math Biosci.
- [8] Sun, C, Hsieh, Ying-Hen. (2010). "Global Analysis of an SEIR Model with Varying Population Size and Vaccinatio". Applied Mathematical Modelling
- [9] Makridakis, S., Wheelwright, S.C., dan McGee, V.E. (1999). "Metode dan Aplikasi Peramalan". Edisi kedua. Jakarta: Binarupa Aksara