

# Kajian Kendali Optimal untuk Mengurangi Penyebaran Penyakit Malaria

M. Reza Giovanni dan Mardlijah

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia

email : mardlijah@gmail.com

**Abstrak**— Penyakit Malaria adalah salah satu penyakit endemik, jika tidak ada upaya penanggulangan penyebarannya akan mewabah dan memakan banyak korban. Oleh sebab itu, dibutuhkan upaya untuk mengurangi penyebaran penyakit tersebut. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, diperlukan adanya pengendalian terhadap populasi manusia dan populasi nyamuk malaria. Pada penelitian ini, diterapkan teori kendali optimal dalam melakukan pengobatan ke masyarakat dan insektisida pada daerah tersebut menggunakan metode Prinsip Pontryagin Minimum. Dari hasil penelitian ini ditunjukkan bahwa populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria dan populasi malaria yang terinfeksi oleh parasit *Plasmodium* semakin menurun.

**Kata kunci** — Penyakit Malaria, Kendali Optimal, Prinsip Pontryagin Minimum

## I. PENDAHULUAN

Suatu penyakit dikatakan endemik ketika penyakit tersebut menyebar pada suatu wilayah dalam kurun waktu yang sangat lama. Penyakit endemik merupakan ancaman yang besar bagi populasi pada suatu wilayah, sebab penyakit endemik akan mengakibatkan kepunahan populasi di dalamnya jika tidak dilakukan penanganan atau upaya yang tepat guna memberantas penyakit tersebut. Salah satu penyakit endemik tersebut adalah penyakit malaria.

Penyakit malaria adalah penyakit endemik yang disebabkan oleh parasit *Plasmodium* dan ditularkan oleh nyamuk *Anopheles sp* betina [1]. Dalam skala global, malaria masih menempati peringkat pertama masalah kesehatan di daerah tropis. Dampak dari penyakit malaria tidak hanya pada masalah kesehatan semata, tetapi juga telah menjadi masalah sosial ekonomi, seperti kerugian ekonomi, kemiskinan dan keterbelakangan [2]. Terdapat sekitar 3,4 juta orang beresiko pada malaria, dan di antaranya 1,2 juta orang beresiko tinggi terjangkit malaria. Lebih dari satu kasus malaria terjadi pada setiap 1000 *host* di daerah yang memiliki resiko tinggi terjangkit penyakit malaria. Pada tahun 2012, terdapat sekitar 207 juta kasus malaria yang mengakibatkan 627.000 orang meninggal, sebagian besar adalah anak-anak dari benua Afrika. Penelitian tentang upaya mengurangi penyebaran penyakit malaria sudah banyak dilakukan oleh para peneliti. Pada beberapa dekade terakhir, ketahanan parasit *Plasmodium* terhadap obat anti-malaria telah muncul di beberapa tempat. Maka dibutuhkan perencanaan dan analisis yang menyeluruh untuk mengendalikan penyebaran malaria resisten [1]. Di Indonesia sendiri malaria merupakan masalah kesehatan masyarakat yang sangat penting. Tercatat terdapat 6 juta kasus klinis dan 700 kematian setiap tahun [2].

Penyebaran penyakit endemik merupakan salah satu permasalahan kehidupan yang dapat diselesaikan dengan model matematika. Pengkajian model epidemik matematika merupakan hal yang sangat penting untuk menganalisa penyebaran penyakit dan cara mengendalinya, sehingga dapat dilakukan penanganan atau upaya yang tepat guna memberantas penyakit tersebut dengan tepat dan efektif. S.J. Aneke dan J.C. Koella dkk telah melakukan penelitian tentang penyebaran penyakit Malaria dengan mempertimbangkan dua jenis malaria sensitif dan malaria resisten penuh [3,4]. H. Tasman dkk mengusulkan model dengan parasit malaria resistensi sebagian. Penelitian model matematika dengan kendali optimal dengan mempertimbangkan resistensi malaria juga telah dilakukan [5]. Penelitian dengan model sederhana untuk mengendali penyebaran malaria resisten juga telah dilakukan oleh K.O. Okosun dkk, dimana model tersebut fokus terhadap dampak dari penanganan atau upaya dengan mengasumsikan parasit malaria resistensi penuh terhadap obat anti-malaria [6]. Fatmawati dkk mengusulkan model matematika penyebaran malaria dengan mempertimbangkan pemberian pengobatan pada masyarakat dan insektisida sebagai kendali [1].

Berdasarkan permasalahan tersebut, dalam penelitian ini penulis akan melakukan kajian pada model penyebaran penyakit malaria dengan mempertimbangkan jenis malaria resisten dan malaria sensitif sebagai vektor dan melakukan upaya untuk mengurangi penyebaran malaria dengan menggunakan kendali optimal, dimana pemberian pengobatan pada masyarakat dan insektisida adalah dua faktor kendali.

## II. MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini akan dijelaskan tentang model matematika penyebaran penyakit malaria.

Populasi dibagi menjadi 8 kelompok yaitu:

$S_H$  adalah populasi manusia yang rentan terinfeksi penyakit malaria

$I_{HS}$  adalah populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria yang sensitive terinfeksi parasit *plasmodium*

$I_{Hr}$  adalah populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria yang resisten terinfeksi parasit *plasmodium*

$R_H$  adalah populasi manusia yang telah sembuh dari penyakit malaria.

$L_V$  adalah populasi larva dari malaria yang akan tumbuh menjadi malaria dewasa

$S_V$  adalah populasi malaria dewasa yang akan rentan terinfeksi oleh parasit *plasmodium*

$I_{Vs}$  adalah populasi malaria sensitive yang terinfeksi oleh parasite *plasmodium*

$I_{Vr}$  adalah populasi malaria resisten yang terinfeksi oleh parasite *plasmodium*

$1/\delta_H$  menyatakan masa hidup manusia (*host*)

$\alpha$  menyatakan angka kehilangan imunitas,

$\Lambda$  menyatakan angka perkembang biakan

$\delta_L$  menyatakan angka kematian alami dari larva atau pupa

$\varepsilon_L$  menyatakan angka kematian larva atau pupa dari gangguan luar

$\eta$  menyatakan angka pertumbuhan larva menjadi nyamuk dewasa

$\varepsilon_V$  menyatakan angka kematian malaria (*vector*) dari insektisida

$\delta_V$  menyatakan laju kematian alami dari malaria (*vector*)

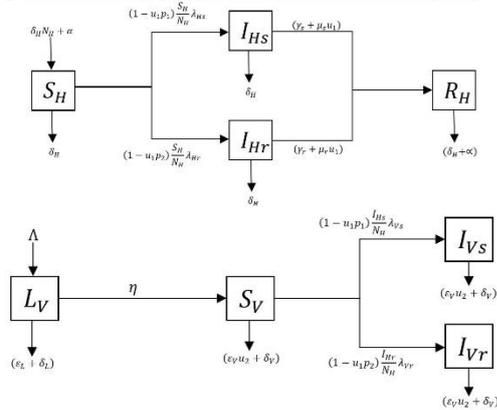
$\mu_s$  dan  $\mu_r$  menyatakan angka penyembuhan populasi manusia dari pengobatan

$\lambda_{Vs}$  dan  $\lambda_{Vr}$  menyatakan angka infeksi untuk malaria (*vector*)

$\lambda_{Hs}$  dan  $\lambda_{Hr}$  menyatakan angka infeksi untuk manusia (*host*)

$1/\gamma_s$  dan  $1/\gamma_r$  menyatakan waktu penyembuhan dari manusia (*host*) secara alami

$p_1$  dan  $p_2$  menyatakan proporsi kesuksesan dari pengobatan



**Gambar 1.** Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Malaria

Model dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{dS_H}{dt} = \delta_H N_H - (1 - u_1 p_1) \lambda_{Hs} \frac{I_{Vs}}{N_H} S_H - (1 - u_1 p_2) \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} S_H - \delta_H S_H + \alpha R_H \quad (1)$$

$$\frac{dI_{Hs}}{dt} = (1 - u_1 p_1) \lambda_{Hs} \frac{I_{Vs}}{N_H} S_H - (\delta_H + \gamma_s + \mu_s u_1) I_{Hs} \quad (2)$$

$$\frac{dI_{Hr}}{dt} = (1 - u_1 p_2) \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} S_H - (\delta_H + \gamma_r + \mu_r u_1) I_{Hr} \quad (3)$$

$$\frac{dR_H}{dt} = (\gamma_s + \mu_s u_1) I_{Hs} + (\gamma_r + \mu_r u_1) I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H \quad (4)$$

$$\frac{dL_V}{dt} = \Lambda - (\eta - \varepsilon_L + \delta_L) L_V \quad (5)$$

$$\frac{dS_V}{dt} = \eta L_V - (1 - u_1 p_1) \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - (1 - u_1 p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - (\varepsilon_V u_2 + \delta_V) S_V \quad (6)$$

$$\frac{dI_{Vs}}{dt} = (1 - u_1 p_1) \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - (\varepsilon_V u_2 + \delta_V) I_{Vs} \quad (7)$$

$$\frac{dI_{Vr}}{dt} = (1 - u_1 p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - (\varepsilon_V u_2 + \delta_V) I_{Vr} \quad (8)$$

dengan jumlah populasi  $N_H = S_H + I_{Hs} + I_{Hr} + R_H$

### III. ANALISIS SISTEM

Pada bab ini akan dibahas mengenai titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik dan analisis kestabilan dari model matematika penyebaran penyakit malaria.

#### A. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah suatu keadaan tidak terjadi penyebaran penyakit dalam suatu populasi sehingga dengan mengambil  $I_{Hs} = I_{Hr} = I_{Vs} = I_{Vr} = 0$  didapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit  $I_0 = (S_H^0, I_{Hs}^0, I_{Hr}^0, R_H^0, L_V^0, S_V^0, I_{Vs}^0, I_{Vr}^0)$  adalah

$$I_0 = \left( N_H, 0, 0, 0, \frac{\Lambda}{(\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}, \frac{\eta \Lambda}{\delta_V (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}, 0, 0 \right)$$

#### B. Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit model ditentukan oleh nilai *eigen* matriks *Jacobian* dari persamaan (1)-(8) dengan nilai  $I_{Hs} = I_{Hr} = I_{Vs} = I_{Vr} = 0$ . Dari matriks *Jacobian* didapatkan nilai *eigen*  $\lambda_1 = -\delta_H$ ,  $\lambda_2 = (\delta_H + \gamma_s)(\mathfrak{R}_{01} - 1)$ ,  $\lambda_3 = (\delta_H + \gamma_r)(\mathfrak{R}_{02} - 1)$ ,  $\lambda_4 = -(\delta_H + \alpha)$ ,  $\lambda_5 = -(\eta + \varepsilon_L + \delta_L)$ ,  $\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = -\delta_V$ .

Dengan  $\mathfrak{R}_{01} = \frac{\lambda_{Hs} \lambda_{Vs} S_V S_H}{N_H^2 \delta_V (\delta_H + \gamma_s)}$  dan  $\mathfrak{R}_{02} = \frac{\lambda_{Hs} \lambda_{Vr} S_V S_H}{N_H^2 \delta_V (\delta_H + \gamma_r)}$

Dari nilai  $\mathfrak{R}_0$  maka didapatkan kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut:

- Jika  $\mathfrak{R}_0 < 1$  maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal.
- Jika  $\mathfrak{R}_0 > 1$  maka titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil asimtotik lokal.

#### C. Titik kesetimbangan endemik

Titik kesetimbangan endemik merupakan suatu keadaan di mana terjadi infeksi penyakit di dalam suatu populasi tertentu. Dalam hal ini titik kesetimbangan endemik dibagi menjadi dua:

- Titik kesetimbangan endemik resisten

Titik kesetimbangan endemik resisten didapat dengan mensubstitusikan  $I_{Hs} = I_{Vs} = 0$  ke persamaan (1)-(8) sehingga didapatkan titik kesetimbangan endemik resisten  $I_1^r = (S_H^r, 0, I_{Hr}^r, R_H^r, L_V^r, S_V^r, 0, I_{Vr}^r)$

Dengan:

$$S_H^r = \frac{N_H \delta_V (\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_r I_{Hr}^r) (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}{(\delta_H + \alpha) (\lambda_{Hr} \lambda_{Vr} I_{Hr}^r \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L))}$$

$$I_{Hr}^r = \frac{(C \delta_H N_H (\delta_H + \alpha) - AB \delta_V N_H)}{(AC + AB \lambda_{Vr} - C \alpha \gamma_r)}$$

$$R_H^r = \frac{\gamma_r I_{Hr}^r}{(\delta_H + \alpha)}$$

$$L_V^r = \frac{\Lambda}{(\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}$$

$$S_V^r = \frac{\eta \Lambda N_H}{(\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}$$

$$I_{Vr}^r = \frac{\lambda_{Vr} I_{Hr}^r}{\delta_V (\lambda_{Vr} I_{Hr}^r + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}$$

Dimana:

$$A = (\delta_H + \gamma_r) (\delta_H + \alpha)$$

$$B = N_H \delta_H \delta_V (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)$$

$$C = \lambda_{Vr} \eta \Lambda \lambda_{Hr}$$

- Titik kesetimbangan endemik sensitive

Titik kesetimbangan endemik resisten didapat dengan mensubstitusikan  $I_{Hr} = I_{Vr} = 0$  ke persamaan (1)-(8) sehingga didapatkan titik kesetimbangan endemik resisten  $I_1^s = (S_H^s, I_{Hs}^s, 0, R_H^s, L_V^s, S_V^s, I_{Vs}^s, 0)$

Dengan:

$$S_H^s = \frac{N_H \delta_V (\lambda_{Vs} I_{Hs}^s + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L) (\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_s I_{Hs}^s)}{(\delta_H + \alpha) (\lambda_{Hs} \lambda_{Vs} I_{Hs}^s \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{Vs} I_{Hs}^s + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L))}$$

$$I_{Hs}^s = \frac{C \delta_H N_H (\delta_H + \alpha) - AB \delta_V N_H}{(AC + AB \lambda_{Vs} - C \alpha \gamma_s)}$$

$$R_H^s = \frac{\gamma_s I_{Hs}^*}{(\delta_H + \alpha)}$$

$$L_V^s = \frac{\Lambda}{(\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}$$

$$S_V^s = \frac{\eta \Lambda N_H}{(\lambda_{Vs} I_{Hs}^* + \delta_V N_H)(\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}$$

$$I_{Vs}^s = \frac{\lambda_{Vs} I_{Hs}^* \eta \Lambda}{\delta_V (\lambda_{Vs} I_{Hs}^* + \delta_V N_H)(\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}$$

Dimana:

$$A = (\delta_H + \gamma_s)(\delta_H + \alpha)$$

$$B = N_H \delta_H \delta_V (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)$$

$$C = \lambda_{Hs} \lambda_{Vs} \eta \Lambda$$

#### D. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Dalam hal ini titik kesetimbangan endemic dibagi menjadi dua:

##### a. Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik Resisten

Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit model ditentukan oleh nilai *eigen* matriks *Jacobian* dari persamaan (1)-(8) dengan nilai  $I_{Hs}' = I_{Vs}' = 0$ . Dari matriks *Jacobian* didapatkan nilai *eigen*

$$\lambda_1 = -\delta_H + \frac{\lambda_{Hr} I_{Vr} \left( \frac{\delta_H^2 + \delta_H(\gamma_r + \alpha)}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{N_H (\delta_H + \gamma_r) (-1 + \mathfrak{R}_{01}^r)}$$

$$\lambda_2 = (\delta_H + \gamma_r) (\mathfrak{R}_{02}^r - 1)$$

$$\lambda_3 = \left( \frac{(\delta_H + \gamma_s) (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \lambda_{Vr} N_H) + \lambda_{Hr} \lambda_{Vs}^2 I_{Hr} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \delta_V N_H)} \right) (\mathfrak{R}_{03}^r - 1)$$

$$\lambda_4 = -(\delta_H + \alpha), \lambda_5 = -(\eta + \varepsilon_L + \delta_L), \lambda_6 = \delta_V (\mathfrak{R}_{04}^r - 1), \lambda_7 = \lambda_8 = -\delta_V$$

$$\text{Dengan } \mathfrak{R}_{01}^r = \frac{\lambda_{Vr} \lambda_{Hr} S_V S_H \delta_V N_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \delta_V N_H) (\delta_H + \gamma_r)},$$

$$\mathfrak{R}_{02}^r = \frac{\lambda_{Vs} \lambda_{Hs} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\delta_H + \gamma_r)},$$

$$\mathfrak{R}_{03}^r = \frac{\lambda_{Vr} \lambda_{Hr} S_V S_H (\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \lambda_{Vr} N_H))}{N_H^2 ((\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \delta_V N_H)) (\delta_H + \gamma_s) + \lambda_{Hr} \lambda_{Vs}^2 I_{Hr} S_V S_H)},$$

$$\mathfrak{R}_{04}^r = \frac{\lambda_{Vs} I_{Hs}}{N_H \delta_V}$$

##### b. Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik Sensitif

Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit model ditentukan oleh nilai *eigen* matriks *Jacobian* dari persamaan (1)-(8) dengan nilai  $I_{Hr}' = I_{Vr}' = 0$ . Dari matriks *Jacobian* didapatkan nilai *eigen*

$$\lambda_1 = -\delta_H + \frac{\lambda_{Hr} I_{Vr} \left( \frac{\delta_H^2 + \delta_H(\gamma_r + \alpha)}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{N_H (\delta_H + \gamma_r) (-1 + \mathfrak{R}_{01}^s)}$$

$$\lambda_2 = \left( \frac{(\delta_H + \gamma_s) (\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{Vs} I_{Hs})) + \lambda_{Hs} \lambda_{Vs}^2 I_{Hr} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{Vs} I_{Hs})} \right) (\mathfrak{R}_{02}^s - 1)$$

$$\lambda_3 = (\delta_H + \gamma_r) (\mathfrak{R}_{03}^s - 1)$$

$$\lambda_4 = -(\delta_H + \alpha), \lambda_5 = -(\eta + \varepsilon_L + \delta_L), \lambda_6 = -\frac{\lambda_{Vs} I_{Hs}}{N_H} - \delta_V < 0, \lambda_7 = \lambda_8 = -\delta_V$$

$$\text{Dengan } \mathfrak{R}_{01}^s = \frac{\lambda_{Vr} \lambda_{Hr} S_V S_H \delta_V N_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \delta_V N_H) (\delta_H + \gamma_r)},$$

$$\mathfrak{R}_{02}^s = \frac{\lambda_{Vs} \lambda_{Hs} S_V S_H (\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{Vs} I_{Hs}))}{\delta_V N_H^2 ((\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{Vs} I_{Hs})) (\delta_H + \gamma_s) + \lambda_{Hs} \lambda_{Vs}^2 I_{Hr} S_V S_H)}$$

$$\mathfrak{R}_{03}^s = \frac{\lambda_{Vs} \lambda_{Hs} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\delta_H + \gamma_r)},$$

Karena nilai *eigen*  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$  dan  $\lambda_8$  bernilai negatif pada bagian *realnya*, maka berdasarkan akar

karakteristik (nilai *eigen*  $\lambda$ ), titik kesetimbangan endemic stabil asimtotik lokal.

## IV. KENDALI OPTIMAL

Pada bab ini akan dibahas mengenai fungsi objektif, fungsi Hamiltonian, persamaan *state* dan *co-state*, dan kondisi batas.

Secara umum, formulasi kendali optimal terdiri dari model matematika sistem dinamik, fungsi objektif, dan kondisi batas yang harus dipenuhi. Dalam hal ini fungsi objektif diberikan sebagai berikut:

$$I = \int_0^{t_f} \left( I_{Hs} + I_{Hr} + I_{Vs} + I_{Vr} + \frac{c_1 u_1^2}{2} + \frac{c_2 u_2^2}{2} \right) dt$$

Dalam penyelesaian kendali optimal, langkah awal yang dilakukan adalah menentukan fungsi Hamiltonian. Dengan memperhatikan formulasi kendali optimal, diperoleh fungsi Hamiltonian sebagai berikut:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t)) = I_{Hs} + I_{Hr} + I_{Vs} + I_{Vr} + \frac{c_1 u_1^2}{2} + \frac{c_2 u_2^2}{2} + \sum_{i=1}^8 \lambda_i g_i \quad (9)$$

Dimana  $g_i$  adalah nilai ruas kanan dari persamaan *state* pada persamaan (1)-(8) dan  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 8$  adalah variabel *adjoint* yang memenuhi persamaan *costate*. Langkah berikutnya adalah menentukan persamaan *costate* dari persamaan (9) dengan cara sebagai berikut:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x(t)}$$

Sehingga didapat persamaan *costate* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= (1 - u_1 p_1)(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\lambda_{Hs} I_{Vs}}{N_H} + (1 - u_1 p_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\lambda_{Hr} I_{Vr}}{N_H} + \delta_H \sigma_1 \\ \dot{\sigma}_2 &= -1 + \delta_H \sigma_2 + (\gamma_s + \mu_s u_1)(\sigma_2 - \sigma_4) + (1 - u_1 p_1)(\sigma_6 - \sigma_7) \frac{\lambda_{Vs} S_V}{N_H} \\ \dot{\sigma}_3 &= -1 + \delta_H \sigma_3 + (\gamma_r + \mu_r u_1)(\sigma_3 - \sigma_4) + (1 - u_1 p_2)(\sigma_6 - \sigma_8) \frac{\lambda_{Vr} S_V}{N_H} \\ \dot{\sigma}_4 &= -\alpha \sigma_1 + (\delta_H + \alpha) \sigma_4 \\ \dot{\sigma}_5 &= (\eta + \varepsilon_L + \delta_L) \sigma_5 - \eta \sigma_6 \\ \dot{\sigma}_6 &= (\varepsilon_V u_1 + \delta_V) \sigma_6 + (1 - u_1 p_1)(\sigma_6 - \sigma_7) \frac{\lambda_{Vs} I_{Hs}}{N_H} + (1 - u_1 p_2)(\sigma_6 - \sigma_8) \frac{\lambda_{Vr} I_{Hr}}{N_H} \\ \dot{\sigma}_7 &= -1 + (\varepsilon_V u_1 + \delta_V) \sigma_7 + (1 - u_1 p_1)(\sigma_1 - \sigma_2) \frac{\lambda_{Hs} S_H}{N_H} \\ \dot{\sigma}_8 &= -1 + (\varepsilon_V u_2 + \delta_V) \sigma_8 + (1 - u_1 p_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\lambda_{Hr} S_H}{N_H} \end{aligned}$$

Langkah berikutnya adalah menentukan kondisi stasioner dari persamaan Hamiltonian (9) untuk mendapatkan persamaan kendali optimal, dengan cara sebagai berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial u(t)} = 0$$

Sehingga didapatkan nilai  $u_1^*$  dan  $u_2^*$  yang optimal

$$u_1^* = \begin{cases} 0 & u_1 \leq 0 \\ \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{c_1 N_H} & 0 < u_1 < 1 \\ 1 & u_1 \geq 1 \end{cases} \quad u_2 \leq 0$$

$$u_2^* = \begin{cases} 0 & u_2 \leq 0 \\ \frac{\varepsilon_V (\sigma_6 S_V + \sigma_7 I_{Vs} + \sigma_8 I_{Vr})}{c_2} & 0 < u_2 < 1 \\ 1 & u_2 \geq 1 \end{cases}$$

Dimana

$$\Delta_1 = N_H \mu_s I_{Hs} (\sigma_2 - \sigma_4) + N_H \mu_r I_{Hr} (\sigma_3 - \sigma_4)$$

$$\Delta_2 = p_1 S_H \lambda_{Hs} I_{Vs} (\sigma_2 - \sigma_1) + p_1 S_V \lambda_{Vs} I_{Hs} (\sigma_7 - \sigma_6)$$

$$\Delta_3 = p_2 S_H \lambda_{Hr} I_{Vr} (\sigma_3 - \sigma_1) + p_2 S_V \lambda_{Vr} I_{Hr} (\sigma_8 - \sigma_6)$$

Formulasi kendali optimal pada permasalahan ini menggunakan sistem dengan  $x(t_f)$  bebas dan  $t_f$  ditentukan, sehingga kondisi transversalitasnya adalah:

$$\left( \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^* \right) = 0$$

$$\lambda^*(t_f) = \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_{*t_f}$$

Karena fungsi objektif tidak memiliki bentuk Mayer (S), maka didapat  $\sigma_i^*(t_f) = 0$ , dengan  $i = 1, 2, \dots, 8$ .

## V. SIMULASI DAN HASIL

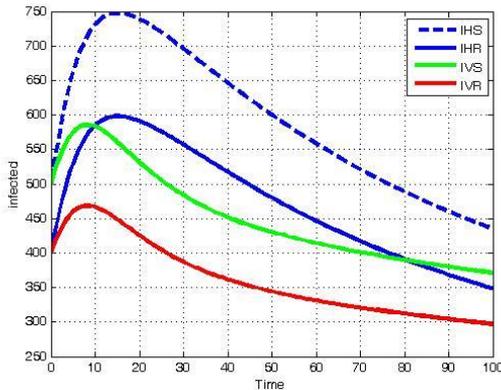
Pada simulasi ini dibuat 4 kondisi. Kondisi pertama ketika tanpa kendali dimana tidak ada upaya untuk mengurangi penyebaran penyakit malaria. Kondisi kedua ketika populasi manusia diberikan pengobatan. Kondisi ketiga ketika dilakukan *fogging* tanpa adanya pengobatan ke masyarakat. Kondisi keempat ketika populasi manusia diberikan pengobatan dan dilakukan *fogging* pada daerah tersebut. Berikut parameter yang diberikan [1]:

Tabel 1. Input Parameter

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
$\delta_H$	0.00003914	$\lambda_{Vs}$	0.27
$\alpha$	0.00274	$\lambda_{Vr}$	0.27
$\mu_s$	0.25	$\lambda_{Hs}$	0.3
$\mu_s$	0.048	$\lambda_{Hr}$	0.3
$\Lambda$	1000	$\gamma_s$	0.01
$\delta_H$	0.4	$\gamma_r$	0.01
$\varepsilon_L$	0.4	$p_1$	0.3
$\eta$	0.07142	$p_2$	0.6
$\delta_V$	0.07142	$c_1$	50
$\varepsilon_V$	0.1	$c_2$	20

Pada permasalahan ini simulasi menggunakan fungsi BVP4C pada *software* Matlab. Berikut adalah hasil simulasi menggunakan Matlab:

a. Ketika tidak adanya pengendalian



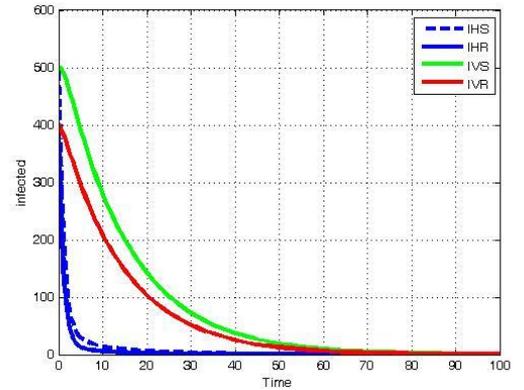
**Gambar 2.** Jumlah Populasi Manusia dan Malaria yang Terinfeksi Tanpa Pengendalian

Pada Gambar 2. terlihat bahwa tingkat populasi mengalami penurunan namun tidak drastis. Jumlah populasi dari masing-masing jenis populasi mengalami peningkatan di awal periode, setelah itu populasi menurun hingga pada hari ke-100. Pada

populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria sensitif ( $I_{Hs}$ ) mengalami penurunan sebesar 13%. Hal serupa terjadi pada populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria resisten ( $I_{Hr}$ ) yang mengalami penurunan sebesar 13%, populasi malaria yang sensitif terinfeksi parasit *plasmodium* ( $I_{Vs}$ ) sebesar 25.78%, dan populasi malaria yang resisten terinfeksi oleh parasit *plasmodium* ( $I_{Vr}$ ) sebesar 25.775%. Hal ini disebabkan tidak adanya upaya dalam menangani penyebaran penyakit malaria tersebut, sehingga kemungkinan penyakit malaria akan terus mewabah untuk beberapa periode kedepan sangat besar.

b. Pengendalian berupa Pengobatan ke Masyarakat

Pada Gambar 2. terlihat bahwa pengaruh upaya pengobatan ke masyarakat sangat besar. Hal ini ditunjukkan dengan penurunan jumlah populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria sangat drastis hingga pada hari ke-100. Hal ini berdampak pada populasi malaria yang juga mengalami penurunan drastis sampai hari ke-100. Pada populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria sensitif ( $I_{Hs}$ ) mengalami penurunan sebesar 99.99%. Hal serupa terjadi pada populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria resisten ( $I_{Hr}$ ) yang mengalami penurunan sebesar 99.99%, populasi malaria yang sensitif terinfeksi parasit *plasmodium* ( $I_{Vs}$ ) sebesar 99.85704%, dan populasi malaria yang resisten terinfeksi oleh parasit *plasmodium* ( $I_{Vr}$ ) sebesar 99.903%.

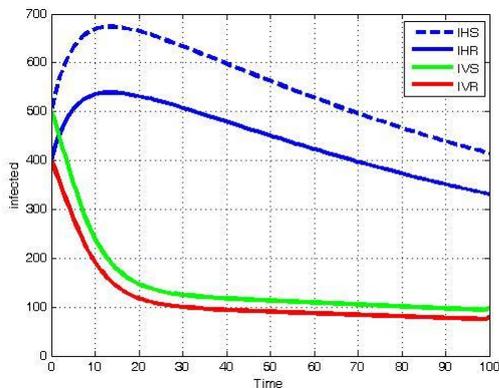


**Gambar 3.** Jumlah Populasi Manusia dan Malaria yang Terinfeksi dengan Pengendalian Pengobatan ke Masyarakat

c. Pengendalian berupa Insektisida

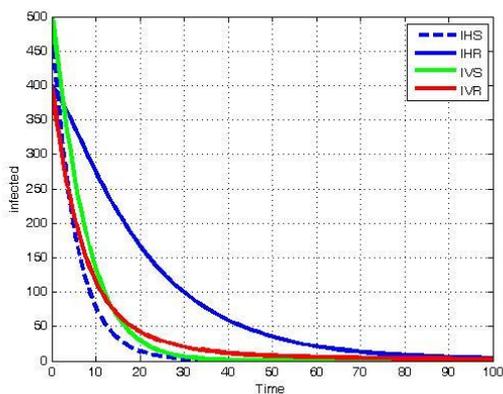
Upaya memberikan insektisida pada populasi malaria sangat berpengaruh dalam mengurangi penyebaran penyakit malaria. Pada Gambar 4 terlihat populasi malaria yang terinfeksi oleh *plasmodium* terus menurun sampai pada hari ke-100. Namun pengendalian ini tidak berdampak besar pada populasi manusia yang terinfeksi malaria. Jumlah populasi manusia yang terinfeksi malaria sempat mengalami kenaikan di awal periode, namun kemudian populasi manusia yang terinfeksi malaria mengalami penurunan sampai pada hari ke-100. Pada populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria sensitif ( $I_{Hs}$ ) mengalami penurunan sebesar 17.24%. Hal serupa terjadi pada populasi manusia yang terinfeksi oleh

malaria resisten ( $I_{Hr}$ ) yang mengalami penurunan sebesar 17.25%, populasi malaria yang sensitif terinfeksi parasit *plasmodium* ( $I_{Vs}$ ) sebesar 99.22%, dan populasi malaria yang resisten terinfeksi oleh parasit *plasmodium* ( $I_{Vr}$ ) sebesar 80.156%.



**Gambar 4.** Jumlah Populasi Manusia dan Malaria yang Terinfeksi dengan Pengendalian Insektisida

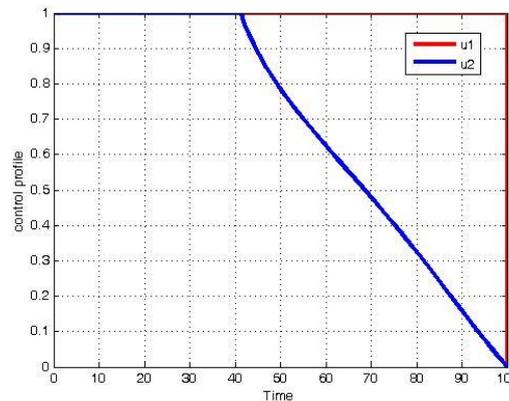
d. Pengendalian berupa Pengobatan ke Masyarakat dan Insektisida



**Gambar 5.** Jumlah Populasi Manusia dan Malaria yang Terinfeksi dengan Pengendalian Pengobatan ke Masyarakat dan Insektisida

Peran pengendalian atau upaya dalam mengurangi penyebaran penyakit malaria memberikan dampak yang positif. Pada Gambar 5 upaya yang dilakukan untuk mengurangi penyebaran penyakit malaria adalah pengobatan ke masyarakat dan insektisida. Dua upaya yang dilakukan tersebut dapat menurunkan jumlah populasi manusia dan malaria yang terinfeksi mendekati nilai nol. Pada Gambar 6 faktor kendali pengobatan ke masyarakat selalu berada pada angka 1 hingga hari ke-100. Artinya pengobatan ke masyarakat dilakukan secara penuh selama 100 hari. Hal ini disebabkan karena masih terdapat sekitar 5 populasi dari manusia yang terinfeksi malaria sensitif ( $I_{Hs}$ ) sehingga harus terus dilakukan pengobatan. Sementara pada faktor kendali insektisida mengalami penurunan pada hari ke-42 karena terlihat jumlah populasi malaria yang terinfeksi oleh *plasmodium* telah mengalami penurunan hingga mendekati nilai 0. Pada populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria

sensitif ( $I_{Hs}$ ) mengalami penurunan sebesar 99.99%. Hal serupa terjadi pada populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria resisten ( $I_{Hr}$ ) yang mengalami penurunan sebesar 98.97%, populasi malaria yang sensitif terinfeksi parasit *plasmodium* ( $I_{Vs}$ ) sebesar 99.99%, dan populasi malaria yang resisten terinfeksi oleh parasit *plasmodium* ( $I_{Vr}$ ) sebesar 99.30975%.



**Gambar 6.** Grafik Pengendali Pengobatan ke Masyarakat dan Insektisida

## VI. PENUTUP

### A. Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Dengan menerapkan teori kendali optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin diperoleh pengendalian optimal dalam melakukan upaya pengobatan ke masyarakat sebesar  $u_1 = 1$  dan dalam melakukan upaya insektisida pada selang waktu  $0 \leq t < 42$  sebesar  $u_2 = 1$  dan pada selang waktu  $t \geq 42$  mengalami penurunan sampai pada nilai 0 pada hari  $t = 100$ .
2. Dengan melakukan upaya pengobatan ke masyarakat dan insektisida dapat meminimumkan jumlah populasi manusia dan nyamuk malaria yang terinfeksi. Didapatkan jumlah manusia yang terinfeksi malaria sensitif ( $I_{Hs}$ ) pada hari ke-100 sebesar 0,001483, jumlah populasi manusia yang terinfeksi malaria resisten ( $I_{Hr}$ ) sebesar 4,105, jumlah populasi malaria yang sensitive terinfeksi parasit *plasmodium* ( $I_{Vs}$ ) sebesar 0,004181, dan jumlah populasi malaria yang resisten terinfeksi parasit *plasmodium* sebesar 2,761.

### B. Saran

Adapun saran dari penelitian ini adalah untuk penelitian selanjutnya dapat membandingkan hasil penyelesaian numerik antara Masalah Nilai Batas dengan Metode Beda Hingga. Selain itu, dapat dianalisis pula penurunan jumlah populasi yang terinfeksi pada periode tertentu dengan menambahkan faktor pengendalian atau upaya yang baru untuk mengurangi penyebaran penyakit malaria.

## VII. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Fatmawati., Tasman, H, 2015, “An Optimal Control Strategy to Reduce The Spread of Malaria Resistance”, **Mathematical Bioscience**, Vol. 262, Hal. 73-79.
- [2] Notobroto, H.B., Hidajah, A.T., 2009, “Faktor Risiko Penularan Malaria di Daerah Perbatasan”, **J. Penelit. Med. Eksakta**. Vol. 8, No. 2, Hal. 143-151.
- [3] Sipe, N.G., Dale, P., 2003, “Challenges in Using Geographic Information System (GIS) to Understand and Control Malaria in Indonesia”, **Malaria Journal**, Vol. 2, Hal. 36.
- [4] Aneke, S.J., 2002, “Mathematical Modelling of Drug Resistant Malaria Parasites and Vector Populations”, **Math. Meth. Appl. Sci.**, Vol. 25. Hal. 335-346.
- [5] Koella, J.C., Antia, R., 2003, “Epidemiological Models for The Spread of Anti-Malarial Resistance”, **Malaria Journal.**, Vol. 2, Article. 3.
- [6] Tasman, H., Soewono, E., Sidarto, K.A., Syafaruddin, D., Rogers, W.O., 2009, “A Model for Transmission of Partial Resistance to Anti-Malarial Drugs”, **Mathematical Bioscience.**, Vol. 6, No. 3, Hal. 649-6