

KAJIAN KENDALI OPTIMAL UNTUK MENGURANGI PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA

STUDY OF OPTIMAL CONTROL TO REDUCE THE SPREAD OF MALARIA

Oleh:
M. Reza Giovanni

Dosen Pembimbing:
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA**

2016

Abstrak

Penyakit malaria adalah salah satu penyakit endemik, jika tidak ada upaya penanggulangan penyebarannya akan mewabah dan memakan banyak korban. Oleh sebab itu, dibutuhkan upaya untuk mengurangi penyebaran penyakit tersebut. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, diperlukan adanya pengendalian terhadap populasi manusia dan populasi malaria. Pada penelitian ini, diterapkan teori kendali optimal dalam melakukan pengobatan ke masyarakat dan isektisida pada daerah tersebut menggunakan metode Prinsip Pontryagin Minimum. Dari hasil penelitian ini ditunjukkan bahwa populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria dan populasi malaria yang terinfeksi oleh parasit *plasmodium* semakin menurun.

Kata Kunci: Penyakit Malaria, Kendali Optimal, Prinsip Pontryagin Minimum

I. Pendahuluan

1. Latar Belakang
2. Rumusan Masalah
3. Batasan Masalah
4. Tujuan
5. Manfaat

Latar Belakang

Malaria

Permasalahan
Kesehatan [2]

Penyakit
Endemik [1]

Permasalahan
Sosial Ekonomi
[2]

Jenis Malaria [5]

Rumusan Masalah

- Bagaimana menentukan kestabilan lokal dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan kestabilan lokal dari titik kesetimbangan endemik, dan bilangan reproduksi dasar
- Bagaimana bentuk kendali optimal pada model upaya mengurangi penyebaran penyakit malaria dengan pengobatan dan insektisida

Batasan Masalah

- Model dinamik penyebaran penyakit Malaria pada populasi manusia (*host*), malaria resisten dan malaria sensitif (*vector*).
- Variabel pengendali berupa upaya pengobatan kepada masyarakat dan insektisida (*fogging*).
- Penyelesaian kendali optimal dengan menggunakan Prinsip Pontryagin Maksimum.
- Simulasi menggunakan *software* Matlab.

Tujuan

- Mendapatkan jenis kestabilan pada model upaya mengurangi penyebaran penyakit Malaria.
- Mendapatkan bentuk kendali optimal dalam upaya mengurangi penyebaran penyakit Malaria dengan melakukan pengobatan dan melakukan penyemprotan insektisida (*fogging*)

Manfaat

- Membantu mempelajari dampak dari ditentukannya kestabilan dari setiap titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, dan kendali optimal menggunakan Prinsip Pontryagin Minimum.
- Diperoleh pengetahuan dalam mengintrepetasikan hasil analisis dan simulasi pada model penyebaran penyakit Malaria pada suatu populasi dan menerapkan teori kendali optimal menggunakan Prinsip Pontryagin Minimum dalam upaya mengurangi penyebaran penyakit Malaria secara optimal.

III. Metode Penelitian

Identifikasi masalah dan studi literatur

Analisis hasil simulasi

Penarikan kesimpulan

Mencari titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar

Melakukan simulasi

Menganalisis kestabilan lokal dari setiap titik kesetimbangan

Menyelesaikan permasalahan kendali optimal

Identifikasi Masalah dan Studi Literatur

Dalam tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi tentang upaya mengurangi penyebaran penyakit Malaria pada suatu populasi serta teori kendali optimal dan analisis kestabilan dan penyelesaiannya menggunakan Prinsip Pontryagin Minimum. Pembelajaran lebih mendalam mengenai hal tersebut diperoleh baik melalui buku-buku literatur, jurnal, paper, maupun artikel dari internet.

Mencari Titik Keseimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar

Dari model dinamik yang diperoleh akan dicari titik keseimbangan bebas penyakit ($I = 0$) dan titik keseimbangan endemik ($I \neq 0$) yang selanjutnya dapat ditentukan nilai eigen dari matriks Jacobian tersebut sehingga dapat ditentukan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0).

Menganalisis Kestabilan Lokal dari Setiap Titik Keseimbangan

Pada tahap ini akan dicari kestabilan lokal titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik dengan memasukkan nilai keseimbangan kedalam matriks Jacobian, sehingga didapatkan nilai akar-akar karakteristik dari matriks Jacobiannya untuk mengetahui kestabilan asimtotik lokal pada titik-titik tersebut.

Menyelesaikan Permasalahan Kendali Optimal

Pada tahap ini, dilakukan penyelesaian kendali optimal yang telah diformulasikan pada tahapan sebelumnya. Metode yang digunakan dalam penyelesaian masalah tersebut adalah Prinsip Pontryagin Minimum. Langkah-langkah yang harus dilakukan dalam tahap ini antara lain:

- Membentuk fungsi Hamiltonian,
- Menentukan persamaan *state* dan *costate*,
- Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi,
- Menentukan pengendali optimal.

Melakukan Simulasi dengan Menggunakan *Software* Matlab

Dalam tahap ini dicari solusi numeric dari permasalahan kendali optimal dengan memanfaatkan persamaan *state* dan *costate*, persamaan pengendali optimal serta kondisi-kondisi yang harus terpenuhi menggunakan *software* Matlab. Kemudian disimulasikan untuk melihat performansi grafik yang dihasilkan.

Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini dilakukan analisis terhadap hasil simulasi yang telah dilakukan pada tahap sebelumnya.

Penarikan Kesimpulan

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penarikan kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan mengenai kendali optimal dalam upaya mengurangi penyebaran penyakit malaria.

IV. Analisis dan Pembahasan

1. [Titik Kesetimbangan](#)
2. [Kestabilan Titik Kesetimbangan](#)
3. [Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal](#)
4. [Analisis Hasil Simulasi](#)

Titik Kesetimbangan

- Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Pada titik kesetimbangan bebas penyakit diasumsikan bahwa tidak ada populasi manusia dan populasi malaria yang terinfeksi. Artinya $I_{Hs} = I_{Hr} = I_{Vs} = I_{Vr} = 0$ dan $u_1 = u_2 = 0$. Sehingga diperoleh titik kesetimbangannya.

$$I_0 = \left(N_H, 0, 0, 0, \frac{\Lambda}{(\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}, \frac{\eta \Lambda}{\delta_V (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}, 0, 0 \right)$$

Titik Kestimbangan (lanjutan)

- Titik Kestimbangan Endemik Resisten

Pada titik kestimbangan endemik resisten diasumsikan bahwa tidak ada populasi manusia yang terinfeksi malaria sensitif dan populasi malaria yang sensitif terinfeksi oleh parasit *plasmodium*. Artinya $I_{Hs} = I_{Vs} = 0$ dan $u_1 = u_2 = 0$. Sehingga diperoleh titik kestimbangannya.

$$I_1^r = (S_H^*, 0, I_{Hr}^*, R_H^*, L_V^*, S_V^*, 0, I_{Vr}^*)$$

Titik Kesetimbangan (lanjutan)

Dengan:

$$S_H^* = \frac{N_H \delta_V (\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_r I_{Hr}^*) (\lambda_{Vr} I_{Hr}^* + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}{(\delta_H + \alpha) (\lambda_{Hr} \lambda_{Vr} I_{Hr}^* \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{Vr} I_{Hr}^* + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L))}$$

$$I_{Hr}^* = \frac{(C \delta_H N_H (\delta_H + \alpha) - AB \delta_V N_H)}{(AC + AB \lambda_{Vr} - C \alpha \gamma_r)}$$

$$R_H^* = \frac{\gamma_r I_{Hr}^*}{(\delta_H + \alpha)}$$

$$L_V^* = \frac{\Lambda}{(\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}$$

$$S_V^* = \frac{\eta \Lambda N_H}{(\lambda_{Vr} I_{Hr}^* + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}$$

$$I_{Vr}^* = \frac{\lambda_{Vr} I_{Hr}^*}{\delta_V} \frac{\eta \Lambda}{(\lambda_{Vr} I_{Hr}^* + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}$$

Dimana:

$$A = (\delta_H + \gamma_r) (\delta_H + \alpha)$$

$$B = N_H \delta_H \delta_V (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)$$

$$C = \lambda_{Vr} \eta \Lambda \lambda_{Hr}$$

Titik Kestimbangan (lanjutan)

- Titik Kestimbangan Endemik Sensitif

Pada titik kestimbangan endemik resisten diasumsikan bahwa tidak ada populasi manusia yang terinfeksi malaria resisten dan populasi malaria yang resisten terinfeksi parasit *plasmodium*. Artinya $I_{Hr} = I_{Vr} = 0$ dan $u_1 = u_2 = 0$. Sehingga diperoleh titik kestimbangannya.

$$I_1^S = (S_H^*, I_{Hs}^*, 0, R_H^*, L_V^*, S_V^*, I_{Vs}^*, 0)$$

Titik Kesetimbangan (lanjutan)

Dengan:

$$S_H^* = \frac{N_H \delta_V (\lambda_{VS} I_{HS}^* + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L) (\delta_H N_H (\delta_H + \alpha) + \alpha \gamma_S I_{HS}^*)}{(\delta_H + \alpha) (\lambda_{HS} \lambda_{VS} I_{HS} \eta \Lambda + N_H \delta_H \delta_V (\lambda_{VS} I_{HS}^* + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L))}$$

$$I_{HS}^* = \frac{C \delta_H N_H (\delta_H + \alpha) - AB \delta_V N_H}{(AC + AB \lambda_{VS} - C \alpha \gamma_S)}$$

$$R_H^* = \frac{\gamma_S I_{HS}^*}{(\delta_H + \alpha)}$$

$$L_V^* = \frac{\Lambda}{(\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}$$

$$S_V^* = \frac{\eta \Lambda N_H}{(\lambda_{VS} I_{HS}^* + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}$$

$$I_{VS}^* = \frac{\lambda_{VS} I_{HS} \eta \Lambda}{\delta_V (\lambda_{VS} I_{HS}^* + \delta_V N_H) (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)}$$

Dimana:

$$A = (\delta_H + \gamma_S) (\delta_H + \alpha)$$

$$B = N_H \delta_H \delta_V (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)$$

$$C = \lambda_{HS} \lambda_{VS} \eta \Lambda$$

Kestabilan Titik Keseimbangan

Untuk menentukan kestabilan titik keseimbangan, terlebih dahulu dicari matriks Jacobian. Misal didefinisikan:

$$A(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) = \delta_H N_H - \lambda_{Hs} \frac{I_{Vs}}{N_H} S_H - \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} S_H - \delta_H S_H + \alpha R_H$$

$$B(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) = \lambda_{Hs} \frac{I_{Vs}}{N_H} S_H - (\delta_H + \gamma_s) I_{Hs}$$

$$C(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) = \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} S_H - (\delta_H + \gamma_r) I_{Hr}$$

$$D(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) = \gamma_s I_{Hs} + \gamma_r I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H$$

$$E(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) = \Lambda - (\eta + \varepsilon_L + \delta_L) L_V$$

$$F(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) = \eta L_V - \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - \delta_V S_V$$

$$G(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) = \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - \delta_V I_{Vs}$$

$$H(S_H, I_{Hs}, I_{Hr}, R_H, L_V, S_V, I_{Vs}, I_{Vr}) = \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - \delta_V I_{Vr}$$

Kestabilan Titik Keseimbangan (lanjutan)

Secara umum matriks Jacobian dari fungsi nonlinear adalah:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial S_H} & \frac{\partial A}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial A}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial A}{\partial R_H} & \frac{\partial A}{\partial L_V} & \frac{\partial A}{\partial S_V} & \frac{\partial A}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial A}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial B}{\partial S_H} & \frac{\partial B}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial B}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial B}{\partial R_H} & \frac{\partial B}{\partial L_V} & \frac{\partial B}{\partial S_V} & \frac{\partial B}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial B}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial C}{\partial S_H} & \frac{\partial C}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial C}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial C}{\partial R_H} & \frac{\partial C}{\partial L_V} & \frac{\partial C}{\partial S_V} & \frac{\partial C}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial C}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial D}{\partial S_H} & \frac{\partial D}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial D}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial D}{\partial R_H} & \frac{\partial D}{\partial L_V} & \frac{\partial D}{\partial S_V} & \frac{\partial D}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial D}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial E}{\partial S_H} & \frac{\partial E}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial E}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial E}{\partial R_H} & \frac{\partial E}{\partial L_V} & \frac{\partial E}{\partial S_V} & \frac{\partial E}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial E}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial F}{\partial S_H} & \frac{\partial F}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial F}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial F}{\partial R_H} & \frac{\partial F}{\partial L_V} & \frac{\partial F}{\partial S_V} & \frac{\partial F}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial F}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial G}{\partial S_H} & \frac{\partial G}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial G}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial G}{\partial R_H} & \frac{\partial G}{\partial L_V} & \frac{\partial G}{\partial S_V} & \frac{\partial G}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial G}{\partial I_{Vr}} \\ \frac{\partial H}{\partial S_H} & \frac{\partial H}{\partial I_{Hs}} & \frac{\partial H}{\partial I_{Hr}} & \frac{\partial H}{\partial R_H} & \frac{\partial H}{\partial L_V} & \frac{\partial H}{\partial S_V} & \frac{\partial H}{\partial I_{Vs}} & \frac{\partial H}{\partial I_{Vr}} \end{pmatrix}$$

Kestabilan Titik Kesetimbangan (lanjutan)

Sehingga diperoleh matriks Jacobiannya adalah

$$J = \begin{pmatrix} -\lambda_{Hs} \frac{I_{Vs}}{N_H} - \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} - \delta_H & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{Hs} \frac{S_H}{N_H} & -\lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} \\ \lambda_{Hs} \frac{I_{Vs}}{N_H} & -(\delta_H + \gamma_s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Hs} \frac{S_H}{N_H} & 0 \\ \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} & 0 & -(\delta_H + \gamma_r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} \\ 0 & \gamma_s & \gamma_r & -(\delta_H + \alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\eta + \delta_L + \epsilon_L) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & \eta & -\lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} - \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} - \delta_V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} & -\delta_V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} & 0 & -\delta_V & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kestabilan Titik Keseimbangan (lanjutan)

Pada titik keseimbangan $I_0 = \left(N_H, 0, 0, 0, \frac{\Lambda}{(\eta + \epsilon_L + \delta_L)}, \frac{\eta \Lambda}{\delta_V (\eta + \epsilon_L + \delta_L)}, 0, 0 \right)$ didapatkan matriks Jacobiannya adalah

$$J(I_0) = \begin{pmatrix} -\delta_H & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & -\lambda_{Hs} \frac{S_H}{N_H} & -\lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} \\ 0 & -(\delta_H + \gamma_s) & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Hs} \frac{S_H}{N_H} & 0 \\ 0 & 0 & -(\delta_H + \gamma_r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_s & \gamma_r & -(\delta_H + \alpha) & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & -(\eta + \delta_L + \epsilon_L) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & -\delta_V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & -\delta_V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_V \end{pmatrix}$$

Kestabilan Titik Kesetimbangan (lanjutan)

Nilai eigen diperoleh dari $\det(J(I_0) - \lambda I) = 0$. Dengan J adalah matriks Jacobian, λ adalah nilai eigen dan I adalah matriks identitas. Sehingga diperoleh

$$\lambda_1 = -\delta_H < 0$$

$$\lambda_2 = (\delta_H + \gamma_s) \left(\frac{\lambda_{Hs} \lambda_{Vs} S_V S_H}{N_H^2 \delta_V (\delta_H + \gamma_s)} - 1 \right)$$

$$\lambda_3 = (\delta_H + \gamma_r) \left(\frac{\lambda_{Hs} \lambda_{Vr} S_V S_H}{N_H^2 \delta_V (\delta_H + \gamma_r)} - 1 \right)$$

$$\lambda_4 = -(\delta_H + \alpha) < 0$$

$$\lambda_5 = -(\eta + \varepsilon_L + \delta_L) < 0$$

$$\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = -\delta_V < 0$$

Nilai eigen λ_2 akan bernilai negatif jika $\frac{\lambda_{Hs} \lambda_{Vs} S_V S_H}{N_H^2 \delta_V (\delta_H + \gamma_s)} < 1$

Nilai eigen λ_3 akan bernilai negatif jika $\frac{\lambda_{Hs} \lambda_{Vr} S_V S_H}{N_H^2 \delta_V (\delta_H + \gamma_r)} < 1$

Kestabilan Titik Kesetimbangan (lanjutan)

Pada titik kesetimbangan $I_1^r = (S_H^*, 0, I_{Hr}^*, R_H^*, L_V^*, S_V^*, 0, I_{Vr}^*)$ diperoleh matriks Jacobiannya adalah

$$J(I_1^r) = \begin{pmatrix} -\lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} - \delta_H & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{Hs} \frac{S_H}{N_H} & -\lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} \\ 0 & -(\delta_H + \gamma_s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Hs} \frac{S_H}{N_H} & 0 \\ \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} & 0 & -(\delta_H + \gamma_r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} \\ 0 & \gamma_s & \gamma_r & -(\delta_H + \alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & -(\eta + \delta_L + \epsilon_L) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & \eta & -\lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} - \delta_V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & -\delta_V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} & 0 & 0 & -\delta_V \end{pmatrix}$$

Kestabilan Titik Kesetimbangan (lanjutan)

Nilai eigen diperoleh dari $\det(J(I_1^r) - \lambda I) = 0$. Dengan J adalah matriks Jacobian, λ adalah nilai eigen dan I adalah matriks identitas. Sehingga diperoleh

$$\lambda_1 = -\delta_H + \frac{\lambda_{Hr} I_{Vr} \left(\frac{\delta_H^2 + \delta_H(\gamma_r + \alpha)}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{N_H(\delta_H + \gamma_r) \left(-1 + \frac{\lambda_{Vr} \lambda_{Hr} S_V S_H \delta_V N_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \delta_V N_H) (\delta_H + \gamma_r)} \right)}$$

$$\lambda_2 = (\delta_H + \gamma_s) \left(\frac{\lambda_{Vs} \lambda_{Hs} S_V S_H}{N_H^2 (\delta_H + \gamma_s)} - 1 \right)$$

$$\lambda_3 = \left(\frac{(\delta_H + \gamma_s) (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \lambda_{Vr} N_H) + \lambda_{Hr} \lambda_{Vr}^2 I_{Hr} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \delta_V N_H)} \right) \left(\frac{\lambda_{Vr} \lambda_{Hr} S_V S_H (\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \lambda_{Vr} N_H))}{N_H^2 \left((\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \delta_V N_H) (\delta_H + \gamma_s) + \lambda_{Hr} \lambda_{Vr}^2 I_{Hr} S_V S_H) \right)} - 1 \right)$$

$$\lambda_4 = -(\delta_H + \alpha) < 0$$

$$\lambda_5 = -(\eta + \varepsilon_L + \delta_L) < 0$$

$$\lambda_6 = \delta_V \left(\frac{\lambda_{Vs} I_{Hs}}{N_H \delta_V} - 1 \right)$$

$$\lambda_7 = \lambda_8 = -\delta_V < 0$$

Kestabilan Titik Keseimbangan (lanjutan)

Nilai eigen λ_1 bernilai negatif jika $\frac{\lambda_{Vr}\lambda_{Hr}S_V S_H \delta_V N_H}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \delta_V N_H) (\delta_H + \gamma_r)} < 1$

Nilai eigen λ_2 bernilai negatif $\frac{\lambda_{Vs}\lambda_{Hs}S_V S_H}{N_H^2 (\delta_H + \gamma_s)} < 1$

Nilai eigen λ_3 bernilai negatif jika $\frac{\lambda_{Vr}\lambda_{Hr}S_V S_H (\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \lambda_{Vr} N_H))}{N_H^2 \left((\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vr} I_{Hr} + \delta_V N_H)) (\delta_H + \gamma_s) + \lambda_{Hr} \lambda_{Vr}^2 I_{Hr} S_V S_H \right)} < 1$

Nilai eigen λ_4 bernilai negative jika $\frac{\lambda_{Vs} I_{Hs}}{N_H \delta_V} < 1$

Kestabilan Titik Keseimbangan (lanjutan)

Pada titik keseimbangan $I_1^S = (S_H^*, I_{Hs}^*, 0, R_H^*, L_V^*, S_V^*, I_{Vs}^*, 0)$

Didapatkan matriks Jacobiannya adalah

$$J = \begin{pmatrix} -\lambda_{Hr} \frac{I_{Vs}}{N_H} - \delta_H & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & -\lambda_{Hs} \frac{S_H}{N_H} & -\lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} \\ \lambda_{Hr} \frac{I_{Vs}}{N_H} & -(\delta_H + \gamma_s) & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Hs} \frac{S_H}{N_H} & 0 \\ 0 & 0 & -(\delta_H + \gamma_r) & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} \\ 0 & \gamma_s & \gamma_r & -(\delta_H + \alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\eta + \delta_L + \epsilon_L) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & -\lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & \eta & -\lambda_{Vr} \frac{I_{Hs}}{N_H} - \delta_V & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{Vr} \frac{I_{Hs}}{N_H} & -\delta_V & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_V \end{pmatrix}$$

Kestabilan Titik Kesetimbangan (lanjutan)

Nilai eigen diperoleh dari $\det(J(I_1^S) - \lambda I) = 0$. Dengan J adalah matriks Jacobian, λ adalah nilai eigen dan I adalah matriks identitas. Sehingga diperoleh

$$\lambda_1 = -\delta_H + \frac{\lambda_{Hs} I_{Vs} \left(\frac{\delta_H^2 + \delta_H(\gamma_s + \alpha)}{(\delta_H + \alpha)} \right)}{N_H(\delta_H + \gamma_s) \left(-1 + \frac{\lambda_{Vs} \lambda_{Hs} S_V S_H \delta_V}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vs} I_{Hs} + \delta_V N_H) (\delta_H + \gamma_s)} \right)}$$
$$\lambda_2 = \left(\frac{(\delta_H + \gamma_s) (\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{Vs} I_{Hs})) + \lambda_{Hs} \lambda_{Vs}^2 I_{Hr} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{Vs} I_{Hs})} \right) \left(\frac{\lambda_{Vs} \lambda_{Hs} S_V S_H (\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{Vs} I_{Hs}))}{\delta_V N_H^2 \left((\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{Vs} I_{Hs})) (\delta_H + \gamma_s) + \lambda_{Hs} \lambda_{Vs}^2 S_V S_H \right)} - 1 \right)$$
$$\lambda_3 = (\delta_H + \gamma_r) \left(\frac{\lambda_{Vs} \lambda_{Hs} S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\delta_H + \gamma_r)} - 1 \right)$$
$$\lambda_4 = -(\delta_H + \alpha) < 0$$
$$\lambda_5 = -(\eta + \varepsilon_L + \delta_L) < 0$$
$$\lambda_6 = -\frac{\lambda_{Vs} I_{Hs}}{N_H} - \delta_V < 0$$
$$\lambda_7 = \lambda_8 = -\delta_V < 0$$

Kestabilan Titik Kesetimbangan (lanjutan)

Nilai eigen λ_1 bernilai negatif jika $\frac{\lambda_{Vs}\lambda_{Hs}S_V S_H \delta_V}{\delta_V N_H^2 (\lambda_{Vs} I_{Hs} + \delta_V N_H) (\delta_H + \gamma_s)} < 1$

Nilai eigen λ_2 bernilai negatif

jika $\frac{\lambda_{Vs}\lambda_{Hs}S_V S_H (\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{Vs} I_{Hs}))}{\delta_V N_H^2 \left((\delta_V N_H^2 (\delta_V N_H + \lambda_{Vs} I_{Hs})) (\delta_H + \gamma_s) + \lambda_{Hs} \lambda_{Vs}^2 S_V S_H \right)} < 1$

Nilai eigen λ_3 bernilai negatif jika $\frac{\lambda_{Vs}\lambda_{Hs}S_V S_H}{\delta_V N_H^2 (\delta_H + \gamma_r)} < 1$

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

Tujuan dari kendali optimal adalah untuk meminimalkan jumlah populasi manusia yang terinfeksi oleh malaria dan populasi malaria yang terinfeksi oleh parasit *plasmodium*. Dan diberikan fungsi objektifnya adalah

$$J(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} \left(I_{Hs} + I_{Hr} + I_{Vs} + I_{Vr} + \frac{c_1}{2} u_1^2 + \frac{c_2}{2} u_2^2 \right) dt$$

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

State:

$$\frac{dS_H}{dt} = \delta_H N_H - (1 - u_1 p_1) \lambda_{Hs} \frac{I_{Vs}}{N_H} S_H - (1 - u_1 p_2) \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} S_H - \delta_H S_H + \alpha R_H$$

$$\frac{dI_{Hs}}{dt} = (1 - u_1 p_1) \lambda_{Hs} \frac{I_{Vs}}{N_H} S_H - (\delta_H + \gamma_s + \mu_s u_1) I_{Hs}$$

$$\frac{dI_{Hr}}{dt} = (1 - u_1 p_2) \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} S_H - (\delta_H + \gamma_r + \mu_r u_1) I_{Hr}$$

$$\frac{dR_H}{dt} = (\gamma_s + \mu_s u_1) I_{Hs} + (\gamma_r + \mu_r u_1) I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H$$

$$\frac{dL_V}{dt} = \Lambda - (\eta - \varepsilon_L + \delta_L) L_V$$

$$\frac{dS_V}{dt} = \eta L_V - (1 - u_1 p_1) \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - (1 - u_1 p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - (\varepsilon_V u_2 + \delta_V) S_V$$

$$\frac{dI_{Vs}}{dt} = (1 - u_1 p_1) \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - (\varepsilon_V u_2 + \delta_V) I_{Vs}$$

$$\frac{dI_{Vr}}{dt} = (1 - u_1 p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - (\varepsilon_V u_2 + \delta_V) I_{Vr}$$

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

Dan kondisi batas

$$0 \leq u_1 \leq 1, \quad 0 \leq u_2 \leq 1$$

$$S_H(0) = S_{H0}$$

$$I_{Hs}(0) = I_{Hs0}$$

$$I_{Hr}(0) = I_{Hr0}$$

$$R_H(0) = R_{H0}$$

$$L_V(0) = L_{V0}$$

$$S_V(0) = S_{V0}$$

$$I_{Vs}(0) = I_{Vs0}$$

$$I_{Vr}(0) = I_{Vr0}$$

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

Hal pertama yang harus dilakukan adalah menentukan fungsi Hamiltonian, yaitu:

$$H(x(t), u(t), t, \lambda) = f(x(t), u(t), t) + \lambda g(x(t), u(t), t)$$
$$H = I_{Hs} + I_{Hr} + I_{Vs} + I_{Vr} + \frac{c_1}{2} u_1^2 + \frac{c_2}{2} u_2^2 + \sum_{i=0}^8 \lambda_i g_i$$

Dimana g_i adalah nilai ruas kanan dari persamaan *state*.

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

Kondisi Stasioner

- Untuk kendali optimal u_1^*

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$$

$$u_1(t) = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{c_1 N_H}$$

$$u_1^* = \begin{cases} 0, & u_1 \leq 0 \\ \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{c_1 N_H}, & 0 < u_1 < 1 \\ 1, & u_1 \geq 1 \end{cases}$$

Dimana:

$$\Delta_1 = p_1 \lambda_{Hs} I_{Vs} S_V (\lambda_2 - \lambda_1) + p_2 \lambda_{Hr} I_{Vr} S_H (\lambda_3 - \lambda_1)$$

$$\Delta_2 = p_1 \lambda_{Vs} I_{Hs} S_V (\lambda_7 - \lambda_6) + p_2 \lambda_{Vr} I_{Hs} S_V (\lambda_8 - \lambda_6)$$

$$\Delta_3 = \mu_s I_{Hs} N_H (\lambda_2 - \lambda_4) + \mu_r I_{Hr} N_H (\lambda_3 - \lambda_4)$$

Sehingga didapat:

$$u_1^* = \min \left(\max \left(\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}{c_1 N_H}, 0 \right), 1 \right)$$

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

Kondisi Stasioner

- Untuk kendali optimal u_2^*

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$$

$$u_2(t) = \frac{\varepsilon_V(\lambda_6 S_V + \lambda_7 I_{VS} + \lambda_8 I_{VR})}{c_2}$$
$$u_2^* = \begin{cases} 0, & u_2 \leq 0 \\ \frac{\varepsilon_V(\lambda_6 S_V + \lambda_7 I_{VS} + \lambda_8 I_{VR})}{c_2}, & 0 < u_2 < 1 \\ 1, & u_2 \geq 1 \end{cases}$$

Sehingga didapat:

$$u_2^* = \min \left(\max \left(\frac{\varepsilon_V(\lambda_6 S_V + \lambda_7 I_{VS} + \lambda_8 I_{VR})}{c_2}, 0 \right), 1 \right)$$

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

Persamaan *co-state*

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i(t)}$$

$$\dot{\lambda}_1 = (1 - u_1 p_1) \lambda_{HS} \frac{I_{Vs}}{N_H} (\lambda_1 - \lambda_2) + \delta_H \lambda_1 + (1 - u_1 p_2) \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} (\lambda_1 - \lambda_3)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -1 + \delta_H \lambda_2 + (\gamma_s + \mu_s u_1) (\lambda_2 - \lambda_4) + (1 - u_1 p_1) \lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} (\lambda_6 - \lambda_7)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -1 + \delta_H \lambda_3 + (\gamma_r + \mu_r u_1) (\lambda_3 - \lambda_4) + (1 - u_1 p_2) \lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} (\lambda_6 - \lambda_8)$$

$$\dot{\lambda}_4 = -\alpha \lambda_1 + (\delta_H + \alpha) \lambda_4$$

$$\dot{\lambda}_5 = (\eta + \varepsilon_L + \delta_L) \lambda_5 - \eta \lambda_6$$

$$\dot{\lambda}_6 = (\delta_V + \varepsilon_V u_2) \lambda_6 + (1 - u_1 p_1) \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} (\lambda_6 - \lambda_7) + (1 - u_1 p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} (\lambda_6 - \lambda_8)$$

$$\dot{\lambda}_7 = -1 + (\delta_V + \varepsilon_V u_2) \lambda_7 + (1 - u_1 p_1) \lambda_{HS} \frac{S_H}{N_H} (\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\dot{\lambda}_8 = -1 + (\delta_V + \varepsilon_V u_2) \lambda_8 + (1 - u_1 p_2) \lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} (\lambda_1 - \lambda_3)$$

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

Dengan mensubstitusikan u_1^* dan u_2^* pada persamaan *state* dan *co-state* akan didapatkan 16 sistem persamaan diferensial, yaitu:

$$S_H^* = \delta_H N_H - (1 - u_1^* p_1) \lambda_{HS} \frac{I_{Vs}}{N_H} S_H - (1 - u_1^* p_2) \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} S_H - \delta_H S_H + \alpha R_H$$

$$I_{HS}^* = (1 - u_1^* p_1) \lambda_{HS} \frac{I_{Vs}}{N_H} S_H - (\delta_H + \gamma_s + \mu_s u_1^*) I_{HS}$$

$$I_{Hr}^* = (1 - u_1^* p_2) \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} S_H - (\delta_H + \gamma_r + \mu_r u_1^*) I_{Hr}$$

$$R_H^* = (\gamma_s + \mu_s u_1^*) I_{HS} + (\gamma_r + \mu_r u_1^*) I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H$$

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

$$L_V^* = \Lambda - (\eta - \varepsilon_L + \delta_L)L_V$$

$$S_V^* = \eta L_V - (1 - u_1^* p_1) \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - (1 - u_1^* p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - (\varepsilon_V u_2^* + \delta_V) S_V$$

$$I_{Vs}^* = (1 - u_1^* p_1) \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - (\varepsilon_V u_2^* + \delta_V) I_{Vs}$$

$$I_{Vr}^* = (1 - u_1^* p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - (\varepsilon_V u_2^* + \delta_V) I_{Vr}$$

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

$$\dot{\lambda}_1^* = (1 - u_1^* p_1) \lambda_{Hs} \frac{I_{Vs}}{N_H} (\lambda_1 - \lambda_2) + \delta_H \lambda_1 + (1 - u_1^* p_2) \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} (\lambda_1 - \lambda_3)$$

$$\dot{\lambda}_2^* = -1 + \delta_H \lambda_2 + (\gamma_s + \mu_s u_1^*) (\lambda_2 - \lambda_4) + (1 - u_1^* p_1) \lambda_{Vs} \frac{S_V}{N_H} (\lambda_6 - \lambda_7)$$

$$\dot{\lambda}_3^* = -1 + \delta_H \lambda_3 + (\gamma_r + \mu_r u_1^*) (\lambda_3 - \lambda_4) + (1 - u_1^* p_2) \lambda_{Vr} \frac{S_V}{N_H} (\lambda_6 - \lambda_8)$$

$$\dot{\lambda}_4^* = -\alpha \lambda_1 + (\delta_H + \alpha) \lambda_4$$

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

$$\dot{\lambda}_5^* = (\eta + \varepsilon_L + \delta_L)\lambda_5 - \eta\lambda_6$$

$$\dot{\lambda}_6^* = (\delta_V + \varepsilon_V u_2^*)\lambda_6 + (1 - u_1^* p_1)\lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} (\lambda_6 - \lambda_7) + (1 - u_1^* p_2)\lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} (\lambda_6 - \lambda_8)$$

$$\dot{\lambda}_7^* = -1 + (\delta_V + \varepsilon_V u_2^*)\lambda_7 + (1 - u_1^* p_1)\lambda_{Hs} \frac{S_H}{N_H} (\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\dot{\lambda}_8^* = -1 + (\delta_V + \varepsilon_V u_2^*)\lambda_8 + (1 - u_1^* p_2)\lambda_{Hr} \frac{S_H}{N_H} (\lambda_1 - \lambda_3)$$

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

Pada simulasi ini akan dibuat 4 kondisi, yaitu:

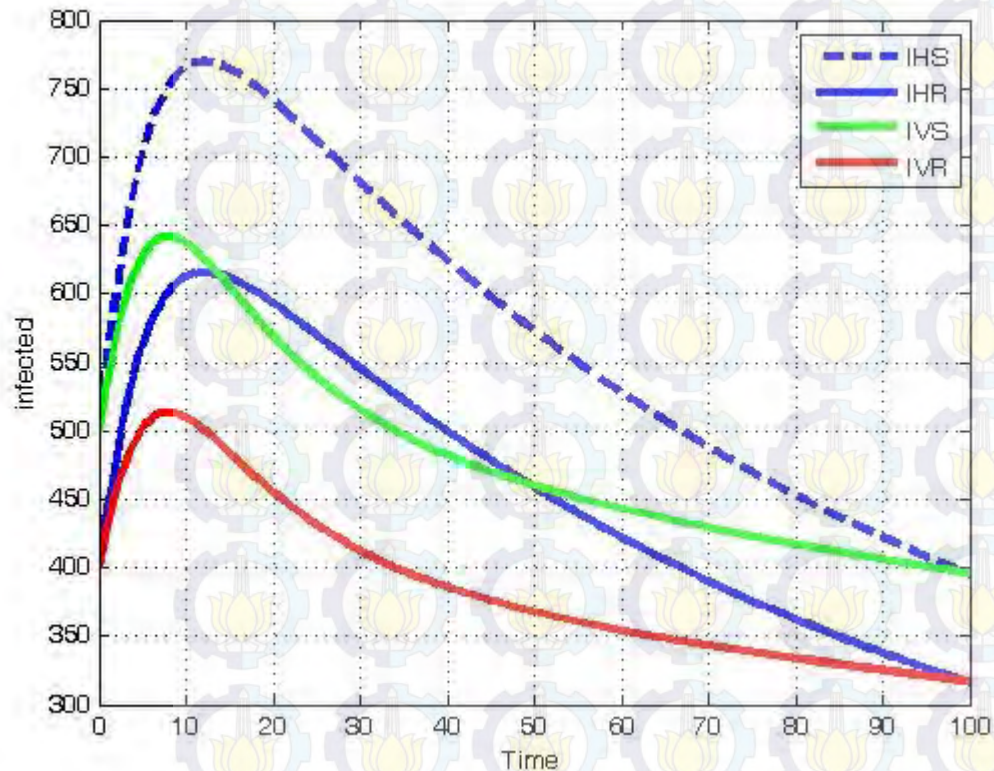
- Tanpa kendali u_1 dan u_2
- Tanpa kendali u_2
- Tanpa kendali u_1
- Dengan kendali u_1 dan u_2

Formulasi dan Penyelesaian Kendali Optimal

Parameter	Nilai	Parameter	Nilai	Parameter komputasi	Nilai
δ_H	0.00003914	λ_{Vs}	0.27	t_f	100
α	0.00274	λ_{Vr}	0.27	$S_H(0)$	700
μ_s	0.25	λ_{Hs}	0.3	$I_{Hs}(0)$	500
μ_s	0.048	λ_{Hr}	0.3	$I_{Hr}(0)$	400
Λ	1000	γ_s	0.01	$R_H(0)$	300
δ_H	0.4	γ_r	0.01	$L_V(0)$	1000
ε_L	0.4	p_1	0.3	$S_V(0)$	950
η	0.07142	p_2	0.6	$I_{Vs}(0)$	500
δ_V	0.07142	c_1	50	$I_{Vr}(0)$	400
ε_V	0.1	c_2	20		

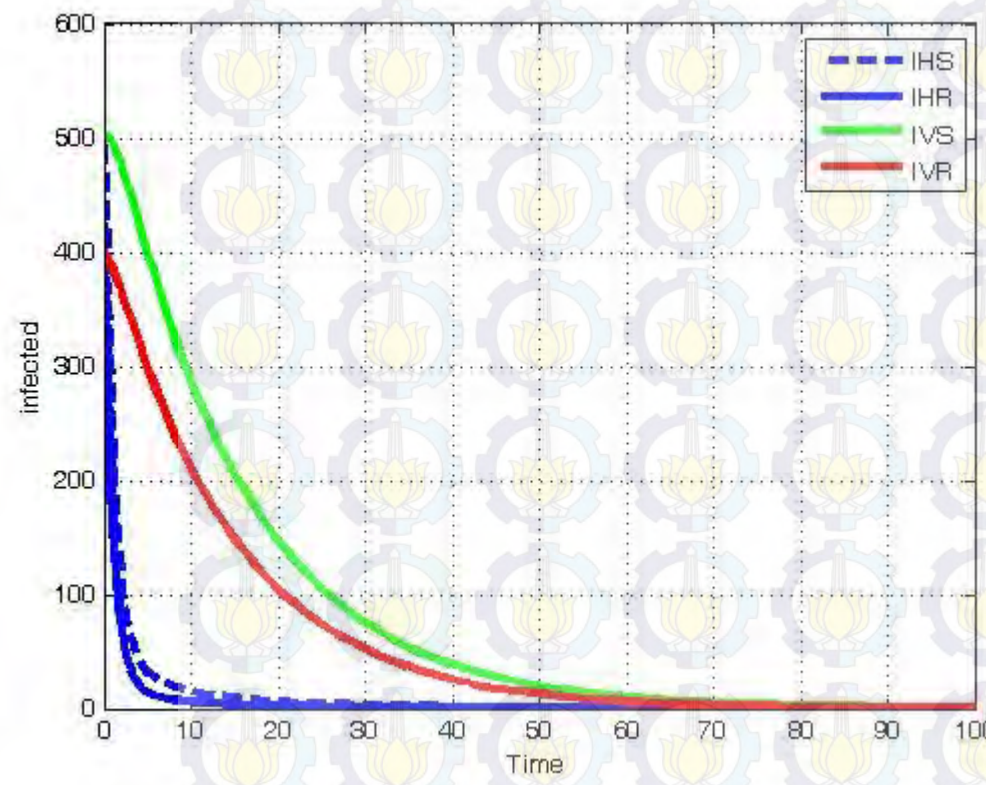
Analisis Hasil Simulasi

- Tanpa kendali u_1 dan u_2



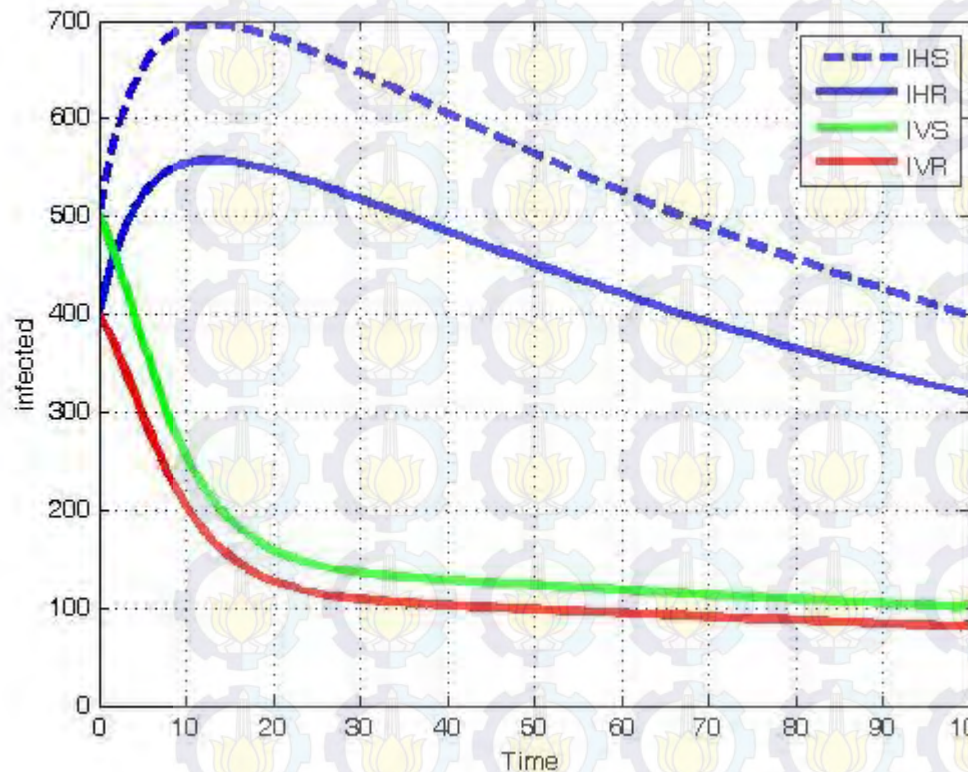
Analisis Hasil Simulasi

- Dengan kendali u_1



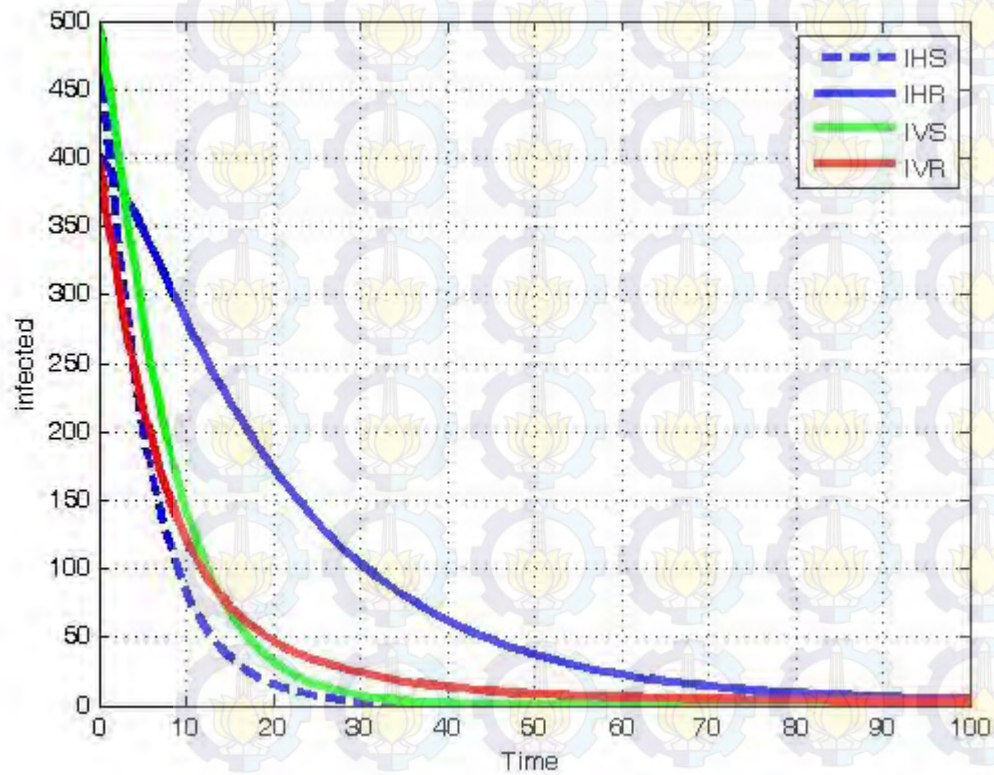
Analisis Hasil Simulasi

- Dengan kendali u_2



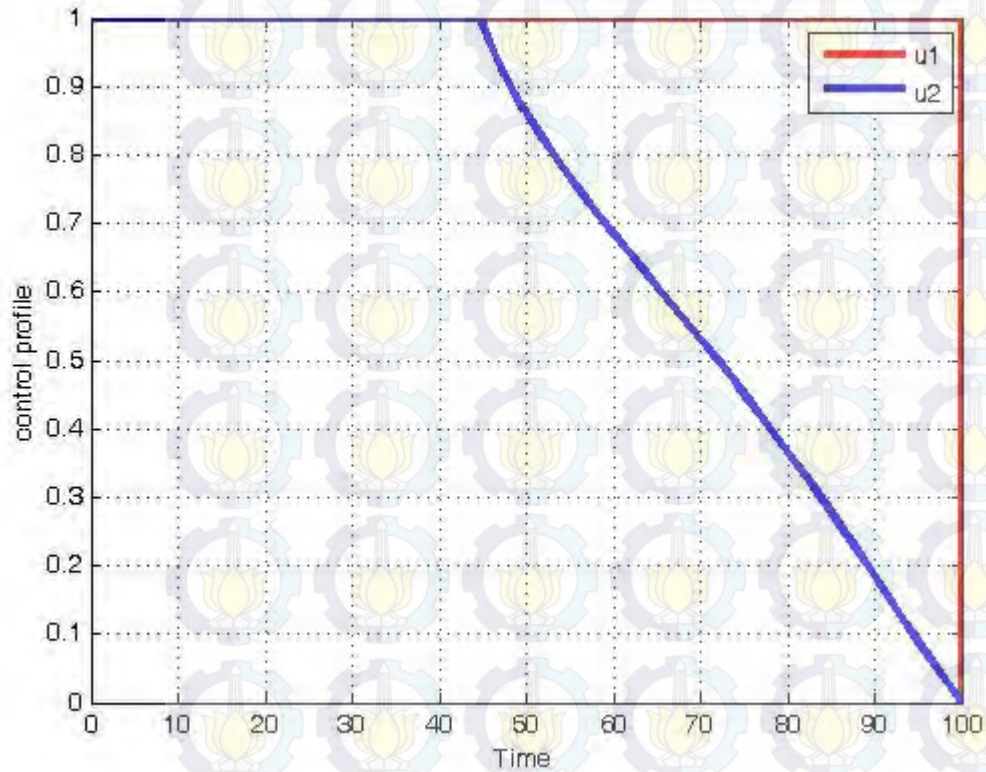
Analisis Hasil Simulasi

- Dengan kendali u_1 dan u_2



Analisis Hasil Simulasi

- Grafik pengendalian u_1 dan u_2



Kesimpulan dan Saran

- Kesimpulan
 - ✓ Dengan menerapkan teori kendali optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin diperoleh pengendalian optimal dalam melakukan upaya pengobatan ke masyarakat sebesar $u_1 = 1$ dan dalam melakukan upaya insektisida pada selang waktu $0 \leq t < 42$ sebesar $u_2 = 1$ dan pada selang waktu $t \geq 42$ mengalami penurunan sampai pada nilai 0 pada hari $t = 100$.

Kesimpulan dan Saran

- Kesimpulan

- ✓ Penurunan jumlah populasi manusia dan malaria yang terinfeksi sangat tinggi ketika diberikan pengendalian berupa pengobatan ke masyarakat. Namun adanya kenaikan jumlah populasi malaria yang rentan terinfeksi dapat memungkinkan timbul penyebaran malaria kembali. Oleh sebab itu, dengan diberikan pengendalian pengobatan ke masyarakat dan insektisida dapat mengurangi jumlah populasi yang terinfeksi dan mencegah timbulnya penyebaran malaria.

Kesimpulan dan Saran

- Kesimpulan

- ✓ Dengan melakukan upaya pengobatan ke masyarakat dan insektisida dapat meminimumkan jumlah populasi manusia dan nyamuk malaria yang terinfeksi. Didapatkan jumlah manusia yang terinfeksi malaria sensitif (I_{HS}) pada hari ke-100 sebesar 0,001519, jumlah populasi manusia yang terinfeksi malaria resisten (I_{Hr}) sebesar 4,529, jumlah populasi malaria yang sensitive terinfeksi parasit *plasmodium* (I_{Vs}) sebesar 0,004326, dan jumlah populasi malaria yang resisten terinfeksi parasit *plasmodium* sebesar 3,264.

Kesimpulan dan Saran

- Saran

Adapun saran dari penelitian ini adalah untuk penelitian selanjutnya dapat membandingkan hasil penyelesaian numerik antara Masalah Nilai Batas dengan Metode Beda Hingga. Selain itu, dapat dianalisis pula penurunan jumlah populasi yang terinfeksi pada periode tertentu dengan menambahkan faktor pengendalian atau upaya yang baru untuk mengurangi penyebaran penyakit malaria.

VI. Daftar Pustaka

- [1] Fatmawati., Tasman, H., 2015, “An Optimal Control Strategy to Reduce The Spread of Malaria Resistance”, **Mathematical Bioscience**, Vol. 262, Hal. 73-79.
- [2] Notobroto, H.B., Hidajah, A.T., 2009, “Faktor Risiko Penularan Malaria di Daerah Perbatasan”, **J. Penelit. Med. Eksakta**. Vol. 8, No. 2, Hal. 143-151.
- [3] Aneke, S.J., 2002, “Mathematical Modelling of Drug Resistant Malaria Parasites and Vector Populations”, **Mathematical Methods in the Applied Science.**, Vol. 25. Hal. 335-346.
- [4] Koella, J.C., Antia, R., 2003, “Epidemiological Models for The Spread of Anti-Malarial Resistance”, **Malaria Journal.**, Vol. 2, Article. 3.
- [5] Tasman, H., Soewono, E., Sidarto, K.A., Syafaruddin, D., Rogers, W.O., 2009, “A Model for Transmission of Partial Resistance to Anti-Malarial Drugs”, **Mathematical Bioscience.**, Vol. 6, No. 3, Hal. 649-661.
- [6] Okosun, K.O., Makinde, O.D., 2011, “Modelling The Impact of Drug Resistance in Malria Transmission and Its Optimal Control Analysis”, **International Journal of the Physical Sciences**, Vol. 6, Hal. 6479-6487.
- [7] Subiono, 2013, **Sistem Linear dan Kontrol Optimal**. Surabaya. Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [8] Naidu, S.D., 2002, **Optimal Control System**, USA: CRC Press LLC..



Terima Kasih

II. Tinjauan Pustaka

1. [Model Matematika](#)
2. [Kestabilan Sistem](#)
3. [Teori Kendali Optimal](#)

Model Matematika

Model Matematika upaya mengurangi penyebaran penyakit malaria [2]:

$$\begin{aligned}\frac{dS_H}{dt} &= \delta_H N_H - (1 - u_1 p_1) \lambda_{Hs} \frac{I_{Vs}}{N_H} S_H - (1 - u_1 p_2) \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} S_H - \delta_H S_H + \alpha R_H \\ \frac{dI_{Hs}}{dt} &= (1 - u_1 p_1) \lambda_{Hs} \frac{I_{Vs}}{N_H} S_H - (\delta_H + \gamma_s + \mu_s u_1) I_{Hs} \\ \frac{dI_{Hr}}{dt} &= (1 - u_1 p_2) \lambda_{Hr} \frac{I_{Vr}}{N_H} S_H - (\delta_H + \gamma_r + \mu_r u_1) I_{Hr} \\ \frac{dR_H}{dt} &= (\gamma_s + \mu_s u_1) I_{Hs} + (\gamma_r + \mu_r u_1) I_{Hr} - (\delta_H + \alpha) R_H \\ \frac{dL_V}{dt} &= \Lambda - (\eta - \varepsilon_L + \delta_L) L_V\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{dS_V}{dt} &= \eta L_V - (1 - u_1 p_1) \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - (1 - u_1 p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - (\varepsilon_V u_2 + \delta_V) S_V \\ \frac{dI_{Vs}}{dt} &= (1 - u_1 p_1) \lambda_{Vs} \frac{I_{Hs}}{N_H} S_V - (\varepsilon_V u_2 + \delta_V) I_{Vs} \\ \frac{dI_{Vr}}{dt} &= (1 - u_1 p_2) \lambda_{Vr} \frac{I_{Hr}}{N_H} S_V - (\varepsilon_V u_2 + \delta_V) I_{Vr}\end{aligned}$$

dengan $0 \leq p_1 + p_2 \leq 1$ dan $0 \leq u_i \leq 1, i = 1, 2$

Kestabilan Sistem

Stabilitas sistem dapat ditentukan dari nilai eigen:

- Sistem dikatakan stabil jika dan hanya jika akar karakteristiknya adalah real dan negatif
- Sistem dikatakan stabil asimtotis jika akar karakteristiknya real negatif atau mempunyai bagian real negatif
- Sistem dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika akar karakteristiknya adalah real positif atau mempunyai paling sedikit satu akar karakteristik dengan bagian real positif

Teori Kendali Optimal

Prosedur menyelesaikan masalah kendali optimal dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin adalah sebagai berikut:

Diberikan persamaan *state* pada persamaan (2.1)

Diberikan *index performance*

$$J(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} \left(I_{H_s} + I_{H_r} + I_{V_s} + I_{V_r} + \frac{c_1}{2} u_1^2 + \frac{c_2}{2} u_2^2 \right) dt$$

Dan kondisi batas $x(0) = (700, 500, 400, 300, 1000, 950, 500, 400)$
dan $x(t_f) = x_f$ bebas

Teori Kendali Optimal (lanjutan)

Langkah-langkah penyelesaiannya adalah:

- Langkah 1

Bentuk fungsi Hamiltonian yang disimbolkan H , yaitu:

$$\begin{aligned} H &= H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) \\ &= H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}'(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{aligned}$$

Dengan tanda ' menyatakan suatu transpose.

Teori Kendali Optimal (lanjutan)

- Langkah 2

Minimumkan H terhadap $\mathbf{u}(t)$ dengan cara:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}(t)} = 0$$

sehingga diperoleh kondisi stasioner $\mathbf{u}^*(t)$

Teori Kendali Optimal (lanjutan)

- Langkah 3

Dengan menggunakan $\mathbf{u}^*(t)$ yang telah dihasilkan pada langkah 2, akan didapatkan fungsi Hamiltonian baru yang optimal, H^* , yaitu:

$$H^* = H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) \leq H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t)$$

Teori Kendali Optimal (lanjutan)

- Langkah 4

Selesaikan $2n$ persamaan, dengan n adalah jumlah variable keadaan:

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda}$$

Dan persamaan *costate* yaitu:

$$\dot{\lambda}^*(t) = \frac{\partial H^*}{\partial x}$$

Dengan kondisi batas diberikan oleh keadaan awal dan keadaan akhir yang disebut *transversality*.

Kondisi batas secara umum yaitu:

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{t_f} \delta t_f + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^* \right)_{*t_f} \delta x_f = 0$$

Teori Kendali Optimal (lanjutan)

- Langkah 5

Substitusi hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4 kedalam persamaan $\mathbf{u}^*(t)$ pada langkah 2 untuk mendapatkan kendali optimal yang dicari.

Adapun sistem yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah waktu akhir ditentukan dan *state* pada waktu akhir tidak ditentukan. Dalam sistem tersebut, karena t_f ditentukan maka δt_f bernilai nol karena $x(t_f)$ tidak ditentukan maka δx_f bernilai sebarang, sehingga batas untuk sistem ini adalah [8]:

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^* \right) &= 0 \\ \lambda^*(t_f) &= \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_*^{t_f} \end{aligned}$$