TUGAS AKHIR – KM184801

DESAIN KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DIFTERI MENGGUNAKAN METODE PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN

LINTANG HAYU NUR AFNANI
NRP 061117 4000 0036

Dosen Pembimbing
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA 2021

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

TUGAS AKHIR – KM184801

DESAIN KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DIFTERI MENGGUNAKAN METODE PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN

LINTANG HAYU NUR AFNANI
NRP 061117 4000 0036

Dosen Pembimbing
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA 2021

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

FINAL PROJECT – KM184801

OPTIMAL CONTROL DESIGN OF DIPHTHERIA DISEASE SPREAD MODEL USING PONTRYAGIN MINIMUM PRINCIPLE METHOD

LINTANG HAYU NUR AFNANI
NRP 061117 4000 0036

Supervisor
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE AND DATA ANALYTICS
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA 2021

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

LEMBAR PENGESAHAN

Desain Kendali Optimal pada Model Penyebaran Penyakit DifteriMenggunakan Metode Prinsip Minimum Pontryagin

Optimal Control Design of Diphtheria Disease Spread Model UsingPontryagin Minimum Principle Method

Tugas Akhir

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika
Pada bidang studi Analisis dan Aljabar
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
Lintang Hayu Nur Afnani
NRP: 06111740000036

Menyetujui,

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si
19830517 200812 1 003

Mengetahui,
Kepala Departemen Matematika
FSAD ITS

Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001
Surabaya, 22 Agustus 2021

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DESAIN KENDALI OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT DIFTERI MENGGUNAKAN METODE PRINSIP MINIMUM PONTRYAGIN

Nama Mahasiswa	:	Lintang Hayu Nur Afnani
NRP	:	06111740000036
Departemen	:	Matematika
Dosen Pembimbing	:	Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

Abstrak

Difteri merupakan penyakit menular berbahaya yang disebabkan oleh bakteri *Corynebacterium diphtheriae*. Meskipun demikian, difteri dapat dicegah dengan imunisasi atau vaksinasi. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini dilakukan desain kendali pada model penyebaran penyakit difteri menggunakan model *SVIR* dengan variabel kendali berupa pencegahan (penyuluhan imunisasi) dan pengobatan terhadap individu yang terinfeksi yang bertujuan untuk mengoptimalkan proporsi individu yang divaksinasi serta mengurangi banyaknya individu yang terinfeksi. Permasalahan kendali optimal tersebut diselesaikan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin untuk menemukan solusi secara analitik dan metode Runge-Kutta orde 4 untuk menyelesaikan sistem persamaan secara numerik. Hasil simulasi numerik menunjukkan menurunnya jumlah individu yang terinfeksi penyakit difteri setelah diberikan kendali berupa penyuluhan imunisasi dan pengobatan dengan persentase reduksi sebesar 100% selama 60 hari.

Kata Kunci : *Difteri, Model SVIR, Prinsip Minimum Pontryagin, Runge-Kutta*

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

OPTIMAL CONTROL DESIGN OF DIPHTHERIA DISEASE SPREAD MODEL USING PONTRYAGIN MINIMUM PRINCIPLE METHOD

Name	:	Lintang Hayu Nur Afnani
Student Number	:	06111740000036
Department	:	Mathematics
Supervisor	:	Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si

Abstract

Diphtheria is a dangerous infectious disease caused by the bacterium Corynebacterium diphtheriae. However, diphtheria can be prevented by immunization or vaccination. Therefore, in this final project, a control design was carried out on the diphtheria spread model using SVIR models with control variables in the form of prevention (immunization campaign) and treatment of infected individuals to optimize the proportion of individuals who were vaccinated and reduce the number of infected individuals. The optimal control problem is solved using the Pontryagin Minimum Principle method to find a solution analytically and the Runge-Kutta 4th-order method to solve the system of equations numerically. The results of numerical simulations showed a decrease in the number of individuals infected with diphtheria after providing controls in the form of immunization campaign and treatment with a reduction percentage of 100% for 60 days.

Keywords: *Diphtheria, SVIR Models, Pontryagin Minimum Principle, Runge-Kutta*

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'aalamiin, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan segala rahmat, petunjuk, serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul :

"Desain Kendali Optimal Pada Model Penyebaran Penyakit Difteri Menggunakan Metode Prinsip Minimum Pontryagin".

Selama proses penyusunan Tugas Akhir ini, penulis dapat menyelesaikan dengan baik dan lancar tidak lepas dari adanya bantuan serta masukan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan penuh hormat, ketulusan, dan rendah hati, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Allah SWT yang telah menuntun penulis untuk terus berusaha dan bersyukur sehingga dapat mengenyam pendidikan perguruan tinggi dan menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Subchan, Ph.D selaku Kepala Departemen Matematika FSAD ITS yang telah memberi dukungan selama perkuliahan.
3. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing yang telah memberikan segala bimbingan dan motivasi selama mengerjakan Tugas Akhir ini.
4. Dr. Hariyanto, M.Si, Dr. Dra. Rinurwati, M.Si, dan Subchan, Ph.D selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan masukan.
5. Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si, MT selaku Sekretaris Departemen Bidang Akademik Program Studi Sarja Departemen Matematika FSAD ITS yang telah menyediakan fasilitas, serta arahan akademik untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
6. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si selaku dosen wali yang telah membantu dan mendukung penulis selama menempuh perkuliahan di ITS.

7. Seluruh Bapak dan Ibu dosen serta staff Tata Usaha Departemen Matematika ITS yang telah memberikan ilmu dan pengetahuan serta fasilitas yang menunjang perkuliahan.
8. Orang tua serta adik kandung penulis, Ibu Tri Asih Yuliani, Bapak Eko Hadi Purnomo dan adik Khalishah Hayu Dua atas do'a, nasehat, kasih sayang, dukungan, dan semangat yang selalu diberikan kepada penulis.
9. Teman seperjuangan penulis, Annisa (Kirana, Erlyne, Lia), Ngudel *Beach* Malang (Nabila, Rani, Ria, Azizah, Dindao, Arin), Bismillah Sukses TA (Fira, Sindy, Mega, Slati) serta teman-teman MOBIUS yang selalu memberikan semangat, motivasi, dan mendengar keluh kesah penulis.
10. Semua pihak yang belum disebutkan yang telah memberikan dukungan dan membantu dalam keberhasilan penulis baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.
11. Terakhir untuk diri saya sendiri karena sampai akhir tidak menyerah dalam menyelesaikan proses penyusunan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari apabila pembuatan Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan, besar harapan dari penulis untuk menerima kritik dan saran yang berguna untuk perbaikan di masa mendatang. Serta tidak lupa penulis memohon maaf apabila terdapat banyak kekurangan dalam laporan yang telah penulis susun. Atas perhatian dan dukungannya penulis sampaikan ucapan terima kasih.

Nganjuk, Juli 2021

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL ..... **iii**
TITLE PAGE ..... **v**
LEMBAR PENGESAHAN ..... **vii**
ABSTRAK ..... **ix**
ABSTRACT ..... **xi**
KATA PENGANTAR ..... **xiii**
DAFTAR ISI ..... **xv**
DAFTAR TABEL ..... **xvii**
DAFTAR GAMBAR ..... **xix**
DAFTAR SIMBOL ..... **xxi**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Batasan Masalah 3
1.4 Tujuan 4
1.5 Manfaat 4
1.6 Sistematika Penulisan 5
BAB II TINJAUAN PUSTAKA **7**
2.1 Penelitian Terdahulu 7
2.2 Model Penyebaran Penyakit Difteri 8
2.3 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) 10
2.4 Kendali Optimal 11
2.5 Prinsip Minimum Pontryagin 12
2.6 Metode Runge-Kutta Orde Empat 14
BAB III METODOLOGI PENELITIAN **17**
3.1 Tahap Penelitian 17
3.2 Diagram Alur 19
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN **21**
4.1 Model Penyebaran Penyakit Difteri Tanpa Kendali ... 21
4.2 Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) 22
4.3 Model Penyebaran Penyakit Difteri dengan Kendali .. 23

4.4 Perumusan Masalah Kendali Optimal 26
4.5 Penyelesaian Masalah Kendali Optimal 28
4.6 Penyelesaian Numerik.....32
4.7 Analisis dan Hasil Simulasi Numerik 40
4.7.1 Simulasi Numerik Ketika $c_1 > c_2$ 42
4.7.2 Simulasi Numerik Ketika $c_1 = c_2$ 45
4.7.3 Simulasi Numerik Ketika $c_1 < c_2$ 47
BAB V PENUTUP 55
5.1 Kesimpulan.....55
5.2 Saran 56
DAFTAR PUSTAKA 57
LAMPIRAN.....61
BIODATA PENULIS 69

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Variabel Model Penyebaran Penyakit Difteri 9
Tabel 2.2 Parameter Model Penyebaran Penyakit Difteri... 9
Tabel 4.1 Variabel Model Penyebaran Penyakit Difteri dengan Kendali.....25
Tabel 4.2 Parameter Model Penyebaran Penyakit Difteri dengan Kendali.....25
Tabel 4.3 Nilai Awal Variabel Model Penyebaran Penyakit Difteri.....41
Tabel 4.4 Nilai Awal Parameter Model Penyebaran Penyakit Difteri 41
Tabel 4.5 Hasil Fungsi Tujuan 50

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Diagram Alur.....19
Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Difteri.....21
Gambar 4.2 Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Difteri dengan Kendali u_1 dan u_2 ..24
Gambar 4.3 Grafik Jumlah Individu Ketika $c_1 > c_2$
(a) Jumlah Individu Sehat namun Rentan Terinfeksi 42
(b) Jumlah Individu Tervaksinasi 43
(c) Jumlah Individu Terinfeksi 43
(d) Jumlah Individu Sembuh 44
Gambar 4.4 Grafik Jumlah Individu Ketika $c_1 = c_2$
(a) Jumlah Individu Sehat namun Rentan Terinfeksi 45
(b) Jumlah Individu Tervaksinasi 45
(c) Jumlah Individu Terinfeksi 46
(d) Jumlah Individu Sembuh 46
Gambar 4.5 Grafik Jumlah Individu Ketika $c_1 < c_2$
(a) Jumlah Individu Sehat namun Rentan Terinfeksi 48
(b) Jumlah Individu Tervaksinasi 48
(c) Jumlah Individu Terinfeksi 49
(d) Jumlah Individu Sembuh 49
Gambar 4.6 Grafik tingkat pemberian kendali optimal berupa penyuluhan imunisasi/vaksinasi.....51
Gambar 4.7 Grafik tingkat pemberian kendali optimal berupa pengobatan 52

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

DAFTAR SIMBOL

S : Jumlah individu sehat namun rentan terinfeksi penyakit
V : Jumlah individu yang tervaksinasi
I : Jumlah individu yang terinfeksi penyakit
R : Jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit
N : Total populasi individu
θ : *Rate* kelahiran individu
μ : *Rate* kematian alami individu
β : *Rate* kontak individu terinfeksi dengan individu sehat namun rentan ternifeksi penyakit
α : *Rate* vaksinasi individu
σ : *Rate* efektivitas vaksin
δ : *Rate* kegagalan vaksin
γ : *Rate* kesembuhan individu
η : *Rate* kematian individu karena penyakit
u_1 : Kendali pencegahan melalui penyuluhan imunisasi atau vaksinasi
u_2 : Kendali berupa pengobatan terhadap individu yang terinfeksi
c_1 : bobot biaya pada kendali penyuluhan imunisasi atau vaksinasi
c_2 : bobot biaya pada kendali pengobatan

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai beberapa hal yang melatar-belakangi permasalahan dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun ke dalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya ditunjukkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang ingin dicapai serta manfaat yang diperoleh dari Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Penyakit difteri merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Corynebacterium diphteriae* yang menginfeksi tenggorokan dan saluran udara bagian atas, dan menghasilkan racun yang mempengaruhi organ lain. Penyakit ini menyebar melalui kontak fisik langsung, atau melalui pernapasan di udara yang mengandung sekresi dari penderita yang batuk atau bersin. Apabila tidak dicegah dan ditangani, penyakit difteri dapat menyebabkan kematian ketika menyerang orang yang tidak mempunyai kekebalan, terutama pada anak-anak (1-10 tahun)[1].

Pada tahun 2018, Indonesia merupakan negara keempat di dunia dengan kasus difteri terbanyak yaitu 1.386 kasus dengan jumlah kematian sebesar 29 kasus. Sedangkan pada tahun 2019, Indonesia menduduki posisi kelima di dunia dengan kasus difteri terbanyak yaitu 529 kasus[2]. Kasus difteri pada tahun 2019 menyebar di hampir semua wilayah di Indonesia dengan jumlah kematian sebanyak 23 kasus dan *CFR (Case Fatality Rate)* sebesar 4,35%. Jumlah kasus difteri tahun 2019 mengalami penurunan yang cukup signifikan jika dibandingkan dengan tahun 2018, tetapi *CFR* pada tahun 2019 meningkat sebesar 2,26% dari tahun sebelumnya[1].

Pemodelan matematika merupakan ilmu matematika yang dapat merancang pengendalian masalah-masalah yang berkaitan dengan ilmu kesehatan salah satunya penyebaran penyakit menular termasuk penyebaran penyakit difteri. Penelitian tentang model matematika terhadap penyebaran penyakit difteri telah dilakukan sebelumnya menggunakan model *MSEIR*[3]. Pengembangan model *SIQR* pada penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi juga telah diusulkan oleh Puspita dkk.[4]. Selain itu, kendali optimal penyebaran penyakit difteri dengan pencegahan dan pengobatan menggunakan model *SEIQR* diusulkan oleh Izzati dkk.[5]. Model yang akurat dapat digunakan untuk mengendalikan penyebaran penyakit menular secara efektif. Pengendalian penyebaran penyakit difteri dapat dilakukan dengan tindakan pencegahan berupa penyuluhan imunisasi untuk mengoptimalkan proporsi individu yang divaksinasi serta melakukan pengobatan pada invidu yang terinfeksi sehingga invidu memiliki kekebalan tubuh yang lebih baik. Oleh karena itu, untuk mengetahui penyebaran penyakit, diperlukan suatu model matematika yang dapat merepresentasikan permasalahan yang terjadi untuk mencegah penyebaran penyakit tersebut.

Dalam Tugas Akhir ini, digunakan model matematika yang ditulis oleh Ibra Aryani dan Purnami Widyaningsih pada tahun 2020 yang berjudul “Model *Susceptible Vaccinated Infected Recovered (SVIR)* dan Penerapannya Pada Penyakit Difteri di Indonesia”[6]. Model tersebut telah dilengkapi dengan dua variabel kendali yaitu pencegahan berupa penyuluhan imunisasi dan pengobatan terhadap individu yang terinfeksi. Metode Prinsip Minimum Pontryagin diterapkan untuk menyelesaikan masalah kendali optimal secara analitik. Selanjutnya masalah kendali optimal

akan diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Sehingga kendali optimal dapat mengurangi banyaknya individu yang terinfeksi serta meminimalkan penyebaran penyakit difteri.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, diperoleh beberapa permasalahan yang akan dibahas dalam Tugas Akhir ini yaitu sebagai berikut:

1. Bagaimana desain kendali optimal pada model penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh dua variabel kendali menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin?
2. Bagaimana perbandingan hasil simulasi model penyebaran penyakit difteri sebelum dan setelah diberikan kendali optimal?

1.3 Batasan Masalah

Batasan-batasan masalah pada Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Kendali yang digunakan pada model penyebaran penyakit difteri ada dua yaitu pencegahan (penyuluhan imunisasi) dan pengobatan.
2. Model matematika yang digunakan dalam Tugas Akhir ini berdasarkan jurnal “Model *Susceptible Vaccinated Infected Recovered (SVIR)* dan Penerapannya Pada Penyakit Difteri di Indonesia”[6].
3. Penyelesaian masalah kendali optimal menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin.
4. Simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4.

1.4 Tujuan

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah tersebut, tujuan yang diharapkan dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi desain kendali optimal pada model penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh dua variabel kendali menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin.
2. Mengetahui perbandingan hasil simulasi pada model penyebaran penyakit difteri sebelum dan setelah diberikan kendali optimal.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat yang diharapkan dari Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai kendali optimal pada model penyebaran penyakit difteri sehingga dapat mengurangi banyaknya individu yang terinfeksi penyakit difteri.
2. Sebagai referensi solusi terkait penerapan teori kendali optimal dalam upaya pengendalian penyebaran penyakit difteri.
3. Memberikan wawasan terkait pengendalian penyebaran penyakit difteri.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar lebih tertata dan mdah dipahami, penulis menggunakan sistematika penulisan dalam Tugas Akhir ini yang terdiri dari lima bab yaitu:

1. BAB I : PENDAHULUAN
   Bab ini menjelaskan gambaran umum dari Tugas Akhir yang berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, serta sistematika penulisan.
2. BAB II : TINJAUAN PUSTAKA
   Bab ini menjelaskan tentang tinjauan pustaka dan dasar teori yang akan mendukung penulisan Tugas Akhir ini yaitu penelitan-penelitian sebelumnya, model penyebaran penyakit difteri, bilangan reproduksi dasar (R_0), teori kendali optimal, metode prinsip minimum pontryagin, dan metode Runge-Kutta orde empat.
3. BAB III : METODOLOGI PENELITIAN
   Bab ini menjelaskan tentang langkah-langkah sistematis yang digunakan dalam menyelesaikan masalah Tugas Akhir serta diagram alur dalam penyelesaian Tugas Akhir.
4. BAB IV : ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Bab ini menjelaskan tentang deskripsi model penyebaran penyakit difteri, penambahan variabel kendali, dan mencari solusi kendali optimal dari model dimana penyelesaiannya menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin serta dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.
5. BAB V : PENUTUP
   Bab ini menjelaskan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan tentang tinjauan pustaka dan dasar teori yang akan digunakan dalam Tugas Akhir ini. Bagian pertama akan diuraikan tentang penelitan-penelitian sebelumnya yang menjadi referensi dari Tugas Akhir. Lalu, akan dijelaskan mengenai model penyebaran penyakit difteri, bilangan reproduksi dasar (R_0), teori kendali optimal, metode Prinsip Minimum Pontryagin, dan metode Runge-Kutta orde empat.

2.1 Penelitian Terdahulu

Penulisan Tugas Akhir ini merujuk pada beberapa penelitian terdahulu yang sesuai dengan topik yang diambil. Penelitian tentang model matematika terhadap penyebaran penyakit difteri telah dilakukan sebelumnya, salah satunya adalah tugas akhir yang ditulis oleh Unik Novita Wulandari yang berjudul "Analisis Model Epidemik *MSEIR* Pada Penyebaran Penyakit Difteri" pada tahun 2013. Beliau menjelaskan model matematika penyebaran penyakit difteri dalam 5 kelompok individu yaitu *Maternal antibodies, Susceptible, Exposed, Infected, Recovered* [3]. Puspita dkk, pada tahun 2017 dalam penelitian yang berjudul "Pemodelan Matematika pada Penyebaran Penyakit Difteri dengan Pengaruh Karantina dan Vaksinasi" menjelaskan model matematika penyebaran penyakit difteri dalam 4 kelompok individu yaitu *Susceptible, Infected, Quarantined, Recovered* [4]. Selain itu, kendali optimal penyebaran penyakit difteri dengan pencegahan dan pengobatan menggunakan model *SEIQR* diusulkan oleh Izzati dkk pada penelitian yang

berjudul "*Optimal Control of Diphtheria Epidemic Model with Prevention and Treatment"* pada tahun 2020[5].

Jurnal yang ditulis oleh Ibra Aryani dan Purnami Widyaningsih yang berjudul "Model *Susceptible Vaccinated Infected Recovered (SVIR)* dan Penerapannya Pada Penyakit Difteri di Indonesia" pada tahun 2020 mengembangkan model *SIR* menjadi model *SVIR* dengan menambahkan kelompok individu tervaksinasi (*Vaccinated)*. Kemudian model tersebut diterapkan pada penyakit difteri di Indonesia dengan menggunakan data tahunan yang diperoleh dari Pusat Data dan Informasi Kementerian Kesehatan RI dan *World Bank* pada tahun 2008-2018 untuk mengestimasi parameter model. Dan juga dilakukan simulasi numerik untuk menunjukkan bahwa penyakit dapat diminimalkan[6]. Penelitian tersebut menjadi acuan utama dalam tugas akhir ini, dengan menggunakan model penyebaran penyakit difteri yang tujuannya agar dapat mengendalikan penyebaran penyakit difetri yang menyebar secara efektif pada manusia.

2.2 Model Penyebaran Penyakit Difteri

Model matematika yang diusulkan meninjau satu populasi, yaitu populasi manusia. Populasi manusia dibagi menjadi empat kelompok individu. Model ini dirumuskan pada penyebaran penyakit difteri dalam bentuk sistem persamaan non linier orde satu. Berikut ini adalah model matematika dari penyebaran penyakit difteri [6]:

$$\frac{dS}{dt} = \theta N - \mu S - \beta \frac{SI}{N} - \alpha S + \sigma V \tag{2.1}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\mu V + \alpha S - \sigma V - \delta \frac{VI}{N} \tag{2.2}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\mu I + \beta \frac{SI}{N} - \gamma I - \eta I + \delta \frac{VI}{N} \tag{2.3}$$

$$\frac{dR}{dt} = -\mu R + \gamma I \tag{2.4}$$

Dengan syarat awal $S(0) > 0, V(0) \geq 0, I(0) > 0,$ dan $R(0) \geq 0$. Total populasi individu dapat dinyatakan sebagai $N = S + V + I + R$.
Dimana,

Tabel 2.1 Variabel Model Penyebaran Penyakit Difteri

Variabel	Keterangan
S	Jumlah individu sehat namun rentan terinfeksi penyakit
V	Jumlah individu yang tervaksinasi
I	Jumlah individu yang terinfeksi penyakit
R	Jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit
N	Total populasi individu

Tabel 2.2 Parameter Model Penyebaran Penyakit Difteri

Parameter	Keterangan
θ	*Rate* kelahiran individu
μ	*Rate* kematian alami individu
β	*Rate* kontak individu terinfeksi dengan individu sehat namun rentan terinfeksi penyakit
γ	*Rate* kesembuhan individu
η	*Rate* kematian individu karena penyakit
α	*Rate* vaksinasi individu
σ	*Rate* efektivitas vaksin
δ	*Rate* kegagalan vaksin

2.3 Bilangan Reproduksi Dasar *(R_0)*

Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah suatu parameter yang digunakan untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit. Bilangan ini menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat terinfeksi penyakit yang disebabkan oleh satu individu yang sudah terinfeksi. Kondisi yang akan timbul adalah satu diantara tiga kemungkinan berikut ini [7]:

1. Jika $(R_0) < 1$, maka penyakit akan menghilang dalam populasi.
2. Jika $(R_0) = 1$, maka penyakit akan menetap dalam populasi.
3. Jika $(R_0) > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah dalam populasi.

Bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh dengan beberapa metode, salah satunya adalah metode yang dikenalkan oleh Van Den Driessche (2002), yaitu dengan mengkonstruksi suatu matriks yang berasal dari kelompok individu yang menyebabkan infeksi penyakit. Matriks tersebut dikenal dengan *Next Generation Matrix*, yang mempunyai dua bagian yaitu F dan V^{-1} yang didefinisikan sebagai

$$G = FV^{-1}$$

Dimana

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i(x_0)}{\partial a_j}\right] \text{ dan } V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i(x_0)}{\partial a_j}\right]$$

dengan $\mathcal{F}_i$ menyatakan laju individu terinfeksi pada kelompok individu ke-i dan $\mathcal{V}_i$ menyatakan laju pergerakan penyakit, kematian dan kesembuhan dari kelompok individu ke-i. Serta x_0 menyatakan keadaan titik setimbang bebas penyakit. R_0 adalah suatu nilai eigen dominan dari matriks $G = FV^{-1}$[8].

2.4 Kendali Optimal

Tujuan utama dari suatu kendali optimal adalah untuk menentukan kendali yang menyebabkan suatu sistem memenuhi beberapa kendala dan pada saat yang sama dapat ditentukan ekstrim maksimum atau minimum sesuai dengan fungsi tujuan. Perumusan masalah kendali optimal dapat diberikan sebagai berikut[9]:

1. Medeskripsikan model matematika dari sistem yang akan dikontrol (secara umum dalam bentuk variabel *state*).
2. Menentukan fungsi tujuan (*performance index)*.
3. Menentukan kondisi batas dan kendala variabel *state* dan variabel kendali.

Fungsi tujuan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$J\big(u(t)\big) = S\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t)dt \quad (2.5)$$

dengan kendala

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.6)$$

dan kondisi batas $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$, t_0 dan t_f menyatakan waktu awal dan akhir. S, V dan f adalah fungsi skalar. Serta kendali $u^*(t)$ merupakan kendali optimal, jika disubstitusikan ke dalam sistem maka akan diperoleh keadaan optimal $x^*(t)$ dan pada saat yang sama juga dapat mengoptimalkan fungsi tujuan.

Persamaan (2.5) merupakan fungsi tujuan bentuk Bolza yang terdiri dari *terminal cost function* (fungsi biaya akhir) dan biaya integral. Apabila fungsi tujuan hanya berisi *terminal cost function* saja $\big(S\big(x(t_f), t_f\big)\big)$ disebut bentuk Mayer. Sedangkan jika fungsi tujuan hanya berisi biaya

integral saja $\left(\int_{t_0}^{t_f} V(x(t),u(t),t)dt\right)$ disebut bentuk Lagrange[9].

2.5 Prinsip Minimum Pontryagin

Kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi yang optimal dalam penyelesaian masalah kendali optimal dapat diperoleh dengan metode Prinsip Minimum Pontryagin. Tahapan penting untuk mendapatkan kendali yang optimal untuk sistem adalah sebagai berikut [9]:

1. Merumuskan fungsi Hamiltonian
$$H(x(t),u(t),\lambda(t),t) = V(x(t),u(t),t) + \lambda'(t)g(x(t),u(t),t) \qquad (2.7)$$
dimana $\lambda(t)$ adalah variabel *costate*.
2. Meminimumkan H terhadap semua vektor kendali $u(t)$ dengan :
$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = 0 \qquad (2.8)$$
untuk mendapatkan $u^* = u^*(x(t),\lambda(t),t)$
3. Mencari fungsi Hamiltonian (H^*) yang optimal dengan menggunakan hasil dari langkah 2 yaitu :
$$H^*(x^*(t),h(x^*(t),\lambda^*(t),t),\lambda^*(t),t) = H^*(x^*(t),\lambda^*(t),t) \qquad (2.9)$$
4. Menentukan persamaan *state* dan *costate*
$$x^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_* \quad \text{dan} \quad \lambda^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_* \qquad (2.10)$$
dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir (transversal)
$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial \lambda}\right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_* - \lambda^*(t)\right]'_{t_f} \delta x_f = 0 \qquad (2.11)$$
5. Mensubstitusikan hasil $x^*(t),\lambda^*(t)$ dari langkah 4 ke persamaan $u^*(t)$ pada langkah 2 sehingga akan diperoleh hasil kendali optimal.

Dalam menentukan kondisi transversal yang sesuai, terdapat beberapa macam kondisi batas, yaitu[9]:

1. *Fixed-final time and fixed-final state system*
   Yaitu waktu akhir (t_f) dan *state* saat waktu akhir $\left(x(t_f)\right)$ telah diketahui atau ditentukan. Sehingga δt_f dan δx_f akan bernilai 0 pada persamaan (2.11).
   $$x(t_0) = x_0, \qquad x(t_f) = x_f$$
2. *Free-final time and fixed-final state system*
   Yaitu waktu akhir (t_f) bebas atau tidak ditentukan dan *state* saat waktu akhir $\left(x(t_f)\right)$ telah ditentukan. Maka pada persamaan (2.11) akan diperoleh $\delta t_f \neq 0$ dan $\delta x_f = 0$, sehingga
   $$x(t_0) = x_0, \qquad x(t_f) = x_f, \qquad \left(H^* + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \lambda}\right)_{t_f} = 0$$
3. *Fixed-final time and free-final state system*
   Yaitu waktu akhir (t_f) telah ditentukan dan *state* saat waktu akhir $\left(x(t_f)\right)$ bebas atau tidak ditentukan. Maka pada persamaan (2.11) akan diperoleh $\delta t_f = 0$ dan $\delta x_f \neq 0$, sehingga
   $$x(t_0) = x_0,$$
   $$\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x} - \lambda^*(t)\right)_{*t_f} = 0 \rightarrow \lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x}\right)_{*t_f}$$
4. *Free-final time and dependent free-final state system*
   Yaitu jika waktu akhir (t_f) dan *state* saat waktu akhir $\left(x(t_f)\right)$ berhubungan, serta nilainya bergantung pada sesuatu sehingga
   $$x(t_0) = x_0, \qquad x(t_f) = \theta_f, \;\; \delta x_f \approx \dot{\theta}(t_f)\delta t_f$$

$$\left[\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)_* + \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda^*(t)\right)'_* \dot{\theta}(t)\right]_{t_f} \delta t_f = 0$$

Karena t_f bebas atau tidak ditentukan, maka $\delta t_f \neq 0$, sehingga

$$\left[\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)_* + \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda^*(t)\right)'_* \dot{\theta}(t)\right]_{t_f} = 0$$

5. *Free-Final Time and independent free final state system*

   Yaitu jika waktu akhir (t_f) dan *state* saat waktu akhir $(x(t_f))$ tidak berhubungan, maka δt_f dan δx_f juga tidak berhubungan, sehingga

$$x(t_0) = x_0$$

   dan persaaman (2.11) menjadi

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)_{*t_f} = 0$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda^*(t)\right)_{*t_f} = 0$$

2.6 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge Kutta adalah suatu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal atau masalah nilai batas pada persamaan diferensial linear atau nonlinear[10]. Metode Runge Kutta yang sering digunakan untuk mengintegrasikan persamaan diferensial adalah metode Runge Kutta orde empat karena memiliki

ketelitian yang lebih tinggi. Misal diberikan persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \tag{2.12}$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \tag{2.13}$$

dengan titik awal $x(t) = x_0, y(t) = y_0$ maka secara iterasi penyelesaian Runge Kutta orde empat adalah sebagai berikut[11] :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}\left(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x}\right) \tag{2.14}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y}\right) \tag{2.15}$$

dimana

$$k_{1,x} = hf(t_n, x_n, y_n) \tag{2.16}$$

$$k_{1,y} = hg(t_n, x_n, y_n) \tag{2.17}$$

$$k_{2,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \tag{2.18}$$

$$k_{2,y} = hg\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \tag{2.19}$$

$$k_{3,x} = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \tag{2.20}$$

$$k_{3,y} = hg\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \tag{2.21}$$

$$k_{4,x} = hf(t_n + h, x_n + k_3, y_n + k_3) \tag{2.22}$$

$$k_{4,y} = hg(t_n + h, x_n + k_3, y_n + k_3) \tag{2.23}$$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} \tag{2.24}$$

dengan h adalah panjang interval, t_0 dan t_f adalah waktu awal dan akhir. Nilai k menunjukkan hubungan beruntun karena k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2, dan juga k_2 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3 dan seterusnya.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah sistematis yang digunakan dalam menyelesaikan masalah Tugas Akhir. Selain itu, dijelaskan pula proses pelaksanaan dan diagram alur dalam penyelesaian Tugas Akhir.

3.1 Tahap penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Pada tahap ini dipelajari referensi yang berkaitan dengan penyebaran penyakit difteri, model *SVIR*, penerapan kendali optimal pada model penyebaran penyakit, teori kendali optimal yang penyelesaiannya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin serta metode Runge-Kutta orde empat. Referensi yang digunakan berupa jurnal ilmiah, tugas akhir, thesis, atau hasil penelitian lainnya yang berkaitan dengan permasalahan pada Tugas Akhir.

2. Mengidentifikasi Model Penyebaran Penyakit Difteri

Pada tahap ini, dikaji tentang model penyebaran penyakit difteri yang merupakan persamaan diferensial non linier dengan mempertimbangkan asumsi-asumsi tertentu sehingga menjadi model empat kelompok individu dalam suatu populasi, yaitu kelompok individu sehat namun rentan terinfeksi penyakit (*susceptible* (S)), kelompok individu yang tervaksinasi (*vaccinated* (V)), kelompok individu yang terinfeksi penyakit (*infected* (I)), serta kelompok individu yang telah sembuh dari penyakit (*recovered* (R)).

3. Mengembangkan Model Penyebaran Penyakit Difteri

Pada tahap ini, dilakukan pengembangan model penyebaran penyakit difteri dengan menambahkan variabel kendali serta kondisi batas. Adapun dua variabel kendali yang diberikan adalah pencegahan (penyuluhan imunisasi) dan pengobatan.

4. Menyelesaikan Desain Kendali Optimal

Pada tahap ini dilakukan perancangan masalah kendali optimal dari model penyebaran penyakit difteri yang membentuk fungsi tujuan serta syarat batas yang harus terpenuhi. Kemudian masalah kendali optimal dari model yang diberikan akan diselesaikan dengan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin. Adapun langkah-langkah yang dilakukan yaitu sebagai berikut:

1. Membentuk fungsi Hamiltonian.
2. Menentukan kondisi batas yang harus dipenuhi.
3. Menentukan kendali yang optimal.
4. Menentukan persamaan *state* dan *costate*.

5. Melakukan Simulasi Numerik

Pada tahap ini dilakukan simulasi secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

6. Menganalisis Perbandingan Hasil Simulasi Numerik

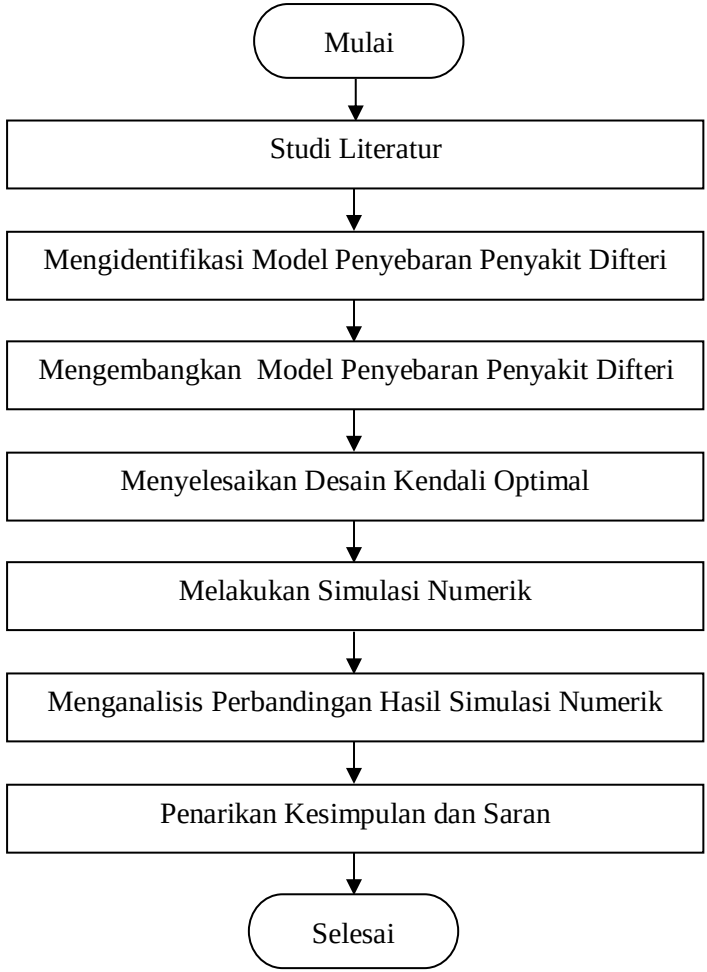
Pada tahap ini dilakukan perbandingan hasil simulasi numerik untuk melihat perilaku sistem pada grafik yang dihasilkan oleh model penyebaran penyakit difteri sebelum dan setelah diberikan kendali.

7. Penarikan Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil simulasi dan perbandingan yang telah dilakukan pada tahap sebelumnya. Serta diberikan pula saran sebagai perbaikan dan pengembangan untuk penelitian selanjutnya.

3.2 Diagram Alur

Adapun tahapan - tahapan yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini secara umum ditampilkan dalam diagram alur penelitian pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram Alur

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

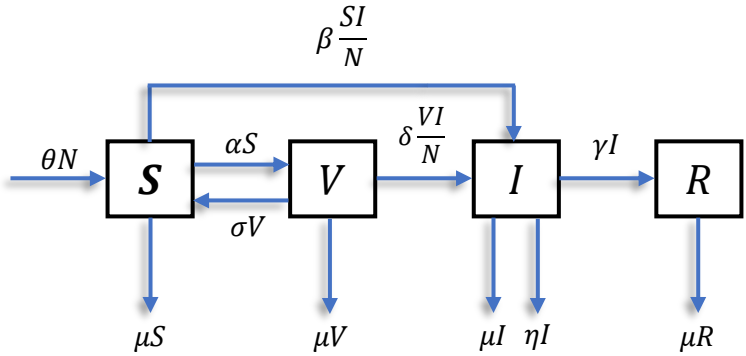
BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai model penyebaran penyakit difteri tanpa kendali, penambahan variabel kendali, mencari solusi kendali optimal dari model dimana penyelesaiannya menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin serta dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

4.1 Model Penyebaran Penyakit Difteri Tanpa Kendali

Model penyebaran penyakit difteri tanpa variabel kendali memiliki total populasi individu pada waktu t yang dilambangkan sebagai $N(t)$. Populasi individu dibagi menjadi empat kelompok individu, yaitu S (*Susceptible*) individu sehat namun rentan terinfeksi penyakit, V (*Vaccinated*) yaitu individu tervaksinasi, I (*Infected*) yaitu individu yang terinfeksi penyakit, R (*Recovered*) yaitu individu yang sembuh dari penyakit, dan total populasi individu dinyatakan dengan $N = S + V + I + R$.

Selanjutnya interaksi individu dalam model diilustrasikan pada diagram kompartemen sebagai berikut:



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Difteri

Dengan demikian model penyebaran penyakit difteri tanpa variabel kendali dapat diformulasikan sebagai suatu sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \theta N - \mu S - \beta \frac{SI}{N} - \alpha S + \sigma V \tag{4.1}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\mu V + \alpha S - \sigma V - \delta \frac{VI}{N} \tag{4.2}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\mu I + \beta \frac{SI}{N} - \gamma I - \eta I + \delta \frac{VI}{N} \tag{4.3}$$

$$\frac{dR}{dt} = -\mu R + \gamma I \tag{4.4}$$

Dengan syarat awal $S(0) > 0, V(0) \geq 0, I(0) > 0,$ dan $R(0) \geq 0$. Total populasi individu dapat dinyatakan sebagai $N = S + V + I + R$.

4.2 Perhitungan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Pada model penyebaran penyakit difteri, terdapat titik setimbang bebas penyakit yaitu suatu kondisi saat tidak terjadi penyebaran penyakit difteri pada suatu wilayah [12]. Diketahui titik setimbang bebas penyakit dari model penyebaran penyakit difteri adalah $E_0 = (S, V, I, R) = (\frac{\theta N(\mu+\sigma)}{\mu(\mu+\sigma+\alpha)}, \frac{\alpha\theta N}{\mu(\mu+\sigma+\alpha)}, 0,0)$.

Selanjutnya, akan dihitung bilangan reproduksi dasar (R_0) menggunakan metode *Next Generation Matrix*. Sehingga dapat dibentuk matriks $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ sebagai berikut

$$\mathcal{F} = \left(\frac{\beta\theta(\mu+\sigma)+\delta\alpha\theta}{\mu(\mu+\sigma+\alpha)}\right) \text{ dan } \mathcal{V} = (\mu + \gamma + \eta)$$

Kemudian dicari $\mathcal{V}^{-1}$ sehingga diperoleh matriks $G = \mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}$ sebagai berikut

$$G = \left(\frac{\beta\theta(\mu + \sigma) + \delta\alpha\theta}{\mu(\mu + \sigma + \alpha)(\mu + \gamma + \eta)}\right)$$

Selanjutnya ditentukan nilai eigen dari G dengan $\det(\lambda I - G) = 0$ sehingga diperoleh R_0 yaitu

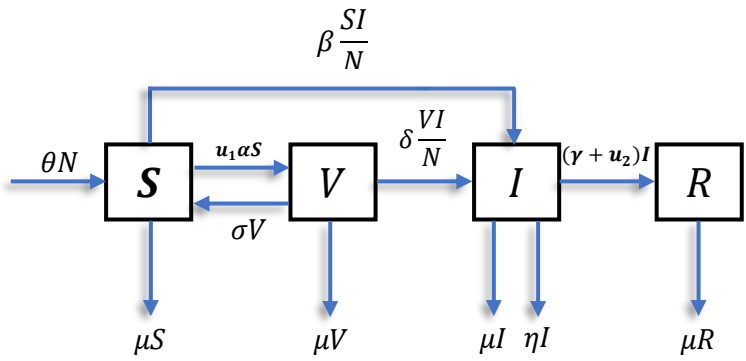
$$R_0 = \frac{\beta\theta(\mu + \sigma) + \delta\alpha\theta}{\mu(\mu + \sigma + \alpha)(\mu + \gamma + \eta)}$$

4.3 Model Penyebaran Penyakit Difteri dengan Kendali

Model penyebaran penyakit difteri akan dikonstruksi dengan menambahkan variabel kendali. Adapun beberapa asumsi yang diberikan dalam variabel kendali pada model penyebaran penyakit difteri adalah sebagai berikut:

1. Kendali u_1 adalah representasi usaha pencegahan penyebaran penyakit melalui penyuluhan imunisasi atau vaksinasi yang diberikan kepada individu rentan untuk mengoptimalkan proporsi individu yang tervaksinasi.
2. Kendali u_2 adalah proporsi pemberian pengobatan terhadap individu yang terinfeksi penyakit difetri. Dengan demikian, diasumsikan $u_2 I$ merupakan pengobatan terhadap individu yang terinfeksi penyakit difteri.

Berdasarkan asumsi tersebut, model kendali optimal untuk penyebaran penyakit difteri dengan kendali berupa penyuluhan imunisasi atau vaksinasi dan pengobatan pada individu terinfeksi dapat digambarkan pada diagram kompartemen sebagai berikut:



Gambar 4.2 Diagram Kompartemen Model Penyebaran Penyakit Difteri dengan Kendali u_1 dan u_2

Dengan demikian model penyebaran penyakit difteri dapat diformulasikan dalam suatu sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \theta N - \mu S - \beta \frac{SI}{N} - u_1 \alpha S + \sigma V \tag{4.5}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\mu V + u_1 \alpha S - \sigma V - \delta \frac{VI}{N} \tag{4.6}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\mu I + \beta \frac{SI}{N} - \gamma I - \eta I + \delta \frac{VI}{N} - u_2 I \tag{4.7}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R + u_2 I \tag{4.8}$$

Dengan syarat awal $S(0) > 0, V(0) \geq 0, I(0) > 0,$ dan $R(0) \geq 0$. Total populasi individu dapat dinyatakan sebagai $N = S + V + I + R$.
Dimana,

Tabel 4.1 Variabel Model Penyebaran Penyakit Difteri dengan Kendali

Variabel	Keterangan
S	Jumlah individu sehat namun rentan terinfeksi penyakit
V	Jumlah individu yang tervaksinasi
I	Jumlah individu yang terinfeksi penyakit
R	Jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit
N	Total populasi individu

Tabel 4.2 Parameter Model Penyebaran Penyakit Difteri dengan Kendali

Parameter	Keterangan
θ	*Rate* kelahiran individu
μ	*Rate* kematian alami individu
β	*Rate* kontak individu terinfeksi dengan individu sehat namun rentan terinfeksi penyakit
γ	*Rate* kesembuhan individu
η	*Rate* kematian individu karena penyakit
α	*Rate* vaksinasi individu
σ	*Rate* efektivitas vaksin
δ	*Rate* kegagalan vaksin
u_1	Kendali pencegahan melalui penyuluhan imunisasi atau vaksinasi
u_2	Kendali berupa pengobatan terhadap individu yang terinfeksi

4.4 Perumusan Masalah Kendali Optimal

Tujuan kendali optimal pada model penyebaran penyakit difetri yaitu untuk meminimumkan jumlah individu yang terinfeksi (*Infected*) serta meminimumkan biaya penyuluhan imunisasi atau vaksinasi dan biaya pengobatan. Sehingga masalah kendali optimal dapat dinyatakan dalam fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J(u_1, u_2) = min \int_{t_0}^{t_f} I + \frac{1}{2}(c_1 {u_1}^2 + c_2 {u_2}^2) dt \qquad (4.9)$$

dengan kendala:

$$0 \leq t \leq t_f$$
$$0 \leq u_1 \leq 1$$
$$0 \leq u_2 \leq 1$$

Dimana:

c_1 : bobot biaya pada kendali u_1 (penyuluhan imunisasi atau vaksinasi)

c_2 : bobot biaya pada kendali u_2 (pengobatan individu terinfeksi)

t_0 : waktu awal

t_f : waktu akhir

Berdasarkan hubungan biaya yang dikeluarkan untuk kendali dengan banyaknya jumlah individu yang terinfeksi memiliki hubungan tidak linier sehingga fungsi biaya dimodelkan dengan persamaan nonlinier dan digunakan fungsi kuadratik sehingga pada waktu tertentu laju dari kendali u_1 dan u_2 daapat meminimumkan total biaya serta jumlah individu terinfeksi.

Kondisi batas yang sesuai pada permasalahan kendali optimal ini yaitu *fixed-final time and free-final state*. Sehingga, setiap sistem yang ada menggunakan kondisi batas *state* pada kondisi awal sebagai berikut:

$$S(t_0) = S_0, V(t_0) = V_0, I(t_0) = I_0, R(t_0) = R_0$$

Kondisi batas yang memenuhi pada tipe *fixed-final time and free-final state* yaitu sebagai berikut

$$x(t_0) = x_0, \qquad \lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{*t_f}$$

dengan $x_0 = \{S_0, V_0, I_0, R_0\}$.

Fixed-final time artinya waktu akhir pada penelitian ini telah ditentukan sehingga tidak ada variasi waktu $(\delta t_f = 0)$ dan *free-final state* artinya state di waktu akhir bebas atau tidak ditentukan sehingga terdapat variasi *state* di waktu akhir $(\delta x_f \neq 0)$. Selanjutnya kondisi transversal yang sesuai adalah sebagai berikut

$$\lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{*t_f}$$

Karena fungsi tujuan pada persamaan (4.9) tidak mengandung persamaan Mayer, maka persamaan Mayer dianggap sama dengan nol dan diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda^*(t_f) &= \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{*t_f} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} 0\right)_{*t_f} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dengan $\lambda^*(t_f)$ merupakan kondisi transversaltias. Oleh karena itu, diperoleh *costate* pada waktu akhir sama dengan nol. Jadi, setiap sistem yang ada pada persamaan ini di inisialisasikan dengan kondisi batas *costate* pada waktu akhir sebagai berikut

$$\lambda_S{}^*(t_f) = 0, \lambda_V{}^*(t_f) = 0, \lambda_I{}^*(t_f) = 0, \lambda_R{}^*(t_f) = 0$$

4.5 Penyelesaian Masalah Kendali Optimal

Berdasarkan fungsi tujuan (4.9), permasalahan kendali optimal dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Merumuskan fungsi Hamiltonian

$$\begin{aligned} H = I + \left(\frac{1}{2}c_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}c_2{u_2}^2\right) + \\ \lambda_S\left(\theta N - \mu S - \beta\frac{SI}{N} - u_1\alpha S + \sigma V\right) + \\ \lambda_V\left(-\mu V + u_1\alpha S - \sigma V - \delta\frac{VI}{N}\right) + \\ \lambda_I\left(-\mu I + \beta\frac{SI}{N} - \gamma I - \eta I + \delta\frac{VI}{N} - u_2 I\right) + \\ \lambda_R(-\mu R + \gamma I + u_2 I) \end{aligned} \tag{4.10}$$

2. Menentukan kondisi stasioner (4.10) untuk mendapatkan persamaan kendali optimal u^* dengan menurunkan H terhadap u_1 dan u_2 sehingga:

   a. $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$

$$\begin{aligned} c_1u_1 + (\lambda_V - \lambda_S)\alpha S &= 0 \\ c_1u_1 &= (\lambda_S - \lambda_V)\alpha S \\ u_1 &= \frac{(\lambda_S - \lambda_V)\alpha S}{c_1} \end{aligned} \tag{4.11}$$

   Dari persamaan (4.11) terlihat bahwa ada kemungkinan nilai $u_1 < 0$ dan $u_1 > 1$. Karena u_1 merupakan suatu proporsi, maka didefinisikan ${u_1}^*$ untuk menjamin $0 \leq u_1 \leq 1$. Sehingga didapatkan solusi untuk ${u_1}^*$ sebagai berikut:

$$u_1{}^* = \begin{cases} 0, & jika\, u_1 \leq 0 \\ u_1, & jika \;\; 0 < u_1 < 1 \\ 1, & jika\, u_1 \geq 1 \end{cases}$$

Dengan demikian nilai kendali optimal $u_1{}^*$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u_1{}^* = \min\left\{\max\left\{0, \frac{(\lambda_S - \lambda_V)\alpha S}{c_1}\right\}, 1\right\}$$

b. $\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$

$c_2 u_2 + (\lambda_R - \lambda_I)I \;= 0$

$$c_2 u_2 = (\lambda_I - \lambda_R)I$$

$$u_2 \;= \frac{(\lambda_I - \lambda_R)I}{c_2} \tag{4.12}$$

Dari persamaan (4.12) terlihat bahwa ada kemungkinan nilai $u_2 < 0$ dan $u_2 > 1$. Karena u_2 merupakan suatu proporsi, maka didefinisikan $u_2{}^*$ untuk menjamin $0 \leq u_2 \leq 1$. Sehingga didapatkan solusi untuk $u_2{}^*$ sebagai berikut:

$$u_2{}^* = \begin{cases} 0, & jika\, u_2 \leq 0 \\ u_2, & jika \;\; 0 < u_2 < 1 \\ 1, & jika\, u_2 \geq 1 \end{cases}$$

Dengan demikian nilai kendali optimal $u_2{}^*$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u_2{}^* = \min\left\{\max\left\{0, \frac{(\lambda_I - \lambda_R)I}{c_2}\right\}, 1\right\}$$

3. Mencari fungsi Hamiltonian (H^*) yang optimal
   Persamaan kendali optimal yang diperoleh pada persaman ${u_1}^*$ dan ${u_2}^*$ disubstitusikan ke persamaan H, sehingga diperoleh:

$$H^* = I + \left(\frac{1}{2}c_1({u_1}^*)^2 + \frac{1}{2}c_2({u_2}^*)^2\right) + \lambda_S\left(\theta N - \mu S - \beta\frac{SI}{N} - {u_1}^*\alpha S + \sigma V\right) + \lambda_V\left(-\mu V + {u_1}^*\alpha S - \sigma V - \delta\frac{VI}{N}\right) + \lambda_I\left(-\mu I + \beta\frac{SI}{N} - \gamma I - \eta I + \delta\frac{VI}{N} - {u_2}^* I\right) + \lambda_R(-\mu R + \gamma I + {u_2}^* I) \quad (4.13)$$

4. Menentukan persamaan *state* dan *costate*
   a. Persamaan *state*
      Persamaan *state* dapat diperoleh dengan menurunkan fungsi H^* terhadap λ, yang secara matematis dapat dituliskan melalui persamaan (2.10) sebagai berikut:

$$x^*(t) = \left(\frac{\partial H^*}{\partial \lambda}\right)$$

      Berdasarkan persamaan tersebut, diperoleh persamaan *state* untuk setiap kelompok individu yang dinyatakan sebagai berikut:

$$S^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_S} = \theta N - \mu S - \beta\frac{SI}{N} - {u_1}^*\alpha S + \sigma V$$

$$V^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_V} = -\mu V + {u_1}^*\alpha S - \sigma V - \delta\frac{VI}{N}$$

$$I^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_I} = -\mu I + \beta \frac{SI}{N} - \gamma I - \eta I + \delta \frac{VI}{N} - u_2{}^* I$$

$$R^* = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda_R} = -\mu R + \gamma I + u_2{}^* I \qquad (4.14)$$

b. Persamaan *costate*

Persamaan *costate* dapat diperoleh dengan menurunkan negatif fungsi H^* terhadap x, yang secara matematis dapat dituliskan melalui persamaan (2.10) sebagai berikut:

$$\lambda^*(t) = -\left(\frac{\partial H^*}{\partial x}\right)$$

Berdasarkan persamaan tersebut, diperoleh persamaan *costate* untuk setiap kelompok individu yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda_S{}^* &= -\frac{\partial H^*}{\partial S} \\
&= -\left[\lambda_S\left(-\mu - \beta\frac{I}{N} - u_1{}^*\alpha\right) + \lambda_V(u_1{}^*\alpha) + \lambda_I\left(\beta\frac{I}{N}\right)\right] \\
&= -\lambda_S\left(-\mu - \beta\frac{I}{N} - u_1{}^*\alpha\right) - \lambda_V(u_1{}^*\alpha) - \lambda_I\left(\beta\frac{I}{N}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_V{}^* &= -\frac{\partial H^*}{\partial V} \\
&= -\left[\lambda_S(\sigma) + \lambda_V\left(-\mu - \sigma - \delta\frac{I}{N}\right) + \lambda_I\left(\delta\frac{I}{N}\right)\right] \\
&= -\lambda_S\sigma - \lambda_V\left(-\mu - \sigma - \delta\frac{I}{N}\right) - \lambda_I\left(\delta\frac{I}{N}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_I{}^* &= -\frac{\partial H^*}{\partial I} \\
&= -\left[1 + \lambda_S\left(-\beta\frac{S}{N}\right) + \lambda_V\left(-\delta\frac{V}{N}\right) + \lambda_I\left(-\mu + \beta\frac{S}{N} - \gamma - \right.\right. \\
&\quad \left.\left.\eta + \delta\frac{V}{N} - u_2{}^*\right) + \lambda_R(\gamma + u_2{}^*)\right]
\end{aligned}$$

$$= -1 + \lambda_S\left(\beta\frac{S}{N}\right) + \lambda_V\left(\delta\frac{V}{N}\right) -$$
$$\lambda_I\left(-\mu + \beta\frac{S}{N} - \gamma - \eta + \delta\frac{V}{N} - {u_2}^*\right) - \lambda_R(\gamma + {u_2}^*)$$
$${\lambda_R}^* = -\frac{\partial H^*}{\partial R}$$
$$= -[\lambda_R(-\mu)]$$
$$= \lambda_R\mu \qquad (4.15)$$

4.6 Penyelesaian Numerik

Persamaan *state* dan *costate* yang telah diperoleh merupakan suatu persamaaan yang non linear sehingga sulit diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, persamaan *state* (4.14) dan *costate* (4.15) akan diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Metode ini memiliki suatu galat pemotongan h, dimana h adalah langkah waktu (*step size*).

Persamaan *state* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_S} = \theta N - \mu S - \beta\frac{SI}{N} - {u_1}^*\alpha S + \sigma V$$
$$= f_1(S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$
$$\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_V} = -\mu V + {u_1}^*\alpha S - \sigma V - \delta\frac{VI}{N}$$
$$= f_2(S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$
$$\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_I} = -\mu I + \beta\frac{SI}{N} - \gamma I - \eta I + \delta\frac{VI}{N} - {u_2}^* I$$
$$= f_3(S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$
$$\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_R} = -\mu R + \gamma I + {u_2}^* I$$
$$= f_4(S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$

Sedangkan persamaan *costate* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$-\frac{\partial H^*}{\partial S} = -\lambda_S\left(-\mu - \beta\frac{I}{N} - {u_1}^*\alpha\right) - \lambda_V({u_1}^*\alpha) - \lambda_I\left(\beta\frac{I}{N}\right)$$
$$= g_1(\lambda_S(t), \lambda_V(t), \lambda_I(t), \lambda_R(t), S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$
$$-\frac{\partial H^*}{\partial V} = -\lambda_S\sigma - \lambda_V\left(-\mu - \sigma - \delta\frac{I}{N}\right) - \lambda_I\left(\delta\frac{I}{N}\right)$$
$$= g_2(\lambda_S(t), \lambda_V(t), \lambda_I(t), \lambda_R(t), S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$
$$-\frac{\partial H^*}{\partial I} = -1 + \lambda_S\left(\beta\frac{S}{N}\right) + \lambda_V\left(\delta\frac{V}{N}\right) -$$
$$\lambda_I\left(-\mu + \beta\frac{S}{N} - \gamma - \eta + \delta\frac{V}{N} - {u_2}^*\right) - \lambda_R(\gamma + {u_2}^*)$$
$$= g_3(\lambda_S(t), \lambda_V(t), \lambda_I(t), \lambda_R(t), S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$
$$-\frac{\partial H^*}{\partial R} = \lambda_R\mu$$
$$= g_4(\lambda_S(t), \lambda_V(t), \lambda_I(t), \lambda_R(t), S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$

Persamaan *state* (4.14) dan *costate* (4.15) yang digunakan masih mengandung u_1 dan u_2. Hal tersebut karena u_1 dan u_2 mengandung variabel $\lambda_S, \lambda_V, \lambda_I$, dan λ_R. Persamaan *state* tersebut akan diselesaikan menggunakan metode *forward sweep* karena telah diketahui nilai awal $\left(x(t_0)\right)$. Sedangkan persamaan *costate* akan diselesaikan menggunakan metode *backward sweep* karena telah diketahui nilai akhirnya $\left(\lambda^*(t_f)\right)$.

Berikut ini merupakan langkah-langkah menyelesaikan persamaan *state* dan *costate* dengan metode Runge-Kutta orde 4:

1. Interval waktu $t = [t_0, t_f]$ dibagi sebanyak n subinterval. Sehingga, persamaan *state* dan *costate* dapat ditulis sebagai berikut:
   - Persamaan *state*
     $S^* = (S_1, \dots \dots, S_{n+1})$
     $V^* = (V_1, \dots \dots, V_{n+1})$
     $I^* = (I_1, \dots \dots, I_{n+1})$
     $R^* = (R_1, \dots \dots, R_{n+1})$
   - Persamaan *costate*
     ${\lambda_S}^* = (\lambda_{S_1}, \dots \dots, \lambda_{S_{n+1}})$
     ${\lambda_V}^* = (\lambda_{V_1}, \dots \dots, \lambda_{V_{n+1}})$
     ${\lambda_I}^* = (\lambda_{I_1}, \dots \dots, \lambda_{I_{n+1}})$
     ${\lambda_R}^* = (\lambda_{R_1}, \dots \dots, \lambda_{R_{n+1}})$

   Artinya terdapat $n + 1$ titik di sepanjang waktu t, sehingga diperoleh selisih antara setiap titiknya yaitu
   $h = \frac{t_f - t_0}{n}$

2. Memberikan inisialisasi nilai awal yaitu $n = 60,\ t_0 = 0,\ t_f = 60$

3. Menggunakan nilai awal $S(0) = S_0,\ V(0) = V_0,\ I(0) = I_0$, dan $R(0) = R_0$ dan asumsi nilai awal u_1 dan u_2 untuk menyelesaikan persamaan *state* secara *forward sweep* dengan rumus Runge-Kuta orde 4 sebagai berikut:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,S} + 2k_{2,S} + 2k_{3,S} + k_{4,S}\right)$$

$$V_{n+1} = V_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,V} + 2k_{2,V} + 2k_{3,V} + k_{4,V}\right)$$

$$I_{n+1} = I_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I}\right)$$

$$R_{n+1} = R_n + \frac{h}{6}\left(k_{1,R} + 2k_{2,R} + 2k_{3,R} + k_{4,R}\right)$$

Dimana

$$k_{1,S} = f_1(S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$
$$k_{1,V} = f_2(S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$
$$k_{1,I} = f_3(S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$
$$k_{1,R} = f_4(S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$

$$k_{2,S} = f_1\left(S(t) + \frac{hk_{1,S}}{2}, V(t) + \frac{hk_{1,V}}{2}, I(t) + \frac{hk_{1,I}}{2}, R(t) + \frac{hk_{1,R}}{2}, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{2,V} = f_2\left(S(t) + \frac{hk_{1,S}}{2}, V(t) + \frac{hk_{1,V}}{2}, I(t) + \frac{hk_{1,I}}{2}, R(t) + \frac{hk_{1,R}}{2}, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{2,I} = f_3\left(S(t) + \frac{hk_{1,S}}{2}, V(t) + \frac{hk_{1,V}}{2}, I(t) + \frac{hk_{1,I}}{2}, R(t) + \frac{hk_{1,R}}{2}, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{2,R} = f_4\left(S(t) + \frac{hk_{1,S}}{2}, V(t) + \frac{hk_{1,V}}{2}, I(t) + \frac{hk_{1,I}}{2}, R(t) + \frac{hk_{1,R}}{2}, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{3,S} = f_1\left(S(t) + \frac{hk_{2,S}}{2}, V(t) + \frac{hk_{2,V}}{2}, I(t) + \frac{hk_{2,I}}{2}, R(t) + \frac{hk_{2,R}}{2}, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{3,V} = f_2\left(S(t) + \frac{hk_{2,S}}{2}, V(t) + \frac{hk_{2,V}}{2}, I(t) + \frac{hk_{2,I}}{2}, R(t) + \frac{hk_{2,R}}{2}, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{3,I} = f_3\left(S(t) + \frac{hk_{2,S}}{2}, V(t) + \frac{hk_{2,V}}{2}, I(t) + \frac{hk_{2,I}}{2}, R(t) + \frac{hk_{2,R}}{2}, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{3,R} = f_4\left(S(t) + \frac{hk_{2,S}}{2}, V(t) + \frac{hk_{2,V}}{2}, I(t) + \frac{hk_{2,I}}{2}, R(t) + \frac{hk_{2,R}}{2}, u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{4,S} = f_1\big(S(t) + hk_{3,S}, V(t) + hk_{3,V}, I(t) + hk_{3,I}, R(t) + hk_{3,R}, u_1(t), u_2(t)\big)$$

$$k_{4,V} = f_2\big(S(t) + hk_{3,S}, V(t) + hk_{3,V}, I(t) + hk_{3,I}, R(t) + hk_{3,R}, u_1(t), u_2(t)\big)$$

$$k_{4,I} = f_3\big(S(t) + hk_{3,S}, V(t) + hk_{3,V}, I(t) + hk_{3,I}, R(t) + hk_{3,R}, u_1(t), u_2(t)\big)$$

$$k_{4,R} = f_4\big(S(t) + hk_{3,S}, V(t) + hk_{3,V}, I(t) + hk_{3,I}, R(t) + hk_{3,R}, u_1(t), u_2(t)\big)$$

4. Misalkan $\lambda_i(t_f) = 0$ dan diketahui batas transversal $\lambda_S(t_f) = \lambda_V(t_f) = \lambda_I(t_f) = \lambda_R(t_f)$, maka digunakan nilai akhir $\lambda_S(t_f) = \lambda_V(t_f) = \lambda_I(t_f) = \lambda_R(t_f) = 0$ serta hasil dari langkah 3 untuk menyelesaikan persamaan

costate secara *backward sweep* dengan rumus Runge-Kutta orde 4 sebagai berikut:

$$S_{n-1} = S_n - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_S} + 2k_{2,\lambda_S} + 2k_{3,\lambda_S} + k_{4,\lambda_S}\right)$$

$$V_{n-1} = V_n - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_V} + 2k_{2,\lambda_V} + 2k_{3,\lambda_V} + k_{4,\lambda_V}\right)$$

$$I_{n-1} = I_n - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_I} + 2k_{2,\lambda_I} + 2k_{3,\lambda_I} + k_{4,\lambda_I}\right)$$

$$R_{n-1} = R_n - \frac{h}{6}\left(k_{1,\lambda_R} + 2k_{2,\lambda_R} + 2k_{3,\lambda_R} + k_{4,\lambda_R}\right)$$

Dimana

$$k_{1,\lambda_S} = g_1(\lambda_S(t), \lambda_V(t), \lambda_I(t), \lambda_R(t), S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$

$$k_{1,\lambda_V} = g_2(\lambda_S(t), \lambda_V(t), \lambda_I(t), \lambda_R(t), S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$

$$k_{1,\lambda_I} = g_3(\lambda_S(t), \lambda_V(t), \lambda_I(t), \lambda_R(t), S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$

$$k_{1,\lambda_R} = g_4(\lambda_S(t), \lambda_V(t), \lambda_I(t), \lambda_R(t), S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t))$$

$$k_{2,\lambda_S} = g_1\left(\lambda_S(t) - \frac{hk_{1,\lambda_S}}{2}, \lambda_V(t) - \frac{hk_{1,\lambda_V}}{2}, \lambda_I(t) - \frac{hk_{1,\lambda_I}}{2}, \lambda_R(t) - \frac{hk_{1,\lambda_R}}{2}, S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{2,\lambda_V} = g_2\left(\lambda_S(t) - \frac{hk_{1,\lambda_S}}{2}, \lambda_V(t) - \frac{hk_{1,\lambda_V}}{2}, \lambda_I(t) - \frac{hk_{1,\lambda_I}}{2}, \lambda_R(t) - \frac{hk_{1,\lambda_R}}{2}, S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{2,\lambda_I} = g_3\left(\lambda_S(t) - \frac{hk_{1,\lambda_S}}{2}, \lambda_V(t) - \frac{hk_{1,\lambda_V}}{2}, \lambda_I(t) - \frac{hk_{1,\lambda_I}}{2}, \lambda_R(t) - \frac{hk_{1,\lambda_R}}{2}, S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{2,\lambda_R} = g_4\left(\lambda_S(t) - \frac{hk_{1,\lambda_S}}{2}, \lambda_V(t) - \frac{hk_{1,\lambda_V}}{2}, \lambda_I(t) - \frac{hk_{1,\lambda_I}}{2}, \lambda_R(t) - \frac{hk_{1,\lambda_R}}{2}, S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{3,\lambda_S} = g_1\left(\lambda_S(t) - \frac{hk_{2,\lambda_S}}{2}, \lambda_V(t) - \frac{hk_{2,\lambda_V}}{2}, \lambda_I(t) - \frac{hk_{2,\lambda_I}}{2}, \lambda_R(t) - \frac{hk_{2,\lambda_R}}{2}, S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t)\right)$$

$$k_{3,\lambda_V} = g_2\Big(\lambda_S(t) - \frac{hk_{2,\lambda_S}}{2}, \lambda_V(t) - \frac{hk_{2,\lambda_V}}{2}, \lambda_I(t) - \frac{hk_{2,\lambda_I}}{2}, \lambda_R(t) - \frac{hk_{2,\lambda_R}}{2}, S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t)\Big)$$

$$k_{3,\lambda_I} = g_3\Big(\lambda_S(t) - \frac{hk_{2,\lambda_S}}{2}, \lambda_V(t) - \frac{hk_{2,\lambda_V}}{2}, \lambda_I(t) - \frac{hk_{2,\lambda_I}}{2}, \lambda_R(t) - \frac{hk_{2,\lambda_R}}{2}, S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t)\Big)$$

$$k_{3,\lambda_R} = g_4\Big(\lambda_S(t) - \frac{hk_{2,\lambda_S}}{2}, \lambda_V(t) - \frac{hk_{2,\lambda_V}}{2}, \lambda_I(t) - \frac{hk_{2,\lambda_I}}{2}, \lambda_R(t) - \frac{hk_{2,\lambda_R}}{2}, S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t)\Big)$$

$$k_{4,\lambda_S} = g_1\big(\lambda_S(t) - hk_{3,\lambda_S}, \lambda_V(t) - hk_{3,\lambda_V}, \lambda_I(t) - hk_{3,\lambda_I}, \lambda_R(t) - hk_{3,\lambda_R}, S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t)\big)$$

$$k_{4,\lambda_V} = g_2\big(\lambda_S(t) - hk_{3,\lambda_S}, \lambda_V(t) - hk_{3,\lambda_V}, \lambda_I(t) - hk_{3,\lambda_I}, \lambda_R(t) - hk_{3,\lambda_R}, S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t)\big)$$

$$k_{4,\lambda_I} = g_3\big(\lambda_S(t) - hk_{3,\lambda_S}, \lambda_V(t) - hk_{3,\lambda_V}, \lambda_I(t) - hk_{3,\lambda_I}, \lambda_R(t) - hk_{3,\lambda_R}, S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t)\big)$$

$$k_{4,\lambda_R} = g_4\big(\lambda_S(t) - hk_{3,\lambda_S}, \lambda_V(t) - hk_{3,\lambda_V}, \lambda_I(t) - hk_{3,\lambda_I}, \lambda_R(t) - hk_{3,\lambda_R}, S(t), V(t), I(t), R(t), u_1(t), u_2(t)\big)$$

5. Memperbarui nilai u_1 dan u_2 dengan mensubstitusikan nilai $S, V, I, R, \lambda_S, \lambda_V, \lambda_I, \lambda_R$ yang baru ke dalam karakterisasi kendali optimal. Dalam hal ini nilai u_1 dan u_2 diberikan pada persamaan ${u_1}^*(t)$ dan ${u_2}^*(t)$

4.7 Analisis dan Hasil Simulasi Numerik

Pada bagian ini ditunjukkan efektivitas penerapan kendali dengan pencegahan berupa penyuluhan imunisasi atau vaksinasi dan pengobatan terhadap individu yang terinfeksi dengan simulasi yang dilakukan sebagai berikut:

1. Tanpa kendali $(u_1 = 0, u_2 = 0)$
2. Dengan kendali pencegahan berupa penyuluhan imunisasi atau vaksinasi serta pengobatan pada individu yang terinfeksi $(u_1 \neq 0, u_2 \neq 0)$

Simulasi numerik dilakukan menggunakan *software* Matlab R2013b untuk melihat perubahan individu dengan dan tanpa kendali. Metode yang digunakan pada simulasi numerik adalah metode Runge-Kutta orde 4 dengan metode *forward-backward sweep*. Adapun *source code* program terlampir pada Lampiran.

Pada model diberikan dua kendali yaitu penyuluhan imunisasi/vaksinasi u_1 dan pengobatan u_2. Kendali penyuluhan imunisasi atau vaksinasi diberikan kepada individu sehat namun rentan terinfeksi sedangkan kendali

pengobatan diberikan kepada individu yang terinfeksi. Adapun nilai awal variabel dan parameter model penyebaran penyakit difteri dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 4.3 Nilai Awal Variabel Model Penyebaran Penyakit Difteri

Variabel	Nilai Awal	Sumber
S	224.081.587	[6]
V	7.851.842	[6]
I	1.386	[6]
R	1.197	[6]

Tabel 4.4 Nilai Awal Parameter Model Penyebaran Penyakit Difteri

Parameter	Nilai Awal	Sumber
θ	0,019	[6]
μ	0,007115	[6]
β	0,655348	[6]
γ	0,558782	[6]
η	0,020565	[6]
α	0,019242	[6]
σ	0,1	[6]
δ	0,000048	[6]

Dari nilai-nilai parameter pada Tabel 4.4, maka dapat diperoleh nilai R_0 yaitu :

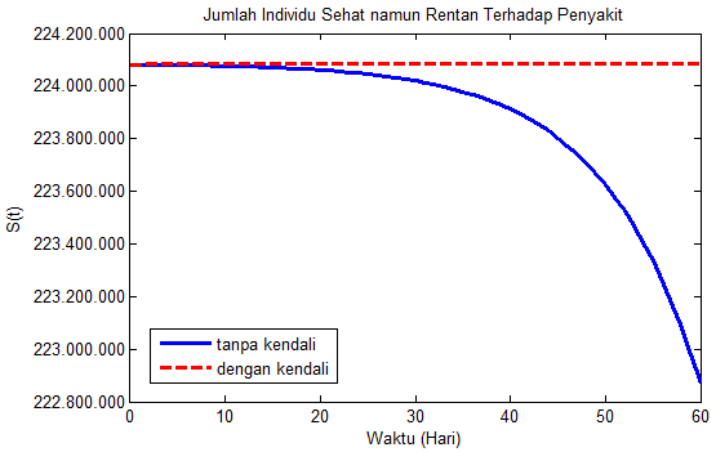
$$= \frac{0{,}655348(0{,}019)(0{,}007115 + 0{,}1) + 0{,}000048(0{,}019242)(0{,}019)}{0{,}007115(0{,}007115 + 0{,}1 + 0{,}019242)(0{,}007115 + 0{,}558782 + 0{,}020565)}$$

$= 2{,}5301$

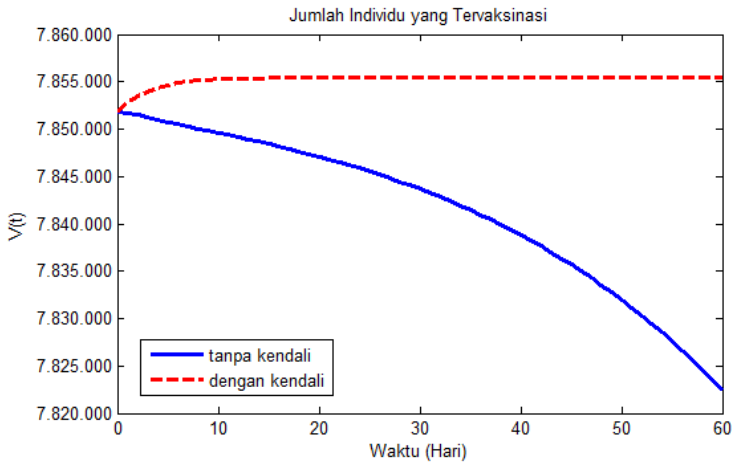
Karena nilai $R_0 = 2{,}5301 > 1$, artinya penyakit akan meningkat menjadi wabah dan akan bertahan dalam populasi. Kemudian simulasi yang dilakukan ketika $R_0 > 1$ adalah menunjukkan pengaruh dua variabel kendali yaitu penyuluhan imunisasi atau vaksinasi dan pengobatan. Sehingga dapat ditunjukkan simulasi perubahan banyaknya individu pada setiap populasi sebelum dan setelah diberikan kendali.

4.7.1 Simulasi Numerik Ketika $c_1 > c_2$

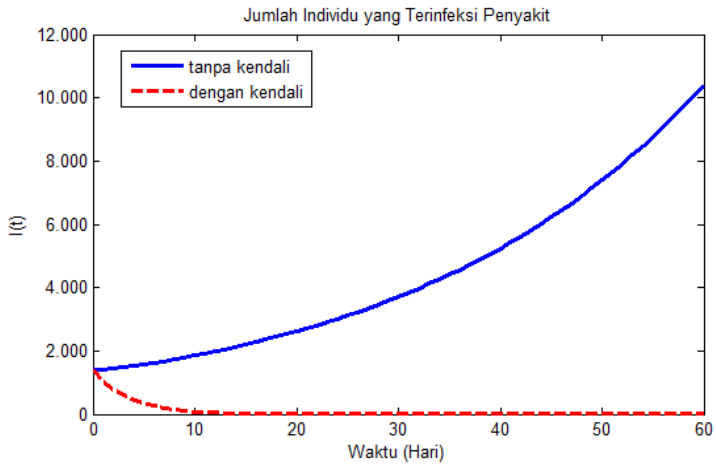
Untuk simulasi numerik ketika $c_1 > c_2$ dilakukan dengan mengasumsikan nilai $c_1 = 0{,}7$ dan $c_2 = 0{,}3$. Kemudian dilakukan simulasi yang menunjukkan perubahan banyaknya individu pada setiap populasi sebelum dan setelah diberikan kendali yang ditunjukkan pada Gambar 4.3 (a), (b), (c), dan (d).



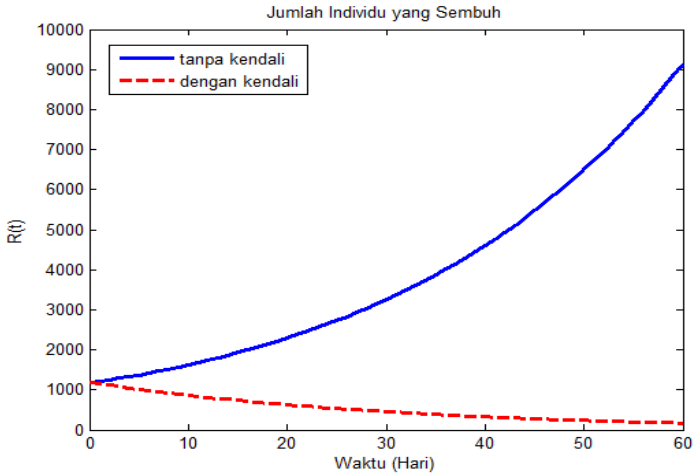
(a)


Jumlah Individu yang Tervaksinasi
7.860.000
7.855.000
7.850.000
7.845.000
7.840.000
7.835.000
7.830.000
7.825.000
7.820.000
V(t)
0
10
20
30
40
50
60
Waktu (Hari)
tanpa kendali
dengan kendali

(b)


Jumlah Individu yang Terinfeksi Penyakit
12.000
10.000
8.000
6.000
4.000
2.000
0
I(t)
0
10
20
30
40
50
60
Waktu (Hari)
tanpa kendali
dengan kendali

(c)



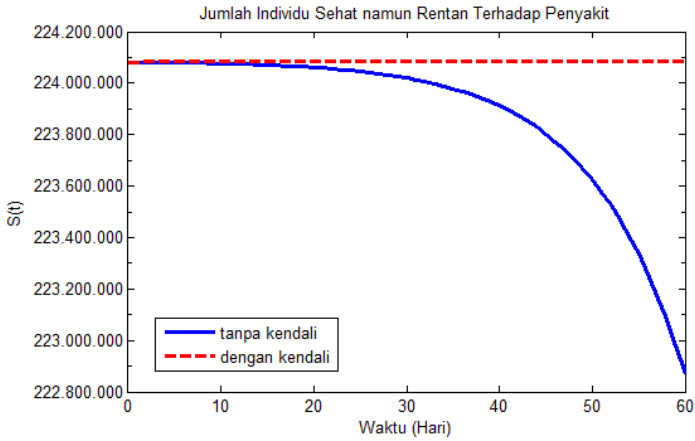
(d)

Gambar 4.3 Grafik Perubahan Jumlah Individu (a) Sehat namun rentan terinfeksi, (b)Tervaksinasi, (c) Terinfeksi, (d) Sembuh ketika $c_1 > c_2$

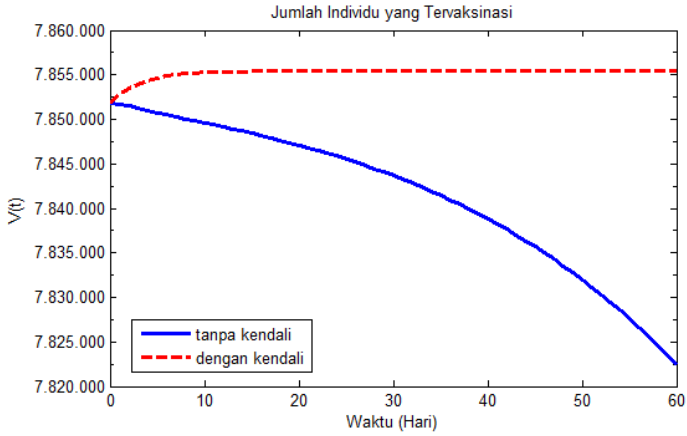
Pada Gambar 4.3 (a), (b), (c), dan (d) menunjukkan adanya perbedaan jumlah individu ketika sebelum dan setelah diberikan kendali dengan $c_1 > c_2$. Ketika belum diberikan kendali, jumlah individu rentan dan individu tervaksinasi mengalami penurunan yang drastis, sedangkan jumlah individu terinfeksi dan individu sembuh mengalami peningkatan. Ketika telah diberikan kendali $u_1(t)$ dan $u_2(t)$, jumlah individu rentan dan individu tervaksinasi mengalami peningkatan, sedangkan individu terinfeksi dan individu sembuh mengalami penurunan.

4.7.2 Simulasi Numerik Ketika $c_1 = c_2$

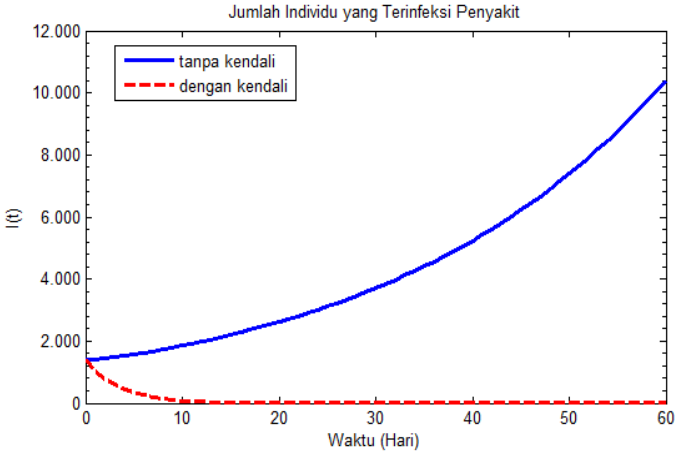
Untuk simulasi numerik ketika $c_1 = c_2$ dilakukan dengan mengasumsikan nilai $c_1 = 0{,}3$ dan $c_2 = 0{,}3$. Simulasi yang menunjukkan perubahan banyaknya individu pada setiap populasi sebelum dan setelah diberikan kendali yang ditunjukkan pada Gambar 4.4 (a), (b), (c), dan (d).



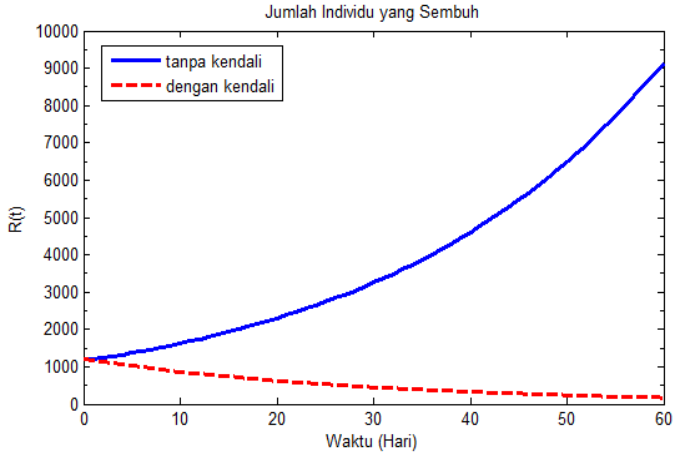
(a)



(b)



(c)



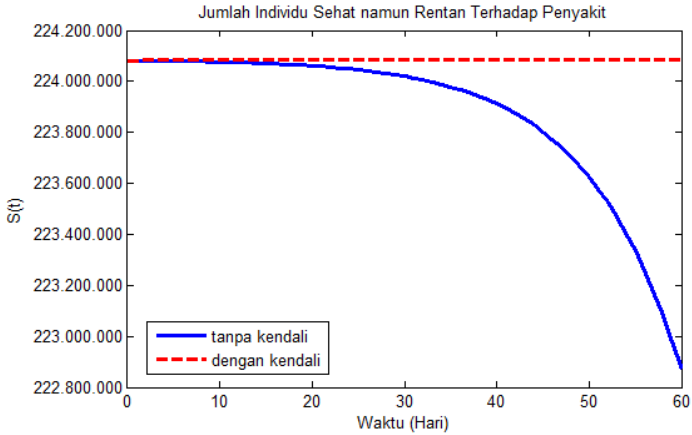
(d)

Gambar 4.4 Grafik Perubahan Jumlah Individu (a) Sehat namun rentan terinfeksi, (b)Tervaksinasi, (c) Terinfeksi, (d) Sembuh ketika $c_1 = c_2$

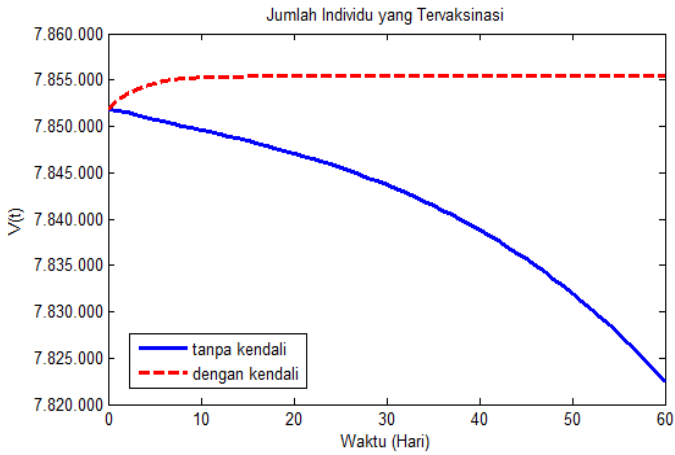
Pada Gambar 4.4 (a), (b), (c), dan (d) menunjukkan adanya perbedaan jumlah individu ketika sebelum dan setelah diberikan kendali $c_1 = c_2$. Ketika belum diberikan kendali, jumlah individu rentan dan individu tervaksinasi mengalami penurunan yang drastis, sedangkan jumlah individu terinfeksi dan individu sembuh mengalami peningkatan. Ketika telah diberikan kendali $u_1(t)$ dan $u_2(t)$, jumlah individu rentan dan individu tervaksinasi mengalami peningkatan, hal tersebut menunjukkan bahwa dengan pemberian kendali berupa penyuluhan imunisasi/vaksinasi dapat mengoptimalkan jumlah individu yang tervaksinasi sehingga dapat mencegah penyebaran penyakit difteri. Sedangkan individu terinfeksi dan individu sembuh mengalami penurunan. Jumlah individu terinfeksi mulai mencapai angka 0 setelah $t = 35$ hari. Hal tersebut menunjukkan bahwa dengan pemberian kendali pengobatan dapat mengurangi jumlah individu yang terinfeksi penyakit.

4.7.3 Simulasi Numerik Ketika $c_1 < c_2$

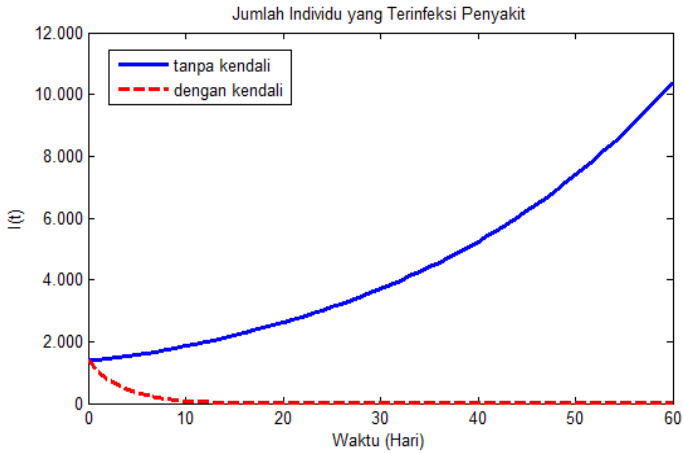
Untuk simulasi numerik ketika $c_1 < c_2$ dilakukan dengan mengasumsikan nilai $c_1 = 0{,}3$ dan $c_2 = 0{,}7$. Simulasi yang menunjukkan perubahan banyaknya individu pada setiap populasi sebelum dan setelah diberikan kendali yang ditunjukkan pada Gambar 4.5 (a), (b), (c), dan (d).


Jumlah Individu Sehat namun Rentan Terhadap Penyakit
224.200.000
224.000.000
223.800.000
223.600.000
223.400.000
223.200.000
223.000.000
222.800.000
S(t)
0
10
20
30
40
50
60
Waktu (Hari)
tanpa kendali
dengan kendali

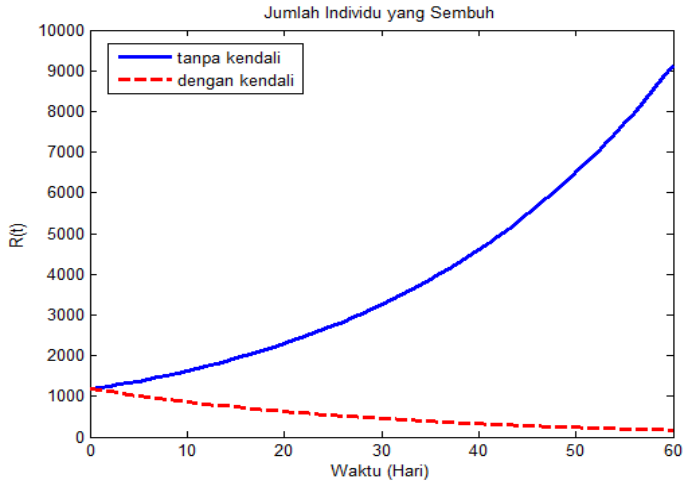
(a)


Jumlah Individu yang Tervaksinasi
7.860.000
7.855.000
7.850.000
7.845.000
7.840.000
7.835.000
7.830.000
7.825.000
7.820.000
V(t)
0
10
20
30
40
50
60
Waktu (Hari)
tanpa kendali
dengan kendali

(b)



(c)



(d)

Gambar 4.5 Grafik Perubahan Jumlah Individu (a) Sehat namun rentan terinfeksi, (b)Tervaksinasi, (c) Terinfeksi, (d) Sembuh ketika $c_1 < c_2$

Pada Gambar 4.5 (a), (b), (c), dan (d) menunjukkan adanya perbedaan jumlah individu ketika sebelum dan setelah diberikan kendali dengan $c_1 < c_2$. Ketika belum diberikan kendali, jumlah individu rentan dan individu tervaksinasi mengalami penurunan yang drastis, sedangkan jumlah individu terinfeksi dan individu sembuh mengalami peningkatan. Ketika telah diberikan kendali $u_1(t)$ dan $u_2(t)$, jumlah individu rentan dan individu tervaksinasi mengalami peningkatan, sedangkan individu terinfeksi dan individu sembuh mengalami penurunan.

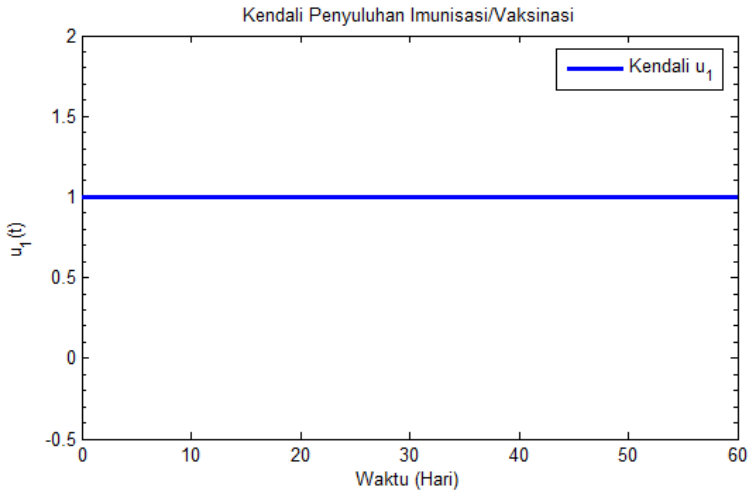
Pada simulasi ini, berdasarkan persamaan (4.9) diperoleh nilai fungsi tujuan menggunakan integrasi numerik dengan metode trapezoidal pada tabel berikut

Tabel 4.5 Hasil Fungsi Tujuan

Nilai $c_1,\ c_2$	Jumlah individu terinfeksi saat $t = 60$ hari	J
$c_1 > c_2$	0	4997,925
$c_1 = c_2$	0	4962,925
$c_1 < c_2$	0	4974,825

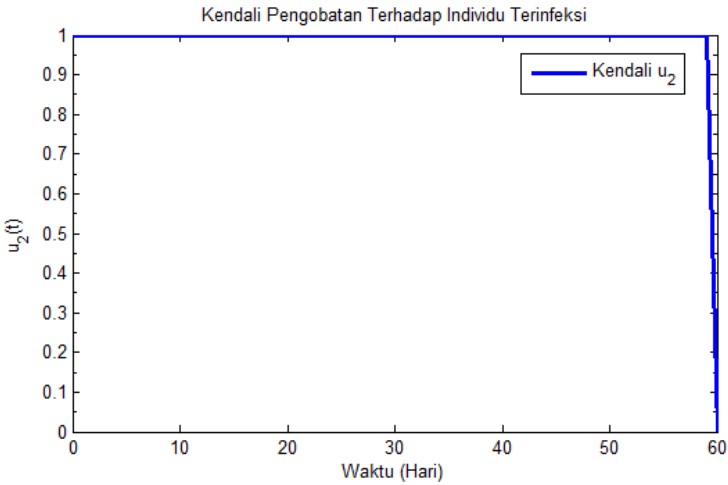
Berdasarkan tujuan dalam penelitian ini yaitu meminimumkan jumlah individu yang terinfeksi serta biaya kendalinya, maka semakin kecil nilai J yang dihasilkan semakin baik. Sehingga menurut tabel tersebut, nilai fungsi tujuan paling kecil terjadi jika $c_1 = c_2$ dengan nilai 4962,925 menjadi pilihan terbaik.

Selanjutnya, grafik tingkat pemberian kendali optimal u_1 (penyuluhan imunisasi/vaksinasi) dan u_2 (pengobatan) dengan $c_1 = c_2$ ditunjukkan pada Gambar 4.6 dan Gambar 4.7.



Gambar 4.6 Grafik tingkat pemberian kendali optimal u_1 berupa Penyuluhan imunisasi/vaksinasi

Berdasarkan Gambar 4.6 menunjukkan bahwa pemberian kendali u_1 (penyuluhan imunisasi/vaksinasi) optimal pada nilai 1. Hal ini berarti bahwa penyuluhan imunisasi/vaksinasi dilakukan setiap hari sampai $t = 60$ hari. Hal ini bertujuan agar dapat mengoptimalkan jumlah individu yang divaksinasi sehingga mampu mengurangi penyebaran penyakit difteri.



Gambar 4.7 Grafik tingkat pemberian kendali optimal u_2 berupa pengobatan terhadap individu terinfeksi.

Berdasarkan Gambar 4.7 menunjukkan bahwa pemberian kendali u_2 (pengobatan) optimal pada nilai 1. Hal ini berarti bahwa pegobatan terhadap individu yang terinfeksi dilakukan secara maksimal hanya dilakukan sampai $t = 59$ hari, kemudian pengobatan terhadap individu yang terinfeksi dapat dikurangi pada hari berikutnya. Hal tersebut dilakukan karena penyebaran penyakit difteri serta jumlah individu yang terinfeksi mengalami penurunan sehingga pemberian pengobatan juga semakin menurun.

Berdasarkan hasil simulasi, didapatkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit difteri setelah 60 hari tanpa diberikan kendali adalah 10.500, sedangkan dengan diberikan kendali u_1 dan u_2 sebanyak 0 individu dengan persentase reduksi 100%. Pemberian kendali optimal berupa penyuluhan imunisasi/vaksinasi dilakukan setiap hari, sedangkan pengobatan individu terinfeksi dilakukan secara maksimal hanya diselang waktu $[0,59]$ hari. Sehingga, penyebaran penyakit difteri dapat dikurangi secara efektif dengan penyuluhan imunisasi/vaksinasi serta pengobatan terhadap individu yang terinfeksi.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan dari Tugas Akhir serta saran yang dapat dijadikan sebagai rekomendasi untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang diuraikan pada Bab IV yaitu sebagai berikut,

1. Kendali optimal yang didapatkan pada upaya meminimalkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit dengan menerapkan teori kendali optimal menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin yaitu pengendali optimal u_1 yang merupakan penyuluhan imunisasi atau vaksinasi, dan u_2 yang merupakan pengobatan terhadap individu yang terinfeksi dimana akan memperoleh nilai optimal jika nilai

$$u_1(t) = \frac{(\lambda_S - \lambda_V)\alpha S}{c_1}$$

$$u_2(t) = \frac{(\lambda_I - \lambda_R)I}{c_2}$$

2. Berdasarkan hasil simulasi, dengan pemberian kendali penyuluhan imunisasi dan pengobatan dapat menurunkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit difteri secara efektif dengan persentase reduksi sebesar 100% selama 60 hari.

5.2 Saran

Saran yang dapat diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya yaitu:

1. Mengembangkan model penyebaran penyakit difteri serta menggunakan metode yang berbeda dalam menyelesaikan kendali optimalnya.
2. Mengembangkan desain kendali dengan menggunakan model yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kementerian Kesehatan RI. (2020). **Profil Kesehatan Indonesia Tahun 2019**. Jakarta: Kementerian Kesehatan RI.

[2] WHO. (2020). ***Diptheria Reported Cases***. Diakses melalui https://apps.who.int/immunization_monitoring/globalsummary/timeseries/tsincidencediphtheria.html pada tanggal 10 Februari 2021 pukul 14.00 WIB.

[3] Wulandari, U. N. (2013). **Analisis Model Epidemik MSEIR Pada Penyebaran Penyakit Difteri**. Skripsi Jurusan Matematika, Universitas Jember, Jember.

[4] Puspita G., Kharis M., & Supriyono. (2017). **Pemodelan Matematika pada Penyebaran Penyakit Difteri dengan Pengaruh Karantina dan Vaksinasi**. *Unnes Journal of Mathematics*, Vol. 6, No.1, Hal. 25-35.

[5] Izzati N., Andriani A., & Robi'aqolbi R. (2020). ***Optimal Control of Diphtheria Epidemic Model with Prevention and Treatment***. *Journal of Physics:Conference Series*, 1663 012042.

[6] Aryani, I., & Widyaningsih, P. (2020). **Model *Susceptible Vaccinated Infected Recovered (SVIR)* dan Penerapannya pada Penyakit Difteri di Indonesia.** PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika, Vol. 3, Hal. 156-162.

[7] Pertiwi, B. P. (2015). **Analisis Kestabilan dan Solusi Numerik pada Model Transmisi Penyakit Menular dengan Vaksinasi dan Pengobatan**. Skripsi Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[8] Van Den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). ***Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission*.** *Mathematical Biosciences*, Vol. 180, Hal. 29-48.

[9] Naidu, D. S. (2002). ***Optimal Control Systems***. New York.

[10] Wijayanti, H., Setyaningsih, S., & Wati, M. (2011). **Metode Runge Kutta Dalam Penyelesaian Model Radang Akut**. *Ekologia,* Vol. 11, No. 2, Hal. 46-52.

[11] Putri, N. A. (2020). **Desain Kendali Optimal Pada Model Penyebaran Penyakit Malaria dengan Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin**. Skripsi Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[12] Syah Putri, S.N.M.L. (2018). **Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit *Co-Infection* Chlamydia dan Pneumonia.** Skripsi Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

[13] Monita, Y. (2020). **Pengendalian Penyebaran Koinfeksi TB-HIV/AIDS Dengan Menggunakan Kontrol Optimal.** Skripsi Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Sunan Ampel, Surabaya.

[14] Fathoni, M. I. A. (2015). **Analisis Sistem Dinamik dan Kontrol Optimal pada Model Epidemi Tipe SEIT dengan Perbedaan Periode *Exposed* dan Tingkat Kejadian Tersaturasi**. Tesis Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

LAMPIRAN

Lampiran I. *Source Code* Matlab

```
%Persamaan State
function dy = pstate(y,Nt,u1,u2,th,mu,beta,
gm,eta,al,sg,delta)

x(1)=(th*Nt)-(mu*y(1))-(beta*((y(1)*y(3))/Nt))-
      (u1*al*y(1))+(sg*y(2));
x(2)=(u1*al*y(1))-(mu*y(2))-(sg*y(2))-
      (delta*((y(2)*y(3))/Nt));
x(3)=(beta*((y(1)*y(3))/Nt))-(mu*y(3))-(gm*y(3))-
      (eta*y(3))+(delta*((y(2)*y(3))/Nt))-(u2*y(3));
x(4)=(gm*y(3))-(mu*y(4))+(u2*y(3));
dy  =[x(1) x(2) x(3) x(4)];

%y(1)=S    y(2)=V  y(3)=I  y(4)=R
```

```
%Persamaan Costate
function dk = pcostate(y,S,V,I,Nt,u1,u2,
mu,beta,gm,eta,al,sg,delta,p1,p2,p3,p4)

p1=y(1);
p2=y(2);
p3=y(3);
p4=y(4);

x(1)=(p1*(mu+(beta*(I/Nt))+(u1*al)))-(p2*(u1*al))-
      (p3*(beta*(I/Nt)));
x(2)=(p2*(mu+sg+(delta*(I/Nt))))-(p1*sg)-
      (p3*(delta*(I/Nt)));
x(3)=-1+(p1*(beta*(S/Nt)))+(p2*(delta*(V/Nt)))-
      (p3*((beta*(S/Nt))-mu-gm-eta+
      (delta*(V/Nt))-u2))-(p4*(gm+u2));
x(4)=(p4*mu);
dk  =[x(1) x(2) x(3) x(4)];

%p1=lambdaS, p2=lambdaV, p3=lambdaI, p4=lambdaR
```

Source Code Simulasi Numerik

```
clear all;
clc;
%Populasi awal
S0=224081587; %individu sehat namun rentan
V0=7851842;  %individu tervaksin
I0=1386;    %individu terinfeksi
R0=1197;    %individu sembuh
Nt=231936012; %total populasi

%Nilai Parameter
th = 0.019; %theta(rate lahir)
mu = 0.007115; %miu(rate kematian alami)
beta = 0.655348; %beta(rate kontak)
gm = 0.558782; %gamma(rate kesembuhan)
eta = 0.020565; %eta(rate mati krn penyakit)
al = 0.019242; %alpha(rate vaksinasi)
sg = 0.1; %sigma(rate efektivitas vaksin)
delta = 0.000048; %delta(rate gagal vaksin)
tf = 60;
t0 = 0;
N = 60;
h = (tf-t0)/N;
t = t0:h:tf;
L = length(t);
u1max = 1;
u2max = 1;

%Bobot pada biaya kontrol
c1 = 0.3;
c2 = 0.3;

%Langkah 1
u1 = zeros(L,1);
u1old = zeros(L,1);
u2 = zeros(L,1);
u2old = zeros(L,1);
S = zeros(L,1);
V = zeros(L,1);
I = zeros(L,1);
R = zeros(L,1);
```

```
Sold = zeros(L,1);
Vold = zeros(L,1);
Iold = zeros(L,1);
Rold = zeros(L,1);
p1 = zeros(L,1);
p2 = zeros(L,1);
p3 = zeros(L,1);
p4 = zeros(L,1);
p1o = zeros(L,1);
p2o = zeros(L,1);
p3o = zeros(L,1);
p4o = zeros(L,1);
tes = 1;
it = 0;

while tes > 0.001
    %Langkah 2
    u1old = u1; u2old = u2;
    Sold = S;
    Vold = V;
    Iold = I;
    Rold = R;
    p1o = p1;
    p2o = p2;
    p3o = p3;
    p4o = p4;

    %Langkah 3
    S(1) = S0;
    V(1) = V0;
    I(1) = I0;
    R(1) = R0;
    J(it + 1) = 0;

%Langkah 4
for i = 1:L-1
   J(it+1) = J(it+1)+ h*(I(i)+ 1/2*c1*u1old(i)^2 +
             1/2*c2*u2old(i)^2);
   y = [S(i) V(i) I(i) R(i)];
  k1 = h*pstate(y,Nt,u1old(i),u2old(i),th,mu,
       beta,gm,eta,al,sg,delta);
```

```
    k2 = h*pstate(y+0.5*k1,Nt,u1old(i),u2old(i),
         th,mu,beta,gm,eta,al,sg,delta);
    k3 = h*pstate(y+0.5*k2,Nt,u1old(i),u2old(i),
         th,mu,beta,gm,eta,al,sg,delta);
    k4 = h*pstate(y+k3,Nt,u1old(i),u2old(i),th,
         mu,beta,gm,eta,al,sg,delta);
    y = y + ((1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4));

    S(i+1) = y(1);
    V(i+1) = y(2);
    I(i+1) = y(3);
    R(i+1) = y(4);
end
J(it+1) = J(it+1)+ h*(I(L)+1/2*c1*u1old(L)^2 +
          1/2*c2*u2old(L)^2);

%Plot populasi tanpa kendali
     if it == 0
         figure(1)
         plot(t,S,'b-','LineWidth',2.5);
         hold on;
         figure(2)
         plot(t,V,'b-','LineWidth',2.5);
         hold on;
         figure(3)
         plot(t,I,'b-','LineWidth',2.5);
         hold on;
         figure(4)
         plot(t,R,'b-','LineWidth',2.5);
         hold on;
     end
     p1(L) = 0;
     p2(L) = 0;
     p3(L) = 0;
     p4(L) = 0;
     u1(L) = 0;
     u2(L) = 0;
```

```
%Langkah 5
temp2 = min([((p1(L)-p2(L))*al*S(L))/c1 u1max]);
u1(L) = max([temp2 0]);
temp4 = min([((p3(L)-p4(L))*I(L))/c2 u2max]);
u2(L) = max([temp4 0]);

%Langkah 6
for i = 1:L-1
    j = L-i;

    y = [p1(j+1) p2(j+1) p3(j+1) p4(j+1)];
   k1 = h*pcostate(y,S(j+1),V(j+1),I(j+1),
        Nt,u1old(j+1),u2old(j+1),mu,beta,gm,
        eta,al,sg,delta,p1,p2,p3,p4);
   k2 = h*pcostate(y+0.5*k1,S(j+1),V(j+1),
        I(j+1),Nt,u1old(j+1),u2old(j+1),mu,
        beta,gm,eta,al,sg,delta,p1,p2,p3,p4);
   k3 = h*pcostate(y+0.5*k2,S(j+1),V(j+1),
        I(j+1),Nt,u1old(j+1),u2old(j+1),mu,
        beta,gm,eta,al,sg,delta,p1,p2,p3,p4);
   k4 = h*pcostate(y+k3,S(j+1),V(j+1),
        I(j+1),Nt,u1old(j+1),u2old(j+1),mu,
        beta,gm,eta,al,sg,delta,p1,p2,p3,p4);
    y = y - ((1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4));

    p1(j) = y(1);
    p2(j) = y(2);
    p3(j) = y(3);
    p4(j) = y(4);

temp2 = min([((p1(j)-p2(j))*al*S(j))/c1
         u1max]);
u1(j) = max([temp2 0]);
temp4 = min([((p3(j)-p4(j))*I(j))/c2 u2max]);
u2(j) = max([temp4 0]);
end
```

```
%Langkah 7
eS = sum(abs(S-Sold));
eV = sum(abs(V-Vold));
eI = sum(abs(I-Iold));
eR = sum(abs(R-Rold));
ep1 = sum(abs(p1-p1o));
ep2 = sum(abs(p2-p2o));
ep3 = sum(abs(p3-p3o));
ep4 = sum(abs(p4-p4o));
eu1 = sum(abs(u1-u1old));
eu2 = sum(abs(u2-u2old));
tes = eS + eV + eI + eR + ep1 + ep2 + ep3 +
      ep4 + eu1 + eu2;
it = it + 1;

u1 = (0.5*u1 + 0.5*u1old);
u2 = (0.5*u2 + 0.5*u2old);
end

%Langkah 8
%Plot populasi dengan kontrol
figure(1)
plot(t,S,'r--','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('S(t)');
grid off;
legend('tanpa kendali','dengan kendali');
title('Jumlah Individu Sehat namun Rentan
Terhadap Penyakit');
hold on;

figure(2)
plot(t,V,'r--','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('V(t)');
grid off;
legend('tanpa kendali','dengan kendali');
title('Jumlah Individu yang Tervaksinasi');
```

```
hold on;
```

```
figure(3)
plot(t,I,'r--','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('I(t)');
grid off;
legend('tanpa kendali','dengan kendali');
title ('Jumlah Individu yang Terinfeksi
Penyakit');
hold on;

figure(4)
plot(t,R,'r--','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('R(t)');
grid off;
legend('tanpa kendali','dengan kendali');
title('Jumlah Individu yang Sembuh');
hold on;

figure(5)
plot(t,u1,'b-','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('u_1(t)');
grid off;
legend('Kendali u_1');
title('Kendali Penyuluhan Imunisasi/
Vaksinasi');
hold on;

figure(6)
plot(t,u2,'b-','LineWidth',2.5);
xlabel('Waktu (Hari)');
ylabel('u_2(t)');
grid off;
legend('Kendali u_2');
title('Kendali Pengobatan Terhadap Individu
Terinfeksi');
hold on;
```

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BIODATA PENULIS

Penulis dilahirkan di Semarang, 11 Mei 1999 dengan nama lengkap Lintang Hayu Nur Afnani, biasa dipanggil Lintang. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara oleh pasangan suami istri Eko Hadi Purnomo dan Tri Asih Yuliani. Pendidikan formal yang ditempuh oleh penulis antara lain dimulai dari TK Puspa Kencana Semarang, SDN Jomblang 01 Semarang, SMPN 2 Nganjuk dan SMAN 2 Nganjuk. Setelah lulus, penulis diterima sebagai mahasiswa Departemen Matematika ITS melalui jalur SNMPTN dengan NRP 06111740000036. Selama masa perkuliahan, penulis aktif dalam kegiatan organisasi, dan kepanitiaan. Organisasi kampus yang pernah di ikuti oleh penulis adalah Himpunan Mahasiswa Matematika ITS (HIMATIKA-ITS) sebagai staf *Social Development Department* (2019-2020). Penulis juga aktif dalam kepanitiaan yang diadakan oleh HIMATIKA-ITS yaitu Olimpiade Matematika ITS (OMITS 13th) sebagai kestari regional Makassar. Selain itu, penulis juga aktif dalam kegiatan kesenian HIMATIKA-ITS (kesenian tari) dengan beberapa kali ikut mengisi acara yang diadakan oleh Departemen Matematika ITS.

Demikian biodata penulis, bagi pembaca yang ingin berdiskusi, memberikan saran, dan kritik lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini untuk perbaikan kedepannya dapat disampaikan melalui *e-mail* : lintangafnani11@gmail.com