

Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial

Annisa Rahmita Soemarsono, Sunarsini, Sadjidon
Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: sunarsini@matematika.its.ac.id

Abstrak- Salah satu topik yang dipelajari dalam analisis fungsional adalah ruang metrik. Konsep ruang metrik dapat diperluas, salah satunya adalah ruang metrik parsial. Konsep ruang metrik parsial dijadikan sebagai bahan kajian untuk memodifikasi prinsip kontraksi Banach. Konsep ruang metrik parsial berbeda dengan konsep ruang metrik. Pada ruang metrik, jarak suatu titik ke dirinya sendiri selalu bernilai nol sedangkan pada ruang metrik parsial, jarak suatu titik ke dirinya sendiri tidak selalu bernilai nol. Prinsip kontraksi Banach menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap. Pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah merupakan perluasan dari prinsip kontraksi Banach. Dengan menggunakan teorema titik tetap kedua pemetaan tersebut pada ruang metrik parsial, diperoleh titik tetap tunggal.

Kata kunci: ruang metrik, ruang metrik parsial, pemetaan kontraktif lemah, pemetaan Kannan lemah, teorema titik tetap

I. PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu bidang yang berpengaruh dalam perkembangan ilmu pengetahuan di dunia. Salah satu ilmu matematika yang sering digunakan sebagai bahan penelitian adalah analisis fungsional. Analisis fungsional mengalami perluasan, seperti ruang vektor, ruang norm, dan ruang metrik. Konsep ruang metrik sudah banyak dikembangkan, seperti ruang quasi metrik, ruang pseudo metrik, ruang ultrametrik, ruang metrik terurut, dan ruang metrik parsial. Karena telah mengalami perluasan-perluasan tersebut, analisis fungsional menjadi salah satu ilmu Matematika yang menarik untuk dikaji lebih dalam.

Ruang metrik parsial merupakan salah satu perluasan dari konsep ruang metrik. Salah satu ilmuwan komputer yang pertama kali mengenalkan sebuah konsep ruang metrik parsial adalah Matthews. Pada tahun 1994, lewat tulisannya yang berjudul “Partial Metric Topology” [4], dia menjabarkan hasil penelitiannya mengenai topologi ruang metrik parsial. Di dalam penelitiannya, dia juga memperluas prinsip kontraksi Banach untuk menunjukkan keberadaan dan ketunggalan titik tetap dari suatu pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial.

Pada ruang metrik parsial, teorema titik tetap menjadi objek yang dikaji untuk menerjemahkan notasi-notasi pada jaringan data flow (diagram) dan menunjukkan bahwa prinsip

kontraksi Banach dapat digeneralisasi pada ruang metrik parsial untuk aplikasi verifikasi program. Pada tahun 2008, seorang ilmuwan Matematika bernama Rus menyelidiki masalah-masalah dasar yang berkaitan dengan teorema titik tetap pada ruang metrik yang kemudian dikonstruksi ke dalam ruang metrik parsial [1].

Selanjutnya, pada tahun 2010, Ruiz dan Antonio [7] memperluas prinsip kontraksi Banach pada ruang metrik yang digagas oleh Kannan. Berpedoman pada hasil penelitian yang dilakukan oleh Dugundji dan Granas [5] terkait pengembangan pemetaan kontraktif menjadi pemetaan kontraktif lemah, mereka memperluas teorema Kannan ke dalam pemetaan Kannan lemah. Kemudian, berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan oleh Matthews, Dugundji dan Granas serta Ruiz, pada tahun 2012, Maryam A Alghamdi, Naseer Shahzad dan Oscar Valero [2] melakukan penelitian untuk menyelidiki bahwa pemetaan kontraktif lemah dan Kannan lemah pada ruang metrik dapat dikonstruksi ke dalam ruang metrik parsial.

Penelitian-penelitian di atas yang berkaitan dengan perkembangan teorema titik tetap melalui perluasan prinsip kontraksi Banach pada ruang metrik parsial, serta penerapan teorema titik tetap dalam kasus ruang metrik parsial, menjadi latar belakang dari penulisan tugas akhir ini.

Masalah yang dibahas pada tugas akhir ini adalah bagaimana keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada pemetaan kontraktif lemah dan Kannan lemah di ruang metrik parsial. Pada tugas akhir ini, hanya dibahas tentang teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, ditunjukkan teori-teori dasar terkait konsep ruang metrik dan ruang metrik parsial, meliputi beberapa definisi yang berkaitan dengan ruang metrik dan ruang metrik parsial. Ditunjukkan pula beberapa teorema titik tetap pemetaan kontraktif pada ruang metrik dan ruang metrik parsial.

A. Ruang Metrik

Pada bagian ini ditunjukkan beberapa definisi yang berkaitan dengan konsep ruang metrik, meliputi definisi ruang metrik beserta contoh metrik dan definisi pemetaan

kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik.

Definisi 2.1 [3] Diberikan himpunan tak kosong X . Fungsi $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan metrik pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi

(D1) $d(x, y) \geq 0$;

(D2) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;

(D3) $d(x, y) = d(y, x)$;

(D4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Pasangan (X, d) dikatakan sebagai ruang metrik.

Contoh 2.2 [3] Diberikan himpunan $\mathbb{R}$. Fungsi $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ merupakan metrik pada $\mathbb{R}$.

Definisi 2.3 [3] Diberikan (X, d) ruang metrik. Pemetaan $f: X \rightarrow X$ dinamakan pemetaan kontraktif jika terdapat $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ sedemikian hingga $d(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha}d(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Definisi 2.4 [5] Diberikan (X, d) ruang metrik. Pemetaan $f: X \rightarrow X$ dinamakan pemetaan kontraktif lemah jika terdapat $\bar{\alpha}: X \times X \rightarrow [0, 1)$ sedemikian hingga untuk setiap $0 \leq a \leq b$, $\sup\{\bar{\alpha}(x, y): a \leq d(x, y) \leq b\} < 1$ dan $d(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha}(x, y)d(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Definisi 2.5 [6] Diberikan (X, d) ruang metrik. Pemetaan $f: X \rightarrow X$ dinamakan pemetaan Kannan jika terdapat $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ sedemikian hingga $d(f(x), f(y)) \leq \frac{\bar{\alpha}}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$ untuk setiap $x, y \in X$.

Definisi 2.6 [7] Diberikan (X, d) ruang metrik. Pemetaan $f: X \rightarrow X$ dinamakan pemetaan Kannan lemah jika terdapat $\bar{\alpha}: X \times X \rightarrow [0, 1)$ sedemikian hingga untuk setiap $0 \leq a \leq b$, $\sup\{\bar{\alpha}(x, y): a \leq d(x, y) \leq b\} < 1$ dan $d(f(x), f(y)) \leq \frac{\bar{\alpha}(x, y)}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$ untuk setiap $x, y \in X$.

B. Ruang Metrik Parsial

Pada bagian ini ditunjukkan beberapa definisi yang berkaitan dengan konsep ruang metrik parsial. Definisi-definisi tersebut tidak jauh berbeda dengan definisi-definisi pada ruang metrik yang meliputi definisi ruang metrik parsial beserta contoh metrik parsial, definisi konvergensi barisan dan barisan Cauchy pada ruang metrik parsial, definisi ruang metrik parsial lengkap serta definisi pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial lengkap.

Definisi 2.7 [4] Diberikan himpunan tak kosong X . Fungsi $p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dikatakan metrik parsial pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi

(P1) $x = y$ jika dan hanya jika $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$;

(P2) $p(x, x) \leq p(x, y)$;

(P3) $p(x, y) = p(y, x)$;

(P4) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$.

Pasangan (X, p) dikatakan sebagai ruang metrik parsial.

Contoh 2.8 [2] Diberikan himpunan $\mathbb{R}^+$. Fungsi $p: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ yang didefinisikan sebagai $p(x, y) =$

$\max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$ merupakan metrik parsial pada $\mathbb{R}^+$.

Definisi 2.9 [4] Jika diberikan (X, p) ruang metrik parsial dan $\{x_n\}$ adalah barisan pada X untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka

(i) $\{x_n\}$ konvergen ke titik $x \in X$ pada X jika dan hanya jika $p(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x)$;

(ii) $\{x_n\}$ dikatakan barisan Cauchy pada (X, p) jika $\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga;

(iii) (X, p) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ pada X konvergen ke titik $x \in X$ sehingga $p(x, x) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m)$.

Definisi 2.10 [4] Diberikan (X, p) ruang metrik parsial. Pemetaan $f: X \rightarrow X$ dinamakan pemetaan kontraktif jika terdapat $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ sedemikian hingga $p(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha}p(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

C. Teorema Titik Tetap

Pada bagian ini ditunjukkan beberapa teorema titik tetap. Pemetaan $f: X \rightarrow X$ dikatakan memiliki titik tetap yang tunggal jika $x = f(x)$ untuk $x \in X$.

Terlebih dahulu diberikan teorema titik tetap pada ruang metrik lengkap.

Teorema 2.11 [3] Diberikan (X, d) ruang metrik lengkap. Jika $f: X \rightarrow X$ adalah pemetaan kontraktif, maka f memiliki titik tetap yang tunggal.

Teorema 2.12 [5] Diberikan (X, d) ruang metrik lengkap. Jika $f: X \rightarrow X$ adalah pemetaan kontraktif lemah, maka f memiliki titik tetap yang tunggal x^* dan $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergen ke x^* untuk setiap $x \in X$.

Teorema 2.13 [6] Diberikan (X, d) ruang metrik lengkap. Jika $f: X \rightarrow X$ adalah pemetaan Kannan, maka f memiliki titik tetap yang tunggal.

Teorema 2.14 [7] Diberikan (X, d) ruang metrik lengkap. Jika $f: X \rightarrow X$ adalah pemetaan Kannan lemah, maka f memiliki titik tetap yang tunggal x^* dan $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergen ke x^* untuk setiap $x \in X$.

Selanjutnya, diberikan teorema titik tetap pada ruang metrik parsial lengkap.

Teorema 2.15 [4] Diberikan (X, p) ruang metrik parsial lengkap. Jika $f: X \rightarrow X$ adalah pemetaan kontraktif, maka f memiliki titik tetap yang tunggal.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, diuraikan mengenai analogi ruang metrik dan ruang metrik parsial. Ditunjukkan pula beberapa contoh terkait pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik dan ruang metrik parsial. Selain itu, dibuktikan teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial dengan menggunakan beberapa lemma, serta diberikan contoh dari teorema titik tetap tersebut.

A. Ruang Metrik Parsial

Ruang metrik parsial merupakan salah satu pengembangan dari konsep ruang metrik. Karena terdapat perbedaan antara konsep ruang metrik dan ruang metrik parsial, maka berdasarkan [4], diperoleh analogi antara ruang metrik dan ruang metrik parsial. Hal tersebut tertuang pada teorema berikut ini.

Teorema 3.1. Diberikan (X, p) ruang metrik parsial. Jika $d^p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d^p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \quad (3.1)$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka d^p adalah metrik pada X .

Bukti:

Seperti pada Definisi 2.1, jika d^p adalah metrik pada X maka d^p memenuhi (D1), (D2), (D3) dan (D4) untuk setiap $x, y, z \in X$.

- (P2) dan (P3) $\rightarrow$ (D1)
- (P2), (P3) dan (P1) $\rightarrow$ (D2)
- (P3) $\rightarrow$ (D3)
- (P4) $\rightarrow$ (D4)

Terbukti bahwa d^p adalah metrik pada X . ■

Dari Teorema 3.1, terlihat bahwa p adalah metrik parsial pada X dan d^p adalah metrik pada X . Dengan menggunakan p dan d^p , dibentuk lemma-lemma yang menunjukkan analogi antara barisan Cauchy pada ruang metrik dan barisan Cauchy pada ruang metrik parsial, serta analogi antara ruang metrik lengkap dan ruang metrik parsial lengkap.

Lemma 3.2. Diberikan (X, p) ruang metrik parsial dan (X, d^p) ruang metrik, dengan d^p adalah metrik yang didefinisikan pada (3.1). Barisan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X, p) jika dan hanya jika $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p) .

Lemma 3.3. Diberikan (X, p) ruang metrik parsial dan (X, d^p) ruang metrik, dengan d^p adalah metrik yang didefinisikan pada (4.1). (X, p) dikatakan lengkap jika dan hanya jika (X, d^p) lengkap. Sehingga, jika diberikan barisan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pada (X, p) maka untuk $x \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d^p(x_n, x) = 0$ jika dan hanya jika $p(x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m)$.

Selanjutnya, melalui pengkonstruksian fungsi p^d yang dibangun dari metrik d , diperoleh bahwa fungsi p^d merupakan metrik parsial pada X , seperti yang tertuang pada teorema berikut ini.

Teorema 3.4. Diberikan (X, d) ruang metrik. Jika fungsi $p^d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dengan

$$p^d(x, y) = \frac{|x| + |y| + d(x, y)}{2}$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka p^d adalah metrik parsial pada X .

Bukti:

Seperti pada Definisi 2.7, jika p^d adalah metrik parsial pada X maka p^d memenuhi (P1), (P2), (P3) dan (P4) untuk setiap $x, y, z \in X$.

- (D2) $\rightarrow$ (P1)

- (D1) dan (D2) $\rightarrow$ (P2)
- (D3) $\rightarrow$ (P3)
- (D4) $\rightarrow$ (P4)

Terbukti bahwa p^d adalah metrik parsial pada X . ■

B. Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial

Pada bagian ini diberikan contoh pemetaan yang merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial, namun bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik. Diberikan pula contoh pemetaan yang merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial, namun bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik.

Terlebih dahulu diberikan definisi pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial. Dari [2], diperoleh definisi pemetaan kontraktif lemah sebagai berikut.

Definisi 3.5. Diberikan (X, p) ruang metrik parsial. Pemetaan $f: X \rightarrow X$ dinamakan pemetaan kontraktif lemah jika terdapat $\bar{a}: X \times X \rightarrow [0, 1)$ sedemikian hingga untuk setiap $0 \leq a \leq b$, $\sup\{\bar{a}(x, y): a \leq p(x, y) \leq b\} < 1$ dan $p(f(x), f(y)) \leq \bar{a}(x, y)p(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

Dengan menggunakan Definisi 3.5 dan Definisi 2.4 dapat diperoleh contoh pemetaan yang merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial, namun bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik.

Contoh 3.6. Diberikan p metrik parsial, dengan $p: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ didefinisikan sebagai $p(x, y) = \max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in [0, 1]$. Jika fungsi $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{2}$ untuk setiap $x \in [0, 1]$ dan fungsi $\bar{a}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1)$ dengan $\bar{a}(x, y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0, 1]$, maka f merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial $([0, 1], p)$.

Contoh 3.7. Diberikan fungsi $d^p: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dengan $d^p(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in [0, 1]$ dan p adalah metrik parsial, $p: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x, y) = \max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in [0, 1]$. Jika fungsi $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{2}$ untuk setiap $x \in [0, 1]$ dan fungsi $\bar{a}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1)$ dengan $\bar{a}(x, y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0, 1]$, maka f bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik $([0, 1], d^p)$.

Selanjutnya, dari [2], juga diperoleh definisi pemetaan Kannan lemah sebagai berikut.

Definisi 3.8. Diberikan (X, p) ruang metrik parsial. Pemetaan $f: X \rightarrow X$ dinamakan pemetaan Kannan lemah jika terdapat $\bar{a}: X \times X \rightarrow [0, 1)$ sedemikian hingga untuk setiap $0 \leq a \leq b$, $\sup\{\bar{a}(x, y): a \leq p(x, y) \leq b\} < 1$ dan $p(f(x), f(y)) \leq \frac{\bar{a}(x, y)}{2}[p(x, f(x)) + p(y, f(y))]$ untuk setiap $x, y \in X$.

Dengan menggunakan Definisi 3.8 dan Definisi 2.6 dapat diperoleh contoh pemetaan yang merupakan pemetaan

Kannan lemah pada ruang metrik parsial, namun bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik.

Contoh 3.9. Diberikan p metrik parsial, dengan $p: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = \max\{x,y\}$ untuk setiap $x,y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan

$$\bar{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \frac{p(f(x),f(y))}{p(x,y)} & , \max\{x,y\} \neq 0 \\ 0 & , \max\{x,y\} = 0 \end{cases}$$

untuk setiap $x,y \in [0,1]$, maka f merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$

Contoh 3.10. Diberikan d^p metrik, dengan $d^p: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ didefinisikan sebagai $d^p(x,y) = |x-y|$ untuk setiap $x,y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan

$$\bar{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \frac{p(f(x),f(y))}{p(x,y)} & , \max\{x,y\} \neq 0 \\ 0 & , \max\{x,y\} = 0 \end{cases}$$

untuk setiap $x,y \in [0,1]$ dengan p metrik parsial, $p: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = \max\{x,y\}$ untuk setiap $x,y \in [0,1]$, maka f bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$.

C. Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial

Pada bagian ini, dibuktikan teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial dengan menggunakan p dan d^p seperti yang didefinisikan pada Teorema 3.1. Ditunjukkan pula beberapa lemma yang mendukung dalam proses pembuktian teorema titik tetap tersebut serta contoh dari teorema titik tetap tersebut.

Pertama-tama ditunjukkan beberapa lemma yang digunakan dalam proses pembuktian teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial

Lemma 3.11. Diberikan (X, p) ruang metrik parsial lengkap dan $f: X \rightarrow X$ merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat $\bar{\alpha}: X \times X \rightarrow [0,1]$ dengan $\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ untuk setiap $0 \leq a \leq b$, dan $p(f(x),f(y)) \leq \bar{\alpha}(x,y) \max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\left[p(x,f(x)) + p(y,f(y))\right]\right\}$ untuk setiap $x,y \in X$. Jika $x \in X$ memenuhi barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$, maka $p(x_n, x_{n+1}) \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)p(x_{n-1}, x_n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 3.12. Diberikan (X, p) ruang metrik parsial lengkap dan $f: X \rightarrow X$ merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat $\bar{\alpha}: X \times X \rightarrow [0,1]$ dengan $\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ untuk setiap $0 \leq a \leq b$, dan $p(f(x),f(y)) \leq \bar{\alpha}(x,y) \max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\left[p(x,f(x)) + p(y,f(y))\right]\right\}$

untuk setiap $x,y \in X$. Jika $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ barisan pada X dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$, maka $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergen ke bilangan real $p = 0$ dengan kata lain $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Lemma 3.13. Diberikan (X, p) ruang metrik parsial lengkap dan $f: X \rightarrow X$ merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat $\bar{\alpha}: X \times X \rightarrow [0,1]$ dengan $\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ untuk setiap $0 \leq a \leq b$, dan $p(f(x),f(y)) \leq \bar{\alpha}(x,y) \max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\left[p(x,f(x)) + p(y,f(y))\right]\right\}$ untuk setiap $x,y \in X$. Fungsi f dikatakan memiliki titik tetap $x^* \in X$ jika $p(x^*, f(x^*)) = 0$ sehingga berakibat $x^* = f(x^*)$.

Lemma 3.14. Diberikan (X, p) ruang metrik parsial lengkap dan $f: X \rightarrow X$ merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat $\bar{\alpha}: X \times X \rightarrow [0,1]$ dengan $\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ untuk setiap $0 \leq a \leq b$, dan $p(f(x),f(y)) \leq \bar{\alpha}(x,y) \max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\left[p(x,f(x)) + p(y,f(y))\right]\right\}$ untuk setiap $x,y \in X$. Fungsi f dikatakan memiliki titik tetap tunggal $x^* = f(x^*) \in X$ jika terdapat titik tetap yang lain, misal $z \in X$, sedemikian hingga $p(x^*, z) = 0$ atau $z = x^* = f(x^*) \in X$.

Selanjutnya, dibuktikan teorema titik tetap pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah sebagai berikut.

Teorema 3.15. (Teorema Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial). Diberikan $X \neq \emptyset$. Jika (X, p) adalah ruang metrik parsial lengkap dan $f: X \rightarrow X$ merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat $\bar{\alpha}: X \times X \rightarrow [0,1]$ dengan $\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$p(f(x),f(y)) \leq \bar{\alpha}(x,y) \max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\left[p(x,f(x)) + p(y,f(y))\right]\right\} \quad (3.2)$$

untuk setiap $x,y \in X$, maka f memiliki titik tetap yang tunggal $x^* \in X$ dan barisan $\{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergen ke $x^* \in X$ untuk setiap $x_0 \in X$, sehingga $p(x^*, x^*) = 0$.

Bukti:

Untuk membuktikan Teorema 3.15, dibutuhkan beberapa langkah berikut ini.

Langkah 1:

Ditunjukkan bahwa untuk setiap $x,y \in X$ memenuhi (3.2). Diambil sembarang $x_0 \in X$. Didefinisikan barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Misalkan, $x_n = f(x_{n-1}) = f(x)$ dan $x_{n+1} = f(x_n) = f(f(x_{n-1})) = f(f(x)) = f(y)$, maka berdasarkan Lemma 3.11, diperoleh bahwa $p(x_n, x_{n+1}) \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)p(x_{n-1}, x_n)$ dengan $0 \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \leq 1$, artinya untuk setiap $x,y \in X$ memenuhi (3.2). Karena $0 \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \leq 1$, akibatnya barisan $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ tidak naik, sehingga barisan tersebut konvergen ke bilangan real $p = \inf\{p(x_{n-1}, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} = 0$.

Langkah 2:

Ditunjukkan bahwa barisan $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergen ke $p = 0$. Jika $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ barisan pada X dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$, maka dari Lemma 3.12, terlihat bahwa $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergen ke $p = 0$ dengan kata lain $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Langkah 3:

Ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ barisan Cauchy pada ruang metrik parsial (X, p) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Terlebih dahulu, ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada ruang metrik (X, d^p) dengan d^p adalah metrikyang didefinisikan pada (3.1). Berdasarkan Lemma 3.12, $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} d^p(x_n, x_{n+1}) = 0$ sebab

$$d^p(x_n, x_{n+1}) \leq 2p(x_n, x_{n+1}) \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Karena p adalah metrik parsial, maka p memenuhi (P2) sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$p(x_n, x_n) \leq p(x_n, x_{n+1}), \quad (3.4)$$

maka diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = 0$.

d^p adalah metrik sehingga memenuhi (D4). Dari (3.3), maka untuk $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} d^p(x_n, x_{n+k}) &\leq d^p(x_n, x_{n+1}) + \dots + d^p(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\ &\leq 2p(x_0, x_1) \\ &\quad \left(\sup \left\{ \begin{array}{c} \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1) \end{array} \right\} \right)^n \\ &\quad + \dots + 2p(x_0, x_1) \\ &\quad \left(\sup \left\{ \begin{array}{c} \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1) \end{array} \right\} \right)^{n+k-1} \\ &\leq 2p(x_0, x_1) \\ &\quad \sum_{t=n}^{n+k-1} \left(\sup \left\{ \begin{array}{c} \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1) \end{array} \right\} \right)^t \\ &\leq 2p(x_0, x_1) \\ &\quad \left(\frac{\left(\sup \left\{ \begin{array}{c} \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1) \end{array} \right\} \right)^n}{1 - \sup \left\{ \begin{array}{c} \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1) \end{array} \right\}} \right) \end{aligned}$$

dengan

$$\frac{(\sup \{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\})^n}{1 - \sup \{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\}} p(x_0, x_1)$$

merupakan jumlahan dari semua suku deret geometri

$$\sum_{t=n}^{n+k-1} \left(\sup \left\{ \begin{array}{c} \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1) \end{array} \right\} \right)^t p(x_0, x_1)$$

yang memiliki suku awal, yaitu

$$(\sup \{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\})^n p(x_0, x_1)$$

dan rasionya adalah

$$\sup \{\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\} < 1).$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p) , maka berdasarkan Lemma 3.2, diperoleh bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, p) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Langkah 4:

Ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ konvergen ke $x^* \in X$ pada (X, p) . Karena (X, p) adalah ruang metrik parsial lengkap, dari Lemma 3.3, diperoleh bahwa (X, d^p) adalah ruang metrik lengkap, sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} d^p(x_n, x^*) = 0$ jika dan hanya jika

$$p(x^*, x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x^*) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) \quad (3.5)$$

untuk $n, m \in \mathbb{N}$. Hal ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}$ konvergen ke $x^* \in X$ pada (X, p) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p) , maka diperoleh $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d^p(x_n, x_m) = 0$ untuk $n, m \in \mathbb{N}$. Dari (3.4), diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x_n) = 0$, dan dari definisi d^p pada (3.1), diperoleh $\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = 0$, sehingga (3.5) menjadi $p(x^*, x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n, x^*) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = 0$ untuk $n, m \in \mathbb{N}$.

Langkah 5:

Dibuktikan bahwa f memiliki titik tetap pada (X, p) . Karena f memenuhi (3.2) untuk setiap $x, y \in X$, maka berdasarkan Lemma 3.13, f memiliki titik tetap $x^* \in X$ sedemikian hingga $p(x^*, f(x^*)) = 0$ sehingga berakibat $x^* = f(x^*)$. Karena f memiliki titik tetap $x^* \in X$, maka barisan $\{x_n = f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergen ke $x^* \in X$ untuk setiap $x_0 \in X$ atau $p(x^*, x^*) = 0$.

Langkah 6:

Dibuktikan bahwa f memiliki titik tetap tunggal $x^* = f(x^*) \in X$ pada (X, p) . Karena f memenuhi (3.2) untuk setiap $x, y \in X$, maka berdasarkan Lemma 3.14, f memiliki titik tetap yang tunggal $x^* = f(x^*) \in X$. ■

Contoh 3.16. Diberikan $([0,1], p)$ ruang metrik parsial lengkap dengan $p: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x, y) = \max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x}{8}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan $\bar{\alpha}(x, y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f memiliki titik tetap tunggal $x^* = 0 \in [0,1]$.

IV. KESIMPULAN

Dari hasil studi literatur dan penyelidikan yang telah dilakukan terkait konsep ruang metrik dan ruang metrik parsial, keberadaan serta ketunggalan titik tetap pada pemetaan kontraktif lemah dan Kannan lemah di ruang metrik parsial, diperoleh beberapa kesimpulan, antara lain:

1. Jika diberikan $X \neq \emptyset$ dan p adalah metrik parsial pada X , maka fungsi $d^p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $d^p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$ untuk setiap $x, y \in X$ adalah metrik pada X .
2. Jika diberikan $X \neq \emptyset$ dan d adalah metrik pada X , maka fungsi $p^d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dengan $p^d(x, y) = \frac{|x| + |y| + d(x, y)}{2}$ untuk setiap $x, y \in X$ adalah metrik parsial pada X .
3. Pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap.
4. Jika terdapat pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial, maka belum tentu pemetaan

tersebut juga merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik.

5. Jika terdapat pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial, maka belum tentu pemetaan tersebut juga merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Samet, Bessem, Calogero V, Francesca V. (2013). "From Metric Spaces to Partial Metric Spaces". **Fixed Point Theory and Applications** 2013, 2013:5, 1-11.
- [2] Alghamdi, Maryam A, Naseer S, Oscar V. (2012). "On Fixed Point Theory in Partial Metric Spaces". **Fixed Point Theory and Applications** 2012, 2012:175, 1-25.
- [3] Kreyszig, E. (1978). "Introductory Functional Analysis with Application". **John Wiley and Sons, Inc. Canada**, 30, 300.
- [4] Matthews, SG. (1994). "Partial Metric Topology". **Annals of the New York Academy of Sciences**, 183 - 197.
- [5] Dugundji, J dan A. Granas. (1978). "Weakly Contractive Maps and Elementary Domain Invariance Theorem*". **Bull. Greek Math. Soc.** 19, 141-151.
- [6] Kannan, R. (1968). "Some Results On Fixed Points". **Bulletin of the Calcutta Mathematical Society**, Vol. 60, 71-76.
- [7] Ariza-Ruiz, D dan Antonio Jiménez-Melado. (2010). "A Continuation Method for Weakly Kannan Maps". **Fixed Point Theory and Applications**, Volume 2010, Article ID 321594, 1-12.