TUGAS AKHIR

# Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial

## *Fixed Point Theorem on Weakly Contractive Mapping and Weakly Kannan Mapping in Partial Metric Space*

**Oleh:**
Annisa Rahmita Soemarsono
1212100029

Dosen Pembimbing :
Sunarsini, S.Si, M.Si
Drs. Sadjidon, M. Si

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER**
**SURABAYA**
**2016**

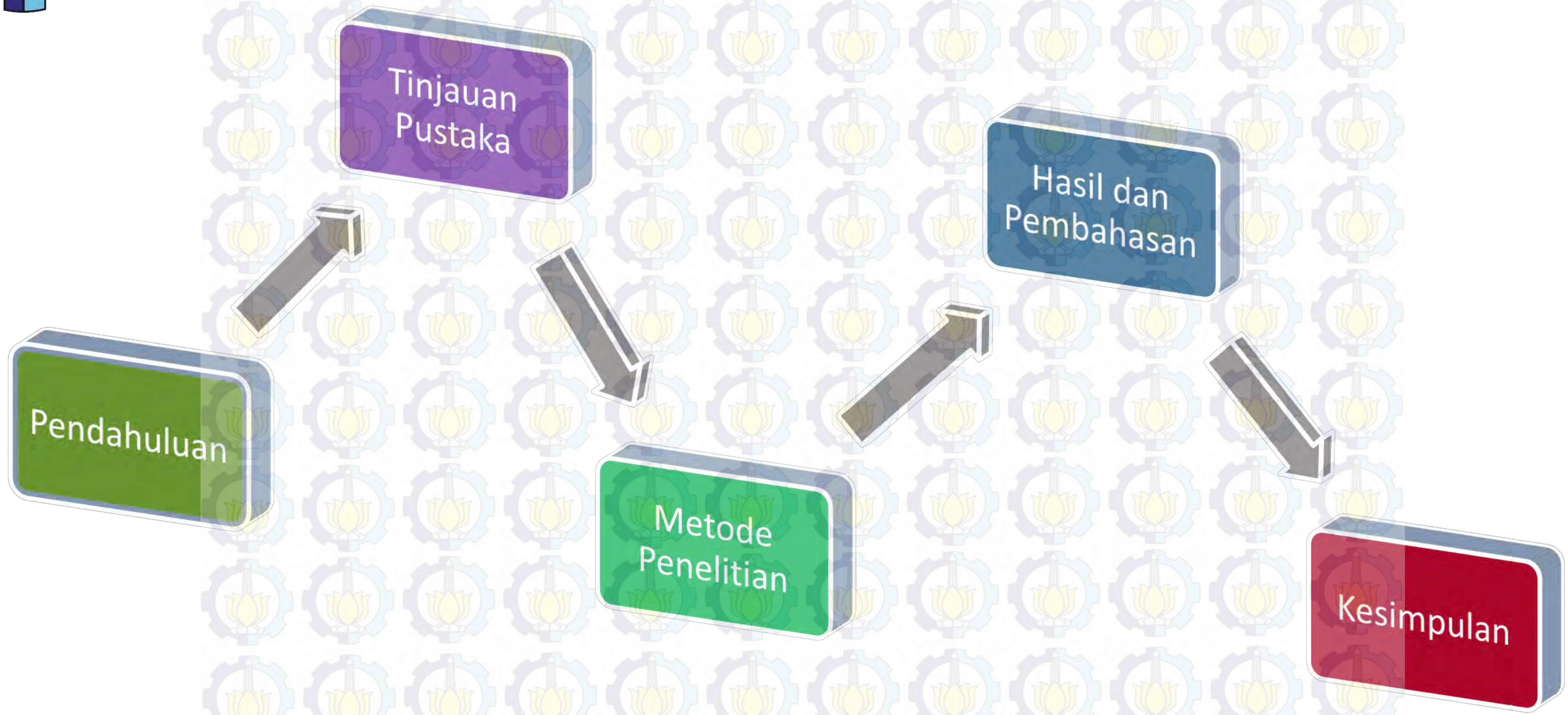
Apa yang telah dikerjakan?

Mengapa mengerjakannya?

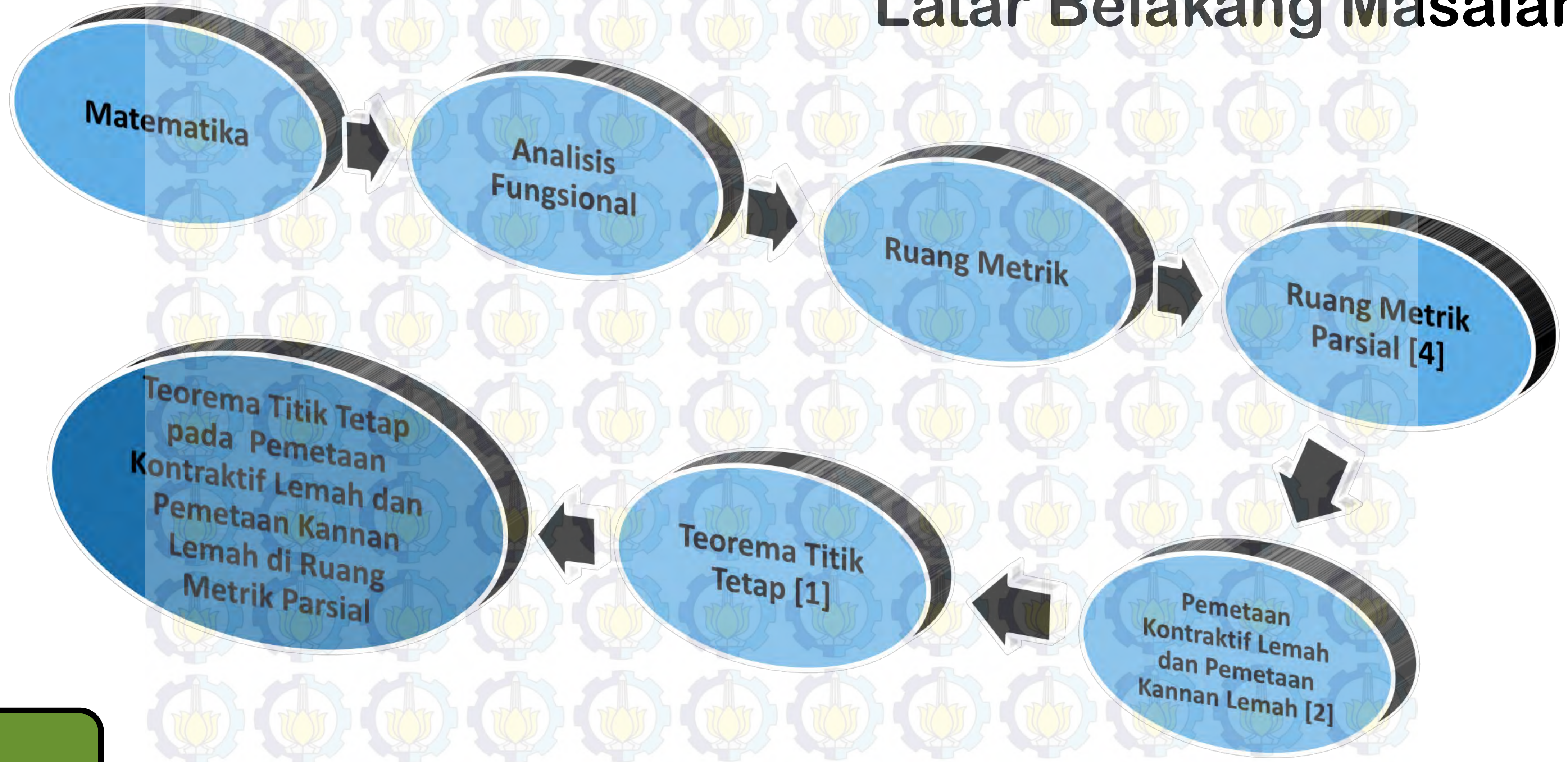
Bagaimana mengerjakannya?

Hasil yang diperoleh

# Abstrak


Pendahuluan
Tinjauan Pustaka
Metode Penelitian
Hasil dan Pembahasan
Kesimpulan

# Latar Belakang Masalah




HOME

# Rumusan Masalah

Bagaimana keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah di ruang metrik parsial.

# Batasan Masalah

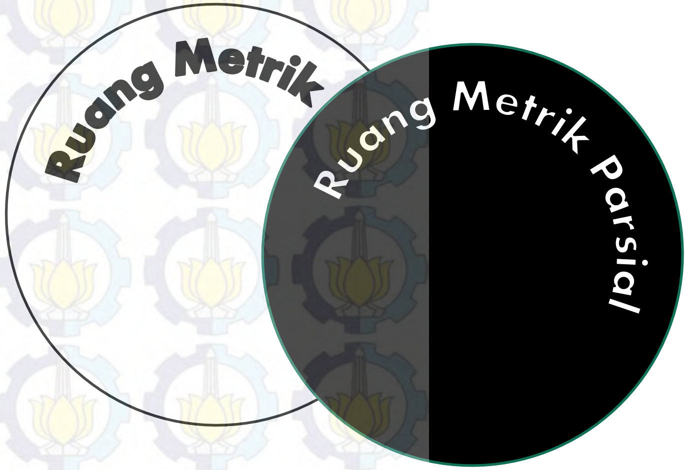
Hanya membahas teorema titik tetap pada pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah di ruang metrik parsial $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

# Tujuan

Menyelidiki keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada ruang metrik parsial dengan menggunakan teorema titik tetap pada pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah di ruang metrik parsial.

# Manfaat

- Memperluas pengetahuan tentang konsep ruang metrik parsial dan teorema-teorema titik tetap pada ruang metrik parsial lengkap
- Sebagai bahan acuan dalam melakukan penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan perluasan ruang metrik parsial dan teorema titik tetap pada ruang metrik parsial.
- Sebagai landasan dalam pembuatan aplikasi di bidang matematika maupun di luar bidang Matematika yang membutuhkan konsep ruang metrik parsial dan teorema titik tetap pada ruang metrik parsial.




# Ruang Metrik

$d(x,x) = 0$

# VS

$p(x,x) \neq 0$

# Ruang Metrik Parsial

| Ruang Metrik | Ruang Metrik Parsial |
| --- | --- |
| Definisi Ruang Metrik | Definisi Ruang Metrik Parsial |
| $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$ | Jika $p(x, y) = 0$ maka $x = y$. Hal ini tidak berlaku untuk kondisi sebaliknya |

HOME

# Penelitian Terdahulu

**Weakly Contractive Maps and Elementary Domain**

- Dugundji dan Granas (1978) [5]

**Partial Metric Topology**

- Matthews (1994) [4]

**Fixed Point Theory in Partial Metric Spaces**

- Rus (2008) [1]

**A Continuation Method for Weakly Kannan Maps**

- Ruiz dan Antonio (2010) [6]

**On Fixed Point Theory in Partial Metric Space**

- Maryam A Alghamdi, Naseer Shahzad dan Oscar Valero (2012) [2]

NEXT

# Ruang Metrik

**Definisi 2.2.1** [3]

Diberikan himpunan tak kosong $X$. Fungsi $d: X \text{ x } X \to \mathbb{R}$ dikatakan metrik pada $X$ jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi

(D1) $d(x, y) \geq 0$;

(D2) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;

(D3) $d(x, y) = d(y, x)$;

(D4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Pasangan $(X, d)$ dikatakan sebagai ruang metrik.

BACK

# Ruang Metrik

**Contoh 2.2.2** [3]

Diberikan himpunan $\mathbb{R}$. Fungsi $d: \mathbb{R}\ x\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ adalah metrik pada $\mathbb{R}$.

# Ruang Metrik

**Definisi 2.2.3** [3]

Diberikan $(X, d)$ ruang metrik. Pemetaan $f: X \to X$ dinamakan pemetaan kontraktif jika terdapat $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ sedemikian hingga $d(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha} d(x, y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

HOME

# Ruang Metrik

**Definisi 2.2.4** [5]

Diberikan $(X,d)$ ruang metrik. Pemetaan $f:X\to X$ dinamakan pemetaan kontraktif lemah jika terdapat $\bar{\alpha}:X \times X\to[0,1)$ sedemikian hingga untuk setiap $0 \le a \le b$,

$$\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \le d(x,y) \le b\} < 1$$

dan

$$d(f(x),f(y)) \le \bar{\alpha}(x,y)d(x,y)$$

untuk setiap $x,y \in X$.

# Ruang Metrik

**Definisi 2.2.5** [6]

Diberikan $(X, d)$ ruang metrik. Pemetaan $f: X \to X$ dinamakan pemetaan Kannan jika terdapat $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, $0 \leq \bar{\alpha} < 1$ sedemikian hingga $d(f(x), f(y)) \leq \frac{\bar{\alpha}}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$ untuk setiap $x, y \in X$.

# Ruang Metrik

**Definisi 2.2.6** [7]

Diberikan $(X, d)$ ruang metrik. Pemetaan $f: X \to X$ dinamakan pemetaan Kannan lemah jika terdapat $\bar{\alpha}: X \times X \to [0,1)$ sedemikian hingga untuk setiap $0 \leq a \leq b$,

$$\sup\{\bar{\alpha}(x, y): a \leq d(x, y) \leq b\} < 1$$

dan

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{\bar{\alpha}(x, y)}{2}[d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$$

untuk setiap $x, y \in X$.

NEXT

# Ruang Metrik Parsial

**Definisi 2.3.1** [4]

Diberikan himpunan tak kosong $X$. Fungsi $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ dikatakan metrik parsial pada $X$ jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi

(P1) $x = y$ jika dan hanya jika $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$;

(P2) $p(x,x) \leq p(x,y)$;

(P3) $p(x,y) = p(y,x)$;

(P4) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$.

Pasangan $(X,p)$ dikatakan sebagai ruang metrik parsial.

# Ruang Metrik Parsial

**Contoh 2.3.2** [2]

Diberikan himpunan $\mathbb{R}^+$. Fungsi $p: \mathbb{R}^+ x\ \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ didefinisikan sebagai $p(x, y) = max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$ adalah metrik parsial pada $\mathbb{R}^+$.

# Ruang Metrik Parsial

Definisi 2.3.3 [4]

Diberikan $(X, p)$ adalah ruang metrik parsial dan $\{x_n\}$ adalah barisan pada $X$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka

*i.* $\{x_n\}$ konvergen ke titik $x \in X$ pada $(X, p)$ jika dan hanya jika $p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$;

*ii.* $\{x_n\}$ disebut barisan Cauchy pada $(X, p)$ jika $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$;

*iii.* $(X, p)$ dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ pada $X$ konvergen ke titik $x \in X$ sehingga $p(x, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$.

HOME

# Ruang Metrik Parsial

**Definisi 2.3.4** [4]

Diberikan $(X,p)$ ruang metrik parsial. Pemetaan $f: X \to X$ dinamakan pemetaan kontraktif jika terdapat $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$, $0 \le \bar{\alpha} < 1$ sedemikian hingga $p(f(x), f(y)) \le \bar{\alpha} p(x,y)$ untuk setiap $x, y \in X$.

# Teorema Titik Tetap

**Teorema 2.4.1** [3]

Diberikan $(X, d)$ ruang metrik lengkap. Jika $f: X \to X$ adalah pemetaan kontraktif, maka $f$ memiliki titik tetap yang tunggal.

HOME

# Teorema Titik Tetap

**Teorema 2.4.2** [5]

Diberikan $(X, d)$ ruang metrik lengkap. Jika $f: X \to X$ adalah pemetaan kontraktif lemah, maka $f$ memiliki titik tetap yang tunggal $x^*$ dan $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x^*$ untuk setiap $x \in X$.

# Teorema Titik Tetap

**Teorema 2.4.3** [6]

Diberikan $(X, d)$ ruang metrik lengkap. Jika $f: X \to X$ adalah pemetaan Kannan, maka $f$ memiliki titik tetap yang tunggal $x^*$ dan $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x^*$ untuk setiap $x \in X$.

HOME

# Teorema Titik Tetap

**Teorema 2.4.4** [7]

Diberikan $(X, d)$ ruang metrik lengkap. Jika $f: X \to X$ adalah pemetaan Kannan lemah, maka $f$ memiliki titik tetap yang tunggal $x^*$ dan $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x^*$ untuk setiap $x \in X$.

# Teorema Titik Tetap

**Teorema 2.4.5** [4]

Diberikan $(X, p)$ ruang metrik parsial lengkap. Jika $f: X \rightarrow X$ adalah pemetaan kontraktif, maka $f$ memiliki titik tetap yang tunggal.

Studi Literatur

↓

Konstruksi Terkait Analogi Ruang Metrik dan Ruang Metrik Parsial

↓

Penyelidikan Keberadaan dan Ketunggalan Titik Tetap pada Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah di Ruang Metrik Parsial

↓

Penarikan Kesimpulan dan Pembukuan Tugas Akhir

**Ruang Metrik Parsial**

- Teorema 4.1.1
- Teorema 4.1.2

**Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial**

- Contoh 4.2.2
- Contoh 4.2.3
- Contoh 4.2.5
- Contoh 4.2.6

**Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial**

- Teorema 4.3.5
- Contoh 4.3.6

# Teorema 4.1.1

*Diberikan* $(X, p)$ *ruang metrik parsial. Jika fungsi* $d^p : X \times X \to \mathbb{R}$ *dengan*

$$d^p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \qquad (4.1)$$

*untuk setiap* $x, y \in X$, *maka* $d^p$ *adalah metrik pada* $X$.

Bukti:

- (P2) dan (P3) → (D1)
- (P2), (P3) dan (P1) → (D2)
- (P3) → (D3)
- (P4) → (D4)

# Lemma 4.1.2

*Diberikan* $(X, p)$ *ruang metrik parsial dan* $(X, d^p)$ *ruang metrik, dengan* $d^p$ *adalah metrik yang didefinisikan pada* (4.1). *Barisan* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *adalah barisan Cauchy pada* $(X, p)$ *jika dan hanya jika* $\{x_n\}$ *adalah barisan Cauchy pada* $(X, d^p)$.

# Lemma 4.1.3

*Diberikan* $(X,p)$ *ruang metrik parsial dan* $(X,d^p)$ *ruang metrik, dengan* $d^p$ *adalah metrik yang didefinisikan pada* (4.1). $(X,p)$ *dikatakan lengkap jika dan hanya jika* $(X,d^p)$ *lengkap. Sehingga, jika diberikan barisan* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *pada* $(X,p)$ *maka untuk* $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n,x) = 0$ *jika dan hanya jika* $p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$.

# Teorema 4.1.4

*Diberikan* $(X, d)$ *ruang metrik. Jika fungsi* $p^d : X \text{ x } X \to \mathbb{R}^+$ *dengan*

$$p^d(x, y) = \frac{|x| + |y| + d(x, y)}{2}$$

*untuk setiap* $x, y \in X$, *maka* $p^d$ *adalah metrik parsial pada* $X$.

Bukti:

- (D2) → (P1)
- (D1) dan (D2) → (P2)
- (D3) → (P3)
- (D4) → (P4)

BACK

# Definisi 4.2.1

*Diberikan* $(X,p)$ *ruang metrik parsial. Pemetaan* $f: X \to X$ *dinamakan pemetaan kontraktif lemah jika terdapat* $\bar{\alpha}: X \text{ x } X \to [0,1)$ *sedemikian hingga untuk setiap* $0 \leq a \leq b$,

$$sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$$

*dan*

$$p(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha}(x,y)p(x,y)$$

*untuk setiap* $x, y \in X$.

# Contoh 4.2.2

Diberikan $p$ metrik parsial, dengan $p: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ didefinisikan sebagai $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{2}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1)$ dengan $\bar{\alpha}(x,y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka $f$ merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$

# Contoh 4.2.3

Diberikan fungsi $d^p: [0,1] \text{ x } [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan $d^p(x,y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$ dan $p$ adalah metrik parsial, $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \rightarrow [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{2}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \text{ x } [0,1] \rightarrow [0,1)$ dengan $\bar{\alpha}(x,y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka $f$ bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$.

# Definisi 4.2.4

*Diberikan* $(X, p)$ *ruang metrik parsial. Pemetaan* $f: X \to X$ *dinamakan pemetaan Kannan lemah jika terdapat* $\bar{\alpha}: X \times X \to [0,1)$ *sedemikian hingga untuk setiap* $0 \leq a \leq b$,

$$sup\{\bar{\alpha}(x, y): a \leq p(x, y) \leq b\} < 1$$

*dan*

$$p(f(x), f(y)) \leq \frac{\bar{\alpha}(x, y)}{2}[p(x, f(x)) + p(y, f(y))]$$

*untuk setiap* $x, y \in X$.

# Contoh 4.2.5

Diberikan $p$ metrik parsial, dengan $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk setiap $x,y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \to [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1)$ dengan

$$\bar{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{p\big(f(x),f(y)\big)}{p(x,y)} & , max\{x,y\} \neq 0 \\ 0 & , max\{x,y\} = 0 \end{cases}$$

untuk setiap $x,y \in [0,1]$, maka $f$ merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$.

# Contoh 4.2.6

Diberikan $d^p$ metrik, dengan $d^p\colon [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ didefinisikan sebagai $d^p(x,y) = |x-y|$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}\colon [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1)$ dengan

$$\bar{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{p\big(f(x), f(y)\big)}{p(x,y)} & , max\{x,y\} \neq 0 \\ 0 & , max\{x,y\} = 0 \end{cases}$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$ dengan $p$ metrik parsial, $p\colon [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka $f$ bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$.

BACK

# Lemma 4.3.1

*Diberikan* $(X,p)$ *ruang metrik parsial lengkap dan* $f: X \to X$ *merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat* $\bar{\alpha}: X \times X \to [0,1]$ *dengan* $sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ *untuk setiap* $0 \leq a \leq b$, *dan*

$$p\big(f(x), f(y)\big) \leq \bar{\alpha}(x,y)\, max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p\big(x, f(x)\big) \\ +p\big(y, f(y)\big) \end{bmatrix}\right\}$$

*untuk setiap* $x, y \in X$. *Jika* $x \in X$ *memenuhi barisan* $\{x_n\}$ *dengan* $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$, *maka*

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) p(x_{n-1}, x_n)$$

*untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.

# Lemma 4.3.2

*Diberikan* $(X,p)$ *ruang metrik parsial lengkap dan* $f: X \to X$ *merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat* $\bar{\alpha}: X \times X \to [0,1]$ *dengan* $sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ *untuk setiap* $0 \leq a \leq b$*, dan*

$$p(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha}(x,y)\, max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x, f(x)) \\ +p(y, f(y)) \end{bmatrix}\right\}$$

*untuk setiap* $x, y \in X$*. Jika* $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *barisan pada* $X$ *dengan* $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ *dan* $x_n \neq x_{n+1}$*, maka* $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergen ke bilangan real* $p = 0$ *dengan kata lain* $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$*.*

HOME

# Lemma 4.3.3

*Diberikan* $(X,p)$ *ruang metrik parsial lengkap dan* $f: X \to X$ *merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat* $\bar{\alpha}: X \times X \to [0,1]$ *dengan* $sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ *untuk setiap* $0 \leq a \leq b$, *dan*

$$p\big(f(x), f(y)\big) \leq \bar{\alpha}(x,y)\, max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p\big(x, f(x)\big) \\ +p\big(y, f(y)\big)\end{bmatrix}\right\}$$

*untuk setiap* $x, y \in X$. *Fungsi* $f$ *dikatakan memiliki titik tetap* $x^* \in X$ *jika* $p\big(x^*, f(x^*)\big) = 0$ *sehingga berakibat* $x^* = f(x^*)$.

HOME

# Lemma 4.3.4

*Diberikan* $(X,p)$ *ruang metrik parsial lengkap dan* $f: X \to X$ *merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat* $\bar{\alpha}: X$ x $X \to [0,1]$ *dengan* $sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ *untuk setiap* $0 \leq a \leq b$, *dan*

$$p\big(f(x), f(y)\big) \leq \bar{\alpha}(x,y)\, max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p\big(x, f(x)\big) \\ +p\big(y, f(y)\big) \end{bmatrix}\right\}$$

*untuk setiap* $x, y \in X$. *Fungsi* $f$ *dikatakan memiliki titik tetap tunggal* $x^* = f(x^*) \in X$ *jika terdapat titik tetap yang lain, misal* $z \in X$, *sedemikian hingga* $p(x^*, z) = 0$ *atau* $z = x^* = f(x^*) \in X$.

HOME

# Teorema 4.3.5 (Teorema Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial)

*Diberikan* $X \neq \emptyset$. *Jika* $(X,p)$ *adalah ruang metrik parsial lengkap dan* $f: X \to X$ *merupakan pemetaan sedemikian hingga terdapat* $\bar{\alpha}: X \times X \to [0,1]$ *dengan* $sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\} < 1$ *untuk setiap* $0 \leq a \leq b$, *sehingga*

$$p(f(x), f(y)) \leq \bar{\alpha}(x,y)\, max\left\{p(x,y), \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p(x,f(x)) \\ +p(y,f(y)) \end{bmatrix}\right\} \quad (4.19)$$

*untuk setiap* $x,y \in X$, *maka* $f$ *memiliki titik tetap yang tunggal* $x^* \in X$ *dan barisan* $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergen ke* $x^* \in X$ *untuk setiap* $x_0 \in X$ *sehingga* $p(x^*, x^*) = 0$.

# Teorema 4.3.5

Bukti:

Langkah 1:

Ditunjukkan bahwa untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi (4.19). Diambil sembarang $x_0 \in X$. Didefinisikan barisan $\{x_n\}$ dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Misalkan, $x_n = f(x_{n-1}) = f(x)$ dan $x_{n+1} = f(x_n) = f\big(f(x_{n-1})\big) = f\big(f(x)\big) = f(y)$, maka berdasarkan Lemma 4.3.1, diperoleh bahwa $p(x_n, x_{n+1}) \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n)p(x_{n-1}, x_n)$ dengan $0 \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \leq 1$, artinya untuk setiap $x, y \in X$ memenuhi (4.19). Karena $0 \leq \bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n) \leq 1$, akibatnya barisan $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ tidak naik, sehingga barisan tersebut konvergen ke bilangan real $p = \inf\{p(x_{n-1}, x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$.

# Teorema 4.3.5

Langkah 2:

ditunjukkan bahwa barisan $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $p = 0$ . Jika $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ barisan pada $X$ dengan $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ dan $x_n \neq x_{n+1}$, maka dari Lemma 4.3.2, terlihat bahwa $\{p(x_n, x_{n+1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $p = 0$ dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$.

# Teorema 4.3.5

Langkah 3:

Ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada $(X, p)$. Terlebih dahulu, ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada $(X, d^p)$ dengan $d^p$ adalah metrik yang didefinisikan pada (4.1). Berdasarkan Lemma 4.3.2, $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$, sehingga $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x_{n+1}) = 0$ sebab

$$d^p(x_n, x_{n+1}) \leq 2p(x_n, x_{n+1}) \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}. \qquad (4.20)$$

Karena $p$ adalah metrik parsial, maka $p$ memenuhi (P2) sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$p(x_n, x_n) \leq p(x_n, x_{n+1}), \qquad (4.21)$$

maka diperoleh $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$.

# Teorema 4.3.5

$d^p$ adalah metrik sehingga memenuhi (D4). Dari (4.15) dan (4.20), maka untuk $k \in \mathbb{N}$,

$$d^p(x_n, x_{n+k}) \leq d^p(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d^p(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leq 2p(x_0, x_1)\left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\end{matrix}\right\}\right)^n + \cdots + 2p(x_0, x_1)\left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\end{matrix}\right\}\right)^{n+k-1}$$

$$\leq 2p(x_0, x_1) \sum_{t=n}^{n+k-1} \left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\end{matrix}\right\}\right)^t$$

$$\leq 2p(x_0, x_1)\left(\frac{\left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\end{matrix}\right\}\right)^n}{1 - \sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1}, x_n): \\ 0 \leq p(x_{n-1}, x_n) \leq p(x_0, x_1)\end{matrix}\right\}}\right)$$

# Teorema 4.3.5

dengan

$$\frac{(\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): 0 \le p(x_{n-1},x_n) \le p(x_0,x_1)\})^n}{1-\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): 0 \le p(x_{n-1},x_n) \le p(x_0,x_1)\}} p(x_0,x_1)$$

merupakan jumlahan dari semua suku deret geometri

$$\sum_{t=n}^{n+k-1} \left(\sup\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): \\ 0 \le p(x_{n-1},x_n) \le p(x_0,x_1)\end{matrix}\right\}\right)^t p(x_0,x_1)$$

yang memiliki suku awal, yaitu

$$(\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): 0 \le p(x_{n-1},x_n) \le p(x_0,x_1)\})^n p(x_0,x_1)$$

dan rasionya adalah $\sup\{\bar{\alpha}(x_{n-1},x_n): 0 \le p(x_{n-1},x_n) \le p(x_0,x_1)\} < 1)$.

Hal ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada $(X,d^p)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Lemma 4.1.2, diperoleh bahwa $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy $(X,p)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

# Teorema 4.3.5

Langkah 4:

Ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ konvergen ke $x^* \in X$ pada $(X,p)$. Karena $(X,p)$ adalah ruang metrik parsial lengkap, dari Lemma 4.1.3, diperoleh bahwa $(X,d^p)$ merupakan ruang metrik lengkap, sehingga $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n,x^*) = 0$ jika dan hanya jika

$$p(x^*,x^*) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,x^*) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) \qquad (4.22)$$

untuk setiap $n,m \in \mathbb{N}$. Hal ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}$ konvergen ke $x^* \in X$ pada $(X,p)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada $(X,d^p)$, maka diperoleh $\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n,x_m) = 0$ untuk $n,m \in \mathbb{N}$. Dari (4.21), diperoleh $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n) = 0$, dan dari definisi $d^p$ pada (4.1), diperoleh $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) = 0$ sehingga (4.22) menjadi $p(x^*,x^*) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,x^*) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) = 0$ untuk setiap $n,m \in \mathbb{N}$.

HOME

# Teorema 4.3.5

Langkah 5:

Dibuktikan bahwa $f$ memiliki titik tetap pada $(X, p)$. Karena $f$ memenuhi (4.19) untuk setiap $x, y \in X$, maka berdasarkan Lemma 4.3.3, $f$ memiliki titik tetap $x^* \in X$ sedemikian hingga $p\left(x^*, f(x^*)\right) = 0$ sehingga berakibat $x^* = f(x^*)$. Karena $f$ memiliki titik tetap $x^* \in X$, maka barisan $\{x_n = f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke $x^* \in X$ untuk setiap $x_0 \in X$ atau $p(x^*, x^*) = 0$.

# Teorema 4.3.5

Langkah 6:

Dibuktikan bahwa $f$ memiliki titik tetap tunggal $x^* = f(x^*) \in X$ pada $(X, p)$. Karena $f$ memenuhi (4.19) untuk setiap $x, y \in X$, maka berdasarkan Lemma 4.3.4, $f$ memiliki titik tetap yang tunggal $x^* = f(x^*) \in X$.

# Contoh 4.3.6

Diberikan $([0,1], p)$ ruang metrik parsial lengkap dengan $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = max\{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \to [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x}{8}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ dengan $\bar{\alpha}(x,y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka $f$ memiliki titik tetap tungggal $x^* = 0 \in [0,1]$.

# Kesimpulan

- Jika diberikan $X \neq \emptyset$ dan $p$ adalah metrik parsial pada $X$, maka fungsi $d^p : X \text{ x } X \to \mathbb{R}$ dengan

$$d^p\,(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

untuk setiap $x, y \in X$ adalah metrik pada $X$.

- Jika diberikan $X \neq \emptyset$ dan $d$ adalah metrik pada $X$, maka fungsi $p^d : X \text{ x } X \to \mathbb{R}^+$ dengan

$$p^d(x,y) = \frac{|x| + |y| + d(x,y)}{2}$$

untuk setiap $x, y \in X$ adalah metrik parsial pada $X$.

# Kesimpulan

- Pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial menjamin keberadaan dan ketunggalan titik tetap.
- Jika terdapat pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial, maka belum tentu pemetaan tersebut juga merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik.
- Jika terdapat pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial, maka belum tentu pemetaan tersebut juga merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik.

# Saran

- Perlu ditambahkan contoh metrik parsial $p$ selain yang didefinisikan sebagai $p: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $p(x, y) = \max\{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+$.
- Perlu diberikan contoh pemetaan yang memberikan analogi antara pemetaan kontraktif dan pemetaan kontraktif lemah serta analogi antara pemetaan Kannan dan pemetaan Kannan lemah.

D A F T A R P U S T A K A

[1] Samet, Bessem, Calogero V, Francesca V. 2013. **From Metric Spaces to Partial Metric Spaces**. Fixed Point Theory and Aplications 2013, 2013:5, 1-11.

[2] Alghamdi, Maryam A, Naseer S, Oscar V. 2012. **On Fixed Point Theory in Partial Metric Spaces**. Fixed Point Theory and Applications 2012, 2012:175, 1-25.

[3] Kreyszig, E. 1978. **Introductory Functional Analysis with Aplication**. John Wiley and Sons, Inc.Canada, 30, 300.

[4] Matthews, SG. 1994. **Partial Metric Topology**. Annals of the New York Academy of Sciences, 183 - 197.

[5] Dugundji, J dan A. Granas. 1978. **Weakly Contractive Maps and Elementary Domain Invariance Theorem***. Bull. Greek Math. Soc. 19, 141-151.

[6] Kannan, R. 1968. **Some Results On Fixed Points**. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, Vol. 60, 71-76.

[7] Ariza-Ruiz, D dan Antonio Jiménez-Melado. 2010. **A Continuation Method for Weakly Kannan Maps**. Fixed Point Theory and Applications, Volume 2010, Article ID 321594, 1-12.

# Terima Kasih