



TUGAS AKHIR - SF 141501

PEMBANGKITAN GELOMBANG GRAVITASI PADA ROTASI BENDA TEGAR DENGAN TIGA SUMBU UTAMA

Syah Reza Mbolosi
NRP 1111100039

Dosen Pembimbing
Dr. rer. nat. Bintoro Anang Subagyo M.Si

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM INSTITUT
TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA 2016



FINAL PROJECT - SF 141501

GENERATION OF GRAVITATIONAL WAVE FROM ROTATING RIGID TRIAXIAL BODY

Syah Reza Mbolosi
NRP 1111100039

Advisor Lecturer
Dr. rer. nat. Bintoro Anang Subagyo M.Si

PHYSICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA 2016

**PEMBANGKITAN GELOMBANG GRAVITASI PADA
ROTASI BENDA TEGAR DENGAN TIGA SUMBU
UTAMA**

TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana

pada

Bidang Studi fisika teori dan filsafat alam

Program Studi S-1 Jurusan Fisika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Disusun Oleh :

Syah Reza Mbolosi

NRP. 1111100039

Disetujui oleh Tim Penguji Tugas Akhir :

1. Dr. rer. nat. Bintoro Anang Subagyo M.Si.....



Surabaya

Januari, 2016

PEMBANGKITAN GELOMBANG GRAVITASI PADA ROTASI BENDA TEGAR DENGAN TIGA SUMBU UTAMA

Nama : Syah Reza Mbolosi

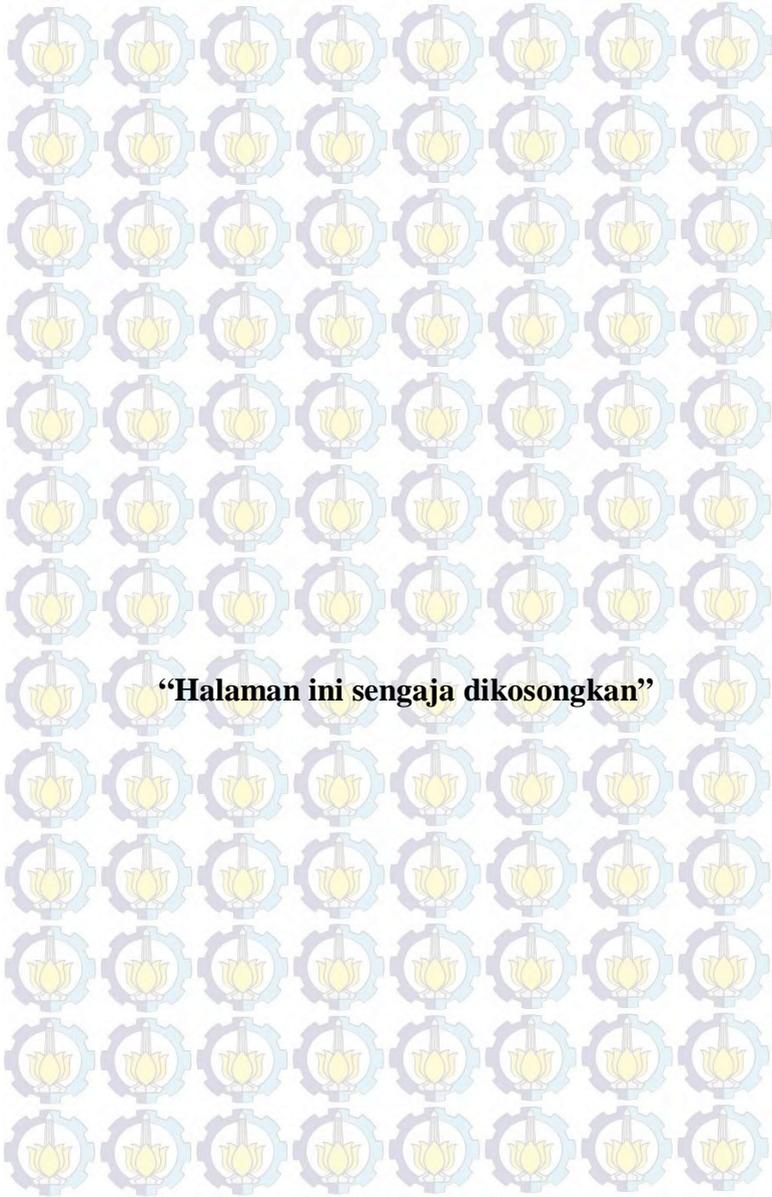
NRP : 1111100039

Pembimbing : Dr. rer. nat. Bintoro Anang Subagyo
M.Si

Abstrak

Dalam tugas akhir ini dibahas tentang gelombang gravitasi yang dibangkitkan oleh benda tegar yang berotasi dengan tiga sumbu utama. pada bagian pertama dibahas secara singkat mengenai persamaan medan einstein. Pada bagian kedua, dibahas mengenai teori dasar gelombang gravitasi yang terdiri dari medan gravitasi lemah, transformasi latar Lorentz, transformasi gauge, persamaan medan Einstein yang terlinearisasi, perambatan gelombang gravitasi, serta pembangkitan gelombang gravitasi dengan pendekatan quadrupol. Pada bagian ketiga dibahas mengenai pembangkitan gelombang gravitasi oleh benda tegar yang berotasi yang memiliki tiga sumbu utama.

Kata kunci: *gelombang gravitasi, persamaan Einstein yang terlinearisasi, benda tegar dengantiga sumbu*



“Halaman ini sengaja dikosongkan”

GENERATION OF GRAVITATIONAL WAVE FROM ROTATING RIGID TRIAXIAL BODY

Name : Syah Reza Mbolosi

NRP : 1111100039

Advisor Lecture : Dr. rer. nat. Bintoro Anang Subagyo
M.Si

Abstract

In this project we discussed the radiation of gravitational wave from rotating rigid triaxial body. In the first part, a brief review about Einstein's field equation is discussed. In the second part, the basic theory of gravitational wave involving the general relativity formalism of its propagation, gravitational weak field, background Lorentzian transformation, gauge transformation, and generation of gravitational wave from same sources are discussed. In the end, we discussed generation of gravitational wave from rotating rigid triaxial body is discussed.

Keywords: gravitational wave, linearized Einstein field equation, rigid triaxial body



“Halaman ini sengaja dikosongkan”

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, yang telah melimpahkan rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Laporan Tugas Akhir yang berjudul **“PEMBANGKITAN GELOMBANG GRAVITASI PADA ROTASI BENDA TEGAR DENGAN TIGA SUMBU UTAMA”**. Adapun tujuan dari penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai syarat untuk menyelesaikan program studi Strata-1 di Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Berbagai daya, upaya dan perjuangan turut mewarnai dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

Dalam penyusunan laporan Tugas Akhir ini, telah banyak daya, upaya, dan perjuangan yang dilakukan oleh penulis. Atas bantuan, dorongan dan juga bimbingan dari berbagai pihak maka akhirnya penulis dapat menyelesaikan laporan Tugas Akhir ini dengan baik. Sehubungan dengan hal tersebut maka pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada:

1. Allah S.W.T., serta keluarga besar yang selalu memberikan semangat dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
2. Dr. rer. nat. Bintoro Anang Subagyo M.Si, selaku dosen pembimbing Tugas Akhir.
3. Dr. Yono Hadi Pramono, M.Eng, selaku Ketua Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
4. Drs. Ali Yunus Rohedi , M.T. dan Ir. Didiek Basuki Rachmat, selaku dosen wali penulis.
5. Dr. Ir. Bambang Sampurno, MT sebagai Pembina Beasiswa BNC BRI.
6. Keluarga besar Beasiswa Nusantara Cerdas Bank Rakyat Indonesia.
7. Teman-teman Kru ITS Tv, atas bantuannya yang tak ternilai selama ini.

8. Teman-teman Fisika ITS angkatan 2011, bantuan, kebersamaan dan rasa kekeluargaan yang dibagi.
9. Teman-teman Laboratorium Fisika teori dan ilmu filsafat
10. Semua orang yang berkontribusi dalam tugas akhir ini namun tidak dapat saya sebutkan satu-persatu.

Penulis berharap laporan penelitian Tugas Akhir ini nantinya akan dapat berguna dan dapat dimanfaatkan dengan baik sebagai referensi bagi yang membutuhkan serta menjadi sarana pengembangan kemampuan ilmiah bagi semua pihak yang bergerak dalam bidang yang berhubungan dengan Fisika, khususnya fisika teoritik.

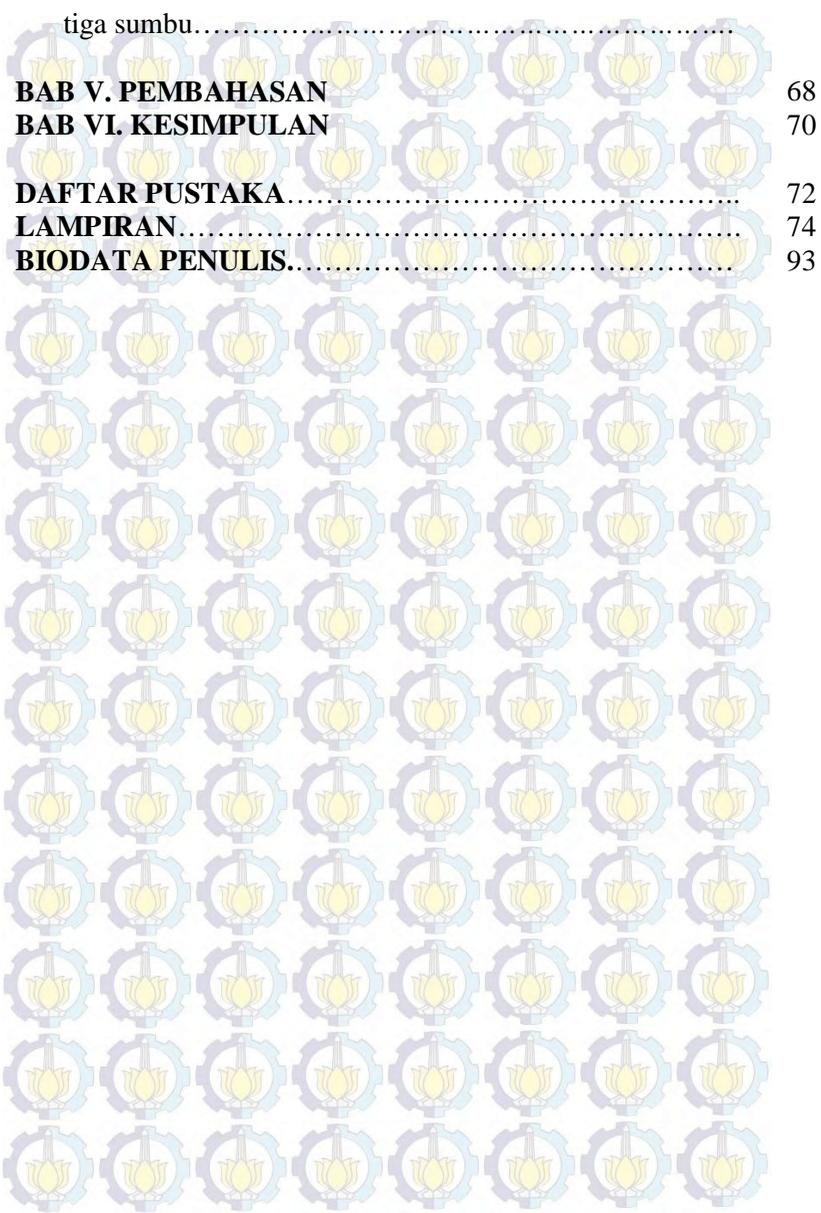
Surabaya, Januari 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN JUDUL	iii
HALAMAN PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
BAB I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Ruang Lingkup Kajian.....	2
1.4 Tujuan Penelitian.....	3
1.5 Metode dan Teknik Pengumpulan Data.....	3
BAB II. PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN	5
BAB III. TEORI DASAR GELOMBANG GRAVITASI	
3.1 Medan Gravitasi Lemah.....	13
3.2 Persamaan Medan Einstein Untuk Gravitasi Lemah.....	18
3.3 Perambatan Gelombang Gravitasi.....	22
3.4 Efek Gelombang Gravitasi pada Parikel Bebas.....	27
3.5 Pembangkitan gelombang gravitasi	32
BAB IV. GELOMBANG GRAVITASI DARI BENDA DENGAN TIGA SUMBU UTAMA (TRIAxIAL BODY)	
4.1 Gelombang gravitasi dari rotasi pada sumbu utama	51
4.2 Gerak presisi benda tegar	57
4.3 Radiasi goyangan dari benda tegar simetri sumbu	59
4.4 Gelombang gravitasi dari rotasi benda tegar dengan gerak presisi	61
4.5 Gelombang gravitasi dari rotasi dan gerak presisi benda	63

tiga sumbu.....	68
BAB V. PEMBAHASAN	70
BAB VI. KESIMPULAN	72
DAFTAR PUSTAKA.....	74
LAMPIRAN.....	93
BIODATA PENULIS.....	



BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori relativitas umum secara umum merupakan teori fisika yang mengkaji mengenai gejala berat dan pengaruhnya terhadap berbagai hukum fisika lainnya. Teori ini dirumuskan oleh fisikawan Jerman, Albert Einstein. Einstein menganggap bahwa timbulnya gaya berat ini karena ruang-waktu berdimensi empat di sekitar benda tersebut melengkung. Pernyataan mendasar yang menjadi landasan teori ini sebenarnya adalah bahwa semua hukum fisika bersifat mutlak atau tak ubah terhadap setiap pengamat, termasuk yang bergerak dengan percepatan.

Implikasi dari teori relativitas umum ini adalah makin besar massa dari sebuah benda maka semakin besar pula kelengkungan ruang-waktu di sekitar benda tersebut. Massa yang bergerak dalam ruang-waktu akan menyebabkan kelengkungan ruang-waktu yang dilewatinya berubah. Perubahan kurvatur ini dapat dianalogikan seperti riak yang terjadi ketika batu dilemparkan ke permukaan kolam. Saat batu mengenai permukaan air, maka air yang berada di sekeliling batu akan terganggu dan menyebar keluar dari sumber. Hal yang sama juga dapat diterapkan pada kurvatur ruang-waktu, di mana riak yang merambat dengan kecepatan cahaya dalam kurvatur ruang-waktu disebut sebagai gelombang gravitasi. Di alam semesta ini terdapat berbagai sumber gelombang gravitasi. Beberapa diantaranya adalah sistem bintang ganda, ledakan supernova, tumbukan antara dua blackhole, dan big bang.

Secara fisika, gelombang gravitasi membawa energi yang harganya menentukan kuat lemahnya pancaran atau radiasi gelombang gravitasi. Sayangnya, jumlah energi yang dipancarkannya sangat kecil. Namun diperlihatkan bahwa besar kecilnya jumlah energi yang dipancarkan bergantung pada massa (jumlah zat) dan juga kecepatan putar sumber

pemancarnya. Para ahli astronomi dengan demikian berharap bahwa sumber pemancar gelombang gravitasi yang paling mungkin adalah sumber astronomi seperti bintang mampat (bintang neutron) yang berputar cepat sekali pada sumbunya yang dikenal sebagai bintang pulsar, juga bintang ganda yang anggotanya saling mengorbit dan bintang meledak yang disebut supernova.

Setelah inti neutron terbentuk dengan kerapatan yang amat tinggi ($270 \text{ triliun gram/cm}^3$) runtuhnya materi ke inti bintang ditahan oleh inti neutron tadi sehingga timbullah suatu gelombang kejut yang memantul ke arah permukaan bintang. Proses pemantulan ini, yang berlangsung sangat cepat, membuat bintang meledak hancur dan meninggalkan inti tadi yang kemudian diberi nama bintang neutron.

Salah satu langkah awal untuk mempelajari pancaran gelombang gravitasi dari bintang neutron adalah dengan mempelajari pembangkitan dari pendekatan model paling sederhana dari bintang neutron yaitu benda tegar dengan tiga sumbu yang berotasi. Oleh karena itulah dalam tugas akhir ini akan dikaji pembangkitan gelombang gravitasi yang berasal dari rotasi benda tegar dengan tiga sumbu.

1.2. Rumusan Masalah

Dengan latar belakang di atas, rumusan masalah yang perlu diajukan adalah bagaimana efek gelombang gravitasi yang dibangkitkan oleh rotasi benda tegar dengan tiga sumbu.

1.3. Ruang Lingkup Kajian

Untuk menjawab rumusan masalah di atas akan penulis kaji hal-hal sebagai berikut:

- Gravitasi terlinearisasi
- Perambatan gelombang gravitasi
- Pembangkitan gelombang gravitasi
- Radiasi gelombang gravitasi dari rotasi benda tegar dengan tiga sumbu

1.4. Tujuan Penulisan

Tujuan yang hendak penulis capai melalui penulisan ini adalah untuk membuat suatu model yang dapat menggambarkan efek gelombang gravitasi yang dibangkitkan oleh benda tegar dengan tiga sumbu.

1.5. Metode dan Teknik Pengumpulan Data

Metode yang penulis gunakan adalah metode deskriptif analitis, dimana teori dasar dan data yang diambil dari studi pustaka akan dianalisis. Dan untuk mengumpulkan data, penulis melakukan studi pustaka dari berbagai literatur yang meliputi referensi dari beberapa jurnal internasional, buku-buku sumber, maupun informasi dari berbagai media lain sebagai penunjang



“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB II PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN

Dalam limit Newtonian teori relativitas umum akan tereduksi menjadi hukum gravitasi Newton pada medan gravitasi lemah. Sifat ini dikenal sebagai asas korespondensi. dalam ruang-waktu yang berisi medan gravitasi, geometri yang digunakan adalah geometri Riemann, sedangkan dalam ruang-waktu tanpa medan gravitasi, geometri yang digunakan adalah geometri Euclid. Pada ruang Euclid, metrik ruang-waktu diberikan oleh metrik *Minkowski* yang dirumuskan sebagai:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu\nu} dx^{\nu} = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.1)$$

Karena itu dalam medan gravitasi lemah, metrik ruang-waktu yang digunakan tidak berbeda jauh dari metrik diatas. Tensor metrik $g_{\mu\nu}$ dalam medan gravitasi lemah dapat didekati dengan bentuk:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Dengan $\eta_{\mu\nu}$ adalah tensor metrik *Minkowski* dan $h_{\mu\nu} \ll 1$.

Ditinjau sebuah partikel yang bergerak dalam medan gravitasi. Partikel tersebut akan ruang-waktu menempuh lintasan yang dinamakan sebagai lintasan geodesik. Persamaan geodesik lintasan tersebut dirumuskan sebagai

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (2.3)$$

Dengan menggunakan hubungan

$$ds^2 = -d\tau^2 \quad (2.4)$$

Persamaan (2.3) berubah menjadi :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.5)$$

Dimana dt merupakan waktu proper, yaitu didefinisikan sebagai selang waktu yang diukur oleh jam pengamat yang diam terhadap kejadian. Dengan menentukan $\alpha = \beta = 0$ diperoleh:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu c \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.6)$$

Karena medan tersebut bersifat stasioner, yaitu tidak berubah terhadap waktu, maka seluruh turunan $g_{\mu\nu}$ terhadap waktu akan lenyap, sehingga persamaan (2.6) dapat berubah menjadi:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu h_{00} \quad (2.7)$$

Dengan demikian persamaan (2.6) diatas dapat dipecahkan menjadi dua persamaan yaitu:

$$\frac{d^2 \vec{X}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} c \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00} \quad (2.8)$$

Dan

$$\frac{cd^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) menyatakan bahwa $dt/d\tau$ bernilai konstan. Dengan membagi kedua ruas persamaan (2.8) dengan $(dt/d\tau)^2$, maka diperoleh percepatan gerak benda:

$$\frac{d^2 \vec{X}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00}. \quad (2.10)$$

Di sisi lain, jika ϕ adalah potensial gravitasi Newton pada jarak r dari titik massa M yang besarnya:

$$\phi = -\frac{GM}{r} \quad (2.11)$$

Maka percepatan benda tersebut sama dengan $-\nabla\phi$. Jika kita bandingkan dengan persamaan (2.10), maka akan diperoleh hasil yaitu:

$$h_{00} = -2\phi + \text{konstanta} \quad (2.12)$$

Pada tempat yang jauh dari sumber medan gravitasi, sistem koordinatnya menjadi koordinat *Minkowski*. Hal ini diakibatkan karena pada jarak yang jauh medan gravitasi yang dirasakan oleh benda akan sangat kecil sehingga mendekati ruang-waktu datar. Oleh karena itu h_{00} menjadi lenyap. Begitu juga dengan ϕ pada persamaan (2.11) sehingga tetapan di atas bernilai nol. Maka akan diperoleh persamaan berbentuk:

$$g_{00} = -(1 + 2\phi) \quad (2.13)$$

Sedangkan pasangan kontravariannya adalah:

$$g^{00} = -(1 + 2\phi)^{-1} \quad (2.14)$$

Seperti yang telah dijelaskan di awal bahwa hukum gravitasi Einstein dapat direduksi menjadi hukum gravitasi Newton pada medan gravitasi lemah dan distribusi materi bersifat statik. Dari proses pereduksian ini akan terlihat kaitan antara konstanta κ (gravitasi Einstein) dan konstanta G (gravitasi Newton).

Selanjutnya akan ditinjau bentuk tensor Riemann-Christoffel dalam medan lemah seperti yang diberikan pada persamaan tensor metrik (2.2). nilai simbol Christoffel dari tensor metrik tersebut adalah:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial h_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (2.15)$$

Jika nilai perkalian $h_{\mu\nu}$ diabaikan, maka nilai tensor Ricci untuk $\mu = \nu = 0$ bernilai:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_0 \Gamma_{0\nu}^0 - \partial_\nu \Gamma_{00}^\nu \\ &= \partial_0 \left(\frac{1}{2} \eta^{\nu\beta} \left(\frac{\partial h_{\beta 0}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h_{\nu\beta}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{0\nu}}{\partial x^\beta} \right) \right) - \\ &\quad \partial_\nu \left(\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial h_{\beta 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{0\beta}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\nu\beta} (\partial_0 \partial_0 \partial h_{\nu\beta} + \partial_\nu \partial_\beta h_{00} - \partial_0 \partial_\beta h_{0\nu} - \partial_0 \partial_\nu h_{0\beta}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Jika distribusi materi bersifat statis maka $h_{\mu\nu}$ bukan merupakan fungsi t atau

$$\partial_0 h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.17)$$

Sehingga persamaan (2.16) menjadi

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2} \eta^{\nu\beta} \partial_\nu \partial_\beta h_{00} = \frac{1}{2} (\eta^{11} \partial_1 \partial_1 + \eta^{22} \partial_2 \partial_2 + \\ &\quad \eta^{33} \partial_3 \partial_3) h_{00} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dengan

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.19)$$

Dalam gravitasi newton, potensial medan gravitasi dapat dituliskan dalam bentuk persamaan Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho(\vec{r}) \quad (2.20)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.13) dan persamaan (2.20), persamaan (2.18) dapat dituliskan menjadi:

$$R_{00} = -\nabla^2 \phi = -4\pi G\rho \quad (2.21)$$

Dalam hal ini, materi di alam semesta dianggap sebagai fluida sempurna dengan densitas ρ dan tekanan P , sehingga Tensor energi-momentum untuk fluida sempurna dirumuskan sebagai

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)V_\mu V_\nu + g_{\mu\nu}P \quad (2.22)$$

Karena distribusi materi bersifat statik maka, yaitu materi dianggap sebagai kumpulan debu/*dust*, maka materi tersebut bisa dianggap tidak memiliki tekanan internal P sehingga persamaan (2.22) tereduksi ke bentuk

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu \quad (2.23)$$

Selain itu vektor kecepatan-4 adalah

$$V_\mu = (-1, \vec{0}) \quad (2.24)$$

Sehingga seluruh komponen $T_{\mu\nu}$ lenyap kecuali $T_{00} = \rho$. Skalar T dapat dihitung dengan perkalian dalam antara tensor metrik kontravarian dan tensor energi-momentum kovarian untuk *dust* sebagai:

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = g^{00}T_{00} = -\frac{\rho}{1 + 2\phi} \quad (2.25)$$

Dengan digunakannya geometri Riemann maka potensial gravitasi dalam persamaan Einstein harus diperluas. Dalam teori relativitas umum potensial gravitasi dapat diperluas menjadi kelengkungan ruang-waktu yang tertuang dalam tensor Einstein, yaitu

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.26)$$

Adapun rapat massa yang menimbulkan potensial medan gravitasi dapat diperluas menjadi tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$ dengan rapat massa-energi termasuk salah satu komponen di dalamnya.

Melihat bentuk persamaan (2.20) yang menyatakan bahwa potensial medan gravitasi sebanding dengan rapat massa sumber medan, maka dapat dilakukan perluasan bahwa kelengkungan ruang-waktu sebanding pula dengan tensor energi momentum yang dirumuskan sebagai:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.27)$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (2.28)$$

Dan bentuk campuran dari persamaan medan Einstein

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R = -\kappa T_{\nu}^{\mu} \quad (2.29)$$

Persamaan diatas menampilkan hukum gravitasi Einstein dengan κ berupa suatu tetapan positif yang ada hubungannya dengan G. dengan mengambil *trace* persamaan (2.27) dan

(2.29) maka persamaan medan Einstein dapat pula ditulis kedalam bentuk:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} T - T_{\mu\nu} \right) \quad (2.30)$$

Dengan menggunakan persamaan diatas maka nilai dari R_{00} adalah:

$$R_{00} = \kappa \left(\frac{1}{2} g_{00} T - T_{00} \right) = \kappa \left[\frac{1}{2} \{ -(1 + 2\phi) \} \left\{ -\frac{\rho}{1+2\phi} \right\} - \rho \right] = -\frac{1}{2} \kappa \rho \quad (2.31)$$

Jika dibandingkan dengan persamaan (2.21) maka akan diperoleh:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (2.32)$$

Sehingga persamaan gravitasi Einstein(2.27) menjadi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.33)$$



BAB III

TEORI DASAR GELOMBANG GRAVITASI

3.1 Medan gravitasi lemah

3.1.1 Ruang-waktu mendekati datar

Karena ruang-waktu datar akibat dari tidak adanya medan gravitasi, maka medan gravitasi lemah dapat didefinisikan dari ruang-waktu mendekati datar (*nearly flat space-time*). Yang dimaksud mendekati disini adalah kita dapat menemukan sistem koordinat yang mempunyai metrik

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (3.1)$$

Dimana

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1,1,1,1) \quad (3.2)$$

Merupakan metrik *Minkowski* pada relativitas khusus, dan $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ untuk semua α dan β . Sistem koordinat yang memenuhi persamaan (3.1) dan (3.2) disebut sistem koordinat mendekati Lorentz.

Dalam beberapa sistem koordinat, bisa jadi memiliki komponen-komponen yang sangat kompleks dibandingkan sistem koordinat yang lain. Hal pertama yang dilakukan untuk menemukan solusi dari persamaan dalam teori relativitas umum adalah memilih sistem koordinat yang mewakili pemilihan yang terbaik untuk sistem koordinat, seperti persamaan (3.2) mewakili bentuk paling sederhana yang dapat kita temukan dalam ruang-waktu datar, jadi persamaan (3.1) juga harus mewakili komponen metrik dari ruang-waktu yang mendekati datar dalam bentuk sesederhana mungkin.

Sistem koordinat yang dapat menyatakan komponen metrik dari ruang-waktu mendekati datar dalam bentuk persamaan (3.1) dan (3.2) tidaklah unik. Jika kita bisa mengidentifikasi sebuah sistem koordinat maka kita akan mendapatkan dalam jumlah yang tak terbatas turunan sistem koordinat jika kita melakukan transformasi koordinat. Dalam

sub bab ini akan ditentukan sistem koordinat yang dapat menjaga sifat-sifat dari persamaan (3.1) dan (3.2). sistem koordinat ini masing-masing adalah transformasi latar Lorentz dan transformasi gauge.

3.1.2 Transformasi latar Lorentz

Diasumsikan kita bekerja pada ruang-waktu *Minkowski* dari relativitas khusus, dan didefinisikan kerangka inersia, S , dengan koordinat (ct, x, y, z) . kemudian diasumsikan juga hasil transformasi dari kerangka inersia, S' . dibawah transformasi Lorentz, S' mempunyai koordinat yang diberikan pada matriks berikut

$$(ct', x', y', z')^T = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (ct, x, y, z)^T \quad (3.3)$$

Dimana $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$. bentuk ini kita dapat tuliskan dalam bentuk yang lebih sederhana

$$x'^\alpha = \Lambda'^\alpha_\beta x^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} x^\beta \quad (3.4)$$

Invers matriks Lorentz diberikan oleh

$$(ct, x, y, z)^T = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (ct', x', y', z')^T \quad (3.5)$$

Atau

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x'^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} x'^\beta \quad (3.6)$$

Sekarang diasumsikan bahwa di dalam ruang-waktu mendekati datar, koordinat Lorentz (ct, x, y, z) memenuhi persamaan (3.1) dan (3.2). kemudian koordinat Lorentz

tersebut ditransformasikan ke sistem koordinat baru (ct', x', y', z') yang dirumuskan

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} \quad (3.7)$$

Yaitu dimana matriks transformasi identik dengan persamaan (3.3) untuk kecepatan v . Dalam sistem koordinat baru ini komponen matrik akan mengambil bentuk

$$g'_{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu}_{\alpha'} \Lambda^{\nu}_{\beta'} g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.1) ke dalam persamaan (3.8) maka akan didapatkan:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \eta_{\mu\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} h_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

Oleh karena komponen metrik *Minkowski* bernilai sama dalam setiap kerangka Lorentz maka:

$$g'_{\alpha\beta} = \eta'_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} h_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta} \quad (3.10)$$

Dengan demikian, asalkan dipertimbangkan hanya transformasi dari bentuk persamaan (3.3), komponen $h_{\mu\nu}$ bertransformasi seolah-olah adalah komponen tensor (0,2) yang didefinisikan pada latar ruang-waktu datar.

Oleh karena itu, sistem koordinat mendekati Lorentz yang asli akan tetap berbentuk mendekati Lorentz pada sistem koordinat yang baru. Dengan kata lain, sebuah ruang-waktu yang terlihat mendekati datar pada seorang pengamat masih terlihat mendekati datar oleh pengamat lain dalam gerak relatif seragam terhadap pengamat pertama.

3.1.3 Transformasi gauge

Sekarang diasumsikan diberikan perubahan sangat kecil pada sistem koordinat dengan menerapkan sebuah transformasi koordinat yang berbentuk

$$x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\beta}) \quad (3.11)$$

dimana komponen merupakan fungsi dari koordinat (x^{β}) .
Maka:

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \xi_{,\beta}^{\alpha} \quad (3.12)$$

Dari persamaan (3.11) kita juga dapat menuliskan:

$$x^{\alpha} = x'^{\alpha} - \xi^{\alpha}(x^{\beta}) \quad (3.13)$$

Jika nilai dari ξ^{α} kecil, adalah masuk akal jika

$$\left| \xi^{\alpha}_{,\beta} \right| \ll 1 \text{ untuk semua } \alpha, \beta \quad (3.14)$$

Kemudian dengan dalil rantai diperoleh

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}} = \delta_{\gamma}^{\alpha} - \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \cong \delta_{\gamma}^{\alpha} - \xi^{\alpha}_{,\gamma} \quad (3.15)$$

Dimana orde diatas orde pertama akan diabaikan pada nilai yang kecil. Digunakan pula fakta bahwa komponen delta Kronecker bernilai sama pada setiap sistem koordinat

Telah diasumsikan bahwa komponen-komponen dari sistem koordinat $g_{\alpha\beta}$ memenuhi persamaan (3.1) dan (3.2). maka berikut akan diselidiki apakah $g'_{\alpha\beta}$ juga memenuhi persamaan (3.1) dan (3.2).

Karena metrik merupakan tensor maka $g'_{\alpha\beta}$ dapat dituliskan dalam bentuk:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.1) dan (3.15) ke dalam persamaan (3.16), maka untuk orde pertama akan didapatkan:

$$g'_{\alpha\beta} = \left(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \xi^\mu_{,\alpha} \delta_\beta^\nu - \xi^\nu_{,\beta} \delta_\alpha^\mu \right) \eta_{\mu\nu} + \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu h_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

Persamaan diatas dapat disederhanakan lebih jauh menjadi

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \quad (3.18)$$

Pada persamaan 3.18 didefinisikan bahwa

$$\xi_\alpha = \eta_{\alpha\nu} \xi^\nu \quad (3.19)$$

Kemudian persamaan (3.18) mempunyai bentuk yang sama seperti persamaan (3.1) asalkan:

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \quad (3.20)$$

Hasil-hasil diatas menunjukkan bahwa sekali diidentifikasi sebuah sistem koordinat yang bersifat hampir Lorentzian, maka dapat ditambahkan vektor kecil ξ_α pada koordinat x_α tanpa merubah validitas dari asumsi awal bahwa ruang-waktu adalah hampir datar. Oleh karena itu kita bisa memilih komponen dari ξ_α untuk membuat persamaan medan Einstein sesederhana mungkin. Proses ini disebut sebaga pemilihan gauge dan transformasi koordinat yang diberikan pada persamaan (3.20) disebut juga sebagai transformasi gauge.

3.2 Persamaan medan Einstein untuk medan gravitasi lemah

Dalam persamaan medan Einstein, tensor Einstein dirumuskan sebagai:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.21)$$

Yang menghubungkan geometri ruang-waktu yang dinyatakan dalam suku tensor Einstein $G_{\mu\nu}$ dengan sumber dari medan gravitasi yang direpresentasikan oleh tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$. Komponen dari tensor Einstein $G_{\mu\nu}$ dibangun dari komponen tensor kurvatur-Riemann yang menjelaskan geometri ruang-waktu.

Pertama-tama didefinisikan simbol Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$, yang tergantung pada komponen metrik ruang-waktu dan turunan pertamanya.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\alpha} g_{\beta\nu} + \partial_{\alpha\beta} g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} g_{\alpha\beta}) \quad (3.22)$$

Tensor kurvatur Riemann mempunyai komponen

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\rho\lambda} (\partial_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\eta}^{\lambda} \Gamma_{\nu\sigma}^{\eta} - \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\sigma}^{\eta}) \quad (3.23)$$

Kemudian berikutnya diperkenalkan tensor simetris Ricci

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} \quad (3.24)$$

Dan trace dari tensor tersebut disebut dengan skalar Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (3.25)$$

Maka, tensor Einstein didefinisikan sebagai

$$G_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \quad (3.26)$$

Jika kondisi (3.1) dipenuhi, maka persamaan medan Einstein dapat dilinierkan dengan bergantung pada $h_{\mu\nu}$. Proses ini dimulai dengan terlebih dahulu melinierkan simbol Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$. Untuk persamaan (3.1) simbol Christoffel akan berbentuk:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_{\alpha} h_{\beta\nu} + \partial_{\beta} h_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} h_{\alpha\beta}) \quad (3.27)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} h_{\beta}^{\mu} + \partial_{\beta} h_{\alpha}^{\mu} + \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu} h_{\alpha\beta}) \quad (3.28)$$

Karena simbol Christoffel merupakan kuantitas orde pertama, maka satusatunya yang memiliki kontribusi pada tensor Riemann terlinearisasi adalah turunan dari simbol Christoffel. Menggunakan persamaan (3.23) dan persamaan (3.28) didapatkan:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\nu} \partial_{\rho} h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma} \partial_{\mu} h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma} \partial_{\nu} h_{\mu\rho} - \partial_{\rho} \partial_{\mu} h_{\nu\sigma}) \quad (3.29)$$

Dari tensor kurvatur Riemann terlinearisasi kemudian didefinisikan tensor Ricci. Menggunakan persamaan (3.29) diperoleh:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} \partial_{\mu} h_{\nu}^{\alpha} + \partial_{\alpha} \partial_{\nu} h_{\mu}^{\alpha} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h - \square h_{\mu\nu}) \quad (3.30)$$

Dimana h adalah trace dari metrik perturbasi $h_{\mu\nu}$

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \quad (3.31)$$

Dan diperkenalkan juga operator d'Alembert \square dalam ruang-waktu datar *Minkowski*

$$\square \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (3.32)$$

Kemudian skalar Ricci yang terlinearisasi

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h \quad (3.33)$$

Dengan komponen-komponen tensor Einstein terlinearisasi yang telah diturunkan sebelumnya maka diperoleh tensor Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \partial_\mu \partial_\nu h - h_{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} (\square h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}) \right) \quad (3.34)$$

Ruas kanan dari persamaan (3.34) dapat disederhanakan lebih jauh dengan memperkenalkan kuantitas

$$\bar{h}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (3.35)$$

Dari definisi persamaan (3.35) didapatkan

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} \quad (3.36)$$

Dimana $\bar{h} \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta}$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\alpha \bar{h}_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha \bar{h}_\mu^\alpha - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} \right) \quad (3.37)$$

Persamaan (3.37) disebut sebagai tensor Einstein terlinearisasi dalam bentuk *trace reversed*. Dari persamaan ini dapat diturunkan persamaan medan Einstein yang terlinearisasi.

3.2.1 Persamaan medan Einstein yang terlinearisasi

Dari persamaan (3.21) dan persamaan (3.37) maka akan didapatkan persamaan medan Einstein terlinearisasi:

$$\partial_\mu \partial_\alpha \bar{h}_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha \bar{h}_\mu^\alpha - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.38)$$

Pada sub bab 3.1.3 telah dijelaskan bahwa dapat dipilih komponen ξ_α untuk membuat persamaan Einstein menjadi sesederhana mungkin. Dengan alasan tersebut maka dapat dipilih kondisi Lorentz gauge yang memenuhi:

$$\partial_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.39)$$

Kondisi (3.39) dapat juga ditulis dalam bentuk

$$\eta^{\beta\gamma} \partial_\beta \bar{h}_{\gamma\alpha} = 0 \quad (3.40)$$

Jika kondisi di atas terpenuhi maka tiga suku selain $\square \bar{h}_{\mu\nu}$ dalam tensor Einstein terlinearisasi $G_{\mu\nu}$ akan lenyap. Sehingga tensor Einstein terlinearisasi akan tereduksi menjadi;

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} \quad (3.41)$$

Dengan demikian, dalam gauge Lorentz tensor Einstein akan tereduksi menjadi operator gelombang yang bekerja pada metrik gangguan *trace reversed*. Sehingga persamaan medan Einstein yang terlinearisasi akan mengambil bentuk yang lebih sederhana yaitu:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.42)$$

Persamaan (3.24) disebut juga dengan nama persamaan medan Einstein yang terlinearisasi. Arti terlinearisasi disini adalah bahwa sejak awal suku $h_{\alpha\beta}$ yang merupakan metrik perturbasi telah dijaga agar tetap linier sejak awal. Hal ini mengakibatkan ruas kiri yang tidak lain adalah tensor Einstein yang pada awalnya terdiri dari tensor Ricci, tensor metrik, dan scalar Ricci tereduksi menjadi operator gelombang yang bekerja terhadap metrik perturbasi dalam bentuk *trace-reversed* $\bar{h}_{\mu\nu}$.

3.3 Perambatan gelombang gravitasi

Dalam ruang vakum tensor energi-momentum akan lenyap, $T_{\mu\nu} = 0$, dan persamaan medan Einstein yang terlineaisasi dalam gauge Lorentz akan tereduksi ke dalam bentuk persamaan gelombang homogen untuk semua komponen metrik perturbasi $\bar{h}_{\mu\nu}$:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.43)$$

Solusi bergantung waktu dari persamaan gelombang ini dapat ditafsirkan sebagai gelombang gravitasi lemah yang merambat sepanjang wilayah dari ruang-waktu dimana persamaan (3.43) bernilai benar, yaitu dimana metrik ruang-waktu adalah mendekati *Minkowskian*.

Solusi paling sederhana dari persamaan (3.43) merupakan gelombang datar

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_{\alpha} x^{\alpha}) \quad (3.44)$$

Dimana $A_{\mu\nu}$ dan k_{α} dikenal sebagai masing-masing sebagai amplitudo gelombang dan vektor gelombang. Jika persamaan (3.44) dimasukkan ke dalam persamaan (3.43) maka akan didapatkan bahwa persamaan (3.44) merupakan solusi dari persamaan (3.43) asalkan memenuhi:

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (3.45)$$

Yang merupakan vektor null. Dari hal ini dapat ditafsirkan bahwa gelombang gravitasi merambat dengan kecepatan cahaya.

Metrik $\bar{h}_{\mu\nu}$ pada awalnya memiliki 16 komponen, namun karena kesimetrisan diantara komponen-komponennya maka jumlah komponen dapat tereduksi menjadi 10 komponen. Namun kesepuluh komponen tersebut dapat direduksi lebih jauh lagi dengan gauge Lorentz, transformasi gauge, dan transformasi latar Lorentz.

Pertama-tama dimulai dengan menerapkan gauge Lorentz pada persamaan (3.44), maka akan didapatkan:

$$A_{\mu\alpha} k^\alpha = 0 \quad (3.46)$$

Hal ini berarti bahwa $A_{\mu\alpha}$ harus tegak lurus terhadap vektor \vec{k} . Persamaan (3.46) pada faktanya terdiri dari empat persamaan linier. Hal ini berarti bahwa ada cukup kebebasan untuk menetapkan nilai dari empat komponen dari $A_{\mu\nu}$, yang kemudian mereduksi jumlah komponen dari 10 ke 6 komponen independen dari $A_{\mu\nu}$.

Kita masih bisa membatasi lebih jauh komponen dari $A_{\mu\nu}$ dengan menggunakan pemilihan transformasi gauge.

Kondisi gauge Lorentz mensyaratkan bahwa ξ^μ memenuhi

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \xi^\mu = \bar{h}^{(old)\mu\nu}_{, \nu} \quad (3.47)$$

Namun, untuk setiap set komponen ξ^μ yang memenuhi persamaan (3.47), kita dapat menambahkan komponen ψ^μ untuk mendefinisikan transformasi baru:

$$x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \zeta^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} + \psi^{\mu} \quad (3.48)$$

Dan asalkan ψ^{μ} memenuhi:

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \psi^{\mu} = 0 \quad (3.49)$$

Maka ζ^{μ} akan memenuhi

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \zeta^{\mu} = \bar{h}^{(old)\mu\nu}_{, \nu} \quad (3.50)$$

Oleh karena itu metrik perturbasi termodifikasi

$$h_{\mu\nu}^{(TT)} = h_{\mu\nu}^{(old)} - \zeta_{\mu, \nu} - \zeta_{\nu, \mu} \quad (3.51)$$

Masih menyatakan tensor Einstein dalam bentuk sederhana, bentuk gauge Lorentz dari persamaan (3.43).

Label '(TT)' merupakan singkatan dari *Transverse Traceles*, dan transformasi gauge ψ^{μ} (atau setara dengan ζ^{μ}) mendefinisikan *Transverse Traceless gauge*.

Persamaan (3.49) memberikan persamaan tambahan yang komponen-komponennya dapat diatur sedemikian rupa pada transformasi gauge yang telah dipilih sebelumnya, dengan tujuan untuk memilih sistem koordinat yang membuat $\bar{h}_{\mu\nu}$ dan juga $A_{\mu\nu}$ sesederhana mungkin. Faktanya, dapat ditunjukkan bahwa kebebasan yang dipertahankan dalam memilih ψ^{μ} , sementara masih memuaskan dalam gauge Lorentz, membolehkan kita untuk membatasi lebih jauh $A_{\mu\nu}$ dengan memasang lagi nilai dari empat komponen yang lainnya, hingga mereduksi komponen $A_{\mu\nu}$ menjadi tinggal dua komponen.

Lebih spesifiknya, jika U kecepatan-4 tertentu dengan komponen U^{β} , maka ada cukup kebebasan dalam memilih

komponen dari ψ untuk memastikan bahwa tensor amplitudo gelombang memenuhi

$$A_{\alpha\beta}U^\beta = 0 \quad (3.52)$$

Bahkan, dapat juga dipilih komponen ψ sehingga

$$A_\mu^\mu = \eta^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = 0 \quad (3.53)$$

Yaitu, bahwa *trace* A dapat diatur agar bernilai nol.

Diasumsikan sebuah partikel uji mengalami gelombang gravitasi pada salah satu bagian ruang-waktu mendekati datar. Diasumsikan pula bahwa transformasi ke kerangka latar Lorentz yang mana partikel tersebut dalam keadaan diam, yaitu pada saat kecepatan-4 nya mempunyai komponen $(1,0,0,0)$, yang juga dapat dituliskan seperti berikut:

$$U^\beta = \delta_t^\beta \quad (3.54)$$

Persamaan (3.52) dan (3.54) kemudian mengakibatkan:

$$A_{\alpha t} = 0 \text{ untuk semua } \alpha \quad (3.55)$$

Selanjutnya sumbu koordinat ruang diorientasikan sedemikian rupa sehingga gelombang merambat pada arah z, yaitu

$$k^t = \omega, \quad k^x = k^y = 0, \quad k^z = \omega \quad (3.56)$$

Dan

$$k_t = -\omega, \quad k_x = k_y = 0, \quad k_z = \omega \quad (3.57)$$

Yang kemudian menyebabkan persamaan (3.46)

$$A_{\alpha z} = 0 \text{ untuk semua } \alpha \quad (3.58)$$

Yang berarti bahwa tidak ada komponen metrik perturbasi dalam arah perambatan gelombang. Hal ini menjelaskan asal kata 'Transverse' dari 'Transverse Traceless gauge'; dalam gauge ini metrik perturbasi sepenuhnya *transverse* pada arah perambatan dari gelombang gravitasi.

Ringkasnya, di dalam *Transverse Traceless gauge* persamaan (3.44) dapat disederhanakan menjadi:

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(TT)} = A_{\mu\nu}^{(TT)} \cos[\omega(t - z)] \quad (3.59)$$

Persamaan (3.55) dan (3.58), dikombinasikan dengan simetri dari $A_{\mu\nu}$, menyiratkan bahwa komponen tidak nol dari $A_{\mu\nu}$ hanyalah A_{xx} , A_{yy} , $A_{xy} = A_{yx}$. Bahkan, pada kondisi *traceless*, persamaan (3.53), mengakibatkan $A_{xx} = -A_{yy}$. Karenanya, komponen dari $A_{\mu\nu}$ dalam *Transverse Traceless gauge* adalah

$$A_{\mu\nu}^{(TT)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx}^{(TT)} & A_{xy}^{(TT)} & 0 \\ 0 & A_{xy}^{(TT)} & -A_{xx}^{(TT)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Yang juga mengakibatkan:

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(TT)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}_{xx}^{(TT)} & \bar{h}_{xy}^{(TT)} & 0 \\ 0 & \bar{h}_{xy}^{(TT)} & -\bar{h}_{xx}^{(TT)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Dimana:

$$\bar{h}_{xx}^{(TT)} = A_{xx}^{(TT)} \cos[\omega(t - z)] \quad (3.62)$$

Dan

$$\bar{h}_{xy}^{(TT)} = A_{xy}^{(TT)} \cos[\omega(t - z)] \quad (3.63)$$

Akhirnya, harus dicatat bahwa dalam *Transverse Traceless gauge* adalah trivial untuk mengaitkan komponen dari $\bar{h}_{\mu\nu}$ terhadap metrik perturbasi yang asli $h_{\mu\nu}$. Dengan mensubstitusi persamaan (3.35) ke dalam persamaan (3.31) maka didapatkan:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} \left(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \right) \\ &= h - 2h = -h \end{aligned} \quad (3.64)$$

Jelas bahwa untuk kasus khusus pada *Transverse Traceless gauge*, \bar{h} dan h kedua-duanya identik bernilai nol. Maka untuk semua α, β

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{(TT)} = h_{\alpha\beta}^{(TT)}. \quad (3.65)$$

3.4 Efek gelombang gravitasi pada partikel bebas

3.4.1 Deviasi geodesik dari partikel uji

Dalam medan gravitasi lemah, partikel yang bergerak memenuhi persamaan geodesik:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = \epsilon R_{tt\alpha}^{\alpha} = -\epsilon R_{t\alpha t}^{\alpha} \quad (3.66)$$

Substitusi persamaan (3.29) ke dalam persamaan (3.66) dan dengan mempertahankan bahwa masih dalam *Transverse Traceless gauge*, maka didapatkan:

$$R_{txt}^x = \eta^{xx} R_{xtxt} = -\frac{1}{2} \bar{h}_{xx,tt}^{(TT)} \quad (3.67)$$

$$R_{txt}^y = \eta^{yy} R_{ytxt} = -\frac{1}{2} \bar{h}_{xy,tt}^{(TT)} \quad (3.68)$$

Karenanya, dua partikel yang awalnya terpisah oleh ϵ pada arah x , mempunyai vektor deviasi geodesik yang mematuhi:

$$\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{(TT)} \quad (3.69)$$

Dan

$$\frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{(TT)} \quad (3.70)$$

dengan cara yang sama dapat didapatkan untuk arah y

$$\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{(TT)} \quad (3.71)$$

Dan

$$\frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{(TT)} \quad (3.72)$$

3.4.2 Cincin partikel uji: polarisasi gelombang gravitasi

Persamaan (3.69) sampai (3.72) dapat diperluas lebih jauh lagi untuk menentukan deviasi geodesik dari dua partikel, (yang satu berada pada titik asal dan yang lain berada pada koordinat $x = \epsilon \cos\theta$, $y = \epsilon \sin\theta$, $z = 0$, yaitu pada sebuah bidang datar x - y) ketika gelombang gravitasi merambat dalam

arah z. dapat ditunjukkan bahwa ξ^x dan ξ^y mematuhi persamaan:

$$\frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \epsilon \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{(TT)} + \frac{1}{2} \epsilon \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{(TT)} \quad (3.73)$$

Dan

$$\frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \epsilon \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{(TT)} - \frac{1}{2} \epsilon \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{(TT)} \quad (3.74)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (3.63) dan (3.65) ke dalam persamaan (3.73) dan (3.74), maka didapatkan solusi:

$$\xi^x = \epsilon \cos \theta + \frac{1}{2} \epsilon \cos \theta A_{xx}^{(TT)} \cos \omega t + \frac{1}{2} \epsilon \sin \theta A_{xy}^{(TT)} \cos \omega t \quad (3.75)$$

Dan

$$\xi^y = \epsilon \sin \theta + \frac{1}{2} \epsilon \cos \theta A_{xy}^{(TT)} \cos \omega t - \frac{1}{2} \epsilon \sin \theta A_{xx}^{(TT)} \cos \omega t \quad (3.76)$$

Diasumsikan θ bervariasi antara 0 sampai 2π , sehingga keadaan awal pada cincin partikel berbentuk lingkaran sempurna pada bidang x - y yang mengakibatkan jarak setiap partikel uji terhadap titik asal bernilai sama satu-sama lain. Gambar 3.1 menunjukkan efek dari gelombang gravitasi yang merambat melalui sumbu z pada cincin partikel uji.

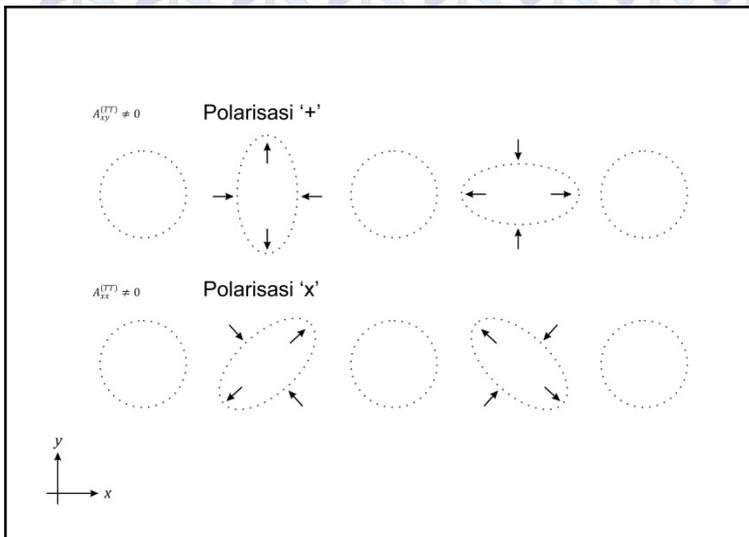
Panel atas menunjukkan kasus dimana metrik perturbasi mempunyai $A_{xx}^{(TT)} \neq 0$ dan $A_{xy}^{(TT)} = 0$. Dalam kasus ini solusi untuk ξ^x dan ξ^y tereduksi menjadi

$$\xi^x = \epsilon \cos \theta \left(1 + \frac{1}{2} A_{xx}^{(TT)} \cos \omega t \right) \quad (3.77)$$

Dan

$$\xi^y = \epsilon \sin \theta \left(1 - \frac{1}{2} A_{xx}^{(TT)} \cos \omega t \right) \quad (3.78)$$

Keadaan ini disebut juga sebagai polarisasi '+'



Gambar 3.1: ilustrasi yang menunjukkan efek gelombang gravitasi pada cincin partikel uji. Panel atas menunjukkan gelombang pada $A_{xx}^{(TT)} \neq 0$ dan $A_{xy}^{(TT)} = 0$, yang menunjukkan polarisasi '+'. Panel bawah menunjukkan gelombang pada $A_{xy}^{(TT)} \neq 0$ dan $A_{xx}^{(TT)} = 0$, yang menunjukkan polarisasi 'x'.

Panel bawah menunjukkan kasus dimana metrik perturbasi mempunyai $A_{xy}^{(TT)} \neq 0$ dan $A_{xx}^{(TT)} = 0$. Dalam kasus ini solusi untuk ξ^x dan ξ^y tereduksi menjadi

$$\xi^x = \epsilon \cos \theta + \frac{1}{2} \epsilon \sin \theta A_{xy}^{(TT)} \cos \omega t \quad (3.79)$$

Dan

$$\xi^y = \epsilon \sin \theta + \frac{1}{2} \epsilon \cos \theta A_{xy}^{(TT)} \cos \omega t \quad (3.80)$$

Keadaan ini disebut juga sebagai polarisasi '×'

Kedua solusi tersebut, untuk $A_{xx}^{(TT)} \neq 0$ dan $A_{xy}^{(TT)} \neq 0$ masing-masing merepresentasikan dua keadaan polarisasi dari gelombang gravitasi, dan keadaan ini biasanya dilambangkan dengan masing-masing '+' dan '×'. secara umum, setiap gelombang gravitasi yang merambat sepanjang sumbu z dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari polarisasi '+' dan '×', yaitu :

$$\mathbf{h} = a\mathbf{e}_+ + b\mathbf{e}_\times \quad (3.81)$$

Dimana a dan b merupakan konstanta skalar dan tensor polarisasi \mathbf{e}_+ dan \mathbf{e}_\times adalah:

$$\mathbf{e}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

Dan

$$\mathbf{e}_\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.5 Pembangkitan gelombang gravitasi

3.5.1 Sumber medan lemah dengan kecepatan tertentu

Persamaan medan Einstein yang terlinearisasi ditunjukkan oleh persamaan (3.42)

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.83)$$

Dimana $T_{\mu\nu}$ adalah tensor energi momentum dari materi. Dalam hal ini masih berada dalam gauge Lorentz, $\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, dan $T_{\mu\nu}$ memenuhi hukum konservasi $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Persamaan (3.83) adalah linier dalam $h_{\mu\nu}$ dan dapat diselesaikan dengan metode fungsi Green: jika $G(x - x')$ adalah solusi dari persamaan:

$$\square_x G(x - x') = \delta^4(x - x') \quad (3.84)$$

Maka solusi yang terkait dengan persamaan (3.83) adalah:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G(x - x') T_{\mu\nu}(x') \quad (3.85)$$

Solusi dari persamaan (3.84) tentunya tergantung dari kondisi batas yang diterapkan. Untuk masalah radiasi, solusi yang sesuai adalah *retarded Green's function*:

$$G(x - x') = -\frac{1}{4\pi|x - x'|} \delta(x_{ret}^0 - x'^0) \quad (3.86)$$

Dimana $x'^0 = ct'$, $x_{ret}^0 = ct_{ret}$, dan

$$t_{ret} = t - \frac{|x - x'|}{c} \quad (3.87)$$

Yang disebut *retarded time*. Maka solusi untuk persamaan (3.83) adalah:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{1}{|x-x'|} T_{\mu\nu} \left(t - \frac{|x-x'|}{c}, x' \right) \quad (3.88)$$

Diluar dari sumber, solusi ini dapat diterapkan *Transverse Traceless gauge* menggunakan:

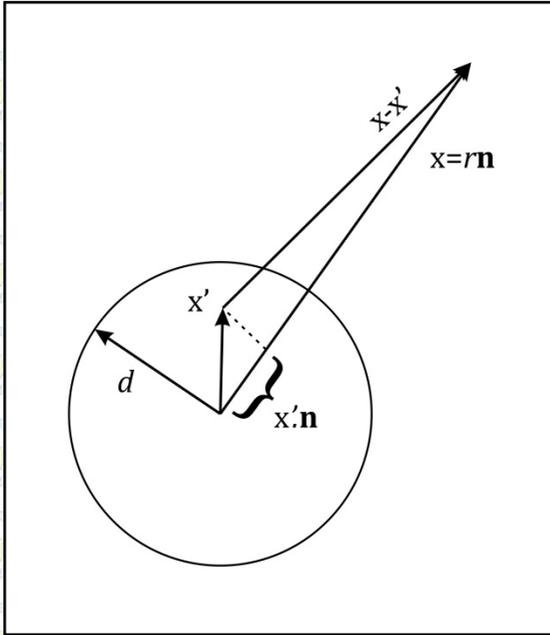
$$h_{ij}^{(TT)} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl} \quad (3.89)$$

Dimana $\Lambda_{ij,kl}$ merupakan tensor lambda yang akan membuat \bar{h}_{kl} berada dalam kondisi *transverse traceless gauge*. Maka, untuk diluar sumber, persamaan (3.88) menjadi:

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \int d^3x' \frac{1}{|x-x'|} T_{kl} \left(t - \frac{|x-x'|}{c}, x' \right) \quad (3.90)$$

Dimana digunakan notasi $\hat{x} = \hat{\mathbf{n}}$, dan juga $|x| = r$. Jika radius dari sumber dilambangkan d , maka pada $r \gg d$:

$$|x - x'| = r - x' \cdot \hat{\mathbf{n}} + O\left(\frac{d^2}{r}\right) \quad (3.91)$$



Gambar 3.2: ilustrasi untuk persamaan (3.91)

Kita tentunya tertarik pada nilai \bar{h}_{ij} pada jarak yang sangat jauh dari sumber, dimana detektor gelombang gravitasi berada. Jadi diterapkan limit $r \rightarrow \infty$ pada t tetap, dan hanya pada orde 1. Maka persamaan (3.90) pada jarak yang sangat jauh menjadi:

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \int d^3x' T_{kl} \times \left(t - \frac{r}{c} + \frac{x' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}, x' \right) \quad (3.92)$$

Ditambah suku orde dua yang diabaikan. Sekarang T_{kl} dapat ditulis dalam bentuk transformasi Fourier

$$T_{kl}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{T}_{kl}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (3.93)$$

Setelah ditransformasikan maka akan didapatkan:

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \bar{T}_{kl}(\omega, \omega \frac{\hat{\mathbf{n}}}{c}) e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \quad (3.94)$$

Secara umum, komponen Fourier dari tensor energi-momentum dari sumber akan bernilai besar di sekitar nilai ω_s , dan karakteristik dari kecepatan dimana pergerakan massa dalam jumlah besar pada sumber adalah $v \sim \omega_s d$. Karena sebelumnya tidak diasumsikan bahwa $\omega_s d \ll c$. Maka persamaan (3.49) berlaku untuk sumber relativistik dan sumber non-relativistik, sepanjang teori terlinearisasi masih diterapkan.

Persamaan untuk total energi yang diradiasikan per satuan luas adalah:

$$\frac{dE}{dA} = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} dt (\dot{h}_+ + \dot{h}_\times) \quad (3.95)$$

Dengan mengatur $dA = r^2 d\Omega$, maka total energi per satuan sudut ruang adalah:

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{r^2 c^3}{32\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} dt \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \quad (3.96)$$

Dengan memasukkan persamaan (3.94) maka didapatkan:

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{G}{2\pi^2 c^7} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^2 \bar{T}_{ij}(\omega, \omega \frac{\hat{\mathbf{n}}}{c}) \bar{T}_{kl}^*(\omega, \omega \frac{\hat{\mathbf{n}}}{c}) \quad (3.97)$$

sumber biasanya meradiasikan dalam waktu Δt . Dalam kasus ideal dari sumber monokromatik, radiasi bertahan dalam jangka waktu $\Delta t = \infty$ dan total energi yang

diradiasikan secara formal berlainan. Maka, untuk sumber monokromatik, daya radiasi yang dipancarkan merupakan kuantitas yang lebih berguna. Untuk sumber tersebut, radiasi dalam frekuensi ω_0 , dituliskan $\tilde{T}_{ij}(\omega, \vec{k})$ untuk ω positif sebagai:

$$\tilde{T}_{ij}(\omega, \vec{k}) = \theta_{ij}(\omega, \vec{k}) 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (3.98)$$

Dan persamaan (3.97) menjadi:

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{G\omega_0^2}{\pi c^7} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \theta_{ij}(\omega_0, \omega_0 \frac{\vec{n}}{c}) \theta^*_{ij}(\omega_0, \omega_0 \frac{\hat{\mathbf{n}}}{c}) T \quad (3.99)$$

Telah digunakan $2\pi\delta(\omega = 0) = T$, diaman T adalah total waktu (secara formal tak terhingga). Dibagi dengan T maka diperoleh daya yang dipancarkan

$$\frac{dE}{d\Omega} = \frac{G\omega_0^2}{\pi c^7} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \theta_{ij}(\omega_0, \omega_0 \frac{\vec{n}}{c}) \theta^*_{ij}(\omega_0, \omega_0 \frac{\hat{\mathbf{n}}}{c}) \quad (3.100)$$

Total daya diperoleh dengan mengintegrasikan sepanjang $d\Omega$. Untuk melakukan integral dapat digunakan identitas

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (3.101)$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j n_k n_l = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.102)$$

Identitas (3.102) dapat digeneralisasi menjadi:

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i \dots n_{i_{2l}} = \frac{1}{(2l+1)!!} \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{2l-1} i_{2l}} \quad (3.103)$$

3.5.2 Ekspansi kecepatan rendah

Untuk melakukan ekspansi multipol untuk radiasi gravitasi, dimulai dengan pernyataan h_{ij}^{TT} pada ruang tak berhingga yang diberikan pada persamaan (3.92)

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \int d^3x' T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}, \mathbf{x}' \right) \quad (3.104)$$

Dan T_{kl} dituliskan dalam transformasi Fourier

$$T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c}, \mathbf{x}' \right) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{T}_{kl}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c} \right) + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \quad (3.105)$$

Untuk sumber non-relativistik, $\bar{T}_{kl}(\omega, \vec{k})$ adalah puncak di sekitar frekuensi ω_s . Dengan $\omega_s d \ll c$. Disisi lain, tensor energi momentum tidak lenyap hanya pada bagian dalam dari sumber, jadi integral pada persamaan (3.98) dibatasi hingga $|\mathbf{x}'| \leq d$. Maka kontribusi paling dominan pada h_{ij}^{TT} datang dari frekuensi ω yang memenuhi

$$\frac{\omega}{c} \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}} \lesssim \frac{\omega_s d}{c} \ll 1 \quad (3.106)$$

Dan karena itu eksponensial pada persamaan (3.99) dapat diekspansi menjadi:

$$e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}+\frac{x'\cdot\hat{n}}{c}\right)} = e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} \times \left[1 - i\frac{\omega}{c}x'^in^i + \frac{1}{2}\left(-i\frac{\omega}{c}\right)^2x'^ix'^jn^in^j + \dots \right] \quad (3.107)$$

Persamaan (3.101) setara dengan:

$$T_{kl}\left(t-\frac{r}{c}+\frac{x'\cdot\hat{n}}{c},x'\right) \cong T_{kl}\left(t-\frac{r}{c},x'\right) + \frac{x'^in^i}{c}\partial_0T_{kl} + \frac{1}{2c^2}x'^ix'^jn^in^j\partial_0^2T_{kl} + \dots \quad (3.108)$$

Dimana semua turunan dievaluasi pada titik $\left(t-\frac{r}{c},x'\right)$. maka dapat didefinisikan momentum dari tensor stress T^{ij}

$$S^{ij}(t) = \int d^3xT^{ij}(t,x) \quad (3.109)$$

$$S^{ij,k}(t) = \int d^3xT^{ij}(t,x)x^k \quad (3.110)$$

$$S^{ij,kl}(t) = \int d^3xT^{ij}(t,x)x^kx^l \quad (3.111)$$

Dan sama untuk semua momenta dengan orde yang lebih tinggi. Pada cara penulisan ini, tanda koma memisahkan indeks ruang yang berasal dari T^{ij} dan dari indeks yang berasal dari $x^{i1} \dots x^{iN}$. Tensor energi-momentum dari materi yang muncul pada persamaan (3.53) diperoleh dari variasi perilaku materi terhadap metrik, jadi dalam bentuk simetri $T^{ij} = T^{ji}$.

Dengan memasukkan ekspansi (3.102) ke persamaan (3.98) maka didapatkan:

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \times \left[S^{kl} + \frac{1}{c} n_m \dot{S}^{kl,m} + \frac{1}{2c^2} n_m n_p \ddot{S}^{ij,kl} + \dots \right] \quad (3.112)$$

Makna fisis dari suku yang berbeda dari ekspansi menjadi jelas ketika momenta dari T_{ij} dieliminasi. Didefinisikan momenta dari $\frac{T_{00}}{c^2}$ oleh:

$$M = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, x) \quad (3.113)$$

$$M^i = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, x) x^i \quad (3.114)$$

$$M^{ij} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, x) x^i x^j \quad (3.115)$$

$$M^{ijk} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, x) x^i x^j x^k \quad (3.116)$$

Dan begitu juga momenta dari kerapatan momentum $\left(\frac{1}{c}\right) T^{0i}$ dinyatakan oleh:

$$P^i = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{0i}(t, x) \quad (3.117)$$

$$P^{i,j} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{0i}(t, x) x^j \quad (3.118)$$

$$P^{i,jk} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{0i}(t, x) x^j x^k \quad (3.119)$$

Untuk beberapa suku awal orde rendah dari momenta dari T^{00} didapatkan:

$$\dot{M} = 0 \quad (3.120)$$

$$\dot{M}^i = P^i \quad (3.121)$$

$$\dot{M}^{ij} = P^{i,j} + P^{j,i} \quad (3.122)$$

$$\dot{M}^{ijk} = P^{i,jk} + P^{j,ki} + P^{k,ij} \quad (3.123)$$

Sementara untuk momenta T^{0i} memenuhi:

$$\dot{P}^i = 0 \quad (3.124)$$

$$\dot{P}^{i,j} = S^{ij} \quad (3.125)$$

$$\dot{P}^{i,jk} = S^{ij,k} + S^{ik,j} \quad (3.126)$$

Persamaan $\dot{M} = 0$ dan $P^i = 0$ merupakan konservasi massa dan total momentum dari sumber. Identitas lain yang menarik adalah $\dot{P}^{i,j} + \dot{P}^{j,i} = S^{ij} - S^{ji} = 0$, yg berasal dari persamaan (3.119) menggunakan fakta bahwa S^{ij} merupakan tensor simetrik.

Dengan mengkombinasikan identitas-identitas diatas maka didapatkan identitas dari S^{ij} yaitu:

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \dot{M}^{ij} \quad (3.127)$$

Dengan mengkombinasikan persamaan (3.117) dan persamaan (3.120) didapatkan:

$$\ddot{M}^{ijk} = 2(\dot{S}^{ij,k} + \dot{S}^{ik,j} + \dot{S}^{jk,i}) \quad (3.128)$$

Dari persamaan (3.120) dan persamaan (3.122) didapatkan bahwa:

$$\dot{S}^{ij,k} = \frac{1}{6} \ddot{M}^{ijk} + \frac{1}{3} (\ddot{P}^{ij,k} + \ddot{P}^{ik,j} + \ddot{P}^{jk,i}) \quad (3.129)$$

3.5.3 Formula quadrupol

Menggunakan persamaan (3.121), suku pertama pada ekspansi (3.106) adalah:

$$[h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})]_{\text{quad}} = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \ddot{M}^{kl}(t - \frac{r}{c}) \quad (3.130)$$

Dengan menggunakan notasi:

$$\rho = \frac{1}{c^2} T^{00} \quad (3.131)$$

Untuk orde terendah dalam $\frac{v}{c}$, ρ menjadi rapat massa.

Kemudian diperkenalkan momen quadrupol

$$Q^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} M^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} M_{kk} = \int d^3x \rho(t, \mathbf{x}) (x^i x^j - \frac{1}{3} r^2 \delta^{ij}) \quad (3.132)$$

Maka persamaan (3.124) menjadi:

$$[h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})]_{\text{quad}} = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \ddot{Q}^{kl}(t - \frac{r}{c}) \quad (3.133)$$

$$[h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})]_{\text{quad}} = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \ddot{Q}_{ij}^{TT} \left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (3.134)$$

Untuk memperoleh bentuk gelombang dalam arah $\hat{\mathbf{n}}$, harus dimasukkan bentuk eksplisit tensor lambda ke dalam persamaan (3.134) dan dilakukan kontraksi dengan \ddot{Q}^{kl} . Jika arah rambatan gelombang gravitasi $\hat{\mathbf{n}}$ sama dengan $\hat{\mathbf{z}}$, P_{ij} adalah matriks diagonal (1,1,0) yaitu P_{ij} merupakan pada bidang (x,y) . dituliskan lambda tensor untuk matriks sembarang A_{kl} ,

$$\Lambda_{ij,kl} A_{kl} = \left[P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \right] A_{kl} \quad (3.135)$$

$$\Lambda_{ij,kl} A_{kl} = (PAP)_{ij} - \frac{1}{2} P_{ij} \text{Tr}(PA) \quad (3.136)$$

Dimana P mempunyai bentuk

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.137)$$

Dan didapatkan

$$PAP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.138)$$

Dimana $\text{Tr}(PA) = A_{11} + A_{22}$. Maka

$$\Lambda_{ij,kl} A_{kl} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{A_{11} + A_{22}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.139)$$

$$\begin{pmatrix} (A_{11} + A_{22})/2 & A_{12} & 0 \\ A_{21} & -(A_{11} + A_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \quad (3.140)$$

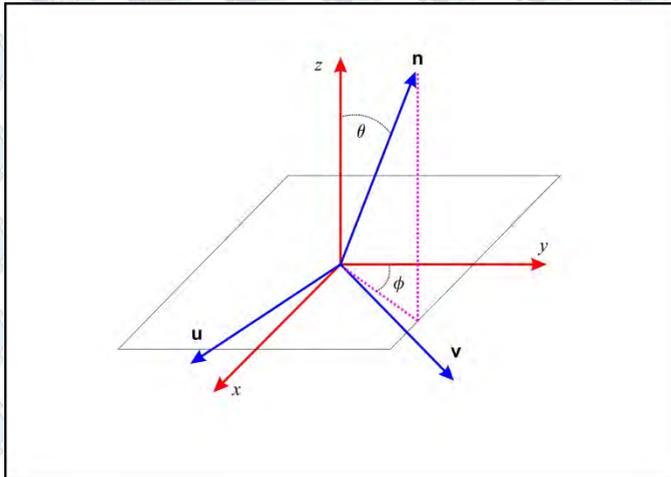
Kemudian, ketika $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$, dan A_{kl} diganti dengan M_{kl} , maka

$$\Lambda_{ij,kl} M_{kl} = \begin{pmatrix} (\ddot{M}_{11} + \ddot{M}_{22})/2 & \ddot{M}_{12} & 0 \\ \ddot{M}_{21} & -(\ddot{M}_{11} + \ddot{M}_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \quad (3.141)$$

Dari sini dapat secara langsung diperoleh dua amplitudo polarisasi.

$$h_+ = \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}) \quad (3.142)$$

$$h_\times = \frac{2}{r} \frac{G}{c^4} \ddot{M}_{12} \quad (3.143)$$



Gambar 3.3: relasi antara kerangka (x', y', z') dan kerangka $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{n}})$. Vektor $\hat{\mathbf{u}}$ berada dalam bidang $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$.

Diperkenalkan dua *vektor* satuan $\hat{\mathbf{u}}$ dan $\hat{\mathbf{v}}$, tegak lurus dengan $\hat{\mathbf{n}}$ dan satu sama lain. Maka $\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{n}}$ (karena tadi telah dipilih $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ maka dapat diambil $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{x}}$ dan $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{y}}$, kemudian kerangka (x', y', z') merupakan sumbu dalam arah $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{n}})$, maka gelombang gravitasi merambat sepanjang arah sumbu z'

$$h_+(t, \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} (\ddot{M}'_{11} - \ddot{M}'_{22}) \quad (3.144)$$

$$h_\times(t, \hat{\mathbf{n}}) = \frac{2}{r} \frac{G}{c^4} \ddot{M}'_{12} \quad (3.145)$$

Dimana \ddot{M}'_{ij} merupakan komponen dari momen massa orde dua dalam kerangka (x', y', z') . Hal ini dapat dihubungkan dengan \ddot{M}_{ij} pada kerangka (x, y, z) dengan memperkenalkan matriks rotasi \mathcal{R} . Dimana matriks \mathcal{R} secara eksplisit diberikan oleh

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.146)$$

Dan \ddot{M}'_{ij} serta \ddot{M}_{kl} terhubung dengan relasi

$$\ddot{M}'_{ij} = \mathcal{R}_{ik} \mathcal{R}_{jl} \ddot{M}_{kl} \quad (3.147)$$

Dengan menyelesaikan \ddot{M}'_{ij} kemudian mensubstitusikannya ke dalam persamaan (3.142) dan (3.143) maka akan diperoleh amplitude gelombang gravitasi yang merambat dalam arah $\hat{\mathbf{n}}$

$$\begin{aligned}
 h_+(t; \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} [& \ddot{M}_{11}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi \cos^2 \theta) \\
 & + \ddot{M}_{22}(\sin^2 \phi - \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \\
 & - \ddot{M}_{33} \sin^2 \theta \\
 & - \ddot{M}_{12} \sin 2\phi (1 + \cos^2 \theta) \\
 & + \ddot{M}_{13} \sin \phi \sin 2\theta \\
 & + \ddot{M}_{23} \cos \phi \sin 2\theta]
 \end{aligned} \tag{3.148}$$

dan

$$\begin{aligned}
 h_\times(t; \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} [& \ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22} \sin 2\phi \cos \theta \\
 & + 2\ddot{M}_{12} \cos 2\phi \cos \theta \\
 & - 2\ddot{M}_{13} \cos \phi \sin \theta]
 \end{aligned} \tag{3.149}$$

3.5.4 Energi yang diradiasikan

Dengan memasukkan persamaan (3.128) pada persamaan

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \int d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \tag{3.150}$$

maka didapatkan daya radiasi per satuan sudut ruang, dalam pendekatan quadrupol:

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{quad}} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \tag{3.151}$$

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{quad}} = \frac{G}{8\pi c^5} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{kl} \rangle \tag{3.152}$$

Dimana, rata-rata disini adalah rata-rata waktu sepanjang beberapa periode dari gelombang gravitasi, dan dipahami

bahwa \ddot{Q}_{ij} harus dievaluasi pada waktu retarded $t - \frac{r}{c}$. Integral angular dapat diterapkan dengan mengamati bahwa ketergantungan terhadap \hat{n} hanya pada $\Lambda_{ij,kl}$. Menggunakan persamaan (3.101) dan persamaan (3.102) didapatkan

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = \frac{2\pi}{15} 11\delta_{ik}\delta_{jl} - 4\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} \quad (3.153)$$

Maka total daya radiasi (atau dalam istilah astrofisika adalah total luminositas gravitasi \mathcal{L} dari sumber) dalam pendekatan quadrupol adalah:

$$P_{\text{quad}} = \frac{G}{5c^2} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle \quad (3.154)$$

Dimana, sekali lagi, \ddot{Q}_{ij} harus dievaluasi terhadap waktu *retarded* $-\frac{r}{c}$. ini merupakan formula Quadrupol yang diturunkan oleh Einstein. Kadang-kadang, untuk perhitungan yang eksplisit, lebih praktis untuk menggunakan M_{ij} daripada Q_{ij} . Substitusikan $Q^{ij} \stackrel{\text{def}}{=} M^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}M_{kk}$ pada persamaan (3.138) maka didapatkan:

$$P_{\text{quad}} = \frac{G}{5c^2} \langle \ddot{M}_{ij}\ddot{M}_{ij} - \frac{1}{3}(\ddot{M}_{kk})^2 \rangle \quad (3.155)$$

Hasil yang sama dapat diperoleh dengan mengamati bahwa persamaan (3.137) masih valid jika $\Lambda_{ij,kl}\ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{kl}$ digantikan dengan $\Lambda_{ij,kl}\ddot{M}_{ij}\ddot{M}_{kl}$, karena kontraksi terhadap $\Lambda_{ij,kl}$ dengan δ_{ij} (atau dengan δ_{kl}) menghasilkan nol. Bagaimanapun juga, ketika digunakan $\Lambda_{ij,kl}\ddot{M}_{ij}\ddot{M}_{kl}$ setelah diintegrasikan dalam $d\Omega$, pada ruas kanan dari persamaan (3.138) suku $-4\delta_{ij}\delta_{kl}$ (yang menghasilkan nol ketika dikontraksi dengan $\ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}_{kl}$)

sekarang berpengaruh, karena M_{ij} tidak *traceless*, dan kembali ke bentuk persamaan (3.140).

Energi yang diradiasikan per satuan sudut ruang diperoleh dengan mengintegrasikan daya pada persamaan (3.137), terhadap waktu. Momen quadrupol dituliskan dalam bentuk transformasi fourier,

$$Q_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{Q}_{ij}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (3.156)$$

Integralkan persamaan (3.137) terhadap waktu, maka didapatkan

$$\left(\frac{dE}{d\Omega}\right)_{\text{quad}} = \frac{G}{8\pi^2 c^5} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \int_0^{\infty} d\omega \omega^6 \tilde{Q}_{ij}(\omega) \tilde{Q}_{ij}^*(\omega) \quad (3.157)$$

Diaman integral dalam $d\omega$ dari $-\infty$ hingga ∞ dituliskan dua kali dari nol hingga ∞ menggunakan $\tilde{Q}_{ij}(-\omega) = \tilde{Q}_{ij}^*(\omega)$. Integralkan sepanjang sudut ruang maka didapatkan total energi yang diradiasikan:

$$E_{\text{quad}} = \frac{G}{5\pi c^5} \int_0^{\infty} d\omega \omega^6 \tilde{Q}_{ij}(\omega) \tilde{Q}_{ij}^*(\omega) \quad (3.158)$$

Dan karena itu spektrum energi diperoleh dengan mengintegrasikan persamaan (3.143) sepanjang sudut ruang

$$\left(\frac{dE}{d\Omega}\right)_{\text{quad}} = \frac{G}{5\pi c^5} \omega^6 \tilde{Q}_{ij}(\omega) \tilde{Q}_{ij}^*(\omega) \quad (3.159)$$

Untuk sumber monokromatik, radiasi pada frekuensi $\omega_0 > 0$, untuk ω positif:

$$\tilde{Q}_{ij}(\omega) = q_{ij} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \quad (3.160)$$

Masukkan persamaan (3.145) kedalam persamaan (3.142) dan dengan menggunakan $2\pi \delta(\omega = 0) = T$, dimana T merupakan total interval waktu (tak terhingga). Daya yang dibangkitkan oleh sumber monokromatik diperoleh dengan membagi dengan T

$$\left(\frac{dP}{d\Omega d\omega} \right)_{\text{quad}} = \frac{G \omega_0^6}{4\pi c^5} \left(\Lambda_{ij,kl} q_{ij} q_{kl}^* \right) \delta(\omega - \omega_0) \quad (3.161)$$

BAB IV
PEMBANGKITAN GELOMBANG GRAVITASI DARI
BENDA DENGAN TIGA SUMBU UTAMA
(TRIAXIAL BODY)

Pembangkitan gelombang gravitasi dari benda tegar yang berotasi merupakan hal yang sangat penting, khususnya pada gelombang gravitasi yang dibangkitkan dari bintang neutron yang berotasi.

Benda tegar dicirikan dengan dengan tensor inersianya

$$I^{ij} = \int d^3x \rho(\vec{x}) (r^2 \delta^{ij} - x^i x^j) \quad (4.1)$$

Dimana ρ adalah densitas massa. Karena setiap matriks Hermitian dapat didiagonalkan dengan rotasi yang sesuai, terdapat kerangka orthogonal dimana I^{ij} diagonal. Sumbu yang sesuai disebut sumbu utama dari benda tersebut, dan nilai eigen I_1, I_2, I_3 disebut sebagai momen inersia utama.

$$I_1 = \int d^3x \rho(\vec{x}') (x'_{2'}{}^2 + x'_{3'}{}^2) \quad (4.2)$$

$$I_2 = \int d^3x \rho(\vec{x}') (x'_{1'}{}^2 + x'_{3'}{}^2) \quad (4.3)$$

$$I_3 = \int d^3x \rho(\vec{x}') (x'_{1'}{}^2 + x'_{2'}{}^2) \quad (4.4)$$

Dari pernyataan eksplisit diatas dapat dilihat bahwa

$I_1 + I_2 \geq I_3$. Karena itu momen inersia utama harus lebih kecil atau sama dengan jumlah dua yang lainnya. Identitas $I_1 + I_2 \geq I_3$ hanya berlaku jika $\rho(\vec{x}) \sim \delta(x_3)$.

Bentuk geometri sederhana adalah *ellipsoid* dengan semiaksis a, b, c , dengan densitas seragam dan massa m . dalam kasus ini persamaan (4.1)-(4.4) memberikan:

$$I_1 = \frac{m}{5}(b^2 + c^2) \quad (4.5)$$

$$I_3 = \frac{m}{5}(a^2 + c^2) \quad (4.6)$$

$$I_3 = \frac{m}{5}(a^2 + b^2) \quad (4.7)$$

Jika benda berotasi dengan kecepatan angular ω , maka momentum angularnya adalah:

$$J_i = I_{ij}\omega_j \quad (4.8)$$

Energi kinetik rotasi diberikan oleh:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j \quad (4.9)$$

Untuk kerangka benda dapat disederhanakan menjadi:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}(I_1\omega'_1{}^2 + I_2\omega'_2{}^2 + I_3\omega'_3{}^2) \quad (4.10)$$

Jika $\hat{\omega}$ adalah *vektor* satuan dalam arah dari sumbu rotasi, maka $\vec{\omega} = \omega\hat{\omega}$, dan $E_{rot} = (1/2)I\omega^2$, dimana $I = I_{ij}\hat{\omega}_i\hat{\omega}_j$ yang disebut dengan momen inersia terhadap sumbu rotasi.

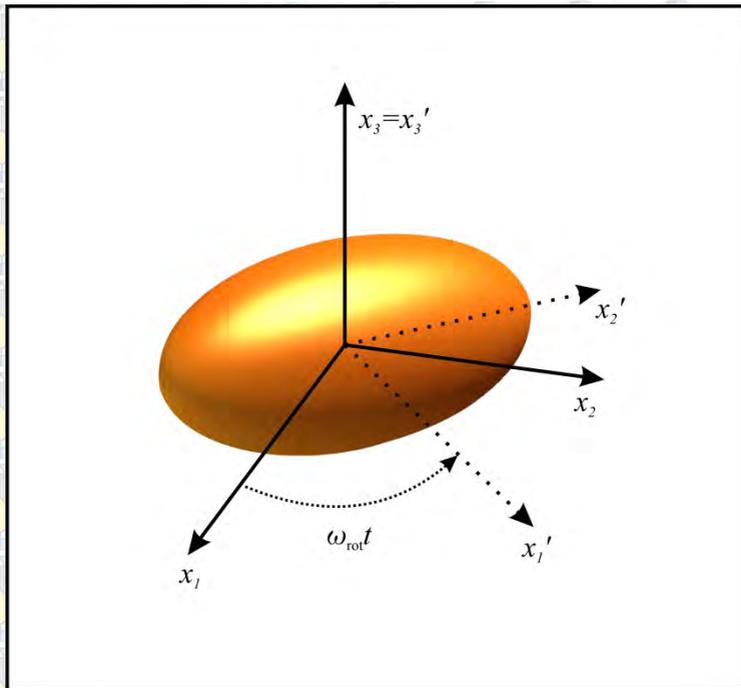
4.1 Gelombang gravitasi dari rotasi pada sumbu utama

Pertama-tama diasumsikan bahwa benda tegar berotasi pada salah satu dari sumbu utama. Sebuah koordinat pada benda tegar dinyatakan dengan (x'_1, x'_2, x'_3) . Kerangka acuan ini merekat pada benda tegar dan berotasi bersamanya. Sumbu rotasi diasumsikan berada berhimpit dengan sumbu x_3 , yaitu $x_3 = x'_3$. Kecepatan angular disimbolkan dengan ω_{rot} . Diperkenalkan juga kerangka acuan tetap yaitu (x_1, x_2, x_3) .

kedua kerangka acuan tersebut terhubung melalui matriks rotasi bergantung waktu yaitu \mathcal{R}_{ij} :

$$x'_i = \mathcal{R}_{ij}x_j \quad (4.11)$$

$$\mathcal{R}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \omega_{rot} t & \sin \omega_{rot} t & 0 \\ -\sin \omega_{rot} t & \cos \omega_{rot} t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij} \quad (4.12)$$



Gambar 4.1: sumbu utama (x'_1, x'_2, x'_3), yang berotasi dengan benda tegar, dan sumbu tetap (x_1, x_2, x_3)

Tensor inersia pada sistem koordinat (x'_1, x'_2, x'_3) dinyatakan dengan $I'_{ij} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$, dan I_{ij} komponennya dalam

kerangka (x_1, x_2, x_3) . Jadi, I'_{ij} adalah matriks konstan sementara I_{ij} bergantung waktu. Fakta bahwa momen inersia adalah tensor mengakibatkan:

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \mathcal{R}_{ik} \mathcal{R}_{jl} I_{kl} \\ &= (\mathcal{R} I \mathcal{R}^T)_{ij} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dimana \mathcal{R}^T adalah matriks transpose dan karena itu

$$I = \mathcal{R}^T I \mathcal{R} \quad (4.14)$$

Yang memberikan

$$I_{11} = 1 + \frac{I_1 - I_2}{2} I_1 \cos^2 \omega_{rot} t \quad (4.15)$$

$$I_{12} = \frac{I_1 - I_2}{2} I_1 \sin 2 \omega_{rot} t \quad (4.16)$$

$$I_{22} = 1 - \frac{I_1 - I_2}{2} I_1 \cos 2 \omega_{rot} t \quad (4.17)$$

$$I_{33} = I_3 \quad (4.18)$$

Sementara $I_{13} = I_{23} = 0$. Pendekatan quadrupol untuk gelombang gravitasi tergantung pada momen kedua dari densitas massa M^{ij} . hubungan antara M^{ij} dan I^{ij} diberikan oleh:

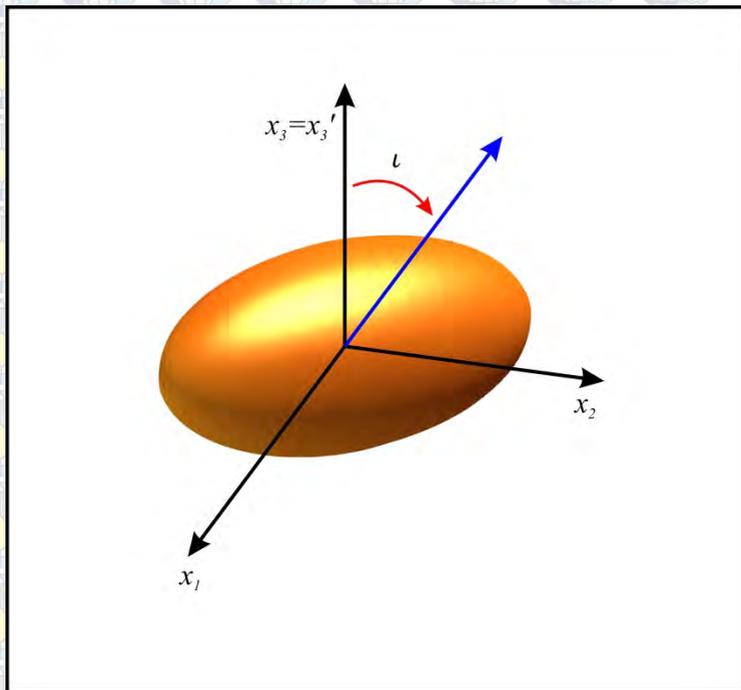
$$M_{ij} = -I_{ij} + c_{ij} \quad (4.19)$$

Dimana c_{ij} adalah konstanta. Dalam perhitungan amplitude gelombang gravitasi hanya turunan kedua dari M_{ij} yang diikuti dan karenanya nilai eksplisit dari konstanta tidak lagi relevan, sehingga dapat dituliskan:

$$M_{11} = -\frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2 \omega_{rot} t + \text{konstanta} \quad (4.20)$$

$$M_{12} = -\frac{I_1 - I_2}{2} \sin 2 \omega_{rot} t + \text{konstanta} \quad (4.21)$$

$$M_{22} = +\frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2 \omega_{rot} t + \text{konstanta} \quad (4.22)$$



Gambar 4.2: benda tegar berotasi sepanjang sumbu x_3 ; ι merupakan sudut antara garis pandangan dengan sumbu x_3

Sementara M_{13} , M_{23} , dan M_{33} bernilai konstan. Dapat diamati bahwa, karena pengaturan awal bahwa benda tegar berotasi pada sumbu utama x_3' , maka maka ada momen massa

berubah terhadap waktu hanya jika $I_1 \neq I_2$. Dapat dilihat pula bahwa M_{ij} merupakan fungsi periodik terhadap $2\omega_{rot}t$, maka dapat dipahami mengapa gelombang gravitasi dihasilkan dengan frekuensi $\omega_{gw} = 2\omega_{rot}$.

Dengan memasukkan pernyataan (4.20)-(4.22) pada M_{ij} dan mempertimbangkan bahwa $\ddot{M}_{13} = \ddot{M}_{23} = \ddot{M}_{33} = 0$, maka akan didapatkan :

$$h_+ = \frac{1}{r} \frac{4G\omega_{rot}^2}{c^4} (I_1 - I_2) \frac{1+\cos^2\iota}{2} \cos 2\omega_{rot} t \quad (4.23)$$

$$h_\times = \frac{1}{r} \frac{4G\omega_{rot}^2}{c^4} (I_1 - I_2) \cos \iota \sin 2\omega_{rot} t \quad (4.24)$$

Fakta bahwa h_+ sebanding dengan $\frac{1+\cos^2\iota}{2}$ sedangkan h_\times sebanding dengan $\cos\iota$, adalah hasil yang sama dengan yang didapatkan untuk amplitudo gelombang gravitasi dari sistem bintang ganda pada orbit lingkaran.

Didefinisikan eliptisitas atau kepepatan ϵ sebagai

$$\epsilon = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \quad (4.25)$$

Misalnya untuk ellipsoid homogen dengan setengah sumbu utama a, b dan c , dalam dalam limit asimetri kecil yaitu $a \cong b$, persamaan (4.2)-(4.4) memberikan:

$$\epsilon \cong \frac{b - a}{a} \quad (4.26)$$

Kecepatan angular dari sumber dituliskan sebagai $\omega_{rot} = 2\pi f_{rot}$ dan diperkenalkan $f_{gw} = 2f_{rot}$, yang merupakan frekuensi dari gelombang gravitasi. Jika dinyatakan dalam f_{gw} dan ϵ , hasil untuk amplitude gelombang gravitasi diatas dapat ditulis ulang sebagai:

$$h_+ = h_0 \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos(2\pi f_{gw} t) \quad (4.27)$$

Dan

$$h_\times = h_0 \cos \iota \sin(2\pi f_{gw} t) \quad (4.28)$$

Dimana

$$h_0 = \frac{4\pi^2 G I_3 f_{gw}^2}{c^4 r} \epsilon \quad (4.29)$$

Selanjutnya akan dihitung daya yang diradiasikan dalam gelombang gravitasi. Dengan memasukkan persamaan (4.20)-(4.22) kedalam formula quadrupol maka didapatkan:

$$P = \frac{32G}{5c^2} \epsilon^2 I_3^2 \omega_{rot}^6 \quad (4.30)$$

Dan penurunan energi rotasi akibat dari pancaran dari gelombang gravitasi adalah:

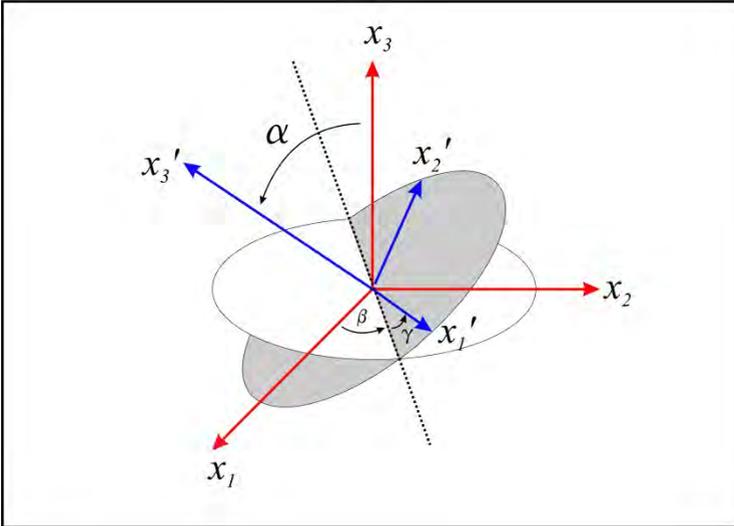
$$\frac{dE_{rot}}{dt} = -\frac{32G}{5c^2} \epsilon^2 I_3^2 \omega_{rot}^6 \quad (4.31)$$

Karena rotasi dari benda tegar yang berotasi pada sumbu utama adalah $E_{rot} = (1/2)I_3\omega_{rot}^2$, jika pancaran gelombang gravitasi merupakan mekanisme yang dominan dalam kehilangan energi rotasi, maka penurunan frekuensi rotasi dari rotasi benda tegar yang berotasi pada salah satu sumbu utama adalah:

$$\dot{\omega}_{rot} = -\frac{32G}{5c^2} \epsilon^2 I_3 \omega_{rot}^5 \quad (4.32)$$

4.2 Gerak presisi benda tegar

Secara umum, sumbu rotasi objek astronomi tidak berhimpit dengan sumbu utama dan sebagai konsekuensinya, pergerakan dari benda tegar adalah perpaduan dari rotasi pada sumbu utama dan gerak presisi.



Gambar 4.3: definisi dari sudut Euler (α, β, γ)

Untuk menghitung pembangkitan gelombang gravitasi, seperti pada persamaan (4.11)-(4.13), pertama-tama diperkenalkan kerangka acuan tetap (x_1, x_2, x_3) . Dalam kerangka inersia ini momentum angular \vec{J} dari benda tegar merupakan besaran konservatif. Dan sumbu x_3 dipilih dalam arah \vec{J} . Berikutnya diperkenalkan kerangka benda, yaitu kerangka acuan yang melekat pada benda yang berotasi, dengan koordinat (x'_1, x'_2, x'_3) , yang sumbunya berhimpit dengan sumbu utama dari benda tegar. Hubungan antara dua kerangka diberikan oleh sudut Euler (α, β, γ) yang ditunjukkan pada gambar 4.2.

Matriks rotasi \mathcal{R} diberikan oleh:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Gerak dari benda tegar ditentukan jika kita dapat mengetahui bagaimana α, β, γ berubah seiring waktu.

Dari gambar 4.2 dapat terlihat bahwa momentum angular oleh (J'_1, J'_2, J'_3) adalah:

$$\begin{aligned} J'_1 &= J \sin \alpha \sin \gamma \\ J'_2 &= J \sin \alpha \cos \gamma \\ J'_3 &= J \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.34)$$

Disisi lain, (J'_1, J'_2, J'_3) dapat dituliskan dalam suku $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ menggunakan gambar 4.2 dan diamatai bahwa, sebagai vektor, kecepatan angular $d\alpha/dt$ diarahkan sepanjang garis node, jadi komponen dari kerangka benda adalah:

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\dot{\alpha} \cos \gamma, \dot{\alpha} \sin \gamma, 0) \quad (4.35)$$

Demikian pula, $d\beta/dt$ diarahkan sepanjang sumbu x_3 , jadi komponen dalam kerangka benda adalah:

$$\frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta} \sin \alpha \sin \gamma, \dot{\beta} \sin \alpha \cos \gamma, \dot{\beta} \cos \alpha \quad (4.36)$$

Sementara $d\gamma/dt$ diarahkan sepanjang sumbu x'_3 , jadi dalam kerangka benda $d\gamma/dt = (0, 0, \dot{\gamma})$. Total kecepatan angular ω adalah penjumlahan vektor dari kecepatan angular tersebut, $\omega = d\alpha/dt + d\beta/dt + d\gamma/dt$, maka komponen ω'_i dalam kerangka benda adalah:

$$\omega'_1 = \dot{\alpha} \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \alpha \sin \gamma$$

$$\omega'_2 = -\dot{\alpha} \sin \gamma + \dot{\beta} \sin \alpha \cos \gamma \quad (4.37)$$

$$\omega'_3 = \dot{\gamma} + \dot{\beta} \cos \alpha$$

Dalam kerangka benda tensor inersia adalah diagonal, dengan nilai eigen I_1, I_2 dan I_3 , jadi $J'_1 = I_1 \omega'_1$, $J'_2 = I_2 \omega'_2$ dan $J'_3 = I_3 \omega'_3$. dengan membandingkan persamaan (4.34) dan (4.37) maka akan didapatkan:

$$I_1 (\dot{\alpha} \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \alpha \sin \gamma) = J \sin \alpha \sin \gamma \quad (4.38)$$

$$I_2 (-\dot{\alpha} \sin \gamma + \dot{\beta} \sin \alpha \cos \gamma) = J \sin \alpha \cos \gamma \quad (4.39)$$

$$I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\beta} \cos \alpha) = J \cos \alpha \quad (4.40)$$

Ini adalah persamaan orde pertama dalam variable (α, β, γ) , dan adalah integral pertama dari persamaan gerak yang diperoleh dari konservasi momentum angular.

4.3 Radiasi goyangan dari benda tegar simetri sumbu

Diasumsikan sebuah benda simetri sumbu, yang sumbu x'_3 -nya membentuk sudut α dengan sumbu momentum angular x^3 . Sudut α sering disebut dengan *wobble angle* atau sudut goyangan yang terkait dengan pancaran radiasi gravitasi yang disebut *wobble radiation* atau radiasi goyangan.

Ketika $I_1 = I_2$, solusi analitik dari persamaan (4.38)-(4.40) menjadi sangat sederhana. Dengan mengalikan persamaan pertama dengan $\cos \gamma$ dan persamaan yang kedua dengan $\sin \gamma$ dan mengurangkannya, maka akan didapatkan:

$$\dot{\alpha} = 0 \quad (4.41)$$

Hal ini menunjukkan bahwa inklinasi dari sumbu x'_3 terhadap momentum angular \vec{J} adalah konstan. Dengan mengalikan persamaan pertama dengan $\sin \gamma$ dan persamaan yang kedua dengan $\cos \gamma$ dan menjumlahkannya, maka akan didapatkan

$$I_1 \dot{\beta} \sin \alpha = J \sin \alpha \quad (4.42)$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\alpha \neq 0$, sumbu x'_3 berotasi konstan terhadap kecepatan angular $\dot{\beta} = J/I_1$ pada arah \vec{J} . Didefinisikan:

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\beta} = \frac{J}{I_1} \quad (4.43)$$

Akhirnya didapatkan bahwa α dan β keduanya adalah konstan, bahkan persamaan (4.40) bersama dengan $J = I_1 \dot{\beta}_1$ memberikan:

$$\omega_p \stackrel{\text{def}}{=} -\dot{\gamma} = \frac{I_3 - I_1}{I_3} \Omega \cos \alpha \quad (4.44)$$

tanda minus dalam definisi $\omega_p \stackrel{\text{def}}{=} -\dot{\gamma}$ dipilih sehingga, untuk benda pepat ($I_3 > I_1$), yang mana merupakan bentuk normal dari benda astrofisis, $\omega_p > 0$. Menggunakan persamaan (4.37) dapat dilihat bahwa komponen dari kecepatan angular pada kerangka benda adalah:

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= a \cos(\omega_p t) \\ \omega'_2 &= a \sin(\omega_p t) \\ \omega'_3 &= b \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dimana $a = \Omega \sin \alpha$ dan $b = -\omega_p + \Omega \sin \alpha$ adalah sebuah konstanta. Hal ini menunjukkan bahwa, dalam kerangka benda, kecepatan angular berotasi pada bidang (x'_1, x'_2) , yaitu gerak presisi di sekitar sumbu x'_3 , dengan kecepatan angular ω_p . Gerak presisi ini berlawanan dengan arah jarum jam jika $\omega_p > 0$.

4.4 Gelombang gravitasi dari rotasi benda tegar dengan gerak presisi

Sekarang dapat dihitung bagaimana tensor inersia dari benda tegar berevolusi terhadap waktu, dalam kerangka tetap dengan koordinat (x_1, x_2, x_3) . Seperti sebelumnya, tensor inersia pada kerangka benda dinyatakan sebagai I' , jadi $I' = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ adalah matriks konstan, sementara pada kerangka tetap dinyatakan sebagai I_{ij} . Berikutnya, seperti persamaan (4.14), $I_{ij} = (\mathcal{R}^T I \mathcal{R})_{ij}$, tetapi sekarang \mathcal{R} diberikan oleh persamaan (4.33).

Perhitungan eksplisit dapat disederhanakan jika matriks rotasi (4.33) dituliskan sebagai $\mathcal{R} = A(\gamma)B(\alpha)C(\beta)$, maka dapat terlihat bahwa:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^T I' \mathcal{R} &= (C^T B^T A^T) I' (ABC) \\ &= (C^T B^T) I' (BC) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Karena, ketika $I_1 = I_2$, matriks A komutatif dengan matriks I' , dan $A^T A = 1$ karena merupakan matriks orthogonal. Karena itu, sudut γ dikeluarkan dari I_{ij} , dan perkalian matriks yang tersisa memberikan:

$$I_{11} = \frac{1}{2}(I_1 - I_3) \sin^2 \alpha \cos 2\beta + \text{konstanta} \quad (4.47)$$

$$I_{12} = \frac{1}{2}(I_1 - I_3) \sin^2 \alpha \cos 2\beta \quad (4.48)$$

$$I_{22} = -\frac{1}{2}(I_1 - I_3) \sin^2 \alpha \cos 2\beta + \text{konstanta} \quad (4.49)$$

$$I_{13} = -(I_1 - I_3) \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \quad (4.50)$$

$$I_{23} = (I_1 - I_3) \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \quad (4.51)$$

$$I_{33} = \text{konstanta} \quad (4.52)$$

Karena γ dikeluarkan dari persamaan dan nilai dari α adalah konstanta, maka sifat bergantung waktu dari pernyataan ini hanya datang dari β , yang pada persamaan (4.43) adalah $\beta(t) = \Omega(t)$. Seperti persamaan (4.19), $M_{ij} = -I_{ij}$, ditambah suku konstan yang memberikan nol jika diturunkan, maka didapatkan:

$$\ddot{M}_{11} = 2(I_1 - I_3)\Omega^2 \sin^2 \alpha \cos(2\Omega t) \quad (4.53)$$

$$\ddot{M}_{12} = 2(I_1 - I_3)\Omega^2 \sin^2 \alpha \sin(2\Omega t) \quad (4.54)$$

$$\ddot{M}_{22} = -2(I_1 - I_3)\Omega^2 \sin^2 \alpha \cos(2\Omega t) \quad (4.55)$$

$$\ddot{M}_{13} = -(I_1 - I_3)\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin(\Omega t) \quad (4.56)$$

$$\ddot{M}_{23} = (I_1 - I_3)\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin(\Omega t) \quad (4.57)$$

$$\ddot{M}_{33} = 0 \quad (4.58)$$

Dapat terlihat bahwa elemen matriks \ddot{M}_{ij} beresilasi pada $\sin(2\Omega t)$ atau pada $\cos(2\Omega t)$, sementara yang lain pada $\sin(\Omega t)$ atau $\cos(\Omega t)$. Dari sini, dapat dipahami bahwa pancaran gelombang gravitasi berada pada dua frekuensi, $\omega_{gw} = 2\Omega$ dan $\omega_{gw} = \Omega$.

Perhitungan amplitude gelombang gravitasi yang dipancarkan dalam arah yang terkait dengan sudut polar

($\theta = \iota, \phi = 0$). Dengan menggunakan persamaan (3.128) didapatkan:

$$h_+ = A_{+,1} \cos(\Omega t) + A_{+,2} \cos(2\Omega t) \quad (4.59)$$

$$h_{\times} = A_{\times,1} \sin(\Omega t) + A_{\times,2} \sin(2\Omega t) \quad (4.60)$$

Dimana:

$$A_{+,1} = h'_0 \sin 2\alpha \sin \iota \cos \iota$$

$$A_{+,2} = 2h'_0 \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \iota) \quad (4.61)$$

$$A_{\times,1} = h'_0 \sin 2\alpha \sin \iota$$

$$A_{\times,2} = 4h'_0 \sin^2 \alpha \cos \iota$$

Dan

$$h'_0 = -\frac{G(I_3 - I_1)\Omega^2}{c^4 r} \quad (4.62)$$

Ruas kanan pada persamaan (4.59) dan (4.60), t sebenarnya adalah waktu *retarded*.

Dengan fakta bahwa $\ddot{M}_{33} = 0$ dan $\sum_k \ddot{M}_{kk} = 0$, maka didapatkan pancaran total gelombang gravitasi:

$$P_{quad} = \frac{2G}{5c^2} (I_1 - I_3)^2 \Omega^6 \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 16 \sin^2 \alpha) \quad (4.63)$$

4.5 Gelombang gravitasi dari rotasi dan gerak presesi benda tiga sumbu

Sumbu dari kerangka benda dipilih sehingga $I_1 < I_2 < I_3$. Momen inersia bergantung waktu I_{ij} dihitung dari $I_{ij} = (\mathcal{R}^T I' \mathcal{R})_{ij}$, evolusi dari komponen kecepatan angular pada kerangka benda diberikan oleh:

$$\omega'_1 = a \operatorname{cn}(\tau, m) \quad (4.64)$$

$$\omega'_1 = a \left[\frac{I_1(I_3 - I_1)}{I_2(I_3 - I_2)} \right]^{1/2} \operatorname{sn}(\tau, m) \quad (4.65)$$

$$\omega'_1 = b \operatorname{dn}(\tau, m) \quad (4.66)$$

Dimana cn , sn dan dn adalah fungsi elliptik, dan τ merupakan variable skala waktu

$$\tau = bt \left[\frac{I_1(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_2 I_1} \right]^{1/2} \quad (4.67)$$

Parameter m dari fungsi elliptik diberikan oleh

$$m = \frac{(I_2 - I_1)I_1 a^2}{(I_3 - I_2)I_3 b^2} \quad (4.68)$$

Dan a, b adalah nilai awal dari ω'_1 dan ω'_3 ,

$$a = \omega'_1(0), \quad b = \omega'_3(0) \quad (4.69)$$

Komponen dari kecepatan angular adalah periodik dengan periode:

$$T = \frac{4K(m)}{b} \left[\frac{I_2 I_1}{(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)} \right]^{1/2} \quad (4.70)$$

Untuk menghitung I_{ij} , dibutuhkan sudut Euler bergantung waktu. Solusi untuk α dan γ adalah

$$\cos \alpha(t) = \frac{I_3 b}{J} \operatorname{dn}(\tau, m) \quad (4.71)$$

$$\tan \gamma(t) = \left[\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_2(I_3 - I_1)} \right]^{1/2} \frac{\operatorname{cn}(\tau, m)}{\operatorname{sn}(\tau, m)} \quad (4.72)$$

Dimana Kedua-duanya bersifat periodik terhadap T . solusi untuk β sebaliknya

$$\beta(t) = \frac{2\pi}{T'} t + \beta_1(t) \quad (4.73)$$

Dimana

$$\frac{2\pi}{T'} = \frac{J}{I_1} - \frac{2i \nu'_4(i\pi c_1)}{T \nu_4(i\pi c_1)} \quad (4.74)$$

$$\frac{2\pi}{T'} = \frac{J}{I_1} + \frac{2b}{K(m)} \left[\frac{I_1(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_2 I_1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.75)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^n} \sinh(2\pi n c_1)$$

Dimana ν_4 adalah jacobian dari fungsi theta, c_1 didefinisikan untuk setiap solusi dari persamaan

$$\operatorname{sn}[2ic_1 K(m), m] = \frac{iI_3 b}{I_1 a} \quad (4.76)$$

Dan

$$q = \exp \left\{ \frac{-\pi K(1 - m)}{K(m)} \right\} \quad (4.77)$$

Tetapi fungsi $\beta_1(t)$ dapat dituliskan sebagai rasio dari fungsi theta

$$\beta_1(t) = \frac{\nu_4\left(\frac{2\pi}{T} - i\pi c_1\right)}{\nu_4\left(\frac{2\pi}{T} - i\pi c_1\right)} \quad (4.78)$$

Dan membolehkan adanya ekspansi deret

$$\beta_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-2q^n}{n(1-q^n)} \right] \sinh\left(\frac{4\pi n t}{T}\right) \quad (4.79)$$

$\beta_1(t)$ adalah periodik dengan periode $\frac{T}{2}$. Fakta bahwa γ periodik dengan periode T menunjukkan $\frac{2\pi}{T}$ sebagai frekuensi angular yang terkait dengan gerak presisi, jadi didefinisikan

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T} \quad (4.80)$$

$$\omega_p = \frac{\pi b}{2K(m)} \left[\frac{I_1(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_2 I_1} \right]^{1/2} \quad (4.81)$$

Frekuensi angular terkait dengan rotasi sepanjang sumbu x_3 sebagai gantinya

$$\omega_{rot} = \frac{2\pi}{T'} - \frac{2\pi}{T} \quad (4.82)$$

Telah diberikan solusi yang kompleks namun eksplisit untuk $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$. Hasil ini secara prinsip dapat dimasukkan ke dalam matriks rotasi \mathcal{R}_{ij} untuk memperoleh momen inersia dalam kerangka yang telah ditentukan, dan karenanya bentuk gelombang. Diberikan orde kedua dari m yaitu:

$$h_+ = A_{+,0} \cos(\omega_{rot} t) + A_{+,1} \cos[(\omega_{rot} + \omega_p)t] + A_{+,2} \cos[(\omega_{rot} + \omega_p)t] \quad (4.83)$$

$$h_x = A_{+,0} \sin(\omega_{rot} t) + A_{+,1} \sin[(\omega_{rot} + \omega_p)t] + A_{+,2} \sin[(\omega_{rot} + \omega_p)t] \quad (4.84)$$

Dimana:

$$A_{+,0} = h_0 \left(\frac{1}{2} \right) (1 + \cos^2 \iota)$$

$$A_{+,1} = 2h'_0 g(\alpha_0) \sin \iota \cos \iota$$

$$A_{+,2} = 2h'_0 g(\alpha_0) (1 + \cos^2 \iota) \quad (4.85)$$

$$A_{\times,0} = h_0 \cos \iota$$

$$A_{\times,1} = 2h'_0 g(\alpha_0) \sin \iota$$

$$A_{\times,2} = 4h'_0 g^2(\alpha_0) \cos \iota$$

Amplitudo h_0 dan h'_0 diberikan pada persamaan berikut:

$$h_0 = -\frac{1}{r} \frac{4G\omega_{rot}^2}{c^4} (I_1 - I_2) \quad (4.86)$$

$$h'_0 = -\frac{1}{r} \frac{G(\omega_{rot} + \omega_p)^2}{c^4} \left(I_3 - \frac{I_1 + I_2}{2} \right) \quad (4.87)$$

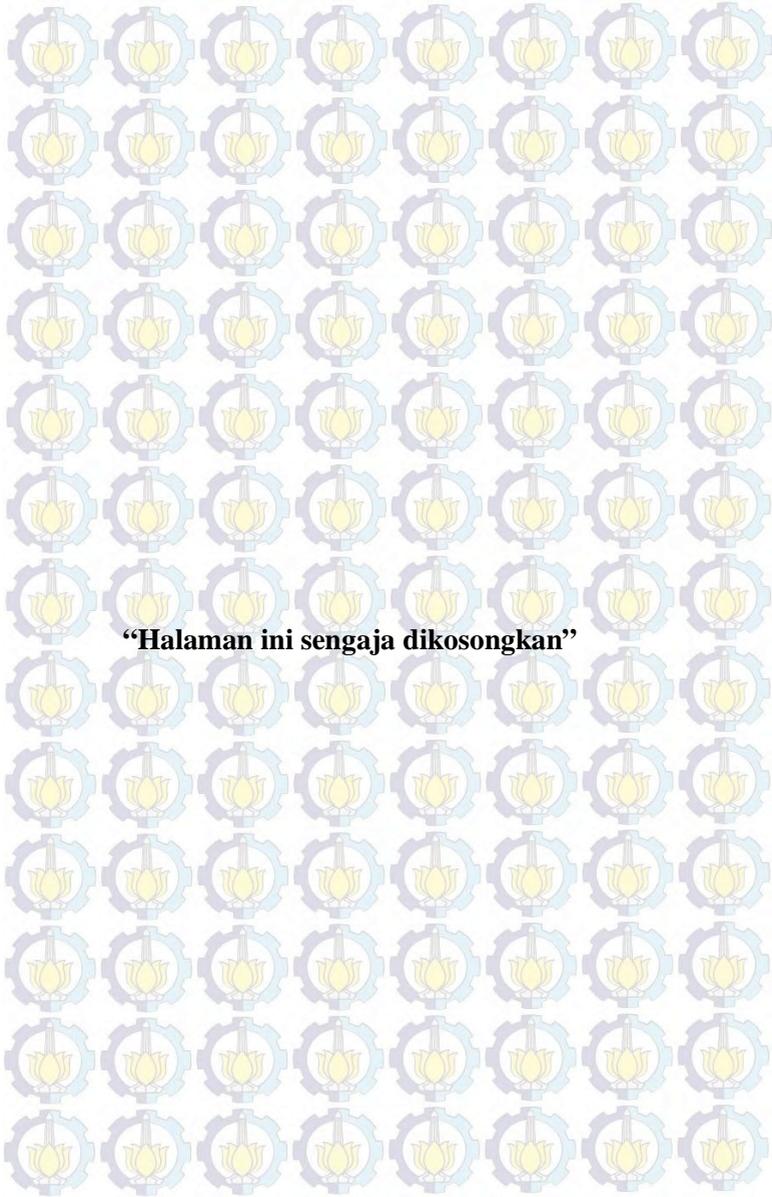
BAB V PEMBAHASAN

Pada bagian ini formulasi pembangkitan gelombang gravitasi oleh rotasi benda tegar dengan tiga sumbu utama akan diuji akurasinya dengan menggunakan parameter-parameter fisis yang bisa diperkirakan dari benda-benda astronomis.

Bintang neutron sebagai salah satu benda astronomis yang bentuknya diperkirakan dapat didekati menggunakan bentuk benda tegar dengan tiga sumbu diperkirakan mempunyai massa $m \cong 1 \times 10^{38} \text{kg m}^2$. Nilai dari elliptisitas tergantung dari sifat-sifat dari bintang neutron, dan khususnya tekanan yang dapat diberikan oleh lapisan kerak dari bintang neutron tersebut. Hal ini belum dapat dipastikan namun, nilai yang paling memungkinkan adalah dalam jangkauan $\epsilon \leq 10^{-6}$, walaupun nilai yang lebih besar dari $\epsilon \cong 10^{-5}$ dapat dipertimbangkan. Dengan memasukkan nilai dari parameter-parameter tersebut dan jarak galaksi diambil sebesar $r = 10 \text{kpc}$, persamaan (4.29) memberikan

$$h_0 \cong 1.06 \times 10^{25} \left(\frac{\epsilon}{10^{-6}} \right) \left(\frac{I_3}{10^{38} \text{kgm}^2} \right) \left(\frac{10 \text{kpc}}{r} \right) \left(\frac{f_{gw}}{1 \text{kHz}} \right)^2 \quad (5.1)$$

Dapat diamati bahwa bintang neutron yang berotasi lebih cepat akan memproduksi sinyal gelombang gravitasi yang lebih kuat, karena $h_0 \sim f_{gw}^2$.



“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB VI

KESIMPULAN

pada bab ini, disimpulkan bahwa hasil yang telah dikerjakan pada bab-bab sebelumnya diperoleh dari benda tegar. Untuk penerapannya pada bintang neutron, model yang lebih realistis dari bagian dalam bintang neutron harus dibangun (contohnya benda fluida dengan lapisan kerak elastis)



DAFTAR PUSTAKA

- Anugraha, Rinto NQZ. 2004. *Pengantar Teori Relativitas dan Kosmologi*. Yogyakarta: Gadjah Mada University press.
- Jaranowski, Piotr and Krolak, Andrzej. 2009. *Analysis of Gravitational Wave Data*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Landau and Lifshitz. 1976. *Course of Theoretical Physics volume I: Mechanics*. Oxford: Elsevier.
- Maggiore, Michele. 2008. *Gravitational waves: theory and experiments vol 1*. Oxford: Oxford University Press.
- McMahon, David. 2006. *Relativity Demistified*. United States of America: McGraw-Hill.
- Purwanto, Agus, 2009. *Pengantar kosmologi*. Surabaya: ITS Press.
- Schutz, Bernard. 2009. *A First Course In General Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Weinberg, Steven. 1972. *Gravitation And Cosmology: Principles And Applications Of The General Theory Of Relativity*. New York: John Wiley & Sons.
- Wospakrik, Marianette Octavia. 2008. *Radiasi Gelombang Gravitasi Yang Dibangkitkan Oleh Sistem Bintang Ganda Kompak Pada Fase Inspiral*. Skripsi Institut Teknologi Bandung. Bandung.

LAMPIRAN

A. Tensor Einstein terlinearisasi

a. Symbol Christoffel terlinearisasi

Symbol Christoffel dalam persamaan medan Einstein diberikan oleh persamaan:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\alpha} g_{\beta\nu} + \partial_{\alpha\beta} g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} g_{\alpha\beta}) \quad (\text{A.1})$$

Jika persamaan persamaan simbol Christoffel diatas memenuhi kondisi:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad (\text{A.2})$$

Maka simbol Christoffel dapat direduksi dengan mengabaikan suku –suku $h_{\alpha\beta}$ yang berorde dua atau lebih. Pertama-tama persamaan (A.2) disubstitusikan ke dalam salah satu suku yang berada dalam kurung pada persamaan (A.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\eta_{\beta\nu} + h_{\beta\nu}) \\ &= \frac{\partial \eta_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial h_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} \\ &= 0 + \frac{\partial h_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial h_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}}$$

Dimana turunan dari metrik *Minkowski* pasti bernilai nol karena metrik *Minkowski* diberikan oleh $\eta_{\beta\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$.

Untuk memperoleh bentuk dari simbol Christoffel yang terlinearisasi, maka perlu juga untuk mengetahui bentuk dari $g^{\mu\nu}$. Dimulai dengan mengamati apakah indeks dapat dinaik-turunkan menggunakan metrik *Minkowski*

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta} \quad (\text{A.4})$$

Harus diingat pula bahwasensor metrik memenuhi :

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma} \quad (\text{A.5})$$

Persamaan (A.5) juga berlaku untuk metrik *Minkowski*. Bentuk linier dari metrik dengan indeks atas akan sama dengan metrik dengan indeks bawah tetapi pertama-tama diasumsikan bahwa $g_{\alpha\beta}$ berbeda dengan $g^{\beta\gamma}$ dengan konstanta pembeda a . Maka $g^{\beta\gamma}$ dapat dituliskan menjadi:

$$g^{\beta\gamma} = \eta^{\beta\gamma} + ah^{\beta\gamma} \quad (\text{A.6})$$

Dengan mengabaikan orde dua keatas dari $h_{\alpha\beta}$ maka persamaan (A.5) akan menjadi:

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha}^{\gamma} &= (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) + (\eta^{\beta\gamma} + ah^{\beta\gamma}) \\ &= \eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} + a\eta_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} + \eta^{\beta\gamma}h_{\alpha\beta} + ah_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} \\ &= \eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\gamma} + a\eta_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} + \eta^{\beta\gamma}h_{\alpha\beta} \\ &= \delta_{\alpha}^{\gamma} + a\eta_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} + \eta^{\beta\gamma}h_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Agar persamaan (A.7) benar, maka dua suku terakhir harus bernilai 0

$$a\eta_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} = -\eta^{\beta\gamma}h_{\alpha\beta} \quad (\text{A.8})$$

Dikerjakan untuk ruas kiri

$$\begin{aligned}
 a\eta_{\alpha\beta}h^{\beta\gamma} &= a\eta_{\alpha\beta}\eta^{\beta\lambda}\eta^{\gamma\sigma}h_{\lambda\sigma} \\
 &= a\delta_{\alpha}^{\lambda}\eta^{\gamma\sigma}h_{\lambda\sigma} \\
 &= a\eta^{\gamma\sigma}h_{\alpha\sigma}
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Karena indeks σ bagaimanapun merupakan indeks palsu (*dummy indeks*), maka σ dapat diganti dengan β dan dimasukkan kembali ke dalam persamaan (A.8) maka akan didapatkan:

$$a\eta^{\gamma\sigma}h_{\alpha\sigma} = -\eta^{\beta\gamma}h_{\alpha\beta} \tag{A.10}$$

Dapat dilihat bahwa nilai dari $a = -1$ yang berarti bahwa kedua ruas identik. Maka dapat disimpulkan bahwa $g^{\mu\nu}$ dapat dituliskan sebagai:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} \tag{A.11}$$

Dengan menggunakan persamaan (A.3) dan (A.11) maka akan didapatkan:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})(\partial_{\alpha}h_{\beta\nu} + \partial_{\beta}h_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}h_{\alpha\beta}) \\
 &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_{\alpha}h_{\beta\nu} + \partial_{\beta}h_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}h_{\alpha\beta})
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Suku $h^{\mu\nu}$ dapat diabaikan karena bernilai lebih dari orde 1. Maka dapat disimpulkan bahwa simbol Christoffel yang terlinearisasi adalah:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_{\alpha}h_{\beta\nu} + \partial_{\beta}h_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}h_{\alpha\beta}) \tag{A.13}$$

b. Tensor Riemann Christoffel terlinearisasi

Tensor Riemann-Christoffel memiliki komponen:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\rho\lambda}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\eta}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\eta - \Gamma_{\nu\eta}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\eta) \quad (\text{A.14})$$

Karena simbol Christoffel merupakan kuantitas orde pertama maka yang berkontribusi terhadap tensor Riemann terlinearisasi hanyalah turunan dari simbol Christoffel. Dua suku terakhir dapat diabaikan karena merupakan kuantitas orde dua.

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\rho\lambda}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) \quad (\text{A.15})$$

Dengan mensubstitusi persamaan (A.13) ke dalam persamaan (A.15) maka akan didapatkan:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2}g_{\rho\lambda}(\partial_\mu\partial_\nu h_\sigma^\lambda + \partial_\mu\partial_\sigma h_\nu^\lambda - \eta^{\lambda\rho}\partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma}) \\ &\quad - (\partial_\mu\partial_\nu h_\sigma^\lambda + \partial_\nu\partial_\sigma h_\mu^\lambda - \eta^{\lambda\rho}\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \\ &\quad \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma}) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Maka akan didapatkan Tensor Riemann Christoffel:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma}) \quad (\text{A.17})$$

c. Tensor Ricci terlinearisasi dan skalar kurvatur

dengan mengkontraksikan tensor Riemann Christoffel dan dengan mendefinisikan h sebagai trace dari metrik perturbasi $h_{\mu\nu}$,

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \quad (\text{A.18})$$

Dan juga diperkenalkan operator d'Alembertian \square dalam ruang-waktu datar Minkowski

$$\square \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \quad (\text{A.19})$$

Maka akan didapatkan tensor Ricci yang terlinearisasi:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha + \partial_\alpha \partial_\nu h_\mu^\alpha - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) \quad (\text{A.20})$$

Dengan mengkontraksikan tensor Ricci maka didapatkan pula skalar Ricci:

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h \quad (\text{A.21})$$

d. Tensor Einstein terlinearisasi

Tensor Einstein mempunyai komponen:

$$G_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \quad (\text{A.22})$$

Dengan memasukkan persamaan-persamaan (A.20), (A.11), (A.21) dan mengabaikan $h_{\mu\nu}$ yang lebih dari orde satu maka akan didapatkan tensor Einstein ternilinearisasi :

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\alpha h_\nu^\alpha + \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \partial_\mu \partial_\nu h - h_{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} (\square h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}) \right) \quad (\text{A.23})$$

Dengan memperkenalkan matriks *trace reversed* $\bar{h}_{\mu\nu}$. Persamaan (A.23) dapat disederhanakan lebih lanjut.

$$\bar{h}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (\text{A.24})$$

Dari definisi persamaan (A.24) didapatkan:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \quad (\text{A.25})$$

dimana:

$$\bar{h} \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} \quad (\text{A.26})$$

Dengan menggunakan persamaan (A.25) dan persamaan (A.26) maka akan didapatkan tensor Einstein Terlinearisasi

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\alpha\bar{h}_\nu^\alpha + \partial_\nu\partial_\alpha\bar{h}_\mu^\alpha - \square\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\bar{h}^{\alpha\beta}) \quad (\text{A.27})$$

B. Kondisi Lorentz gauge

Pertama-tama ditunjukkan bahwa, jika $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = 0$, maka tiga suku selain suku $\square\bar{h}_{\mu\nu}$ pada persamaan (3.38) akan lenyap.

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} &= (\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\sigma}\bar{h}^{\gamma\sigma}){}^{,\alpha\beta} \\ &= (\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\sigma}\eta^{\alpha\tau}\eta^{\beta\epsilon}\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\tau\epsilon}) \\ &= \delta_\gamma^\tau\delta_\sigma^\epsilon\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\tau\epsilon} \\ &= \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\gamma\sigma} = (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\sigma}){}_{,\gamma} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} &= \eta_{\mu\gamma}\eta_{\alpha\sigma}(\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu}){}^{,\alpha} \\ &= \eta_{\mu\gamma}\eta_{\alpha\sigma}\eta^{\alpha\tau}\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu\tau} \\ &= \eta_{\mu\gamma}\delta_\sigma^\tau\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu\tau} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}
&= \eta_{\mu\gamma} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu\sigma} = \eta_{\mu\gamma} (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\sigma})_{,\nu} = 0 \\
\bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} &= \eta_{\nu\gamma} \eta_{\alpha\sigma} (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu})^{,\alpha} \\
&= \eta_{\nu\gamma} \eta_{\alpha\sigma} \eta^{\alpha\tau} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu\tau} \\
&= \eta_{\nu\gamma} \delta_{\sigma}^{\tau} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu\tau} \\
&= \eta_{\nu\gamma} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu\sigma} = \eta_{\nu\gamma} (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\sigma})_{,\mu} = 0
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Jada dapat terlihat bahwa tiga suku selain suku $\square \bar{h}_{\mu\nu}$ pada persamaan (3.38) akan lenyap asalkan $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = 0$

Diasumsikan untuk sembarang komponen metrik perturbasi $h_{\mu\nu}^{(old)} \neq 0$ didefinisikan:

$$h_{\mu\nu}^{(LG)} = h_{\mu\nu}^{(old)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \tag{B.4}$$

Dimana komponen ξ^{μ} merupakan komponen yang akan dicari. Dapt juga didefinisikan:

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\mu\nu}^{(LG)} &= h_{\mu\nu}^{(LG)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{(LG)} \\
&= h_{\mu\nu}^{(old)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \\
&\quad - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left[\eta^{\alpha\beta} \left(h_{\alpha\beta}^{(old)} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \right) \right] \\
&= h_{\mu\nu}^{(old)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h_{\alpha\beta}^{(old)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \\
&\quad \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \xi_{\alpha,\beta}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Sekarang

$$\bar{h}^{(LG)\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} \left[\bar{h}_{\alpha\beta}^{(old)} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi^{\sigma}_{,\sigma} \right] \quad (B.6)$$

$$= \bar{h}^{(old)\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\xi_{\alpha,\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi^{\sigma}_{,\sigma}$$

Dan

$$\bar{h}^{(LG)\mu\nu}_{,\nu} = \bar{h}^{(old)\mu\nu}_{,\nu} - \eta^{\nu\beta}\xi^{\mu}_{,\beta\nu} - \eta^{\mu\alpha}\xi^{\nu}_{,\alpha} + \eta^{\mu\nu}\xi^{\sigma}_{,\sigma} \quad (B.7)$$

Maka

$$\bar{h}^{(LG)\mu\nu}_{,\nu} = \bar{h}^{(old)\mu\nu}_{,\nu} - \eta^{\nu\beta}\xi^{\mu}_{,\beta\nu} \quad (B.8)$$

Maka dapat dipastikan bahwa $\bar{h}^{(LG)\mu\nu}_{,\nu} = 0$ asalkan dapat ditemukan komponen gauge ξ^{μ} yang memenuhi

$$\bar{h}^{(old)\mu\nu}_{,\nu} = \eta^{\nu\beta}\xi^{\mu}_{,\beta\nu} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \xi^{\mu} \quad (B.9)$$

C. Solusi Vakum dari persamaan medan Einstein terlinearisasi

Dalam ruang vakum ($T_{\mu\nu} = 0$), persamaan Einstein yang terlinearisasi akan tereduksi menjadi:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (C.1)$$

Bentuk transformasi fourier dari persamaan (C.1) adalah:

$$(\nabla^2 + k^2)\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) = 0 \quad (\text{C.2})$$

Karena tidak ada sumber ataupun batas, maka sistem akan berbentuk bola dan simetris. Sebagai hasilnya, $\bar{h}_{\mu\nu}$ tidak akan bergantung pada ω , sehingga persamaan (C.2) dapat tereduksi menjadi:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial r} \right) + k^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial r} + k^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \bar{h}_{\mu\nu}) + k^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \bar{h}_{\mu\nu}) + k^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

Dan persamaan terakhir merupakan persamaan gelombang satu dimensi untuk $r\psi$. Jika dimisalkan $r\bar{h}_{\mu\nu} = X$ dan $k = b$.

Maka persamaan (C.3) akan menjadi

$$X'' + b^2 X = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\left(\frac{d}{dx} + ib \right) \left(\frac{d}{dx} - ib \right) X = 0 \quad (\text{C.5})$$

Jika dimisalkan

$$\left(\frac{d}{dx} - ib \right) X = A \quad (\text{C.6})$$

Dan

$$\left(\frac{d}{dx} - ib\right)A = 0 \quad (\text{C.7})$$

Persamaan (C.7) diselesaikan terlebih dahulu:

$$\frac{dA}{dx} + ibA = 0 \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{dA}{A} = -ibdx \quad (\text{C.9})$$

$$\int \frac{1}{A} dA = - \int ibA dx \quad (\text{C.10})$$

$$\log A = -ibx + c_1 \quad (\text{C.11})$$

$$A = c_1 e^{-ibx} \quad (\text{C.12})$$

Substitusi persamaan (C.12) ke persamaan (C.6) akan menghasilkan

$$\frac{dX}{dx} - ibX = c_1 e^{-ibx} \quad (\text{C.13})$$

Untuk menyelesaikan persamaan (C.13) maka digunakan faktor integrasi

$$I = e^{\int (-ib) dx} = e^{-ibx} \quad (\text{C.14})$$

Kalikan kedua ruas persamaan (C.13) dengan factor integrase (C.14)

$$e^{-ibx} \frac{dX}{dx} - ibe^{-ibx} X = c_1 e^{-2ibx} \quad (C.15)$$

$$\frac{d}{dx} (e^{-ibx} X) = c_1 e^{-2ibx} \quad (C.16)$$

Integralkan kedua sis persamaan (C.16)

$$\int d(e^{-ibx} X) = c_1 \int e^{-2ibx} dx \quad (C.17)$$

$$e^{-ibx} X = c_1 - \frac{1}{2ib} e^{-2ibx} + c_2 \quad (C.18)$$

$$e^{-ibx} X = \left(-\frac{c_1}{2ib}\right) e^{-2ibx} + c_1 c_2 \quad (C.19)$$

$$X = \left(-\frac{c_1}{2ib}\right) e^{-ibx} + (c_1 c_2) e^{ibx} \quad (C.20)$$

Dengan memisalkan $A_1 = -\frac{c_1}{2ib}$ dan $A_2 = c_1 c_2$ maka persamaan (C.20) akan menjadi:

$$X = A_1 e^{-ibx} + A_2 e^{ibx} \quad (C.20)$$

Jika dikembalikan pada $r\bar{h}_{\mu\nu} = x$, maka:

$$r\bar{h}_{\mu\nu} = A_1 e^{-ibx} + A_2 e^{ibx} \quad (C.21)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{A_1 e^{-ibx}}{r} + \frac{A_2 e^{ibx}}{r} \quad (C.22)$$

Dimana dalam bab III yang dipergunakan adalah solusi real.

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{A_1}{r} e^{-ibx} \quad (\text{C.23})$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A e^{-ibx} \quad (\text{C.23})$$

D. Pembuktian $k_\alpha k^\alpha = 0$

$$0 = \square \bar{h}_{\mu\nu} \quad (\text{D.1})$$

$$0 = \eta^{\beta\alpha} \partial_\beta \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} \quad (\text{D.2})$$

$$0 = \eta^{\beta\alpha} \partial_\beta (i k_\alpha \bar{h}_{\mu\nu}) \quad (\text{D.3})$$

$$0 = -\eta^{\beta\alpha} k_\beta k_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} \quad (\text{D.4})$$

$$0 = -k_\alpha k^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} \quad (\text{D.5})$$

dari persamaan (D.5) dapat terlihat bahwa agar persamaan (3.44) menjadi solusi dari persamaan (3.43) maka $k_\alpha k^\alpha$ harus bernilai nol

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (\text{D.6})$$

E. Pembuktian $A_{\mu\alpha} k^\alpha = 0$

Dengan menerapkan kondisi gauge terhadap solusi dari persamaan medan lemah Einstein maka akan didapatkan:

$$0 = \partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\mu} \quad (\text{E.1})$$

$$0 = \partial_\alpha [A_{\mu\alpha} \exp(ik^\alpha x_\alpha)] \quad (\text{E.2})$$

$$0 = i A_{\mu\alpha} k^\alpha \exp(ik^\alpha x_\alpha) \quad (\text{E.3})$$

Dari persamaan (E.3) dapat terlihat bahwa kondisi gauge menjadi benar asalkan nilai dari $A_{\mu\alpha} k^\alpha$ adalah nol

$$A_{\mu\alpha}k^\alpha = 0 \quad (\text{E.4})$$

F. Tensor Inersia

Untuk menghitung energi kinetik dari benda tegar, dapat dilakukan seperti pada sistem partikel diskrit dan memasukkannya kedalam

$$T = \sum \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{F.1})$$

dimana menjumlahkan seluruh partikel pada benda tegar tersebut. Untuk benda tegar yang berotasi kecepatan benda merupakan penjumlahan dari kecepatan translasi dan kecepatan angular

$$v = V + \omega \times r \quad (\text{F.2})$$

Dimana V merupakan kecepatan translasi dan ω merupakan kecepatan angular. Dengan mensubstitusikan persamaan (F.2) kedalam persamaan (F.1) maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{1}{2}m(V + \omega \times r)^2 \\ &= \sum \frac{1}{2}mV^2 + \sum \frac{1}{2}mV \cdot \omega \times r + \sum \frac{1}{2}(m\omega \times r)^2 \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

kecepatan V dan ω adalah sama untuk setiap titik pada benda. Pada suku pertama, $\frac{1}{2}V^2$ dapat dikeluarkan dari tanda sigma, dan $\sum m$ hanyalah massa benda, yang dinyatakan dengan μ . Pada suku kedua $\sum mV \cdot \omega \times r = \sum mr \cdot V \times \omega = V \times \omega \cdot \sum mr$ karena asal dari gerak sistem berada pada pusat massa, suku ini menjadi nol, karena $\sum mr = 0$. Yang terakhir, pada suku ketiga kuadrat dari perkalian *vektor* diekspansikan menghasilkan

$$T = \sum \frac{1}{2} \mu V^2 + \frac{1}{2} \sum m [\omega^2 r^2 - (\omega \cdot r)^2] \quad (\text{F.4})$$

Jadi energi kinetik benda tegar dapat dituliskan sebagai penjumlahan dari dua bagian. Suku pertama pada (F.4) merupakan energi kinetik dari gerak translasi, dan merupakan bentuk yang sama jika seluruh massa benda terkonsentrasi pada pusat massa. Suku kedua merupakan energi kinetik dari rotasi dengan kecepatan angular ω terhadap sumbu yang melewati pusat massa. Harus ditekankan disini bahwa pembagian energi kinetik menjadi dua bagian hanya memungkinkan jika titik asal dari sistem koordinat melekat pada benda dan menjadi pusat massa benda.

Energi kinetik rotasi dapat ditulis ulang dalam bentuk tensor, yaitu dalam bentuk komponen x_i dan ω_i pada vektor r dan ω .

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum m (\omega_i^2 x_i^2 - \omega_i x_i \omega_k x_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum m (\omega_i \omega_k \delta_{ik} x_i^2 - \omega_i x_i \omega_k x_k) \quad (\text{F.5}) \\ &= \frac{1}{2} \omega_i \omega_k \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \end{aligned}$$

Disini digunakan identitas $\omega_i = \delta_{ik} \omega_k$, dimana δ_{ik} merupakan unit tensor, yang bernilai 1 jika $i = k$ dan nol jika $i \neq k$. Dalam bentuk tensor

$$I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \quad (\text{F.6})$$

maka energi kinetik untuk benda tegar dinyatakan oleh:

$$T = \sum \frac{1}{2} \mu V^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k \quad (\text{F.7})$$

Lagrangian untuk benda tegar diperoleh dari persamaan (F.7) dikurangkan dengan energi potensial.

$$T = \sum \frac{1}{2} \mu V^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k - U \quad (\text{F.8})$$

Potensial energi secara umum merupakan fungsi dari enam variabel yang mendefinisikan posisi benda tegar, yaitu tiga koordinat X, Y, Z dari pusat massa dan tiga sudut yang menentukan orientasi relatif gerak dan sumbu koordinat tetap.

Tensor I_{ik} disebut tensor inersia dari benda. Bersifat simetri yaitu:

$$I_{ik} = I_{ki} \quad (\text{F.9})$$

Untuk lebih jelasnya diberikan komponen-komponen I_{ik} secara eksplisit:

$$I_{ik} = \begin{bmatrix} \sum m(y^2 - z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2 - z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 - y^2) \end{bmatrix} \quad (\text{F.10})$$

Komponen-komponen I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} disebut dengan momen inersia untuk sumbu yang terkait.

Tensor inersia jelas merupakan penjumlahan: momen inersia benda merupakan penjumlahan bagian-bagiannya.

Jika benda dianggap kontinu, maka penjumlahan pada definisi (F.6) menjadi integral seluruh volume benda:

$$I_{ik} = \int \rho (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV \quad (\text{F.11})$$

G. Tensor Lambda

Diperkenalkan tensor

$$P_{ij}(\hat{n}) = \delta_{ij} - n_i n_j \quad (\text{G.1})$$

Dimana tensor ini bersifat simetrik, *transverse* (yaitu $n^i P_{ij}(\hat{n}) = 0$, *projector* ($P_{ik}P_{kj} = P_{ij}$), dan tracenya bernilai 2. Dengan dengan bantuan $P_{ij}(\hat{n})$ dapat dibangun tensor lambda

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ik}P_{jl} \quad (\text{G.2})$$

Dimana masih bersifat *projector*, dalam arti bahwa

$$\Lambda_{ij,kl}\Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn} \quad (\text{G.3})$$

Kemudian tensor lambda juga bersifat *transverse* pada semua indeks $n^i \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = 0$, dan *traceless tergantung pada* (ij) dan (k, l)

Secara eksplisit tensor lambda diberikan oleh bentuk

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\delta_{jl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} + \frac{1}{2}n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2}n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2}n_i n_j n_k n_l \quad (\text{G.4})$$

H. Fluks Energi

Fluks energi merupakan besarnya energi yang dipancarkan per satuan waktu per satuan luas pada jarak tertentu dari sumber. Dimulai dengan konservasi tensor stress-energi, $\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0$, yang mengakibatkan,

$$\int_V d^3x (\partial_0 t^{00} + \partial_i t^{i0}) = 0 \quad (\text{H.1})$$

Dimana V merupakan volume ruang pada daerah yang jauh, dibatasi oleh permukaan S . energi gelombang gravitasi didalam volume V adalah

$$E_V = \int_V d^3x t^{00}, \quad (\text{H.2})$$

Maka persamaan (H.1) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{c} \frac{dE_V}{dt} = - \int_V \partial_i t^{i0} \quad (\text{H.3})$$

$$= - \int_S \partial A n_i t^{0i} \quad (\text{H.4})$$

Dimana n_i adalah *vektor* normal terhadap permukaan dan dA adalah elemen permukaan. Lebih jauh lagi, diluar sumber, dapat diterapkan TT gauge. Diambil S merupakan permukaan bola pada jarak r dari sumber. Elemen permukaannya adalah $dA = r^2 d\Omega$, dan normalnya $\hat{n} = \hat{r}$ adalah vektor satuan dalam arah radial, maka persamaan (H.4) memberikan

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int_V dA t^{0r} \quad (\text{H.5})$$

Dimana

$$t^{0r} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial^0 h_{ij}^{TT} \frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{TT} \rangle \quad (\text{H.6})$$

Gelombang gravitasi yang merambat keluar secara radial, pada jarak r mempunyai bentuk umum

$$h_{ij}^{TT}(t, r) = f_{ij}(t - r/c) \quad (\text{H.7})$$

Dimana $f_{ij}(t - r/c)$ merupakan sebuah fungsi dari waktu retarded $t_{ret} - r/c$. Dapat dibuktikan bahwa hasil ini setara dengan hasil yang didapatkan pada gelombang electromagnet.

$$\frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{TT}(t, r) = -\frac{1}{r^2} f_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (\text{H.8})$$

Pada fungsi kombinasi $t - r/c$ dapat diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial r} f_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (\text{H.9})$$

Dan lebih jauh

$$\frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{TT}(t, r) = -\partial_0 h_{ij}^{TT}(t, r) \quad (\text{H.10})$$

$$= -\partial^0 h_{ij}^{TT}(t, r) \quad (\text{H.11})$$

Maka, dari persamaan (H.6), dapat terlihat bahwa pada jarak yang jauh, $t^{0r} = +t^{00}$, dan energi didalam volume V memenuhi

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int dA t^{00} \quad (\text{H.12})$$

Fakta bahwa penurunan E_V berarti bahwa gelombang gravitasi merambat keluar dengan membawa fluks energi

$$\frac{dE}{dAdt} = +ct^{00} \quad (\text{H.13})$$

$$= \frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (\text{H.14})$$

Atau jika dituliskan dalam bentuk $dA = r^2 d\Omega$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^3}{32\pi G} \int d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (\text{H.15})$$

Dalam suku h_+ dan h_\times , dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dE}{dAdt} = \frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (\text{H.16})$$

Dengan total energi yang mengalir sepanjang dA antara $t = -\infty$ dan $t = +\infty$ adalah

$$\frac{dE}{dA} = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (\text{H.17})$$



“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BIODATA PENULIS



Penulis dilahirkan di Palopo, Sulawesi Selatan, 30 April 1992, merupakan anak pertama dari tiga bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu di SD Limbung Puteri Kabupaten Gowa, SMP Negeri 1 Bajeng Kabupaten Gowa, dan SMA Negeri 1 Bajeng Kabupaten Gowa. Setelah lulus dari SMA tahun 2010, Penulis mengikuti SNMPTN Tulis tahun 2011 dan diterima di Jurusan Fisika FMIPA-ITS dan terdaftar dengan NRP 1111100039.

Di Jurusan Fisika Penulis mengambil bidang fisika teori. Penulis pernah aktif dalam Himpunan Mahasiswa Fisika ITS (HIMASIKA ITS) menjabat sebagai kepala departemen komunikasi dan informasi periode 2013-2014. Selain itu Penulis juga aktif sebagai kru di ITS Tv