



**TUGAS AKHIR - SM141501**

## **ANALISIS BIFURKASI HOPF PADA MODEL SISTEM KEUANGAN**

**NURUL LATIFAH  
NRP 1212 100 077**

**Dosen Pembimbing  
Dr. Hariyanto, M.Si  
Drs. Mohammad Setijo Winarko, M.Si**

**JURUSAN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2016**



**FINAL PROJECT - SM141501**

# **HOPF BIFURCATION ANALYSIS OF FINANCIAL SYSTEM MODELS**

**NURUL LATIFAH**  
**NRP 1212 100 077**

**Supervisor**  
**Dr. Hariyanto, M.Si**  
**Drs. Mohammad Setijo Winarko, M.Si**

**MATHEMATICS DEPARTMENT**  
**Faculty of Mathematics and Science**  
**Sepuluh Nopember Institute of Technology**  
**Surabaya 2016**

**LEMBAR PENGESAHAN**  
**ANALISIS BIFURKASI HOPF PADA MODEL**  
**SISTEM KEUANGAN**  
**HOPF BIFURCATION ANALYSIS OF FINANCIAL**  
**SYSTEM MODELS**

**TUGAS AKHIR**

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Pada bidang studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

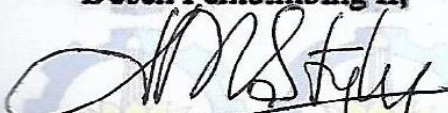
Oleh :


**NURUL LATIFAH**  
NRP. 1212 100 077

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,


Dosen Pembimbing I,

  
Dr. Mohammad Setijo Winarko, M.Si  
NIP. 19640920 199002 1 002

  
Dr. Hariyanto, M.Si  
NIP. 19530414 198203 1 002

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika  
FMIPA ITS

  
Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT  
NIP. 19700831 199403 1 003  
Surabaya, Juli 2016

## **ANALISIS BIFURKASI HOPF PADA MODEL SISTEM KEUANGAN**

Nama Mahasiswa : Nurul Latifah  
NRP : 1212 100 077  
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS  
Dosen Pembimbing : 1. Dr. Hariyanto, M.Si  
2. Drs. M. Setijo Winarko, M.Si

### **Abstrak**

*Sistem keuangan mempunyai peranan penting dalam perekonomian dimana kestabilan sistem keuangan menentukan kestabilan ekonomi. Ketidakstabilan sistem keuangan dapat mengakibatkan timbulnya masalah yang sangat berdampak pada kegiatan ekonomi, seperti krisis keuangan. Oleh karena itu, diperlukan adanya kajian terhadap dinamika sistem keuangan dengan menggunakan model matematika untuk mengetahui perilaku sistem keuangan yang berkaitan dengan kestabilan sistem pada beberapa kasus yang mungkin terjadi dan mempengaruhi sistem. Analisis dinamika sistem keuangan yang dilakukan pada penelitian ini adalah mencari titik tetap sistem, menentukan kestabilan titik tetap, struktur topologi lokal sistem, dan analisis bifurkasi Hopf. Bifurkasi menggambarkan perubahan perilaku sistem untuk beberapa nilai parameter yang bervariasi. Bifurkasi Hopf terjadi ketika terdapat sepasang nilai karakteristik sistem yang bagian realnya sama dengan nol. Pada penelitian ini, eksistensi bifurkasi Hopf bergantung pada nilai elastisitas permintaan sebagai parameter bifurkasi. Simulasi dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde-4 diberikan pada penelitian ini agar diperoleh gambaran kestabilan titik tetap yang berubah-ubah untuk beberapa kasus pada model sistem keuangan.*

**Kata kunci :** Model sistem keuangan, Kestabilan titik tetap, Bifurkasi Hopf.

## HOPF BIFURCATION ANALYSIS OF FINANCIAL SYSTEM MODELS

Name : Nurul Latifah  
NRP : 1212 100 077  
Department : Mathematics FMIPA-ITS  
Supervisors : 1. Dr. Hariyanto, M.Si  
2. Drs. M. Setijo Winarko, M.Si

### ***Abstract***

*Financial system has an important role in economics in which the stability of financial system affects economic stability. The instability of financial system causing problems that greatly impact on economic activity, such as financial crisis. Therefore, it is necessary to study the dynamics of financial system using mathematical models regard to system stability in some cases that may occur and affect the system. Analysis of the dynamics of financial system in this research is to find fixed points, to determine the stability of fixed points, local topological structure of the system, and Hopf bifurcation analysis. Bifurcation represents changes in system behavior for some varying parameter. Hopf bifurcation occurs if there is a pair of purely imaginary eigenvalues, with the remaining eigenvalues having nonzero real parts. In this study, Hopf bifurcation existence depends on the elasticity of demand as a bifurcation parameter. Simulations using Runge-Kutta numerical method given in this study to obtain an overview about the stability changing of a fixed point for a few cases on the financial system models.*

***Keyword :*** *Financial system models, The stability of a fixed point, Hopf Bifurcation.*

## DAFTAR ISI

JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN.....	v
ABSTRAK.....	vii
<i>ABSTRACT</i> .....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xvii
DAFTAR TABEL.....	xix
DAFTAR SIMBOL.....	xxi
DAFTAR LAMPIRAN.....	xxiii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan.....	3
1.5 Manfaat.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	4
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	<b>7</b>
2.1 Penelitian Terkait.....	7
2.2 Model Sistem Keuangan.....	8
2.3 Titik Tetap Sistem.....	9
2.4 Linearisasi Sistem Nonlinear.....	9
2.5 Akar-akar Persamaan Karakteristik Sistem.....	10
2.6 Titik Tetap Hiperbolik.....	11
2.7 Kestabilan dan Struktur Topologi Lokal Titik Tetap Hiperbolik.....	11
2.8 Kestabilan dan Struktur Topologi Lokal Titik Tetap Nonhiperbolik.....	13

2.8.1	Manifold Invarian.....	13
2.8.2	Center Manifold.....	14
2.8.3	Bentuk Normal.....	15
2.8.4	Bifurkasi Hopf.....	16
2.9	Metode Numerik Runge-Kutta Orde-4.....	20
 <b>BAB III METODE PENELITIAN</b>		 21
3.1	Studi Literatur.....	21
3.2	Mengkaji Model Sistem Keuangan.....	21
3.3	Mencari Titik Tetap.....	21
3.4	Translasi Titik Tetap.....	21
3.5	Linearisasi Sistem Nonlinear.....	21
3.6	Mencari Akar-akar Persamaan Karakteristik Sistem.....	22
3.7	Menentukan Kestabilan dan Struktur Topologi Lokal Titik Tetap Hiperbolik.....	22
3.8	Menentukan Kestabilan dan Struktur Topologi Lokal Titik Tetap Nonhiperbolik.....	22
3.8.1	Menyelidiki Eksistensi Bifurkasi Hopf.....	22
3.9	Simulasi Numerik.....	22
3.10	Kesimpulan dan Saran.....	23
3.11	Diagram Alir .....	23
 <b>BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN</b>		 25
4.1	Model Sistem Keuangan .....	25
4.2	Titik Tetap Sistem.....	29
4.3	Analisis Kestabilan dan Struktur Topologi Lokal.....	32
4.3.1	Translasi Titik Tetap.....	33
4.3.2	Linearisasi Sistem.....	33
4.3.3	Akar-akar Persamaan Karakteristik Sistem.....	34
Kasus 1	.....	36
Kasus 2	.....	36
Kasus 3	.....	37
Kasus 4	.....	39
Kasus 5 (Bifurkasi Hopf)	.....	40
4.4	Simulasi Numerik.....	69

BAB V PENUTUP	93
5.1 Kesimpulan.....	93
5.2 Saran.....	94
DAFTAR PUSTAKA	95
LAMPIRAN	97



## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Kriteria Kestabilan Titik Tetap.....	12
Tabel 4.1	Kasus-kasus untuk penyelesaian nilai karakteristik sistem.....	36

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Diagram Alir Penelitian.....	23
Gambar 4.1	Trayektori Orbit Periodik Model Sistem Keuangan.....	68
Gambar 4.2	Grafik Kestabilan Orbit Periodik Model Sistem Keuangan.....	69
Gambar 4.3	Grafik Kestabilan Kasus 1.....	72
Gambar 4.4	Trayektori $x, y$ Kasus 1.....	73
Gambar 4.5	Trayektori $y, z$ Kasus 1.....	74
Gambar 4.6	Trayektori $x, z$ Kasus 1.....	74
Gambar 4.7	Trayektori $x, y, z$ Kasus 1.....	75
Gambar 4.8	Grafik Kestabilan Kasus 2.....	76
Gambar 4.9	Trayektori $x, y$ Kasus 2.....	77
Gambar 4.10	Trayektori $y, z$ Kasus 2.....	78
Gambar 4.11	Trayektori $x, z$ Kasus 2.....	78
Gambar 4.12	Trayektori $x, y, z$ Kasus 2.....	79
Gambar 4.13	Grafik Kestabilan Kasus 3.....	80
Gambar 4.14	Trayektori $x, y$ Kasus 3.....	81
Gambar 4.15	Trayektori $y, z$ Kasus 3.....	82
Gambar 4.16	Trayektori $x, z$ Kasus 3.....	82
Gambar 4.17	Trayektori $x, y, z$ Kasus 3.....	83
Gambar 4.18	Grafik Kestabilan Kasus 4.....	84
Gambar 4.19	Trayektori $x, y$ Kasus 4.....	85
Gambar 4.20	Trayektori $y, z$ Kasus 4.....	86
Gambar 4.21	Trayektori $x, z$ Kasus 4.....	86
Gambar 4.22	Trayektori $x, y, z$ Kasus 4.....	87
Gambar 4.23	Grafik Kestabilan Kasus 5.....	88
Gambar 4.24	Trayektori $x, y$ Kasus 5.....	89
Gambar 4.25	Trayektori $y, z$ Kasus 5.....	90
Gambar 4.26	Trayektori $x, z$ Kasus 5.....	90
Gambar 4.27	Trayektori $x, y, z$ Kasus 5.....	91

## DAFTAR SIMBOL

- $x$  : suku bunga pada saat  $t$ .  
 $y$  : tingkat permintaan investasi pada saat  $t$ .  
 $z$  : indeks harga instrumen keuangan pada saat  $t$ .  
 $a$  : total tabungan di bank.  
 $b$  : biaya per investasi.  
 $c$  : elastisitas permintaan di pasar uang.  
 $E$  : titik tetap.  
 $\lambda$  : nilai karakteristik.  
 $\bar{V}$  : vektor karakteristik.  
 $E^c$  : manifold invarian center.  
 $E^s$  : manifold invarian stabil.  
 $E^u$  : manifold invarian tak stabil.  
 $W^c$  : persamaan center manifold.  
 $\alpha$  : bagian real nilai karakteristik.  
 $\omega$  : bagian imajiner nilai karakteristik.  
 $\Gamma$  : indeks stabilitas.

## DAFTAR LAMPIRAN

Listing Program Simulasi Kestabilan dan Bifurkasi Hopf pada Model Sistem Keuangan.....	95
---	----

## BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan sebagai hasil dari analisis model yang telah diperoleh dan saran sebagai pertimbangan dalam pengembangan atau penelitian lebih lanjut.

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan keseluruhan hasil analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa

1. Pada model sistem keuangan, diperoleh persamaan karakteristik

$$(\lambda + b) \left( \lambda^2 + \left( c + a - \frac{1}{b} \right) \lambda + 1 + ac - \frac{c}{b} \right) = 0$$

dan titik tetap  $E_0 \left( 0, \frac{1}{b}, 0 \right)$  ketika  $c - b - abc \leq 0$ , yang kestabilannya bergantung pada persamaan karakteristik tersebut sebagai berikut :

- Jika  $1 + ac - \frac{c}{b} > 0$  dan  $c + a - \frac{1}{b} < 0$  sehingga  $\lambda_1 = -b < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , dan  $\lambda_3 > 0$ , maka  $E_0 \left( 0, \frac{1}{b}, 0 \right)$  tidak stabil dengan struktur topologi lokal berbentuk sadel.
- Jika  $1 + ac - \frac{c}{b} > 0$  dan  $c + a - \frac{1}{b} > 0$  sehingga  $\lambda_1 = -b < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , dan  $\lambda_3 < 0$ , maka  $E_0 \left( 0, \frac{1}{b}, 0 \right)$  stabil asimtotis dengan struktur topologi lokal berbentuk simpul.
- Jika  $1 + ac - \frac{c}{b} = 0$  dan  $c + a - \frac{1}{b} < 0$  sehingga  $\lambda_1 = -b < 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ , dan  $\lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} > 0$  dengan  $0 < c < 1$ , maka  $E_0 \left( 0, \frac{1}{b}, 0 \right)$  adalah nonhiperbolik yang bersifat tidak stabil.

- Jika  $1 + ac - \frac{c}{b} = 0$  dan  $c + a - \frac{1}{b} > 0$  sehingga  $\lambda_1 = -b < 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ , dan  $\lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} < 0$  dengan  $c > 1$ , maka  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$  stabil.
  - Jika  $1 + ac - \frac{c}{b} > 0$  dan  $c + a - \frac{1}{b} = 0$  sehingga  $\lambda_1 = -b < 0$ ,  $\lambda_2 = i\sqrt{1-c^2}$ , dan  $\lambda_3 = -i\sqrt{1-c^2}$  dengan  $0 \leq c < 1$ , maka  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$  stabil.
2. Pada model sistem keuangan terjadi bifurkasi Hopf jika  $1 + ac - \frac{c}{b} > 0$  dan  $c + a - \frac{1}{b} = 0$  dengan  $0 \leq c < 1$ . Orbit periodik yang terbentuk saat terjadi bifurkasi Hopf bersifat stabil (terjadi Bifurkasi Hopf Superkritikal).
  3. Dengan metode Numerik Runge-Kutta orde-4 menggunakan software MATLAB, diperoleh penyelesaian numerik dari sistem keuangan memberikan hasil yang sama dengan hasil analisis untuk kestabilan titik tetap.

## 5.2 Saran

Perlu dikembangkan analisis dari model sistem keuangan yang berkaitan dengan pengendalian atau kontrol sistem keuangan untuk penelitian selanjutnya agar dapat diketahui lebih mendalam tentang penerapannya dalam perekonomian makro.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ding, Y., Weihua J., & Hongbin W. (2012). "Hopf-Pitchfork Bifurcation and Periodic Phenomena in Nonlinear Financial System with Delay". **Chaos, Solitons and Fractals Vol. 45**, Hal.1048-1057.
- [2] Gao, Q., Junhai Ma. (2009). "Chaos and Hopf Bifurcation of A Finance System". **Nonlinear Dynamics Vol. 58**, Hal. 209-216.
- [3] Ma, J., Chen Y. (2001). "Study for The Bifurcation Topological Structure and The Global Complicated Character of A Kind of Nonlinear Finance System". **Applied Mathematics and Mechanics Vol. 22**, Hal. 1240-1251.
- [4] Jordan, D. W. and Smith P. (2007). "Nonlinear Ordinary Differential Equation". New York : Oxford University Press.
- [5] Wiggins, Stephen. (2003). "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos - Second Edition". New York : Springer-Verlag New York, Inc.
- [6] Strogatz, Steven H. (1994). "Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering". USA : Perseus Books Publishing, L.L.C.
- [7] Subiono. (2013). "Sistem Linear dan Kontrol Optimal". Surabaya : Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [8] Hirsch, Morris W., Stephen Smale, & Robert L. Devaney. (2004). "Differential Equations, Dynamical System, and an Introduction to Chaos – Second Edition". California : Academic Press Elsevier.
- [9] Bohmer, Klaus. (2001). "Short Course on Numerical Bifurcation and Center Manifold Analysis in Partial Differential Equations". Department of Mathematics Philipps University Marburg.Germany.

- [10] Holmes, Mark H. (2007). "Introduction to Numerical Methods in Differential Equations". New York : Springer Science+Business Media, LLC.
- [11] Zulminarni. (2007). "Stabilitas dan Bifurkasi Hopf pada Sistem Autonomus Nonlinear Tiga Dimensi". **Thesis S2 Jurusan Matematika ITS Surabaya.**
- [12] Maria R.O.T, Dona. (2015). "Eksistensi Bifurkasi Hopf dan Penyelesaian Numerik Metode Runge-Kutta pada Model Epidemi dengan Fungsi Pengobatan Saturasi". **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.**



## BIODATA PENULIS



Penulis dilahirkan di Bangkalan pada tanggal 3 Maret 1994. Penulis adalah putri pertama dari 2 bersaudara, pasangan Abdul Latif Hammad Sardi dan Rabi'ah Marsuki Mahmud. Penulis tinggal di Taman III RT.12 RW.03 Sidoarjo. Penulis memulai jenjang pendidikan formal di SD Ma'arif Ketegan, SMP YPM 1 Taman, dan SMA Wachid Hasyim 2 Sidoarjo hingga lulus pada tahun 2012. Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan studi perguruan tinggi tingkat sarjana di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Di Jurusan Matematika, penulis mendalami bidang Matematika Terapan. Selama masa kuliah, penulis aktif di organisasi intra kampus Himpunan Mahasiswa Matematika ITS (HIMATIKA ITS) sebagai *staff* Departemen Pengabdian Masyarakat 2013-2014 dan sebagai *staff* Departemen Sosial Masyarakat 2014-2015.

Apabila ingin memberikan saran, kritik, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini, dapat disampaikan kepada penulis melalui *e-mail* [latifahtif3@gmail.com](mailto:latifahtif3@gmail.com).

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

Pada bab ini, dijelaskan mengenai latar belakang dari permasalahan yang dibahas pada tugas akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan dari Tugas Akhir ini.

### **1.1 Latar Belakang**

Sistem keuangan merupakan satu kesatuan jaringan yang menggambarkan interaksi lembaga-lembaga keuangan dan pasar. Interaksi yang terjadi dalam sistem keuangan sangat kompleks, berkaitan dengan mobilisasi dana, baik dalam kegiatan investasi, penyediaan keuangan, maupun pembiayaan kegiatan komersial. Lembaga keuangan berperan penting terutama sebagai penengah antara lembaga-lembaga yang menyediakan dana dan lembaga-lembaga yang membutuhkan dana, sedangkan pasar berperan penting dalam memfasilitasi pengelolaan dana dan transformasi risiko (IMF, 2004, *Compilation Guide on Financial Soundness Indicators*, IMF, Washington DC, para. 2.2.).

Kestabilan sistem keuangan berdampak besar terhadap jalannya kegiatan ekonomi. Sistem keuangan dikatakan stabil ketika mekanisme ekonomi dalam penetapan harga instrumen keuangan, alokasi dana, dan pengelolaan dana berfungsi secara baik dan mendukung kegiatan ekonomi. Mekanisme ekonomi dalam penetapan harga instrumen keuangan, alokasi dana, dan pengelolaan dana tersebut sangat berkaitan dengan fenomena-fenomena perubahan suku bunga, perubahan tingkat permintaan investasi, dan perubahan indeks harga instrumen keuangan dari waktu ke waktu. Ketiga fenomena tersebut saling berhubungan satu sama lain dan tidak terlepas dari pengaruh total tabungan nasional, biaya investasi, dan elastisitas permintaan. Jika terdapat ketidaksesuaian antara faktor-faktor yang saling berpengaruh tersebut di dalam sistem keuangan, maka permasalahan yang

ditimbulkan sangat kompleks dan dapat berujung pada krisis keuangan[1]. Masalah yang terjadi juga akan berdampak pada kehidupan ekonomi masyarakat. Oleh karena itu, diperlukan adanya kajian terhadap dinamika sistem keuangan dengan menggunakan model matematika untuk menganalisis kestabilan sistem dan eksistensi bifurkasi pada sistem. Istilah bifurkasi secara umum digunakan dalam mempelajari dinamika nonlinear, yaitu untuk menggambarkan perubahan perilaku dari sistem dengan beberapa nilai parameter yang bervariasi. Dengan adanya kajian tersebut, dapat diketahui karakteristik dari sistem keuangan dan bagaimana fenomena-fenomena yang rumit dapat terjadi.

Gao dan Ma (2009) telah menganalisis model sistem keuangan yang sangat sederhana dengan tiga variabel, yaitu suku bunga, tingkat permintaan investasi, dan indeks harga instrumen keuangan. Gao dan Ma menemukan eksistensi bifurkasi Hopf pada model tersebut dan menemukan adanya pengaruh yang sangat besar dari tabungan terhadap sistem keuangan[2]. Yuting, Weihua, dan Hongbin (2012) telah menganalisis model yang sama dengan *time-delay feedback* dan menemukan eksistensi bifurkasi Hopf-Pitchfork pada model tersebut[1].

Pada Tugas Akhir ini, penulis akan menganalisis kestabilan, struktur topologi lokal, dan bifurkasi Hopf pada model sistem keuangan, serta memberikan penyelesaian numerik dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta yang disajikan dalam bentuk simulasi untuk menggambarkan hasil analisis dari model tersebut.

## 1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Bagaimana analisis kestabilan, struktur topologi lokal, dan eksistensi bifurkasi Hopf pada model sistem keuangan.
2. Bagaimana interpretasi hasil analisis dari model sistem keuangan dan penyelesaian numerik dari model tersebut dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta beserta simulasinya.

### **1.3 Batasan Masalah**

Permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini dibatasi ruang lingkungannya, yaitu :

1. Model yang dianalisis adalah model sistem keuangan dengan tiga variabel, yaitu suku bunga, tingkat permintaan investasi, dan indeks harga instrumen keuangan di dalam perekonomian makro.
2. Suku bunga yang digunakan adalah suku bunga nominal, yaitu suku bunga riil ditambah dengan tingkat inflasi.
3. Parameter yang mempengaruhi pada model sistem keuangan dibatasi hanya pada tiga hal, yaitu total tabungan di bank, biaya per investasi, dan elastisitas permintaan.

### **1.4 Tujuan**

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Mendapatkan kestabilan, struktur topologi lokal, dan eksistensi bifurkasi Hopf pada model sistem keuangan.
2. Menginterpretasikan hasil analisis model sistem keuangan dan mendapatkan penyelesaian numerik dari model tersebut dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta beserta simulasinya.

### **1.5 Manfaat**

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Mengetahui dinamika sistem keuangan terkait dengan perilaku sistem dan perubahannya.
2. Memperluas kajian tentang model sistem keuangan, kestabilan, struktur topologi lokal, dan bifurkasi yang terjadi pada sistem.
3. Sebagai bahan pertimbangan untuk penelitian lanjutan yang berkaitan dengan metode pengendalian atau kontrol sistem keuangan.

## **1.6 Sistematika Penulisan**

Sistematika dari penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

### **BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir ini yang meliputi latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

### **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Bab ini berisi tentang materi-materi yang mendukung Tugas Akhir ini, antara lain penelitian terkait, model sistem keuangan, titik tetap sistem, linearisasi sistem nonlinear, akar-akar persamaan karakteristik sistem, titik tetap hiperbolik, kestabilan dan struktur topologi lokal titik tetap hiperbolik, kestabilan dan struktur topologi lokal titik tetap nonhiperbolik yang mencakup teorema center manifold dan bifurkasi Hopf, serta metode numerik Runge-Kutta orde-4.

### **BAB III METODOLOGI PENELITIAN**

Bab ini berisi tentang langkah-langkah dan metode yang digunakan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.

### **BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Bab ini berisi tentang pembahasan mengenai representasi sistem keuangan pada model sistem keuangan, titik tetap model sistem keuangan, penentuan kestabilan dan struktur topologi lokal model sistem keuangan, analisis bifurkasi Hopf dari model sistem keuangan dan penyelesaian numerik dari model sistem keuangan yang disimulasikan dengan menggunakan MATLAB.

## BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan selanjutnya.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bab ini, dijelaskan mengenai tinjauan pustaka yang menjadi dasar materi dalam penyusunan Tugas Akhir ini dan menunjang metode-metode yang digunakan dalam pembahasan Tugas Akhir ini.

#### **2.1 Penelitian Terkait**

Penelitian terdahulu tentang analisis bifurkasi pada sistem keuangan adalah penelitian yang dilakukan oleh Ma Jun-hai dan Chen Yu-shu pada tahun 2001 yang berjudul “*Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system*”. Pada penelitian tersebut Ma dan Chen menganalisis model sistem keuangan dengan tiga variabel, yaitu suku bunga, tingkat permintaan investasi, dan indeks harga instrumen keuangan. Ma dan Chen menemukan eksistensi bifurkasi Hopf pada model sistem keuangan. Parameter-parameter yang tidak sesuai menjadi penyebab terjadinya kekacauan pada sistem keuangan[3].

Penelitian lainnya dilakukan oleh Gao Q. dan Ma Jun-hai pada tahun 2009 yang berjudul “*Chaos and Hopf bifurcation of finance system*”. Pada penelitian tersebut, Gao dan Ma menggunakan dua model sistem keuangan, yaitu model sistem keuangan yang sama dengan model yang digunakan pada penelitian Ma dan Chen, serta model sistem keuangan dengan *time-delay feedback*. Gao dan Ma menemukan eksistensi bifurkasi Hopf pada kedua sistem keuangan tersebut dan menemukan adanya pengaruh yang sangat besar dari tabungan terhadap sistem keuangan[2].

Penelitian lain yang dilakukan setelah kedua penelitian di atas adalah penelitian yang dilakukan oleh Yuting Ding, Weihua Jiang, dan Hongbin Wang pada tahun 2012 yang berjudul “*Hopf-pitchfork bifurcation and periodic phenomena in nonlinear financial system with delay*”. Pada penelitian tersebut, ditemukan



eksistensi bifurkasi Hopf-Pitchfork pada sistem keuangan dengan *time-delay feedback*[1].

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, maka pada Tugas Akhir ini, akan dilakukan analisis kestabilan, struktur topologi lokal, dan eksistensi bifurkasi Hopf pada model sistem keuangan dengan tiga variabel, yaitu suku bunga, tingkat permintaan investasi, dan indeks harga instrumen keuangan beserta analisis kestabilan orbit periodik dengan menggunakan indeks stabilitas. Selanjutnya, diberikan penyelesaian numerik dengan metode numerik Runge-Kutta yang disajikan dalam bentuk simulasi untuk menggambarkan hasil analisis dari model tersebut. Pustaka terkait model sistem keuangan dan metode-metode yang digunakan untuk analisis dipaparkan pada subbab-subbab berikutnya.

## 2.2 Model Sistem Keuangan

Model sistem keuangan merupakan model matematis berupa persamaan differensial nonlinear autonomus yang menggambarkan dinamika sistem keuangan di dalam perekonomian makro. Model umum sistem keuangan secara sederhana dapat ditulis dengan tiga variabel, yaitu suku bunga  $x$ , tingkat permintaan investasi  $y$ , dan indeks harga instrumen keuangan  $z$  berikut ini :

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz \end{cases} \quad (2.1)$$

dengan  $a \geq 0$  adalah total tabungan di bank,  $b \geq 0$  adalah biaya per investasi,  $c \geq 0$  adalah elastisitas permintaan.

Laju perubahan suku bunga dipengaruhi oleh tinggi rendahnya harga instrumen keuangan serta surplus antara suku bunga yang dibayarkan untuk investasi dan suku bunga yang diperoleh dari tabungan secara keseluruhan dalam perekonomian makro. Laju perubahan tingkat permintaan investasi dipengaruhi oleh tingkat keuntungan investasi serta tinggi rendahnya suku bunga dan total biaya investasi di dalam perekonomian makro. Sedangkan Laju perubahan indeks harga instrumen keuangan dipengaruhi oleh

tinggi rendahnya jumlah permintaan serta tinggi rendahnya tingkat inflasi di dalam perekonomian makro. Tinggi rendahnya jumlah permintaan direpresentasikan oleh elastisitas permintaan dan indeks harga instrumen keuangan, sedangkan tinggi rendahnya tingkat inflasi direpresentasikan oleh suku bunga[2].

Dasar teori yang digunakan pada Tugas akhir ini meliputi titik tetap sistem, linearisasi sistem nonlinear, akar-akar persamaan karakteristik, kestabilan asimtotis, titik tetap hiperbolik, manifold invarian, center manifold, bentuk normal, dan bifurkasi Hopf.

### 2.3 Titik Tetap Sistem

Pandang medan vektor autonomus sebagai berikut :

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.2)$$

Penyelesaian stasioner dari persamaan (2.2) merupakan titik  $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  sedemikian hingga

$$f(\bar{x}) = 0,$$

yaitu penyelesaian yang tidak berubah terhadap waktu[4]. Penyelesaian stasioner biasa disebut sebagai titik tetap, titik setimbang, titik kritis, titik stasioner, atau *steady state*.

Pada sistem linear, jika sudah diperoleh titik tetap, maka dilakukan pencarian akar-akar persamaan karakteristik sistem untuk menentukan kestabilan dan struktur topologi lokal sistem. Akan tetapi, karena model sistem keuangan adalah sistem nonlinear, maka harus dilakukan linearisasi sistem terlebih dahulu.

### 2.4 Linearisasi Sistem Nonlinear

Linearisasi sistem adalah proses hampiran sistem nonlinear dengan bentuk linear. Dalam hal ini, perlu diketahui bahwa untuk menentukan kestabilan dari titik tetap  $\bar{x}(t)$  adalah dengan mengamati perilaku sistem pada persekitaran  $\bar{x}(t)$ .

Misalkan

$$x = \bar{x}(t) + y. \quad (2.3)$$

Dengan substitusi persamaan (2.3) pada (2.2) dan ekspansi deret Taylor untuk  $f(x)$  di sekitar  $\bar{x}(t)$  diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ \dot{\tilde{x}}(t) + \dot{y} &= f(\bar{x}(t)) + Df(\bar{x}(t))y + \mathcal{O}(|y|^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

dengan  $Df$  adalah turunan  $f$  terhadap  $x$  dan  $|\cdot|$  adalah norm pada  $\mathbb{R}^n$ . Karena  $\dot{\tilde{x}}(t) = f(\bar{x}(t))$ , maka dari persamaan (2.4) didapat

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y + \mathcal{O}(|y|^2) \quad (2.5)$$

Persamaan (2.5) menunjukkan perubahan orbit di persekitaran  $\bar{x}(t)$ .

Untuk menentukan kestabilan dari titik tetap  $\bar{x}(t)$  adalah dengan mengamati perilaku sistem pada persekitaran  $\bar{x}(t)$ . Oleh karena itu, menentukan kestabilan sistem dapat dilakukan dengan mengamati bagian linear sistem, yaitu

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y \quad (2.6)$$

yang merepresentasikan perubahan di persekitaran  $\bar{x}(t)$  [5]. Penulisan  $Df(\bar{x}(t))$  dalam bentuk matriks biasa disebut dengan matriks Jacobi.

Jika linearisasi sistem nonlinear di sekitar titik tetap sudah dilakukan, maka bentuk linear sistem tersebut dicari akar-akar persamaan karakteristiknya.

## 2.5 Akar-akar Persamaan Karakteristik Sistem

Berikut ini diberikan definisi dari akar-akar persamaan karakteristik sistem :

**Definisi 2.1(Karakteristik Sistem)[6]**

*Jika  $Df(\bar{x})$  adalah matriks berukuran  $n \times n$  maka vektor tak nol  $x$  dinamakan vektor karakteristik (vektor eigen) dari  $Df(\bar{x})$  jika memenuhi*

$$Df(\bar{x})x = \lambda x \quad (2.7)$$

*untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  disebut nilai karakteristik dari  $Df(\bar{x})$  dan  $x$  disebut vektor karakteristik (vektor eigen) yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .*

Untuk mencari nilai karakteristik matriks  $Df(\bar{x})$  berukuran  $n \times n$ , maka persamaan (2.7) dapat ditulis sebagai berikut :

$$(Df(\bar{x}) - \lambda I)x = 0$$

yang mempunyai penyelesaian  $x$  tak nol jika dan hanya jika

$$|Df(\bar{x}) - \lambda I| = 0 \quad (2.8)$$

Setelah diperoleh akar-akar persamaan karakteristik dari sistem nonlinear, perlu diselidiki apakah titik tetap sistem merupakan titik tetap hiperbolik atau nonhiperbolik.

## 2.6 Titik Tetap Hiperbolik

Perilaku sistem nonlinear diwakili oleh bagian linearnya. Akan tetapi, tidak menutup kemungkinan dimana titik tetap sistem nonlinear bersifat stabil dalam bentuk linearnya, sedangkan titik tetap sistem bersifat tidak stabil dalam bentuk nonlinearnya, atau sebaliknya.

Jika titik tetap sistem nonlinear adalah titik tetap hiperbolik, maka perilaku sistem di persekitaran titik tetap sistem nonlinear pada dasarnya sama dengan bentuk linearnya.

### ***Definisi 2.2(Titik Tetap Hiperbolik)***[5]

*Misalkan  $x = \bar{x}$  merupakan titik tetap dari  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , maka  $\bar{x}$  adalah titik tetap hiperbolik jika tidak ada nilai-nilai karakteristik dari  $Df(\bar{x})$  yang mempunyai bagian real sama dengan nol.*

## 2.7 Kestabilan dan Struktur Topologi Lokal Titik Tetap Hiperbolik

Jika titik tetap sistem nonlinear adalah titik tetap hiperbolik, maka perilaku sistem di persekitaran titik tetap sistem nonlinear pada dasarnya sama dengan bentuk linearnya. Oleh karena itu, kestabilan dapat ditentukan seperti pada analisis kestabilan linear[6]. Secara sederhana, titik tetap sistem dikatakan stabil jika penyelesaian sistem mendekati titik tetapnya dan dikatakan stabil

asimtotis jika penyelesaian sistem tidak hanya mendekati, tetapi juga konvergen ke titik tetapnya.

Berikut ini diberikan teorema kestabilan asimtotis berdasarkan nilai karakteristik :

***Teorema 2.1(Kestabilan Asimtotis)***[7]

*Titik tetap  $x = \bar{x}$  dari sistem nonlinear stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai-nilai karakteristik dari  $Df(\bar{x})$  mempunyai bagian real yang bertanda negatif dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai-nilai karakteristik dari  $Df(\bar{x})$  mempunyai bagian real yang bertanda positif.*

Misalkan  $Df(\bar{x})$  mempunyai dua nilai karakteristik  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ , maka kriteria kestabilan dari titik tetap hiperbolik dan struktur topologi lokal berupa lintasan yang terbentuk di sekitar titik tetap berdasarkan nilai karakteristik dapat dilihat pada Tabel 2.1.

**Tabel 2.1** Kriteria Kestabilan Titik Tetap[8]

Nilai Eigen	Struktur Topologi	Kestabilan
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	simpul	Stabil asimtotis jika semua nilai karakteristik negatif, Tidak stabil jika semua nilai karakteristik positif.
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	sadel	Tidak stabil.
$\lambda_1 = a + ib$ $\lambda_2 = a - ib$	spiral	Stabil asimtotis jika bagian real nilai karakteristik negatif, Tidak stabil jika bagian real nilai karakteristik positif.

## 2.8 Kestabilan dan Struktur Topologi Lokal Titik Tetap Nonhiperbolik

Jika titik tetap sistem nonlinear adalah titik tetap nonhiperbolik, maka kestabilan ditentukan dengan mereduksi sistem menjadi sistem berdimensi lebih rendah dengan menggunakan teorema center manifold[9]. Dalam hal ini, sistem nonlinear perlu dicari bentuk normalnya.

### 2.8.1 Manifold Invarian[5]

Sebagai pengantar, diberikan pengertian himpunan invarian dan manifold invarian sebagai berikut :

#### **Definisi 2.3(Himpunan Invarian)**

Misalkan  $S \subset \mathbb{R}^n$  adalah suatu himpunan, maka  $S$  dikatakan invarian terhadap medan vektor  $\dot{x} = f(x)$  jika untuk setiap  $x_0 \in S$ , terdapat  $(t, 0, x_0) \in S ; t \in \mathbb{R}$  (dengan  $x(0, 0, x_0) = x_0$ ).

#### **Definisi 2.4(Manifold Invarian)**

Himpunan invarian  $S \subset \mathbb{R}^n$  disebut manifold invarian  $\mathbb{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) jika  $S$  mempunyai struktur manifold differensial  $\mathbb{C}^r$ . Himpunan invarian positif  $S \subset \mathbb{R}^n$  dikatakan manifold invarian positif jika  $S$  mempunyai struktur manifold differensial  $\mathbb{C}^r$ . Himpunan invarian negatif  $S \subset \mathbb{R}^n$  dikatakan manifold invarian negatif jika  $S$  mempunyai struktur manifold differensial  $\mathbb{C}^r$ .

Secara sederhana, manifold adalah permukaan dimensi- $m$  di  $\mathbb{R}^n$  yang dapat direpresentasikan sebagai sebuah grafik.

Setiap sistem memiliki manifold invarian berikut ini :

$$\begin{aligned} E^c &= \text{span} \{ \vec{V}_i \mid \text{Re}(\lambda_i) = 0 \}, \\ E^s &= \text{span} \{ \vec{V}_i \mid \text{Re}(\lambda_i) < 0 \}, \\ E^u &= \text{span} \{ \vec{V}_i \mid \text{Re}(\lambda_i) > 0 \}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Jika  $E^u = \emptyset$  dan  $E^s \neq \emptyset$ ,  $E^c \neq \emptyset$ , maka orbit akan mendekati  $E^c$ . Pada kondisi ini, analisis kestabilan sistem dapat dilakukan terbatas pada  $E^c$  berdasarkan prinsip reduksi pada center manifold.

### 2.8.2 Center Manifold[5]

Pandang medan vektor berikut ini :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y) \end{aligned}, (x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \quad (2.10)$$

$$\text{dengan } \begin{aligned} f(0,0) &= 0, & Df(0,0) &= 0, \\ g(0,0) &= 0, & Dg(0,0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

artinya titik  $(0,0)$  merupakan titik tetap dan medan vektor menyinggung titik tetap  $(0,0)$  (sifat manifold invarian).

$A$  adalah matriks  $c \times c$  yang mempunyai nilai karakteristik dengan bagian real sama dengan nol,  $B$  adalah matriks  $s \times s$  yang mempunyai nilai karakteristik dengan bagian real negatif, dan  $f, g \in \mathbb{C}^r (r \geq 2)$ .

#### **Definisi 2.5(Center Manifold)**

*Manifold Invarian disebut center manifold jika (2.10) dapat dinyatakan sebagai*

$$\begin{aligned} W^c(0) &= \\ & \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s | y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

dengan  $\delta$  sangat kecil.

Kondisi  $h(0) = 0$  dan  $Dh(0) = 0$  menunjukkan bahwa  $W^c(0)$  menyinggung  $E^c$  di titik  $(0,0)$ .

#### **Teorema 2.2(Eksistensi)**

*Terdapat  $\mathbb{C}^r$  center manifold untuk (2.10). Dinamika (2.10) terbatas pada center manifold untuk  $u$  yang sangat kecil, yang diberikan oleh medan vektor dimensi- $c$*

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)), \quad u \in \mathbb{R}^c. \quad (2.13)$$

#### **Teorema 2.3(Kestabilan)**

*i) Jika titik tetap dari (2.13) stabil asimtotis/tidak stabil, maka titik tetap (2.10) masing-masing juga stabil asimtotis/tidak stabil.*

ii) Jika titik tetap dari (2.13) stabil, maka jika  $(x(t), y(t))$  adalah penyelesaian dari (2.10) dengan  $(x(0), y(0))$  di sekitar  $(0,0)$ , terdapat penyelesaian  $u(t)$  dari (2.13) sedemikian hingga untuk  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}x(t) &= u(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}), \\y(t) &= h(u(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}),\end{aligned}\quad (2.14)$$

dengan  $\gamma > 0$  konstanta.

Langkah-langkah mendapatkan center manifold :

1) Koordinat  $(x, y)$  untuk setiap titik pada  $W^c(0)$  harus memenuhi

$$y = h(x). \quad (2.15)$$

2) Differensialkan (2.15) terhadap waktu sehingga koordinat  $(\dot{x}, \dot{y})$  dari setiap titik pada  $W^c(0)$  memenuhi

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x}. \quad (2.16)$$

3) Setiap titik dari  $W^c(0)$  memenuhi dinamika yang dibangun (2.10) sehingga

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f(x, h(x)) \\ \dot{y} &= Bh(x) + g(x, h(x))\end{aligned}\quad (2.17)$$

dan (2.16) menjadi

$$Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] = Bh(x) + g(x, h(x)) \quad (2.18)$$

Center manifold diperoleh dengan menyelesaikan (2.18).

### 2.8.3 Bentuk Normal[5]

Metode transformasi koordinat untuk menentukan sistem koordinat dimana sistem memiliki bentuk yang paling sederhana adalah metode bentuk normal. Pandang medan vektor berikut ini :

$$\dot{w} = G(w), \quad w \in \mathbb{R}^n, \quad (2.19)$$

dengan  $G$  adalah  $\mathbb{C}^r$ , dengan  $r$  tertentu. Misalkan (2.19) mempunyai titik tetap di  $w = w_0$ .

Langkah-langkah mencari bentuk normal :

1) Transformasikan titik tetap sistem ke titik asal dengan translasi

$$x = w - w_0, \quad v \in \mathbb{R}^n,$$



sehingga (2.19) menjadi

$$\dot{x} = G(x + w_0) \equiv H(x). \quad (2.20)$$

- 2) Pisahkan bagian linear sistem nonlinear dengan menulis kembali (2.20) menjadi

$$\dot{x} = DH(0)x + \bar{H}(x), \quad (2.21)$$

dengan  $\bar{H}(x) \equiv H(x) - DH(0)x$ .

- 3) Misalkan  $T$  adalah matriks yang mentransformasikan matriks  $DH(0)$  ke bentuk blok kanonik Jordan sehingga

$$x = Tv, \quad (2.22)$$

dan (2.21) menjadi

$$\dot{v} = T^{-1}DH(0)Tv + T^{-1}\bar{H}(Tv). \quad (2.23)$$

Misalkan  $J$  adalah bentuk blok kanonik Jordan dari  $DH(0)$

$$J \equiv T^{-1}DH(0)T, \quad (2.24)$$

$$J \equiv \begin{bmatrix} A_c & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_u \end{bmatrix}$$

dengan  $A_c$  adalah matriks  $c \times c$  yang memiliki  $Re(\lambda_i) = 0$ ,

$A_s$  adalah matriks  $s \times s$  yang memiliki  $Re(\lambda_i) < 0$ ,

$A_u$  adalah matriks  $u \times u$  yang memiliki  $Re(\lambda_i) > 0$ ,

" $\mathbf{0}$ " tidak skalar (menyesuaikan ukuran matriks),

dan misalkan

$$F(v) \equiv T^{-1}\bar{H}(Tv).$$

sehingga (2.23) dapat ditulis menjadi

$$\dot{v} = Jv + F(v), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.25)$$

Bentuk (2.25) adalah bentuk normal.

## 2.8.4 Bifurkasi Hopf[5]

Bifurkasi Hopf terjadi pada sistem nonlinear apabila sistem tersebut mempunyai titik tetap nonhiperbolik dan matriks linearisasinya mempunyai sepasang bilangan kompleks dengan nilai karakteristik bagian real bernilai nol dan bagian imajiner tidak sama dengan nol (imajiner murni). Terjadinya bifurkasi Hopf menunjukkan eksistensi lintasan tertutup yang mengelilingi titik tetap tertentu (orbit periodik) dari suatu sistem.

Diberikan sistem

$$\dot{y} = g(y, \lambda), \quad y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^p, \quad (2.26)$$

dengan  $g$  adalah  $\mathbb{C}^r$ .

Misalkan  $(y_0, \lambda_0)$  adalah titik tetap dari (2.26) sehingga linearisasi (2.26) di sekitar titik tetap

$$\dot{\xi} = D_y g(y_0, \lambda_0) \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (2.27)$$

mempunyai sepasang nilai karakteristik imajiner murni, sedangkan  $(n - 2)$  nilai karakteristik sisanya mempunyai bagian real tak nol.

Sistem (2.6) memiliki bentuk sistem dua dimensi pada center manifoldnya, yaitu

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \lambda(\mu) & -\operatorname{Im} \lambda(\mu) \\ \operatorname{Im} \lambda(\mu) & \operatorname{Re} \lambda(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(x, y, \mu) \\ f_2(x, y, \mu) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

dengan  $x, y, \mu \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ ;  $f_1$  dan  $f_2$  nonlinear pada  $x$  dan  $y$ .

Misalkan nilai karakteristik dari  $D_y g(y_0, \lambda_0)$  adalah

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$$

dengan  $\alpha(0) = 0$ ,  $\omega(0) \neq 0$ , dan  $\mu = 0$  menunjukkan terjadinya bifurkasi Hopf. Untuk mendapatkan bentuk normal yang memenuhi (2.28), diberikan langkah-langkah sebagai berikut :

- 1) Translasikan titik tetap  $(y_0, \lambda_0)$  ke titik asal  $(0,0)$ .
- 2) Dengan transformasi koordinat, ubah (2.27) ke bentuk kanonik Jordan sehingga diperoleh bentuk normal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(\mu)x - \omega(\mu)y + (a(\mu)x - b(\mu)y)(x^2 + y^2) \\ &\quad + \mathcal{O}(|x|^5, |y|^5) \\ \dot{y} &= \omega(\mu)x + \alpha(\mu)y + (b(\mu)x + a(\mu)y)(x^2 + y^2) \\ &\quad + \mathcal{O}(|x|^5, |y|^5). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Bentuk normal (2.29) memiliki bentuk polar

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha(\mu)r + a(\mu)r^3 + \mathcal{O}(r^5) \\ \dot{\theta} &= \omega(\mu) + b(\mu)r^2 + \mathcal{O}(r^4) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dinamika di sekitar  $\mu = 0$  diperoleh dengan ekspansi deret Taylor sehingga (2.30) menjadi

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha'(0)\mu r + a(0)r^3 + \mathcal{O}(\mu^2 r, \mu r^3, r^5) \\ \dot{\theta} &= \omega(0) + \omega'(0)\mu + b(0)r^2 + \mathcal{O}(\mu^2, \mu r^2, r^4)\end{aligned}\quad (2.31)$$

atau dalam bentuk sederhana dapat ditulis

$$\begin{aligned}\dot{r} &= d\mu r + ar^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2\end{aligned}\quad (2.32)$$

dengan  $\alpha'(0) = d$ ,  $a(0) = a$ ,  $\omega(0) = \omega$ ,  
 $\omega'(0) = c$ , dan  $b(0) = b$ .

**Lemma 2.1(Orbit Periodik)**

Orbit periodik dari (2.32) adalah

$$(r(t), \theta(t)) = \left( \sqrt{\frac{-\mu d}{a}}, \left[ \omega + \left( c - \frac{bd}{a} \right) \mu \right] t + \theta_0 \right) \quad (2.33)$$

dengan  $-\infty < \frac{\mu d}{a} < 0$  dan  $\mu$  sangat kecil.

**Lemma 2.2(Kestabilan Orbit Periodik)**

Orbit periodik stabil asimtotis jika  $a < 0$  dan tidak stabil jika  $a > 0$ .

Penjelasan singkat mengenai bifurkasi Hopf dapat dilihat pada teorema berikut ini.

**Teorema 2.4(Bifurkasi Hopf)**

Diberikan suatu sistem dinamik

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu)\end{aligned}\quad (2.34)$$

dengan  $\mu$  merupakan parameter tertentu ( $\mu = \bar{\mu}$ ),  $f(0,0,\mu) = 0$  dan  $g(0,0,\mu) = 0$ . Jika syarat berikut terpenuhi :

- a. Matriks Jacobi yang dihitung di sekitar titik tetap mempunyai sepasang nilai karakteristik imajiner murni,  
 $\lambda(\bar{\mu}) = \alpha(\bar{\mu}) \pm i\omega(\bar{\mu})$  dengan  $\alpha(\bar{\mu}) = 0$  dan  $\omega(\bar{\mu}) \neq 0$
- b. Nilai-nilai karakteristik imajiner murni berlaku syarat transversal

$$d = \frac{d}{d\mu} \{Re(\lambda(\mu))\}_{\mu=\bar{\mu}} \neq 0 \quad (2.35)$$

maka pada sistem dinamik (2.34) terjadi bifurkasi Hopf yang ditandai dengan munculnya orbit periodik (limit cycle) dimana pada saat terjadi bifurkasi Hopf, (2.34) memiliki bentuk normal yaitu

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega(\bar{\mu}) \\ \omega(\bar{\mu}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(x, y, \bar{\mu}) \\ F_2(x, y, \bar{\mu}) \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Stabilitas dari orbit periodik dapat dicari dengan menggunakan indeks stabilitas

$$\begin{aligned} a = & \frac{1}{16} \left( \frac{\partial^3 F_1}{\partial u^3} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial u^2 \partial v} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial u \partial v^2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial v^3} \right) \\ & + \frac{1}{16\omega(c)} \left[ \frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} \right) \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial v} \right) \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} \right) - \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

dengan turunan parsial terhadap  $(0,0,\bar{\mu})$ ,  $\bar{\mu}$  nilai parameter saat terjadi bifurkasi Hopf. Jika  $a < 0$ , maka orbit periodik stabil (terjadi bifurkasi superkritikal Hopf) dan jika  $a > 0$ , maka orbit periodik tidak stabil (terjadi bifurkasi subkritikal Hopf).

Berdasarkan teorema bifurkasi Hopf, langkah-langkah untuk mendapatkan bifurkasi Hopf sebagai berikut :

1. Menentukan titik tetap dari sistem dinamik.
2. Menentukan nilai karakteristik dari matriks Jacobian sistem di sekitar titik tetap.
3. Jika satu atau lebih titik tetap mempunyai sepasang nilai karakteristik kompleks, maka dicari nilai parameter sehingga ditemukan sepasang nilai karakteristik imajiner murni dan hitung syarat transversal.
4. Menentukan kestabilan dengan menggunakan indeks stabilitas. Sebelum menghitung indeks stabilitas, dicari bentuk normal bifurkasi Hopf terlebih dahulu.

Setelah analisis kestabilan, struktur topologi, dan bifurkasi Hopf pada sistem keuangan, selanjutnya dicari penyelesaian numerik dari model tersebut dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta Orde-4 dan disimulasikan dengan menggunakan MATLAB.

## 2.9 Metode Numerik Runge-Kutta Orde-4

Metode Runge-Kutta merupakan pengembangan dari metode Euler. Metode Euler merupakan metode perhitungan solusi numerik yang dilakukan langkah demi langkah dengan menggunakan pendekatan garis singgung. Diberikan persamaan differensial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.38)$$

dan titik pendekatan awal  $(t_0, y_0)$ . Dengan metode Euler, diperoleh penyelesaian dari persamaan (2.38) sebagai berikut

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j). \quad (2.39)$$

dengan  $h = \Delta t$ .

Pada metode Runge-Kutta orde-4, digunakan empat nilai koefisien perbaikan yaitu  $k_1, k_2, k_3$ , dan  $k_4$  pada fungsi penyelesaian persamaan (2.39) sehingga penyelesaian dari persamaan differensial (2.38) menjadi

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.40)$$

dengan  $k_1 = hf(t_j, y_j)$ ,

$$k_2 = hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = hf(t_j + h, y_j + k_3)[10].$$

## **BAB III METODE PENELITIAN**

Bab ini menguraikan metode yang digunakan dalam penelitian secara rinci. Metodologi penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penelitian dapat berjalan sistematis.

### **3.1 Studi Literatur**

Tahap ini merupakan tahap untuk melakukan identifikasi permasalahan, yaitu mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi bisa berupa tugas akhir, jurnal, buku, maupun artikel terkait.

### **3.2 Mengkaji Model Sistem Keuangan**

Pada tahap ini, dilakukan kajian terhadap model sistem keuangan agar representasi dinamika sistem keuangan dalam kehidupan nyata dapat dipahami melalui model sistem keuangan.

### **3.3 Mencari Titik Tetap**

Pada tahap ini, dicari titik tetap dari model sistem keuangan, yaitu titik yang diperoleh ketika sistem dalam keadaan stasioner atau ketika tidak terjadi perubahan terhadap waktu.

### **3.4 Translasi Titik Tetap**

Pada tahap ini, dilakukan translasi titik tetap sistem ke titik asal untuk mempermudah analisis kestabilan, struktur topologi sistem dan eksistensi bifurkasi Hopf pada model sistem keuangan.

### **3.5 Linearisasi Sistem Nonlinear**

Pada tahap ini, dilakukan pelinearan terhadap sistem model sistem keuangan karena model sistem keuangan adalah model sistem dinamik nonlinear.

### **3.6 Mencari Akar-akar Persamaan Karakteristik Sistem**

Pada tahap ini, dicari akar-akar persamaan karakteristik sistem untuk menentukan apakah titik tetap merupakan titik tetap hiperbolik atau nonhiperbolik.

### **3.7 Menentukan Kestabilan dan Struktur Topologi Lokal Titik Tetap Hiperbolik**

Pada tahap ini, diselidiki kestabilan dari titik tetap hiperbolik sistem dan struktur topologi di sekitar titik tetap dengan menggunakan akar-akar persamaan karakteristik sistem.

### **3.8 Menentukan Kestabilan dan Struktur Topologi Lokal Titik Tetap Nonhiperbolik**

Pada tahap ini, diselidiki kestabilan dari titik tetap nonhiperbolik sistem dan struktur topologi di sekitar titik tetap dengan mereduksi sistem menjadi sistem berdimensi lebih rendah dengan menggunakan teorema center manifold. Selanjutnya, kestabilan diperoleh berdasarkan teorema bifurkasi.

#### **3.8.1 Menyelidiki Eksistensi Bifurkasi Hopf**

Pada tahap ini, dilakukan analisis titik tetap yang mempunyai sepasang nilai karakteristik imajiner murni, yaitu dengan mencari nilai parameter yang menyebabkan adanya sepasang nilai karakteristik imajiner murni dan menghitung syarat transversal bifurkasi Hopf. Selanjutnya, kestabilan ditentukan dengan menggunakan indeks stabilitas.

### **3.9 Simulasi Numerik**

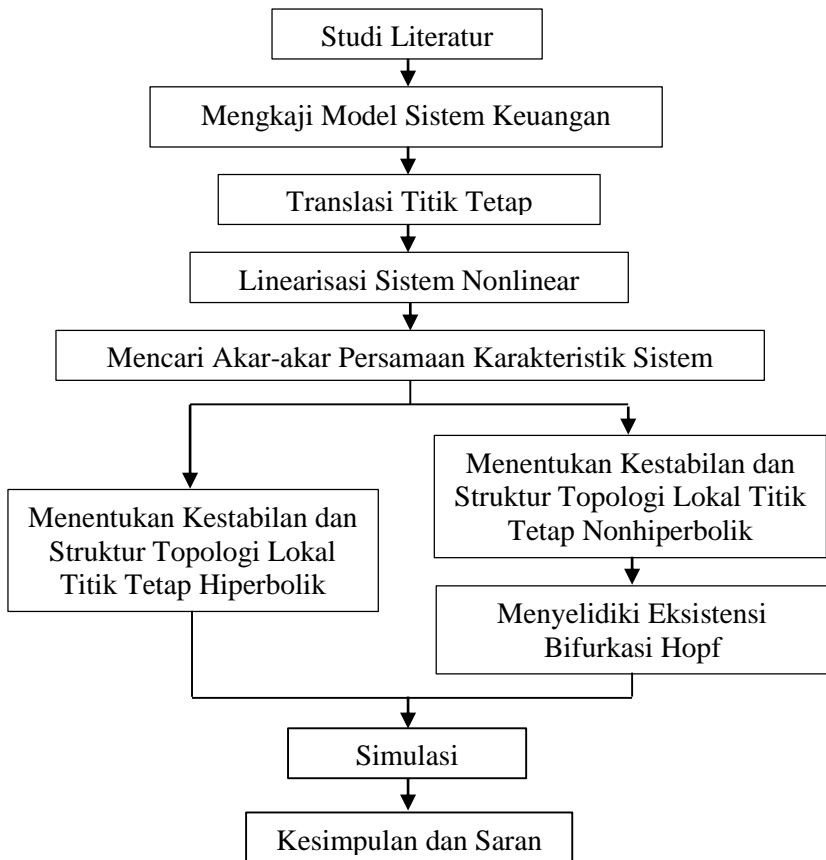
Pada tahap ini, dilakukan analisis hubungan antara bilangan reproduksi dasar dan stabilitas titik kesetimbangan dengan metode numerik Runge Kutta orde 4, menggunakan MATLAB.

### 3.10 Kesimpulan dan Saran

Pada tahap terakhir ini, dilakukan penarikan simpulan dari hasil pembahasan sebelumnya. Selanjutnya, diberikan saran untuk perbaikan pada penelitian berikutnya.

### 3.11 Diagram Alir

Pada tahap ini disusun diagram alir pada **Gambar 3.1** sebagai langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian.



**Gambar 3.1** Diagram Alir Penelitian



*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **BAB IV**

### **ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Pada bab ini, dibahas mengenai representasi sistem keuangan pada model sistem keuangan, titik tetap model sistem keuangan, penentuan kestabilan dan struktur topologi lokal model sistem keuangan, serta analisis bifurkasi Hopf dari model sistem keuangan. Selanjutnya, ditentukan penyelesaian numerik dari model sistem keuangan dan disimulasikan dengan menggunakan MATLAB.

#### **4.1 Model Sistem Keuangan**

Sistem keuangan merupakan suatu sistem yang mengatur transfer dana antara pihak yang kelebihan dana dan pihak yang membutuhkan dana agar tercapai alokasi dana yang efisien serta menyediakan fasilitas keuangan dalam pengelolaan dana. Sistem keuangan secara sederhana dapat diartikan sebagai suatu proses intermediasi keuangan.

Dinamika sistem keuangan menggambarkan hubungan antara faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jalannya sistem keuangan. Faktor-faktor yang sangat berpengaruh terhadap jalannya sistem keuangan, yaitu :

1. Suku Bunga  
Suku bunga merupakan persentase dari pokok pinjaman yang dibayarkan sebagai imbal jasa (bunga) dalam suatu periode tertentu.
2. Tingkat Permintaan Investasi  
Permintaan investasi merupakan banyaknya permintaan terkait pengeluaran dalam kegiatan produksi atau pada sesuatu yang bertujuan untuk penanaman modal dengan harapan memperoleh keuntungan. Tingkat permintaan investasi merupakan perbandingan antara jumlah permintaan investasi pada waktu tertentu dan jumlah permintaan investasi pada tahun dasar.
3. Indeks Harga Instrumen Keuangan

Indeks harga merupakan persentase dari harga rata-rata pada waktu tertentu dibandingkan harga rata-rata waktu dasar.

4. Tabungan  
Tabungan merupakan simpanan yang dibuat dengan menekan kegiatan konsumsi untuk mendapatkan konsumsi yang lebih baik di masa mendatang.
5. Biaya Per-Investasi  
Biaya per-investasi merupakan biaya yang harus dikeluarkan untuk setiap unit investasi.
6. Elastisitas Permintaan  
Elastisitas permintaan merupakan ukuran kepekaan perubahan jumlah permintaan terhadap perubahan harga (perbandingan antara persentase jumlah permintaan dan persentase perubahan harga).
7. Tingkat Keuntungan Investasi  
Tingkat keuntungan investasi merupakan perbandingan antara keuntungan investasi pada waktu tertentu dan keuntungan investasi pada waktu dasar.

Faktor-faktor di atas saling mempengaruhi satu sama lain dan menyebabkan terjadinya fenomena-fenomena pada sistem keuangan yang dapat digambarkan dalam model matematika. Fenomena-fenomena tersebut antara lain :

a) Laju perubahan suku bunga

Laju perubahan suku bunga dalam sistem keuangan dipengaruhi oleh tinggi rendahnya harga instrumen keuangan serta surplus antara suku bunga yang dibayarkan untuk investasi dan suku bunga yang diperoleh dari tabungan secara keseluruhan.

Jika suku bunga pada waktu tertentu tinggi, maka harga instrumen keuangan akan rendah. Tingginya suku bunga juga menyebabkan pelaku-pelaku ekonomi lebih memilih untuk menabung daripada melakukan investasi, sehingga total bunga yang dibayarkan untuk seluruh investasi dengan uang pinjaman di bank akan rendah dan total bunga tabungan yang diperoleh seluruh penabung di bank akan tinggi. Pada kondisi

tersebut, total kegiatan produksi akan berkurang untuk total konsumsi yang sama di dalam masyarakat. Akibatnya, uang yang beredar di masyarakat akan berkurang, sedangkan uang yang ada di bank akan bertambah. Jika kondisi ini terjadi terus-menerus, maka suku bunga akan diturunkan pada kurun waktu selanjutnya supaya konsumsi masyarakat dapat terus terpenuhi.

Jika suku bunga pada waktu tertentu rendah, maka harga instrumen keuangan akan tinggi. Rendahnya suku bunga juga menyebabkan pelaku-pelaku ekonomi lebih memilih untuk melakukan investasi daripada menabung, sehingga total bunga yang dibayarkan untuk seluruh investasi dengan uang pinjaman di bank akan tinggi dan total bunga tabungan yang diperoleh seluruh penabung di bank akan rendah. Pada kondisi tersebut, total kegiatan produksi akan bertambah untuk total konsumsi yang sama di dalam masyarakat. Akibatnya, uang yang beredar di masyarakat akan bertambah, sedangkan uang yang ada di bank akan berkurang. Jika kondisi ini terjadi secara terus-menerus, maka suku bunga akan dinaikkan pada kurun waktu selanjutnya untuk mencegah terjadinya inflasi.

b) Laju perubahan tingkat permintaan investasi

Laju perubahan tingkat permintaan investasi dalam sistem keuangan dipengaruhi oleh tingkat keuntungan investasi, tinggi rendahnya suku bunga dan total biaya investasi.

Jika suku bunga pada waktu tertentu sangat tinggi, maka total biaya investasi akan tinggi dan tingkat keuntungan investasi akan rendah. Jika kondisi ini terjadi, maka permintaan investasi pada kurun waktu selanjutnya akan rendah karena para pelaku ekonomi lebih memilih untuk menabung dengan suku bunga yang sangat tinggi daripada melakukan investasi.

Jika suku bunga pada waktu tertentu sangat rendah, maka total biaya investasi akan rendah dan tingkat keuntungan

investasi akan tinggi. Jika kondisi ini terjadi, maka permintaan investasi pada kurun waktu selanjutnya akan tinggi karena para pelaku ekonomi lebih memilih untuk melakukan investasi dari pada menabung dengan suku bunga yang sangat rendah.

c) Laju perubahan indeks harga instrumen keuangan

Laju perubahan indeks harga instrumen keuangan dipengaruhi oleh tinggi rendahnya jumlah permintaan serta tinggi rendahnya tingkat inflasi. Tinggi rendahnya jumlah permintaan direpresentasikan oleh elastisitas permintaan dan indeks harga instrumen keuangan, sedangkan tinggi rendahnya tingkat inflasi direpresentasikan oleh suku bunga.

Jika suku bunga pada waktu tertentu tinggi, maka harga instrumen keuangan akan rendah dan elastisitas permintaan akan rendah. Akibatnya, uang yang beredar di masyarakat sedikit karena para pelaku ekonomi lebih memilih untuk menabung dengan suku bunga yang tinggi daripada berinvestasi. Jika kondisi ini terjadi terus-menerus, maka harga instrumen keuangan pada kurun waktu selanjutnya akan naik (ditandai dengan naiknya indeks harga) seiring dengan diturunkannya suku bunga.

Jika suku bunga pada waktu tertentu rendah, maka harga instrumen keuangan akan tinggi, dan elastisitas permintaan akan tinggi. Akibatnya, uang yang beredar di masyarakat banyak karena pelaku ekonomi lebih memilih untuk berinvestasi daripada menabung dengan suku bunga rendah. Jika kondisi ini terjadi terus-menerus, maka harga instrumen keuangan pada kurun waktu selanjutnya akan turun (ditandai dengan turunnya indeks harga) seiring dengan dinaikannya suku bunga untuk mencegah inflasi.

Misalkan

- $x$  : suku bunga
- $y$  : tingkat permintaan investasi
- $z$  : indeks harga instrumen keuangan
- $a$  : tabungan

$b$  : biaya per investasi

$c$  : elastisitas permintaan

BEN : tingkat keuntungan investasi, dan

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  adalah laju perubahan suku bunga

$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$  adalah laju perubahan tingkat permintaan investasi

$\dot{z} = \frac{dz}{dt}$  adalah laju perubahan indeks harga instrumen keuangan,

maka fenomena-fenomena di atas dapat direpresentasikan ke dalam model dinamik nonlinear di bawah ini :

$$\begin{cases} \dot{x} = z + xy - ax \\ \dot{y} = BEN - by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz \end{cases}$$

dengan  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , dan  $c \geq 0$ .

Jika diasumsikan tingkat keuntungan investasi adalah konstan pada kurun waktu tertentu sehingga  $BEN = 1$ , maka diperoleh model sistem keuangan sebagai berikut :

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz \end{cases} \quad (4.1)$$

dengan  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , dan  $c \geq 0$ .

## 4.2 Titik Tetap Sistem

Titik tetap  $E(x_0, y_0, z_0)$  adalah titik yang diperoleh ketika sistem keuangan berada pada keadaan stasioner. Keadaan stasioner adalah keadaan dimana tidak terjadi perubahan pada suku bunga, tingkat permintaan investasi, dan indeks harga seiring dengan perubahan waktu. Titik tetap dari sistem (4.1) diperoleh ketika laju perubahan suku bunga, laju perubahan tingkat permintaan investasi, dan laju perubahan indeks harga sama dengan nol, yaitu

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = \dot{z} = 0 \end{cases}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{cases} z + (y - a)x = 0 \\ 1 - by - x^2 = 0 \\ -x - cz = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Selanjutnya, dicari himpunan penyelesaian dari sistem persamaan (4.2) sebagai berikut :

- Penyelesaian persamaan (4.2) yang ketiga

$$-x - cz = 0$$

$$x = -cz$$

- Substitusi  $x = -cz$  pada persamaan (4.2) yang kedua

$$1 - by - x^2 = 0$$

$$1 - by - (-cz)^2 = 0$$

$$-by = (-cz)^2 - 1$$

$$y = \frac{(-cz)^2 - 1}{-b}$$

$$y = \frac{(cz)^2 - 1}{-b}$$

- Substitusi  $x = -cz$  dan  $y = \frac{(cz)^2 - 1}{-b}$  pada persamaan (4.2) yang pertama

$$z + (y - a)x = 0$$

$$z + \left( \frac{(cz)^2 - 1}{-b} - a \right) (-cz) = 0$$

$$z + \frac{(cz)^2 - 1}{b} cz + acz = 0$$

$$\frac{bz + (cz)^3 - cz + abc}{b} = 0$$

$$bz + (cz)^3 - cz + abc = 0 \text{ dan } b \neq 0$$

$$(cz)^3 + bz - cz + abc = 0$$

$$z(c^3z^2 + b - c + abc) = 0$$

sehingga diperoleh

$$z_1 = 0 \text{ atau } c^3z^2 + b - c + abc = 0$$

$$c^3z^2 - (b + c - abc) = 0$$

$$z^2 - \frac{b + c - abc}{c^3} = 0$$

$$z^2 = \frac{b + c - abc}{c^3}$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{c - b - abc}{c^3}}$$

$$z_{2,3} = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}$$

Berdasarkan perhitungan di atas, maka titik tetap yang diperoleh bergantung dalam dua kondisi, yaitu :

1. Jika  $c - b - abc \leq 0$ , maka diperoleh  $z_1 = 0$  dan  $z_{2,3}$  bernilai imajiner ( $Re(z) = 0$ ). Karena  $z$  adalah indeks harga dan indeks harga tidak mungkin bernilai imajiner, maka diperoleh hanya satu penyelesaian untuk  $z$  sehingga

$$z_0 = 0$$

$$x_0 = -cz = 0$$

$$y_0 = \frac{(cz)^2 - 1}{-b} = \frac{0 - 1}{-b} = \frac{1}{b}$$

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(0, \frac{1}{b}, 0\right).$$

Pada kondisi ini, diperoleh satu titik tetap  $E_0 \left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$ .

2. Jika  $c - b - abc > 0$ , maka diperoleh  $z_1 = 0$  dan  $z_{2,3} = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}$ .

- Untuk  $z_1 = 0$ , maka

$$z_0 = 0$$

$$x_0 = -cz = 0$$

$$y_0 = \frac{(cz)^2 - 1}{-b} = \frac{0 - 1}{-b} = \frac{1}{b}$$

$$(x_0, y_0, z_0) = \left(0, \frac{1}{b}, 0\right).$$

- Untuk  $z_{2,3} = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c - b - abc}{c}}$ , maka



$$\begin{aligned}
z_0 &= \pm \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} \\
x_0 &= -cz = -c \left( \pm \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} \right) = \mp \sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} \\
y_0 &= \frac{(cz)^2 - 1}{-b} \\
&= \left( \frac{c-b-abc}{c} - 1 \right) \left( \frac{1}{-b} \right) \\
&= \left( \frac{-b-abc}{c} \right) \left( \frac{1}{-b} \right) \\
&= \frac{1+ac}{c} \\
(x_0, y_0, z_0) &= \left( \mp \sqrt{\frac{c-b-abc}{c}}, \frac{1+ac}{c}, \pm \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} \right).
\end{aligned}$$

Pada kondisi ini, diperoleh tiga titik tetap

$$E_1 \left( 0, \frac{1}{b}, 0 \right),$$

$$E_2 \left( -\sqrt{\frac{c-b-abc}{c}}, \frac{1+ac}{c}, \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} \right),$$

dan

$$E_3 \left( \sqrt{\frac{c-b-abc}{c}}, \frac{1+ac}{c}, -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{c-b-abc}{c}} \right).$$

### 4.3 Analisis Kestabilan dan Struktur Topologi Lokal

Analisis kestabilan dan struktur topologi lokal digunakan untuk mengetahui perilaku sistem keuangan. Pada Tugas Akhir ini, dilakukan analisis kestabilan dan struktur topologi lokal sistem pada titik tetap  $E_0 \left( 0, \frac{1}{b}, 0 \right)$  yang diperoleh ketika  $c - b - abc \leq 0$ .

### 4.3.1 Translasi Titik Tetap

Sistem (4.1) ditranslasi terlebih dahulu sehingga titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$  bergeser menjadi  $E_0(0,0,0)$ . Hal ini dilakukan untuk mempermudah analisis kestabilan dan struktur topologi sistem.

Transformasi :

$$X = x - 0 \rightarrow x = X$$

$$Y = y - \frac{1}{b} \rightarrow y = Y + \frac{1}{b}$$

$$Z = z - 0 \rightarrow z = Z$$

sehingga

- $\dot{x} = z + (y - a)x$   
 $\dot{X} = Z + \left(Y + \frac{1}{b} - a\right)X = \left(\frac{1}{b} - a\right)X + Z + XY$
- $\dot{y} = 1 - by - x^2$   
 $\dot{Y} = 1 - b\left(Y + \frac{1}{b}\right) - X^2 = 1 - bY - 1 - X^2 = -bY - X^2$
- $\dot{z} = -x - cz$   
 $\dot{Z} = -X - cZ$

Setelah ditransformasi, sistem (4.1) menjadi :

$$\begin{cases} \dot{X} = \left(\frac{1}{b} - a\right)X + Z + XY \\ \dot{Y} = -bY - X^2 \\ \dot{Z} = -X - cZ \end{cases} \quad (4.3)$$

### 4.3.2 Linearisasi Sistem

Sistem (4.3) merupakan sistem nonlinear. Oleh karena itu, sistem harus dlinearakan terlebih dahulu di sekitar titik tetap  $E_0(0,0,0)$ .

$$f(X, Y, Z) = \dot{X}$$

Misalkan  $A = g(X, Y, Z) = \dot{Y}$  dan  $DA$  adalah matriks Jacobian

$$h(X, Y, Z) = \dot{Z}$$

dari  $A$  yang merupakan bentuk linear dari sistem (4.3), maka

$$DA = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial Y} & \frac{\partial f}{\partial Z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial Y} & \frac{\partial g}{\partial Z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial Y} & \frac{\partial h}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \left(\frac{1}{b} - a\right) + Y & , & & \frac{\partial f}{\partial Y} &= X & , & & \frac{\partial f}{\partial Z} &= 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= -2X & , & & \frac{\partial g}{\partial Y} &= -b & , & & \frac{\partial g}{\partial Z} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= -1 & , & & \frac{\partial h}{\partial Y} &= 0 & , & & \frac{\partial h}{\partial Z} &= -c, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh matriks Jacobian dari sistem (4.3) adalah sebagai berikut :

$$DA = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial Y} & \frac{\partial f}{\partial Z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial Y} & \frac{\partial g}{\partial Z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial Y} & \frac{\partial h}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{b} - a\right) + Y & X & 1 \\ -2X & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix}.$$

Jacobian di sekitar titik tetap  $E_0(0,0,0)$ , yaitu :

$$DA_{(0,0,0)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{b} - a\right) & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix}$$

Bentuk linear  $DA_{(0,0,0)}$  tersebut dapat diperoleh juga dengan cara menuliskan sistem (4.3) dalam bentuk matriks dengan memisahkan bagian linear dan nonlinearnya sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} - a & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XY \\ -X^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

### 4.3.3 Akar-akar Persamaan Karakteristik Sistem

Dalam menentukan kestabilan dan struktur topologi sistem, diperlukan nilai karakteristik dari sistem. Berdasarkan Definisi 2.1, nilai karakteristik sistem dapat diperoleh dari Jacobian sistem

$DA_{(0,0,0)}$  yang memenuhi  $(DA_{(0,0,0)} - \lambda I)x = 0$  dengan  $\lambda$  adalah nilai karakteristik sistem dan  $x$  adalah vektor karakteristik sistem. Penyelesaian  $x$  tak nol jika dan hanya jika :

$$\begin{aligned}
 |DA_{(0,0,0)} - \lambda I| &= 0 \\
 \begin{vmatrix} \frac{1}{b} - a - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -b - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
 \left(\frac{1}{b} - a - \lambda\right) \begin{vmatrix} -b - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -b - \lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \\
 \left(\frac{1}{b} - a - \lambda\right) (-b - \lambda)(-c - \lambda) + (-b - \lambda) &= 0 \\
 (-b - \lambda) \left(\lambda^2 + \left(c + a - \frac{1}{b}\right)\lambda + ac - \frac{c}{b}\right) + (-b - \lambda) &= 0 \\
 -(\lambda + b) \left(\lambda^2 + \left(c + a - \frac{1}{b}\right)\lambda + ac - \frac{c}{b}\right) - (\lambda + b) &= 0 \\
 (\lambda + b) \left(\lambda^2 + \left(c + a - \frac{1}{b}\right)\lambda + ac - \frac{c}{b}\right) + (\lambda + b) &= 0 \\
 (\lambda + b) \left(\lambda^2 + \left(c + a - \frac{1}{b}\right)\lambda + 1 + ac - \frac{c}{b}\right) &= 0
 \end{aligned}$$

sehingga dapat diperoleh 3 nilai karakteristik sistem, yaitu :

$$\lambda_1 = -b \text{ dan } \lambda_{2,3} \text{ yang merupakan penyelesaian yang memenuhi } \left(\lambda^2 + \left(c + a - \frac{1}{b}\right)\lambda + 1 + ac - \frac{c}{b}\right) = 0 \quad (4.5)$$

Perlu diingat bahwa analisis kestabilan dan struktur topologi lokal dilakukan pada titik tetap sistem yang diperoleh ketika  $c - b - abc \leq 0$ . Oleh karena itu, kondisi ini juga harus digunakan untuk menentukan nilai karakteristik sistem. Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned}
 \text{untuk } c - b - abc \leq 0, \text{ maka } -\frac{1}{b}(c - b - abc) &\geq 0 \\
 1 + ac - \frac{c}{b} &\geq 0 \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

sehingga penyelesaian  $\lambda_{2,3}$  ditentukan untuk  $1 + ac - \frac{c}{b} \geq 0$ .

Penyelesaian  $\lambda_2$  dan  $\lambda_3$  yang merupakan penyelesaian dari  $\left(\lambda^2 + \left(c + a - \frac{1}{b}\right)\lambda + 1 + ac - \frac{c}{b}\right) = 0$  untuk  $1 + ac - \frac{c}{b} \geq 0$  dapat

dibagi dalam beberapa kemungkinan kasus sebagai berikut :

**Tabel 4.1** Kasus-kasus untuk penyelesaian nilai karakteristik sistem

No.	$1 + ac - \frac{c}{b}$	$c + a - \frac{1}{b}$
1.	$> 0$	$< 0$
2.	$> 0$	$> 0$
3.	$= 0$	$< 0$
4.	$= 0$	$> 0$
5.	$> 0$	$= 0$

Berikut ini analisis kestabilan dan struktur topologi lokal berdasarkan kasus-kasus yang sesuai pada Tabel.4.1 :

### KASUS 1

Jika  $1 + ac - \frac{c}{b} > 0$  dan  $c + a - \frac{1}{b} < 0$ , maka diperoleh  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 + ac - \frac{c}{b} > 0$  dan  $\lambda_2 + \lambda_3 = -\left(c + a - \frac{1}{b}\right) > 0$ .

Penyelesaian yang memenuhi  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$  dan  $\lambda_2 + \lambda_3 > 0$  yaitu :  
 $\lambda_2 > 0$  dan  $\lambda_3 > 0$ .

Karena  $\lambda_1 = -b < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , dan  $\lambda_3 > 0$ , maka berdasarkan Teorema 2.1 dan Tabel 2.1, titik tetap  $E_0(0,0,0)$  bersifat tidak stabil dengan struktur topologi berbentuk sadel.

Sistem (4.3) dengan titik tetap  $E_0(0,0,0)$  merupakan hasil translasi dari sistem (4.1) dengan titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$ , sehingga kedua sistem tersebut memiliki sifat yang sama. Oleh karena itu, titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$  juga bersifat **tidak stabil** dengan struktur topologi **berbentuk sadel**.

### KASUS 2

Jika  $1 + ac - \frac{c}{b} > 0$  dan  $c + a - \frac{1}{b} > 0$ , maka diperoleh  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 + ac - \frac{c}{b} > 0$  dan  $\lambda_2 + \lambda_3 = -\left(c + a - \frac{1}{b}\right) < 0$ .

Penyelesaian yang memenuhi  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0$  dan  $\lambda_2 + \lambda_3 < 0$  yaitu :  
 $\lambda_2 < 0$  dan  $\lambda_3 < 0$ .

Karena  $\lambda_1 = -b < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , dan  $\lambda_3 < 0$ , maka berdasarkan Teorema 2.1 dan Tabel 2.1, titik tetap  $E_0(0,0,0)$  bersifat stabil dengan struktur topologi berbentuk simpul.

Sistem (4.3) dengan titik tetap  $E_0(0,0,0)$  merupakan hasil translasi dari sistem (4.1) dengan titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$ , sehingga kedua sistem tersebut memiliki sifat yang sama. Oleh karena itu, titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$  juga bersifat **stabil asimtotis** dengan struktur topologi **berbentuk simpul**.

### KASUS 3

Jika  $1 + ac - \frac{c}{b} = 0$  dan  $c + a - \frac{1}{b} < 0$ , maka diperoleh  
 $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 + ac - \frac{c}{b} = 0$  dan  $\lambda_2 + \lambda_3 = -\left(c + a - \frac{1}{b}\right) > 0$ .

Perhatikan kembali persamaan karakteristik (4.5) sehingga

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\left(c + a - \frac{1}{b}\right) \pm \sqrt{\left(c + a - \frac{1}{b}\right)^2 - 4\left(1 + ac - \frac{c}{b}\right)}}{2}.$$

Karena  $1 + ac - \frac{c}{b} = 0$ , maka

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3} &= \frac{-\left(c + a - \frac{1}{b}\right) \pm \sqrt{\left(c + a - \frac{1}{b}\right)^2}}{2} \\ &= \frac{-\left(c + a - \frac{1}{b}\right) \pm \left(c + a - \frac{1}{b}\right)}{2} \\ &= \frac{-\left(c + a - \frac{1}{b}\right) \pm \left(c + a - \frac{1}{b}\right)}{2} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh  $\lambda_2 = 0$  dan  $\lambda_3 = -\left(c + a - \frac{1}{b}\right) > 0$ .

Perhatikan bahwa

$$1 + ac - \frac{c}{b} = 0$$

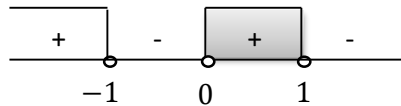
$$a = \frac{c-b}{bc}$$

$$a = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= -\left(c + a - \frac{1}{b}\right) \\ &= -\left(c + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) \\ &= -c + \frac{1}{c} \\ &= \frac{1-c^2}{c} > 0, \quad c \neq 0.\end{aligned}$$

Nilai  $c$  yang memenuhi  $\frac{1-c^2}{c} > 0$  dan syarat awal  $c \geq 0$  adalah  $0 < c < 1$ .



Jadi, nilai karakteristik yang memenuhi kasus ini adalah

$$\lambda_2 = 0 \text{ dan } \lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} > 0, \text{ dengan } 0 < c < 1.$$

Karena  $\lambda_1 = -b < 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ , dan  $\lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} > 0$  dengan  $0 < c < 1$ , maka berdasarkan Definisi 2.6, diperoleh titik tetap  $E_0(0,0,0)$  adalah titik tetap nonhiperbolik. Terdapat salah satu nilai karakteristik yang bernilai positif yang berarti bahwa titik tetap  $E_0(0,0,0)$  bersifat tidak stabil.

Sistem (4.3) dengan titik tetap  $E_0(0,0,0)$  merupakan hasil translasi dari sistem (4.1) dengan titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$ , sehingga kedua sistem tersebut memiliki sifat yang sama. Oleh karena itu, titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$  adalah **nonhiperbolik yang bersifat tidak stabil**.

**KASUS 4**

Jika  $1 + ac - \frac{c}{b} = 0$  dan  $c + a - \frac{1}{b} > 0$ , maka diperoleh  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 + ac - \frac{c}{b} = 0$  dan  $\lambda_2 + \lambda_3 = -\left(c + a - \frac{1}{b}\right) < 0$ . Perhatikan kembali persamaan karakteristik (4.5) sehingga

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(c + a - \frac{1}{b}) \pm \sqrt{(c + a - \frac{1}{b})^2 - 4(1 + ac - \frac{c}{b})}}{2}.$$

Karena  $1 + ac - \frac{c}{b} = 0$ , maka

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3} &= \frac{-(c + a - \frac{1}{b}) \pm \sqrt{(c + a - \frac{1}{b})^2}}{2} \\ &= \frac{-(c + a - \frac{1}{b}) \pm (c + a - \frac{1}{b})}{2} \\ &= \frac{-(c + a - \frac{1}{b}) \pm (c + a - \frac{1}{b})}{2} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh  $\lambda_2 = 0$  dan  $\lambda_3 = -(c + a - \frac{1}{b}) < 0$ .

Perhatikan bahwa

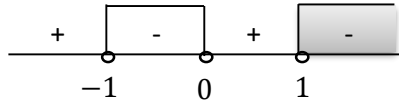
$$\begin{aligned} 1 + ac - \frac{c}{b} &= 0 \\ a &= \frac{c-b}{bc} \\ a &= \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= -\left(c + a - \frac{1}{b}\right) \\ &= -\left(c + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) \\ &= -c + \frac{1}{c} \\ &= \frac{1-c^2}{c} < 0, \quad c \neq 0. \end{aligned}$$



Nilai  $c$  yang memenuhi  $\frac{1-c^2}{c} < 0$  dan syarat awal  $c \geq 0$  adalah  $c > 1$ .



Nilai karakteristik yang memenuhi kasus ini, yaitu :

$$\lambda_2 = 0 \text{ dan } \lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} < 0, \text{ dengan } c > 1.$$

Karena  $\lambda_1 = -b < 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ , dan  $\lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} < 0$  dengan  $c > 1$ , maka berdasarkan Definisi 2.6, diperoleh titik tetap  $E_0(0,0,0)$  adalah titik tetap nonhiperbolik. Stabilitas dari titik tetap tersebut tidak dapat ditentukan dengan menggunakan matriks Jacobian  $DA_{(0,0,0)}$ . Oleh karena itu, stabilitas akan ditentukan dengan menggunakan pendekatan center manifold.

### Pendekatan Center Manifold

Menentukan kestabilan sistem nonlinear dengan titik setimbang nonhiperbolik menggunakan pendekatan center manifold dilakukan dengan mereduksi sistem menjadi sistem berdimensi lebih rendah. Sistem nonlinear perlu dicari bentuk normalnya terlebih dahulu.

#### *Bentuk Normal*

Bentuk normal dapat diperoleh dengan metode transformasi koordinat, yaitu :

1. Translasi titik tetap sistem (4.1) ke titik asal.

Translasi sudah dilakukan pada subbab 4.3.1 dan diperoleh sistem (4.3) :

$$\begin{cases} \dot{X} = \left(\frac{1}{b} - a\right)X + Z + XY \\ \dot{Y} = -bY - X^2 \\ \dot{Z} = -X - cZ \end{cases} .$$

2. Memisahkan bagian linear dan bagian nonlinear sistem (4.3). Perhatikan kembali sistem (4.4) :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} - a & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XY \\ -X^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pada kasus 4 ini, diketahui  $a = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ , sehingga sistem (4.4) dapat ditulis menjadi :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XY \\ -X^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

3. Transformasi bagian linear sistem (4.7) ke bentuk kanonik Jordan sehingga sistem (4.7) menjadi bentuk normal. Pada kasus 4 ini, vektor karakteristik berdasarkan nilai karakteristik sistem yang sudah diperoleh, yaitu :

- Untuk  $\lambda_1 = -b < 0$ , maka  $\begin{bmatrix} b + \frac{1}{c} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b - c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Dari persamaan matriks baris ketiga dan pertama diperoleh :

$$-u + (b - c)w = 0 \rightarrow w = \frac{1}{b-c}u$$

$$\left(b + \frac{1}{c}\right)u + w = 0$$

$$\left(b + \frac{1}{c}\right)u + \frac{1}{b-c}u = 0$$

$$\left(b + \frac{1}{c} + \frac{1}{b-c}\right)u = 0 \rightarrow u = 0 \text{ sehingga } w = 0.$$

Dari persamaan matriks baris kedua diperoleh :

$$0v = 0 \rightarrow v \text{ sebarang, ambil } v = 1.$$

Jadi, diperoleh vektor karakteristik untuk nilai karakteristik

$$\lambda_1 = -b < 0 \text{ yaitu } \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Untuk  $\lambda_2 = 0$ , maka 
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dari persamaan matriks baris kedua diperoleh :

$$-bv = 0 \rightarrow v = 0.$$

Dari persamaan matriks baris ketiga dan pertama diperoleh :

$$-u - cw = 0 \rightarrow w = -\frac{1}{c}u$$

$$\frac{1}{c}u + w = 0$$

$$\frac{1}{c}u - \frac{1}{c}u = 0$$

$$\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\right)u = 0$$

$$0u = 0 \rightarrow u \text{ sebarang, ambil } u = 1 \text{ sehingga } w = -\frac{1}{c}.$$

Jadi, diperoleh vektor karakteristik untuk nilai karakteristik

$$\lambda_2 = 0 \text{ yaitu } \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{c} \end{bmatrix}.$$

- Untuk  $\lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} < 0$  dengan  $c > 1$ , maka

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{c} - \left(\frac{1-c^2}{c}\right) & 0 & 1 \\ 0 & -b - \left(\frac{1-c^2}{c}\right) & 0 \\ -1 & 0 & -c - \left(\frac{1-c^2}{c}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dari persamaan matriks baris kedua diperoleh :

$$\left(-b - \left(\frac{1-c^2}{c}\right)\right)v = 0 \rightarrow v = 0.$$

Dari persamaan matriks baris ketiga dan pertama diperoleh :

$$-u + \left(-c - \left(\frac{1-c^2}{c}\right)\right)w = 0 \rightarrow u = -\frac{1}{c}w$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} - \left(\frac{1-c^2}{c}\right)\right)u + w &= 0 \\ \left(\frac{1}{c} - \left(\frac{1-c^2}{c}\right)\right)\left(-\frac{1}{c}\right)w + w &= 0 \\ \left(-\frac{1}{c^2} + \left(\frac{1-c^2}{c^2}\right) + 1\right)w &= 0 \\ \left(\frac{-1+1-c^2+c^2}{c^2}\right)w &= 0 \end{aligned}$$

$0w = 0 \rightarrow w$  sebarang, ambil  $w = 1$  sehingga  $u = -\frac{1}{c}$ .

Jadi, diperoleh vektor karakteristik untuk nilai karakteristik

$$\lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} < 0 \text{ dengan } c > 1 \text{ yaitu } \vec{V}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor karakteristik  $\vec{V}_1$  dan  $\vec{V}_3$  terbentang pada subruang stabil  $E^s$ , sedangkan vektor karakteristik  $\vec{V}_2$  terbentang pada subruang center  $E^c$ , dengan  $E^s = \text{span} \{\vec{V}_i \mid \text{Re}(\lambda_i) < 0\}$   
 $E^c = \text{span} \{\vec{V}_i \mid \text{Re}(\lambda_i) = 0\}$ .

Selanjutnya, untuk  $(X, Y, Z)^T$ , dibuat transformasi  $T(u, v, w)^T$  sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \text{ dengan } T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{c} & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Selanjutnya, dicari  $T^{-1}$  dari  $T$ .

$$(T : I) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{c} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{c} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ \widetilde{b_2} \\ \widetilde{b_3} \end{matrix}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{c} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} cb_2 + b_1 \\ \sim \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{c} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(c^2-1)}{c} & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \frac{c}{c^2-1} b_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{c} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{c}{c^2-1} & 0 & \frac{c^2}{c^2-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} b_1 + \frac{1}{c} b_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{c^2}{c^2-1} & 0 & \frac{c}{c^2-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{c}{c^2-1} & 0 & \frac{c^2}{c^2-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = (I : T^{-1})$$

sehingga diperoleh

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c^2}{c^2-1} & 0 & \frac{c}{c^2-1} \\ \frac{c}{c^2-1} & 0 & \frac{c^2}{c^2-1} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Selanjutnya, dengan Transformasi (4.8), sistem (4.7) menjadi

$$T \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(u - \frac{1}{c}v\right)w \\ -\left(u - \frac{1}{c}v\right)^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + T^{-1} \begin{bmatrix} \left(u - \frac{1}{c}v\right)w \\ -\left(u - \frac{1}{c}v\right)^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c^2}{c^2-1} & 0 & \frac{c}{c^2-1} \\ \frac{c}{c^2-1} & 0 & \frac{c^2}{c^2-1} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{c} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{c^2}{c^2-1} & 0 & \frac{c}{c^2-1} \\ \frac{c}{c^2-1} & 0 & \frac{c^2}{c^2-1} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(u - \frac{1}{c}v\right)w \\ -\left(u - \frac{1}{c}v\right)^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh bentuk normal sistem

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-c^2}{c} & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c^2}{c^2-1} \left(u - \frac{1}{c}v\right)w \\ \frac{c}{c^2-1} \left(u - \frac{1}{c}v\right)w \\ -\left(u - \frac{1}{c}v\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Setelah ditransformasi menjadi sistem (4.10) dengan variabel  $(u, v, w)$ , nilai karakteristik dari sistem tidak berubah, yaitu :

$$\lambda_1 = -b < 0, \lambda_2 = 0, \text{ dan } \lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} < 0 \text{ dengan } c > 1.$$

Selanjutnya, dicari vektor karakteristik sistem (4.10) untuk nilai karakteristik tersebut sebagai berikut :

- Untuk  $\lambda_1 = -b < 0$ , maka  $\begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-c^2}{c} + b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Dari persamaan matriks baris pertama diperoleh :

$$bu = 0 \rightarrow u = 0.$$

Dari persamaan matriks baris kedua diperoleh :

$$\left(\frac{1-c^2}{c} + b\right)v = 0 \rightarrow v = 0.$$

Dari persamaan matriks baris ketiga diperoleh :

$$0w = 0 \rightarrow w \text{ sebarang, ambil } w = 1.$$

Jadi, diperoleh vektor karakteristik untuk nilai karakteristik  $\lambda_1 =$

$$-b < 0 \text{ yaitu } \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Untuk  $\lambda_2 = 0$ , maka  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-c^2}{c} & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Dari persamaan matriks baris kedua diperoleh :

$$\left(\frac{1-c^2}{c}\right)v = 0 \rightarrow v = 0.$$

Dari persamaan matriks baris ketiga diperoleh :

$$-bw = 0 \rightarrow w = 0.$$

Dari persamaan matriks baris pertama diperoleh :

$$0u = 0 \rightarrow u \text{ sebarang, ambil } u = 1.$$

sehingga diperoleh vektor karakteristik untuk nilai karakteristik

$$\lambda_2 = 0 \text{ yaitu } \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Untuk  $\lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} < 0$  dengan  $c > 1$ , maka

$$\begin{bmatrix} -\frac{1-c^2}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b - \frac{1-c^2}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dari persamaan matriks baris pertama diperoleh :

$$\left(-\frac{1-c^2}{c}\right)u = 0 \rightarrow u = 0.$$

Dari persamaan matriks baris ketiga diperoleh :

$$\left(-b - \frac{1-c^2}{c}\right)w = 0 \rightarrow w = 0.$$

Dari persamaan matriks baris kedua diperoleh :

$$0v = 0 \rightarrow v \text{ sebarang, ambil } v = 1.$$

sehingga diperoleh vektor karakteristik untuk nilai karakteristik

$$\lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} < 0 \text{ dengan } c > 1 \text{ yaitu } \vec{V}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan vektor karakteristik tersebut, dapat diketahui bahwa manifold sistem (4.10) pada bagian linearnya adalah

$$E^c = \text{span} \{ \text{sumbu-}u \},$$

$$E^s = \text{span} \{ \text{sumbu-}v, \text{sumbu-}w \}, \text{ dan}$$

$$E^u = \emptyset.$$

sehingga (4.10) memenuhi bentuk blok kanonik Jordan :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_c(u, v, w) \\ F_s(u, v, w) \end{bmatrix}$$

$$\text{dengan } A_c = 0, A_s = \begin{bmatrix} \frac{1-c^2}{c} & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$$

$$F_c(u, v, w) = \frac{c^2}{c^2-1} \left( u - \frac{1}{c}v \right) w$$

$$F_s(u, v, w) = \begin{bmatrix} \frac{c}{c^2-1} \left( u - \frac{1}{c}v \right) w \\ - \left( u - \frac{1}{c}v \right)^2 \end{bmatrix}.$$

Dengan memisahkan bentuk normal (4.10) berdasarkan manifoldnya, maka diperoleh bentuk normal pada manifold center

$$\dot{u} = \frac{c^2}{c^2-1} \left( u - \frac{1}{c}v \right) w \quad (4.11)$$

dan bentuk normal pada manifold stabil

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-c^2}{c} & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c}{c^2-1} \left( u - \frac{1}{c}v \right) w \\ - \left( u - \frac{1}{c}v \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$



### Center Manifold

Selanjutnya, akan dicari persamaan center manifold  $W^c$ , yaitu kurva yang bersinggungan dengan subruang center  $E^c$ . Misalkan fungsi  $h_1(u)$  dan  $h_2(u)$  adalah fungsi yang terdeviasi (menyimpang) dari sumbu- $u$  ke sumbu- $v$  dan sumbu- $w$  setelah menyinggung di titik  $(0,0,0)$  pada persekitaran  $W^c$  dan  $E^c$  sedemikian hingga persamaan center manifold :

$$W^c(0) = \left\{ (u, (v, w)) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \mid \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = h(u), h(0) = 0, Dh(0) = 0 \right\} \quad (4.13)$$

Persamaan center manifold dicari sebagai berikut :

1. Koordinat  $(u, v, w)$  untuk setiap titik pada  $W^c(0)$  harus memenuhi

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = h(u) = \begin{bmatrix} h_1(u) \\ h_2(u) \end{bmatrix}$$

Akan dicari  $h(u)$  dengan menggunakan bentuk deret pangkat. Misalkan :

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(u) \\ h_2(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 u^2 + b_1 u^3 + c_1 u^4 + \mathcal{O}(u^5) \\ a_2 u^2 + b_2 u^3 + c_2 u^4 + \mathcal{O}(u^5) \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

2. Differensialkan (4.14) terhadap waktu sehingga koordinat  $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$  dari setiap titik pada  $W^c(0)$  memenuhi

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = Dh(u)\dot{u} = \begin{bmatrix} Dh_1(u) \\ Dh_2(u) \end{bmatrix} \dot{u}. \quad (4.15)$$

3. Setiap titik dari  $W^c(0)$  memenuhi dinamika yang dibangun oleh (4.11) dan (4.12).

Substitusi (4.14) dan (4.15) ke sistem (4.12) diperoleh

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - c^2 & 0 \\ c & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c}{c^2 - 1} \left( u - \frac{1}{c} v \right) w \\ - \left( u - \frac{1}{c} v \right)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} Dh_1(u) \\ Dh_2(u) \end{bmatrix} \dot{u} &= \begin{bmatrix} \frac{1-c^2}{c} & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(u) \\ h_2(u) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{c}{c^2-1} \left( u - \frac{1}{c} h_1(u) \right) h_2(u) \\ - \left( u - \frac{1}{c} h_1(u) \right)^2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} Dh_1(u) \\ Dh_2(u) \end{bmatrix} \left( \frac{c^2}{c^2-1} \left( u - \frac{1}{c} h_1(u) \right) h_2(u) \right) &= \\
\begin{bmatrix} \frac{1-c^2}{c} h_1(u) + \frac{c}{c^2-1} \left( u - \frac{1}{c} h_1(u) \right) h_2(u) \\ -bh_2(u) - \left( u - \frac{1}{c} h_1(u) \right)^2 \end{bmatrix} & \quad (4.16)
\end{aligned}$$

dengan  $Dh_i(u) = \frac{\partial h_i(u)}{\partial u} = 2a_i u + 3b_i u^2 + 4c_i u^3 + \mathcal{O}(u^4)$ .

Selanjutnya, substitusi  $h_i(u)$  dan  $Dh_i(u)$  pada persamaan (4.16). Dari persamaan matriks (4.16) baris pertama, dapat diuraikan persamaan- $v$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
&(2a_1 u + 3b_1 u^2 + 4c_1 u^3 \\
&+ \mathcal{O}(u^4)) \left( \frac{c^2}{c^2-1} \left( u \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{1}{c} (a_1 u^2 + b_1 u^3 + c_1 u^4 + \mathcal{O}(u^5)) \right) (a_2 u^2 + b_2 u^3 + c_2 u^4 \right. \\
&\left. + \mathcal{O}(u^5)) \right) \\
&= \frac{1-c^2}{c} (a_1 u^2 + b_1 u^3 + c_1 u^4 + \mathcal{O}(u^5)) \\
&+ \frac{c}{c^2-1} \left( u - \frac{1}{c} (a_1 u^2 + b_1 u^3 + c_1 u^4 + \mathcal{O}(u^5)) \right) (a_2 u^2 \\
&+ b_2 u^3 + c_2 u^4 + \mathcal{O}(u^5))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2a_1u + 3b_1u^2 + 4c_1u^3 \\
& \quad + \mathcal{O}(u^4)) \left( \left( \frac{c^2}{c^2-1}u - \frac{c}{c^2-1}a_1u^2 - \frac{c}{c^2-1}b_1u^3 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{c}{c^2-1}c_1u^4 + \mathcal{O}(u^5) \right) (a_2u^2 + b_2u^3 + c_2u^4 + \mathcal{O}(u^5)) \right) \\
& = \left( \frac{1-c^2}{c}a_1u^2 + \frac{1-c^2}{c}b_1u^3 + \frac{1-c^2}{c}c_1u^4 + \mathcal{O}(u^5) \right) \\
& \quad + \left( \frac{c}{c^2-1}u - \frac{1}{c^2-1}a_1u^2 - \frac{1}{c^2-1}b_1u^3 - \frac{1}{c^2-1}c_1u^4 \right. \\
& \quad \left. + \mathcal{O}(u^5) \right) (a_2u^2 + b_2u^3 + c_2u^4 + \mathcal{O}(u^5)) \\
& (2a_1u + 3b_1u^2 + 4c_1u^3 + \mathcal{O}(u^4)) \left( \frac{c^2}{c^2-1}a_2u^3 \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{c^2}{c^2-1}b_2 - \frac{c}{c^2-1}a_1a_2 \right) u^4 + \mathcal{O}(u^5) \right) \\
& = \left( \frac{1-c^2}{c}a_1u^2 + \frac{1-c^2}{c}b_1u^3 + \frac{1-c^2}{c}c_1u^4 + \mathcal{O}(u^5) \right) \\
& \quad + \left( \frac{c}{c^2-1}a_2u^3 + \left( \frac{c}{c^2-1}b_2 - \frac{1}{c^2-1}a_1a_2 \right) u^4 + \mathcal{O}(u^5) \right) \\
& 2 \frac{c^2}{c^2-1}a_1a_2u^4 + \mathcal{O}(u^5) \\
& = \frac{1-c^2}{c}a_1u^2 + \left( \frac{1-c^2}{c}b_1 + \frac{c}{c^2-1}a_2 \right) u^3 \\
& \quad + \left( \frac{1-c^2}{c}c_1 + \frac{c}{c^2-1}b_2 - \frac{1}{c^2-1}a_1a_2 \right) u^4 + \mathcal{O}(u^5)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dari persamaan matriks (4.16) baris kedua, dapat diuraikan persamaan-w sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
& (2a_2u + 3b_2u^2 + 4c_2u^3 \\
& \quad + \mathcal{O}(u^4)) \left( \frac{c^2}{c^2 - 1} \left( u \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{c} (a_1u^2 + b_1u^3 + c_1u^4 + \mathcal{O}(u^5)) \right) (a_2u^2 + b_2u^3 + c_2u^4 \right. \\
& \quad \left. + \mathcal{O}(u^5)) \right) \\
& = -b(a_2u^2 + b_2u^3 + c_2u^4 + \mathcal{O}(u^5)) \\
& \quad - \left( u - \frac{1}{c} (a_1u^2 + b_1u^3 + c_1u^4 + \mathcal{O}(u^5)) \right)^2 \\
& (2a_2u + 3b_2u^2 + 4c_2u^3 \\
& \quad + \mathcal{O}(u^4)) \left( \left( \frac{c^2}{c^2 - 1} u - \frac{c}{c^2 - 1} a_1u^2 - \frac{c}{c^2 - 1} b_1u^3 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{c}{c^2 - 1} c_1u^4 + \mathcal{O}(u^5) \right) (a_2u^2 + b_2u^3 + c_2u^4 + \mathcal{O}(u^5)) \right) \\
& = (-ba_2u^2 - bb_2u^3 - bc_2u^4 + \mathcal{O}(u^5)) \\
& \quad - \left( u^2 - \frac{2}{c} u (a_1u^2 + b_1u^3 + c_1u^4 + \mathcal{O}(u^5)) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{c^2} (a_1u^2 + b_1u^3 + c_1u^4 + \mathcal{O}(u^5))^2 \right) \\
& (2a_2u + 3b_2u^2 + 4c_2u^3 + \mathcal{O}(u^4)) \left( \frac{c^2}{c^2 - 1} a_2u^3 \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{c^2}{c^2 - 1} b_2 - \frac{c}{c^2 - 1} a_1a_2 \right) u^4 + \mathcal{O}(u^5) \right) \\
& = (-ba_2u^2 - bb_2u^3 - bc_2u^4 + \mathcal{O}(u^5)) \\
& \quad + \left( -u^2 + \frac{2}{c} a_1u^3 + \frac{2}{c} b_1u^4 + \mathcal{O}(u^5) \right) \\
& \quad + \left( -\frac{a_1^2}{c^2} u^4 + \mathcal{O}(u^5) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{c^2}{c^2 - 1} a_2^2 u^4 + \mathcal{O}(u^5) \\
&= -(1 + ba_2)u^2 + \left(\frac{2}{c}a_1 - bb_2\right)u^3 \\
&+ \left(\frac{2}{c}b_1 - bc_2 - \frac{a_1^2}{c^2}\right)u^4 + \mathcal{O}(u^5)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Dengan membandingkan koefisien-koefisien pada persamaan (4.17), yaitu

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{c^2}{c^2 - 1} a_1 a_2 u^4 + \mathcal{O}(u^5) \\
&= \frac{1 - c^2}{c} a_1 u^2 + \left(\frac{1 - c^2}{c} b_1 + \frac{c}{c^2 - 1} a_2\right) u^3 \\
&+ \left(\frac{1 - c^2}{c} c_1 + \frac{c}{c^2 - 1} b_2 - \frac{1}{c^2 - 1} a_1 a_2\right) u^4 + \mathcal{O}(u^5),
\end{aligned}$$

maka dapat diperoleh sistem persamaan berikut ini :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - c^2}{c} a_1 = 0 \\ \frac{1 - c^2}{c} b_1 + \frac{c}{c^2 - 1} a_2 = 0 \\ 2 \frac{c^2}{c^2 - 1} a_1 a_2 = \frac{1 - c^2}{c} c_1 + \frac{c}{c^2 - 1} b_2 - \frac{1}{c^2 - 1} a_1 a_2 \end{array} \right. . \tag{4.19a}$$

Dengan membandingkan koefisien-koefisien pada persamaan (4.18), yaitu

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{c^2}{c^2 - 1} a_2^2 u^4 + \mathcal{O}(u^5) \\
&= -(1 + ba_2)u^2 + \left(\frac{2}{c}a_1 - bb_2\right)u^3 \\
&+ \left(\frac{2}{c}b_1 - bc_2 - \frac{a_1^2}{c^2}\right)u^4 + \mathcal{O}(u^5),
\end{aligned}$$

maka dapat diperoleh sistem persamaan berikut ini :

$$\begin{cases} 1 + ba_2 = 0 \\ \frac{2}{c}a_1 - bb_2 = 0 \\ 2\frac{c^2}{c^2-1}a_2^2 = \frac{2}{c}b_1 - bc_2 - \frac{a_1^2}{c^2} \end{cases} \quad (4.19b)$$

Penyelesaian dari sistem persamaan (4.19a) dan (4.19b) sebagai berikut :

- $\frac{1-c^2}{c}a_1 = 0 \rightarrow \mathbf{a_1 = 0}$
- $1 + ba_2 = 0$   
 $ba_2 = -1$   
 $\mathbf{a_2 = -\frac{1}{b}}$
- $\frac{1-c^2}{c}b_1 + \frac{c}{c^2-1}a_2 = 0$   
 $\frac{1-c^2}{c}b_1 - \left(\frac{c}{c^2-1}\right)\left(\frac{1}{b}\right) = 0$   
 $\frac{1-c^2}{c}b_1 = \frac{c}{b(c^2-1)}$   
 $\mathbf{b_1 = -\frac{c^2}{b(c^2-1)^2}}$
- $\frac{2}{c}a_1 - bb_2 = 0$   
 $0 - bb_2 = 0$   
 $bb_2 = 0 \rightarrow \mathbf{b_2 = 0}$
- $2\frac{c^2}{c^2-1}a_1a_2 = \frac{1-c^2}{c}c_1 + \frac{c}{c^2-1}b_2 - \frac{1}{c^2-1}a_1a_2$   
 $0 = \frac{1-c^2}{c}c_1 + 0 - 0$   
 $\frac{1-c^2}{c}c_1 = 0 \rightarrow \mathbf{c_1 = 0}$
- $2\frac{c^2}{c^2-1}a_2^2 = \frac{2}{c}b_1 - bc_2 - \frac{a_1^2}{c^2}$   
 $2\frac{c^2}{c^2-1}\left(-\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{2}{c}\left(-\frac{c^2}{b(c^2-1)^2}\right) - bc_2 - 0$

$$\begin{aligned}
bc_2 &= -\frac{2c}{b(c^2-1)^2} - \frac{2c^2}{b^2(c^2-1)} \\
bc_2 &= -\frac{2c}{b(c^2-1)} \left( \frac{1}{c^2-1} + \frac{c}{b} \right) \\
c_2 &= -\frac{2c}{b^2(c^2-1)} \left( \frac{b+c(c^2-1)}{b(c^2-1)} \right) \\
c_2 &= \frac{-2c}{b^3(c^2-1)^2} (b+c(c^2-1))
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{cases} a_1 = 0 ; b_1 = -\frac{c^2}{b(c^2-1)^2} ; c_1 = 0 \\ a_2 = -\frac{1}{b} ; b_2 = 0 ; c_2 = \frac{-2c}{b^3(c^2-1)^2} (b+c(c^2-1)) \end{cases} \quad (4.20)$$

Dengan demikian, persamaan center manifold adalah

$$W^c(0) =$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(u) \\ h_2(u) \end{bmatrix} \\ = \left[ \begin{array}{l} -\frac{c^2}{b(c^2-1)^2} u^3 + \mathcal{O}(u^5) \\ -\frac{1}{b} u^2 - \frac{2c}{b^3(c^2-1)^2} (b+c(c^2-1)) u^4 + \mathcal{O}(u^5) \end{array} \right] \end{cases} \quad (4.21)$$

Selanjutnya, substitusi  $h_1(u)$  dan  $h_2(u)$  dari persamaan (4.21) ke persamaan (4.11)

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \frac{c^2}{c^2-1} \left( u - \frac{1}{c} v \right) w \\
&= \frac{c^2}{c^2-1} \left( u - \frac{1}{c} \left( -\frac{c^2}{b(c^2-1)^2} u^3 + \mathcal{O}(u^5) \right) \right) \left( -\frac{1}{b} u^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2c}{b^3(c^2-1)^2} (b+c(c^2-1)) u^4 + \mathcal{O}(u^5) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \left( \frac{c^2}{c^2-1}u + \frac{c^3}{b(c^2-1)}u^3 + \mathcal{O}(u^5) \right) \left( -\frac{1}{b}u^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2c}{b^3(c^2-1)^2}(b+c(c^2-1))u^4 + \mathcal{O}(u^5) \right) \\
&= -\frac{c^2}{b(c^2-1)}u^3 \\
&\quad - \left( \frac{c^3}{b^2(c^2-1)^3} + \frac{2c^3}{b^3(c^2-1)^3}(b+c(c^2-1)) \right) u^5 \\
&\quad + \mathcal{O}(u^6) \\
&= -\frac{c^2}{b(c^2-1)}u^3 - \left( \frac{bc^3 + 2c^3(b+c(c^2-1))}{b^3(c^2-1)^3} \right) u^5 + \mathcal{O}(u^6) \\
&= -\frac{c^2}{b(c^2-1)}u^3 - \frac{c^3}{b^3(c^2-1)^3}(3b+2c(c^2-1))u^5 + \mathcal{O}(u^6)
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh bentuk normal  $u$  pada center manifold, yaitu :

$$\dot{u} = -\frac{c^2}{b(c^2-1)}u^3 - \frac{c^3}{b^3(c^2-1)^3}(3b+2c(c^2-1))u^5 + \mathcal{O}(u^6).$$

Karena koefisien dari  $u^3$  adalah negatif, maka manifold  $\dot{u}$  pada center manifold cenderung stabil, sehingga titik tetap  $E_0(0,0,0)$  stabil.

Sistem (4.3) dengan titik tetap  $E_0(0,0,0)$  merupakan hasil translasi dari sistem (4.1) dengan titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$ , sehingga kedua sistem tersebut memiliki sifat yang sama. Oleh karena itu, titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$  **stabil**.

Berdasarkan analisis **Kasus 3**, titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$  **bersifat tidak stabil** untuk  $0 < c < 1$ . Berdasarkan **Kasus 4**, titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$  **stabil** untuk  $c > 1$ . Dari kedua kasus tersebut, dapat diketahui bahwa titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$  memiliki perilaku yang berbeda untuk nilai parameter  $0 < c < 1$  dan  $c > 1$ , sehingga dapat diketahui bahwa terjadi bifurkasi ketika  $c = 1$ .



**KASUS 5**

Jika  $1 + ac - \frac{c}{b} > 0$  dan  $c + a - \frac{1}{b} = 0$ , maka diperoleh  $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 + ac - \frac{c}{b} > 0$  dan  $\lambda_2 + \lambda_3 = -\left(c + a - \frac{1}{b}\right) = 0$ .

Perhatikan kembali persamaan karakteristik (4.5) sehingga

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(c + a - \frac{1}{b}) \pm \sqrt{(c + a - \frac{1}{b})^2 - 4(1 + ac - \frac{c}{b})}}{2}.$$

Karena  $c + a - \frac{1}{b} = 0$ , maka

$$\begin{aligned} \lambda_{2,3} &= \frac{\pm \sqrt{-4\left(1 + ac - \frac{c}{b}\right)}}{2} \\ &= \frac{\pm 2\sqrt{-\left(1 + ac - \frac{c}{b}\right)}}{2} \\ &= \pm i\sqrt{\left(1 + ac - \frac{c}{b}\right)} \end{aligned}$$

sehingga didapat

$$\lambda_2 = i\sqrt{\left(1 + ac - \frac{c}{b}\right)} \text{ dan } \lambda_3 = -i\sqrt{\left(1 + ac - \frac{c}{b}\right)}.$$

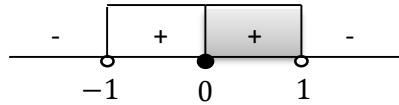
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} -\left(c + a - \frac{1}{b}\right) &= 0 \\ a &= \frac{1}{b} - c \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} 1 + ac - \frac{c}{b} &= 1 + \left(\frac{1}{b} - c\right)c - \frac{c}{b} \\ &= 1 + \frac{c}{b} - c^2 - \frac{c}{b} \\ &= 1 - c^2 > 0 \end{aligned}$$

Nilai  $c$  yang memenuhi  $1 - c^2 > 0$  dan syarat awal  $c \geq 0$  adalah  $0 \leq c < 1$ .



Nilai karakteristik yang memenuhi kasus ini, yaitu :

$$\lambda_2 = i\sqrt{1 - c^2} \text{ dan } \lambda_3 = -i\sqrt{1 - c^2}, \text{ dengan } 0 \leq c < 1.$$

Karena diperoleh adanya sepasang nilai karakteristik imajiner murni di samping  $\lambda_1 = -b < 0$ , maka pada kasus ini terjadi bifurkasi Hopf.

### **Bifurkasi Hopf**

Bifurkasi Hopf terjadi ketika  $0 \leq c < 1$  sehingga  $\lambda_{2,3}(c) = \alpha(c) \pm i\omega(c)$  adalah sepasang nilai karakteristik imajiner murni dengan  $\alpha(c) = 0$  dan  $\omega(c) = \sqrt{1 - c^2}$ .

### **Syarat Transversal Bifurkasi Hopf**

Kasus ini memenuhi syarat transversal bifurkasi Hopf sebagai berikut :

Bifurkasi Hopf terjadi jika  $0 \leq c < 1$ .

Jelas bahwa

$$Re(\lambda(c)) = -\frac{1}{2} \left( c + a - \frac{1}{b} \right)$$

sehingga syarat transversal bifurkasi Hopf terpenuhi

$$\frac{d}{dc} \{Re(\lambda(c))\}_{0 \leq c < 1} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

### **Bentuk Normal Bifurkasi Hopf**

Kestabilan dari orbit periodik yang terbentuk akibat terjadinya bifurkasi Hopf dapat ditentukan dengan menggunakan indeks stabilitas. Untuk mencari indeks stabilitas, perlu dicari

bentuk normal bifurkasi Hopf terlebih dahulu. Akan dicari bentuk normal bifurkasi Hopf sebagai berikut :

1. Translasi titik tetap sistem (4.1) ke titik asal.

Translasi sudah dilakukan pada subbab 4.3.1 dan diperoleh sistem (4.3) :

$$\begin{cases} \dot{X} = \left(\frac{1}{b} - a\right)X + Z + XY \\ \dot{Y} = -bY - X^2 \\ \dot{Z} = -X - cZ \end{cases} .$$

2. Memisahkan bagian linear dan bagian nonlinear sistem (4.3). Perhatikan kembali sistem (4.4) :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} - a & 0 & 1 \\ b & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XY \\ -X^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pada kasus 4 ini, diketahui  $a = \frac{1}{b} - c$ , sehingga

sistem (4.4) dapat ditulis menjadi :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} XY \\ -X^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

3. Transformasi bagian linear sistem (4.22) ke bentuk kanonik Jordan dan transformasi sistem (4.22) ke bentuk normal.

Pada kasus 4 ini, vektor karakteristik berdasarkan nilai karakteristik sistem yang sudah diperoleh, yaitu :

- Untuk  $\lambda_1 = -b < 0$ , maka  $\begin{bmatrix} b+c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Dari persamaan matriks baris ketiga dan pertama diperoleh :

$$-u + (b-c)w = 0 \rightarrow w = \frac{1}{b-c}u$$

$$(b+c)u + w = 0$$

$$(b+c)u + \frac{1}{b-c}u = 0$$

$$\left(b + c + \frac{1}{b-c}\right)u = 0 \rightarrow u = 0$$

sehingga  $w = 0$ .

Dari persamaan matriks baris kedua diperoleh :

$$0v = 0 \rightarrow v \text{ sebarang, ambil } v = 1.$$

Jadi, diperoleh vektor karakteristik untuk nilai karakteristik  $\lambda_1 =$

$$-b < 0 \text{ yaitu } \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Untuk  $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{1-c^2}$ , maka vektor karakteristik dapat dicari dengan menggunakan salah satu nilai karakteristik.

Untuk  $\lambda_2 = i\sqrt{1-c^2}$ , maka

$$\begin{bmatrix} c - i\sqrt{1-c^2} & 0 & 1 \\ 0 & -b - i\sqrt{1-c^2} & 0 \\ -1 & 0 & -c - i\sqrt{1-c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dari persamaan matriks baris kedua diperoleh :

$$(-b - i\sqrt{1-c^2})v = 0 \rightarrow v = 0.$$

Dari persamaan matriks baris ketiga dan pertama diperoleh :

$$-u - (c + i\sqrt{1-c^2})w = 0 \rightarrow w = -\frac{1}{(c + i\sqrt{1-c^2})}u$$

$$(c - i\sqrt{1-c^2})u + w = 0$$

$$(c - i\sqrt{1-c^2})u - \frac{1}{(c + i\sqrt{1-c^2})}u = 0$$

$$\left( (c - i\sqrt{1-c^2}) - \frac{1}{(c + i\sqrt{1-c^2})} \right) u = 0$$

$0u = 0 \rightarrow u$  sebarang, ambil  $u = 1$ ,

$$\text{maka } w = -\frac{1}{(c + i\sqrt{1-c^2})} = (-c + i\sqrt{1-c^2}).$$

Vektor karakteristik untuk nilai karakteristik  $\lambda_2 = i\sqrt{1-c^2}$  yaitu

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -c \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{1-c^2} \end{bmatrix}.$$

Jadi, vektor karakteristik  $\vec{V}_{2,3}$  untuk nilai karakteristik  $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{1-c^2}$  adalah  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -c \end{bmatrix}$  dan  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{1-c^2} \end{bmatrix}$ .

Vektor karakteristik  $\vec{V}_1$  terbentang pada subruang stabil  $E^s$ , sedangkan vektor karakteristik  $\vec{V}_{2,3}$  terbentang pada subruang center  $E^c$ , dengan  $E^s = \text{span}\{\vec{V}_i \mid \text{Re}(\lambda_i) < 0\}$   
 $E^c = \text{span}\{\vec{V}_i \mid \text{Re}(\lambda_i) = 0\}$ .

Selanjutnya, untuk  $(X, Y, Z)^T$ , dibuat transformasi  $T(u, v, w)^T$  sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \text{ dengan } T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{1-c^2} & -c & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Selanjutnya, dicari  $T^{-1}$  dari  $T$ .

$$(T : I) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{1-c^2} & -c & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} b_2 \\ \sim \\ b_3 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{1-c^2} & -c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} b_1 \\ \sim \\ b_2 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{1-c^2} & -c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) b_1 + \sim cb_2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \sqrt{1-c^2} & 0 & 0 & c & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{\sim}{b_1/\sqrt{1-c^2}}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = (I : T^{-1})$$

sehingga diperoleh

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Selanjutnya, dengan Transformasi (4.23), sistem (4.22) menjadi

$$T \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} uw \\ -u^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + T^{-1} \begin{bmatrix} uw \\ -u^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{1-c^2} & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} uw \\ -u^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh sistem

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{1-c^2} & 0 \\ \sqrt{1-c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}vw \\ vw \\ -v^2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Setelah ditransformasi menjadi sistem (4.25) dengan variabel  $(u, v, w)$ , nilai karakteristik dari sistem tidak berubah, yaitu :

$\lambda_1 = -b < 0$ ,  $\lambda_2 = i\sqrt{1-c^2}$  dan  $\lambda_3 = -i\sqrt{1-c^2}$ , dengan  $0 \leq c < 1$ .

Vektor karakteristik sistem (4.25) untuk nilai karakteristik tersebut, yaitu :

- Untuk  $\lambda_1 = -b < 0$ , maka

$$\begin{bmatrix} b & -\sqrt{1-c^2} & 0 \\ \sqrt{1-c^2} & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dari persamaan matriks baris pertama dan kedua diperoleh :

$$bu - \sqrt{1-c^2}v = 0 \rightarrow u = \frac{\sqrt{1-c^2}}{b}v$$

$$\sqrt{1-c^2}u + bv = 0$$

$$\sqrt{1-c^2} \frac{\sqrt{1-c^2}}{b}v + bv = 0$$

$$\frac{1-c^2}{b}v + bv = 0$$

$$\left(\frac{1+b^2-c^2}{b}\right)v = 0$$

$$\left(\frac{1+b^2-c^2}{b}\right)v = 0 \rightarrow v = 0$$

sehingga  $u = 0$ .

Dari persamaan matriks baris ketiga diperoleh :

$$0w = 0 \rightarrow w \text{ sebarang, ambil } w = 1.$$

Jadi, diperoleh vektor karakteristik untuk nilai karakteristik  $\lambda_1 =$

$$-b < 0 \text{ yaitu } \vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Untuk  $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{1-c^2}$ , maka vektor karakteristik dapat dicari dengan menggunakan salah satu nilai karakteristik.

Untuk  $\lambda_2 = i\sqrt{1-c^2}$ , maka

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{1-c^2} & -\sqrt{1-c^2} & 0 \\ \sqrt{1-c^2} & -i\sqrt{1-c^2} & 0 \\ 0 & 0 & -b - i\sqrt{1-c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dari persamaan matriks baris ketiga diperoleh :

$$(-b - i\sqrt{1-c^2})w = 0 \rightarrow w = 0.$$

Dari persamaan matriks baris pertama dan kedua diperoleh :

$$-i\sqrt{1-c^2}u - \sqrt{1-c^2}v = 0 \rightarrow v = -iu$$

$$-i\sqrt{1-c^2}u - \sqrt{1-c^2}(-iu) = 0$$

$$-i\sqrt{1-c^2}u + i\sqrt{1-c^2}u = 0$$

$$(-i\sqrt{1-c^2} + i\sqrt{1-c^2})u = 0$$

$0u = 0 \rightarrow u$  sebarang, ambil  $u = 1$  sehingga

$$v = -i.$$

Vektor karakteristik untuk nilai karakteristik  $\lambda_2 = i\sqrt{1-c^2}$  yaitu

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi, vektor karakteristik  $\vec{V}_{2,3}$  untuk nilai karakteristik  $\lambda_{2,3} =$

$$\pm i\sqrt{1-c^2} \text{ adalah } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Berdasarkan vektor karakteristik tersebut, dapat diketahui bahwa manifold sistem (4.25) pada bagian linearnya adalah

$$E^c = \text{span} \{ \text{sumbu-}u, \text{sumbu-}v \},$$

$$E^s = \text{span} \{ \text{sumbu-}w \}, \text{ dan}$$

$$E^u = \emptyset,$$

sehingga (4.25) memenuhi bentuk blok kanonik Jordan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + F(u, v, w)$$

$$\text{dengan } A_c = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{1-c^2} \\ \sqrt{1-c^2} & 0 \end{bmatrix}, A_s = -b,$$

$$F(u, v, w) = \begin{bmatrix} \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}vw \\ vw \\ -v^2 \end{bmatrix}.$$

Jadi, sistem (4.25) adalah bentuk normal bifurkasi Hopf pada model sistem keuangan. Bentuk normal tersebut dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega(c) & 0 \\ \omega(c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(u, v, w, c) \\ F_2(u, v, w, c) \\ F_3(u, v, w, c) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\text{dengan } \omega(c) = \sqrt{1-c^2},$$

$$F_1(u, v, w, c) = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}vw,$$

$$F_2(u, v, w, c) = vw,$$

$$F_3(u, v, w, c) = -v^2, \text{ dan}$$

$$0 \leq c < 1.$$

### ***Indeks Stabilitas Bifurkasi Hopf***

Terjadinya bifurkasi Hopf menunjukkan eksistensi lintasan tertutup yang mengelilingi titik tetap tertentu (orbit periodik) dari suatu sistem. Stabilitas dari orbit periodik dicari dengan menggunakan indeks stabilitas yang dapat ditentukan dari bentuk normal bifurkasi Hopf. Untuk bentuk normal bifurkasi Hopf

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega(\bar{\mu}) \\ \omega(\bar{\mu}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(x, y, \bar{\mu}) \\ F_2(x, y, \bar{\mu}) \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

indeks stabilitas bifurkasi Hopf sebagai berikut

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{16} \left( \frac{\partial^3 F_1}{\partial u^3} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial u^2 \partial v} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial u \partial v^2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial v^3} \right) \\ & + \frac{1}{16\omega(c)} \left[ \frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial v} \right) \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

dengan turunan parsial terhadap  $(0,0,\bar{\mu})$ ,  $\bar{\mu}$  nilai parameter saat terjadi bifurkasi Hopf. Jika  $\Gamma < 0$ , maka orbit periodik stabil (terjadi Bifurkasi Hopf Superkritikal) dan jika  $\Gamma > 0$ , maka orbit periodik tidak stabil (terjadi Bifurkasi Hopf Subkritikal).

Perhatikan kembali bentuk normal bifurkasi Hopf (4.26) yaitu

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega(c) & 0 \\ \omega(c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(u, v, w, c) \\ F_2(u, v, w, c) \\ F_3(u, v, w, c) \end{bmatrix}$$

dengan  $\omega(c) = \sqrt{1 - c^2}$ ,

$$F_1(u, v, w, c) = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} vw,$$

$$F_2(u, v, w, c) = vw,$$

$$F_3(u, v, w, c) = -v^2, \text{ dan}$$

$$0 \leq c < 1.$$

Untuk mencari indeks stabilitas bifurkasi Hopf, bentuk normal (4.26) akan dibawa ke dalam bentuk (4.27).

Misalkan  $w = f(u, v)$  sehingga

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{f}(u, v) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega(c) & 0 \\ \omega(c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(u, v, f(u, v), c) \\ F_2(u, v, f(u, v), c) \\ F_3(u, v, f(u, v), c) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.29)$$

dengan  $\omega(c) = \sqrt{1 - c^2}$ ,

$$F_1(u, v, f(u, v), c) = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} vf(u, v),$$

$$F_2(u, v, f(u, v), c) = vf(u, v),$$

$$F_3(u, v, f(u, v), c) = -v^2, \text{ dan } 0 \leq c < 1.$$

dan misalkan  $\dot{f}(u, v) = 0$  sehingga bentuk (4.29) memenuhi bentuk (4.27), maka

$$\dot{f}(u, v) = -bf(u, v) - v^2 = 0$$

$$f(u, v) = -\frac{v^2}{b} \quad (4.30)$$

Substitusi (4.30) pada (4.29) sehingga

$$F_1(u, v, f(u, v), c) = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} vf(u, v)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} v \left( -\frac{v^2}{b} \right)$$

$$F_1(u, v, c) = -\frac{c}{b\sqrt{1-c^2}} v^3$$

dan

$$F_2(u, v, f(u, v), c) = vf(u, v)$$

$$= v \left( -\frac{v^2}{b} \right)$$

$$F_2(u, v, c) = -\frac{1}{b} v^3$$

maka (4.29) menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega(c) \\ \omega(c) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(u, v, c) \\ F_2(u, v, c) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

dengan

$$\omega(c) = \sqrt{1 - c^2},$$

$$F_1(u, v, c) = -\frac{c}{b\sqrt{1 - c^2}}v^3,$$

$$F_2(u, v, c) = -\frac{1}{b}v^3, \text{ dan}$$

$$0 \leq c < 1.$$

Berdasarkan bentuk normal (4.31), diperoleh

$$\frac{\partial F_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 F_1}{\partial u^3} = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = -\frac{3c}{b\sqrt{1 - c^2}}v^2, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} = -\frac{6c}{b\sqrt{1 - c^2}}v,$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^3 F_1}{\partial u \partial v^2} = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial v} = -\frac{3}{b}v^2, \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} = -\frac{6}{b}v, \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial v^3} = -\frac{6}{b},$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^3 F_2}{\partial u^2 \partial v} = 0,$$

sehingga indeks stabilitas bifurkasi Hopf sebagai berikut

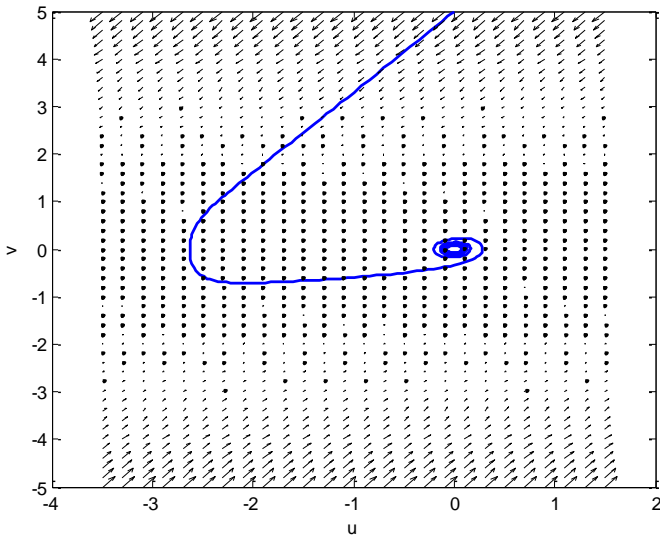
$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{16} \left( \frac{\partial^3 F_1}{\partial u^3} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial u^2 \partial v} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial u \partial v^2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial v^3} \right) \\ & + \frac{1}{16\omega(c)} \left[ \frac{\partial^2 F_1}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial u \partial v} \right) \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 F_1}{\partial u^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial v^2} \right] \end{aligned}$$

$$\Gamma = \frac{1}{16} \left( -\frac{6}{b} \right)$$

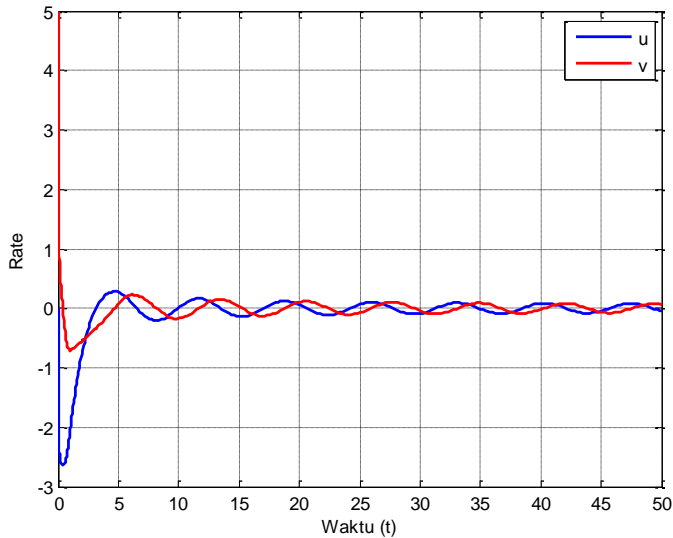
$$\Gamma = -\frac{3}{8b} \quad (4.32)$$

Berdasarkan indeks stabilitas (4.32), dapat ditentukan kestabilan dari orbit periodik bifurkasi Hopf. Karena  $8b > 0$  sehingga  $\Gamma < 0$ , maka orbit periodik stabil (terjadi Bifurkasi Hopf Superkritikal).

Selanjutnya, diselidiki eksistensi Bifurkasi Hopf pada model sistem keuangan dengan parameter seperti pada [3]. Misalkan  $a = 4.5$ ,  $b = 0.2$ , dan  $c = 0.5$ , diperoleh



**Gambar 4.1** Trayektori Orbit Periodik Model Sistem Keuangan



**Gambar 4.2** Grafik Kestabilan Orbit Periodik Model Sistem Keuangan

Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 4.1 dan 4.2, terlihat bahwa terjadi bifurkasi Hopf pada Kasus 5 ini dengan orbit periodik stabil (Bifurkasi Hopf Superkritikal).

#### 4.4 Simulasi Numerik

Pada subbab ini, dibahas bagaimana cara untuk memperoleh solusi numerik dari model sistem keuangan dan simulasi numeriknya, serta interpretasi dari hasil analisis yang sudah dilakukan.

Penyelesaian numerik dicari dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde-4. Metode ini mempunyai suatu galat pemotongan  $h^4$ , dengan  $h$  merupakan langkah waktu.

Perhatikan kembali sistem (4.1). Misalkan

$$\begin{aligned}
 f_1(t, x, y, z) &= \dot{x} = z + (y - a)x \\
 f_2(t, x, y, z) &= \dot{y} = 1 - by - x^2 \\
 f_3(t, x, y, z) &= \dot{z} = -x - cz
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

dan misalkan nilai awal untuk (4.33) adalah

$$x(t_0) = x_0$$

$$y(t_0) = y_0,$$

$$z(t_0) = z_0$$

maka diperoleh integrasi numerik dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde-4 sebagai berikut :

$$x_{j+1} = x_j + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x})$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y})$$

$$z_{j+1} = z_j + \frac{1}{6}(k_{1,z} + 2k_{2,z} + 2k_{3,z} + k_{4,z})$$

dengan

$$\begin{aligned}
 k_{1,x} &= hf_1(t_j, x_j, y_j, z_j) \\
 &= h(z_j + (y_j - a)x_j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{1,y} &= hf_2(t_j, x_j, y_j, z_j) \\
 &= h(1 - by_j - x_j^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{1,z} &= hf_3(t_j, x_j, y_j, z_j) \\
 &= h(-x_j - cz_j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{2,x} &= hf_1\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{1,x}}{2}, y_j + \frac{k_{1,y}}{2}, z_j + \frac{k_{1,z}}{2}\right) \\
 &= h\left(\left(z_j + \frac{k_{1,z}}{2}\right) + \left(\left(y_j + \frac{k_{1,y}}{2}\right) - a\right)\left(x_j + \frac{k_{1,x}}{2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{2,y} &= hf_2\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{1,x}}{2}, y_j + \frac{k_{1,y}}{2}, z_j + \frac{k_{1,z}}{2}\right) \\
 &= h\left(1 - b\left(y_j + \frac{k_{1,y}}{2}\right) - \left(x_j + \frac{k_{1,x}}{2}\right)^2\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,z} &= hf_3 \left( t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{1,x}}{2}, y_j + \frac{k_{1,y}}{2}, z_j + \frac{k_{1,z}}{2} \right) \\
&= h \left( - \left( x_j + \frac{k_{1,x}}{2} \right) - c \left( z_j + \frac{k_{1,z}}{2} \right) \right) \\
k_{3,x} &= hf_1 \left( t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{2,x}}{2}, y_j + \frac{k_{2,y}}{2}, z_j + \frac{k_{2,z}}{2} \right) \\
&= h \left( \left( z_j + \frac{k_{2,z}}{2} \right) + \left( \left( y_j + \frac{k_{2,y}}{2} \right) - a \right) \left( x_j + \frac{k_{2,x}}{2} \right) \right) \\
k_{3,y} &= hf_2 \left( t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{2,x}}{2}, y_j + \frac{k_{2,y}}{2}, z_j + \frac{k_{2,z}}{2} \right) \\
&= h \left( 1 - b \left( y_j + \frac{k_{2,y}}{2} \right) - \left( x_j + \frac{k_{2,x}}{2} \right)^2 \right) \\
k_{3,z} &= hf_3 \left( t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{2,x}}{2}, y_j + \frac{k_{2,y}}{2}, z_j + \frac{k_{2,z}}{2} \right) \\
k_{3,z} &= h \left( - \left( x_j + \frac{k_{2,x}}{2} \right) - c \left( z_j + \frac{k_{2,z}}{2} \right) \right) \\
k_{4,x} &= hf_1 (t_j + h, x_j + k_{3,x}, y_j + k_{3,y}, z_j + k_{3,z}) \\
&= h \left( (z_j + k_{3,z}) + ((y_j + k_{3,y}) - a) (x_j + k_{3,x}) \right) \\
k_{4,y} &= hf_2 (t_j + h, x_j + k_{3,x}, y_j + k_{3,y}, z_j + k_{3,z}) \\
&= h \left( 1 - b(y_j + k_{3,y}) - (x_j + k_{3,x})^2 \right) \\
k_{4,z} &= hf_3 (t_j + h, x_j + k_{3,x}, y_j + k_{3,y}, z_j + k_{3,z}) \\
&= h \left( -(x_j + k_{3,x}) - c(z_j + k_{3,z}) \right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan program MATLAB, penyelesaian numerik dengan metode numerik Runge-Kutta tersebut dijalankan dan diselidiki hubungan antara nilai karakteristik dengan kestabilan titik tetap untuk 5 KASUS seperti pada subbab sebelumnya.

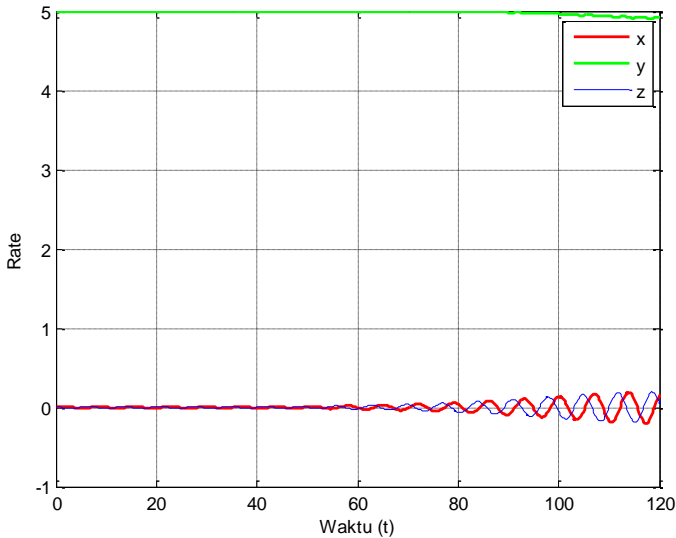


**KASUS 1**

$$1 + ac - \frac{c}{b} > 0 \text{ dan } c + a - \frac{1}{b} < 0 \text{ sehingga}$$

$$\lambda_1 = -b < 0, \lambda_2 > 0, \text{ dan } \lambda_3 > 0$$

Simulasi menggunakan parameter seperti pada [3]. Misalkan  $a = 4.5, b = 0.2$  sehingga diperoleh titik tetap  $E(0, 5, 0)$  dan  $c$  yang memenuhi adalah  $c < 2$  dan  $c < 0.5$ . Selanjutnya, ambil  $c = 0.4$  dan dilakukan simulasi numerik dengan metode numerik Runge-Kutta orde-4 untuk nilai awal  $(x_0, y_0, z_0) = (0.000003, 4.998635, 0.001040)$ , diperoleh



**Gambar 4.3** Grafik Kestabilan Kasus 1

Laju Perubahan Suku Bunga ( $x$ )

Berdasarkan Gambar 4.3, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk suku bunga dengan nilai awal sebesar 0.000003 beresilasi seiring bertambahnya waktu menjauhi titik 0.

Laju Perubahan Tingkat Permintaan Investasi ( $y$ )

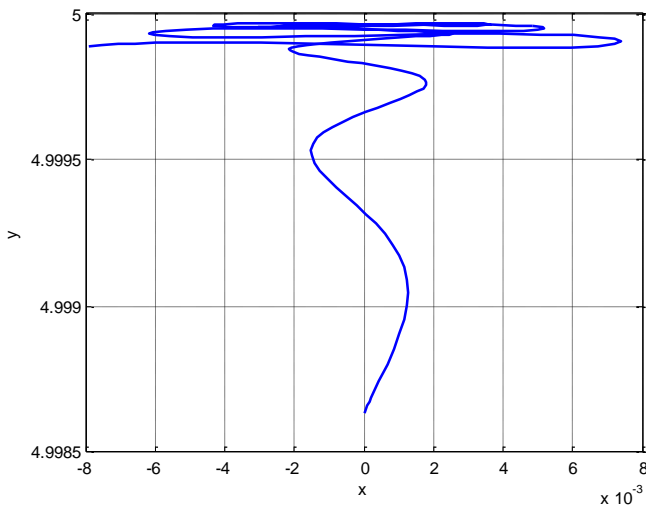
Berdasarkan Gambar 4.3, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk tingkat permintaan investasi dengan nilai awal sebesar 4.998635 terus menurun seiring bertambahnya waktu menjauhi titik 5.

Laju Perubahan Indeks Harga Instrumen Keuangan ( $z$ )

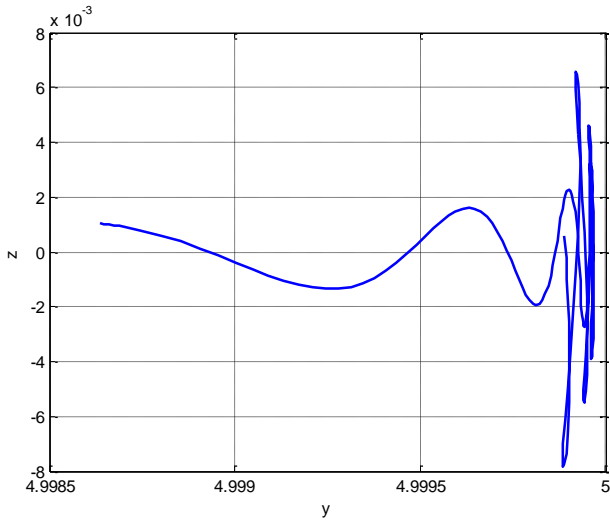
Berdasarkan Gambar 4.3, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk indeks harga instrumen keuangan dengan nilai awal sebesar 0.001040 berosilasi seiring bertambahnya waktu menjauhi titik 0.

Berdasarkan Gambar 4.3, terlihat bahwa penyelesaian model sistem keuangan pada kasus ini menjauhi titik tetapnya yaitu  $E(0,5,0)$  yang berarti bahwa titik tetap  $E(0,5,0)$  tidak stabil. Hasil simulasi ini sesuai dengan hasil analisis yang telah dilakukan pada subbab sebelumnya.

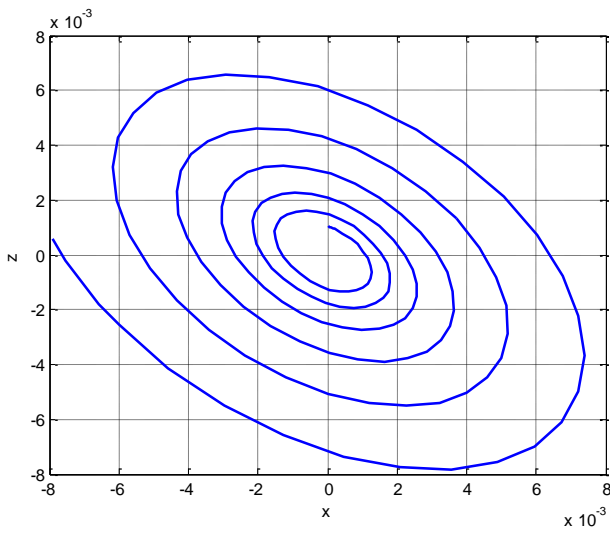
Hubungan antara suku bunga  $x$ , tingkat permintaan investasi  $y$ , dan indeks harga instrumen keuangan  $z$  pada Kasus 1 dapat dilihat pada hasil simulasi di bawah ini.



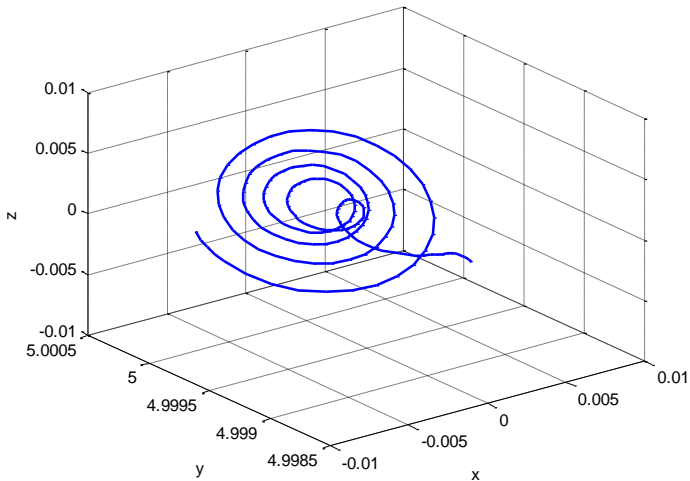
**Gambar 4.4** Trayektori  $x, y$  Kasus 1



**Gambar 4.5** Trayektori  $y, z$  Kasus 1



**Gambar 4.6** Trayektori  $x, z$  Kasus 1



**Gambar 4.7** Trayektori  $x, y, z$  Kasus 1

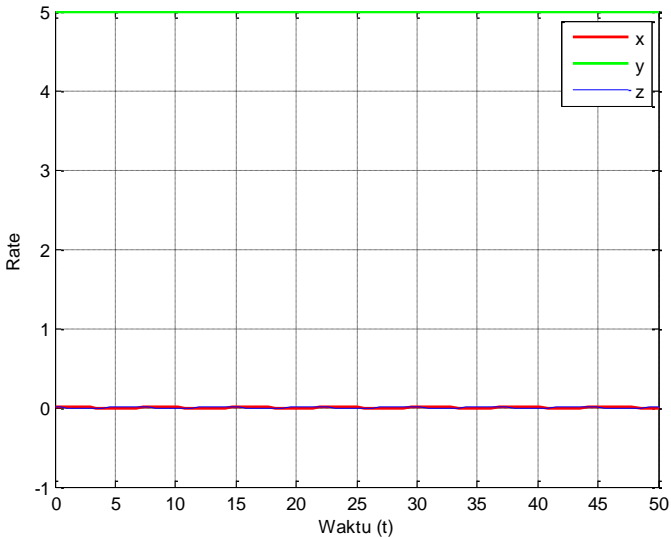
Interpretasi dari hasil analisis dan hasil simulasi menunjukkan bahwa ketika fenomena yang terjadi pada sistem keuangan real memenuhi kondisi ini, maka suku bunga akan naik turun seiring bertambahnya waktu. Hal tersebut berdampak pada naik turunnya harga instrumen keuangan sehingga indeks harga instrumen keuangan juga naik turun. Tingkat permintaan investasi untuk beberapa waktu akan terus naik dan selanjutnya menurun karena para pelaku ekonomi akhirnya lebih memilih untuk menabung di bank daripada melakukan investasi. Pada kondisi ini, sistem keuangan tidak stabil karena total kegiatan produksi akan berkurang untuk total konsumsi yang sama di dalam masyarakat.

## KASUS 2

$$1 + ac - \frac{c}{b} > 0 \text{ dan } c + a - \frac{1}{b} > 0 \text{ sehingga}$$

$$\lambda_1 = -b < 0, \lambda_2 < 0, \text{ dan } \lambda_3 < 0$$

Simulasi menggunakan parameter seperti pada [3]. Misalkan  $a = 4.5, b = 0.2$  sehingga diperoleh titik tetap  $E(0, 5, 0)$  dan  $c$  yang memenuhi adalah  $0.5 < c < 2$ . Selanjutnya, ambil  $c = 0.6$  dan dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde-4 untuk nilai awal  $(x_0, y_0, z_0) = (0.000011, 4.998655, 0.000011)$ , diperoleh



**Gambar 4.8** Grafik Kestabilan Kasus 2

#### Laju Perubahan Suku Bunga ( $x$ )

Berdasarkan Gambar 4.8, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk suku bunga dengan nilai awal sebesar 0.000011 bergerak di dekat titik 0 seiring bertambahnya waktu.

#### Laju Perubahan Tingkat Permintaan Investasi ( $y$ )

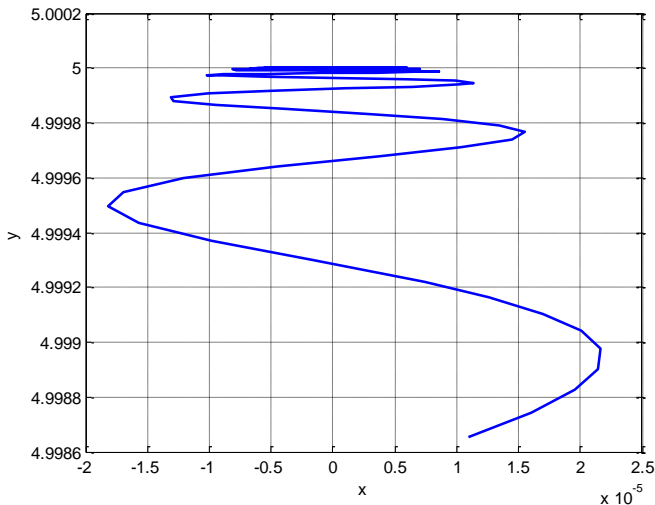
Berdasarkan Gambar 4.8, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk tingkat permintaan investasi dengan nilai awal sebesar 4.998655 menuju titik 5 kemudian konstan seiring bertambahnya waktu.

Laju Perubahan Indeks Harga Instrumen Keuangan ( $z$ )

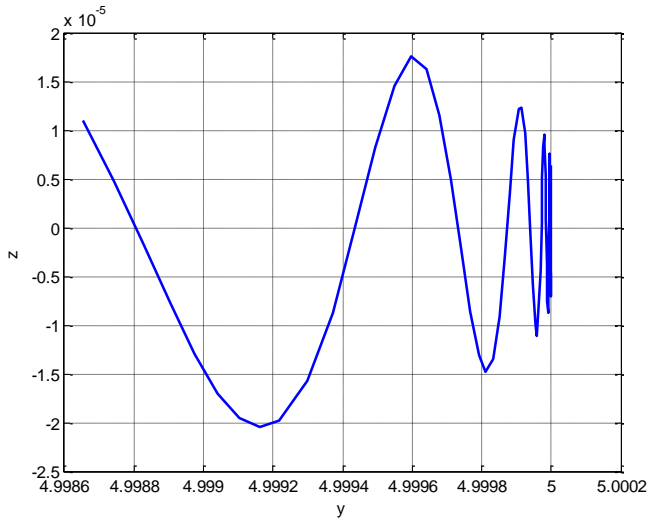
Berdasarkan Gambar 4.8, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk indeks harga instrumen keuangan dengan nilai awal sebesar 0.000011 bergerak di dekat titik 0 seiring bertambahnya waktu.

Berdasarkan Gambar 4.8, terlihat bahwa penyelesaian model sistem keuangan pada kasus ini mendekati dan konvergen ke titik tetapnya yaitu  $E(0,5,0)$  yang berarti bahwa titik tetap  $E(0,5,0)$  stabil asimtotis. Hasil simulasi ini sesuai dengan hasil analisis yang telah dilakukan pada subbab sebelumnya.

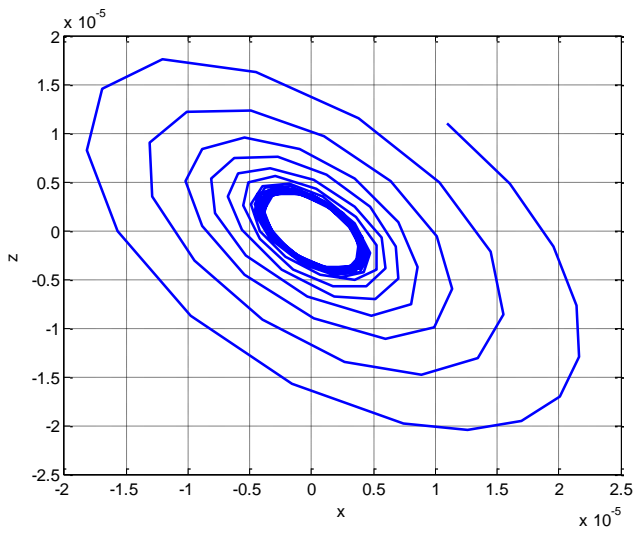
Hubungan antara suku bunga  $x$ , tingkat permintaan investasi  $y$ , dan indeks harga instrumen keuangan  $z$  pada Kasus 2 dapat dilihat pada hasil simulasi di bawah ini.



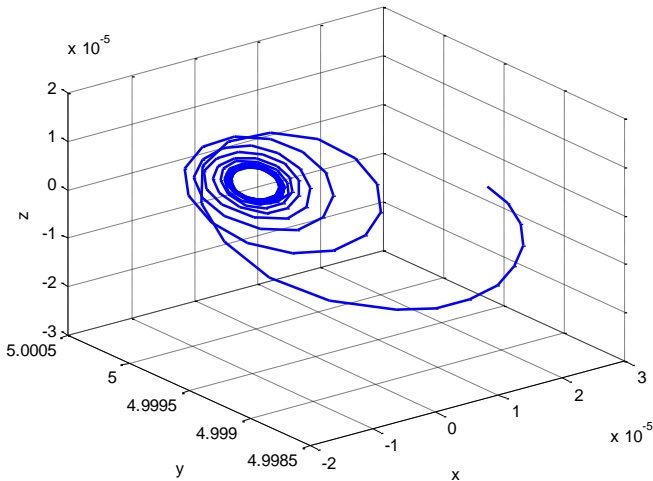
**Gambar 4.9** Trayektori  $x, y$  Kasus 2



**Gambar 4.10** Trayektori  $y, z$  Kasus 2



**Gambar 4.11** Trayektori  $x, z$  Kasus 2



**Gambar 4.12** Trayektori  $x, y, z$  Kasus 2

Interpretasi dari hasil analisis dan hasil simulasi menunjukkan bahwa ketika fenomena yang terjadi pada sistem keuangan memenuhi kondisi ini, maka sistem keuangan akan stabil dengan suku bunga rendah, indeks harga instrumen keuangan rendah dan tingkat permintaan investasi seiring berjalannya waktu menjadi konstan di angka yang seharusnya. Kondisi ini memberikan gambaran di mana sistem keuangan berjalan dengan baik dan perekonomian berjalan lancar karena dengan suku bunga dan indeks harga instrumen keuangan yang sesuai pada kondisi ini menyebabkan total kegiatan produksi tetap mencukupi untuk total konsumsi di masyarakat.

### KASUS 3

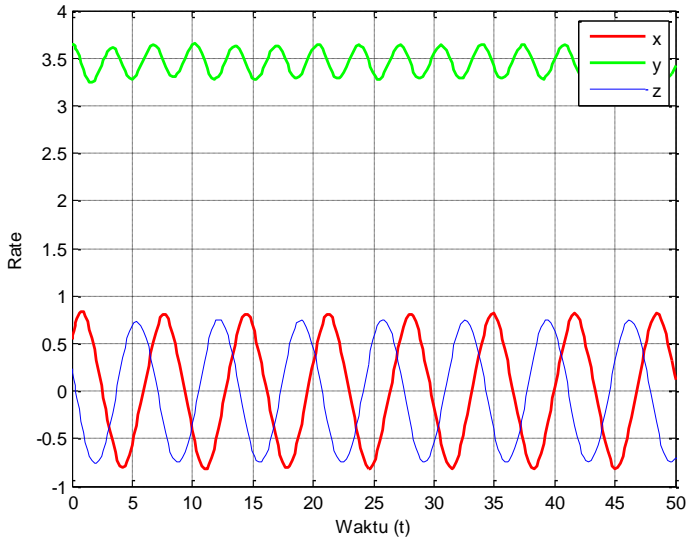
$$1 + ac - \frac{c}{b} = 0 \text{ dan } c + a - \frac{1}{b} < 0 \text{ sehingga}$$

$$\lambda_1 = -b < 0, \lambda_2 = 0, \text{ dan } \lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} > 0$$

dengan  $0 < c < 1$



Simulasi menggunakan parameter seperti pada [3]. Misalkan  $a = 3, b = 0.2$  sehingga diperoleh titik tetap  $E(0, 5, 0)$  dan  $c$  yang memenuhi adalah  $c = 0.5$ . Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta orde-4 untuk nilai awal  $(x_0, y_0, z_0) = (0.548091, 3.6497, 0.232718)$ , diperoleh



**Gambar 4.13** Grafik Kestabilan Kasus 3

Laju Perubahan Suku Bunga ( $x$ )

Berdasarkan Gambar 4.13, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk suku bunga dengan nilai awal sebesar 0.548091 beresilasi seiring bertambahnya waktu jauh dari titik 0.

Laju Perubahan Tingkat Permintaan Investasi ( $y$ )

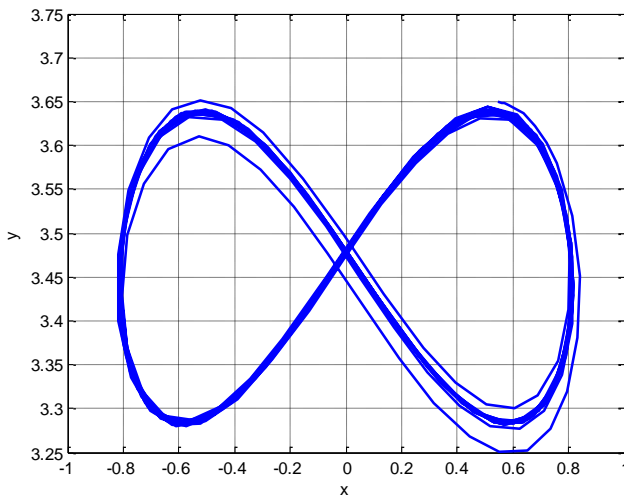
Berdasarkan Gambar 4.13, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk tingkat permintaan investasi dengan nilai awal sebesar 3.6497 beresilasi seiring bertambahnya waktu jauh dari titik 5.

Laju Perubahan Indeks Harga Instrumen Keuangan ( $z$ )

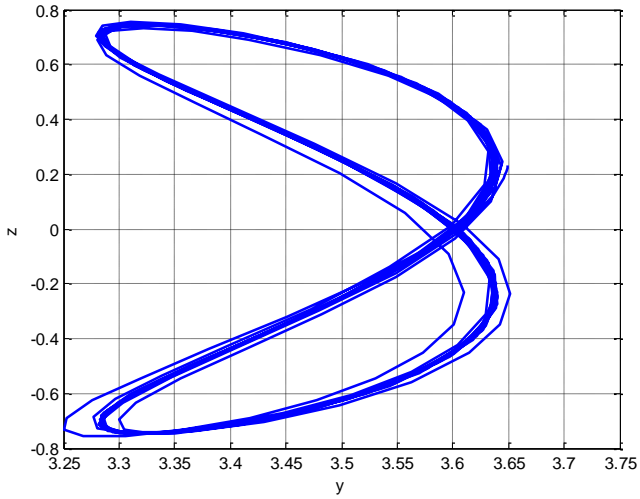
Berdasarkan Gambar 4.13, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk indeks harga instrumen keuangan dengan nilai awal sebesar 0.232718 beresilasi seiring bertambahnya waktu jauh dari titik 0.

Berdasarkan Gambar 4.13, terlihat bahwa penyelesaian model sistem keuangan pada kasus ini tidak mendekati titik tetapnya yaitu  $E(0,5,0)$  yang berarti bahwa titik tetap  $E(0,5,0)$  tidak stabil. Hasil simulasi ini sesuai dengan hasil analisis yang telah dilakukan pada subbab sebelumnya.

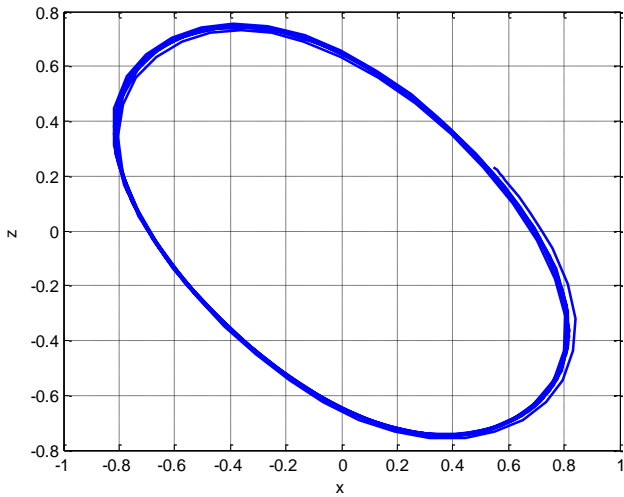
Hubungan antara suku bunga  $x$ , tingkat permintaan investasi  $y$ , dan indeks harga instrumen keuangan  $z$  pada Kasus 3 dapat dilihat pada hasil simulasi di bawah ini.



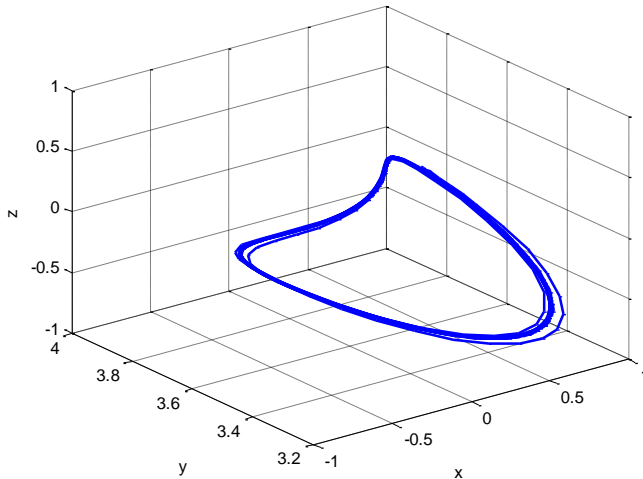
**Gambar 4.14** Trayektori  $x, y$  Kasus 3



**Gambar 4.15** Trayektori  $y, z$  Kasus 3



**Gambar 4.16** Trayektori  $x, z$  Kasus 3



**Gambar 4.17** Trayektori  $x, y, z$  Kasus 3

Interpretasi dari hasil analisis dan hasil simulasi menunjukkan bahwa ketika fenomena yang terjadi pada sistem keuangan real memenuhi kondisi ini, maka suku bunga akan naik turun tidak terkendali seiring bertambahnya waktu. Hal tersebut berdampak pada naik turunnya harga instrumen keuangan sehingga indeks harga instrumen keuangan juga naik turun. Tingkat permintaan investasi naik turun karena para pelaku ekonomi akan mengikuti kondisi yang ada, tetapi tidak mencapai tingkat permintaan investasi yang seharusnya. Akibatnya, total kegiatan produksi tidak mencukupi untuk total konsumsi di masyarakat. Pada kondisi ini, sistem keuangan tidak stabil.

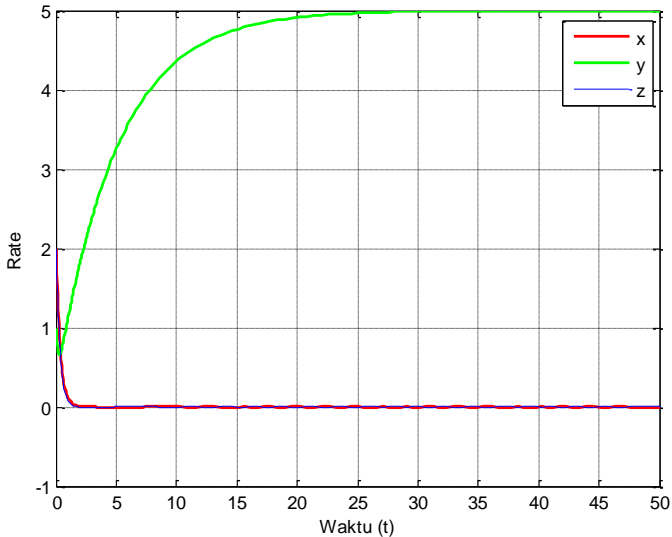
#### **KASUS 4**

$$1 + ac - \frac{c}{b} = 0 \text{ dan } c + a - \frac{1}{b} < 0 \text{ sehingga}$$

$$\lambda_1 = -b < 0, \lambda_2 = 0, \text{ dan } \lambda_3 = \frac{1-c^2}{c} < 0$$

dengan  $c > 1$

Simulasi menggunakan parameter seperti pada [3]. Misalkan  $a = 4.5, b = 0.2$  sehingga diperoleh titik tetap  $E(0, 5, 0)$  dan  $c$  yang memenuhi adalah  $c = 2$ . Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta orde-4 untuk nilai awal  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 2)$ , diperoleh



**Gambar 4.18** Grafik Kestabilan Kasus 4

#### Laju Perubahan Suku Bunga ( $x$ )

Berdasarkan Gambar 4.18, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk suku bunga dengan nilai awal sebesar 2 turun drastis mendekati titik 0, kemudian bergerak di dekat titik 0 seiring bertambahnya waktu.

#### Laju Perubahan Tingkat Permintaan Investasi ( $y$ )

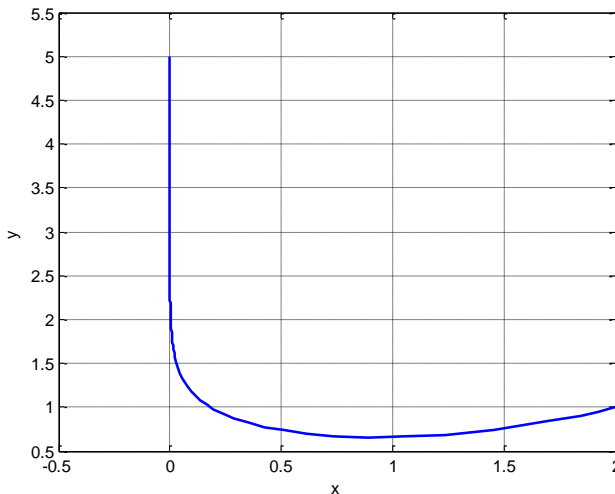
Berdasarkan Gambar 4.18, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk tingkat permintaan investasi dengan nilai awal sebesar 1 naik drastis, kemudian konstan di titik 5 seiring bertambahnya waktu.

Laju Perubahan Indeks Harga Instrumen Keuangan (z)

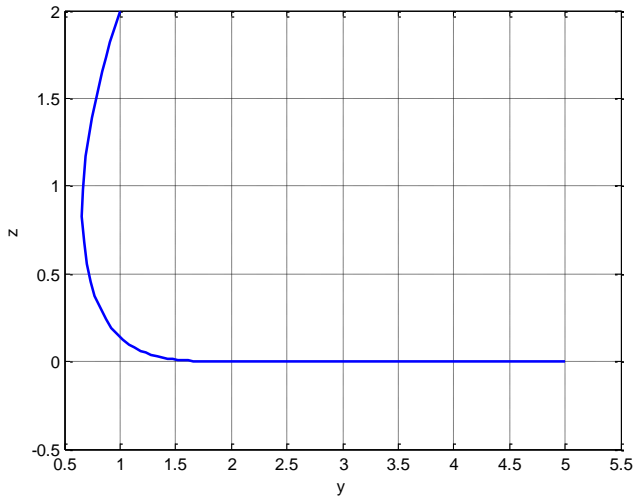
Berdasarkan Gambar 4.18, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk indeks harga instrumen keuangan dengan nilai awal sebesar 2 turun drastis mendekati titik 0, kemudian bergerak di dekat titik 0 seiring bertambahnya waktu.

Berdasarkan Gambar 4.18, terlihat bahwa penyelesaian model sistem keuangan pada kasus ini bergerak mendekati titik tetapnya yaitu  $E(0,5,0)$  yang berarti bahwa titik tetap  $E(0,5,0)$  stabil. Hasil simulasi ini sesuai dengan hasil analisis yang telah dilakukan pada subbab sebelumnya.

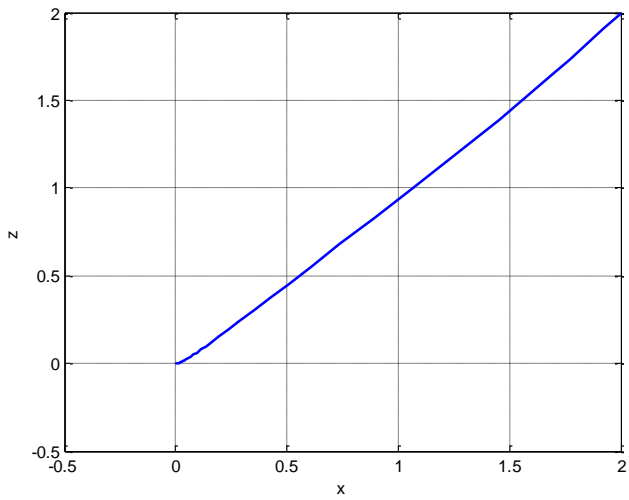
Hubungan antara suku bunga  $x$ , tingkat permintaan investasi  $y$ , dan indeks harga instrumen keuangan  $z$  pada Kasus 4 dapat dilihat pada hasil simulasi di bawah ini.



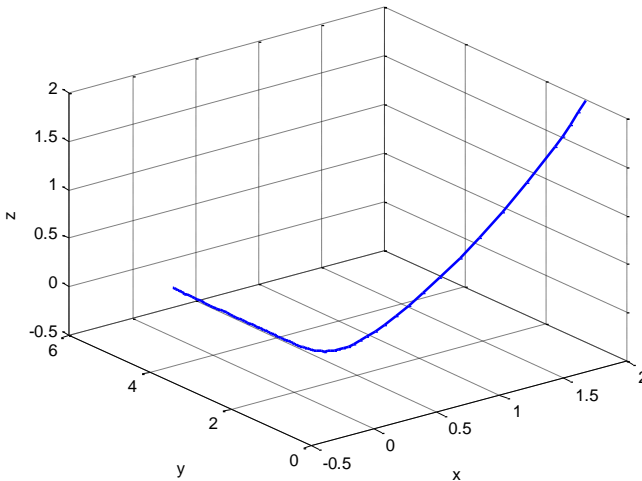
**Gambar 4.19** Trayektori  $x, y$  Kasus 4



**Gambar 4.20** Trayektori  $y, z$  Kasus 4



**Gambar 4.21** Trayektori  $x, z$  Kasus 4



**Gambar 4.22** Trayektori  $x, y, z$  Kasus 4

Interpretasi dari hasil analisis dan hasil simulasi menunjukkan bahwa ketika fenomena yang terjadi pada sistem keuangan memenuhi kondisi ini, maka sistem keuangan akan stabil dengan suku bunga rendah, indeks harga instrumen keuangan rendah, dan tingkat permintaan investasi seiring berjalannya waktu menjadi konstan di angka yang seharusnya. Kondisi ini memberikan gambaran di mana sistem keuangan berjalan dengan baik dan perekonomian berjalan lancar karena dengan suku bunga dan indeks harga instrumen keuangan yang sesuai pada kondisi ini menyebabkan total kegiatan produksi tetap mencukupi untuk total konsumsi di masyarakat.

### KASUS 5

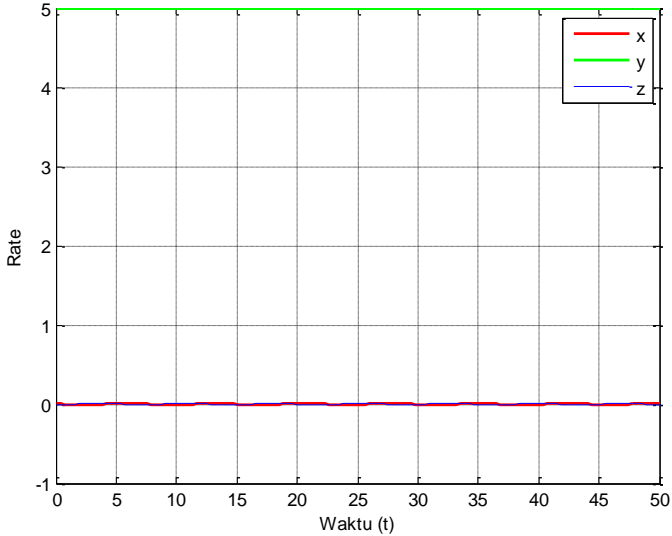
$$1 + ac - \frac{c}{b} > 0 \text{ dan } c + a - \frac{1}{b} = 0 \text{ sehingga}$$

$$\lambda_1 = -b < 0, \lambda_2 = i\sqrt{1 - c^2}, \text{ dan } \lambda_3 = -i\sqrt{1 - c^2}$$

dengan  $0 \leq c < 1$



Simulasi menggunakan parameter seperti pada [3]. Misalkan  $a = 4.5, b = 0.2$  sehingga diperoleh titik tetap  $E(0, 5, 0)$  dan  $c$  yang memenuhi adalah  $c = 0.5$ . Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta orde-4 untuk nilai awal  $(x_0, y_0, z_0) = (0.000058, 4.998648, 0.00012)$ , diperoleh



**Gambar 4.23** Grafik Kestabilan Kasus 5

Laju Perubahan Suku Bunga ( $x$ )

Berdasarkan Gambar 4.23, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk suku bunga dengan nilai awal sebesar 0.000058 bergerak di dekat titik 0 seiring bertambahnya waktu.

Laju Perubahan Tingkat Permintaan Investasi ( $y$ )

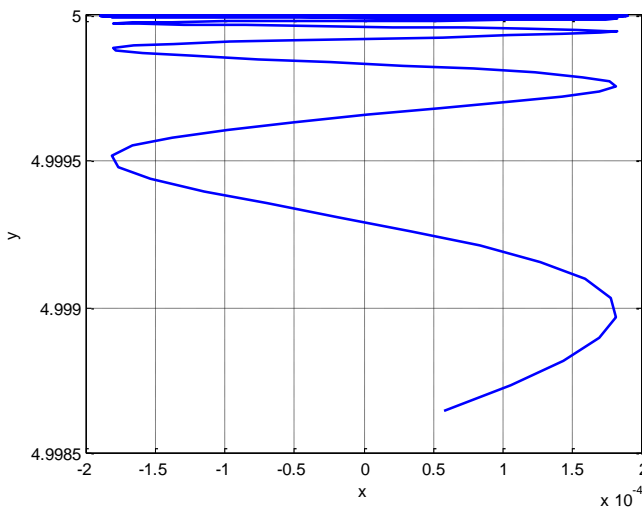
Berdasarkan Gambar 4.23, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk tingkat permintaan investasi dengan nilai awal sebesar 4.998648 menuju titik 5 kemudian konstan seiring bertambahnya waktu.

Laju Perubahan Indeks Harga Instrumen Keuangan ( $z$ )

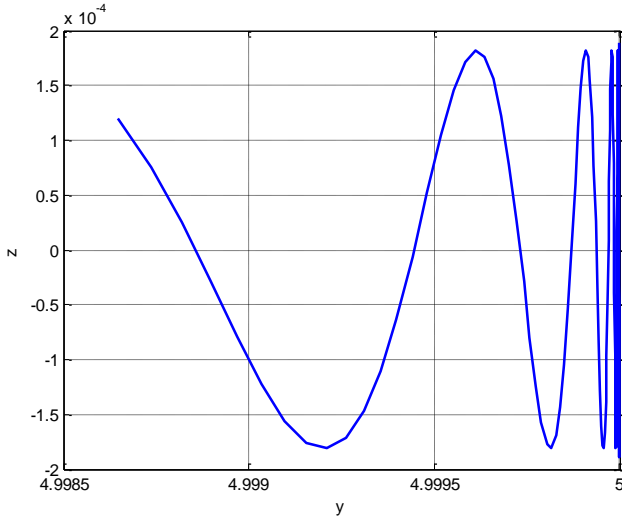
Berdasarkan Gambar 4.23, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk indeks harga instrumen keuangan dengan nilai awal sebesar 0.00012 bergerak di dekat titik 0 seiring bertambahnya waktu.

Berdasarkan Gambar 4.23, terlihat bahwa penyelesaian model sistem keuangan pada kasus ini mendekati titik tetapnya yaitu  $E(0,5,0)$  yang berarti bahwa titik tetap  $E(0,5,0)$  stabil. Hasil simulasi ini sesuai dengan hasil analisis yang telah dilakukan pada subbab sebelumnya.

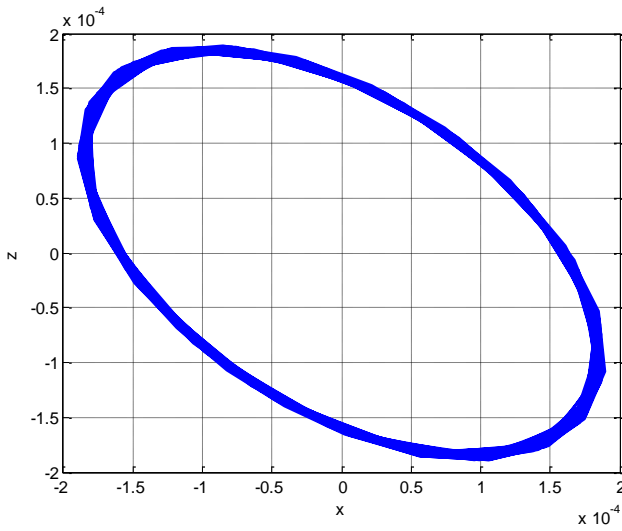
Hubungan antara suku bunga  $x$ , tingkat permintaan investasi  $y$ , dan indeks harga instrumen keuangan  $z$  pada Kasus 5 dapat dilihat pada hasil simulasi di bawah ini.



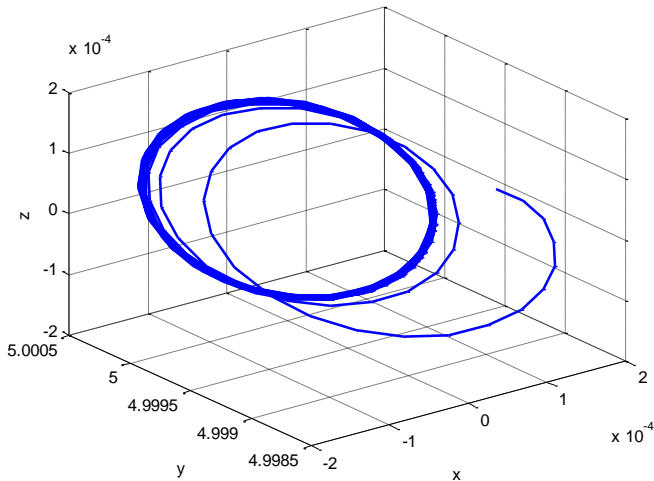
**Gambar 4.24** Trayektori  $x, y$  Kasus 5



**Gambar 4.25** Trayektori  $y, z$  Kasus 5



**Gambar 4.26** Trayektori  $x, z$  Kasus 5



**Gambar 4.27** Trayektori  $x, y, z$  Kasus 5

Interpretasi dari hasil analisis dan hasil simulasi menunjukkan bahwa ketika fenomena yang terjadi pada sistem keuangan memenuhi kondisi ini, maka sistem keuangan stabil dengan suku bunga rendah, indeks harga instrumen keuangan rendah, dan tingkat permintaan investasi seiring berjalannya waktu menjadi konstan pada angka yang seharusnya. Kondisi ini memberikan gambaran di mana sistem keuangan berjalan dengan baik dan perekonomian berjalan lancar karena dengan suku bunga dan indeks harga instrumen keuangan yang sesuai pada kondisi ini menyebabkan total kegiatan produksi tetap mencukupi untuk total konsumsi di masyarakat.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## LAMPIRAN

Listing Program Simulasi Kestabilan dan Bifurkasi Hopf pada Model Sistem Keuangan

- M File dengan judul

### **Simulasi\_Kestabilan\_dan\_Bifurkasi\_Hopf.m**

```
function varargout =  
Simulasi_Kestabilan_dan_Bifurkasi_Hopf(vara  
rgin)  
% Begin initialization code - DO NOT EDIT  
gui_Singleton = 1;  
gui_State = struct('gui_Name',  
mfilename, ...  
                  'gui_Singleton',  
gui_Singleton, ...  
                  'gui_OpeningFcn',  
@Simulasi_Kestabilan_dan_Bifurkasi_Hopf_Ope  
ningFcn, ...  
                  'gui_OutputFcn',  
@Simulasi_Kestabilan_dan_Bifurkasi_Hopf_Out  
putFcn, ...  
                  'gui_LayoutFcn', [] ,  
                  ...  
                  'gui_Callback', []);  
if nargin && ischar(varargin{1})  
    gui_State.gui_Callback =  
    str2func(varargin{1});  
end  
  
if nargout  
    [varargout{1:nargout}] =  
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});  
else  
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});  
end  
% End initialization code - DO NOT EDIT
```

## Lanjutan Lampiran

```

function
Simulasi_Kestabilan_dan_Bifurkasi_Hopf_Open
ingFcn(hObject, eventdata, handles,
varargin)
% Choose default command line output for
Simulasi_Kestabilan_dan_Bifurkasi_Hopf
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);
% --- Outputs from this function are
returned to the command line.

function varargout =
Simulasi_Kestabilan_dan_Bifurkasi_Hopf_Outp
utFcn(hObject, eventdata, handles)
% Get default command line output from
handles structure
varargout{1} = handles.output;

function running_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% handles      structure with handles and
user data (see GUIDATA)
global x y z a b c X t ti A B C omega
x=str2double(get(handles.x0,'string'));
y=str2double(get(handles.y0,'string'));
z=str2double(get(handles.z0,'string'));
a=str2double(get(handles.a0,'string'));
b=str2double(get(handles.b0,'string'));
c=str2double(get(handles.c0,'string'));
ti=str2double(get(handles.t0,'string'));
X=[x y z];
t=[0 ti];
[t hasil]=ode45(@Model_Sistem_Keuangan,t,X);
pilih=get(handles.popupmenu1,'value');

```

## Lanjutan Lampiran

```

switch pilih
    case 1
    case 2
        cla(handles.axes1);
        reset(gca);
        legend('0');
        axes(handles.axes1);
    plot(t,hasil(:,1),'r','Linewidth',1.5);
    %plot hasil ode dari x
        hold on
        plot(t,hasil(:,2),'g'); %plot
    hasil ode dari y
        hold on
        plot(t,hasil(:,3),'b'); %plot
    hasil ode dari z
        title('Grafik Kestabilan Terhadap
    Waktu');
        legend('x','y','z');
        ylabel('Rate');
        xlabel('Waktu (t)');
        grid on
    case 3
        cla(handles.axes1);
        reset(gca);
        legend('0');
        axes(handles.axes1);
        plot(hasil(:,1),hasil(:,2));
        hold on
        title('Trayektori XY');
        xlabel('x');
        ylabel('y');
        grid on
    case 4
        cla(handles.axes1);
        reset(gca);
        legend('0');

```



## Lanjutan Lampiran

```

axes(handles.axes1);
plot(hasil(:,2),hasil(:,3));
hold on
title('Trayektori YZ');
xlabel('y');
ylabel('z');
grid on
case 5
cla(handles.axes1);
reset(gca);
legend('0');
axes(handles.axes1);
plot(hasil(:,1),hasil(:,3));
hold on
title('Trayektori XZ');
xlabel('x');
ylabel('z');
grid on
case 6
cla(handles.axes1);
reset(gca);
legend('0');
axes(handles.axes1);

plot3(hasil(:,1),hasil(:,2),hasil(:,3));
hold on
title('Trayektori XYZ');
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
grid on

end

A=1+a*c-(c/b);
B=c+a-(1/b);
C=(1-c^2)/c;
omega=sqrt(1-c^2);

```

## Lanjutan Lampiran

```

if ((A>0) && (B<0))
    set(handles.Hasil, 'String', 'Tidak
Stabil');
elseif ((A>0) && (B>0))
    set(handles.Hasil, 'String', 'Stabil')
elseif ((A==0) && (B<0))
    set(handles.Hasil, 'String', 'Tidak
Stabil')
elseif ((A==0) && (B>0))
    set(handles.Hasil, 'String', 'Stabil')
elseif ((A>0) && (B==0))
    set(handles.Hasil, 'String', 'Bifurkasi
Hopf')
else
    set(handles.Hasil, 'String', 'Bifurkasi')

end

function exit_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)
close;

function popupmenu1_Callback(hObject,
eventdata, handles)

function popupmenu1_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
if ispc &&
isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end

function lambda1_Callback(hObject,
eventdata, handles)

```

## Lanjutan Lampiran

```
function lambda1_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
```

```
function lambda2_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)
```

```
function lambda2_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
```

```
function Hitung_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)
global a b c A B C omega
a=str2double(get(handles.a0, 'string'));
b=str2double(get(handles.b0, 'string'));
c=str2double(get(handles.c0, 'string'));
A=1+a*c- (c/b);
B=c+a- (1/b);
C=(1-c^2)/c;
omega=sqrt(1-c^2);
```

## Lanjutan Lampiran

```

set(handles.lambda1, 'String', ['= '
num2str(-b) ' <0']);
if ((A>0) && (B<0))
    set(handles.lambda2, 'String', '>0');
    set(handles.lambda3, 'String', '>0');
elseif ((A>0) && (B>0))
    set(handles.lambda2, 'String', '<0');
    set(handles.lambda3, 'String', '<0');
elseif ((A==0) && (B<0))
    set(handles.lambda2, 'String', '0');
    set(handles.lambda3, 'String', ['= '
num2str(C) ' >0']);
elseif ((A==0) && (B>0))
    set(handles.lambda2, 'String', '0');
    set(handles.lambda3, 'String', ['= '
num2str(C) ' <0']);
elseif ((A>0) && (B==0))
    if (omega==1)
        set(handles.lambda2, 'String', '= i');
        set(handles.lambda3, 'String', '= -i');
    else
        set(handles.lambda2, 'String', ['= '
num2str(omega) ' i']);
        set(handles.lambda3, 'String', ['= '
num2str(-omega) ' i']);
    end
end
else
    set(handles.lambda2, 'String', '0');
    set(handles.lambda3, 'String', '0');
end

function a0_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)
function a0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)

```

## Lanjutan Lampiran

```
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function b0_Callback(hObject, eventdata,
handles)
```

```
function b0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function c0_Callback(hObject, eventdata,
handles)
```

```
function c0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

```
function x0_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)
```

## Lanjutan Lampiran

```

function x0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
function y0_Callback(hObject, eventdata,
handles)

function y0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end

function z0_Callback(hObject, eventdata,
handles)

function z0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end

function t0_Callback(hObject, eventdata,
handles)

```

## Lanjutan Lampiran

```
function t0_CreateFcn(hObject, eventdata,
handles)
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
```

```
function lambda3_Callback(hObject,
eventdata, handles)
```

```
function lambda3_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
```

```
function axes1_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
```

```
function reset_Callback(hObject, eventdata,
handles)
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)
set(handles.x0, 'String', '');
set(handles.y0, 'String', '');
set(handles.z0, 'String', '');
set(handles.t0, 'string', '');
set(handles.a0, 'string', '');
set(handles.b0, 'string', '');
set(handles.c0, 'string', '');
```

## Lanjutan Lampiran

```

set(handles.lambda1, 'string', '');
set(handles.lambda2, 'string', '');
set(handles.lambda3, 'string', '');
set(handles.popupmenu1, 'Value', 1);
set(handles.popupmenu2, 'Value', 1);
set(handles.Hasil, 'string', '');
set(handles.Hasil2, 'string', '');
set(handles.indeks, 'string', '');
cla(handles.axes1);
reset(gca);
legend('0');

```

```

function Hasil_Callback(hObject, eventdata,
handles)

```

```

function Hasil_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% handles    empty - handles not created
% until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end

```

```

function Hasil2_Callback(hObject,
eventdata, handles)
function Hasil2_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% handles    empty - handles not created
% until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject, 'BackgroundColor'),
get(0, 'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject, 'BackgroundColor', 'white');
end
% --- Executes on button press in running2.

```



## Lanjutan Lampiran

```

function running2_Callback(hObject,
eventdata, handles)
% handles    structure with handles and
user data (see GUIDATA)
global x y a b c Y ti
x=str2double(get(handles.x0,'string'));
y=str2double(get(handles.y0,'string'));
a=str2double(get(handles.a0,'string'));
b=str2double(get(handles.b0,'string'));
c=str2double(get(handles.c0,'string'));
ti=str2double(get(handles.t0,'string'));
Y=[x y];
t=[0 ti];
options = odeset('RelTol',1e-
4,'AbsTol',[1e-4 1e-4]);
[T U] =
ode45('Bentuk_Normal_Bifurkasi_Hopf',t,Y,options);

pilih2=get(handles.popupmenu2,'Value');
switch pilih2
    case 1
    case 2
        cla(handles.axes1);
        reset(gca);
        legend('0');
        title('0');
        plot(U(:,1),U(:,2));
        hold on
        [u1, u2] = meshgrid(-3.5:0.2:1.5,-
5:0.2:5);
        w=sqrt(1-(c^2));
        du1=-w*u2-(c/(b*w))*(u2).^3;
        du2=w*u1-(1/b)*(u2).^3;
        quiver(u1,u2,du1,du2,'black');
        title('Trayektori Orbit Periodik
Model Sistem Keuangan');

```

## Lanjutan Lampiran

```

        xlabel('u');
        ylabel('v');
    case 3
        cla(handles.axes1);
        reset(gca);
        legend('0');
        title('0');
        plot(T,U(:,1),'b',T,U(:,2),'r');
        hold on
        title('Grafik Kestabilan Orbit
Periodik Terhadap Waktu');
        xlabel('Waktu (t)');
        ylabel('Rate');
        legend('u','v');
        grid on
    end
    if (b>0)
        set(handles.Hasil2,'String','Stabil');
    elseif (b==0)
        set(handles.Hasil2,'String','b tdk
boleh 0');
    end

function popupmenu2_Callback(hObject,
eventdata, handles)

function popupmenu2_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% handles    empty - handles not created
until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
function Hitung2_Callback(hObject,
eventdata, handles)

```

## Lanjutan Lampiran

```

% handles      structure with handles and
user data (see GUIDATA)
global b sigma
b=str2double(get(handles.b0,'string'));
sigma=-3/(8*b);
if (b>0)

set(handles.indeks,'String',[num2str(sigma)
'<0']);
elseif (b==0)
    set(handles.indeks,'String','b tdk
boleh 0');
end

function indeks_Callback(hObject,
eventdata, handles)

function indeks_CreateFcn(hObject,
eventdata, handles)
% handles      empty - handles not created
until after all CreateFcns called
if ispc &&
isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

- M File dengan judul **Model\_Sistem\_Keuangan.m**

```

function dx=Model_Sistem_Keuangan(t,x)
dx=zeros(3,1);

handles= guidata(gcbo);
a=str2double(get(handles.a0,'string'));
b=str2double(get(handles.b0,'string'));
c=str2double(get(handles.c0,'string'));

```

## Lanjutan Lampiran

```
%Model sistem keuangan
dx(1)=x(3)+(x(2)-a)*x(1);
dx(2)=1-b*x(2)-(x(1))^2;
dx(3)=-x(1)-c*x(3);
end
```

- M File dengan judul **Bentuk\_Normal\_Bifurkasi\_Hopf.m**

```
function
du=Bentuk_Normal_Bifurkasi_Hopf(t,u)
du = zeros(2,1);

handles= guidata(gcbo);
a=str2double(get(handles.a0,'string'));
b=str2double(get(handles.b0,'string'));
c=str2double(get(handles.c0,'string'));
w=sqrt(1-(c^2));
%Bentuk Normal Bifurkasi Hopf
du(1)=-w*u(2)-(c/(b*w))*(u(2))^3;
du(2)=w*u(1)-(1/b)*(u(2))^3;
```

### Lanjutan Lampiran

- Tampilan Program Grafik Kestabilan

#### SIMULASI KESTABILAN DAN BIFURKASI HOPF PADA MODEL SISTEM KEUANGAN

**Nilai Awal**

x	2
y	1
z	2
Waktu	50

**Nilai Parameter**

a	4.5
b	0.2
c	2

**Nilai Karakteristik**

Lambda 1	= -0.2 < 0
Lambda 2	0
Lambda 3	= -1.5 < 0

**Kestabilan**

Pilihan: I Grafik kestabilan... ▾

Hasil: 

Stabil

**Bifurkasi Hopf**

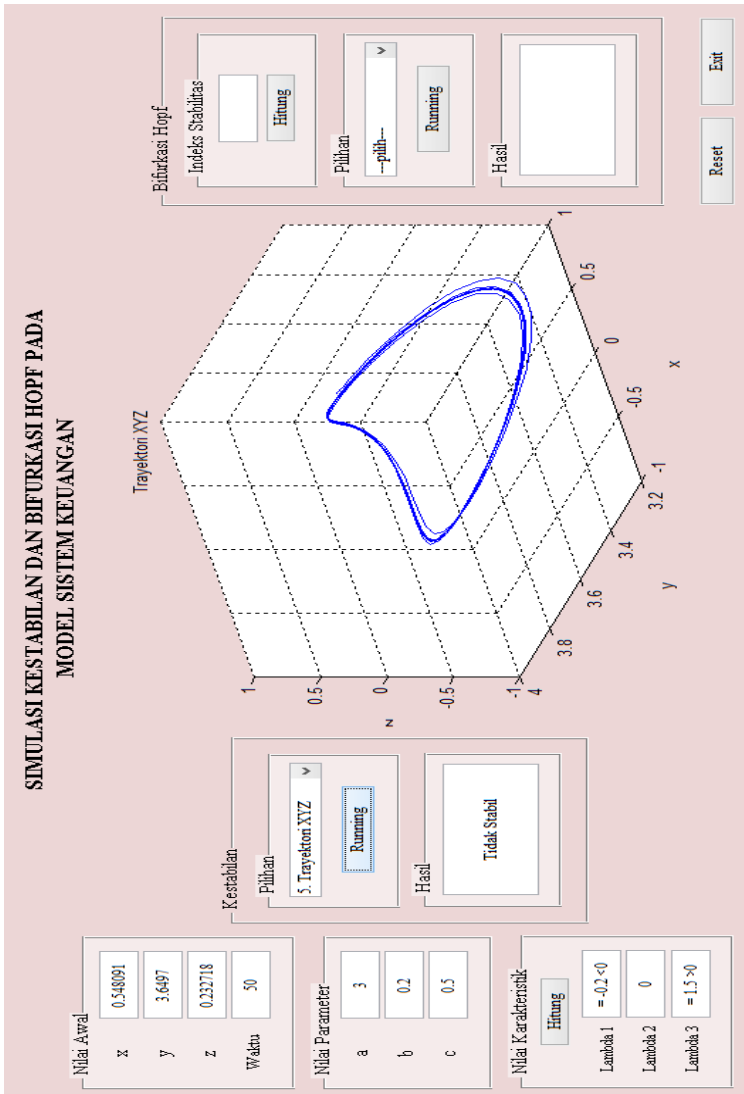
Indeks Stabilitas:

Pilihan: --pilih-- ▾

Hasil:

## Lanjutan Lampiran

- Tampilan Program Trayektori Sistem



Lanjutan Lampiran

- Tampilan Program Trayektori Orbit Periodik Bifurkasi Hopf

**SIMULASI KESTABILAN DAN BIFURKASI HOPF PADA MODEL SISTEM KEUANGAN**

**Nilai Awal**

x: 0.000038

y: 4.99848

z: 0.00012

Waktu: 200

**Nilai Parameter**

a: 4.5

b: 0.2

c: 0.5

**Nilai Karakteristik**

Hitung

Lambda 1:  $-0.2 < 0$

Lambda 2:  $0.86603i$

Lambda 3:  $-0.86603i$

**Kestabilan**

Pilihan: --path--

Running

Hasil: Bifurkasi Hopf

**Bifurkasi Hopf**

Indeks Stabilitas:  $-1.875 < 0$

Hitung

Pilihan: 1. Trayektori Orbit ...

Running

Hasil: Stabil

Trayektori Orbit Periodik Model Sistem Keuangan

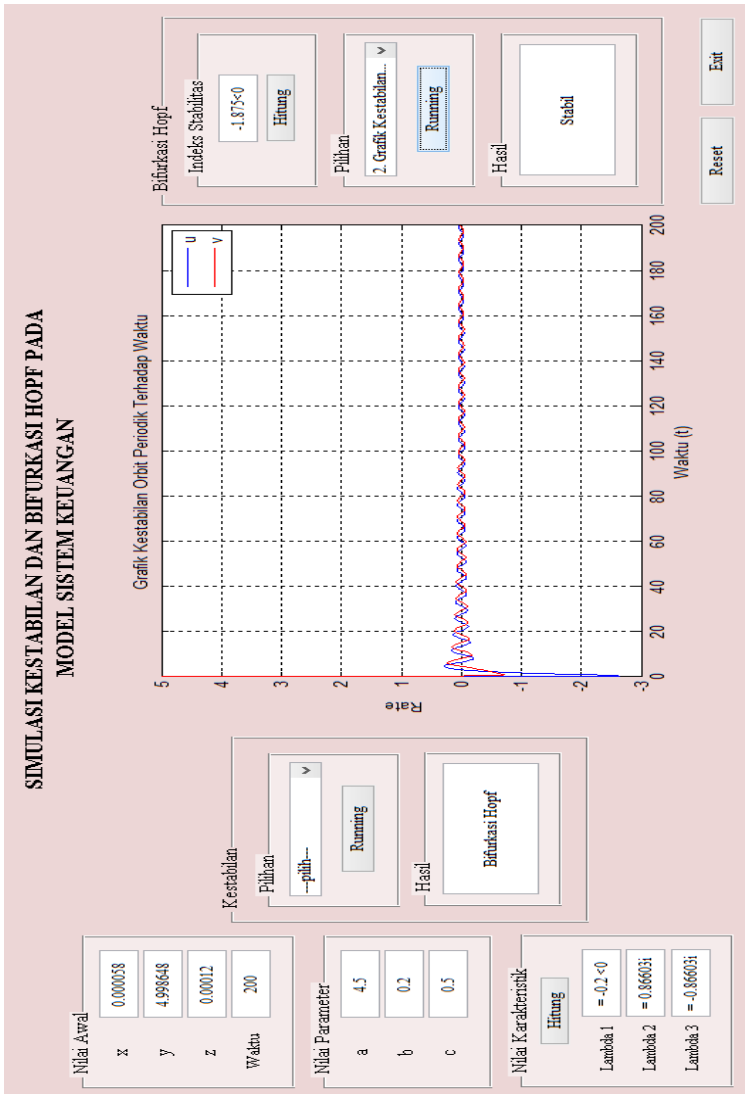
u

Reset

Exit

## Lanjutan Lampiran

- Tampilan Program Kestabilan Orbit Periodik Bifurkasi Hopf





*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*