

30414/H/07



RTST  
519.536  
Tri  
e-1  

---

2007

TESIS - ST 2309

# ESTIMATOR DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK

AGUSTINI TRIPENA  
NRP. 1305 201 002

DOSEN PEMBIMBING  
Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, MS.  
Dra Kartika Fitriyani, M.Si.

PROGRAM STUDI MAGISTER  
JURUSAN STATISTIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2007

PERPUSTAKAAN ITS	
Tgl. Terima	7-8-2007
Terima Dari	H
No. Agenda Prp.	229477

**ESTIMATOR DERET FOURIER  
DALAM REGRESI NONPARAMETRIK**

**T E S I S**

**Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Sains (MSI)**

**di**

**Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya**

**oleh:**

**AGUSTINI TRIPENA**  
**NRP. 1305 201 002**

**Tanggal Ujian : 20 Juli 2007**  
**Periode Wisuda : September 2007**

**Disetujui oleh Tim Penguji Tesis:**

1. **Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.S.** (Pembimbing I)  
**NIP. 131 843 382**
2. **Dra. Kartika Fitriyasari, M.Si.** (Pembimbing II)  
**NIP. 132 061 809**
3. **Prof. Dra. Susanti Linuwih, M.Stats., Ph.D.** (Penguji )  
**NIP. 130 368 808**
4. **Drs. I Nyoman Latra, M.S.** (Penguji)  
**NIP. 130 701 283**
5. **Dr. Puhadi, M.Sc.** (Penguji )  
**NIP. 131 652 051**
6. **Dr. Sony Sunaryo, M.Si.** (Penguji )  
**NIP. 131 843 380**



**Direktur Program Pascasarjana,**

**Prof. Ir. Happy Ratna S., M.Sc., Ph.D.**  
**NIP. 130 541 829**

## ESTIMATOR DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK

Oleh : Agustini Tripena  
 Dosen Pembimbing : 1. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.S.  
 2. Dra. Kartika Fitriyasari, M.Si

### ABSTRAK

Diberikan fungsi regresi  $y_i = g(t_i) + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  dengan  $g(t_i)$  kurva regresi dan  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ . Fungsi regresi  $g(t_i)$  hanya diasumsikan termuat dalam suatu ruang fungsi  $C(0, \pi)$ . Estimator Deret Fourier dalam regresi nonparametrik diperoleh dengan meminimumkan PLS  $n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - g(t_i))^2 + \lambda \int_0^\pi \frac{2}{\pi} (g^{(2)}(t))^2 dt$ .

Penyelesaian optimasi ini berupa estimator Deret Fourier yang diberikan oleh :

$$\hat{g}_\lambda(t) = \hat{b}(\lambda)t + \frac{1}{2} \hat{a}_0(\lambda) + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k(\lambda) \cos kt \text{ dengan}$$

$$\hat{\alpha}(\lambda) = \left( \hat{b}(\lambda), \frac{1}{2} \hat{a}_0(\lambda), \hat{a}_1(\lambda), \dots, \hat{a}_K(\lambda) \right)' \\ = (n^{-1} X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1} X' y,$$

$D = \text{diag}(0, 0, 1^4, 2^4, \dots, K^4)$  dan  $X$  adalah matriks koefisien.

Estimator Deret Fourier  $\hat{g}_\lambda(t)$  merupakan kelas estimator linear dalam observasi  $\underline{y}$  dan mempunyai sifat yang bias untuk kurva regresi  $g(t)$ . Disamping itu estimator Deret Fourier  $\hat{g}_\lambda(t)$  adalah berdistribusi normal, apabila *Error* model berdistribusi normal.

Pemilihan parameter penghalus dalam estimator Deret Fourier dengan model UBR diberikan oleh:

$$UBR(\lambda) = n^{-1} \underline{y}' (S(\lambda) - I)' (S(\lambda) - I) \underline{y} + n^{-1} \sigma^2 \text{trace}(S'(\lambda)S(\lambda)) + \\ - n^{-1} \sigma^2 \text{trace}(S(\lambda) - I)' (S(\lambda) - I)$$

Berdasarkan hasil simulasi dengan fungsi trigonometri dan fungsi eksponen dimana  $n = 50, n = 100, n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0.1$  dan  $K = 5, K = 20$  diperoleh bahwa nilai MSE metode UBR cenderung lebih kecil dari pada nilai MSE metode CV dan GCV pada setiap model simulasi.

**Kata-kata kunci** : Regresi Nonparametrik, Deret Fourier, UBR.



## FOURIER SERIES ESTIMATOR IN NONPARAMETRIC REGRESSION

By : Agustini Tripena

Supervisor : 1. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.S.

2. Dra. Kartika Fitriasaki, M.Si

### ABSTRACT

Given regression function  $y_i = g(t_i) + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  with regression curve  $g(t_i)$  and  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ . Regression  $g(t_i)$  is assumed to be bounded in function space  $C(0, \pi)$ . Fourier Series estimator in nonparametric regression is obtained by minimizing PLS  $n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - g(t_i))^2 + \lambda \int_0^\pi \frac{2}{\pi} (g^{(2)}(t))^2 dt$ . The solution of this optimization yields fourier series estimator is given by:

$$\hat{g}_\lambda(t) = \hat{b}(\lambda)t + \frac{1}{2} \hat{a}_0(\lambda) + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k(\lambda) \cos kt \text{ with}$$

$$\hat{a}(\lambda) = \left( \hat{b}(\lambda), \frac{1}{2} \hat{a}_0(\lambda), \hat{a}_1(\lambda), \dots, \hat{a}_K(\lambda) \right)'$$

$$= (n^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} + \lambda \mathbf{D})^{-1} n^{-1} \mathbf{X}' \underline{y},$$

$D = \text{diag}(0, 0, 1^4, 2^4, \dots, K^4)$  and  $\mathbf{X}$  is coefficient matrix.

Fourier series estimator  $\hat{g}_\lambda(t)$  is class of linear estimator in observations  $\underline{y}$  and it has bias property for regression curve  $g(t)$ . Beside that, fourier series estimator  $\hat{g}_\lambda(t)$  is normally distributed if error model has normal distribution.

Choice of smothing parameter in fourier series estimator using UBR is given by:

$$UBR(\lambda) = n^{-1} \underline{y}' (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I})' (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I}) \underline{y} + n^{-1} \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{S}'(\lambda) \mathbf{S}(\lambda)) +$$

$$- n^{-1} \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I})' (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I})$$

Using trigonometrics and exponential function with  $n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1$  dan,  $K = 5, K = 20$ , the simulation study yields that MSE for UBR is less than the CV's and GCV's

Key word: Nonparametric Regression, Fourier Series, UBR

## KATA PENGANTAR

Puji syukur Kupanjatkan kehadiranMu Tuhan, atas segala berkat dan anugrahNya, rahmat, petunjuk, kekuatan, kesabaran, dan ilmu pengetahuan sehingga dapat menyelesaikan tesis dengan judul: **"Estimator Deret Fourier dalam Regresi Nonparametrik"**. Tesis ini merupakan hasil penelitian sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Sains (M.Si.) pada Program Studi Magister Jurusan Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Penulis menyadari bahwa tesis ini dapat diselesaikan dengan tidak lepas dari bimbingan, arahan, petunjuk, dorongan moral maupun bantuan materil dari berbagai pihak. Untuk itu pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada yang kami hormati:

1. Bapak Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.S, selaku Pembimbing Utama, yang telah memberikan bimbingan, arahan, masukan, serta motivasi sehingga tulisan ini dapat selesai sesuai dengan waktu yang direncanakan. dan selaku Koordinator Program Studi Magister Statistika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya yang telah banyak memberikan dorongan dan masukan kepada penulis selama menjalani masa-masa perkuliahan.
2. Ibu. Dra. Kartika Fitriyani M.Si, sebagai dosen Pembimbing kedua yang banyak memberikan masukan, arahan, motivasi serta banyak meluangkan waktunya untuk mengoreksi dan memberikan solusi yang bermanfaat guna penyelesaian tesis ini.
3. Ketua Jurusan Statistika FMIPA ITS Surabaya yang telah memberikan kemudahan dan fasilitas selama proses perkuliahan.
4. Segenap dosen pengajar yang telah banyak memberikan ilmu kepada penulis dengan penuh ketulusan, serta staf administrasi akademik, laboratorium komputasi dan ruang baca Jurusan Statistika yang telah banyak membantu penulis selama menjalani masa-masa perkuliahan.





5. Bapak Pinpinana Universitas Jenderal Soedirman Purwokerto yang telah memberikan izin kepada penulis untuk melanjutkan pendidikan pada program Magister Statistika di Jurusan Statistika ITS Surabaya.
6. Dirjen DIKTI yang telah memberikan bantuan beasiswa BPPS selama masa studi di ITS Surabaya.
7. Suami tercinta Drs. Kasnan Ginting dan Anak saya Janesca Kristianto Ginting, terima kasih atas segala dorongan, masukan, bantuan, kasih sayang serta doanya selama proses penulis menjalani perkuliahan dan penulisan tesis ini.
8. Kedua Orang tuaku, Almarhum tercinta bapak Pdt Em Ng Surbakti yang dipanggil pulang oleh yang Maha Kuasa pada saat perkuliahan. Ibu M Br Tarigan yang tersayang yang telah membesarkan, mendidik penulis dengan penuh kesabaran dan pengorbanan yang mulia, mendoakan penulis dengan penuh kasih sayang, memberikan motivasi dan dorongan kepada penulis dalam menyelesaikan perkuliahan. dan penulisan tesis ini.
9. Kakak dan adik-adikku dan seluruh keluarga yang telah memberikan dukungan moril baik lahir dan batin. berupa materi serta mendoakan dengan penuh kasih sayang selama penulis menempuh pendidikan dan penulisan tesis ini.
10. Sahabat-sahatku seperjuangan Mahasiswa Program Pascasarjana Jurusan Statistika angkatan 2005, segala dorongan, motivasi, kekompakan dan kebersamaan selama menjalani perkuliahan, dan khususnya Ahmad Zaki yang telah banyak membantu dalam penyelesaian tesis ini.
11. Semua pihak yang tidak disebutkan namanya yang telah banyak memberikan bantuan selama penulis menjalani perkuliahan.

Pada akhirnya penulis mendoakan apa yang telah diberikan oleh semua pihak mendapat berkat dan anugrah dari Tuhan Yang Maha Kuasa. Sebagai suatu penulisan ilmiah harapan penulis semoga tesis ini dapat memberikan kontribusi yang bermanfaat untuk menambah wawasan keilmuan bagi pembaca.

Surabaya, Juli 2007

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>LEMBAR PERSETUJUAN</b>	i
<b>ABSTRAK</b>	iii
<b>ABSTRACT</b>	v
<b>KATA PENGANTAR</b>	vii
<b>DAFTAR ISI</b>	ix
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	xi
<b>DAFTAR TABEL</b>	xiii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b>	xv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	3
1.3. Tujuan Penelitian	3
1.4. Manfaat Penelitian	4
1.5. Batasan Masalah Penelitian	4
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	5
2.1. Analisis Regresi	5
2.2. Regresi Nonparametrik	6
2.3. Beberapa Pengertian Dasar	6
2.4. Fungsinkerigian dan Fungsi Resiko	8
2.5. Cross Validation, General Cross Validation dan Unbiased Risk	9
<b>BAB III METODOLOGI PENELITIAN</b>	11
3.1. Bahan dan Alat	11
3.1.1. Alat	11
3.1.2. Bahan	11
3.2. Sumber Data	11

3.3. Metode Analisi	11
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	<b>15</b>
4.1. Estimasi Deret Fourier	15
4.2. Sifat-sifat Estimasi Deret Fourier	21
4.3. Pemilihan Parameter Penghalus dalam Estimator Deret Fourier	26
4.4. Metode UBR, CV dan GCV pada Estimator Deret Fourier dengan Menggunakan Data Simulasi	30
4.4.1. Simulasi Fungsi Trigonometri $g(t) = \sin(2\pi t^3)$	31
4.4.2. Simulasi Fungsi Eksponen $g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$	39
<b>BAB V KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>49</b>
5.1. Kesimpulan	49
5.2. Saran	50
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>51</b>
<b>LAMPIRAN</b>	<b>53</b>



## DAFTAR GAMBAR

Nomor	Judul	Halaman
4.2	Plot $(t_i, y_i)$ untuk fungsi trigonometri $g(t) = \sin(2\pi t^3)$ , untuk $n = 200$ $\sigma^2 = 0.1$	32
4.3	Plot $(t_i, y_i)$ , fungsi trigonometri $g(t)$ dan estimator Deret Fourier dengan metode UBR untuk $n = 200$ , $\sigma^2 = 0.1, K = 5$	33
4.4	Plot $(t_i, y_i)$ , fungsi trigonometri $g(t)$ dan estimator Deret Fourier dengan metode CV untuk $n = 200$ , $\sigma^2 = 0.1, K = 5$	34
4.5	Plot $(t_i, y_i)$ , fungsi trigonometri $g(t)$ dan estimator Deret Fourier dengan metode GCV untuk $n = 200$ , $\sigma^2 = 0.1, K = 5$	35
4.6	Plot $(t_i, y_i)$ , fungsi trigonometri $g(t)$ dan estimator Deret Fourier dengan metode UBR, CV dan GCV untuk $n = 200, \sigma^2 = 0.1, K = 5$	36
4.7	Diagram batang nilai MSE untuk fungsi trigonometri $g(t) = \sin(2\pi t^3), n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0.1,$ $K = 5$ dan $K = 20$	38
4.9	Plot $(t_i, y_i)$ dan Fungsi eksponen $g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$ dengan $n = 200$ $\sigma^2 = 0.1$	40
4.10	Plot $(t_i, y_i)$ fungsi eksponen $g(t)$ dan estimator Deret Fourier dengan metode UBR untuk $n = 200, \sigma^2 = 0.1, K = 5$	41
4.11	Plot $(t_i, y_i)$ fungsi eksponen $g(t)$ dan estimator Deret Fourier dengan metode CV untuk $n = 200, \sigma^2 = 0.1, K = 5$	42
4.12	Plot $(t_i, y_i)$ fungsi eksponen $g(t)$ dan estimator Deret	43

Fourier dengan metode GCV untuk

$n = 200, \sigma^2 = 0.1, K = 5$

- 4.13 Plot  $(t_i, y_i)$  fungsi eksponen  $g(t)$  dan estimator Deret Fourier dengan metode UBR, CV dan GCV untuk 44

$n = 200, \sigma^2 = 0.1, K = 5$

- 4.14 Diagram batang nilai MSE fungsi eksponensial  $g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$   $n = 50,$  46

$n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0.1, K = 5$  dan  $K = 20$

## DAFTAR TABEL

Nomor	Judul	Halaman
4.1	Hasil simulasi estimator Deret Fourie dengan fungsi $g(t) = \sin(2\pi t^3)$ , $n = 50, n = 100, n = 200$ , $\sigma^2 = 0.1$ dan $K = 5, K = 20$	37
4.2	Hasil simulasi estimator Deret Fourier fungsi eksponensial $g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$ , $n = 50$ , $n = 100, n = 200$ , $\sigma^2 = 0.1$ dan $K = 5, K = 20$	45



## DAFTAR LAMPIRAN

<b>Lampiran</b>	<b>Teks</b>	<b>Halaman</b>
Lampiran 1	Langkah-Langkah Program Simulasi Data	53
Lampiran 2	Macro Program Simulasi Data	55
Lampiran 3	Plot Fungsi	65
Lampiran 4	Plot Bangkitan Hasil Simulasi dan Estimasi Deret Fourier	69
Lampiran 5	Rekapitulasi Hasil Simulasi	81
Lampiran 6	Rangkuman Hasil Simulasi dan Diagram Batang	93
Lampiran 7	Pembuktian Teorema 2	95

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Analisa regresi merupakan metode yang banyak digunakan untuk mengetahui hubungan antara sepasang variabel atau lebih. Misalkan  $y$  adalah variabel respon dan  $t$  adalah variabel prediktor, maka hubungan variabel  $t$  dan  $y$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y_i = g(t_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

$\varepsilon_i$  adalah error random yang diasumsikan independen dengan mean nol dan variansi  $\sigma^2$  dan  $g(t_i)$  merupakan kurva regresi. Untuk mengestimasi  $g(t_i)$  ada dua pendekatan yang dapat digunakan yaitu pendekatan regresi parametrik dan regresi nonparametrik (Hardle, 1990).

Pendekatan regresi parametrik digunakan bila bentuk fungsi  $g(t_i)$  diketahui dari informasi sebelumnya berdasarkan teori ataupun pengalaman masa lalu. Jadi dalam hal ini, mengestimasi  $g(t_i)$  ekuivalen dengan mengestimasi parameter. Sedangkan pendekatan regresi nonparametrik tidak memberikan asumsi terhadap bentuk kurva regresi sehingga memiliki fleksibilitas yang tinggi untuk mengestimasi kurva regresi  $g(t_i)$  (Mahler, 1995). Fungsi regresi  $g(t_i)$  hanya diasumsikan termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu, dimana pemilihan ruang fungsi tersebut biasanya dimotivasi oleh sifat kemulusan (*smoothness*) yang dimiliki oleh fungsi  $g(t_i)$  tersebut.

Dalam teori estimasi idealnya diinginkan suatu estimator yang mempunyai sifat-sifat baik seperti sifat tak bias, konsisten, efisien, variansi minimum, dan lain-lain (Lehman, 1983 ; Rohatgi, 1976). Tetapi untuk memperoleh estimator yang mempunyai sifat demikian tidaklah mudah, sangat tergantung kepada situasi dan kondisi dimana proses estimasi dilakukan. Beberapa penulis seperti Hardle (1990), Wahba (1990), Budiantara dan Subanar (1997) menyarankan penggunaan

regresi nonparametrik sebagai pendekatan untuk model data, agar mempunyai fleksibilitas yang baik.

Beberapa model pendekatan dalam regresi nonparametrik, yang cukup populer dalam mengestimasi fungsi  $g(t_i)$  antara lain Histogram (Härdle, 1990 ; 1991); Estimator Kernel (Rosenblatt, 1971); Estimator Spline (Craven dan Wahba, 1979); Estimator Deret Ortogonal (Eubank 1988) dan Estimator Deret Fourier (Eubank, 1988). Estimator-estimator kurva regresi ini mempunyai latar belakang dan motivasi tersendiri, sebagai suatu pendekatan untuk model data.

Dalam tulisan ini akan dikaji pendekatan regresi nonparametrik pada Deret Fourier. Apabila fungsi  $g \in C(0, \pi) = \{g; g \text{ kontinu pada } (0, \pi)\}$  maka ukuran

kesesuaian kurva terhadap data adalah  $n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - g(t_i))^2$  dan ukuran kekasaran

kurva adalah  $\int_0^\pi \frac{2}{\pi} (g^{(2)}(t))^2 dt$ . Estimator  $g$  diperoleh dengan meminimumkan

*Penalized Least Square:*

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - g(t_i))^2 + \lambda \int_0^\pi \frac{2}{\pi} (g^{(2)}(t))^2 dt. \quad (1.2)$$

$\lambda$  adalah parameter penghalus dan  $\lambda > 0$ .

Untuk mendapatkan estimasi kurva regresi yang baik, diperlukan pemilihan  $\lambda$  yang optimal dan merupakan hal yang sangat penting. Apabila digunakan Deret Fourier untuk mengestimasi kurva regresi pada (1.1) maka perlu dipilih suatu nilai  $\lambda$  yang optimal. Beberapa metode untuk memilih  $\lambda$  yaitu *Unbiased Risk (UBR)* (Wang, 1998), *Cross Validation (CV)* dan *Generalized Cross Validation (GCV)* (Craven dan Wahba, 1979).

Estimasi kurva regresi nonparametrik sangat tergantung pada parameter penghalus  $\lambda$  (Muller dan Zhao, 1995). Untuk nilai  $\lambda$  yang sangat besar akan menghasilkan estimator kurva regresi yang sangat halus. Sebaliknya untuk nilai  $\lambda$  yang kecil akan memberikan estimator kurva regresi yang sangat kasar (Wahba, 1990; Eubank, 1988; Budiantara, 1998). Akibatnya pemilihan parameter penghalus optimal merupakan hal yang sangat penting dalam regresi nonparametrik.



Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk estimator Deret Fourier dalam model regresi nonparametrik. Diselidiki pula sifat-sifat estimator Deret Fourier. Selanjutnya akan dibandingkan metode UBR, CV dan GCV untuk memilih parameter penghalus  $\lambda$  optimal dalam estimator Deret Fourier dengan menggunakan data simulasi.

### **1.2. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang diatas maka permasalahan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk estimator Deret Fourier dalam regresi nonparametrik.
2. Bagaimana sifat-sifat estimator Deret Fourier dalam regresi nonparametrik.
3. Bagaimana memilih parameter penghalus  $\lambda$  dalam estimator Deret Fourier.
4. Bagaimana membandingkan metode UBR, CV dan GCV untuk memilih parameter penghalus optimal dalam estimator Deret Fourier dengan menggunakan data simulasi berdasarkan nilai MSE nya.

### **1.3. Tujuan Penelitian.**

Dari permasalahan yang telah dirumuskan diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengkaji estimator Deret Fourier dalam regresi nonparametrik.
2. Mengkaji sifat-sifat estimator Deret Fourier dalam regresi nonparametrik.
3. Mengkaji pemilihan parameter penghalus  $\lambda$  yang optimal dalam estimator Deret Fourier berdasarkan metode UBR.
4. Membandingkan metode UBR, CV dan GCV untuk memilih parameter penghalus  $\lambda$  optimal dalam estimator Deret Fourier dengan menggunakan data simulasi berdasarkan nilai MSE nya.

#### **1.4. Manfaat Penelitian**

Manfaat yang dapat diperoleh dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Dapat meningkatkan wawasan keilmuan dan pengetahuan khususnya yang berhubungan dengan estimator Deret Fourier dalam regresi nonparametrik.
2. Dapat memberikan metode alternatif dalam pemodelan regresi nonparametrik.

#### **1.5. Batasan Permasalahan.**

Pada penelitian ini permasalahan yang diteliti dibatasi pada:

1. Mengkaji estimator kurva regresi dan sifat-sifat estimator Deret Fourier dalam regresi nonparametrik.
2. Membandingkan UBR, CV dan GCV dengan menggunakan data simulasi.

## BAB 2

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1. Analisis Regresi

Analisis regresi memegang peranan penting dalam Statistika. Dalam menduga hubungan antara variabel independen dengan variabel respon dapat dilakukan dengan analisis regresi diantaranya pendekatan regresi parametrik, jika bentuk kurva regresinya diketahui. Sedangkan jika kurva regresi tidak diketahui dapat dilakukan dengan pendekatan regresi nonparametrik. Jika bentuk kurvanya sebagian diketahui dan sebagian lagi tidak diketahui dapat dilakukan dengan pendekatan regresi semiparametrik.

Pendekatan regresi parametrik dipergunakan jika diasumsikan bahwa penyebaran pola data membentuk pola tertentu, apakah itu linear, kuadratik, kubik dan lain-lain. Untuk dapat menggunakan model regresi parametrik diperlukan pengalaman masa lalu atau terdapat sumber-sumber lain yang tersedia dan dapat memberikan informasi yang detail tentang pola data. Dalam regresi parametrik terdapat asumsi tegas, yaitu bentuk kurva regresi diketahui (Eubank, 1988).

Akibatnya model pendekatan data diperoleh berdasarkan berbagai metode formal yang telah dikenal dalam Statistika, seperti *Least Square*, *Maksimum Likelihood*, dan lain-lain (Wahba, 1990 ; Lehman, 1983). Model pendekatan yang dihasilkan oleh metode-metode tersebut ekuivalen dengan estimasi parameter dalam model. Secara umum bentuk regresi parametrik linear dimana  $y_i$  sebagai variabel respon dan  $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}$  sebagai variabel independen dapat ditulis menjadi

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1.)$$

(Draper dan Smith, 1966; Seber, 1977; Montgomery dan Peck, 1982) dimana  $\varepsilon_i$  error random yang independen berdistribusi normal dengan mean nol variansi  $\sigma^2$  dan  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  merupakan parameter yang tidak diketahui. Jika model yang diasumsikan ini benar maka estimasi parametrik sangat efisien, tetapi jika tidak akan menyebabkan interpretasi data yang menyesatkan (Simonoff, 1996).



## 2.2. Regresi Nonparametrik

Regresi nonparametrik merupakan suatu metoda Statistika yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel respon dan prediktor, jika bentuk hubungan antara variabel respon dan variabel prediktor tersebut tidak diketahui atau tidak didapat informasi sebelumnya. Jika diberikan pasangan data  $(t_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  dan hubungan antara variabel respon  $y_i$  dengan independen  $t_i$  mengikuti model:

$$y_i = g(t_i) + \varepsilon_i, \quad t_i \in [a, b], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

dimana  $g(t_i)$  kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya dan  $\varepsilon_i$  error random yang independen berdistribusi normal dengan mean nol variansi  $\sigma^2$ .

Dalam regresi nonparametrik fleksibilitas sangat dipertahankan, fungsi  $g(t_i)$  diasumsikan mulus dalam arti kontinu dan diffrensiabel (Eubank, 1988). Pendekatan regresi nonparametrik Deret Fourier diperoleh dengan meminimumkan *Penalized Least Squares*, yaitu kriteria pendugaan yang menggabungkan *goodness-of fit* dengan kemulusan kurva, dimana diantara keduanya dikontrol oleh suatu parameter pemulusan.

Misalkan kurva regresi diasumsikan termuat didalam ruang  $C(0, \pi)$  yaitu  $g \in C(0, \pi)$ , maka estimasi untuk  $g$  diperoleh dengan meminimumkan *Penalized Leas Square (PLS)*:

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - g(t_i))^2 + \lambda \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} (g^{(m)}(t))^2 dt,$$

dengan  $\lambda$  merupakan parameter penghalus.

## 2.3. Beberapa Pengertian Dasar

Berikut ini diberikan beberapa pengertian dan konsep-konsep dasar yang akan digunakan dalam analisis pembahasan.

### **Teorema 1.**(Apostol, 1976)

Jika fungsi  $f$  dan  $g$  adalah *integrable* pada  $[a, b]$  maka untuk setiap konsep real  $c_1$  dan  $c_2$ , berlaku

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)] dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx$$

Jika  $f_1, \dots, f_n$  fungsi-fungsi yang *integrable* pada  $[a, b]$  maka untuk semua  $c_1, \dots, c_n$  berlaku:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n c_k f_k(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b f_k(x) dx. \quad (2.3)$$

### **Teorema 2 Trace Matriks (Searle, 1982)**

Jika diberikan matriks bujursangkar  $A, B$  dan  $C$  yang dapat digunakan dan digandakan, maka

- (i).  $Trace(AB) = Trace(BA)$
- (ii).  $Trace(ABC) = Trace(BCA) = Trace(CAB)$
- (iii).  $Trace(A \pm B) = Trace(A) \pm Trace(B)$

### **Teorema 3 (Seber dan Lee, 2003)**

Jika  $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \mathbf{V})$  dan  $A$  matriks bujur sangkar yang simetris maka

$$E(\underline{X}' A \underline{X}) = \underline{\mu}' A \underline{\mu} + trace(A \cdot \mathbf{V})$$

### **Definisi 1. Momen Generating Functions (MGF) (Hogg dan Tanis, 1993)**

Diberikan variabel random  $X$  dengan fungsi distribusi probabilitas  $f_X(x)$ .

MGF dari  $X$  didefinisikan sebagai:

$$M_X(\theta) = E(e^{\theta X}), \theta \in R$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx, & X \text{ kontinu} \\ \sum_x e^{\theta x} f(x), & X \text{ diskrit} \end{cases}$$

Sifat-sifat dari MGF:

1. Jika  $a \in R$  maka  $M_{aX}(\theta) = M_X(a\theta)$
2. Jika variabel random  $X_1, X_2, \dots, X_n$  saling independen maka:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(\theta) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(\theta)$$

3. Jika  $a, b \in R$  maka:

$$M_{aX+b}(\theta) = e^{b\theta} M_X(a\theta)$$

4. Jika  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variabel random independen identik maka:

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(\theta) = [M_X(\theta)]^n$$

#### 2.4. Fungsi Kerugian dan Fungsi Resiko

Berikut diuraikan definisi fungsi kerugian dan fungsi resiko yang direferensi dari Eubank, (1988) sebagai berikut:

##### Defenisi 2. Fungsi Kerugian

Jika  $\hat{g}_\lambda = (\hat{g}_{\lambda 1}, \hat{g}_{\lambda 2}, \dots, \hat{g}_{\lambda n})'$  adalah estimator untuk  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)'$  maka fungsi kerugian (*loss function*) kuadrat didefinisikan sebagai :

$$L(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (g_i - \hat{g}_{\lambda i})^2, \quad (2.4)$$

##### Defenisi 3 .Fungsi Resiko

Jika  $\hat{g}_\lambda = (\hat{g}_{\lambda 1}, \hat{g}_{\lambda 2}, \dots, \hat{g}_{\lambda n})'$  adalah estimator untuk  $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)'$  maka ekspektasi dari fungsi resiko (*risk function*) kuadrat didefinisikan sebagai :

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= E[L(\lambda)] \\ &= E\left(n^{-1} \sum_{i=1}^n (g_i - \hat{g}_{\lambda i})^2\right) \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n E(g_i - \hat{g}_{\lambda i})^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$L(\lambda)$  dan  $R(\lambda)$  merupakan ukuran dari kinerja suatu estimator



## 2.5. Cross Validation (CV), Generalized Cross Validation (GCV) dan Unbiased Risk (UBR)

Bentuk estimator Deret Fourier sangat dipengaruhi oleh parameter penghalus  $\lambda$ . Oleh karena itu pemilihan  $\lambda$  yang optimal perlu dilakukan untuk mendapatkan estimator Deret Fourier yang baik. Akan dipilih suatu nilai  $\lambda$  yang meminimumkan fungsi kerugian  $L(\lambda)$ , akan tetapi dalam regresi nonparametrik tidak dapat dilakukan secara langsung sebab  $L(\lambda)$  masih memuat fungsi  $g$  yang tidak diketahui.

Metode yang sering digunakan dalam memilih parameter penghalus  $\lambda$  adalah CV dan GCV. Ide dasar dari GCV adalah memodifikasi CV (Green dan Silverman, 1994). Beberapa penulis seperti: Craven dan Wahba (1979), Wahba (1985), Li (1986), Kohn (1991), Shao (1993), Venter dan Snyman (1995) mengembangkan metode Cross validation (CV) dan Generalized Cross validation (GCV) untuk memilih  $\lambda$ .

Metode CV dan GCV cukup populer dan disenangi karena tidak memerlukan pengetahuan tentang  $\sigma^2$ . CV merupakan suatu metode untuk memilih model berdasarkan pada kemampuan prediksi dari model tersebut. Maka metode CV adalah metode yang dapat digunakan untuk memilih  $\lambda$  yang meminimumkan:

$$CV(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{g}_\lambda(t_i))^2 \quad (2.6)$$

Metode GCV adalah salah satu metode yang digunakan untuk memperoleh estimasi parameter penghalus  $\lambda$  yang diperoleh dengan meminimumkan

$$GCV(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{MSE(\lambda)}{\left(1 - n^{-1} \sum_{i=1}^n a_{ii}(\lambda)\right)^2} \quad (2.7)$$

dengan  $MSE(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{g}_\lambda(t_i))^2$  dan  $a_{ii}(\lambda)$  adalah elemen diagonal dari matriks  $S(\lambda)$  yang memenuhi  $\hat{g}_\lambda(t) = S(\lambda)y$ .



Salah satu ukuran untuk keakuratan estimasi fungsi kurva regresi adalah dengan menggunakan *Mean Square Error (MSE)* yang didefinisikan sebagai

$$\text{berikut: } MSE(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{g}_\lambda(t_i))^2.$$

Untuk *Unbiased Risk (UBR)* jika  $\hat{g}_\lambda(t_i)$  merupakan estimator Deret Fourier untuk fungsi  $g(t_i)$  pada model regresi nonparametrik (2.2) maka diberikan fungsi kerugian kuadrat sebagai berikut:

$$L(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{g}_\lambda(t_i) - g(t_i))^2 \quad (2.8)$$

Akan dicari nilai  $\lambda$  yang meminimumkan fungsi kerugian kuadrat  $L(\lambda)$ . Dalam permasalahan regresi nonparametrik dengan pendekatan Deret Fourier, nilai  $L(\lambda)$  tidak dapat dihitung secara langsung, karena  $L(\lambda)$  masih memuat fungsi  $g$  yang tidak diketahui. Sehingga dibutuhkan fungsi resiko yang dapat diperoleh dari hasil ekspektasi  $L(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= E(L(\lambda)) \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n E(\hat{g}_\lambda(t_i) - g(t_i))^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$



## **BAB 3**

### **METODOLOGI PENELITIAN**

#### **3.1. Bahan dan Alat**

Penelitian ini digunakan alat dan bahan yang mendukung proses dan pelaksanaan penelitian untuk pencapaian tujuan penelitian. Adapun alat dan bahan yang digunakan dalam penelitian sebagai berikut:

##### **3.1.1. Alat**

Alat yang digunakan dalam penelitian ini adalah hardware komputer (*software*) Statistik, yaitu MATLAB 6.5.

##### **3.1.2. Bahan**

1. Jurnal yang berkaitan dengan permasalahan dalam penelitian, yaitu *The Canadian Journal of Statistics, Journal the Annals of Statistics* dan jurnal lainnya yang relevan.
2. Buku referensi yang terkait dengan permasalahan penelitian.

#### **3.2. Sumber Data**

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data simulasi.

#### **3.3. Metode Analisis**

Untuk menyelesaikan penelitian ini dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:



1. Mengkaji Estimator Deret Fourier dalam regresi nonparametrik dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Membuat pendekatan untuk kurva regresi  $g \in C(0, \pi)$ :

$$g(t) = T(t) \text{ dengan } T(t) = bt + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos kt.$$

b. Mendefinisikan optimasi PLS:

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - T(t_i))^2 + \lambda \|T^{(2)}\|^2$$

$$\text{dengan } \|T^{(2)}\|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (T^{(2)}(t))^2 dt.$$

c. Mencari nilai  $\|T^{(2)}\|^2$ .

d. Menyelesaikan optimasi PLS:

$$\underset{g \in C(0, \pi)}{\text{Minimize}} \left[ n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - T(t_i))^2 + \lambda \|T^{(2)}\|^2 \right],$$

$$\text{dengan } \underline{a} = \left( b, \frac{1}{2}a_0, a_1, \dots, a_k \right)' \text{ dan } \lambda \text{ parameter penghalus.}$$

2. Menyelidiki sifat-sifat estimator Deret Fourier dalam regresi nonparametrik dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Diselidiki sifat bias dari estimator Deret Fourier.

b. Diselidiki sifat linearitas estimator Deret Fourier.

c. Diselidiki distribusi probabilitas estimator Deret Fourier apabila *error* model berdistribusi normal.

3. Mengkaji pemilihan parameter penghalus dalam estimator Deret Fourier dengan menggunakan metode UBR, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Mendefinisikan fungsi loss kuadrat:

$$L(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{g}_\lambda(t_i) - g(t_i))^2$$

b. Mendefinisikan fungsi Resiko kuadrat:

$$R(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n E((\hat{g}_\lambda(t_i) - g(t_i))^2).$$

c. Mengkaji suatu fungsi  $UBR(\lambda)$  yang tak bias untuk  $R(\lambda)$ .

4. Membandingkan metode UBR, CV dan GCV untuk memilih parameter penghalus optimal dalam estimator Deret Fourier dengan menggunakan data simulasi berdasarkan nilai MSE, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Membangun model regresi :  $y_i = g(t_i) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

b. Ukuran sampel  $n = 50; n = 100; n = 200$  dan nilai  $K = 5; K = 20$ .

c. Mengambil  $t_i = \frac{i}{n}$ , dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

d. Membangkitkan  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ , dengan  $\sigma^2 = 0,1$ .

e. Menggunakan fungsi percobaan  $g$ , yaitu:

i. Fungsi Trigonometri:  $g(t) = \sin(2\pi t^3)$

ii. Fungsi Eksponen :  $g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$ .

f. Membentuk matriks  $X$  dan matriks  $D$ .

g. Menghitung matriks hat  $S(\lambda) = X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X'$ .

h. Menghitung estimator  $\hat{a}(\lambda) = (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X'y$ .

i. Menentukan estimator Deret Fourier dengan:

$$\hat{g}_\lambda(t) = \hat{b}(\lambda)t + \frac{1}{2}\hat{a}_0(\lambda) + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k(\lambda)\cos kt.$$

j. Memilih parameter penghalus dengan metode UBR, CV dan GCV.

k. Membandingkan nilai MSE dari estimator dimana parameter penghalus optimal dipilih dengan metode UBR, CV dan GCV.



## BAB 4

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini akan dikaji estimator Deret Fourier dan sifat-sifat estimator Deret Fourier. Dikaji juga pemilihan parametr penghalus dalam estimator Deret Fourier dan perbandingan metode UBR, CV dan GCV dalam estimator Deret Fourier dengan menggunakan data simulasi.

#### 4.1. Estimator Deret Fourier.

Deret Fourier merupakan polinomial trigonometri yang mempunyai fleksibilitas, sehingga dapat menyesuaikan diri secara efektif terhadap sifat lokal data. Deret Fourier baik digunakan untuk menjelaskan kurva yang menunjukkan gelombang sinus dan cosinus. Diberikan data  $(t_i, y_i)$ ,  $i=1,2,\dots,n$  dan hubungan antara  $t_i$  dan  $y_i$  diasumsikan mengikuti model regresi :

$$y_i = g(t_i) + \varepsilon_i, \quad (4.1)$$

dengan  $g$  adalah kurva regresi yang diasumsikan termuat dalam ruang  $C(0, \pi)$ .  $\varepsilon_i$  adalah *error* random yang diasumsikan berdistribusi independen dengan mean nol dan variansi  $\sigma^2$ .

Dalam analisis regresi untuk estimasi mengestimasi kurva regresi  $g$  dapat digunakan metode *least square*, yaitu meminimumkan jumlah kuadrat *error*. Dengan kata lain penduga untuk  $g$  dapat diperoleh dari:

$$\underset{g \in C(0, \pi)}{\text{Min}} \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \right\} = \underset{g \in C(0, \pi)}{\text{Min}} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - g(t_i))^2 \right\}, \quad (4.2)$$

Disamping meminimumkan (4.2) diberikan pula suatu *penalized* untuk ukuran kemulusan fungsi  $g$  sebagai berikut:

$$\int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} (g^{(2)}(t))^2 dt, \quad (4.4)$$

Dengan demikian estimator untuk kurva regresi  $g$  dapat diperoleh dari menyelesaikan optimasi PLS:

$$\text{Min}_{g \in C(0, \pi)} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - g(t_i))^2 + \lambda \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} (g^{(2)}(t))^2 dt \right\}, \quad (4.5)$$

dengan  $\lambda$  merupakan parameter penghalus yang mengontrol antara *goodnes-of-fit* dan kemulusan fungsi. Untuk  $\lambda$  yang sangat besar akan diperoleh fungsi penyelesaian yang sangat mulus (*smooth*). Sedangkan untuk  $\lambda$  yang sangat kecil akan diperoleh fungsi penyelesaian yang sangat kasar. Karena  $g$  adalah fungsi yang kontinu maka  $g$  dapat dihampiri dengan fungsi  $T$ , dimana:

$$T(t) = bt + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos kt, \quad (4.6)$$

Untuk menyelesaikan (4.5) terlebih dahulu dicari nilai  $P(a)$  dengan:

$$\begin{aligned} P(a) &= \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \{g^{(2)}(t)\}^2 dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \left( \frac{d^2}{dt^2} \left[ bt + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos kt \right] \right)^2 dt \end{aligned}$$

Terlebih dahulu dihitung:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{d^2}{dt^2} \left[ bt + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos kt \right] \right)^2 \\ &= \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \left[ bt + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^K a_k \cos kt \right] \right) \right)^2 \\ &= \left( \frac{d}{dt} \left[ b + 0 - \sum_{k=1}^K a_k k \sin kt \right] \right)^2 \\ &= \left( \frac{d}{dt} \left[ b - \sum_{k=1}^K k a_k \sin kt \right] \right)^2 \\ &= \left( 0 - \sum_{k=1}^K k a_k k \cos kt \right)^2 \\ &= \left( \sum_{k=1}^K k^2 a_k \cos kt \right)^2 \end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh  $P(a)$ :

$$\begin{aligned}
P(a) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \sum_{k=1}^K k^2 a_k \cos kt \right)^2 dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \sum_{k=1}^K (k^2 a_k \cos kt)^2 + 2 \sum_{k < j}^K \sum_{k < j}^K (k^2 a_k \cos kt) (j^2 a_j \cos jt) \right) dt \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^K (k^2 a_k \cos kt)^2 dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sum_{k < j}^K (k^2 a_k \cos kt) (j^2 a_j \cos jt) dt
\end{aligned}$$

Misalkan

$$A = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K \int_0^{\pi} (k^2 a_k \cos kt)^2 dt$$

$$B = \frac{2}{\pi} 2 \sum_{k < j}^K \int_0^{\pi} (k^2 a_k \cos kt) (j^2 a_j \cos jt) dt$$

Dicari terlebih dahulu nilai untuk A

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K \int_0^{\pi} (k^2 a_k \cos kt)^2 dt \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K \int_0^{\pi} k^4 a_k^2 \cos^2 kt dt \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2 \int_0^{\pi} \cos^2 kt dt \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2 \int_0^{\pi} \frac{1 + 2 \cos kt}{2} dt \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2 \frac{1}{2} \left[ t + \frac{2}{k} \sin kt \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2 \left( \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k} (\sin 2k\pi - \sin 0) \right) \\
&= \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2
\end{aligned}$$

Dicari nilai untuk B

$$B = \frac{2}{\pi} 2 \sum_{k < j}^K \int_0^{\pi} (k^2 a_k \cos kt) (j^2 a_j \cos jt) dt$$



$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k < j}^K \int_0^{\pi} k^2 j^2 a_k a_j \cos kt \cos jt \, dt$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k < j}^K (kj)^2 a_k a_j \int_0^{\pi} \cos kt \cos jt \, dt$$

Pertama diuraikan

$$\int_0^{\pi} \cos kt \cos jt \, dt$$

Dimisalkan

$$C = \int_0^{\pi} \cos kt \cos jt \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\cos(k+j)t + \cos(k-j)t}{2} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cos(k+j)t \, dt + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cos(k-j)t \, dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k+j)} (\sin(k+j)\pi - \sin 0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k-j)} (\sin(k-j)\pi - 0)$$

$$= \frac{1}{2(k+j)} (0-0) + \frac{1}{2(k-j)} (0-0)$$

$$= 0$$

Sehingga didapat nilai  $C = 0$

Jadi nilai untuk  $B$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k < j}^K (kj)^2 a_k a_j \cdot 0$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{k < j}^K 0$$

Maka nilai untuk  $B = 0$

Sehingga  $A + B$  didapat

$$A + B = \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2 + 0$$

$$= \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2 ,$$

(4.7)

Berdasarkan (4.7) diperoleh PLS:

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{g \in C(0, \pi)} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n [y_i - g(t_i)]^2 + \lambda \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} [g^{(2)}(t)]^2 dt \right\} \\ &= \text{Min}_{b, a_0, a_1, \dots, a_K \in \mathbb{R}} \left\{ n^{-1} \sum_{i=1}^n \left( y_i - b t_i - \frac{1}{2} a_0 - \sum_{k=1}^K a_k \cos k t_i \right)^2 + \lambda \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2 \right\} \end{aligned}$$

Dicari terlebih dahulu

$$\begin{aligned} & n^{-1} \sum_{i=1}^n \left( y_i - b t_i - \frac{1}{2} a_0 - a_1 \cos t_i - a_2 \cos 2t_i - \dots - a_K \cos K t_i \right)^2 + \lambda \sum_{k=1}^K k^4 a_k^2 \\ &= n^{-1} \underline{W}' \underline{W} + \lambda \left( b, \frac{1}{2} a_0, a_1, \dots, a_K \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{2} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dengan

$$\underline{W} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1 & 1 & \cos t_1 & \cos 2t_1 & \dots & \cos K t_1 \\ t_2 & 1 & \cos t_2 & \cos 2t_2 & \dots & \cos K t_2 \\ t_3 & 1 & \cos t_3 & \cos 2t_3 & \dots & \cos K t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_n & 1 & \cos t_n & \cos 2t_n & \dots & \cos K t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{2} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix}$$

Persamaan diatas dapat menjadi:

$$n^{-1} (\underline{y} - \underline{X} \underline{a})' (\underline{y} - \underline{X} \underline{a}) + \lambda \underline{a}' \underline{D} \underline{a}, \quad (4.8)$$

dengan

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} t_1 & 1 & \cos t_1 & \cos 2t_1 & \dots & \cos K t_1 \\ t_2 & 1 & \cos t_2 & \cos 2t_2 & \dots & \cos K t_2 \\ t_3 & 1 & \cos t_3 & \cos 2t_3 & \dots & \cos K t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_n & 1 & \cos t_n & \cos 2t_n & \dots & \cos K t_n \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K^4 \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{2} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix}$$

Akibatnya persamaan (4.8) dapat ditulis:

$$\begin{aligned} & n^{-1}(\underline{y}' - \underline{a}'\underline{X}')(\underline{y} - \underline{X}\underline{a}) + \lambda \underline{a}'\underline{D}\underline{a} \\ &= n^{-1}(\underline{y}'\underline{y} - \underline{a}'\underline{X}'\underline{y} - \underline{y}'\underline{X}\underline{a} + \underline{a}'\underline{X}'\underline{X}\underline{a}) + \lambda \underline{a}'\underline{D}\underline{a} \\ &= n^{-1}\underline{y}'\underline{y} - n^{-1}\underline{a}'\underline{X}'\underline{y} - n^{-1}(\underline{a}'\underline{X}'\underline{y})' + \underline{a}'(n^{-1}\underline{X}'\underline{X} + \lambda \underline{D})\underline{a} \end{aligned}$$

Misalkan

$$n^{-1}\underline{y}'\underline{y} - 2n^{-1}\underline{a}'\underline{X}'\underline{y} + \underline{a}'(n^{-1}\underline{X}'\underline{X} + \lambda \underline{D})\underline{a} = Q(\underline{a})$$

Dengan menurunkan secara parsial  $Q(\underline{a})$  terhadap  $\underline{a}$  dan hasilnya disamakan dengan nol didapat:

$$\frac{\partial Q(\underline{a})}{\partial \underline{a}} = 0 - 2n^{-1}\underline{X}'\underline{y} + 2(n^{-1}\underline{X}'\underline{X} + \lambda \underline{D})\underline{a}$$

$$0 = -2n^{-1}\underline{X}'\underline{y} + 2(n^{-1}\underline{X}'\underline{X} + \lambda \underline{D})\underline{a}$$

$$2(n^{-1}\underline{X}'\underline{X} + \lambda \underline{D})\underline{a} = 2n^{-1}\underline{X}'\underline{y}$$

$$(n^{-1}\underline{X}'\underline{X} + \lambda \underline{D})\underline{a} = n^{-1}\underline{X}'\underline{y}$$



$$\hat{\underline{a}} = (n^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} + \lambda \mathbf{D})^{-1} n^{-1} \mathbf{X}' \underline{y}$$

$$\hat{\underline{a}}(\lambda) = (n^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} + \lambda \mathbf{D})^{-1} n^{-1} \mathbf{X}' \underline{y}, \quad (4.9)$$

Karena estimator  $\hat{\underline{a}}(\lambda)$  dapat ditulis menjadi

$$\hat{\underline{a}} = \begin{pmatrix} \hat{b}(\lambda) \\ \frac{1}{2} \hat{a}_0(\lambda) \\ \hat{a}_1(\lambda) \\ \vdots \\ \hat{a}_K(\lambda) \end{pmatrix}$$

maka estimator untuk kurva regresi  $g$  diberikan oleh:

$$\hat{g}_\lambda(t_i) = \hat{b}(\lambda)t_i + \frac{1}{2} \hat{a}_0(\lambda) + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k(\lambda) \cos k t_i, \quad (4.10)$$

(Bilodeau, 1992)

#### 4.2. Sifat-sifat Estimator Deret Fourier.

Berikut ini diberikan sifat-sifat yang dimiliki oleh estimator Deret Fourier.

Misalkan diberikan model regresi

$$y_i = g(t_i) + \varepsilon_i ; i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.11)$$

Persamaan (4.11) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} y_1 &= g(t_1) + \varepsilon_1 \\ y_2 &= g(t_2) + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_n &= g(t_n) + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Sistem persamaan diatas dapat pula disajikan dalam bentuk

$$\begin{aligned} y_1 &= b t_1 + \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t_1 + a_2 \cos 2t_1 + \dots + a_K \cos K t_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 &= b t_2 + \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t_2 + a_2 \cos 2t_2 + \dots + a_K \cos K t_2 + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_n &= b t_n + \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos t_n + a_2 \cos 2t_n + \dots + a_K \cos K t_n + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Atau dapat ditulis dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 1 & \cos t_1 & \cos 2t_1 & \dots & \cos K t_1 \\ t_2 & 1 & \cos t_2 & \cos 2t_2 & \dots & \cos K t_2 \\ t_3 & 1 & \cos t_3 & \cos 2t_3 & \dots & \cos K t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_n & 1 & \cos t_n & \cos 2t_n & \dots & \cos K t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

Persamaan (4.12) dapat ditulis dalam bentuk matriks:

$$\underline{y} = \mathbf{X}\underline{a} + \underline{\varepsilon}.$$

Estimasi persamaan regresi  $g$  diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \hat{g}_\lambda(t) &= \mathbf{X} \hat{a}(\lambda) \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{n}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} + \lambda \mathbf{D})^{-1} \mathbf{n}^{-1} \mathbf{X}' \underline{y} \\ &= \mathbf{S}(\lambda) \underline{y}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

dengan  $\mathbf{S}(\lambda) = \mathbf{X}(\mathbf{n}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{X} + \lambda \mathbf{D})^{-1} \mathbf{n}^{-1} \mathbf{X}'$

Berdasarkan (4.13) terlihat bahwa estimator Deret Fourier  $\hat{g}_\lambda(t)$  merupakan kelas estimator linear dalam observasi  $\underline{y}$ . Berikut ini diperlihatkan estimator Deret Fourier adalah bias untuk kurva regresi  $g$ .

Dicari ekspektasi dari  $\hat{g}_\lambda(t)$  adalah:

$$\begin{aligned} E(\hat{g}_\lambda(t)) &= E(\mathbf{S}(\lambda) \underline{y}), \\ &= \mathbf{S}(\lambda) E(\underline{y}) \\ &= \mathbf{S}(\lambda) E \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{S}(\lambda) E \left[ \begin{pmatrix} g(t_1) \\ g(t_2) \\ \vdots \\ g(t_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{S}(\lambda) \left[ E \begin{pmatrix} g(t_1) \\ g(t_2) \\ \vdots \\ g(t_n) \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \right] \\
&= \mathbf{S}(\lambda) \left[ \begin{pmatrix} E(g(t_1)) \\ E(g(t_2)) \\ \vdots \\ E(g(t_n)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_n) \end{pmatrix} \right] \\
&= \mathbf{S}(\lambda) \left[ \begin{pmatrix} g(t_1) \\ g(t_2) \\ \vdots \\ g(t_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \mathbf{S}(\lambda) \begin{pmatrix} g(t_1) \\ g(t_2) \\ \vdots \\ g(t_n) \end{pmatrix} \\
E(\hat{g}_\lambda(t)) &= \mathbf{S}(\lambda) \begin{pmatrix} g(t_1) \\ g(t_2) \\ \vdots \\ g(t_n) \end{pmatrix} \\
&\neq \begin{pmatrix} g(t_1) \\ g(t_2) \\ \vdots \\ g(t_n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Jadi karena:

$$E(\hat{g}_\lambda(t)) \neq g(t),$$

artinya estimator  $\hat{g}_\lambda(t)$  bias untuk kurva regresi  $g(t)$ .

Dalam analisis regresi untuk keperluan inferensi sering diasumsikan *error* random dan  $\varepsilon_i$  berdistribusi normal. Jika dalam penelitian ini *error* random dari model regresi Deret Fourier diasumsikan berdistribusi  $N(0, \sigma^2)$  maka berdasarkan



persamaan (4.11) diperoleh Moment Generating Functions (MGF) untuk variabel respon  $y_i$  diberikan oleh:

$$\begin{aligned}
 M_{y_i}(\theta) &= M_{g(t_i)+\varepsilon_i}(\theta), & (4.15) \\
 &= e^{g(t_i)\theta} M_{\varepsilon_i}(\theta) \\
 &= e^{g(t_i)\theta} e^{\theta(0)+\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2} \\
 &= e^{g(t_i)\theta} e^{\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2} \\
 &= e^{g(t_i)\theta + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}
 \end{aligned}$$

MGF ini adalah MGF dari distribusi normal dengan mean  $g(t_i)$  dan variansi  $\sigma^2$ . Akibatnya karena ada korespondensi satu-satu antara MGF dan fungsi distribusi probabilitas maka distribusi dari  $y_i$  adalah normal dengan mean  $g(t_i)$  dan variansi  $\sigma^2$ . Selanjutnya berdasarkan (4.12) dicari MGF untuk  $\underline{y}$ :

$$\begin{aligned}
 M_{\underline{y}}(\underline{\theta}) &= M_{X\underline{a}+\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}), & (4.16) \\
 &= e^{\underline{\theta}'X\underline{a}} M_{\underline{\varepsilon}}(\underline{\theta}) \\
 &= e^{\underline{\theta}'X\underline{a}} e^{\underline{\theta}'(0)+\frac{1}{2}\underline{\theta}'\sigma^2\underline{1}\underline{\theta}} \\
 &= e^{\underline{\theta}'X\underline{a}} e^{\frac{1}{2}\underline{\theta}'\sigma^2\underline{1}\underline{\theta}} \\
 &= e^{\underline{\theta}'X\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{\theta}'\sigma^2\underline{1}\underline{\theta}}
 \end{aligned}$$

Jadi ini adalah MGF dari distribusi normal dengan mean  $X\underline{a}$  dan variansi  $\sigma^2\underline{I}$ . Akibatnya karena ada korespondensi satu-satu antara MGF dan fungsi distribusi probabilitas maka distribusi dari  $\underline{y}$  adalah normal dengan mean  $X\underline{a}$  dan variansi  $\sigma^2\underline{I}$ . Selanjutnya akan dicari distribusi dari estimator  $\hat{\underline{a}}(\lambda)$ :

$$\hat{\underline{a}}(\lambda) = (n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{D})^{-1} n^{-1}\mathbf{X}'\underline{y}$$

MGF dari  $\hat{\underline{a}}(\lambda)$  adalah:

$$\begin{aligned}
 M_{\hat{\underline{a}}(\lambda)}(\underline{\theta}) &= M_{(n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{D})^{-1} n^{-1}\mathbf{X}'\underline{y}}(\underline{\theta}), & (4.17) \\
 &= M_{\underline{y}}\left(\left(n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{D}\right)^{-1} n^{-1}\mathbf{X}'\underline{\theta}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\left( (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X' \underline{\theta} \right)' X \underline{a} + \frac{1}{2} \left( (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X' \underline{\theta} \right)' \sigma^2 \mathbf{1} \left( (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X' \underline{\theta} \right)} \\
&= e^{\left( n^{-1}X' \underline{\theta} \right)' \left( (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} \right)' X \underline{a} + \frac{1}{2} \left( n^{-1}X' \underline{\theta} \right)' \left( (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} \right)' \sigma^2 \mathbf{1} \left( (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X' \underline{\theta} \right)} \\
&= e^{n^{-1} \underline{\theta}' X (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X \underline{a} + \frac{1}{2} n^{-1} \underline{\theta}' X (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} \sigma^2 \mathbf{1} (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X' \underline{\theta}} \\
&= e^{\underline{\theta}' n^{-1} X (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X \underline{a} + \frac{1}{2} n^{-1} \underline{\theta}' X (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} \sigma^2 \mathbf{1} (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X' \underline{\theta}} \\
&= e^{\underline{\theta}' n^{-1} X (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X \underline{a} + \frac{1}{2} n^{-2} \underline{\theta}' X (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} \sigma^2 \mathbf{1} (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X' \underline{\theta}} \\
&= e^{\underline{\theta}' \left[ n^{-1} X (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X \underline{a} \right] + \frac{1}{2} \underline{\theta}' \left[ n^{-2} X (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X' \sigma^2 \right] \underline{\theta}}
\end{aligned}$$

Ini adalah MGF dari distribusi normal dengan mean  $n^{-1}X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1}X\underline{a}$  dan variansi  $n^{-2}X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1}X'\sigma^2$ .

Akibatnya  $\hat{g}_z(\lambda)$  berdistribusi normal dengan mean  $n^{-1}X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1}X\underline{a}$  dan variansi  $n^{-2}X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1}X'\sigma^2$ . Selanjutnya akan dicari distribusi dari estimator  $\hat{g}_z(\underline{t}) = S(\lambda)\underline{y}$ . MGF dari  $\hat{g}_z(\underline{t})$  diberikan oleh:

$$\begin{aligned}
M_{\hat{g}_z(\underline{t})}(\underline{\theta}) &= M_{S(\lambda)\underline{y}}(\underline{\theta}), & (4.18) \\
&= M_y(S(\lambda)\underline{\theta})
\end{aligned}$$

Karena MGF dari  $y$  adalah:

$$M_y(\underline{\theta}) = e^{\underline{\theta}' X \underline{a} + \frac{1}{2} \underline{\theta}' \sigma^2 \underline{\theta}}$$

Akibatnya diperoleh:

$$\begin{aligned}
M_{\hat{g}_z(\underline{t})}(\underline{\theta}) &= M_y(S(\lambda)\underline{\theta}) \\
&= e^{(S(\lambda)\underline{\theta})' X \underline{a} + \frac{1}{2} (S(\lambda)\underline{\theta})' \sigma^2 (S(\lambda)\underline{\theta})} \\
&= e^{\underline{\theta}' S'(\lambda) X \underline{a} + \frac{1}{2} \underline{\theta}' S'(\lambda) \sigma^2 S(\lambda) \underline{\theta}} \\
&= e^{\underline{\theta}' [S'(\lambda) X \underline{a}] + \frac{1}{2} \underline{\theta}' [S'(\lambda) \sigma^2 S(\lambda)] \underline{\theta}}
\end{aligned}$$

Maka ini adalah MGF dari distribusi normal dengan mean  $S'(\lambda)X\underline{a}$  dan variansi  $S'(\lambda)S(\lambda)\sigma^2$ . Karena  $S(\lambda) = X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1}n^{-1}X'$ , maka



distribusi dari  $\hat{g}_\lambda(t)$  adalah normal dengan mean:

$$\begin{aligned} \left( X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X' \right)' X\underline{a} &= (n^{-1}X')' (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X'X\underline{a} \\ &= n^{-1}X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X'X\underline{a}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

dan variansi:

$$\begin{aligned} & \left( X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X' \right)' \sigma^2 X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X' \\ &= (n^{-1}X')' \left( (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} \right)' X' \sigma^2 X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X' \\ &= n^{-1}X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X' \sigma^2 X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} n^{-1}X' \\ &= n^{-2}X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X'X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X' \sigma^2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

Jadi didapat:

$$\begin{aligned} \hat{g}_\lambda(t) &\sim N_n \left( n^{-1}X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X'X\underline{a}, \right. \\ & \left. n^{-2}X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X'X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1} X' \sigma^2 \right) \end{aligned}$$

### 4.3. Pemilihan Parameter Penghalus dalam Estimator Deret Fourier

Pada bab sebelumnya kita telah memperoleh estimator Deret Fourier berbentuk  $\hat{g}_\lambda(t) = S(\lambda)\underline{y}$ . Estimator Deret Fourier ini sangat tergantung kepada  $\lambda$  (parameter penghalus) Wahba, (1990) dan Eubank (1988) menyatakan parameter penghalus  $\lambda$  mempunyai peran sangat penting dalam regresi nonparametrik. Mereka memperlihatkan apabila nilai  $\lambda$  sangat kecil ( $\lambda \rightarrow 0$ ) akan memberikan estimator yang sangat kasar. Sebaliknya untuk nilai  $\lambda$  sangat besar ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) akan menghasilkan estimator yang sangat mulus.

Oleh karena itu dalam regresi nonparametrik parameter penghalus  $\lambda$  harus dipilih yang paling optimal. Terdapat berbagai metode untuk memilih parameter penghalus optimal, salah satunya adalah metode UBR. Dalam penelitian ini akan



diturunkan metode UBR untuk memilih parameter penghalus dalam estimator Deret Fourier. Didefinisikan fungsi Kerugian (*Loss*) kuadrat:

$$L(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n (\hat{g}_\lambda(t_i) - g(t_i))^2, \quad (4.21)$$

Berkaitan dengan fungsi Loss didefinisikan fungsi Resiko:

$$R(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n E(\hat{g}_\lambda(t_i) - g(t_i))^2, \quad (4.22)$$

Fungsi Resiko  $R(\lambda)$  diatas dapat disajikan dalam bentuk vektor:

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= n^{-1} E \left( \left[ \underline{\hat{g}}_\lambda(t) - \underline{g}(t) \right] \left[ \underline{\hat{g}}_\lambda(t) - \underline{g}(t) \right] \right) \\ &= n^{-1} E \left( \left[ \mathbf{S}(\lambda) \underline{y} - \underline{g}(t) \right] \left[ \mathbf{S}(\lambda) \underline{y} - \underline{g}(t) \right] \right) \\ &= n^{-1} E \left( \left[ \mathbf{S}(\lambda) (\underline{g}(t) + \underline{\varepsilon}) - \underline{g}(t) \right] \left[ \mathbf{S}(\lambda) (\underline{g}(t) + \underline{\varepsilon}) - \underline{g}(t) \right] \right) \\ &= n^{-1} E \left( \left[ \mathbf{S}(\lambda) \underline{g}(t) + \mathbf{S}(\lambda) \underline{\varepsilon} - \underline{g}(t) \right] \left[ \mathbf{S}(\lambda) \underline{g}(t) + \mathbf{S}(\lambda) \underline{\varepsilon} - \underline{g}(t) \right] \right) \\ &= n^{-1} E \left( \left[ \mathbf{S}(\lambda) \underline{g}(t) - \underline{g}(t) + \mathbf{S}(\lambda) \underline{\varepsilon} \right] \left[ \mathbf{S}(\lambda) \underline{g}(t) - \underline{g}(t) + \mathbf{S}(\lambda) \underline{\varepsilon} \right] \right) \\ &= n^{-1} E \left( \left[ (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I}) \underline{g}(t) + \mathbf{S}(\lambda) \underline{\varepsilon} \right] \left[ (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I}) \underline{g}(t) + \mathbf{S}(\lambda) \underline{\varepsilon} \right] \right) \\ &= n^{-1} E \left( \left[ \left( \underline{g}(t) \right)' (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I})' + (\mathbf{S}(\lambda) \underline{\varepsilon})' \right] \left[ (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I}) \underline{g}(t) + (\mathbf{S}(\lambda) \underline{\varepsilon}) \right] \right) \\ &= n^{-1} E \left( \left[ \underline{g}'(t) (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I})' + \underline{\varepsilon}' \mathbf{S}'(\lambda) \right] \left[ (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I}) \underline{g}(t) + (\mathbf{S}(\lambda) \underline{\varepsilon}) \right] \right) \\ &= n^{-1} E \left( \underline{g}'(t) (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I})' (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I}) \underline{g}(t) + \underline{g}'(t) (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I})' \mathbf{S}(\lambda) \underline{\varepsilon} + \right. \\ &\quad \left. \underline{\varepsilon}' \mathbf{S}'(\lambda) (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I}) \underline{g}(t) + \underline{\varepsilon}' \mathbf{S}'(\lambda) (\mathbf{S}(\lambda) \underline{\varepsilon}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n^{-1}E\left(\underline{g}'(\lambda)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(\lambda)\right)+E\left(\underline{g}'(\lambda)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'\mathbf{S}(\lambda)\underline{\varepsilon}\right)+ \\
&\quad E\left(\underline{\varepsilon}'\mathbf{S}'(\lambda)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(\lambda)\right)+E\left(\underline{\varepsilon}'\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)\underline{\varepsilon}\right) \\
&= n^{-1}\underline{g}'(\lambda)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(\lambda)+n^{-1}\underline{g}'(\lambda)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'\mathbf{S}(\lambda)E(\underline{\varepsilon})+ \\
&\quad n^{-1}E(\underline{\varepsilon}')\mathbf{S}'(\lambda)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(\lambda)+n^{-1}E(\underline{\varepsilon}'\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)\underline{\varepsilon}) \\
&= n^{-1}\underline{g}'(\lambda)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(\lambda)+0+0+n^{-1}E(\underline{\varepsilon}'\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)\underline{\varepsilon}) \\
&= n^{-1}\underline{g}'(\lambda)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(\lambda)+0+n^{-1}\text{trace}\left(\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)\sigma^2\right) \\
&= n^{-1}\underline{g}'(\lambda)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(\lambda)+n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left(\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)\right)
\end{aligned}$$

Dari uraian diatas diperoleh fungsi resiko  $R(\lambda)$  dalam bentuk vektor adalah:

$$R(\lambda) = n^{-1}\underline{g}'(\lambda)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(\lambda)+n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left(\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)\right), \quad (4.23)$$

Berikut akan dicari suatu kuantitas  $UBR(\lambda)$  sedemikian sehingga:

$$E(UBR(\lambda)) = R(\lambda).$$

Misalkan diberikan

$$\begin{aligned}
UBR(\lambda) &= n^{-1}\underline{y}'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{y}+n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left(\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)\right)+ \\
&\quad -n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left((\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibuktikan  $UBR(\lambda)$  tak bias untuk  $R(\lambda)$

$$\begin{aligned}
E[UBR(\lambda)] &= E\left[\left[n^{-1}\underline{y}'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{y}\right]+n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left[\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)\right]+ \right. \\
&\quad \left. -n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left[(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\right]\right] \\
&= E\left[n^{-1}\underline{y}'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{y}\right]+E\left[n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left(\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)\right)\right]+ \\
&\quad -E\left[n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\right)\right] \\
&= E\left[\left[n^{-1}\underline{y}'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{y}\right]+\left[n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left(\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)\right)\right]+ \right. \\
&\quad \left. -\left[n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\right)\right]\right]
\end{aligned}$$

Akan dihitung terlebih dahulu

$$\begin{aligned}
& E\left[n^{-1}\underline{y}'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{y}\right] \\
&= n^{-1}E\left[\left(\underline{g}(t)+\underline{\varepsilon}\right)'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\left(\underline{g}(t)+\underline{\varepsilon}\right)\right] \\
&= n^{-1}E\left[\left(\underline{g}'(t)+\underline{\varepsilon}'\right)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\left(\underline{g}(t)+\underline{\varepsilon}\right)\right] \\
&= n^{-1}E\left[\underline{g}'(t)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(t)+\underline{g}'(t)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{\varepsilon}+\right. \\
&\quad \left.\underline{\varepsilon}'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(t)+\underline{\varepsilon}'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{\varepsilon}\right] \\
&= n^{-1}E\left[\underline{g}'(t)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(t)\right]+n^{-1}E\left[\underline{g}'(t)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{\varepsilon}\right]+ \\
&\quad n^{-1}E\left[\underline{\varepsilon}'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(t)\right]+n^{-1}E\left[\underline{\varepsilon}'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{\varepsilon}\right] \\
&= \left(n^{-1}\underline{g}'(t)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(t)\right)+\left(n^{-1}\underline{g}'(t)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})E(\underline{\varepsilon})\right)+ \\
&\quad \left(n^{-1}E(\underline{\varepsilon}')(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(t)\right)+\left(n^{-1}E\left[\underline{\varepsilon}'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{\varepsilon}\right]\right) \\
&= n^{-1}\underline{g}'(t)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(t)+0+0+n^{-1}\text{trace}\left[(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\sigma^2\right] \\
&= n^{-1}\underline{g}'(t)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(t)+n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left[(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\right]
\end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh:

$$\begin{aligned}
E[UBR(\lambda)] &= n^{-1}\underline{g}'(t)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(t)+n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left[(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\right]+ \\
&\quad n^{-1}\sigma^2\text{trace}[\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)]-n^{-1}\sigma^2\text{trace}\left[(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\right] \\
&= n^{-1}\underline{g}'(t)(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{g}(t)+n^{-1}\sigma^2\text{trace}[\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda)] \\
&= R(\lambda)
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh  $UBR(\lambda)$  tak bias untuk  $R(\lambda)$ .

Dengan demikian metode UBR untuk memilih parameter penghalus dalam estimator Deret Fourier diberikan oleh:

$$\begin{aligned}
UBR(\lambda) &= n^{-1}\underline{y}'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})\underline{y}+n^{-1}\sigma^2\text{trace}(\mathbf{S}'(\lambda)\mathbf{S}(\lambda))+ \\
&\quad n^{-1}\sigma^2\text{trace}(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})'(\mathbf{S}(\lambda)-\mathbf{I})
\end{aligned} \tag{4.24}$$



$\lambda$  optimal diperoleh dari nilai  $\lambda$  yang meminimumkan  $UBR(\lambda)$ .

Apabila  $\sigma^2$  tidak diketahui dapat diestimasi dengan:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{y'(I-S(\lambda))'(I-S(\lambda))y}{\text{trace}[(I-S(\lambda))]} \quad (4.25)$$

#### 4.4. Metode UBR, CV dan GCV pada Estimator Deret Fourier dengan Menggunakan Data Simulasi

Dalam penelitian ini dilakukan simulasi untuk memberikan gambaran tentang model regresi Deret Fourier. Simulasi dalam penelitian ini dilakukan untuk mengevaluasi kebaikan metode UBR, CV dan GCV kemudian membandingkan kebaikan antara ketiga metode tersebut. Realibilitas pengukuran berdasarkan nilai MSE terkecil yang diperoleh pada metode UBR, CV dan GCV. Simulasi ini menggunakan Software MATLAB version 6.5. Diberikan dua kurva percobaan yaitu:

1. Fungsi Trigonometri :  $g(t) = \sin(2\pi t^3)$
2. Fungsi Eksponen :  $g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$ .

Tata cara simulasi diuraikan sebagai berikut:

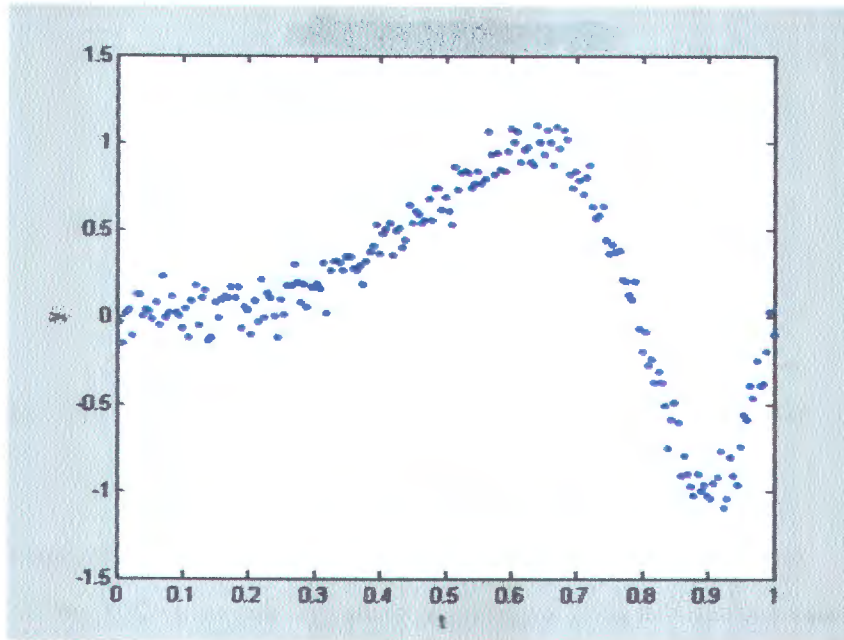
Membangun model regresi  $y_i = g(t_i) + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , dan ukuran sampel  $n = 50$ ,  $n = 100$ ,  $n = 200$  dengan nilai  $K = 5$ ,  $K = 20$ . Diberikan  $t_i = \frac{i}{n}$ , dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Membangkitkan  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$  dengan  $\sigma^2 = 0,1$ . Setelah membangkitkan data, dihitung matriks  $X$ , matriks  $D$  dan matriks hat  $S(\lambda) = X(n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1}n^{-1}X'$ .

Selanjutnya dihitung estimator  $\hat{a}(\lambda) = (n^{-1}X'X + \lambda D)^{-1}n^{-1}X'y$ , dan menentukan estimator Deret Fourier dengan  $\hat{g}_\lambda(t) = S(\lambda)y$ , sehingga didapat  $\hat{g}_\lambda(t) = \hat{b}(\lambda)t + \frac{1}{2}\hat{a}_0(\lambda) + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k(\lambda) \cos kt$ . Memilih parameter penghalus dengan metode UBR, CV dan GCV dan membandingkan nilai MSE dari estimator dimana parameter penghalus optimal dipilih dengan metode UBR, CV dan GCV.

**4.4.1. Simulasi Fungsi Trigonometri** :  $g(t) = \sin(2\pi t^3)$ .

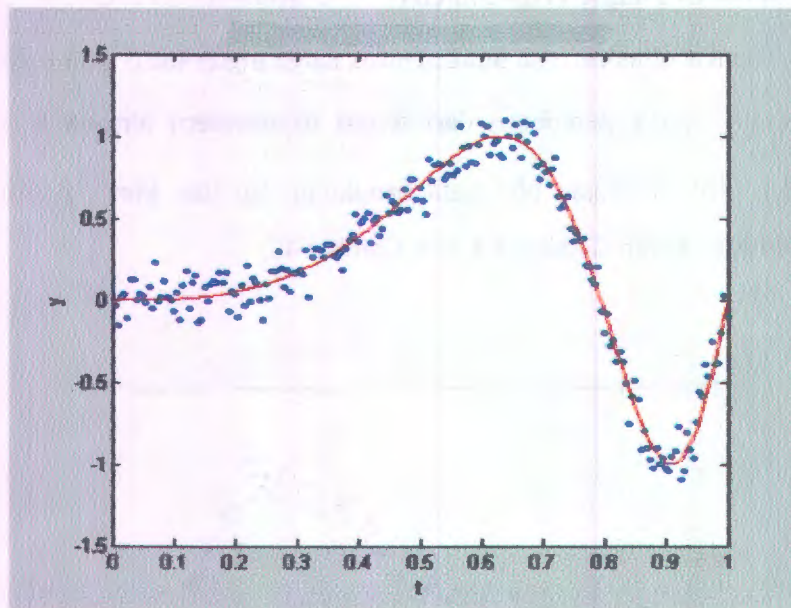
Berikut disajikan hasil simulasi untuk fungsi trigonometri  $g(t) = \sin(2\pi t^3)$ .

Plot  $(t_i, y_i)$ , kurva percobaan dari fungsi trigonometri dimana  $n = 200$ , dan  $\sigma^2 = 0,1$ , dan gabungan plot data bangkitan dan dan kurva fungsi disajikan berturut-turut. dalam Gambar 4.1, dan Gambar 4.2



..... (Titi-titik) : Data Bangkitan

**Gambar 4.1** Plot  $(t_i, y_i)$  untuk Fungsi Trigonometri  $g(t) = \sin(2\pi t^3)$ ,  
dengan  $n = 200$   $\sigma^2 = 0,1$



..... (Titi-titik) : Data Bangkitan  
 — (Garis Merah) : Fungsi  $g(t)$

**Gambar 4.2** Plot  $(t_i, y_i)$  dan Fungsi Trigonometri  $g(t) = \sin(2\pi t^3)$ ,  
 dengan  $n = 200$   $\sigma^2 = 0,1$

Selanjutnya diberikan plot estimator Deret Fourier untuk data bangkitan dari salah satu replikasi untuk fungsi trigonometri  $g(t)$  dengan  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$  yang berturut-turut diberikan dalam Gambar 4.3, Gambar 4.4, Gambar 4.5, dan Gambar 4.6.

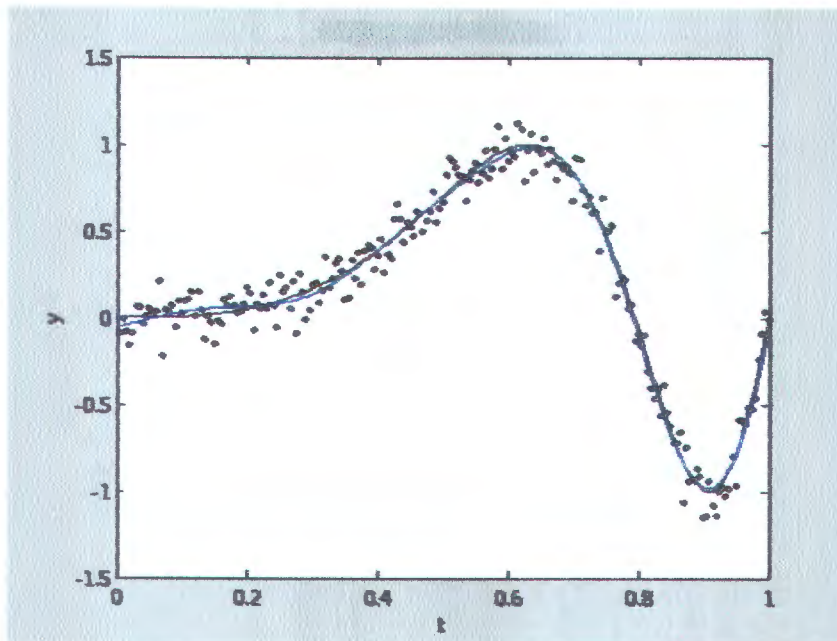
Berikutnya pemilihan parameter penghalus  $\lambda$  optimal dipilih dengan menggunakan metode UBR yang sebelumnya telah dikaji pada sub bab 4.3. Untuk metode UBR persamaan yang digunakan sebagai berikut:

$$UBR(\lambda) = n^{-1} \underline{y}' (S(\lambda) - I)' (S(\lambda) - I) \underline{y} + n^{-1} \sigma^2 \text{trace}(S'(\lambda) S(\lambda)) + \\ - n^{-1} \sigma^2 \text{trace}(S(\lambda) - I)' (S(\lambda) - I)$$

dengan  $S(\lambda)$  adalah matriks hat yang diperoleh dari Deret Fourier  $\hat{g}_\lambda(t)$

Berikut diberikan hasil plot antara  $(t_i, y_i)$  pada estimasi Deret Fourier untuk fungsi trigonometri dengan  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$  disajikan dalam Gambar 4.3 sebagai berikut:





- ..... (Titi-titik) : Data Bangkitan
- (Garis Hitam) : Fungsi  $g(t)$
- (Garis Biru) : Deret Fourier dengan Metode UBR

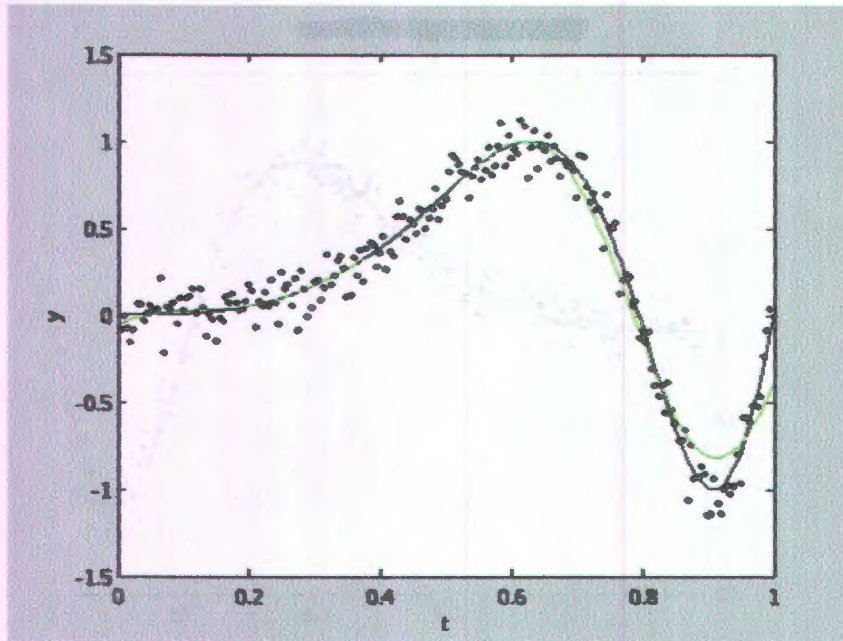
**Gambar 4.3** Plot  $(t_i, y_i)$ , untuk Fungsi Trigonometri  $g(t)$  dan Estimator Deret Fourier dengan Metode UBR,  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$

Selanjutnya untuk pemilihan parameter penghalus  $\lambda$  optimal dengan menggunakan metode CV persamaan yang digunakan sebagai berikut:

$$CV(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{g}_\lambda(t_i))^2$$

Diberikan plot  $(t_i, y_i)$  pada estimator Deret Fourier untuk fungsi trigonometri  $g(t)$  dengan menggunakan metode CV dengan  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$  disajikan dalam Gambar 4.4 sebagai berikut:





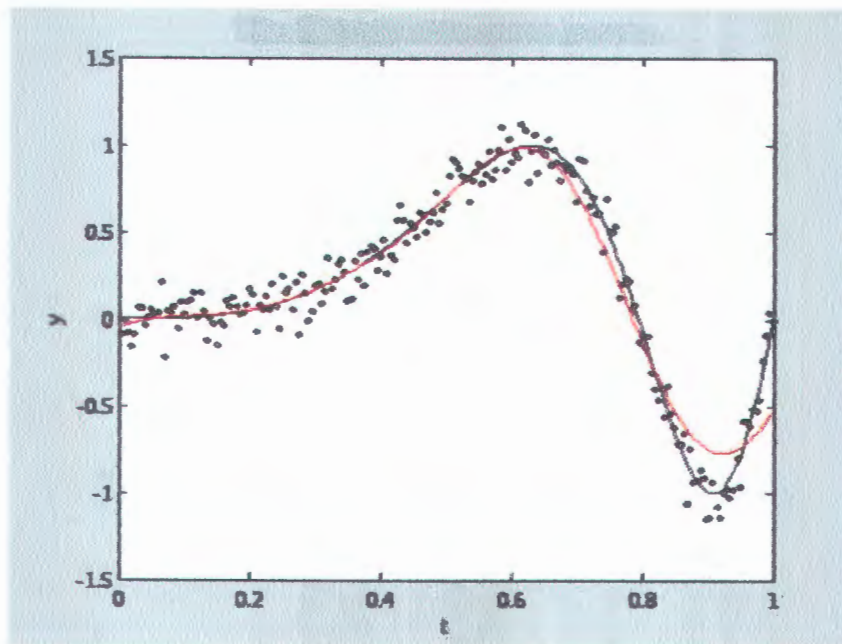
- ..... (Titi-titik) : Data Bangkitan
- (Garis Hitam) : Fungsi  $g(t)$
- (Garis Hijau) : Deret Fourier dengan Metode CV

**Gambar 4.4** Plot  $(t_i, y_i)$ , Fungsi Trigonometri  $g(t)$  dan Estimator Deret Fourier dengan Metode CV untuk  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$

Selanjutnya untuk pemilihan parameter penghalus  $\lambda$  optimal dengan menggunakan metode GCV persamaan yang digunakan sebagai berikut:

$$GCV(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{g}_\lambda(t_i))^2}{\left(1 - n^{-1} \sum_{i=1}^n a_{i^2}(\lambda)\right)^2}$$

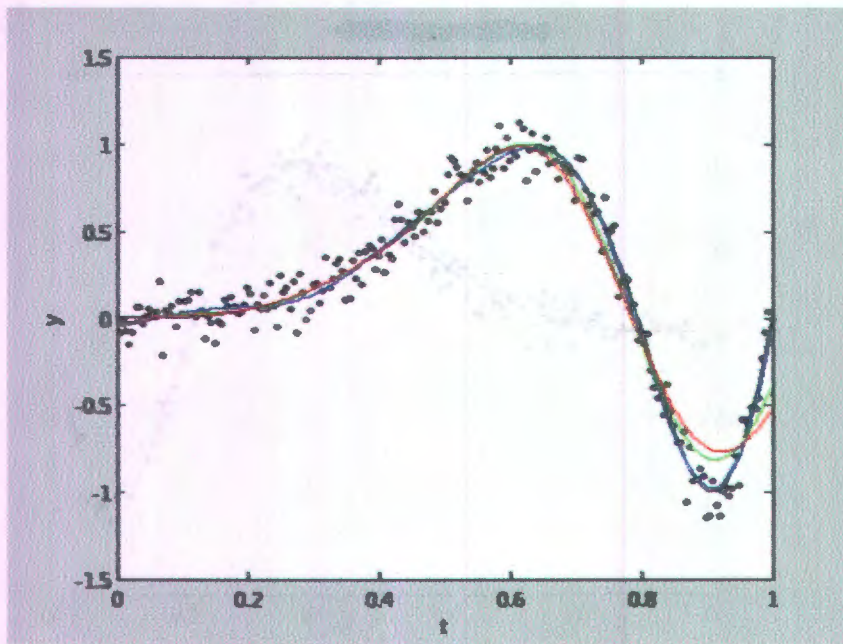
Diberikan plot  $(t_i, y_i)$  pada estimator Deret Fourier untuk fungsi trigonometri  $g(t)$  dengan menggunakan metode GCV dengan  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$  disajikan dalam Gambar 4.5 sebagai berikut:



- ..... (Titi-titik) : Data Bangkitan
- (Garis Hitam) : Fungsi  $g(t)$
- (Garis Merah) : Deret Fourier dengan Metode GCV

**Gambar 4.5** Plot  $(t_i, y_i)$ , Fungsi Trigonometri  $g(t)$  dan Estimator Deret Fourier dengan Metode GCV untuk  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$

Selanjutnya diberikan plot antara  $(t_i, y_i)$  pada fungsi  $g(t)$  dan estimator Deret Fourier dimana  $\lambda$  optimal dipilih dengan menggunakan metode UBR, CV dan GCV untuk  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$  disajikan pada Gambar 4.6 sebagai berikut:



- ..... (Titi-titik) : Data Bangkitan
- (Garis Hitam) : Fungsi  $g(t)$
- (Garis Biru) : Deret Fourier dengan Metode UBR
- (Garis Hijau) : Deret Fourier dengan Metode CV
- (Garis Merah) : Deret Fourier dengan Metode GCV

**Gambar 4.6** Plot Fungsi Trigonometri  $g(t)$  Estimator Deret Fourier dengan Metode UBR, CV, GCV untuk  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$

Evaluasi kebaikan metode UBR, CV dan GCV dalam memilih parameter penghalus  $\lambda$  ditinjau berdasarkan nilai MSE terkecil yang dihasilkan dari masing-masing metode. Berikut hasil simulasi data, untuk nilai  $\lambda$  optimal dan MSE metode UBR, CV dan GCV disajikan dalam Tabel 4.1 sebagai berikut:

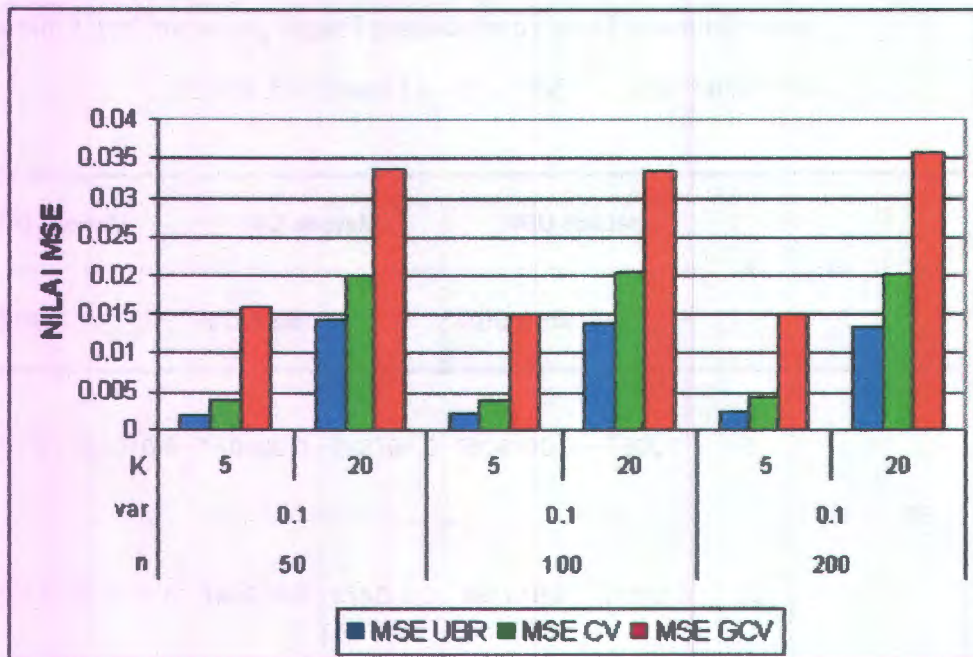


**Tabel 4.1** Hasil Simulasi Nilai  $\lambda$  Optimal dan MSE Metode UBR, CV dan GCV pada Estimator Deret Fourie dengan Fungsi  $g(t) = \sin(2\pi t^3)$ , dimana  $n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 5, K = 20$

n	var	k	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
			$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
50	0.1	5	0,2067	0,0019053	0,107620	0,004077	0,015056	0,021495
		20	0,08617	0,014198	0,045473	0,019947	0,003230	0,0359330
100	0.1	5	0,20015	0,0021103	0,102020	0,0040874	0,014231	0,0179270
		20	0,094627	0,013752	0,048525	0,020311	0,003442	0,0359630
200	0.1	5	0,1808	0,0023361	0,091257	0,0044296	0,012714	0,0179280
		20	0,10285	0,013313	0,052058	0,020157	0,003691	0,0375740

Secara visual nilai MSE pada Tabel 4.1 dapat ditampilkan dalam diagram batang Gambar 4.7





Gambar 4.7: Diagram Batang Nilai MSE untuk Fungsi Trigonometri  $g(t)$ , untuk  $n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 5, K = 20$

Dengan memperhatikan nilai MSE dari metode UBR, CV dan GCV pada Tabel 4.1 dan Gambar 4.7 dapat disimpulkan sebagai berikut:

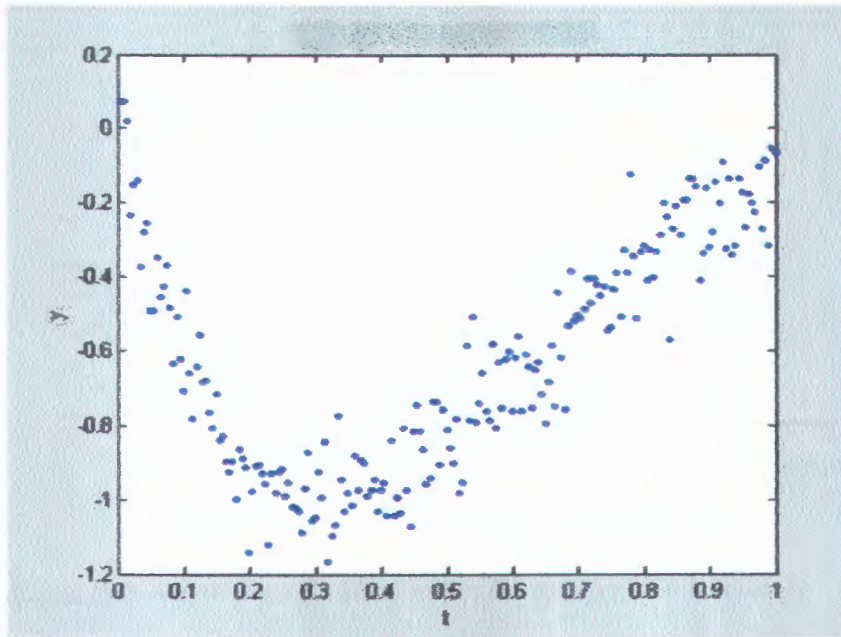
1. Pada ukuran sampel  $n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 5, K = 20$  diperoleh nilai MSE UBR lebih kecil dibandingkan dengan nilai MSE CV dan GCV, sehingga metode UBR lebih baik dari pada metode CV dan GCV.
2. Pada ukuran sampel  $n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 5, K = 20$  diperoleh nilai MSE CV lebih kecil dari metode GCV, sehingga Metode CV lebih baik dari pada metode GCV.

Berdasarkan hasil simulasi estimator Deret Fourir dengan fungsi trigonometri Tabel 4.1 dan Gambar 4.7 dapat dijelaskan bahwa metode UBR lebih sesuai dibanding dengan metode CV dan GCV. Hal serupa juga terjadi untuk percobaan dua untuk sampel  $n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 5, K = 20$  Hasil lengkapnya untuk hal ini dapat dilihat pada lampiran 5.

**4.4.2. Simulasi Fungsi Eksponen:  $g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$**

Berikut diuraikan hasil simulasi untuk fungsi eksponen

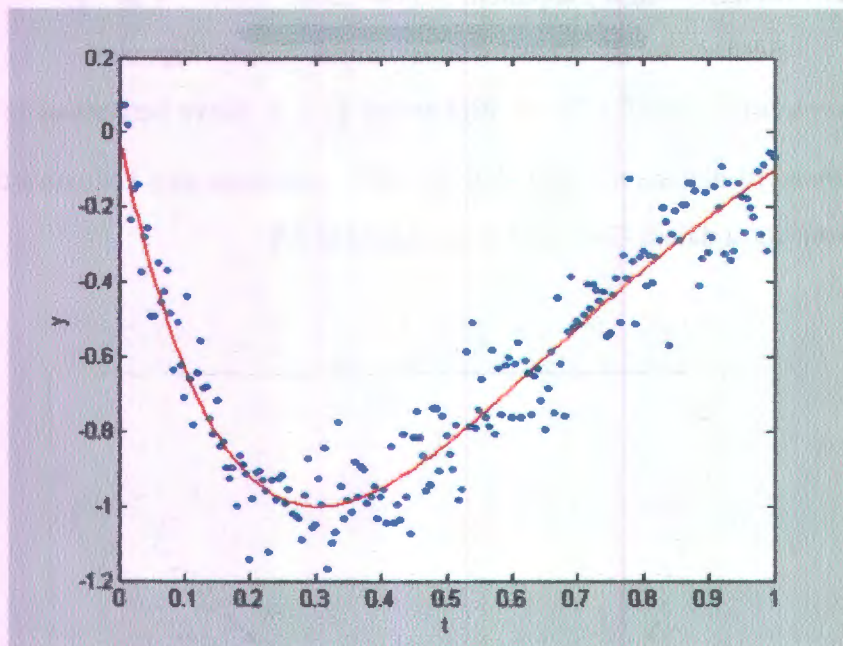
$g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$ . Plot antara  $(t, y_i)$ , kurva percobaan dari fungsi trigonometri dimana  $n = 200$ , dan  $\sigma^2 = 0,1$ , gabungan plot keduanya disajikan berturut-turut dalam Gambar 4.8, dan Gambar 4.9.



..... (Titi-titik) : Data Bangkitan

Gambar 4.8 Plot  $(t_i, y_i)$  dan Fungsi Eksponen  $g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$   
dengan  $n=200$   $\sigma^2 = 0,1$





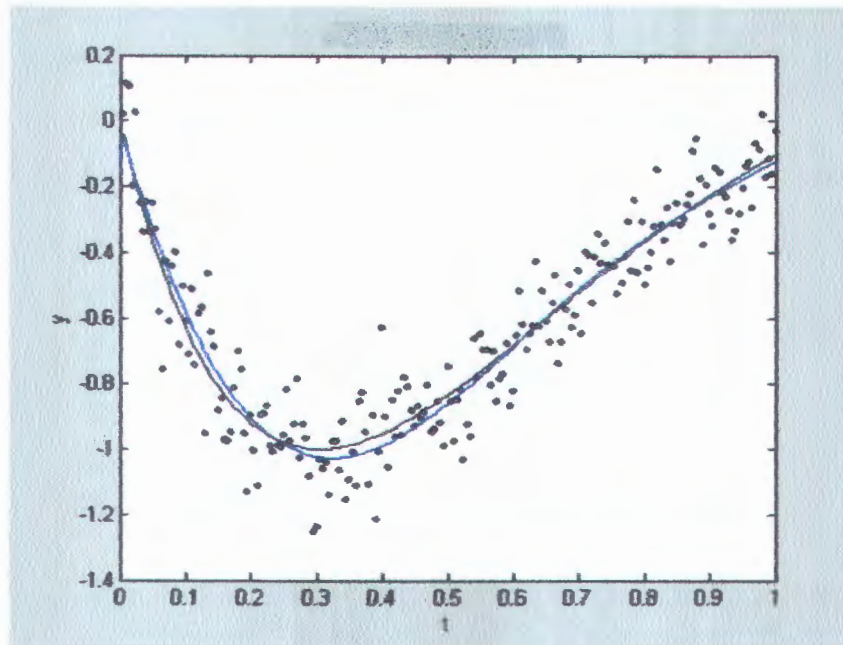
..... (Titi-titik) : Data Bangkitan  
 — (Garis Merah) : Fungsi  $g(t)$

**Gambar 4.9** Plot  $(t_i, y_i)$  dan Fungsi Eksponen  $g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$  dengan  $n = 200$   $\sigma^2 = 0,1$ .

Berikut diberikan plot estimator Deret Fourier untuk data bangkitan dari salah satu replikasi untuk fungsi eksponen  $g(t)$  dengan  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$  yang berturut-turut diberikan dalam Gambar 4.10, Gambar 4.11, Gambar 4.12, dan Gambar 4.13. Metode UBR persamaan yang digunakan sebagai berikut:

$$UBR(\lambda) = n^{-1} \underline{y}' (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I})' (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I}) \underline{y} + n^{-1} \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{S}'(\lambda) \mathbf{S}(\lambda)) + n^{-1} \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I})' (\mathbf{S}(\lambda) - \mathbf{I})$$

Pada Gambar 4.10 menyajikan plot antara  $(t_i, y_i)$ , fungsi eksponen  $g(t)$  dan estimator Deret Fourier dimana  $\lambda$  optimal dipilih dengan menggunakan metode UBR. Parameter penghalus dengan metode UBR pada interval tertentu saling berimpit jadi bisa dikatakan bahwa metode UBR masih mengikuti fungsi  $g(t)$ . Hasil simulasi untuk fungsi eksponen  $g(t)$  dengan  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$  disajikan dalam Gambar 4.10 sebagai berikut:



- ..... (Titi-titik) : Data Bangkitan
- (Garis Hitam) : Fungsi  $g(t)$
- (Garis Biru) : Deret Fourier dengan Metode UBR

**Gambar 4.10** Plot  $(t_i, y_i)$  Fungsi Eksponen  $g(t)$  dan Estimator Deret Fourier dengan Metode UBR untuk  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$

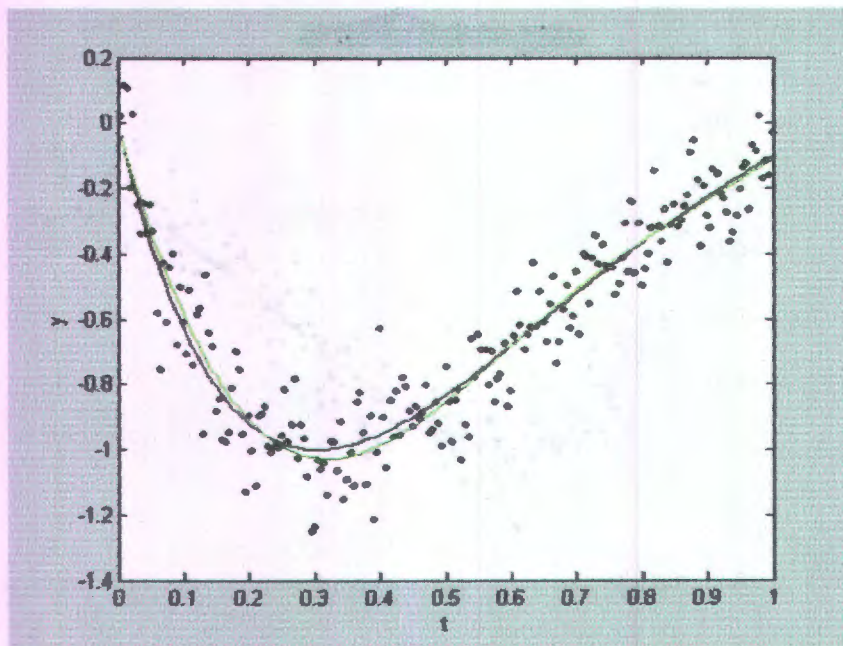
Selanjutnya untuk pemilihan parameter penghalus  $\lambda$  optimal dengan menggunakan metode CV persamaan yang digunakan sebagai berikut:

$$CV(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{g}_\lambda(t_i))^2$$

Gambar 4.11 menyajikan plot antara  $(t_i, y_i)$  pada fungsi eksponen  $g(t)$  dan estimator Deret Fourier dimana parameter penghalus  $\lambda$  optimal dipilih dengan menggunakan metode CV untuk  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$ . Parameter penghalus CV sangat dekat pada fungsi  $g(t)$  bahkan pada interval tertentu saling berimpit

Hasil simulasi untuk plot estimator Deret Fourier untuk fungsi eksponen  $g(t)$  dengan  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$  disajikan dalam Gambar 4.11 sebagai berikut:





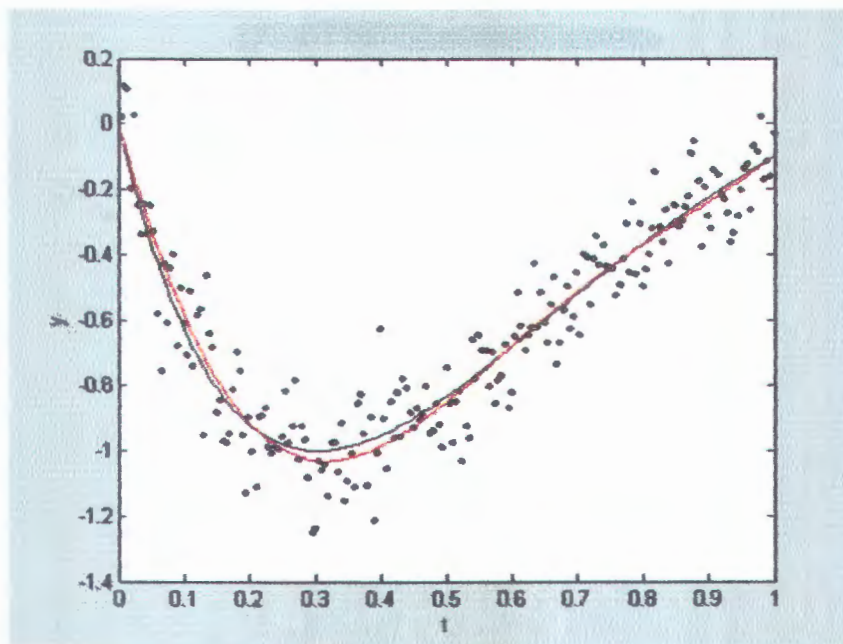
- ..... (Titik-titik) : Data Bangkitan
- (Garis Hitam) : Fungsi  $g(t)$
- (garis Hijau) : Deret Fourier dengan Metode CV

**Gambar 4.11** Plot  $(t, y_i)$ , Fungsi Eksponen  $g(t)$  dan Estimator Deret Fourier dengan Metode CV untuk  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$

Berikutnya untuk pemilihan parameter penghalus  $\lambda$  optimal dengan metode GCV. Untuk metode GCV persamaan yang digunakan sebagai berikut:

$$GCV(\lambda) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{g}_\lambda(t_i))^2}{\left(1 - n^{-1} \sum_{i=1}^n a_{ii}(\lambda)\right)^2}$$

Gambar 4.12 menyajikan plot antara  $(t, y_i)$  pada fungsi eksponen  $g(t)$  dan estimator Deret Fourier dimana parameter penghalus  $\lambda$  optimal dipilih dengan menggunakan metode GCV untuk  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$ . Parameter penghalus GCV sangat dekat dengan fungsi  $g(t)$ . Hasil simulasi dengan menggunakan metode GCV dan plot estimator Deret Fourier untuk fungsi eksponen  $g(t)$  disajikan dalam Gambar 4.12 sebagai berikut:

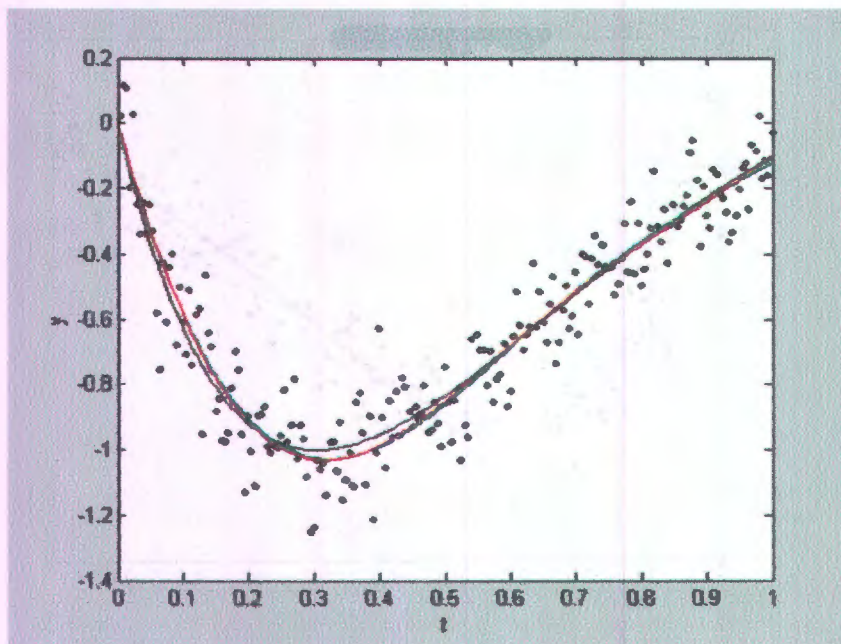


- ..... (Titik-titik) : Data Bangkitan
- (Garis Hitam) : Fungsi  $g(t)$
- (Garis Merah) : Deret Fourier dengan Metode GCV

**Gambar 4.12** Plot  $(t_i, y_i)$ , Fungsi Eksponen  $g(t)$  dan Estimator Deret Fourier dengan Metode GCV untuk  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$

Selanjutnya plot antara  $(t_i, y_i)$  pada fungsi eksponen  $g(t)$  dan estimator Deret Fourier dimana parameter penghalus  $\lambda$  optimal dipilih dengan menggunakan metode UBR, CV dan GCV untuk  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ ,  $K = 5$ . Gabungan ketiga metode ini terlihat sangat dekat dengan estimator Deret Fourier bahkan pada interval tertentu saling berimpit jadi bisa dikatakan bahwa metode UBR, CV dan GCV masih mengikuti fungsi  $g(t)$ . Hasil simulasi dengan menggunakan metode UBR, CV dan GCV dan plot estimator Deret Fourier untuk fungsi eksponen  $g(t)$  disajikan dalam Gambar 4.13 sebagai berikut:





- ..... (Titi-titik) : Data Bangkitan
- (Garis Hitam) : Fungsi  $g(t)$
- (Garis Biru) : Deret Fourier dengan Metode UBR
- (Garis Hijau) : Deret Fourier dengan Metode CV
- (Garis Merah) : Deret Fourier dengan Metode GCV

**Gambar 4.13** Plot  $(t_i, y_i)$  Fungsi Eksponen  $g(t)$  Estimator Deret Fourier dengan Metode UBR, CV, GCV,  $n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$ , dan  $K = 5$

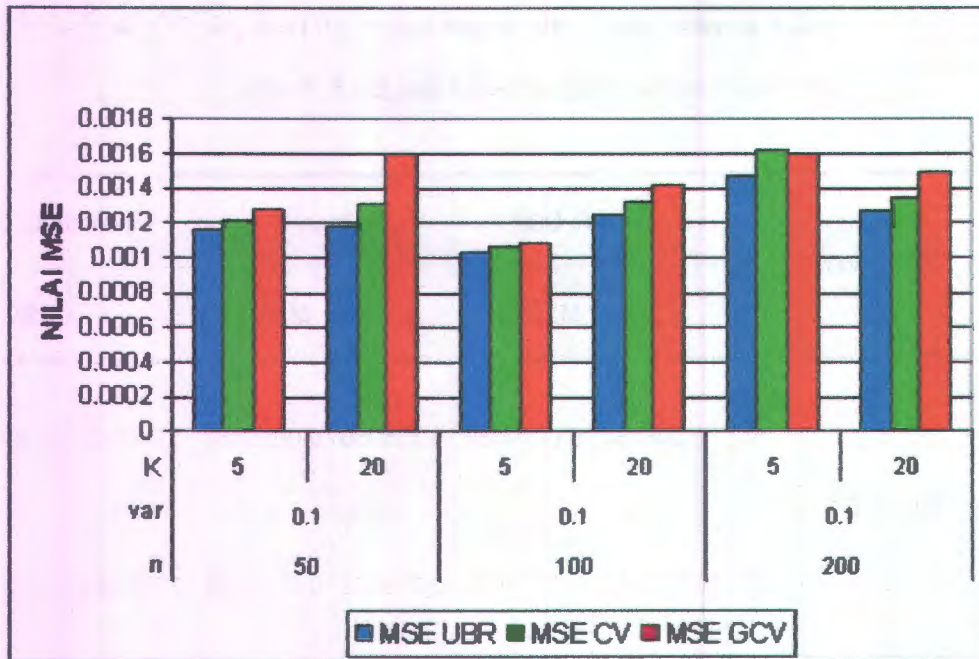
Berikut diselidiki nilai MSE untuk estimator Deret Fourier dimana nilai  $\lambda$  optimal untuk masing-masing dipilih dengan metode UBR, CV dan GCV. Tabel 4.2 dan Gambar 4.14 menyajikan nilai MSE dari masing-masing metode dengan  $n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 5, K = 20$

**Tabel 4.2** Hasil Simulasi nilai  $\lambda$  Optimal dan MSE Metode UBR, CV dan GCV pada Estimator Deret Fourie dengan Fungsi  $g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$ ,  $n = 50, n = 100, n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 5, K = 20$

n	var	k	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
			$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
50	0.1	5	0,208130	0,0029387	0,108360	0,0056457	0,015160	0,02517
		20	0,023513	0,0011852	0,012408	0,0013142	0,000881	0,0015975
100	0.1	5	0,018596	0,0010388	0,009479	0,0010671	0,001322	0,0010937
		20	0,017993	0,0012463	0,009227	0,001326	0,000654	0,0014255
200	0.1	5	0,025844	0,0014638	0,013044	0,0016284	0,001807	0,0018173
		20	0,019389	0,0012701	0,009814	0,0013433	0,000696	0,0014924

Terlihat dari Tabel 4.2 untuk masing-masing metode dan semua ukuran sampel  $n = 50, n = 100, n = 200$ ,  $\sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 5, K = 20$  pada fungsi eksponen secara umum diperoleh bahwa nilai MSE metode UBR cenderung lebih kecil dari MSE metode CV dan MSE metode GCV.





**Gambar 4.14:** Diagram Batang Nilai MSE Fungsi Eksponen

$$g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$$

$$n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1 \text{ dan } K = 5, K = 20$$

Secara visual nilai MSE untuk masing-masing metode diperlihatkan pada Tabel 4.2 dan Gambar 4.14 untuk semua ukuran sampel  $n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 5, K = 20$  untuk fungsi eksponen  $g(t) = 4,26(e^{-t} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t})$ .

Berdasarkan hasil simulasi estimator Deret Fourrir dengan fungsi eksponen Tabel 4.2 dan Gambar 4.14 dapat dijelaskan sebagai berikut :

1. Nilai MSE dari metode UBR lebih kecil dibanding dengan MSE metode CV dan MSE metode GCV, dengan ukuran sampel  $n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 5, K = 20$ .
2. Sedangkan nilai MSE metode CV lebih kecil dibanding dengan metode GCV dengan ukuran sampel  $n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 5, K = 20$ .
3. Jika nilai  $K$  makin besar maka memberikan nilai MSE menjadi lebih besar baik untuk metode UBR, CV dan GCV tapi tidak berpengaruh karena MSE metode UBR lebih kecil.

Secara keseluruhan baik menggunakan fungsi trigonometri dan fungsi eksponen, jika nilai  $K$  makin besar maka memberikan nilai MSE menjadi lebih besar baik metode UBR, CV dan GCV untuk ukuran sampel  $n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 5, K = 20$ . Maka dapat disimpulkan bahwa walaupun  $K$  makin besar tidak berpengaruh terhadap metode UBR, karena metode UBR cenderung lebih kecil. Jadi dari ketiga metode ini metode UBR lebih sesuai dan lebih baik dibanding dengan metode CV dan metode GCV pada estimator Deret Fourir dalam regresi nonparametrik. Hasil lengkapnya untuk hal ini dapat dilihat pada lampiran 5.

## BAB 5

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 5.1. Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah dilakukan maka dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Berdasarkan hasil kajian estimator Deret Fourier dalam regresi nonparametrik

diperoleh dari meminimumkan: PLS  $n^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - g(t_i))^2 + \lambda \int_0^{\pi} \frac{2}{\pi} (g^{(2)}(t))^2 dt$ .

Optimasi ini berupa estimator Deret Fourier

$$\hat{g}_\lambda(t_i) = \hat{b}(\lambda)t_i + \frac{1}{2}\hat{a}_0(\lambda) + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k(\lambda) \cos kt_i, \text{ dengan}$$

$$\hat{a}(\lambda) = \left( \hat{b}(\lambda), \frac{1}{2}\hat{a}_0(\lambda), \hat{a}_1(\lambda), \dots, \hat{a}_K(\lambda) \right)'$$



2. Estimator Deret Fourier  $\hat{g}_\lambda(t)$  merupakan estimator linear dalam observasi  $\underline{y}$  dan mempunyai sifat yang bias untuk kurva regresi  $\underline{g}(t)$ . Estimator Deret Fourier  $\hat{g}_\lambda(t)$  berdistribusi normal, apabila error model juga berdistribusi normal.
3. Pemilihan parameter penghalus dalam estimator Deret Fourier dengan metode UBR diberikan oleh

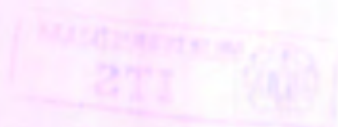
$$UBR(\lambda) = n^{-1} \underline{y}'(S(\lambda) - I)'(S(\lambda) - I)\underline{y} + n^{-1} \sigma^2 \text{trace}(S'(\lambda)S(\lambda)) + \\ - n^{-1} \sigma^2 \text{trace}(S(\lambda) - I)'(S(\lambda) - I)$$

4. Berdasarkan hasil simulasi dengan fungsi trigonometri dan fungsi eksponen untuk  $n = 50, n = 100, n = 200, \sigma^2 = 0,1$ , dan  $K = 5, K = 20$  diperoleh bahwa nilai MSE metode UBR cenderung lebih kecil dari pada nilai MSE metode CV dan nilai MSE GCV pada setiap model simulasi. Untuk nilai MSE metode CV lebih kecil dari pada nilai MSE metode GCV pada setiap model simulasi. Makin besar nilai  $K$  maka memberikan nilai MSE makin besar baik metode UBR, CV dan GCV. Dapat disimpulkan bahwa pemilihan parameter penghalus  $\lambda$  optimal dengan metode UBR cenderung lebih baik dibanding dengan metode CV dan GCV.



## 5.2. Saran

Dalam penelitian ini penulis menyadari bahwa permasalahan yang dikaji masih terbatas, sehingga sangat memungkinkan untuk dikembangkan dan dikaji lebih lanjut. Penulis menyarankan untuk mengkaji estimator Deret Fourier lebih dari satu variabel independen



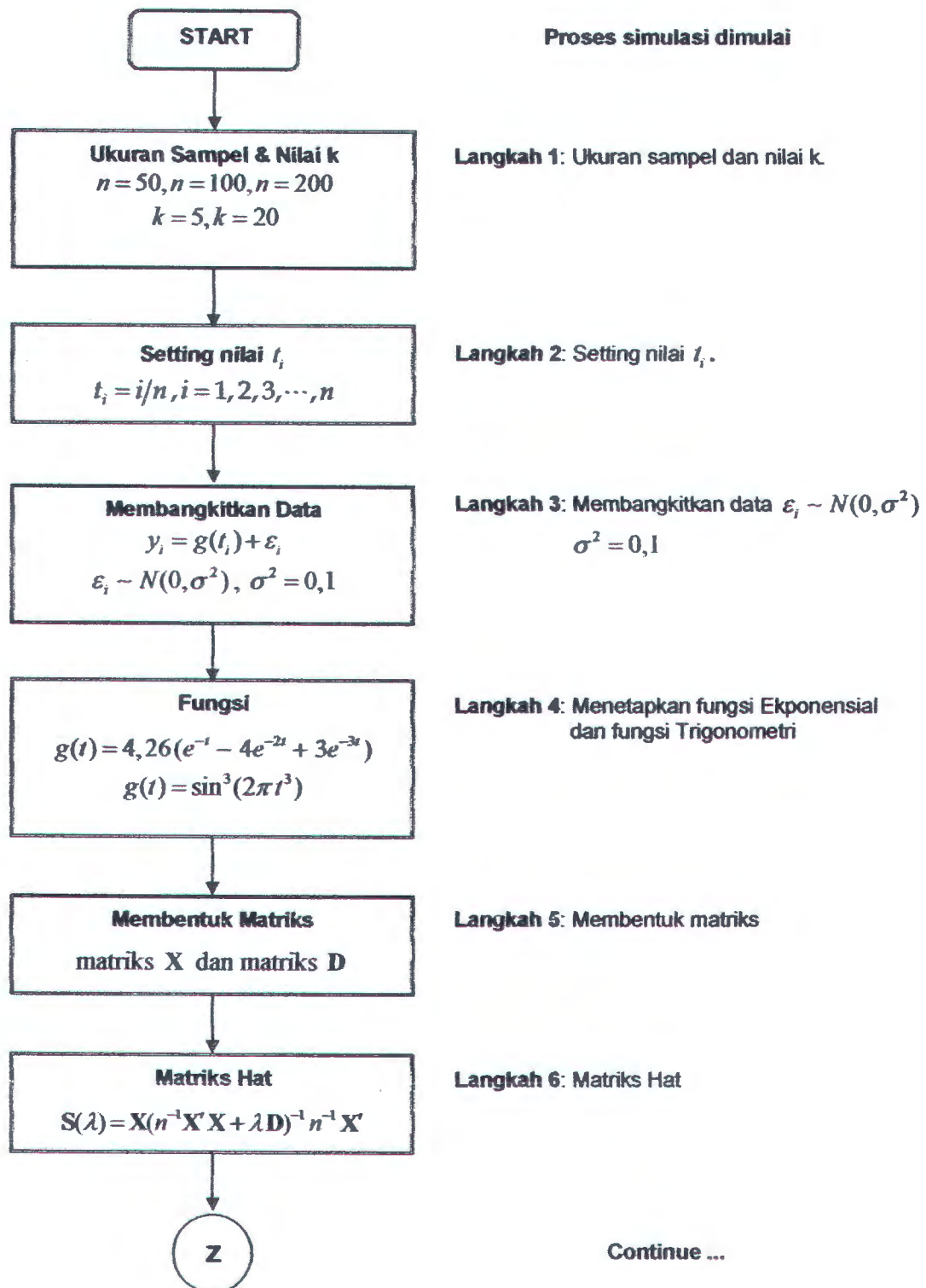
## DAFTAR PUSTAKA

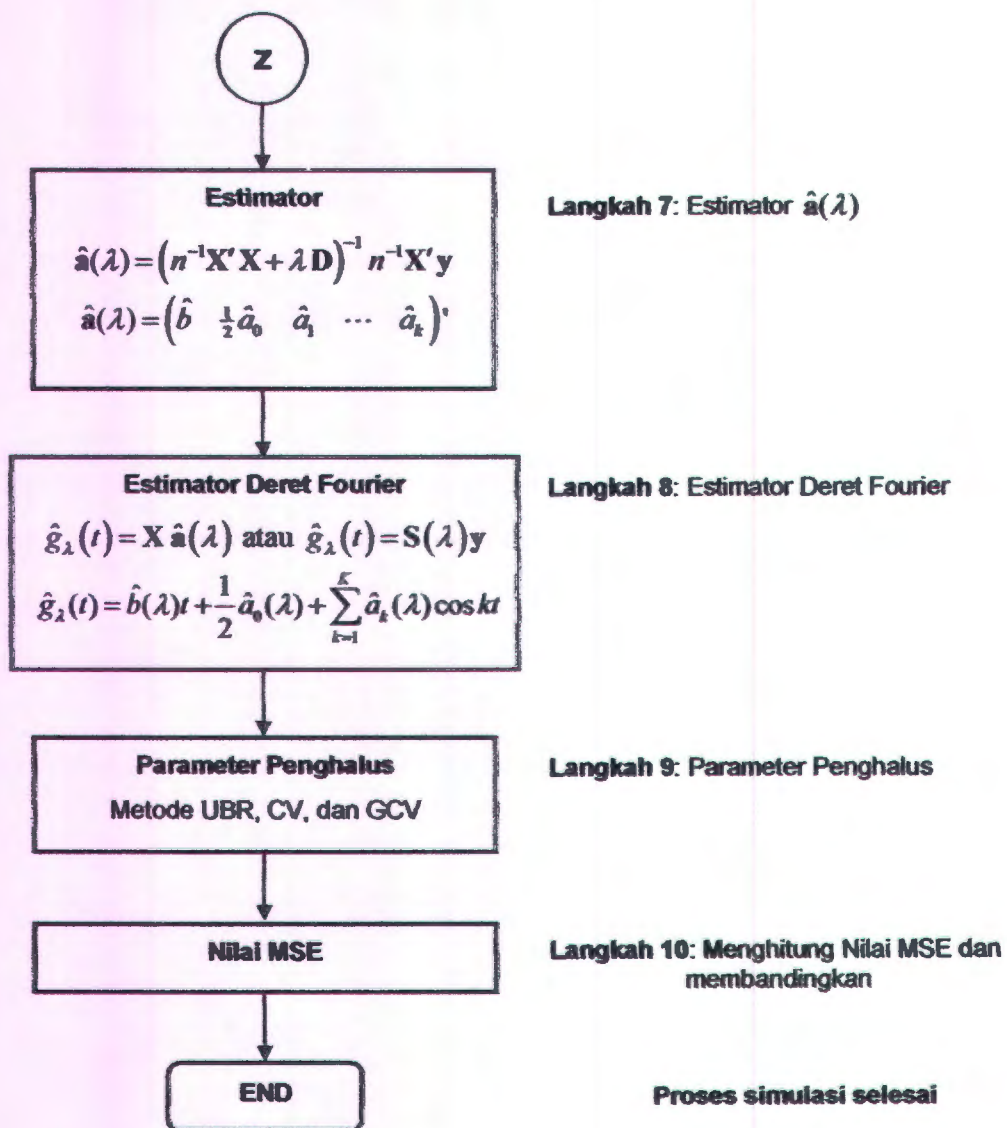
- Apostol. Tom M, (1967), *Calculus One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra* John Wiley & Sons, Inc.
- Budiantara, I N., dan Subanar, (1997), Pemilihan Parameter Penghalus Dalam Regresi Spline, *Majalah Ilmiah Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*, 7:37 – 49.
- Budiantara, I N., (1998), Parameter Penghalus Dalam Regresi Nonparametrik, *Prosiding Seminar Alumni S-2 Matematika PPS UGM*.
- Bilodeau, M, (1992), Fourier Smoother and Additive Models, *The Canadian Journal of Statistics* 3: 257 – 269.
- Craven. P., and Wahba.G, (1979)., *Smoothing Noisy Data with Spline Functions: Estimating the Correct Degree of Smoothing by the Method of Generalized Cross-Validation. Numer Math* 31: 377- 403.
- Draper, N. and Smith, H., (1996), *Applied Regression Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- Eubank, R.L., (1988), *Spline Smoothing and Nonparametric Regression*, Marcel Dekker, New York.
- Green, P.J., dan Silverman, B.W., (1994) *Nonparametrik Regression and Generalized Linear Model*, Chapman & Hall: London.
- Hardle, G., (1990), *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, New York.
- Kimeldorf and G.Wahba, (1971), Some results on Tchebycheffian spline functions, *J. Math Anal Appl*, 33: 82-95.
- Kohn. R, (1991), The performance of cross validation and maximum likelihood estimators of spline smoothing parameters., *Journal of the American Statistical Assoiation*. 86: 1042 -1050.
- Lehman, R, (1983), *Teory of Point Estimation*, John Wiley and Sons, New York.
- Li, K. C., (1986), Asymtotic optimality of  $C_L$  and Generalized Cross Validation in Ridge Regression with application to spline smoothing, *Ann. Statist.* 14: 1101 -1112.

- Mahler, (1995), Variational Solution Of Penalized Likelihood Problem and Smooth Curve, *Annal of Statistic*, 23:1496-1517.
- Muller, and Zhao, (1995), On a Semiparametric Variance Function Models and Test for Heteroscedasticity, *The Annals of Statistics*, 23:946-967.
- Montgomery, D.C. and Peck, EA, (1982), *Introduction to linear Regression Analysis*, New York:John Wiley & Sons.
- Rosenblatt, M., (1971), Curve Estimation, *Ann Math Stath.*, 42:1815 – 1842.
- Rohatgi, V. K.,(1976), *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
- Hogg, R. V. and Tanis, A. E.,(1993), *Probability and Statistical Inference.*, Prentice Hall.
- Searle, S.R. (1982), *Linear Models* John Wiley & Sons, Inc.
- Seber, G.A.F.,(1977), *Linear Regression Analysis*, John Wiley & Sons New York.
- dan Lee, A.J.,(2003), *Linear Regression Analysis*, Secon Edition. John Wiley & Sons Inc. New Jersey Canada.
- Shao, (1993), Linear Model Selection by Cross Validation, *Journal of the American Statistical Assoiation*, 88: 486-494.
- Simonoff, (1996), *Smoothing Methods in Statistics*, Springer-Verlag.
- Venter. J. H and Snyman. J.L.J, (1995), A note on the Generalized Cross Validation criterion in linear model selection, *Biometrika*, 82: 215-219.
- Wahba, G., (1985) A. Comparison of GCV dan GML for Chosing the Smoting Parameter in Generalized Spline Smoothing Problem, *Annal of Statistic*, 13: 1378-1402.
- Wahba, G., (1990), *Spline Models Opservatione Data* SIAM Pennsylvania.
- Wang, Y.,(1998), Smoothing Spline Models with Corelated Errorrs, *Journal of the American Statistic Assoiation.*, , 93: 343-348.



## Lampiran 1: Langkah-langkah Program Simulasi Data





## Lampiran 2: Macro Program Simulasi Data

### Macro Plot Fungsi Eksponen

```
disp('*****');
disp('          SIMULASI DATA PROGRAM          ');
disp('  ESTIMASI DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK  ');
disp('      oleh: agustini tripena, NRP.1305 201 002      ');
disp('      Pascasarjana Statistika F-MIPA ITS Surabaya      ');
disp('*****');
disp(' ');

simulasi data bangkitan
n=input('Input Ukuran Sampel: [50 ; 100 ; 200] n= ');
var=input('Input Varians: [0.1] var= ');

fungsi data bangkitan
for i=1:n,
    t(i)=(i/n);
    g(i)=4.26*(exp(-t(i))-4*exp(-2*t(i))+3*exp(-3*t(i)));
end
error=random('Normal',0,var,n,1);
y=g'+error;

figure(1);
plot(t,y,'.b');
title('PLOT DATA BANGKITAN FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('y');

figure(2);
plot(t,g,'-r');
title('KURVA FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('g');

figure(3);
plot(t,y,'.b',t,g,'-r');
title('PLOT DATA BANGKITAN & KURVA FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('y');
```



## Macro Plot Fungsi Trigonometri

```
disp('*****');
disp('          SIMULASI DATA PROGRAM          ');
disp(' ESTIMASI DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK ');
disp('      oleh: agustini tripena, NRP.1305 201 002      ');
disp('      Pascasarjana Statistika F-MIPA ITS Surabaya      ');
disp('*****');
disp(' ');

simulasi data bangkitan
n=input('Input Ukuran Sampel: {50 ; 100 ; 200} n= ');
var=input('Input Varians: {0.1} var= ');

fungsi data bangkitan
for i=1:n,
    t(i)=(i/n);
    g(i)=sin(2*pi*t(i)^3);
end
error=random('Normal',0,var,n,1);
y=g'+error;

figure(1);
plot(t,y,'-b');
title('PLOT DATA BANGKITAN FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('y');

figure(2);
plot(t,g,'-r');
title('KURVA FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('g');

figure(3);
plot(t,y,'-b',t,g,'-r');
title('PLOT DATA BANGKITAN & KURVA FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('y');
```

## Macro Estimasi Deret Fourier Fungsi Eksponen

```
clear all;

disp('*****');
disp('          SIMULASI DATA PROGRAM          ');
disp(' ESTIMASI DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK ');
disp('      oleh: agustini tripena, NRP.1305 201 002      ');
disp('      Pascasarjana Statistika F-MIPA ITS Surabaya      ');
disp('*****');
disp(' ');

simulasi data bangkitan
n=input('Input Ukuran Sampel: [50 ; 100 ; 200] n= ');
var=input('Input Varians: [0.1] var= ');
k=input('Input Nilai k: [5 ; 20] k= ');

fungsi data bangkitan
for i=1:n,
    t(i)=(i/n);
    g(i)=4.26*(exp(-t(i))-4*exp(-2*t(i))+3*exp(-3*t(i)));
end

error=random('Normal',0,var,n,1);
y=g'+error;

figure(1);
plot(t,y,'.b');
title('PLOT DATA BANGKITAN FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('y');

figure(2);
plot(t,g,'-r');
title('KURVA FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('g');

figure(3);
plot(t,y,'.b',t,g,'-r');
title('PLOT DATA BANGKITAN & KURVA FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('y');
```

estimasi deret fourier

```
for i=1:k,
    ck(i)=(i);
    d0(i)=0;
    dc(i)=(i)^4;
end
ct=(ck'*t)';
cos=cos(ct);
dd=diag(dc(1:k));

for i=1:n,
    cs(i)=(1);
end

x=[t' cs' cos];
D=[0 0 d0;0 0 d0;d0' d0' dd];

parameter penghalus
I=diag(ones(n,1));
L=0.0001;
a_hat=inv(((1/n)*x'*x+(L*D)))*(1/n)*x'*y;
S=x*inv((1/n)*x'*x+(L*D))*(1/n)*x';
Si=trace(S);
g_hat=S*y;
g_hat=x*a_hat;

for i=1:k,
metode U
varU=(y'*(I-S)'*(S-I)*y)/(trace(I-S));
R=((1/n)*y'*(S-I)'*(S-I)*y)+((1/n)*varU*(trace(S'*S)))-
((1/n)*varU*(trace((S-I)'*(S-I))));
dataU(i)=R;

metode cross-validation
cv=(1/n)*((y'*(I-S)')*(I-S)*y);
cv=(1/n)*sum((y-g_hat)'*(y-g_hat));
datacv(i)=cv;

metode generalized cross-validation
gcv=(1/n)*((y'*(I-S)')*(I-S)*y)/(1-Si).^2;
gcv=(1/n)*(sum((y-g_hat)'*(y-g_hat)))/(1-Si).^2;
datagcv(i)=gcv;
end

minimum U
minU=min(min(dataU));
for i=1:k,
    if dataU(i)==minU;
        k_U=i;
    end
end
k1(i,1)=k_U;
k2(i,1)=minU;
LU=min(minU);
```



```

minimun cross-validation
mincv=min(min(datacv));
for i=1:k,
    if datacv(i)==mincv;
        k_cv=i;
    end
end
k3(i,1)=k_cv;
k4(i,1)=mincv;
Lcv=min(mincv);

minimun generalized cross-validation
mingcv=min(min(datagcv));
for i=1:k,
    if datagcv(i)==mingcv;
        k_gcv=i;
    end
end
k5(i,1)=k_gcv;
k6(i,1)=mingcv;
Lgcv=min(mingcv);

mse U
a_hatU=inv(((1/n)*x'*x+(LU*L*D)))*(1/n)*x'*y;
SU=x*inv((1/n)*x'*x+(LU)*L*D)*(1/n)*x';
g_hatU=SU*y;
error_U=g_hat-g_hatU;
SSEU=(error_U)'*(error_U);
MSE_U=SSEU/n;

mse cross-validation
a_hatcv=inv(((1/n)*x'*x+(Lcv*L*D)))*(1/n)*x'*y;
Scv=x*inv((1/n)*x'*x+(Lcv)*L*D)*(1/n)*x';
g_hatcv=Scv*y;
error_cv=g_hat-g_hatcv;
SSEcv=(error_cv)'*(error_cv);
MSE_cv=SSEcv/n;

mse generalized cross-validation
a_hatgcv=inv(((1/n)*x'*x+(Lgcv*L*D)))*(1/n)*x'*y;
Sgcv=x*inv((1/n)*x'*x+(Lgcv)*L*D)*(1/n)*x';
g_hatgcv=Sgcv*y;
error_gcv=g_hat-g_hatgcv;
SSEgcv=(error_gcv)'*(error_gcv);
MSE_GCV=SSEgcv/n;

```

```

disp(' ');
disp('-----');
disp('Metode U');
disp(['LU= ', num2str(LU)]);
disp(['MSE U= ', num2str(MSE_U)]);
disp(' ');
disp('Metode cross-validation');
disp(['Lcv= ', num2str(Lcv)]);
disp(['MSE CV= ', num2str(MSE_CV)]);
disp(' ');
disp('Metode generalized cross-validation');
disp(['Lgcv= ', num2str(Lgcv)]);
disp(['MSE GCV= ', num2str(MSE_GCV)]);
disp('-----');

figure(1);
plot(t,y,'.k',t,g,'-k');
title('PLOT DATA & FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('y');

plot U
figure(2);
plot(t,y,'.k',t,g,'-k',t,g_hatU,'-b');
title('METODE UNBIASED RISK');
xlabel('t');
ylabel('y');

plot cross-validation
figure(3);
plot(t,y,'.k',t,g,'-k',t,g_hatcv,'-g');
title('METODE CROSS-VALIDATION');
xlabel('t');
ylabel('y');

plot generalized cross-validation
figure(4);
plot(t,y,'.k',t,g,'-k',t,g_hatgcv,'-r');
title('METODE GENERALIZED CROSS-VALIDATION');
xlabel('t');
ylabel('y');

plot gabungan
figure(5);
plot(t,y,'.k',t,g,'-k',t,g_hatU,'-b',t,g_hatcv,'-g',t,g_hatgcv,'-r');
title('METODE U, CV & GCV');
xlabel('t');
ylabel('y');

```

## Macro Estimasi Deret Fourier Fungsi Trigonometri

```
disp('*****');
disp('          SIMULASI DATA PROGRAM          ');
disp('  ESTIMASI DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK  ');
disp('      oleh: agustini tripena, NRP.1305 201 002      ');
disp('      Pascasarjana Statistika F-MIPA ITS Surabaya      ');
disp('*****');
disp('  ');
```

```
simulasi data bangkitan
n=input('Input Ukuran Sampel: [50 ; 100 ; 200] n= ');
var=input('Input Varians: [0.1] var= ');
k=input('Input Nilai k: [5 ; 20] k= ');
```

```
fungsi data bangkitan
for i=1:n,
    t(i)=(i/n);
    g(i)=sin(2*pi*t(i)^3);
end
```

```
error=random('Normal',0,var,n,1);
y=g+error;
```

```
figure(1);
plot(t,y,'.b');
title('PLOT DATA BANGKITAN FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('y');
```

```
figure(2);
plot(t,g,'-r');
title('KURVA FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('g');
```

```
figure(3);
plot(t,y,'.b',t,g,'-r');
title('PLOT DATA BANGKITAN & KURVA FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('y');
```



### estimasi deret fourier

```
for i=1:k,
    ck(i)=(i);
    d0(i)=0;
    dc(i)=(i)^4;
end
ct=(ck'*t)';
cos=cos(ct);
dd=diag(dc(1:k));

for i=1:n,
    cs(i)=(1);
end

x=[t' cs' cos];
D=[0 0 d0;0 0 d0;d0' d0' dd];

parameter penghalus
I=diag(ones(n,1));
L=0.0001;
a_hat=inv(((1/n)*x'*x+(L*D)))*(1/n)*x'*y;
S=x*inv((1/n)*x'*x+(L*D))*(1/n)*x';
Si=trace(S);
g_hat=S*y;
g_hat=x*a_hat;

for i=1:k,
metode U
varU=(y'*(I-S)'*(S-I)*y)/(trace(I-S));
R=((1/n)*y'*(S-I)'*(S-I)*y)+((1/n)*varU*(trace(S'*S)))-
((1/n)*varU*(trace((S-I)'*(S-I))));
dataU(i)=R;

metode cross-validation
cv=(1/n)*((y'*(I-S)')*(I-S)*y);
cv=(1/n)*sum((y-g_hat)'*(y-g_hat));
datacv(i)=cv;

metode generalized cross-validation
gcv=(1/n)*((y'*(I-S)')*(I-S)*y)/(1-Si).^2;
gcv=(1/n)*(sum((y-g_hat)'*(y-g_hat)))/(1-Si).^2;
datagcv(i)=gcv;
end

minimun U
minU=min(min(dataU));
for i=1:k,
    if dataU(i)==minU;
        k_U=i;
    end
end
k1(i,1)=k_U;
k2(i,1)=minU;
LU=min(minU);
```

```

minimun cross-validation
mincv=min(min(datacv));
for i=1:k,
    if datacv(i)==mincv;
        k_cv=i;
    end
end
k3(i,1)=k_cv;
k4(i,1)=mincv;
Lcv=min(mincv);

minimun generalized cross-validation
mingcv=min(min(datagcv));
for i=1:k,
    if datagcv(i)==mingcv;
        k_gcv=i;
    end
end
k5(i,1)=k_gcv;
k6(i,1)=mingcv;
Lgcv=min(mingcv);

mse U
a_hatU=inv(((1/n)*x'*x+(LU*L*D)))*(1/n)*x'*y;
SU=x*inv((1/n)*x'*x+((LU)*L*D))*(1/n)*x';
g_hatU=SU*y;
error_U=g_hat-g_hatU;
SSEU=(error_U)'*(error_U);
MSE_U=SSEU/n;

mse cross-validation
a_hatcv=inv(((1/n)*x'*x+(Lcv*L*D)))*(1/n)*x'*y;
Scv=x*inv((1/n)*x'*x+((Lcv)*L*D))*(1/n)*x';
g_hatcv=Scv*y;
error_cv=g_hat-g_hatcv;
SSEcv=(error_cv)'*(error_cv);
MSE_CV=SSEcv/n;

mse generalized cross-validation
a_hatgcv=inv(((1/n)*x'*x+(Lgcv*L*D)))*(1/n)*x'*y;
Sgcv=x*inv((1/n)*x'*x+((Lgcv)*L*D))*(1/n)*x';
g_hatgcv=Sgcv*y;
error_gcv=g_hat-g_hatgcv;
SSEgcv=(error_gcv)'*(error_gcv);
MSE_GCV=SSEgcv/n;

```

```

disp(' ');
disp('-----');
disp('Metode U');
disp(['LU= ', num2str(LU)]);
disp(['MSE U= ', num2str(MSE_U)]);
disp(' ');
disp('Metode cross-validation');
disp(['Lcv= ', num2str(Lcv)]);
disp(['MSE CV= ', num2str(MSE_CV)]);
disp(' ');
disp('Metode generalized cross-validation');
disp(['Lgcv= ', num2str(Lgcv)]);
disp(['MSE GCV= ', num2str(MSE_GCV)]);
disp('-----');

figure(1);
plot(t,y,'.k',t,g,'-k');
title('PLOT DATA & FUNGSI');
xlabel('t');
ylabel('y');

plot U
figure(2);
plot(t,y,'.k',t,g,'-k',t,g_hatU,'-b');
title('METODE UNBIASED RISK');
xlabel('t');
ylabel('y');

plot cross-validation
figure(3);
plot(t,y,'.k',t,g,'-k',t,g_hatcv,'-g');
title('METODE CROSS-VALIDATION');
xlabel('t');
ylabel('y');

plot generalized cross-validation
figure(4);
plot(t,y,'.k',t,g,'-k',t,g_hatgcv,'-r');
title('METODE GENERALIZED CROSS-VALIDATION');
xlabel('t');
ylabel('y');

plot gabungan
figure(5);
plot(t,y,'.k',t,g,'-k',t,g_hatU,'-b',t,g_hatcv,'-g',t,g_hatgcv,'-r');
title('METODE U, CV & GCV');
xlabel('t');
ylabel('y');

```



## Lampiran 3: Plot Fungsi

### Hasil Plot Fungsi Eksponen

```
>> four1
```

```
*****
```

```
SIMULASI DATA PROGRAM
```

```
ESTIMASI DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK
```

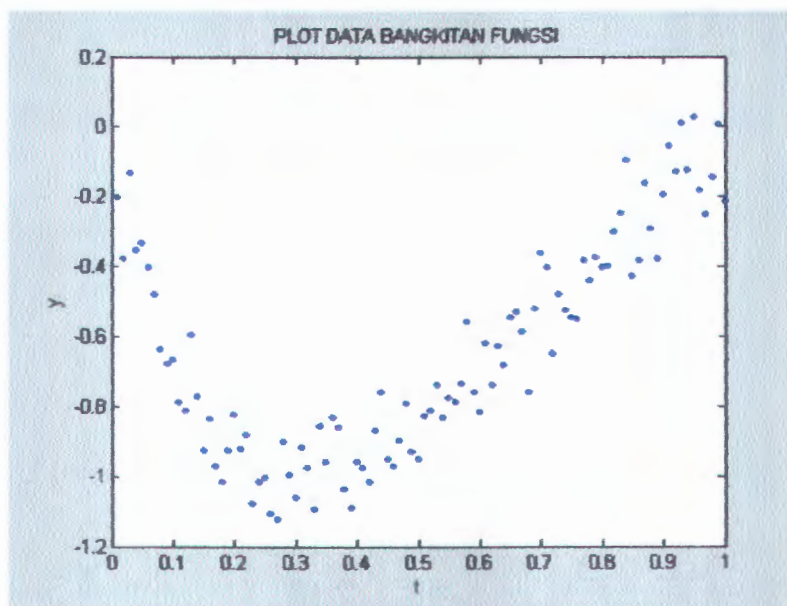
```
oleh: agustini tripena, NRP.1305 201 002
```

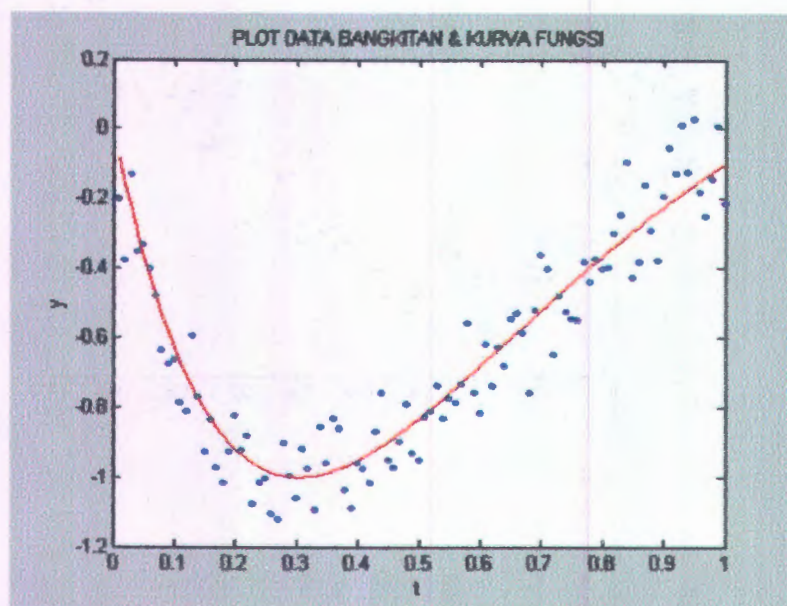
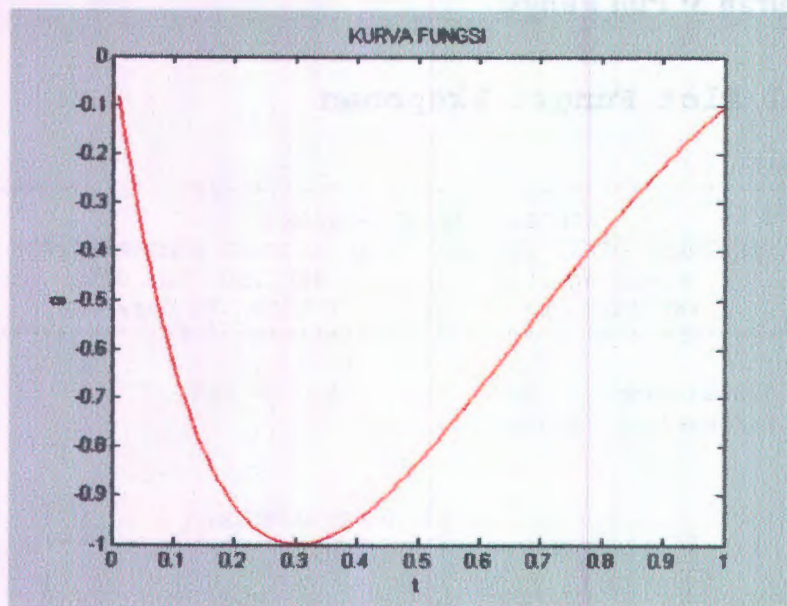
```
Pascasarjana Statistika F-MIPA ITS Surabaya
```

```
*****
```

```
Input Ukuran Sampel: [50 ; 100 ; 200] n= 100
```

```
Input Varians: [0.1] var= 0.1
```





## Hasil Plot Fungsi Trigonometri

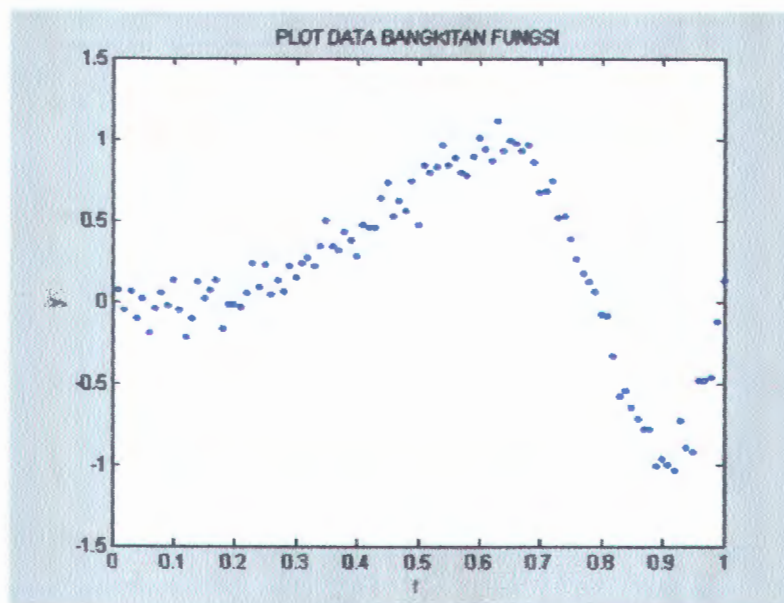
```
>> four2
```

```
*****  
SIMULASI DATA PROGRAM  
ESTIMASI DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK  
oleh: agustini tripena, NRP.1305 201 002  
Pascasarjana Statistika F-MIPA ITS Surabaya  
*****
```

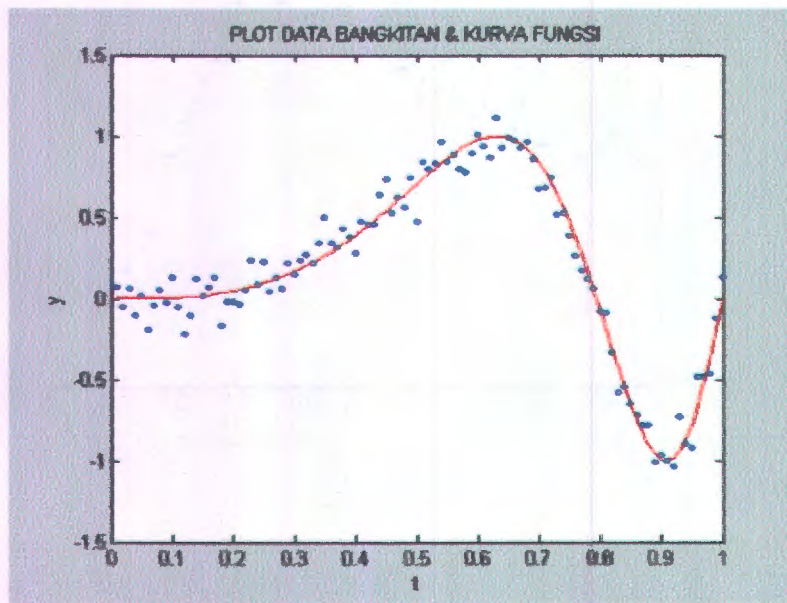
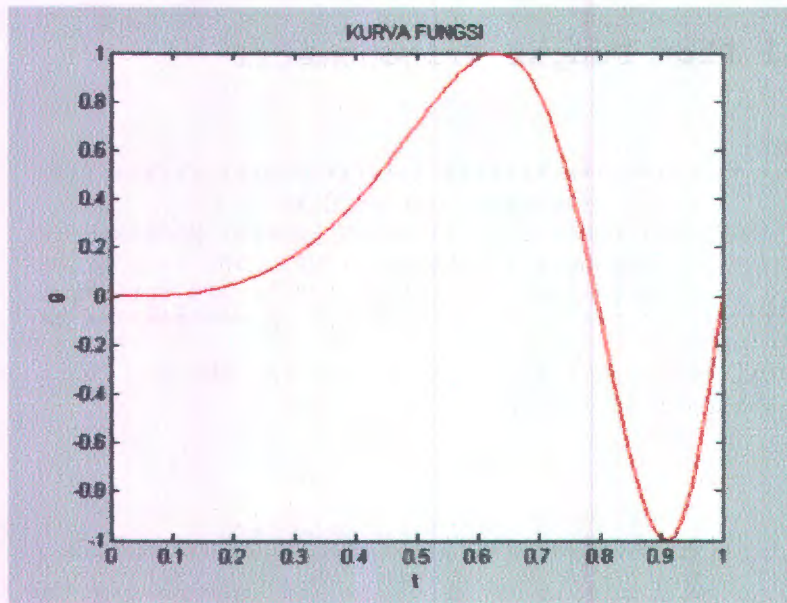
```
Input Ukuran Sampel: [50 ; 100 ; 200] n= 100
```

```
Input Varians: [0.1] var= 0.1
```

```
>>
```







## Lampiran 4: Plot Bangkitan Hasil Simulasi & Estimasi Deret Fourier

### Salah Satu Hasil Simulasi Estimasi Deret Fourier Fungsi Eksponen

```
>> test1
*****
SIMULASI DATA PROGRAM
ESTIMASI DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK
oleh: agustini tripena, NRP.1305 201 002
Pascasarjana Statistika F-MIPA ITS Surabaya
*****

Input Ukuran Sampel: [50 ; 100 ; 200] n= 200
Input Varians: [0.1] var= 0.1
Input Nilai k: [5 ; 20] k= 5

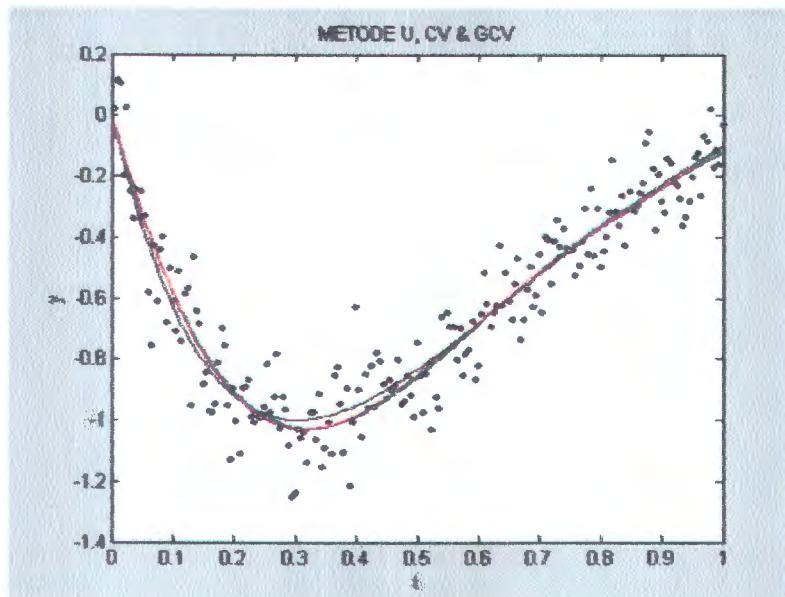
-----

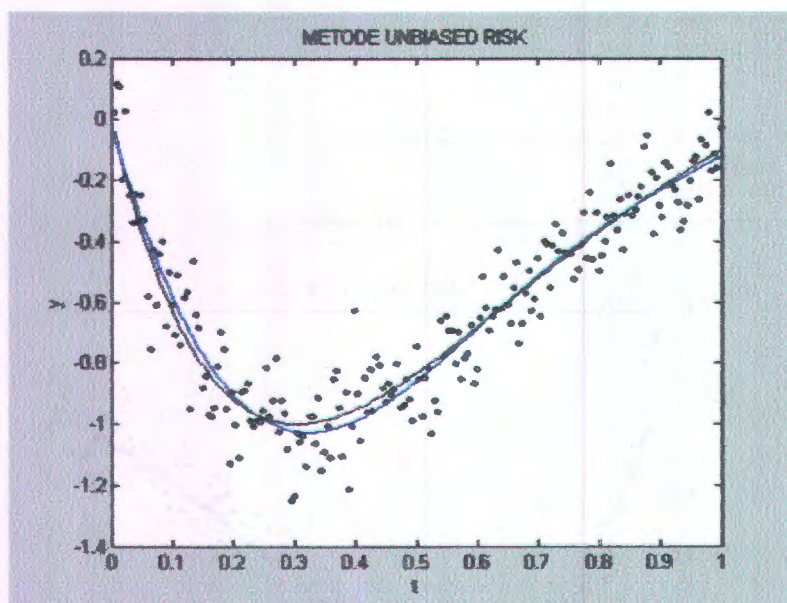
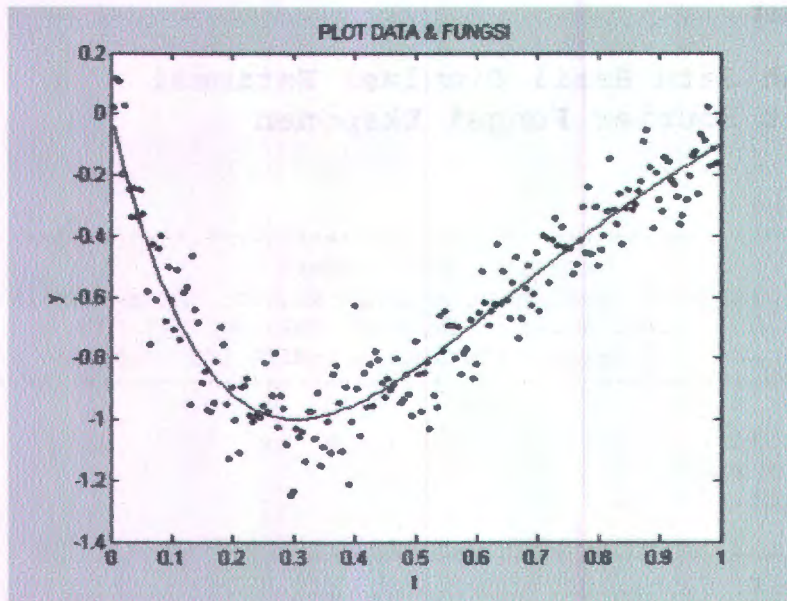
Metode U
LU= 0.027828
MSE U= 0.0019977

Metode cross-validation
Lcv= 0.014046
MSE CV= 0.0021773

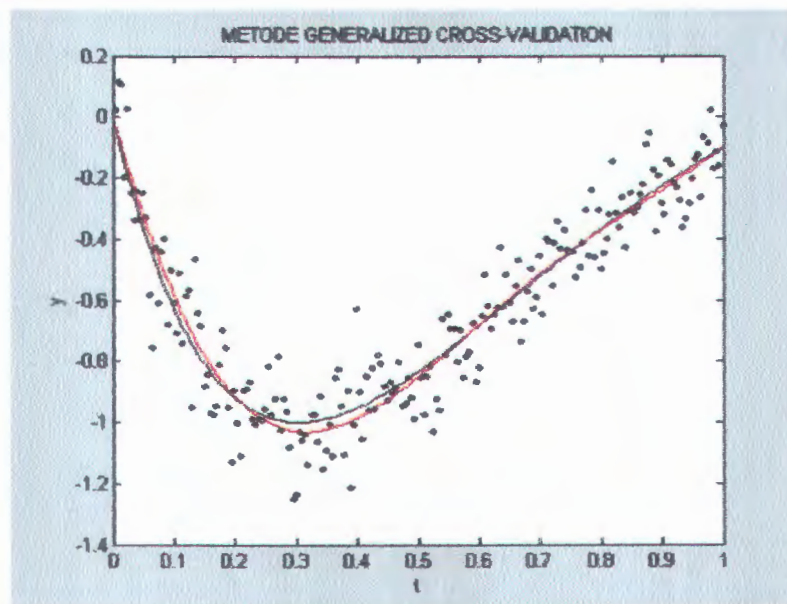
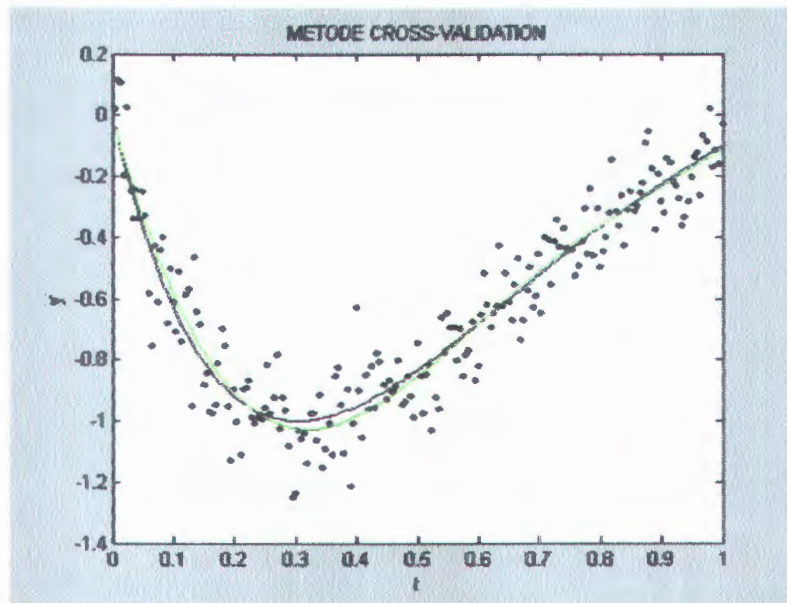
Metode generalized cross-validation
Lgcv= 0.0019569
MSE GCV= 0.0024302

-----
```









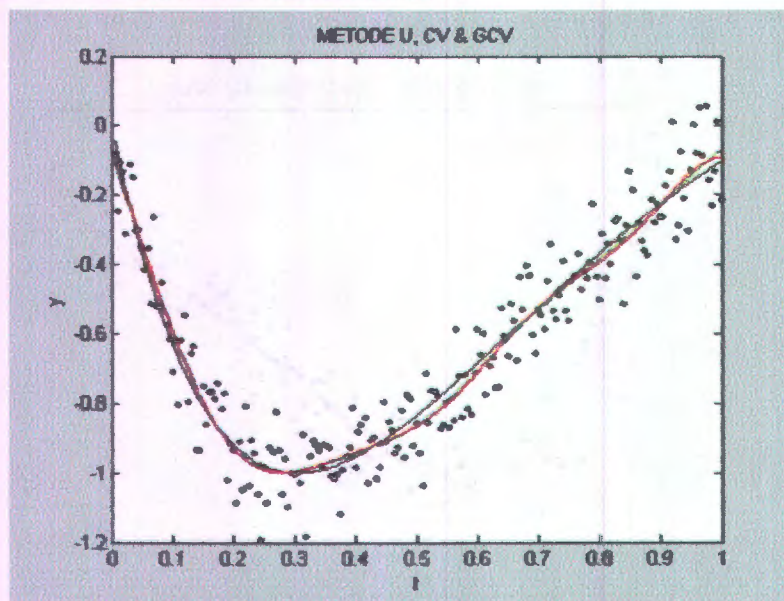
\*\*\*\*\*  
SIMULASI DATA PROGRAM  
ESTIMASI DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK  
oleh: agustini tripena, NRP.1305 201 002  
Pascasarjana Statistika F-MIPA ITS Surabaya  
\*\*\*\*\*

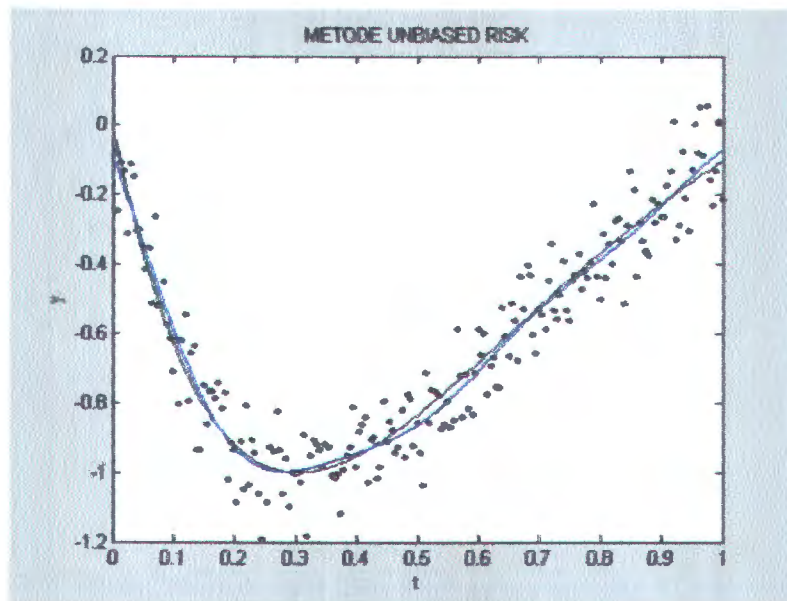
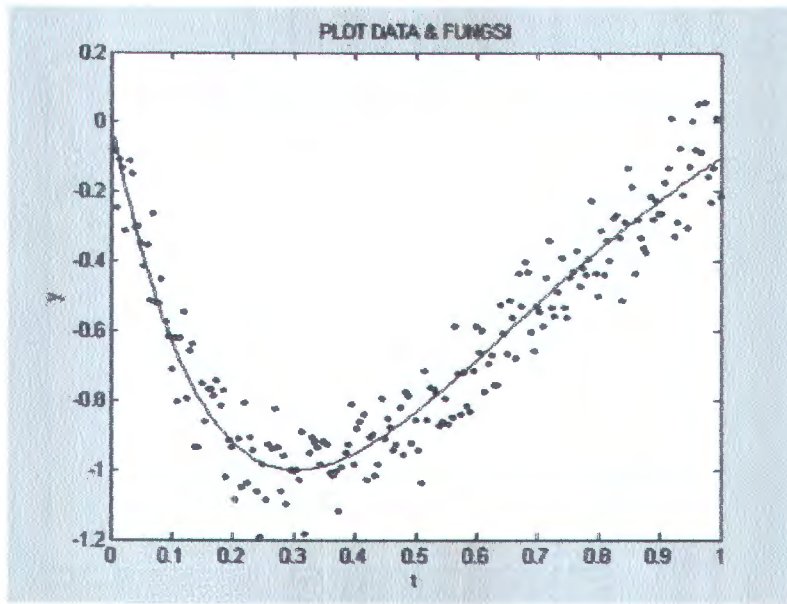
Input Ukuran Sampel: [50 ; 100 ; 200] n= 200  
Input Varians: [0.1] var= 0.1  
Input Nilai k: [5 ; 20] k= 20

-----  
Metode U  
LU= 0.019018  
MSE U= 0.001606

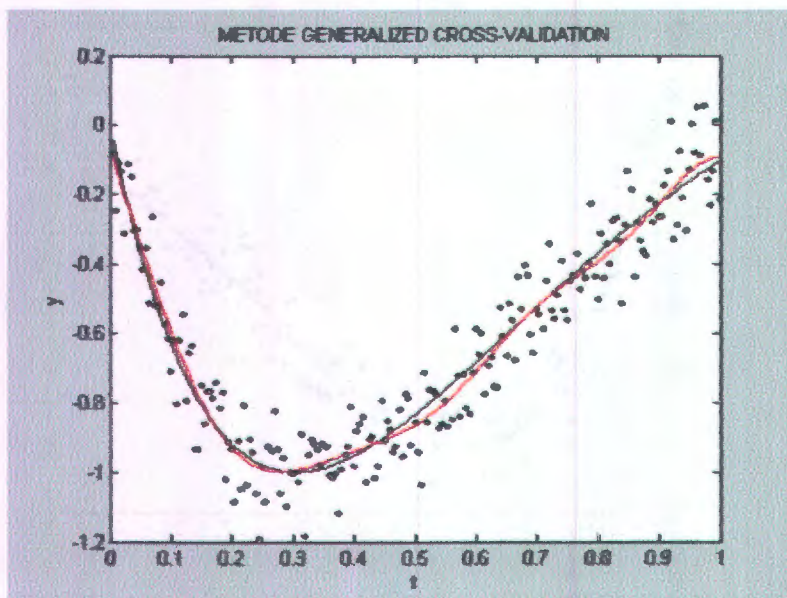
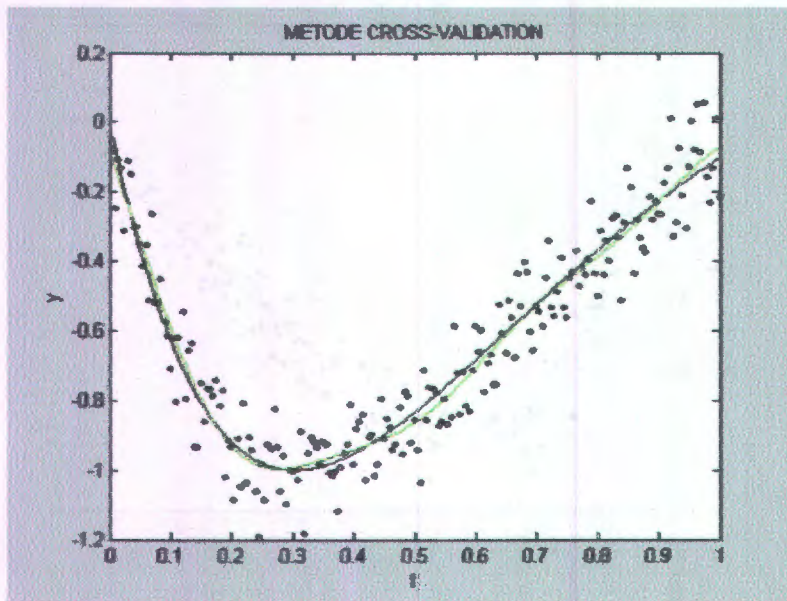
Metode cross-validation  
Lcv= 0.009626  
MSE CV= 0.0016965

Metode generalized cross-validation  
Lgcv= 0.00068257  
MSE GCV= 0.0018132  
-----









## Salah Satu Hasil Simulasi Estimasi Deret Fourier Fungsi Trigonometri

```
>> test2
```

```
*****  
SIMULASI DATA PROGRAM  
ESTIMASI DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK  
oleh: agustini tripena, NRP.1305 201 002  
Pascasarjana Statistika F-MIPA ITS Surabaya  
*****
```

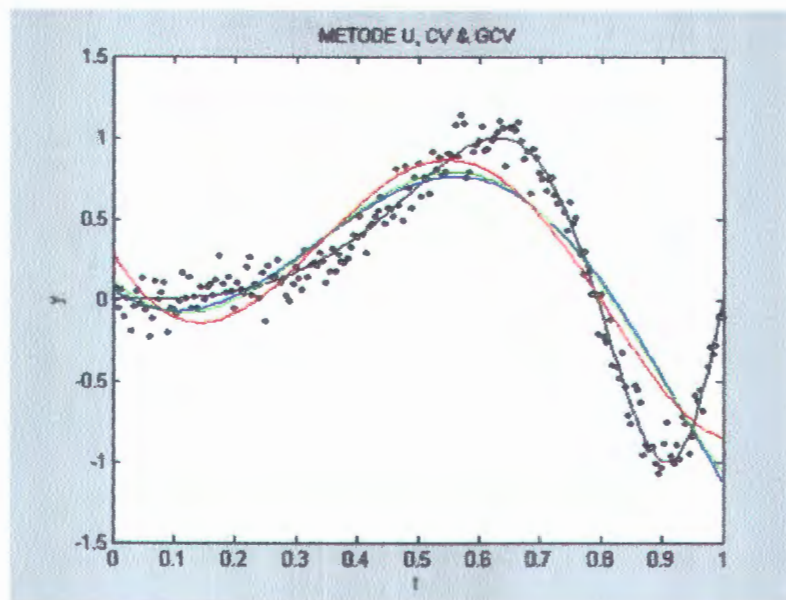
```
Input Ukuran Sampel: [50 ; 100 ; 200] n= 200  
Input Varians: [0.1] var= 0.1  
Input Nilai k: [5 ; 20] k= 5
```

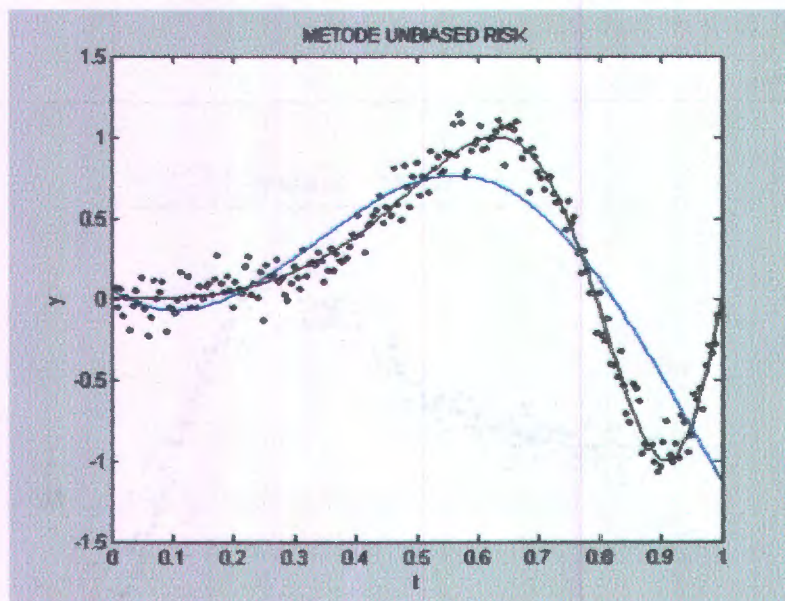
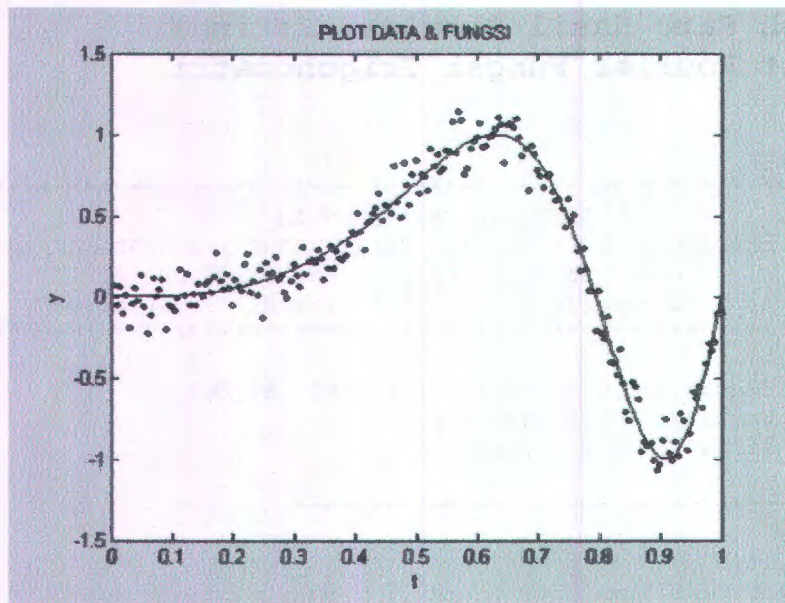
```
-----  
Metode U  
LU= 0.16455  
MSE U= 0.0026311
```

```
Metode cross-validation  
Lcv= 0.083053  
MSE CV= 0.0046814
```

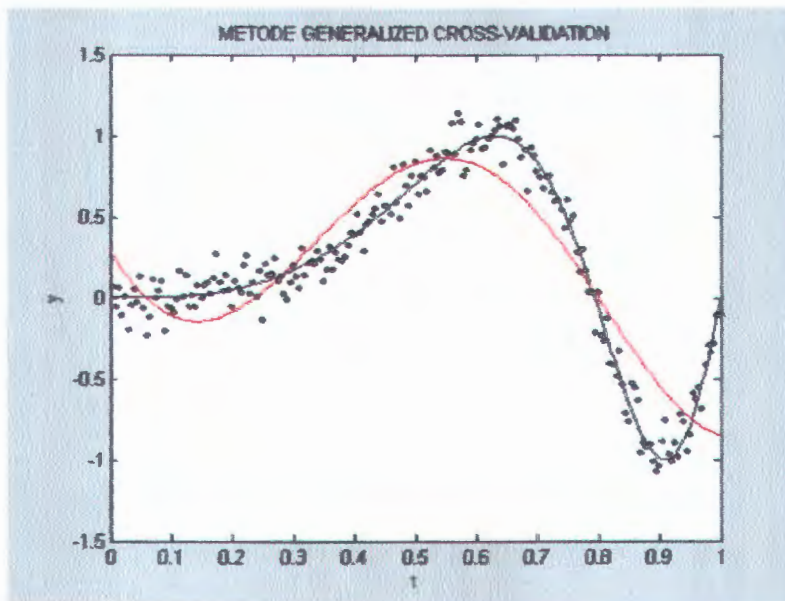
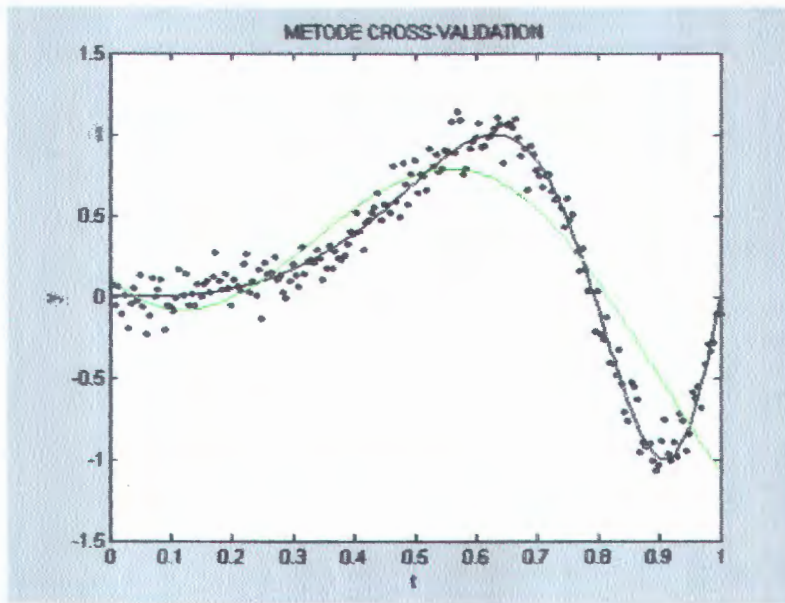
```
Metode generalized cross-validation  
Igcv= 0.011571  
MSE GCV= 0.016489
```

---









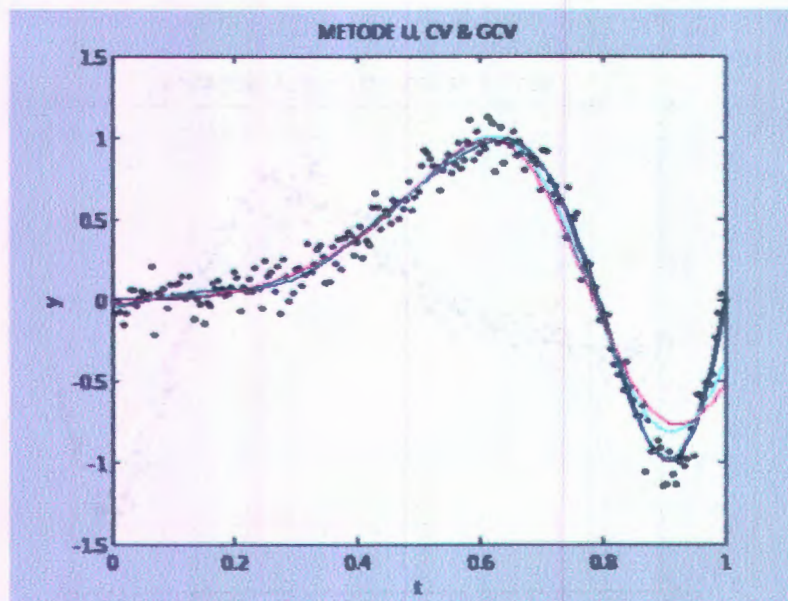
\*\*\*\*\*  
SIMULASI DATA PROGRAM  
ESTIMASI DERET FOURIER DALAM REGRESI NONPARAMETRIK  
oleh: agustini tripena, NRP.1305 201 002  
Pascasarjana Statistika F-MIPA ITS Surabaya  
\*\*\*\*\*

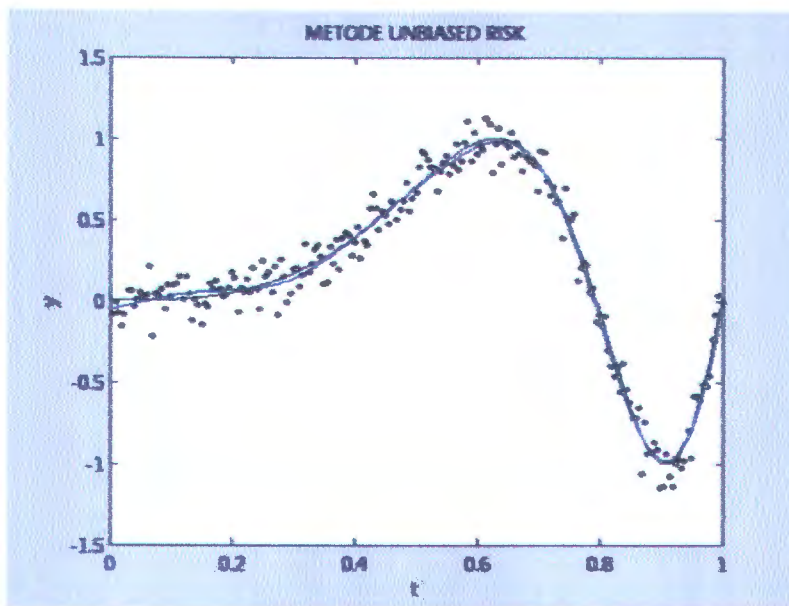
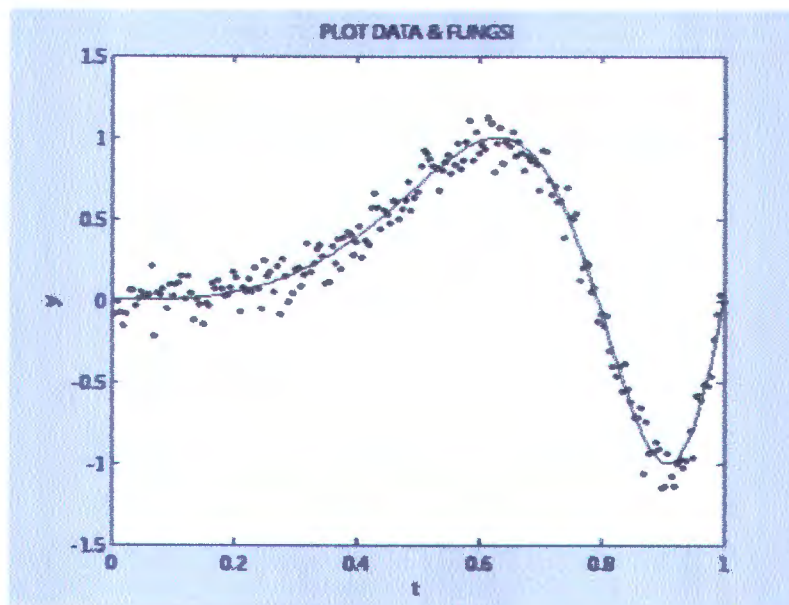
Input Ukuran Sampel: [50 ; 100 ; 200] n= 200  
Input Varians: [0.1] var= 0.1  
Input Nilai k: [5 ; 20] k= 20

-----  
Metode U  
LU= 0.094316  
MSE U= 0.013978

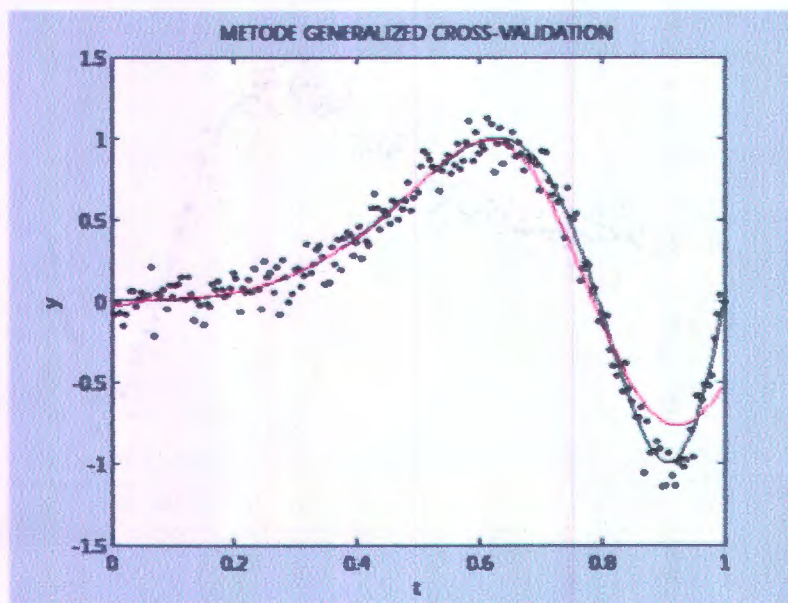
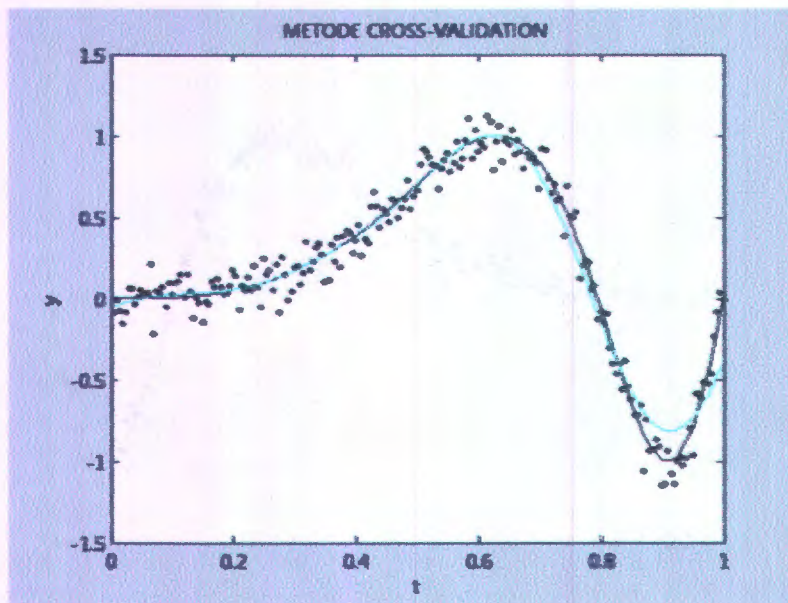
Metode cross-validation  
Lcv= 0.04774  
MSE CV= 0.02059

Metode generalized cross-validation  
Lgcv= 0.0033851  
MSE GCV= 0.036066  
-----









### Lampiran 5: Rekapitulasi Hasil Simulasi

Hasil simulasi fungsi Eksponen:  $n=50, \sigma^2=0,1$  dan  $K=5$

Replikasi	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
	$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
1	0.020006	0.0016674	0.010416	0.0018588	0.001457	0.0021359
2	0.025527	0.0023052	0.013291	0.0024918	0.001859	0.0027579
3	0.018765	0.0014427	0.009770	0.0014869	0.001367	0.0015326
4	0.015024	0.0019497	0.007822	0.0020787	0.001094	0.0022437
5	0.017471	0.0018266	0.009096	0.0018842	0.001273	0.0019461
6	0.021035	0.0017947	0.010952	0.0018502	0.001532	0.001905
7	0.024245	0.0021637	0.012623	0.0026562	0.001766	0.0034645
8	0.018602	0.0023149	0.009685	0.002486	0.001355	0.0027158
9	0.016823	0.0022384	0.008759	0.0023034	0.001225	0.0023716
10	0.029384	0.001233	0.015298	0.0012846	0.002140	0.0013345
11	0.022518	0.0016552	0.011724	0.0018011	0.001640	0.0020099
12	0.017989	0.0017107	0.009366	0.0018529	0.001310	0.0020462
13	0.016526	0.0016714	0.008604	0.0017748	0.001204	0.0019078
14	0.022694	0.0017422	0.011815	0.0018766	0.001653	0.0020652
15	0.020951	0.0028208	0.010908	0.0033989	0.001526	0.0042911
16	0.018447	0.0015926	0.009604	0.0017587	0.001344	0.0019922
17	0.019006	0.0011624	0.009895	0.0012163	0.001384	0.0012826
18	0.022651	0.0019419	0.011793	0.0022679	0.001650	0.002777
19	0.021693	0.0021044	0.011294	0.0023273	0.001580	0.002653
20	0.017018	0.0012151	0.008860	0.0012856	0.001240	0.0013755
21	0.018765	0.0014427	0.009770	0.0014869	0.001367	0.0015326
22	0.015024	0.0019497	0.007822	0.0020787	0.001094	0.0022437
23	0.017471	0.0018266	0.009096	0.0018842	0.001273	0.0019461
24	0.021035	0.0017947	0.010952	0.0018502	0.001532	0.001905
25	0.022466	0.0023415	0.002342	0.00244	0.001636	0.0025518



Hasil simulasi fungsi Eksponen:  $n=50, \sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 20$

Replikasi	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
	$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
1	0.020737	0.0018752	0.010943	0.0021068	0.000777	0.0025320
2	0.016629	0.0016621	0.008775	0.0017634	0.000623	0.0019473
3	0.019481	0.0022081	0.010280	0.0024250	0.000730	0.0028179
4	0.019503	0.0029626	0.010292	0.0031575	0.000731	0.0035471
5	0.021400	0.0023986	0.011293	0.0026149	0.000802	0.0030929
6	0.031066	0.0027150	0.016394	0.0028990	0.001164	0.0031124
7	0.026138	0.0031248	0.013793	0.0033672	0.000980	0.0037303
8	0.018171	0.0018586	0.009589	0.0022365	0.000681	0.0032091
9	0.016278	0.0018551	0.008590	0.0019777	0.000610	0.0021780
10	0.024422	0.0038238	0.012888	0.0045448	0.000915	0.0060455
11	0.020509	0.0019264	0.010823	0.0020261	0.000769	0.0021804
12	0.028289	0.0016013	0.014928	0.0018014	0.001060	0.0021082
13	0.020994	0.0027704	0.011079	0.0030097	0.000787	0.0033736
14	0.014530	0.0012723	0.007668	0.0014166	0.000545	0.0017796
15	0.023513	0.0011852	0.012408	0.0013142	0.000881	0.0015975
16	0.013595	0.0012351	0.007174	0.0013782	0.000510	0.0018677
17	0.025874	0.0024704	0.013654	0.0027110	0.000970	0.0031127
18	0.018553	0.0023786	0.009791	0.0026191	0.000695	0.0031454
19	0.018434	0.0014125	0.009728	0.0015360	0.000691	0.0017303
20	0.024449	0.0019673	0.012902	0.0021289	0.000916	0.0025495
21	0.017402	0.0026535	0.009183	0.0028804	0.000652	0.0033323
22	0.017784	0.0012961	0.009385	0.0014234	0.000667	0.0017323
23	0.023867	0.0024326	0.012595	0.0026332	0.000895	0.0029492
24	0.020737	0.0018752	0.010943	0.0021068	0.000777	0.0025320
25	0.016629	0.0016621	0.008775	0.0017634	0.000623	0.0019473



Hasil simulasi fungsi Eksponen:  $n=100, \sigma^2=0,1$  dan  $K=5$

Replikasi	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
	$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
1	0.022408	0.0019060	0.011422	0.0020779	0.001593	0.0023156
2	0.025280	0.0017366	0.012886	0.0019277	0.001798	0.0022095
3	0.027264	0.0022645	0.013897	0.0025764	0.001939	0.0030638
4	0.027180	0.0015971	0.013855	0.0017140	0.001933	0.0018704
5	0.024482	0.0014153	0.012479	0.0015224	0.001741	0.0016669
6	0.024437	0.0016929	0.012456	0.0018395	0.001738	0.0020437
7	0.023644	0.0019110	0.012052	0.0020717	0.001681	0.0022926
8	0.020397	0.0019074	0.010397	0.0020113	0.001450	0.0021381
9	0.023004	0.0014249	0.011726	0.0015449	0.001636	0.0017096
10	0.030571	0.0019429	0.015583	0.0021253	0.002174	0.0023924
11	0.023952	0.0018229	0.012209	0.0019539	0.001703	0.0021274
12	0.018421	0.0012232	0.009390	0.0012866	0.001310	0.0013630
13	0.028356	0.0020270	0.014454	0.0023198	0.002016	0.0027874
14	0.023588	0.0014612	0.012023	0.0015208	0.001677	0.0015832
15	0.018596	0.0010388	0.009479	0.0010671	0.001322	0.0010937
16	0.019450	0.0020590	0.009914	0.0022672	0.001383	0.0025515
17	0.023064	0.0020467	0.011756	0.0022199	0.001640	0.0024577
18	0.020584	0.0015678	0.010492	0.0016934	0.001464	0.0018610
19	0.022030	0.0020287	0.011229	0.0023268	0.001566	0.0027672
20	0.021410	0.0019747	0.010913	0.0022050	0.001522	0.0025333
21	0.021622	0.0018614	0.011021	0.0020688	0.001537	0.0023636
22	0.022196	0.0018719	0.011314	0.0021093	0.001578	0.0024548
23	0.025242	0.0021821	0.012867	0.0023519	0.001795	0.0025827
24	0.024473	0.0023892	0.012475	0.0026864	0.001740	0.0031298
25	0.027601	0.0023783	0.014069	0.0025584	0.001963	0.0028014



Hasil simulasi fungsi Eksponen:  $n=100, \sigma^2=0,1$  dan  $K=20$

Replikasi	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
	$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
1	0.020409	0.0012838	0.010466	0.0014154	0.000742	0.0017018
2	0.017993	0.0012463	0.009227	0.0013260	0.000654	0.0014255
3	0.026842	0.0020398	0.013765	0.0022054	0.000976	0.0024037
4	0.022074	0.0014137	0.011320	0.0014875	0.000803	0.0015904
5	0.021215	0.0018953	0.010879	0.0020944	0.000772	0.0023859
6	0.026649	0.0015605	0.013666	0.0016605	0.000969	0.0017799
7	0.020073	0.0020359	0.010294	0.0023777	0.000730	0.0031450
8	0.025070	0.0020818	0.012856	0.0022380	0.000912	0.0025257
9	0.023587	0.0019084	0.012095	0.0020743	0.000858	0.0023152
10	0.019725	0.0017838	0.010115	0.0020032	0.000717	0.0024341
11	0.019738	0.0016031	0.010122	0.0017228	0.000718	0.0018927
12	0.021525	0.0018698	0.011038	0.0020866	0.000783	0.0024872
13	0.019035	0.0016697	0.009761	0.0018887	0.000692	0.0022542
14	0.020609	0.0013867	0.010568	0.0015086	0.000750	0.0017615
15	0.022980	0.0016785	0.011784	0.0018572	0.000836	0.0023020
16	0.020261	0.0018894	0.010390	0.0019958	0.000737	0.0021448
17	0.027269	0.0014642	0.013983	0.0015689	0.000992	0.0018281
18	0.019369	0.0013765	0.009933	0.0014503	0.000705	0.0015326
19	0.018772	0.0015716	0.009626	0.0017406	0.000683	0.0021251
20	0.019710	0.0019172	0.010107	0.0020757	0.000717	0.0022882
21	0.028051	0.0015337	0.014385	0.0018150	0.001020	0.0027743
22	0.027259	0.0031864	0.013979	0.0139790	0.000992	0.0044688
23	0.020664	0.0012941	0.010597	0.0014168	0.000752	0.0017694
24	0.026434	0.0014667	0.013555	0.0016981	0.000962	0.0021068
25	0.020009	0.0020611	0.010261	0.0023052	0.000728	0.0027941



Hasil simulasi fungsi Eksponen:  $n=200, \sigma^2=0,1$  dan  $K=5$

Replikasi	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
	$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
1	0.020735	0.0016706	0.010466	0.0017993	0.001458	0.0019672
2	0.027828	0.0019977	0.014046	0.0021773	0.001957	0.0024302
3	0.024270	0.0017111	0.012250	0.0018496	0.001707	0.0020364
4	0.023558	0.0019494	0.011891	0.0021063	0.001657	0.0023165
5	0.027076	0.0017558	0.013666	0.0019404	0.001904	0.0022099
6	0.023715	0.0017104	0.011970	0.0018083	0.001668	0.0019266
7	0.025844	0.0014638	0.013044	0.0016284	0.001807	0.0018173
8	0.024612	0.0018241	0.012423	0.0019143	0.001731	0.0020155
9	0.023447	0.0017284	0.011834	0.0018955	0.001649	0.0021283
10	0.021929	0.0015598	0.011068	0.0016605	0.001542	0.0017874
11	0.021341	0.0015472	0.010771	0.0016966	0.001501	0.0019008
12	0.028220	0.0021046	0.014244	0.0023538	0.001985	0.0027306
13	0.021945	0.0018895	0.011076	0.0019815	0.001543	0.0020867
14	0.025022	0.0019549	0.012629	0.0022240	0.001760	0.0026285
15	0.024870	0.0018842	0.012552	0.0020915	0.001749	0.0023913
16	0.026727	0.0020178	0.013490	0.0024031	0.001879	0.0030207
17	0.028006	0.0018600	0.014136	0.0020876	0.001969	0.0024338
18	0.022729	0.0016507	0.011472	0.0018110	0.001598	0.0015983
19	0.023094	0.0020320	0.011656	0.0022258	0.001624	0.0024944
20	0.028516	0.0015736	0.014393	0.0016893	0.002005	0.0018414
21	0.024581	0.0020504	0.012407	0.0022045	0.001729	0.0024078
22	0.027367	0.0020411	0.013813	0.0023408	0.001924	0.0028084
23	0.025168	0.0015506	0.012703	0.0016635	0.001770	0.0018117
24	0.024508	0.0017410	0.012370	0.0018752	0.001723	0.0020539
25	0.024438	0.0019433	0.012335	0.0020944	0.001719	0.0022961



Hasil simulasi fungsi Eksponen:  $n = 200, \sigma^2 = 0,1$  dan  $K = 20$

Replikasi	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
	$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
1	0.026793	0.0018663	0.013562	0.0021204	0.000962	0.0026723
2	0.023203	0.0012929	0.011744	0.0014243	0.000833	0.0017416
3	0.018026	0.0015553	0.009124	0.0016367	0.000647	0.0017337
4	0.019018	0.0016060	0.009626	0.0016965	0.000683	0.0018132
5	0.021331	0.0013631	0.010797	0.0015202	0.000766	0.0018546
6	0.021591	0.0022222	0.010928	0.0024419	0.000775	0.0027473
7	0.021329	0.0019386	0.010796	0.0021009	0.000766	0.0023881
8	0.019642	0.0013821	0.009942	0.0014857	0.000705	0.0016616
9	0.027593	0.0018373	0.013966	0.0020366	0.000990	0.0023023
10	0.024481	0.0014204	0.012391	0.0015228	0.000879	0.0016829
11	0.023395	0.0020697	0.011842	0.0022411	0.000840	0.0025543
12	0.024237	0.0016192	0.012268	0.0018020	0.000870	0.0021343
13	0.022932	0.0015209	0.011607	0.0016856	0.000823	0.0019712
14	0.026919	0.0019041	0.013626	0.0021287	0.000966	0.0025176
15	0.025592	0.0019208	0.012954	0.0021020	0.000919	0.0024287
16	0.024152	0.0020430	0.012225	0.0022441	0.000867	0.0026321
17	0.021719	0.0014104	0.010993	0.0015140	0.000780	0.0017047
18	0.022722	0.0020306	0.011501	0.0021957	0.000816	0.0024024
19	0.019018	0.0016060	0.009626	0.0016965	0.000683	0.0018132
20	0.021331	0.0013631	0.010797	0.0015202	0.000766	0.0018546
21	0.021591	0.0022222	0.010928	0.0024419	0.000775	0.0027473
22	0.021329	0.0019386	0.010796	0.0021009	0.000766	0.0023881
23	0.019389	0.0012701	0.009814	0.0013433	0.000696	0.0014924
24	0.026897	0.0018198	0.013614	0.0020166	0.000965	0.0024001
25	0.026793	0.0018663	0.013562	0.0021204	0.000962	0.0026723



Hasil simulasi fungsi Trigonometri:  $n=50, \sigma^2=0,1$  dan  $K=5$

Replikasi	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
	$\lambda_{\text{optimal}}$	MSE UBR	$\lambda_{\text{optimal}}$	MSE CV	$\lambda_{\text{optimal}}$	MSE GCV
1	0.180260	0.0026854	0.093852	0.0054324	0.013131	0.024738
2	0.201630	0.0019296	0.104980	0.0039478	0.014687	0.019333
3	0.186050	0.0020891	0.096864	0.0040864	0.013552	0.018096
4	0.183340	0.0023848	0.095452	0.0048043	0.013354	0.021975
5	0.182340	0.0023868	0.094932	0.0045505	0.013282	0.019181
6	0.163500	0.0025776	0.085126	0.0048329	0.011910	0.018918
7	0.173430	0.0029136	0.090296	0.0053479	0.012633	0.020769
8	0.191130	0.0024784	0.099510	0.0049095	0.013922	0.022311
9	0.206700	0.0019053	0.107620	0.004077	0.015056	0.021495
10	0.187410	0.0026937	0.097575	0.0051881	0.013651	0.022442
11	0.204990	0.0019791	0.106730	0.0040971	0.014932	0.020551
12	0.178380	0.002303	0.092871	0.0047518	0.012993	0.022111
13	0.176230	0.0023888	0.091755	0.0047954	0.012837	0.021432
14	0.186820	0.0026056	0.097268	0.0051387	0.013609	0.023001
15	0.194000	0.0024488	0.101000	0.0053523	0.014131	0.027947
16	0.173990	0.0022626	0.090584	0.0047981	0.012673	0.022758
17	0.148570	0.0021121	0.077352	0.0040737	0.010822	0.01583
18	0.201700	0.00207	0.105010	0.0044982	0.014692	0.023868
19	0.203760	0.0022373	0.106090	0.0045695	0.014842	0.022392
20	0.179450	0.0019994	0.093430	0.0041853	0.013072	0.019931
21	0.185350	0.0024601	0.096499	0.0048413	0.013501	0.021533
22	0.186180	0.002614	0.096935	0.0054002	0.013562	0.025682
23	0.184940	0.0022618	0.096288	0.0049998	0.013471	0.025745
24	0.205010	0.0025233	0.106740	0.0052884	0.014933	0.0269
25	0.208130	0.0029387	0.108360	0.0056457	0.015160	0.025171



Hasil simulasi fungsi Trigonometri:  $n=50, \sigma^2=0,1$  dan  $K=20$

Replikasi	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
	$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
1	0.110430	0.0165690	0.058273	0.0242430	0.004139	0.0442230
2	0.110110	0.0164760	0.058104	0.0243870	0.004127	0.0467090
3	0.093628	0.0170400	0.049408	0.0236830	0.003509	0.0398530
4	0.092826	0.0173290	0.048985	0.0241190	0.003479	0.0397510
5	0.082667	0.0162720	0.043624	0.0219820	0.003099	0.0336500
6	0.113880	0.0172940	0.060097	0.0258260	0.004269	0.0477540
7	0.102640	0.0143430	0.054164	0.0212600	0.003847	0.0383300
8	0.089001	0.0153890	0.046967	0.0217870	0.003336	0.0369220
9	0.101600	0.0167270	0.053613	0.0241440	0.003808	0.0434910
10	0.117070	0.0153160	0.061777	0.0237880	0.004388	0.0463570
11	0.105730	0.0166060	0.055795	0.0246400	0.003963	0.0462240
12	0.090714	0.0155170	0.047871	0.0215860	0.003400	0.0355270
13	0.097495	0.0164830	0.051449	0.0235510	0.003654	0.0413640
14	0.113670	0.0172730	0.059985	0.0261020	0.004261	0.0480540
15	0.110110	0.0164760	0.058104	0.0243870	0.004127	0.0467090
16	0.108010	0.0162350	0.056999	0.0240960	0.004049	0.0452400
17	0.086170	0.0141980	0.045473	0.0199470	0.003230	0.0359330
18	0.115180	0.0156810	0.060782	0.0237180	0.004317	0.0451170
19	0.136200	0.0169720	0.071876	0.0272130	0.005105	0.0562440
20	0.103690	0.0169700	0.054719	0.0246770	0.003887	0.0428150
21	0.122580	0.0161230	0.064686	0.0250220	0.004595	0.0491820
22	0.110730	0.0168740	0.058431	0.0250690	0.004150	0.0461740
23	0.118130	0.0162200	0.062340	0.0249030	0.004428	0.0492020
24	0.105790	0.0146820	0.055825	0.0226760	0.003965	0.0458370
25	0.107770	0.0155890	0.056872	0.0228630	0.004040	0.0437290



Hasil simulasi fungsi Trigonometri:  $n=100, \sigma^2=0,1$  dan  $K=5$

Replikasi	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
	$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
1	0.197900	0.0025707	0.100880	0.0050188	0.014072	0.0221460
2	0.200150	0.0021103	0.102020	0.0040874	0.014231	0.0179270
3	0.155910	0.0029206	0.079471	0.0052237	0.011086	0.0182890
4	0.187430	0.0026283	0.095540	0.0050718	0.013327	0.0215180
5	0.159270	0.0023871	0.081185	0.0045235	0.011325	0.0174310
6	0.173500	0.0023866	0.088437	0.0043722	0.012336	0.0166080
7	0.162920	0.0024542	0.083046	0.0046961	0.011584	0.0185400
8	0.166480	0.0023328	0.084858	0.0047541	0.011837	0.0205930
9	0.163380	0.0026249	0.083278	0.0046107	0.011617	0.0159630
10	0.184680	0.0024553	0.094138	0.0045748	0.013132	0.0182490
11	0.156060	0.0021161	0.079549	0.0039620	0.011097	0.0148920
12	0.187340	0.0024456	0.095490	0.0046695	0.013320	0.0194860
13	0.194990	0.0024829	0.099393	0.0045977	0.013865	0.0184700
14	0.176740	0.0023325	0.090089	0.0044407	0.012567	0.0180580
15	0.185670	0.0024268	0.094641	0.0047669	0.013202	0.0207200
16	0.195330	0.0025324	0.099565	0.0047151	0.013889	0.0191300
17	0.181550	0.0024661	0.092539	0.0047931	0.012909	0.0202990
18	0.180530	0.0022371	0.092022	0.0043953	0.012836	0.0188850
19	0.197900	0.0025707	0.100880	0.0050188	0.014072	0.0221460
20	0.200150	0.0021103	0.102020	0.0040874	0.014231	0.0179270
21	0.155910	0.0029206	0.079471	0.0052237	0.011086	0.0182890
22	0.187430	0.0026283	0.095540	0.0050718	0.013327	0.0215180
23	0.159270	0.0023871	0.081185	0.0045235	0.011325	0.0174310
24	0.173500	0.0023866	0.088437	0.0043722	0.012336	0.0166080
25	0.162920	0.0024542	0.083046	0.0046961	0.011584	0.0185400



Hasil simulasi fungsi Trigonometri:  $n=100, \sigma^2=0,1$  dan  $K=20$

Replikasi	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
	$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
1	0.112460	0.0143550	0.057671	0.0217920	0.004091	0.0408610
2	0.105050	0.0156140	0.053868	0.0233240	0.003821	0.0420100
3	0.112340	0.0142620	0.057607	0.0219870	0.004086	0.0419990
4	0.108880	0.0144980	0.055835	0.0220110	0.003961	0.0419090
5	0.099141	0.0159930	0.050839	0.0233140	0.003606	0.0396770
6	0.109350	0.0140070	0.056073	0.0212390	0.003977	0.0400200
7	0.086941	0.0145960	0.044583	0.0205550	0.003162	0.0349360
8	0.104630	0.0152260	0.053654	0.0225150	0.003806	0.0400830
9	0.094627	0.0137520	0.048525	0.0203110	0.003442	0.0359630
10	0.105950	0.0155100	0.054329	0.0232850	0.003854	0.0422170
11	0.116570	0.0152220	0.059779	0.0235860	0.004240	0.0468530
12	0.102270	0.0140670	0.052446	0.0212630	0.003720	0.0397050
13	0.084565	0.0144690	0.043365	0.0203590	0.003076	0.0334470
14	0.114640	0.0155060	0.058787	0.0237170	0.004170	0.0450660
15	0.099100	0.0152740	0.050818	0.0225990	0.003605	0.0401880
16	0.091853	0.0151270	0.047102	0.0218000	0.003341	0.0366280
17	0.096022	0.0146400	0.049240	0.0215180	0.003493	0.0380310
18	0.094864	0.0141440	0.048646	0.0206390	0.003451	0.0362050
19	0.105050	0.0156140	0.053868	0.0233240	0.003821	0.0420100
20	0.093755	0.0137790	0.048078	0.0204410	0.003410	0.0370210
21	0.106040	0.0160730	0.054376	0.0240550	0.003857	0.0438740
22	0.112250	0.0147920	0.057564	0.0226470	0.004083	0.0443820
23	0.102750	0.0152680	0.052689	0.0229680	0.003737	0.0415580
24	0.105300	0.0153990	0.053999	0.0229850	0.003830	0.0420640
25	0.114670	0.0141130	0.058801	0.0214800	0.004171	0.0423030



Hasil simulasi fungsi Trigonometri:  $n=200, \sigma^2=0,1$  dan  $K=5$

Replikasi	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
	$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
1	0.167720	0.0024816	0.084653	0.0043875	0.011794	0.0153860
2	0.169800	0.0027159	0.085703	0.0046670	0.011940	0.0155780
3	0.173220	0.0024481	0.087428	0.0045133	0.012181	0.0171710
4	0.164550	0.0026311	0.083053	0.0046814	0.011571	0.0164890
5	0.186440	0.0028316	0.094104	0.0051484	0.013111	0.0195580
6	0.162580	0.0029773	0.082058	0.0051918	0.011433	0.0175720
7	0.174640	0.0024297	0.088143	0.0044396	0.012280	0.0167070
8	0.180800	0.0023361	0.091257	0.0044296	0.012714	0.0179280
9	0.179730	0.0026178	0.090717	0.0046544	0.012639	0.0168200
10	0.172560	0.0027070	0.087096	0.0049660	0.012134	0.0187010
11	0.171330	0.0025012	0.086478	0.0045966	0.012048	0.0173220
12	0.171650	0.0026299	0.086637	0.0047756	0.012070	0.0176620
13	0.172130	0.0026253	0.086878	0.0048530	0.012104	0.0184890
14	0.197430	0.0026476	0.099651	0.0048854	0.013884	0.0193790
15	0.170930	0.0025262	0.086273	0.0047227	0.012020	0.0182690
16	0.184170	0.0026180	0.092954	0.0046522	0.012951	0.0168870
17	0.187130	0.0026016	0.094451	0.0048846	0.013159	0.0196750
18	0.176150	0.0026758	0.088908	0.0048125	0.012387	0.0176590
19	0.154180	0.0028032	0.077819	0.0047522	0.010842	0.0150610
20	0.176180	0.0025666	0.088923	0.0047727	0.012389	0.0185120
21	0.164870	0.0028528	0.083216	0.0049743	0.011594	0.0169200
22	0.159700	0.0029711	0.080605	0.0051787	0.011230	0.0174160
23	0.176450	0.0026195	0.089059	0.0046650	0.012408	0.0168290
24	0.172700	0.0024425	0.087165	0.0044619	0.012144	0.0167190
25	0.175950	0.0026615	0.088805	0.0046701	0.012372	0.0163750



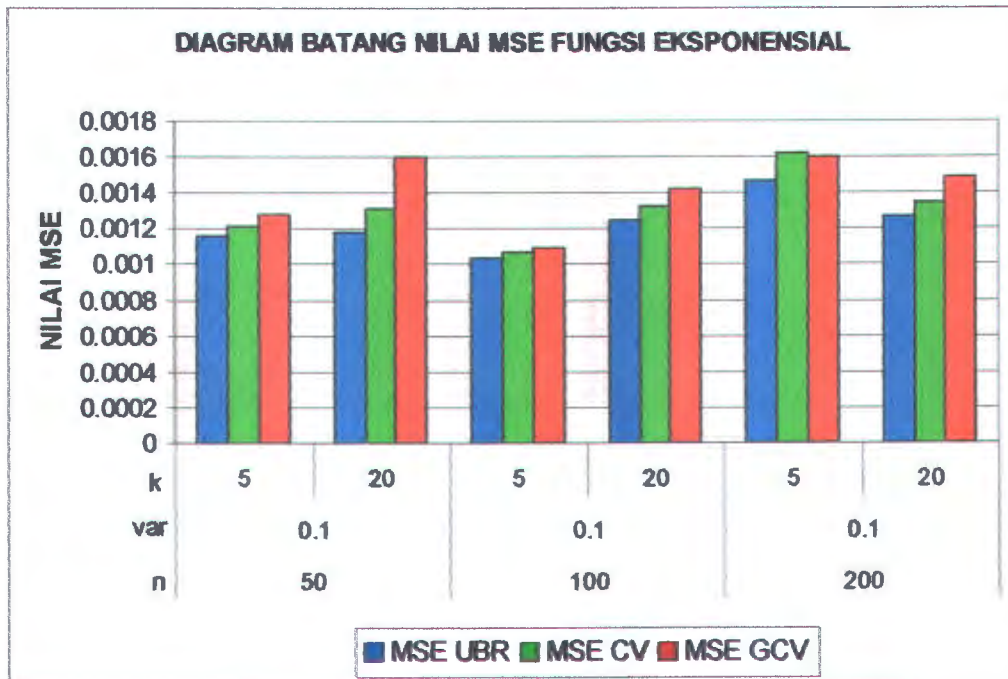
Hasil simulasi fungsi Trigonometri:  $n=200, \sigma^2=0$ , dan  $K=20$

Replikasi	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
	$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
1	0.094316	0.0139780	0.047740	0.0205900	0.003385	0.0360660
2	0.103030	0.0142920	0.052152	0.0212000	0.003698	0.0376950
3	0.103470	0.0143700	0.052371	0.0217540	0.003714	0.0395190
4	0.099789	0.0143270	0.050509	0.0210800	0.003582	0.0369640
5	0.102850	0.0133130	0.052058	0.0201570	0.003691	0.0375740
6	0.094633	0.0140470	0.047900	0.0205060	0.003397	0.0358490
7	0.105620	0.0142880	0.053461	0.0216950	0.003791	0.0399150
8	0.096110	0.0142740	0.048648	0.0209300	0.003450	0.0367520
9	0.097453	0.0136080	0.049327	0.0204170	0.003498	0.0370730
10	0.107920	0.0141500	0.054624	0.0216640	0.003873	0.0404370
11	0.106200	0.0138690	0.053755	0.0211940	0.003812	0.0403300
12	0.104730	0.0136430	0.053011	0.0206250	0.003759	0.0380500
13	0.097874	0.0140360	0.049540	0.0208470	0.003513	0.0372790
14	0.097888	0.0137550	0.049547	0.0202690	0.003513	0.0364170
15	0.097140	0.0148630	0.049169	0.0219410	0.003487	0.0383980
16	0.102330	0.0140230	0.051795	0.0211770	0.003673	0.0386810
17	0.098587	0.0141700	0.049901	0.0210230	0.003538	0.0375580
18	0.105970	0.0146830	0.053638	0.0220890	0.003803	0.0403180
19	0.102080	0.0143510	0.051667	0.0214550	0.003664	0.0386060
20	0.101340	0.0139620	0.051295	0.0207440	0.003637	0.0366450
21	0.103020	0.0134690	0.052147	0.0206840	0.003696	0.0391850
22	0.095901	0.0141300	0.048542	0.0207100	0.003442	0.0363250
23	0.108390	0.0151210	0.054861	0.0230180	0.003890	0.0429910
24	0.105880	0.0143470	0.053594	0.0217610	0.003800	0.0401130
25	0.096438	0.0141630	0.048814	0.0206390	0.003461	0.0361230

## Lampiran 6: Rangkuman Hasil Simulasi & Diagram Batang

Hasil simulasi fungsi Eksponen

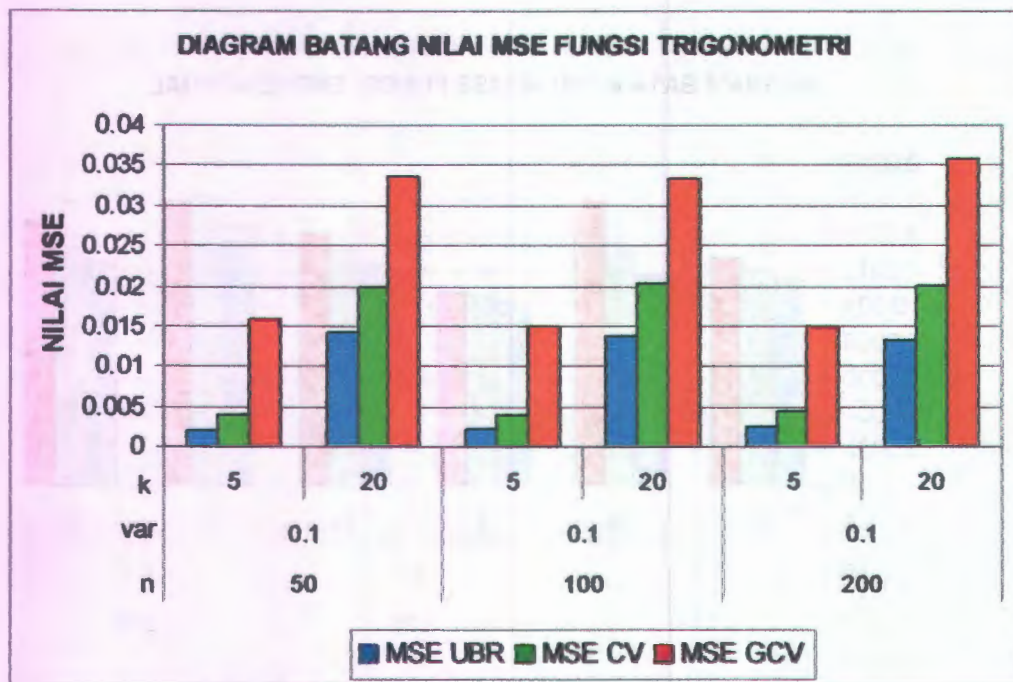
n	var	k	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
			$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
50	0.1	5	0.019006	0.0011624	0.009895	0.0012163	0.001384	0.0012826
		20	0.023513	0.0011852	0.012408	0.0013142	0.000881	0.0015975
100	0.1	5	0.018596	0.0010388	0.009479	0.0010671	0.001322	0.0010937
		20	0.017993	0.0012463	0.009227	0.001326	0.000654	0.0014255
200	0.1	5	0.025844	0.0014638	0.013044	0.0016284	0.001598	0.0015983
		20	0.019389	0.0012701	0.009814	0.0013433	0.000696	0.0014924





Hasil simulasi fungsi Trigonometri

n	var	k	Metode UBR		Metode CV		Metode GCV	
			$\lambda_{optimal}$	MSE UBR	$\lambda_{optimal}$	MSE CV	$\lambda_{optimal}$	MSE GCV
50	0.1	5	0.2067	0.0019053	0.10498	0.0039478	0.010822	0.01583
		20	0.08617	0.014198	0.045473	0.019947	0.003099	0.03365
100	0.1	5	0.20015	0.0021103	0.079549	0.003962	0.011097	0.014892
		20	0.094627	0.013752	0.048525	0.020311	0.003076	0.033447
200	0.1	5	0.1808	0.0023361	0.084653	0.0043875	0.010842	0.015061
		20	0.10285	0.013313	0.052058	0.020157	0.003397	0.035849





## Lampiran 7 Pembuktian Teorema 3

### Pembuktian Teorema 3

Jika  $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \mathbf{V})$  dan  $A$  matriks bujur sangkar yang simetris maka

$$E(\underline{X}' \mathbf{A} \underline{X}) = \underline{\mu}' \mathbf{A} \underline{\mu} + \text{trace}(\mathbf{A}, \mathbf{V})$$

Bukti:

$$\begin{aligned} E(\underline{X}' \mathbf{A} \underline{X}) &= \text{trace}(E[\underline{X}' \mathbf{A} \underline{X}]) \\ &= E(\text{trace}[\underline{X}' \mathbf{A} \underline{X}]) \\ &= E(\text{trace}[\mathbf{A} \underline{X} \underline{X}']) \\ &= \text{trace}(E[\mathbf{A} \underline{X} \underline{X}']) \\ &= \text{trace}(\mathbf{A} E[\underline{X} \underline{X}']) \\ &= \text{trace}[\mathbf{A}(\text{var}(\underline{X}) + \underline{\mu} \underline{\mu}')] \\ &= \text{trace}(\mathbf{A} \mathbf{V}) + \text{trace}(\mathbf{A} \underline{\mu} \underline{\mu}') \\ &= \text{trace}(\mathbf{A} \mathbf{V}) + \underline{\mu}' \mathbf{A} \underline{\mu} \end{aligned}$$