TUGAS AKHIR – SM091332

KAJIAN MENGENAI SYARAT CUKUP POLINOMIAL KROMATIK GRAF TERHUBUNG MEMILIKI AKAR-AKAR KOMPLEKS

YUNI DEWI PURNAMA SARI
NRP 1208 100 051

Dosen Pembimbing:
Dr. Darmaji, S. Si., M.T.
Soleha, S.Si., M.Si.

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2014

FINAL PROJECT – SM091332

STUDY ON SUFFICIENT CONDITION FOR CHROMATIC POLYNOMIAL OF CONNECTED GRAPH WITH COMPLEX ROOTS

YUNI DEWI PURNAMA SARI
NRP 1208 100 051

Supervisors:
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.
Soleha, S.Si., M.Si.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2014

KAJIAN MENGENAI SYARAT CUKUP POLINOMIAL KROMATIK GRAF TERHUBUNG MEMILIKI AKAR KOMPLEKS

Nama Mahasiswa	: Yuni Dewi Purnama Sari
NRP	: 1208100051
Jurusan	: Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	: 1. Dr. Darmaji, S.Si., M.T.
	2. Soleha, S.Si., M.Si.

Abstrak

Polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ *adalah suatu fungsi yang menghitung banyaknya cara mewarnai graf* G *dengan* λ *buah warna. Banyaknya warna terkecil yang dibutuhkan untuk mewarnai graf* G *disebut bilangan kromatik* $\chi(G)$*. Sehingga, diperoleh hubungan berikut: jika* $\lambda < \chi(G)$*, maka* $P(G,\lambda) = 0$*, sementara jika* $\lambda \geq \chi(G)$*, maka* $P(G,\lambda) > 0$*. Akar suatu polinomial kromatik bisa disebut dengan akar kromatik. Letak akar kromatik real terpadatkan pada selang* $[\frac{32}{27},\infty)$*. Akan tetapi polinomial kromatik tidak memiliki akar kromatik real pada selang* $(-\infty,\frac{32}{27}]$ *kecuali untuk 0 dan 1. Sedangkan letak akar kromatik kompleks terpadatkan pada seluruh bidang kompleks. Di dalam Tugas Akhir ini, dikaji syarat cukup suapaya suatu polinomial kromatik dari graf terhubung memiliki akar yang bernilai kompleks. Sehingga, diperoleh graf yang memenuhi syarat cukup untuk memiliki akar kromatik yang bernilai kompleks, seperti graf roda dengan simpul* $n \geq 5$ *dan graf sikel dengan simpul* $n \geq 4$*.*

Kata-kunci: *Polinomial kromatik,bilangan kromatik, akar kromatik, akar kromatik kompleks*

STUDY ON SUFFICIENT CONDITION FOR THE CHROMATIC POLYNOMIAL OF CONNECTED GRAPH WITH COMPLEX ROOTS

Name	: Yuni Dewi Purnama Sari
NRP	: 1208100051
Department	: Matematika FMIPA-ITS
Supervisors	: 1. Dr. Darmaji, S.Si., M.T.
	2. Soleha, S.Si., M.Si.

Abstract

The chromatic polynomial $P(G, \lambda)$ *counts the number of proper vertex-*λ*-coloring of graph* G. *The smallest number of colors needed to color a graph* G *is called chromatic number* $\chi(G)$. *So this followong connection is obtained: if* $\lambda < \chi(G)$, *then* $P(G, \lambda) = 0$, *and if* $\lambda \geq \chi(G)$, *then* $P(G, \lambda) > 0$. *The roots of chromatic polynomial is also called chromatic roots.The location of real chromatic roots are dense in* $[\frac{32}{27}, \infty)$. *But chromatic polynomial have no real roots in* $(-\infty, \frac{32}{27}]$ *except for 0 and 1. Whereas the location of complex roots of chromatic polynomials are dense in the whole complex plane. In this final project, the sufficient conditions for polynomial chromatic of connected graph has complex roots were studied. So that, some of graphs that suffice the condition to have complex roots were obtained, such as, wheel graph with node* $n \geq 5$ *and cycle graph with node* $n \geq 4$.

Key words: *chromatic polynomial, chromatic number,chromatic roots, complex roots of polynomial chromatic*

LEMBAR PENGESAHAN

KAJIAN MENGENAI SYARAT CUKUP POLYNOMIAL KROMATIK GRAF TERHUBUNG MEMILIKI AKAR-AKAR KOMPLEKS

STUDY ON SUFFICIENT CONDITION FOR THE CHROMATIC POLYNOMIAL OF CONNECTED GRAPH WITH COMPLEX ROOTS

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
pada
Bidang Studi Analisis dan Aljabar
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
YUNI DEWI PURNAMA SARI
NRP. 1208 100 051

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Soleha, S.Si., M.Si.	Dr. Darmaji, S.Si., M.T.
NIP. 19830107 200604 2 001	NIP. 19691015 199412 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Erna Apriliani, M.Si.
NIP. 19660414 199102 2 001

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN MATEMATIKA

Surabaya, Januari 2013

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan karunia berupa nikmat iman, nikmat islam, nikmat jasmani, nikmat rohani, dan nikmat ilmu kepada penulis sehingga bisa menyelesaikan Tugas Akhir ini. Tak lupa sholawat serta salam penulis tujukan kepada Rasulullah Muhammad SAW.

Dalam penyusunan Tugas Akhir ini, penulis mengucapkan terima kasih karena mendapatkan kemudahan dan kelancaran berkat dukungan dan dorongan dari berbagai pihak, diantaranya:

1. Ibu dan suami penulis yang telah banyak memberi dukungan baik moril maupun materiil sehingga penulis berhasil menyelesaikan Tugas Akhir ini hingga mencapai gelar sarjana.
2. Ibu Soleha, S.Si., M.Si. dan bapak Dr. Darmaji, S.Si., M.T. selaku dosen pembimbing yang senantiasa meluangkan waktunya untuk mengarahkan dan memberikan masukan kepada penulis, baik dalam menyelesaikan Tugas Akhir maupun di saat penulis berproses untuk menyelesaikan studi di Jurusan Matematika ITS.
3. Ibu Dr. Erna Aprilian, M.Si selaku ketua Jurusan, yang
4. memberikan dukungan dan kemudahan ketika penulis berproses dalam menyelesaikan studi di Jurusan Matematika ITS.
5. Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si. selaku ketua dosen penguji Tugas Akhir dan ibu Sunarsini, S.Si., M.Si selaku dosen penguji Tugas Akhir ini. Terimakasih atas bantuan maupun arahannya selama ini.

6. Seluruh keluarga besar Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Sebagai penutup, penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan manfaat bagi yang membutuhkannya. Penulis juga menyadari bahwa penyusunan Tugas Akhir ini jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis berharap koreksi dan masukan dari pembaca.

Surabaya, 23 Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$P(G, \lambda)$	Polinomial kromatik graf G
$\chi(G)$	Bilangan kromatik graf G
$V(G)$	Himpunan simpul graf G
$V(H)$	Himpunan simpul graf H
$E(G)$	Himpunan sisi graf G
$E(H)$	Himpunan sisi graf H
$f: V(G_1) \to V(G_2)$	Pemetaan simpul G_1 terhadap simpul G_2
C_n	Graf sikel order n
K_n	Graf lengkap order n
W_n	Graf roda order n
P_n	Graf lintasan order n
$L(G)$	Graf garis dari G
n	Banyaknya simpul dari suatu graf
m	Banyaknya sisi dari suatu graf
t_1	Banyaknya subgraf segitiga
t_2	Banyaknya subgraf quadilateral murni
t_3	Banyaknya subgraf lengkap K_4

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Sebuah graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V himpunan tidak kosong, dan E adalah himpunan pasangan tak berurutan dari anggota-anggota V (yang mungkin kosong). Himpunan V beranggotakan simpul graf G dan E adalah himpunan yang beranggotakan sisi graf G[9].

Salah satu kajian dalam teori graf yang menarik perhatian sejumlah ilmuwan adalah pewarnaan graf. Masalah pewarnaan pertama kali muncul pada lebih dari 150 tahun yang lalu, yaitu mengenai masalah empat-warna, yang mempertanyakan apakah sebarang peta di dunia dapat diwarnai dengan tidak lebih dari 4 warna.

Pewarnaan graf G didefinisikan sebagai penetapan warna pada simpul G sedemikian hingga dua simpul yang bertetangga menerima warna yang berbeda. Jika G mempunyai p buah simpul, maka G pasti dapat diwarnai dengan p buah warna. Tapi akan lebih menarik jika dapat ditemukan banyaknya warna terkecil yang dapat digunakan untuk mewarnai graf G. Banyaknya warna terkecil yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G disebut bilangan kromatik, yang dinotasikan dengan $\chi(G)$.

George David Birkhoff mengenalkan polinomial kromatik pada tahun 1912 sebagai usaha untuk membuktikan teorema empat warna. Polinomial kromatik menghitung banyaknya cara suatu graf dapat diwarnai dengan menggunakan bilangan yang telah diberikan.

Polinomial kromatik $P(G, \lambda)$ adalah suatu fungsi yang menghitung banyaknya cara mewarnai graf G dengan λ buah warna sedemikian hingga tidak ada dua simpul yang bertetangga yang memiliki warna yang sama. Jelas diperoleh hubungan antara polinomial kromatik $P(G, \lambda)$ dengan bilangan kromatik χ berikut ini: jika $\lambda < \chi(G)$, maka $P(G,\lambda) = 0$, sementara jika $\lambda \geq \chi(G)$, maka $P(G,\lambda) > 0$.

Sebagaimana halnya polinomial pada umumnya, polinomial kromatik juga memiliki pembuat nol atau akar. Akar suatu polinomial kromatik bisa disebut dengan akar kromatik. Akar kromatik dapat bernilai real maupun kompleks.

Penentuan letak akar real maupun akar kompleks dari polinomial kromatik telah menjadi bahan diskusi sejumlah ilmuwan. Sebarang graf G dikenal tidak memiliki akar kromatik pada selang $(-\infty, \frac{32}{27}]$ kecuali untuk 0 dan 1 [11]. Akan tetapi, letak akar kromatik terpadatkan pada selang $[\frac{32}{27}, \infty)$ [14]. Sementara pada graf planar, 4 bukan akar kromatik [1] [2]. Selain itu dugaan Birkhoff-Lewis yang terkenal menyatakan bahwa graf planar tidak memiliki akar kromatik pada selang $[4, \infty)$ [6]. Sedangkan untuk letak akar kromatik pada bidang kompleks, akar seluruh polinomial kromatik terpadatkan pada seluruh bidang kompleks[13].

Telah ditemukan syarat cukup supaya suatu polinomial kromatik memiliki akar yang bernilai kompleks[5]. Syarat cukup ini dibahas ulang di dalam [4] dengan sedikit perluasan . Di dalam Tugas Akhir ini dikaji syarat cukup polinomial kromatik suatu graf terhubung sehingga memiliki akar yang bernilai kompleks berdasarkan [4].

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang dikaji dalam Tugas Akhir ini yaitu: apa saja syarat cukup supaya polinomial kromatik dari graf terhubung memiliki akar yang bernilai kompleks?

1.3 Batasan Masalah

Pada Tugas Akhir ini diberikan batasan masalah sebagai berikut:

1. Syarat cukup yang akan dibahas terbatas pada banyaknya subgraf yang berupa segitiga, quadilateral murni, dan graf lengkap K_4.
2. Graf terhubung yang dikaji dibatasi pada graf umum, yaitu graf lengkap, graf pohon, graf sikel, graf roda, dan graf garis yang dibentuk dari keempat graf sebelumnya.

1.4 Tujuan

Penulisan Tugas Akhir ini bertujuan untuk mengaji syarat cukup supaya suatu polinomial kromatik dari graf terhubung memiliki akar yang bernilai kompleks, sedemikian hingga diperoleh jenis graf umum yang memenuhi syarat cukup untuk memiliki akar kromatik kompleks.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari Tugas Akhir ini adalah menambah pengetahuan mengenai apa saja syarat cukup supaya polinomial kromatik suatu graf terhubung dapat memiliki akar yang bernilai kompleks.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini adalah :

BAB I - PENDAHULUAN

Pada bab ini berisi latar belakang atau motivasi dilakukannya kajian, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat, serta sistematika penulisan Tugas Akhir.

BAB II - TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini berisi tentang teorema maupun teori dasar yang digunakan untuk membuktikan setiap syarat cukup. Teorema dan teori dasar tersebut tidak hanya akan dikaji satu per satu, tapi juga akan dipaparkan pula keterkaitannya satu sama lain. Teori dasar dan teorema tersebut antara lain istilah dan teori dasar graf, definisi polinomial, Teorema Sturm, Teorema Newton, Teorema Gauss-Lucas, polinomial kromatik, serta teorema mengenai empat koefisien pertama polinomial kromatik.

BAB III - METODE PENELITIAN

Pada bab ini berisi uraian serangkaian kegiatan untuk mengaji syarat cukup polinomial kromatik dari graf terhubung sehingga memiliki akar kompleks. Serangkaian kegiatan tersebut antara lain, studi literatur, mengaji teorema dan teori dasar yang digunakan untuk membuktikan setiap syarat cukup, membuktikan bahwa syarat cukup terpenuhi, dan penulisan Tugas Akhir.

BAB IV - PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai pembuktian syarat cukup bagi polinomial kromatik dari suatu graf terhubung sehingga memiliki akar kompleks. Teorema dan teori dasar yang telah dikaji dalam tinjauan pustaka akan digunakan untuk membuktikan bahwa syarat cukup tersebut terpenuhi.

BAB V - PENUTUP

Pada bab ini berisi kesimpulan akhir dari Tugas Akhir yang berisi tentang syarat cukup sehingga akar kromatik suatu graf terhubung bernilai kompleks. Selain itu pada bab ini juga berisi saran yang bertujuan untuk mengembangkan kajian maupun penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Istilah dan Notasi dalam Graf

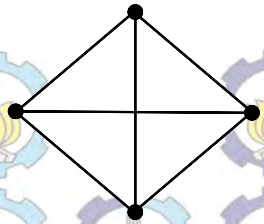
Pada Subbab 1.1 disebutkan bahwa sebuah graf terdiri atas simpul dan sisi atau bahkan dapat terdiri atas simpul saja. Graf yang hanya terdiri dari simpul saja ini disebut dengan graf kosong.

Jika u dan v adalah simpul dari graf G, u disebut bertetangga dengan v jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan u dan v. Sedangkan suatu simpul u dikatakan terkait dengan sisi e jika u adalah titik ujung dari e. Dalam hal ini, dapat juga dikatakan e terkait dengan u jika u menjadi titik ujung dari e[9].

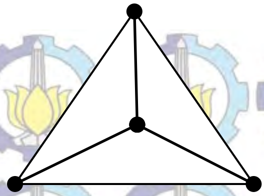
Banyaknya simpul yang ada dalam suatu graf G disebut order G dan banyaknya sisi yang ada dalam graf G disebut ukuran (*size*) G. Sementara derajat dari sebuah simpul v adalah banyaknya sisi yang terkait dengan v[8].

Subgraf dari graf G adalah sebuah graf yang setiap simpulnya merupakan simpul di G, dan setiap sisinya juga merupakan sisi di G. Dengan kata lain, suatu graf H bisa disebut subgraf dari graf G, dinotasikan $H \subseteq G$, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

Dua buah graf G_1 dan G_2 disebut dengan isomorf jika dapat dibentuk pemetaan $f: V(G_1) \to V(G_2)$ sedemikian hingga ketetanggaan di G_1 dipertahankan di G_2. Dari graf G_1dan G_2 pada Gambar 2.1.1 dapat dibentuk pemetaan $f(0) \to 0$, $f(1) \to 1$, $f(2) \to 2$, dan $f(3) \to 3$ sedemikian hingga ketetanggaan di G_1dipertahankan di G_2. Oleh karena itu, G_1 isomorfik dengan G_2.



a. Graf G_1



b. Graf G_2

Gambar 2.1.1 Graf G_1 yang isomorf dengan graf G_2

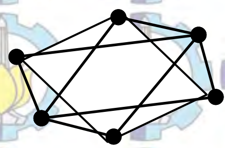
Sebuah graf G dikatakan terhubung jika untuk sebarang dua simpul a dan b, terdapat lintasan dari a ke b. Sikel dengan panjang n, yang dinotasikan dengan C_n, adalah graf dengan n buah simpul $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ dan sisi $x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_0$. Graf sikel dengan order k bisa disebut dengan k-sikel. Sebuah graf 3-sikel seringkali disebut graf segitiga. Sikel dengan orde 4 akan disebut sebagai graf C_4. Graf C_4 ini bisa juga disebut dengan quadilateral. Quadilateral yang tidak memiliki diagonal, disebut quadilateral murni. Perhatikan bahwa jika sebuah graf terhubung memuat sebuah sikel, maka penghilangan sebuah sisi dari sikel tersebut tidak akan membuat graf tersebut menjadi tidak terhubung[9].

Suatu graf K_n dengan order n disebut graf lengkap jika setiap simpul bertetangga dengan setiap simpul lainnya. Dengan kata lain, graf lengkap K_n pasti berukuran $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Sebuah graf lengkap dengan orde 4 disebut dengan K_4.

Sebuah graf disebut pohon jika dalam suatu graf terhubung tidak memuat subgraf yang isomorfik dengan sebuah sikel. Contoh pohon yang sederhana adalah lintasan dengan panjang n, yang dinotasikan dengan P_n.

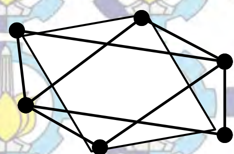
Roda dengan n buah simpul, W_n, adalah graf yang terdiri dari sebuah $n-1$-sikel dan satu buah simpul tambahan yang bertetangga dengan seluruh simpul sikel.

Graf garis *(line graph)* juga termasuk graf terhubung. Untuk suatu graf terhubung G, graf garis dari G yang dinotasikan dengan $L(G)$ didefinisikan sebagai suatu graf yang masing-masing simpul $L(G)$ mewakili sisi G, dan dua simpul $L(G)$ adalah bertetangga jika dan hanya jika kedua sisi G yang diwakili tersebut terkait. Graf G_1 pada Gambar 2.1.1(a) adalah contoh dari graf lengkap K_4. Graf garis dari graf lengkap K_4 yang dinotasikan dengan $L(K_4)$ dapat dilihat pada Gambar 2.1.2. berikut ini.



Gambar 2.1.2. Graf garis $L(K_4)$

Sedangkan graf G_2 pada Gambar 2.1.1(b) adalah contoh dari graf roda W_4. Karena telah terbukti bahwa G_1 isomorfik dengan G_2, maka graf lengkap K_4 isomorfik dengan graf roda W_4. Begitu pula halnya dengan graf garis $L(K_4)$ dan graf garis $L(W_4)$, kedua graf garis tersebut isomorf sebagaimana terlihat pada Gambar 2.1.2 di atas dan pada Gambar 2.2.3 berikut ini.



Gambar 2.1.3. Graf garis $L(W_4)$

Dari Gambar 2.1.2 dan 2.1.3, terlihat bahwa graf garis dari graf roda dan graf lengkap tidak isomorfik dengan graf roda dan graf lengkapnya. Berbeda dengan graf garis dari graf sikel. Graf garis dari graf sikel isomorfik dengan graf sikelnya.

2.2 Polinomial

Definisi 2.2.1.[3] *Suatu fungsi dari peubah tunggal* t *disebut polinomial jika dapat dinyatakan dalam bentuk*

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \qquad (2.2.1)$$

dengan $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ *adalah konstanta dengan* $a_n \neq 0$.

Definisi ini menyatakan bahwa setiap polinomial dapat dinyatakan sebagai jumlahan suku monomial berhingga $a_k t^k$ yang mana peubahnya memiliki pangkat bulat tak negatif. Pada Polinomial (2.2.1), a_i disebut koefisien, untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$. sedangkan a_n adalah koefisien pemimpin (*leading coefficient*) dan $a_n t^n$ adalah suku pemimpin. Lebih lanjut, a_0 adalah suku konstan atau koefisien konstan, a_1 adalah koefisien linier, sedangkan $a_1 t$ adalah suku linier. Ketika koefisien pemimpin a_n bernilai 1, polinomial tersebut dikatakan sebagai polinomial monik.

Bilangan bulat tak negatif n pada Polinomial (2.2.1) adalah derajat dari polinomial. Sebuah polinomial konstan hanya memiliki sebuah suku tunggal a_0. Polinomial konstan tak nol memiliki derajat 0. Beberapa nama khusus diberikan pada polinomial dengan derajat rendah. Polinomial derajat 1 disebut polinomial linier. Polinomial derajat 2 disebut polinomial kuadratik. Polinomial derajat 3 disebut polinomial kubik. Polinomial derajat 4 disebut dengan polinomial kuartik. Dan polinomial derajat 5 disebut dengan polinomial kuintik.

Pembuat nol polinomial $p(t)$ adalah sebarang bilangan r yang membuat $p(r)$ bernilai 0. Ketika $p(r) = 0$, maka r disebut sebagai akar atau penyelesaian dari persamaan $p(t) = 0$.

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk mengetahui apakah suatu polinomial memiliki akar real dan mendapatkan banyaknya akar yang ada dalam suatu selang yang diberikan. Dengan metode tersebut, dua hal tersebut dapat diketahui tanpa mencari nilai akarnya terlebih dahulu secara numerik. Metode tersebut antara lain Aturan Descartes dari Sign (*Descartes' Rule of Signs*), Metode Fourier Budan, dan Metode Sturm.

Dari tiga metode tersebut, pada bagian ini hanya Metode Sturm saja yang akan dikaji. Metode Sturm merupakan salah satu metode yang sangat halus untuk mencari banyaknya akar real pada sebarang selang.

Diberikan polinomial real $p(t)$. Untuk mendefinisikan barisan polinomial $(p_0(t), p_1(t), p_2(t), \dots)$ yang dibutuhkan, dibuatlah algoritma pembagian yang terus-menerus digunakan. Diberikan $p_i(t)$ yang memenuhi:

$$p_0(t) = p(t)$$

$p_1(t) = p'(t)$, dimana $p'(t)$ adalah turunan dari $p(t)$

$$p_0(t) = p_1(t)q_1(t) - p_2(t), \qquad \deg p_2 < \deg p_1$$
$$p_1(t) = p_2(t)q_2(t) - p_3(t), \qquad \deg p_3 < \deg p_2$$
$$p_2(t) = p_3(t)q_3(t) - p_4(t), \qquad \deg p_4 < \deg p_3$$

dan seterusnya sampai diperoleh sisa nol. Jadi, pada masing-masing tingkatan untuk $k \geq 2$, $p_k(t)$ adalah sisa negatif ketika $p_{k-2}(t)$ dibagi oleh $p_{k-1}(t)$. Jika terdapat akar berganda, maka sisa tak nol terakhir akan konstan. Ini disebut sebagai barisan sturm untuk $p(t)$.

Teorema 2.2.2.[3] *Diberikan $a < b$. Misalkan A menyatakan banyaknya perubahan tanda pada bar isan $(p_0(a), p_1(a), p_2(a), p_3(a), \dots)$ dan B menyatakan banyaknya perubahan tanda pada bar isan*

$(p_0(b), p_1(b), p_2(b), p_3(b), \dots)$. *Banyaknya akar real dari polynomia* $p(t)$ *yang berada di antara selang* a *dan* b *(dimana setiap akar gandanya dihitung tepat sekali) adalah tepat* $A - B$.

Teorema 2.2.2 di atas dikenal dengan Teorema Sturm. Berikut ini diberikan contoh mengenai cara Teorema Sturm bekerja.

Contoh 2.2.1. Gunakan Teorema Sturm untuk menentukan banyaknya akar antara -2 dan 2 dari polinomial $t^2 - t + 1$. Pertama, dicari dulu barisan sturm dari polinomial tersebut. Untuk polinomial $p(t) = t^2 - t + 1$,

$$p_0(t) = p(t) = t^2 - t + 1$$
$$p_1(t) = p'(t) = 2t - 1$$

Karena $p_0(t) = p_1(t)q_1(t) - p_2(t)$, maka $p_2(t)$ dapat kita peroleh dari sisa pembagian $\frac{p_0(t)}{p_1(t)}$, sedangkan $q_1(t)$ merupakan hasil dari pembagian tersebut. Dengan perhitungan sederhana ini, diperoleh

$$p_0(t) = t^2 - t + 1 = (2t - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$p_1(t) = 2t - 1 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}t + \frac{4}{3}\right) - 0$$

Sehingga diperoleh nilai $p_2(t) = -\frac{3}{4}$ dan nilai $p_3(t) = 0$. Oleh karena itu, barisan sturm dari polinomial $t^2 - t + 1$ adalah $\left(t^2 - t + 1, 2t - 1, -\frac{3}{4}\right)$. Langkah selanjutnya, Teorema Sturm siap digunakan. Karena $a = -2$ dan $b = 2$, maka kita dapatkan barisan berikut ini

$$\left(p_0(-2), p_1(-2), p_2(-2)\right) = \left(7, -5, -\frac{3}{4}\right)$$
$$\left(p_0(2), p_1(2), p_2(2)\right) = \left(3, 3, -\frac{3}{4}\right)$$

Terlihat bahwa $A = 1$ dan $B = 1$. Sehingga banyaknya akar real dari polinomial $t^2 - t + 1$ adalah $A - B = 0$. Jadi, polinomial $t^2 - t + 1$ tidak memiliki akar real.

Dari Teorema Sturm di atas, diperoleh akibat berikut ini.

Akibat 2.2.3.[3] *Seluruh akar dari polinomial monik adalah real jika dan hany a jika seluruh polinomial tak nol pada barisan sturmnya memiliki koefisien pemimpin positif.*

Selain Teorema sturm, dalam bagian pembahasan selanjutnya, digunakan Teorema Newton yang diberikan sebagai berikut

Teorema 2.2.4.[4] *Diberikan polinomial* $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ *dengan koefisien yang bernilai real. Syarat perlu agar seluruh akar dari polinomial tersebut bernilai real adalah*

$$\frac{k}{n-k+1} \cdot \frac{n-k}{k+1} a_k^2 - a_{k-1} a_{k+1} \geq 0 \qquad (2.2.2)$$

untuk $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Diberikan suatu polinomial dengan koefisien bernilai real berikut ini,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \qquad (2.2.3)$$

Dengan mengikuti Teorema 2.2.4, dapat dibentuk suatu barisan untuk Polinomial (2.2.3) dengan mengambil nilai

$k = 1, 2, 3, \cdots, n-1$. Selanjutnya, barisan tersebut nantinya disebut dengan Barisan Newton.

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n-2}{2} a_1^2 - a_0 a_2 = \frac{n-2}{2n} a_1^2 - a_0 a_2$$
$$\frac{2}{n-1} \cdot \frac{n-2}{3} a_2^2 - a_1 a_3 = \frac{2(n-2)}{3(n-1)} a_2^2 - a_0 a_2$$

Dan seterusnya hingga barisan ke $k-1$. Dari Teorema 2.2.4, apabila seluruh barisan Newton dari polinomialnya bernilai tak negatif, maka seluruh akar dari polinomialnya akan bernilai real.

Di samping Teorema 2.2.2 dan 2.2.4, akan digunakan juga satu Teorema lagi, yaitu Teorema Gauss-Lucas.

Teorema 2.2.5.[10] *Sebarang bidang-paruh tertutup yang memuat seluruh pembuat nol dari polinomial* p *juga memuat seluruh pembuat nol dari turunan* p*, yaitu* p'.

Teorema 2.2.5 mengakibatkan bahwa akar dari p' termuat dalam irisan bidang-paruh tertutup yang memuat akar dari p. Irisan ini juga dikenal sebagai *konveks hull* tertutup dari himpunan akar. Dan irisan ini boleh juga dideskripsikan sebagai polygon konveks terkecil yang memuat seluruh akar[10].

2.3 Polinomial Kromatik

Telah dijelaskan di dalam pendahuluan bahwa polinomial kromatik graf terhubung merupakan banyaknya cara mewarnai graf terhubung sedemikian hingga tidak ada dua simpul bertetangga yang memiliki warna yang sama. Pada Subbab 2.1 juga telah dijelaskan mengenai beberapa macam graf khusus. Pada bagian ini dibahas mengenai polinomial kromatik dari beberapa graf pada subbab 2.1.

Suatu graf disebut dengan graf kosong jika tidak memiliki satupun sisi. Graf kosong dengan order n

dinotasikan dengan O_n. Graf kosong O_n memiliki polinomial kromatik sebagai berikut

$$P(O_n, \lambda) = \lambda^n \text{ [6].} \quad (2.3.1)$$

Graf lengkap K_n berlawanan dengan graf kosong O_n. Graf O_n tidak memiliki sisi, tetapi setiap simpul graf K_n harus memiliki $\frac{n(n-1)}{2}$ buah sisi. Polinomial kromatik dari graf lengkap K_n yang berorder n adalah sebagai berikut

$$P(K_n, \lambda) = \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1)\text{[6].} \quad (2.3.2)$$

Graf yang tidak memiliki subgraf yang isomorfik dengan sikel disebut dengan pohon. Graf ini dinotasikan dengan T_n, dengan n menunjukkan banyaknya simpul yang dimiliki oleh pohon. Sebarang pohon T_n yang berorder n memiliki polinomial kromatik sebagai berikut:

$$P(T_n, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}\text{[6].} \quad (2.3.3)$$

Lain halnya dengan pohon yang tidak memiliki sikel, graf C_n merupakan sikel dengan order n. Berikut ini adalah polinomial kromatik dari sikel $\mathrm{C_n}$ yang memiliki n buah simpul

$$P(C_n, \lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)\text{[12].} \quad (2.3.4)$$

Sikel $\mathrm{C_{n-1}}$ yang setiap simpulnya bertetangga dengan sebuah simpul lain yang terletak di tengah sikel $\mathrm{C_{n-1}}$ dikenal dengan roda $\mathrm{W_n}$. Polinomial kromatik roda $\mathrm{W_n}$ yang memiliki n buah simpul adalah

$$P(W_n, \lambda) = \lambda(\lambda - 2)^{n-1} + \lambda(-1)^{n-1}(\lambda - 2)\text{[12].} \quad (2.3.5)$$

2.4 Koefisien Polinomial Kromatik

Pada 1980, E.J. Farrell telah berhasil menemukan koefisien suku keempat dan kelima dari polinomial kromatik graf terhubung secara umum.

Diberikan graf terhubung G dengan order n dan ukuran m. Koefisien dari $\lambda^{n}, \lambda^{n-1}$, dan λ^{n-2} secara berturut-turut adalah: $1, -m$, dan $\binom{m}{2} - t_1$, dengan t_1 adalah banyaknya subgraf dari G yang berupa graf segitiga[7]. Sedangkan rumusan untuk mendapatkan koefisien suku keempat polinomial kromatik ada pada teorema 2.4.1 berikut ini.

Teorema 2.4.1.[7] *Koefisien dari λ^{n-3} dalam $P(G,\lambda)$ adalah*

$$-\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3, \qquad (2.4.1)$$

dengan t_1, t_2, dan t_3 berturut-turut menyatakan banyaknya subgraf dari G yang berupa segitiga, quadilateral murni, dan K_4.

Contoh 2.4.2. Diberikan sebuah graf lengkap K_5. Akan dikonstruksi polinomial kromatik graf K_5, yaitu $P(K_5, \lambda)$, menggunakan Persamaan (2.3.2) sedemikian hingga koefisien dari suku keempat $P(K_5, \lambda)$ juga dapat dibentuk diperoleh dengan Teorema 2.4.1.

Bukti. Akan dibuktikan bahwa koefisien suku keempat polinomial kromatik graf K_5 yang dibentuk oleh Persamaan (2.3.2) dapat diperoleh dengan menggunakatn Teorema 2.4.1. berikut ini adalah polinomial kromatik yang diperoleh dengan menggunakan Persamaan (2.3.2).

$$\begin{aligned} P(K_5,\lambda) &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4) \\ &= \lambda^5 - 10\lambda^4 + 35\lambda^3 - 50\lambda^2 + 24\lambda \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan digunakan Teorema 2.4.1 untuk memperoleh koefisien suku keempat polinomial kromatik (K_5, λ). Graf K_5 memiliki order $n = 5$ dan ukuran

$$m = \binom{n}{2} = \binom{5}{2} = 10.$$

Di dalam graf K_5 terdapat subgraf segitiga dan graf lengkap K_4, tapi tidak terdapat subgraf quadilateral murni. Sehingga,

$$t_1 = |C_3| = \binom{5}{3} = 10$$

$$t_2 = 0$$

$$t_3 = |K_4| = \binom{5}{4} = 5$$

Maka koefisien dari λ^5, λ^4, dan λ^3, masing-masing adalah

$$1,$$

$$-m = -10$$

dan

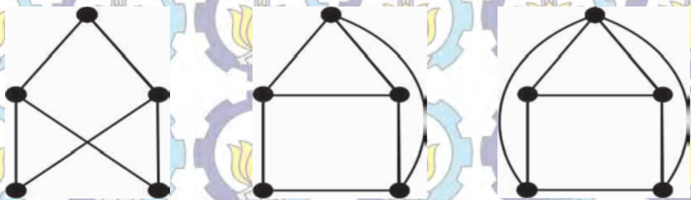
$$\binom{m}{2} - t_1 = \binom{10}{2} - 10 = 35.$$

Maka dengan menggunakan Teorema 2.4.1, koefisien dari λ^2 adalah

$$-\binom{10}{3} + (10-2)10 + 0 - 2(5) = -50.$$

Jadi terbukti bahwa koefisien keempat dari polinomial kromatik $P(K_5, \lambda)$ bernilai -50 baik ketika dicari dengan Persamaan (2.3.2) maupun dengan Teorema 2.4.1.■

Polinomial kromatik $P(K_5, \lambda)$ pada Contoh 2.4.2 memiliki koefisien suku kelima yang bernilai 24. Untuk mencari koefisien suku kelima dari suatu polinomial kromatik graf terhubung sebarang, dapat digunakan Teorema 2.4.3 yang akan dibahas berikut ini. Akan tetapi, sebelum membahas Teorema 2.4.3, perhatikan Gambar 2.4.1 di bawah ini.



a. Graf terhubung order 5 pertama

b. Graf terhubung order 5 kedua

c. Graf terhubung order 5 ketiga

Gambar 2.4.1 Graf Terhubung Order 5

Gambar 2.4.1(a), 2.4.1(b) dan 2.4.1(c) merupakan gambar graf terhubung order 5.

Teorema 2.4.3.[7] *Koefisien dari λ^{n-4} dalam polinomial kromatik $P(G, \lambda)$ dari suatu graf terhubung G adalah sebagai berikut:*

$$\binom{m}{4} - \binom{m-2}{2} t_1 + \binom{t_1}{2} - (m-3)t_2 + (2m-9)t_3 - t_4 - 6t_5 + M + 2P + 3R.$$

dengan t_1, t_2, t_3 dan t_4 berturut-turut menyatakan banyaknya subgraf dari graf terhubung G yang berupa segitiga, quadilateral murni, graf lengkap K_4 dan graf lengkap K_5, sementara $M, P,$ dan R berturut-turut menyatakan banyaknya *subgraf yang isomorf dengan graf pada Gambar 2.4.1(a), 2.4.1(b) dan 2.4.1(c).*

Berdasarkan Contoh 2.4.2, koefisien kelima polinomial kromatik $P(K_5,\lambda)$ bernilai 24. Akan dibuktikan bahwa koefisien kelima polinomial kromatik $P(K_5,\lambda)$ dapat diperoleh dengan Teorema 2.4.3. Untuk suatu graf lengkap K_5, telah diketahui dari Contoh 2.4.2 bahwa graf K_5 memiliki ukuran $m = 10$, subgraf segitiga $t_1 = 10$, subgraf qudadilateral murni $t_2 = 0$ dan subgraf K_4 sebanyak $t_3 = 5$. Graf K_5 tidak memiliki pentagon murni, sehingga $t_4 = 0$. Dan jelas bahwa $t_5 = 1, M = 0, P = 0$ dan $R = 0$. Maka, berdasarkan Teorema 2.4.3, suku kelima dari graf K_5 adalah:

$$\binom{10}{4} - \binom{10-2}{2}10 + \binom{10}{2} + (2\cdot 10 - 9)5 - 6\cdot 1$$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} - \frac{8\cdot 7}{2}10 + \frac{10\cdot 9}{2} + 11\cdot 5 - 6$$

$$= 210 - 280 + 45 + 55 - 6$$

$$= -70 + 94$$

$$= 24$$

Jadi terlihat bahwa koefisien kelima dari $\mathrm{P}(\mathrm{K}_5,\lambda)$ bernilai 24 seperti halnya ketika dicari dengan Persamaan (2.3.2).

BAB III
METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan pada usulan Tugas Akhir ini adalah:

3.1 Studi Literatur

Tahap ini meliputi pengumpulan berbagai referensi mengenai polinomial kromatik, akar kromatik, juga teorema-teorema yang berkaitan dengan jurnal utama yang akan dikaji, yaitu [4].

3.2 Mengaji Teorema dan Teori Dasar yang Digunakan untuk Membuktikan setiap Syarat Cukup

Pada tahap ini, teorema maupun konsep dasar yang digunakan untuk membuktikan setiap syarat cukup akan dikaji satu per satu serta dibahas juga keterkaitannya satu sama lain.

3.3 Membuktikan bahwa Syarat Cukup Terpenuhi

Dari teorema-teorema dan konsep yang telah dijabarkan, dibahas pembuktian dari setiap syarat cukup yang digunakan agar polinomial kromatik dari graf terhubung memiliki akar bernilai kompleks.

3.4 Penarikan Kesimpulan

Dari seluruh analisa dan pembahasan, pada tahap ini didapatkan kesimpulan mengenai syarat cukup akar kromatik suatu graf terhubung supaya bernilai kompleks dan saran untuk kajian maupun penelitian selanjutnya.

BAB IV
PEMBAHASAN

Pada bab ini, dikaji syarat cukup polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ dari suatu graf terhubung G sehingga memiliki akar kompleks. Syarat cukup ini ditinjau dari banyaknya subgraf yang berupa segitiga, quadilateral murni, serta graf lengkap K_4 pada graf terhubung G.

Teorema 4.1 berikut ini merupakan hasil yang diperoleh dengan menerapkan metode Sturm pada polinomial kromatik $P(G,\lambda)$.

Teorema 4.1. *Diberikan graf G dengan order n, ukuran m dan t_1 menunjukkan banyaknya subgraf segitiga. Jika*

$$t_1 < \frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} \tag{4.1}$$

maka polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ memiliki akar kompleks.

Bukti. Untuk membuktikan Teorema 4.1 digunakan metode Sturm yang telah dibahas pada Subbab 2.2. Sebelum menggunakan metode Sturm pada polinomial kromatik $P(G,\lambda)$, perlu diketahui terlebih dahulu bentuk umum polinomial kromatik $P(G,\lambda)$. Dari Subbab 2.4, bentuk umum polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ dengan tiga suku pertama adalah sebagai berikut

$$P(G,\lambda) = \lambda^n - m\,\lambda^{n-1} + \left(\binom{m}{2} - t_1\right)\lambda^{n-2} - \cdots \tag{4.2}$$

Jika graf G bukanlah graf kosong, maka G memiliki bilangan kromatik $\chi(G) \geq 2$. Sehingga $\lambda(\lambda-1)$ membagi $P(G,\lambda)$. Maka diperoleh,

$$\frac{P(G,\lambda)}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{\lambda^n - m\,\lambda^{n-1} + \left(\binom{m}{2} - t_1\right)\lambda^{n-2} - \cdots}{\lambda(\lambda-1)} \tag{4.3}$$

$$= \lambda^{n-2} - (m-1)\lambda^{n-3} + \left(\binom{m-1}{2} - t_1\right)\lambda^{n-4} - \cdots \tag{4.4}$$

Selanjutnya, Persamaan (4.4) dinamakan dengan polinomial $g(\lambda)$ dan jelas bahwa polinomial $g(\lambda)$ merupakan faktor dari polinomial kromatik $P(G,\lambda)$. Di dalam metode Sturm yang dibahas pada Subbab 2.2, Akibat 2.2.3 menyatakan bahwa "terdapat akar dari suatu polinomial monik yang bernilai kompleks jika dan hanya jika terdapat polinomial tak nol dari barisan sturmnya yang memiliki koefisien pemimpin negatif". Sehingga berdasarkan Akibat 2.2.3 tersebut, jika terdapat koefisien pemimpin dari barisan sturm polinomial monik $g(\lambda)$ yang bernilai negatif, maka akan terdapat akar dari $g(\lambda)$ yang bernilai kompleks. Karena polinomial monik $g(\lambda)$ merupakan faktor dari $P(G,\lambda)$, maka $P(G,\lambda)$ akan memiliki akar kromatik kompleks jika terdapat koefisien pemimpin dari barisan sturm polinomial monik $g(\lambda)$ yang bernilai negatif. Oleh karena itu, akan didapatkan koefisien pemimpin dari barisan sturm $g(\lambda)$ yang bernilai negatif. Berikut ini akan dibentuk barisan sturm dari polinomial $g(\lambda)$.

- Karena $g_0(\lambda) = g(\lambda)$, maka

$$g_0(\lambda) = \lambda^{n-2} - (m-1)\lambda^{n-3} + \left(\binom{m-1}{2} - t_1\right)\lambda^{n-4} - \cdots \tag{4.5}$$

- Karena $g_1(\lambda) = g'(\lambda)$, maka

$$g_1(\lambda) = (n-2)\lambda^{n-3} - (m-1)(n-3)\lambda^{n-4} + (n-4)\left(\binom{m-1}{2} - t_1\right)\lambda^{n-5} - \cdots \quad (4.6)$$

- Untuk memperoleh $g_2(\lambda)$, digunakan operasi pembagian pada $g_0(\lambda)$ oleh $g_1(\lambda)$ sedemikian hingga didapat persamaan $g_0(\lambda) = g_1(\lambda)q_1(\lambda) - g_2(\lambda)$ sebagaimana berikut ini:

$$\begin{aligned} g_0(\lambda) = &\Bigg((n-2)\lambda^{n-3} - (m-1)(n-3)\lambda^{n-4} \\ &+ (n-4)\left(\binom{m-1}{2} - t_1\right)\lambda^{n-5} - \cdots \Bigg) \\ &\cdot \left(\frac{1}{n-2}\lambda - \frac{m-1}{n-2} + \frac{(m-1)(n-3)}{(n-2)^2}\right) \\ &- \Bigg(\Bigg(-\frac{2}{n-2}\left(\binom{m-1}{2} - t_1\right) \\ &+ \frac{(m-1)^2(n-3)}{(n-2)^2}\Bigg)\lambda^{n-4} - \cdots \Bigg) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dari Persamaan (4.7), terlihat bahwa

$$\begin{aligned} g_2(\lambda) = &\Bigg(-\frac{2}{n-2}\left(\binom{m-1}{2} - t_1\right) \\ &+ \frac{(m-1)^2(n-3)}{(n-2)^2}\Bigg)\lambda^{n-4} - \cdots \end{aligned} \quad (4.8)$$

Telah dibentuk barisan Sturm dari $g(\lambda)$ yang terdiri dari $(g_0(\lambda), g_1(\lambda), g_2(\lambda))$. Dari Persamaan (4.8), koefisien pemimpin dari g_2 akan bernilai negatif jika

$$-\frac{2}{n-2}\left(\binom{m-1}{2}-t_1\right)+\frac{(m-1)^2(n-3)}{(n-2)^2}<0 \qquad (4.9)$$

Dengan menjabarkan nilai $\binom{m-1}{2}$ pada suku pertama di ruas kiri dari Pertidaksamaan (4.9), didapat:

$$-\frac{2}{n-2}\left(\frac{(m-1)!}{2!\,(m-3)!}-t_1\right)+\frac{(m-1)^2(n-3)}{(n-2)^2}<0 \qquad (4.10)$$

$$-\frac{2}{n-2}\left(\frac{(m-1)(m-2)}{2}-t_1\right)$$
$$+\frac{(m-1)^2(n-3)}{(n-2)^2}<0 \qquad (4.11)$$

Kemudian dengan melakukan perhitungan sederhana pada suku pertama yang ada di ruas kiri dari Pertidaksamaan (4.11), maka:

$$-\frac{(m-1)(m-2)}{n-2}+\frac{2t_1}{n-2}+\frac{(m-1)^2(n-3)}{(n-2)^2}<0 \qquad (4.12)$$

Terdapat tiga suku di ruas kiri dari Pertidaksamaan (4.12). Dengan memindahkan suku pertama dan ketiga ke ruas kanan, diperoleh pertidaksamaan berikut ini:

$$\frac{2t_1}{n-2}<\frac{(m-1)(m-2)}{n-2}-\frac{(m-1)^2(n-3)}{(n-2)^2} \qquad (4.13)$$

Selanjutnya, karena kedua suku di ruas kanan Pertidaksamaan (4.14) memiliki kesamaan faktor $\frac{m-1}{n-2}$, maka pertidaksamaan menjadi:

$$\frac{2}{n-2}t_1 < \frac{m-1}{n-2}\left((m-2) - \frac{(m-1)(n-3)}{n-2}\right) \qquad (4.14)$$

Untuk membuat ruas kiri dari Pertidaksamaan (4.14) hanya memiliki satu suku yang berupa t_1, maka kedua ruas Pertidaksamaan (4.14) dikalikan dengan $\frac{n-2}{2}$, dan diperoleh:

$$t_1 < \frac{m-1}{2}\left((m-2) - \frac{(m-1)(n-3)}{n-2}\right) \qquad (4.15)$$

Kemudian, suku di ruas kanan dari Pertidaksamaan (4.15) disederhanakan menjadi:

$$t_1 < \frac{m-1}{2}\left(\frac{(m-2)(n-2) - (m-1)(n-3)}{n-2}\right) \qquad (4.16)$$

$$t_1 < \frac{m-1}{2(n-2)}\big(m(n-2) - 2(n-2) - m(n-3) - 1(n-3)\big) \qquad (4.17)$$

$$t_1 < \frac{m-1}{2(n-2)}(m(n-2-n+3) - 2n + 4 + n - 3) \qquad (4.18)$$

$$t_1 < \frac{m-1}{2(n-2)}(m-n+1) \qquad (4.19)$$

Akibatnya,

$$t_1 < \frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} \qquad (4.20)$$

Hal ini menunjukkan bahwa koefisien pemimpin dari polinomial monik $g_2(\lambda)$ akan bernilai negatif jika Pertidaksamaan (4.20) terpenuhi. Karena polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ akan memiliki akar kompleks jika terdapat koefisien pemimpin dari barisan Sturm polinomial monik $g(\lambda)$ yang bernilai negatif, maka polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ akan memiliki akar kompleks jika Pertidaksamaan (4.20) dipenuhi. Karena Pertidaksamaan (4.20) sama dengan Pertidaksamaan (4.1), maka terbukti bahwa polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ akan memiliki akar kompleks jika Pertidaksamaan (4.1) terpenuhi. ■

Contoh 4.1. Graf yang memiliki akar kromatik kompleks karena memenuhi syarat cukup yang diberikan oleh Teorema 4.1 adalah graf sikel dengan order 4, yaitu C_4. Graf C_4 memilki ukuran $m = 4$, subgraf segitiga $t_1 = 0$, quadilateral murni $t_2 = 1$, subgraf K_4 berupa $t_3 = 0$ dan bilangan kromatik $\chi(C_4) = 2$. Sehingga diperoleh

$$\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

Karena $t_1 = 0$ dan $\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{3}{4}$, maka Persamaan (4.1) terpenuhi. Jadi syarat cukup pada Teorema 4.1 terpenuhi. Oleh karena itu, polinomial kromatik graf sikel dengan order 4, $P(C_4,\lambda)$, pasti memiliki akar kompleks. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa polinomial kromatik $P(C_4,\lambda)$ bernilai kompleks dengan metode di luar Teorema 4.1. Pertama, digunakan persamaan (2.3.4) untuk mengkonstruksi polinomial kromatik graf C_4.

$$P(C_4,\lambda) = (\lambda-1)^4 + (-1)^4(\lambda-1)$$

$$= \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda$$

Karena $\chi(C_4) = 2$, maka 0 dan 1 merupakan akar dari $P(C_4, \lambda)$. Sehingga,

$$P(C_4, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$$

Polinomial kuadratik $\lambda^2 - 3\lambda + 3$ memiliki diskriminan

$$D = (-3)^2 - 4(1)(3) = -3 < 0$$

Sehingga, akar dari polinomial kuadratik $\lambda^2 - 3\lambda + 3$ pasti bernilai kompleks, yaitu bernilai $\frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$. Jadi, terbukti bahwa polinomial kromatik $P(C_4, \lambda)$ memiliki akar kompleks sebagaimana syarat cukup pada Teorema 4.1 yang terpenuhi.

Contoh graf dengan akar kromatik kompleks yang lain adalah graf garis $L(C_4)$. Polinomial kromatik graf garis $L(C_4)$ sama dengan polinomial kromatik graf C_4 karena graf garis $L(C_4)$ isomorfik dengan graf C_4. Dengan demikian graf garis $L(C_4)$ juga memiliki akar kompleks seperti graf C_4 yang memenuhi Teorema 4.1 sebagaimana yang diuraikan pada Contoh 4.1.

Contoh 4.2. Dengan metode Sturm, akan ditunjukkan bahwa graf garis $L(K_4)$ memiliki akar kromatik kompleks.
Graf garis dari graf lengkap $L(K_4)$ tidak isomorfik dengan graf lengkap K_4 nya. Dengan memperhatikan Gambar 2.1.1(a) dan 2.1.2, dapat dilihat bahwa graf garis $L(K_4)$ dan graf K_4 tidak isomorf. Dengan menggunakan Persamaan (2.3.2), diperoleh polinomial kromatik graf lengkap K_4 berikut ini.

$P(K_4, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

$\qquad = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 11\lambda^2 - 6\lambda$

Terlihat bahwa polinomial kromatik $P(K_4, \lambda)$ tidak memiliki akar kompleks. Berbeda dengan polinomial kromatik graf garis $L(K_4)$ yang memiliki akar kompleks. Polinomial kromatik $P(L(K_4), \lambda)$ dapat diperoleh dengan rumusan yang digunakan untuk mencari tiga koefisien suku pertama polinomial kromatik dan rumusan untuk mencari koefisien suku keempat pada Teorema 2.4.1. Akan tetapi, dengan menggunakan program SageMath berikut ini, dapat diperoleh nilai dari polinomial kromatik $P(L(K_4), \lambda)$ dengan lebih cepat.

```
k4=graphs.CompleteGraph(4)
Lk4=Graph([k4.edges(labels=false),\
Lambda i,j:len(set(i).intersection(set(j)))>0],\ loops=False)
Lk4.chromatic_polynomial()
```

Dari program SageMath di atas, diperoleh:

$$P(L(K_4), \lambda) = \lambda^6 - 12\lambda^5 + 58\lambda^4 - 137\lambda^3 + 154\lambda^2 - 64\lambda$$

Kemudian, digunakan progam SageMath dibawah ini

```
factor(Lk4.chromatic_polynomial())
```

Sehingga diperoleh faktor dari $P(L(K_4), \lambda)$ berikut

$$P(L(K_4), \lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda(\lambda^3 - 9\lambda^2 + 29\lambda - 32)$$

Selanjutnya digunakan metode Sturm untuk mengetahui apakah polinomial $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 29\lambda - 32$ memiliki akar kompleks. Pertama, dibuat barisan sturm polinomial tersebut, yaitu sebagaimana berikut ini.

$$p_0(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 29\lambda - 32$$

$p_1(\lambda) = p'(\lambda) = 3\lambda^2 - 18\lambda + 29$

Karena $p_0(\lambda) = p_1(\lambda)(3\lambda + 15) - (-212\lambda + 467)$, maka diperoleh

$p_2(\lambda) = -212\lambda + 467$

Terlihat bahwa koefisien pemimpin $p_2(\lambda)$ bernilai negatif. Berdasarkan Akibat 2.2.3, polinomial $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 29\lambda - 32$ memiliki akar kompleks. Karena $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 29\lambda - 32$ merupakan faktor dari polinomial kromatik $P(L(K_4), \lambda)$, maka polinomial kromatik $P(L(K_4), \lambda)$ memiliki akar kompleks.

Contoh 4.3. Dengan menerapkan Teorema 4.1, akan ditunjukkan bahwa polinomial kromatik graf K_4 tidak memiliki akar kromatik kompleks, dan polinomial kromatik graf garis $L(K_4)$ memiliki akar kromatik kompleks sebagaimana telah dibuktikan pada Contoh 4.2.

Untuk graf K_4, dari Gambar 2.1.1(a) diketahui bahwa K_4 memiliki order $n = 4$, ukuran $m = 6$, bilangan kromatik $\chi(K_4) = 4$ dan subgraf segitiga sebanyak $t_1 = 4$. Sehingga diperoleh

$$\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Terlihat bahwa K_4 tidak memenuhi syarat cukup Teorema 4.1. Maka, K_4 tidak memiliki akar kromatik kompleks.

Sedangkan untuk graf garis $L(K_4)$, dari Gambar 2.1.2 diketahui bahwa graf garis $L(K_4)$ memiliki ordr $n = 6$, ukuran $m = 12$, bilangan kromatik $\chi\big(L(K_4)\big) = 3$ dan subgraf segitiga sebanyak $t_1 = 8$. Sehingga diperoleh

$$\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{77}{8} = 9\frac{3}{8}.$$

Terlihat bahwa $L(K_4)$ memenuhi syarat cukup Teorema 4.1, maka $L(K_4)$ memiliki akar kromatik kompleks.

Syarat cukup akar kromatik dari suatu graf terhubung G bernilai kompleks pada Teorema 4.1 hanya terbatas pada banyaknya subgraf segitiga t_1 dari graf G. Selanjutnya, di dalam Teorema 4.3 akan dibahas syarat cukup yang berhubungan dengan banyaknya subgraf segitiga, quadilateral murni, dan graf lengkap K_4. Akan tetapi, terlebih dahulu perlu dipahami maksud dari Preposisi 4.2 berikut ini untuk membuktikan Teorema 4.3.

Misalkan G adalah suatu graf terhubung dengan order $n > \chi + 1$, dengan χ menyatakan bilangan kromatik dari graf G, maka untuk suatu bilangan bulat k, dengan $1 \leq k \leq \chi$, polinomial kromatik dari graf terhubung G dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots\big(\lambda-(k-1)\big)S_{n-k}(G,\lambda), \tag{4.21}$$

dimana deret $S_{n-k}(G,\lambda)$ didefinisikan sebagai berikut

$$S_{n-k}(G,\lambda) = \lambda^{n-k} + s_{1,k}\lambda^{n-k-1} + s_{2,k}\lambda^{n-k-2} + s_{3,k}\lambda^{n-k-3} + \cdots \tag{4.22}$$

Preposisi 4.2. *Diberikan suatu graf G dengan bilangan kromatik χ yang berorder $n > \chi + 1$ dan berukuran m. Maka untuk suatu bilangan bulat k, dimana $1 \leq k \leq \chi$, koefisien dari $S_{n-k}(G,\lambda)$ adalah sebagai berikut:*

$$s_{1,k} = \binom{k}{2} - m, \tag{4.23}$$

$$s_{2,k} = \binom{m}{2} - t_1 - \binom{k}{2}m + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{j+1}{2}j, \tag{4.24}$$

$$s_{3,k} = -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 + \binom{k}{2}\left(\binom{m}{2} - t_1\right) - m\sum_{j=1}^{k-1} j\left(j + \binom{j}{2}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} j\left(j^2 + \binom{j}{2}j + \sum_{i=1}^{-1}\binom{i+1}{2}i\right). \tag{4.25}$$

Bukti. Untuk membuktikan Preposisi 4.2, perlu diketahui nilai dari polinomial kromatik pada persamaan (4.21) yang berbeda sesuai dengan nilai k yang diberikan. Berikut ini polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ menurut Persamaan (4.21)

- Untuk $k = 1$

$$P(G,\lambda) = \lambda \cdot S_{n-1}(G,\lambda) \tag{4.26}$$

$$= \lambda\left(\lambda^{n-1} + s_{1,1}\lambda^{n-2} + s_{2,1}\lambda^{n-3} + s_{3,1}\lambda^{n-4} + \cdots\right) \tag{4.27}$$

$$= \lambda^n + s_{1,1}\lambda^{n-1} + s_{2,1}\lambda^{n-2} + s_{3,1}\lambda^{n-3} + \cdots \tag{4.28}$$

- Untuk k = 2,

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)S_{n-2}(G,\lambda) \tag{4.29}$$

$$= \lambda^n + \left(s_{1,2} - 1\right)\lambda^{n-1} + \left(s_{2,2} - s_{1,2}\right)\lambda^{n-2} + \left(s_{3,2} - s_{2,2}\right)\lambda^{n-3} + \cdots \tag{4.30}$$

- Untuk k = 3,

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)S_{n-3}(G,\lambda) \tag{4.31}$$

$$= \lambda^n + (s_{1,3} - 3)\lambda^{n-1} + (s_{2,3} - 3s_{1,3} + 2)\lambda^{n-2} + (s_{3,3} - 3s_{2,3} + 2s_{1,3})\lambda^{n-3} + \cdots \quad (4.32)$$

- Untuk k = 4,

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)S_{n-4}(G,\lambda) \quad (4.33)$$

$$= \lambda^n + (s_{1,4} - 6)\lambda^{n-1} + (s_{2,4} - 6s_{1,4} + 11)\lambda^{n-2} + (s_{3,4} - 6s_{2,4} + 11s_{1,4} - 6)\lambda^{n-3} + \cdots \quad (4.34)$$

- Untuk k = 5,

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-4)S_{n-5}(G,\lambda) \quad (4.35)$$

$$= \lambda^n + (s_{1,5} - 10)\lambda^{n-1} + (s_{2,5} - 10s_{1,5} + 35)\lambda^{n-2} + (s_{3,5} - 10s_{2,5} + 35s_{1,5} - 50)\lambda^{n-3} + \cdots \quad (4.36)$$

- Untuk k = 6,

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-5)S_{n-6}(G,\lambda) \quad (4.37)$$

$$= \lambda^n + (s_{1,6} - 15)\lambda^{n-1} + (s_{2,6} - 15s_{1,6} + 85)\lambda^{n-2} + (s_{3,6} - 15s_{2,6} + 85s_{1,6} - 225)\lambda^{n-3} + \cdots \quad (4.38)$$

- Untuk k = 7,

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-6)S_{n-7}(G,\lambda) \quad (4.39)$$

$$= \lambda^n + (s_{1,7} - 21)\lambda^{n-1} + (s_{2,7} - 21s_{1,7} + 175)\lambda^{n-2} + (s_{3,7} - 21s_{2,7} + 175s_{1,7} - 735)\lambda^{n-3} + \cdots \quad (4.40)$$

- Untuk k = 8,

$$P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-7)S_{n-8}(G,\lambda) \quad (4.41)$$

$$= \lambda^n + (s_{1,8} - 28)\lambda^{n-1} + (s_{2,8} - 28s_{1,8} + 322)\lambda^{n-2} + (s_{3,8} - 28s_{2,8} + 322s_{1,8} - 1960)\lambda^{n-3} + \cdots \quad (4.42)$$

- dan seterusnya.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $s_{1,k}$ memenuhi persamaan (4.23). Dari rumus empat koefisien pertama polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ pada Subbab 2.4 dan polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ pada (4.28), (4.30), dan seterusnya hingga (4.42), diperoleh

- $s_{1,1} = -m$
- $s_{1,2} - 1 = -m$, sehingga
  $s_{1,2} = -m + 1 = -m + \binom{2}{2}$
- $s_{1,3} - 3 = -m$, sehingga
  $s_{1,3} = -m + 3 = -m + \binom{3}{2}$
- $s_{1,4} - 6 = -m$, sehingga
  $s_{1,4} = -m + 6 = -m + \binom{4}{2}$
- $s_{1,5} - 10 = -m$, sehingga
  $s_{1,5} = -m + 10 = -m + \binom{5}{2}$
- $s_{1,6} - 15 = -m$, sehingga
  $s_{1,6} = -m + 15 = -m + \binom{6}{2}$
- $s_{1,7} - 21 = -m$, sehingga
  $s_{1,7} = -m + 21 = -m + \binom{7}{2}$
- $s_{1,8} - 28 = -m$, sehingga
  $s_{1,8} = -m + 28 = -m + \binom{8}{2}$
- dan seterusnya.

Terlihat bahwa $s_{1,k} = -m + \binom{k}{2}$. Jadi, terbukti bahwa $s_{1,k}$ memenuhi Persamaan (4.23).

Selanjutnya, akan dibutikan bahwa $s_{2,k}$ memenuhi Persamaan (4.24). Dari rumus empat koefisien pertama polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ pada Subbab 2.4 dan polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ pada (4.28), (4.30), dan seterusnya hingga (4.42), diperoleh

- $s_{2,1} = \binom{m}{2} - t_1$
- $s_{2,2} - s_{1,2} = \binom{m}{2} - t_1$, sehingga
  $$\begin{aligned} s_{2,2} &= \binom{m}{2} - t_1 + (-m+1) \\ &= \binom{m}{2} - t_1 - m + 1 \\ &= \binom{m}{2} - t_1 - \binom{2}{2}m + \binom{2}{2}\cdot 1 \end{aligned}$$
- $s_{2,3} - 3s_{1,3} + 2 = \binom{m}{2} - t_1$, sehingga
  $$\begin{aligned} s_{2,3} &= \binom{m}{2} - t_1 + 3(-m+3) - 2 \\ &= \binom{m}{2} - t_1 - 3m + 7 \\ &= \binom{m}{2} - t_1 - 3m + (1+6) \\ &= \binom{m}{2} - t_1 - \binom{3}{2}m + \left(\binom{2}{2}\cdot 1 + \binom{3}{2}\cdot 2\right) \end{aligned}$$
- $s_{2,4} - 6s_{1,4} + 11 = \binom{m}{2} - t_1$, sehingga
  $$\begin{aligned} s_{2,4} &= \binom{m}{2} - t_1 + 6(-m+3) - 11 \\ &= \binom{m}{2} - t_1 - 6m + 25 \\ &= \binom{m}{2} - t_1 - 6m + (1+6+18) \\ &= \binom{m}{2} - t_1 - \binom{4}{2}m + \left(\binom{2}{2}\cdot 1 + \binom{3}{2}\cdot 2 + \binom{4}{2}\cdot 3\right) \end{aligned}$$
- $s_{2,5} - 10s_{1,5} + 35 = \binom{m}{2} - t_1$, sehingga

$$
\begin{aligned}
s_{2,5} &= \binom{m}{2} - t_1 + 10(-m + 10) - 35 \\
&= \binom{m}{2} - t_1 - 10m + 65 \\
&= \binom{m}{2} - t_1 - 10m + (1 + 6 + 18 + 40) \\
&= \binom{m}{2} - t_1 - \binom{5}{2} m \\
&\qquad + \left(\binom{2}{2} \cdot 1 + \binom{3}{2} \cdot 2 + \binom{4}{2} \cdot 3 + \binom{5}{2} \cdot 4\right)
\end{aligned}
$$

- dan seterusnya

Terlihat bahwa $s_{2,k} = \binom{m}{2} - t_1 - \binom{k}{2} m + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{j+1}{2} j$. Jadi, terbukti bahwa $s_{2,k}$ memenuhi Persamaan (4.24).

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $s_{3,k}$ memenuhi Persamaan (4.25). Dari rumus empat koefisien pertama polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ pada Subbab 2.4 dan polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ pada (4.28), (4.30), dan seterusnya hingga (4.42), diperoleh

- $s_{3,1} = -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3$
- $s_{3,2} - s_{2,2} = -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3$, sehingga
$$
\begin{aligned}
s_{3,2} &= -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 \\
&\qquad + \left(\binom{m}{2} - t_1 - m + 1\right)
\end{aligned}
$$
- $s_{3,3} - 3s_{2,3} + 2s_{1,3} = -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3$
$$
\begin{aligned}
s_{3,3} &= -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 \\
&\qquad + 3\left(\binom{m}{2} - t_1 - 3m + 7\right) - 2(-m+3) \\
&= -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 + 3\left(\binom{m}{2} - t_1\right) - 7m \\
&\qquad + 15
\end{aligned}
$$

$$= -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 + 3\left(\binom{m}{2} - t_1\right)$$
$$- (1+6)m + (1+14)$$
$$= -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 + \binom{3}{2}\left(\binom{m}{2} - t_1\right)$$
$$- \left(1\left(1 + \binom{0}{2}\right) + 2\left(2 + \binom{2}{2}\right)\right)m$$
$$+ \left(1\right.$$
$$\left. + 2\left(2^2 + \binom{2}{2}2 + \left(\binom{1+1}{2}1\right)\right)\right)$$

- $s_{3,4} - 6s_{2,4} + 11s_{1,4} - 6 = -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3$

$$s_{3,4} = -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3$$
$$+ 6\left(\binom{m}{2} - t_1 - 6m + 25\right) - 11(-m+6)$$
$$+ 6$$
$$= -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 + 6\left(\binom{m}{2} - t_1\right)$$
$$- 25m + 90$$
$$= -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 + 6\left(\binom{m}{2} - t_1\right)$$
$$- (1 + 6 + 18)m + (1 + 14 + 75)$$

$$= -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 + \binom{4}{2}\left(\binom{m}{2} - t_1\right)$$

$$- \left(1\left(1 + \binom{0}{2}\right) + 2\left(2 + \binom{2}{2}\right)\right.$$

$$\left. + 3\left(3 + \binom{3}{2}\right)\right)m$$

$$+ \left(1 + 2\left(2^2 + \binom{2}{2}2 + \left(\binom{1+1}{2}1\right)\right)\right.$$

$$+ 3\left(3^2 + \binom{3}{2}3\right.$$

$$\left.\left. + \left(\binom{1+1}{2}1 + \binom{2+1}{2}2\right)\right)\right)$$

- $s_{3,5} - 10s_{2,5} + 35s_{1,5} - 50 = -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3$

$$s_{3,5} = -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3$$

$$+ 10\left(\binom{m}{2} - t_1 - 10m + 65\right)$$

$$- 35(-m + 10) + 50$$

$$= -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 + 10\left(\binom{m}{2} - t_1\right) - 65m + 350$$

$$= -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 + 10\left(\binom{m}{2} - t_1\right)$$

$$- (1 + 6 + 18 + 40)m + (1 + 14$$

$$+ 75 + 260)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 + \binom{5}{2}\left(\binom{m}{2} - t_1\right) \\
&\quad - \left(1\left(1+\binom{0}{2}\right) + 2\left(2+\binom{2}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. + 3\left(3+\binom{3}{2}\right) + 4\left(4+\binom{4}{2}\right)\right)m \\
&\quad + \left(1 + 2\left(2^2 + \binom{2}{2}2 + \left(\binom{1+1}{2}1\right)\right)\right. \\
&\quad + 3\left(3^2 + \binom{3}{2}3\right. \\
&\quad \left. + \left(\binom{1+1}{2}1 + \binom{2+1}{2}2\right)\right) \\
&\quad + 4\left(4^2 + \binom{4}{2}4\right. \\
&\quad + \left(\binom{1+1}{2}1 + \binom{2+1}{2}2\right. \\
&\quad \left.\left.\left. + \binom{3+1}{2}3\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

- dan seterusnya

Terlihat bahwa, secara umum

$$
\begin{aligned}
s_{3,k} &= -\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + t_2 - 2t_3 + \binom{k}{2}\left(\binom{m}{2} - t_1\right) \\
&\quad - m\sum_{j=1}^{k-1} j\left(j + \binom{j}{2}\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1} j\left(j^2 + \binom{j}{2}j + \sum_{i=1}^{-1}\binom{i+1}{2}i\right)
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $s_{3,k}$ memenuhi Persamaan (4.24).■

Syarat cukup yang berhubungan dengan banyaknya subgraf segitiga, quadilateral murni, dan graf lengkap K_4 akan diuraikan pada Teorema 4.3. Teorema 4.2 yang telah dibuktikan ini akan digunakan untuk membuktikan Teorema 4.3 berikut ini.

Teorema 4.3. *Diberikan suatu graf G dengan ukuran m, bilangan kromatik χ serta order $n > \chi + 1$. Jika $t_1 < t^*$ atau $(2t_3 - t_2) > g^*$, dengan t_1, t_2 serta t_3 berturut-turut merupakan subgraf segitiga, quadilateral murni serta graf lengkap K_4, dan*

$$t^* = \frac{m\left(m - n - 2\binom{\chi}{2} + \chi\right) - (n - \chi - 1)\binom{\chi}{2}^2}{2(n-\chi)} + \sum_{j=1}^{\chi-1}\binom{j+1}{2}j$$

$$g^* = \frac{2(n-\chi-2)}{3\left(m - \binom{\chi}{2}\right)(n-\chi-1)}\left(\binom{m}{2} - t_1 - \binom{\chi}{2}m + \sum_{j=1}^{\chi-1}\binom{j+1}{2}j\right)^2 - \binom{m}{3} + (m-2)t_1 + \binom{\chi}{2}\left(\binom{m}{2} - t_1\right) - m\sum_{j=1}^{\chi-1} j\left(j + \binom{j}{2}\right) + \sum_{j=1}^{\chi-1} j\left(j^2 + \binom{j}{2}j + \sum_{i=1}^{j-1}\binom{i+1}{2}i\right).$$

maka polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ mempunyai akar kompleks.

Bukti. Diberikan sebuah polinomial dengan koefisien bernilai real yang berupa deret $S_{n-\chi}(G,\lambda)$ sebagai berikut

$$S_{n-\chi}(G,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} s_{k,\chi}\lambda^{n-\chi-k}$$
$$= \lambda^{n-\chi} + s_{1,\chi}\lambda^{n-\chi-1} + s_{2,\chi}\lambda^{n-\chi-2} + s_{3,\chi}\lambda^{n-\chi-3} + \cdots$$

Dari Teorema 2.2.4, syarat perlu bagi seluruh akar polinomial di atas agar bernilai real adalah

$$\frac{k}{n-\chi-k+1}\cdot\frac{n-\chi-k}{k+1}s_{k,\chi}^2 - s_{k-1,\chi}s_{k+1,\chi} \geq 0$$

untuk $k = 1, 2, 3, \cdots, n-1$.

Berikut ini akan didapatkan barisan Newton untuk nilai $k = 1, 2, 3, \cdots, n-1$.

- untuk $k = 1$, maka
  $$\frac{1}{n-\chi}\cdot\frac{n-\chi-1}{2}s_{1,\chi}^2 - s_{0,\chi}s_{2,\chi}$$
  sehingga diperoleh suku pertama dari barisan newton sebagai berikut
  $$\frac{n-\chi-1}{2(n-\chi)}\left(\binom{\chi}{2} - m\right)^2 - s_{2,\chi}$$
- untuk $k = 2$, maka
  $$\frac{2}{n-\chi-1}\cdot\frac{n-\chi-2}{3}s_{2,\chi}^2 - s_{1,\chi}s_{3,\chi}$$
  sehingga suku kedua dari barisan newton ini adalah sebagai berikut
  $$\frac{2(n-\chi-2)}{3(n-\chi-1)}s_{2,\chi}^2 - s_{1,\chi}s_{3,\chi}$$
- dan seterusnya sampai suku ke $n-1$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa akar Polinomal Kromatik suatu graf terhubung akan bernilai kompleks jika $t_1 < t^*$ atau $(2t_3 - t_2) > g^*$ dengan menggunakan dua suku pertama dari barisan Newton di atas.

- Akan dibuktikan bahwa akar kromatik suatu graf terhubung bernilai kompleks jika $t_1 < t^*$ dengan menggunakan suku pertama barisan Newton di atas.

  Berdasarkan Teorema 2.2.4, jika terdapat suku barisan Newton dari polinomial yang bernilai negatif, maka akar polinomialnya bernilai kompleks. Oleh karena itu, polinomial kromatik suatu graf terhubung akan bernilai kompleks jika suku pertama barisan newton di atas bernilai negatif sebagaimana berikut ini.

$$\frac{n-\chi-1}{2(n-\chi)}\left(\binom{\chi}{2}-m\right)^2 - s_{2,\chi} < 0$$

  Dengan memasukkan nilai $s_{2,\chi}$ sesuai Preposisi 4.2, maka diperoleh:

$$\frac{n-\chi-1}{2(n-\chi)}\left(\binom{\chi}{2}-m\right)^2 - \binom{m}{2} + t_1 + \binom{\chi}{2}m - \sum_{j=1}^{k-1}\binom{j+1}{2}j < 0$$

  Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $t_1 < t^*$ dengan menerapkan metode aljabar pada persamaan di atas. Pertama, pindahkan seluruh suku di ruas kiri selain t_1 ke ruas kanan.

$$t_1 < -\frac{n-\chi-1}{2(n-\chi)}\left(\binom{\chi}{2}-m\right)^2 + \binom{m}{2} - \binom{\chi}{2}m + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{j+1}{2}j$$

  Setelah itu, samakan penyebut keempat suku yang ada di ruas kanan dari pertidaksamaan di atas. Selain itu, jabarkan hasil perhitungan $\left(\binom{\chi}{2}-\mathrm{m}\right)^2$ yang ada pada suku pertama dan hasil dari $\binom{\mathrm{m}}{2}$ pada pembilang suku kedua.

$$t_1 < -\frac{(n-\chi-1)\left(\binom{\chi}{2}^2 - 2m\binom{\chi}{2} + m^2\right)}{2(n-\chi)} + \frac{2(n-\chi)\left(\frac{m(m-1)}{2}\right)}{2(n-\chi)} - \frac{2(n-\chi)\binom{\chi}{2}m}{2(n-\chi)} + \frac{2(n-\chi)\sum_{j=1}^{k-1}\binom{j+1}{2}j}{2(n-\chi)}$$

Kemudian, dengan menjabarkan lagi suku pertama dan kedua dari ruas kanan pada pertidaksamaan di atas, diperoleh:

$$t_1 < -\frac{(n-\chi-1)\binom{\chi}{2}^2}{2(n-\chi)} + \frac{2m(n-\chi-1)\binom{\chi}{2}}{2(n-\chi)} - \frac{m^2(n-\chi-1)}{2(n-\chi)} + \frac{m(n-\chi)(m-1)}{2(n-\chi)} - \frac{2m(n-\chi)\binom{\chi}{2}}{2(n-\chi)} + \frac{2(n-\chi)\sum_{j=1}^{k-1}\binom{j+1}{2}j}{2(n-\chi)}$$

Pada pertidaksamaan di atas, terdapat enam suku di ruas kanan. Dengan menjabarkan suku kedua, ketiga, dan keempat, akan didapat pertidaksamaan berikut:

$$t_1 < -\frac{(n-\chi-1)\binom{\chi}{2}^2}{2(n-\chi)} + \frac{2m(n-\chi)\binom{\chi}{2} - 2m\binom{\chi}{2}}{2(n-\chi)} - \frac{m^2(n-\chi) - m^2}{2(n-\chi)} + \frac{m^2(n-\chi) - m(n-\chi)}{2(n-\chi)} - \frac{2m(n-\chi)\binom{\chi}{2}}{2(n-\chi)} + \frac{2(n-\chi)\sum_{j=1}^{k-1}\binom{j+1}{2}j}{2(n-\chi)}$$

Dari pertidaksamaan di atas, jumlahkan suku kedua dengan suku kelima yang ada di ruas kanan, kemudian jumlahkan juga suku ketiga dengan suku keempat.

$$t_1 < -\frac{(n-\chi-1)\binom{\chi}{2}^2}{2(n-\chi)} - \frac{2m\binom{\chi}{2}}{2(n-\chi)} + \frac{m^2}{2(n-\chi)} - \frac{m(n-\chi)}{2(n-\chi)} + \frac{2(n-\chi)\sum_{j=1}^{k-1}\binom{j+1}{2}j}{2(n-\chi)}$$

Selanjutnya, dari pertidaksamaan di atas, terdapat lima suku di ruas kanan. Jumlahkan suku kedua, ketiga, dan keempat sehingga diperoleh pertidaksamaan berikut ini.

$$t_1 < -\frac{(n-\chi-1)\binom{\chi}{2}^2}{2(n-\chi)} + \frac{m^2 - m(n-\chi) - 2m\binom{\chi}{2}}{2(n-\chi)} + \frac{2(n-\chi)\sum_{j=1}^{k-1}\binom{j+1}{2}j}{2(n-\chi)}$$

Dengan menyederhanakan suku kedua dari ruas kanan, diperoleh:

$$t_1 < -\frac{(n-\chi-1)\binom{\chi}{2}^2}{2(n-\chi)} + \frac{m(m-n-2\binom{\chi}{2}+\chi)}{2(n-\chi)} + \frac{2(n-\chi)\sum_{j=1}^{k-1}\binom{j+1}{2}j}{2(n-\chi)}$$

Maka, dengan mengubah urutan suku pertama menjadi kedua, diperoleh ruas kanan yang bersesuaian dengan nilai t^*

$$t_1 < \frac{m(m-n-2\binom{\chi}{2}+\chi)}{2(n-\chi)} - \frac{(n-\chi-1)\binom{\chi}{2}^2}{2(n-\chi)} + \frac{2(n-\chi)\sum_{j=1}^{k-1}\binom{j+1}{2}j}{2(n-\chi)}$$

Kemudian, ruas kanan disederhanakan menjadi

$$t_1 < \frac{m\left(m-n-2\binom{\chi}{2}+\chi\right) - (n-\chi-1)\binom{\chi}{2}^2}{2(n-\chi)} + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{j+1}{2}j$$

Terlihat bahwa $t_1 < t^*$. Sehingga terbukti bahwa polinomial kromatik suatu graf terhubung akan bernilai kompleks jika $t_1 < t^*$.

- Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa akar kromatik suatu graf terhubung bernilai kompleks jika $(2t_3 - t_2) > g^*$ dengan menggunakan suku kedua barisan Newton di atas.

Berdasarkan Teorema 2.2.4, polinomial kromatik suatu graf terhubung akan bernilai kompleks jika suku kedua barisan Newton di atas bernilai negatif sebagaimana berikut ini.

$$\frac{2(n-\chi-2)}{3(n-\chi-1)} s_{2,\chi}^2 - s_{1,\chi} s_{3,\chi} < 0$$

Karena $S_{n-\chi}$ merupakan deret polinomial yang menjadi bagian dari polinomial kromatik $P(G,\lambda)$, maka seperti halnya polinomial pada (4.2), $S_{n-\chi}$ merupakan suatu deret alternating. Deret alternating merupakan deret berganti tanda, sehingga $s_{1,\chi} < 0$. Oleh karena itu, jika pertidaksamaan di atas dibagi dengan $-s_{1,\chi}$, maka pertidaksamaan di atas tidak akan berubah tanda. Maka diperoleh:

$$\frac{2(n-\chi-2)}{3(-s_{1,\chi})(n-\chi-1)} s_{2,\chi}^2 + s_{3,\chi} < 0$$

akibatnya,

$$s_{3,\chi} < -\frac{2(n-\chi-2)}{3(-s_{1,\chi})(n-\chi-1)} s_{2,\chi}^2$$

Dengan memasukkan nilai dari $s_{3,\chi}$ sesuai Preposisi 4.2, pertidaksamaan akan menjadi sebagai berikut:

$$\left(-\binom{m}{3}+(m-2)t_1+t_2-2t_3+\binom{\chi}{2}\left(\binom{m}{2}-t_1\right)\right.$$
$$-m\sum_{j=1}^{\chi-1} j\left(j+\binom{j}{2}\right)$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{\chi-1} j\left(j^2+\binom{j}{2}j+\sum_{i=1}^{-1}\binom{i+1}{2}i\right)\right)$$
$$<-\frac{2(n-\chi-2)}{3(-s_{1,\chi})(n-\chi-1)}s_{2,\chi}^2$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $(2t_3-t_2)>g^*$ dengan menerapkan metode aljabar pada persamaan di atas. Dengan memindahkan seluruh suku di ruas kiri selain t_2-2t_3, diperoleh pertidaksamaan di bawah ini.

$$t_2-2t_3<-\frac{2(n-\chi-2)}{3(-s_{1,\chi})(n-\chi-1)}s_{2,\chi}^2$$
$$-\left(-\binom{m}{3}+(m-2)t_1+\binom{\chi}{2}\left(\binom{m}{2}-t_1\right)\right.$$
$$-m\sum_{j=1}^{\chi-1} j\left(j+\binom{j}{2}\right)$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{\chi-1} j\left(j^2+\binom{j}{2}j+\sum_{i=1}^{-1}\binom{i+1}{2}i\right)\right)$$

Setelah itu, dengan mengalikan pertidaksamaan dengan -1, didapat pertidaksamaan sebagai berikut

$$2t_3 - t_2 > \frac{2(n-\chi-2)}{3(-s_{1,\chi})(n-\chi-1)} s_{2,\chi}^2 + \left(-\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + \binom{\chi}{2}\left(\binom{m}{2} - t_1\right) - m\sum_{j=1}^{\chi-1} j\left(j + \binom{j}{2}\right) + \sum_{j=1}^{\chi-1} j\left(j^2 + \binom{j}{2}j + \sum_{i=1}^{-1}\binom{i+1}{2}i\right)\right)$$

Pada akhirnya, dengan memasukkan nilai dari $s_{2,\chi}$ sesuai Preposisi 4.2, maka diperoleh pertidaksamaan yang ruas kanannya bersesuaian dengan nilai g^*.

$$2t_3 - t_2 > \frac{2(n-\chi-2)}{3(-s_{1,\chi})(n-\chi-1)}\left(\binom{m}{2} - t_1 - \binom{\chi}{2}m + \sum_{j=1}^{k-1}\binom{j+1}{2}j\right)^2 + \left(-\binom{m}{3} + (m-2)t_1 + \binom{\chi}{2}\left(\binom{m}{2} - t_1\right) - m\sum_{j=1}^{\chi-1} j\left(j + \binom{j}{2}\right) + \sum_{j=1}^{\chi-1} j\left(j^2 + \binom{j}{2}j + \sum_{i=1}^{-1}\binom{i+1}{2}i\right)\right)$$

Karena ruas kanan pada pertidaksamaan di atas bersesuaian dengan nilai g^*, maka dapat disimpulkan bahwa $2t_3 - t_2 > g^*$.■

Dengan demikian, didapatkan syarat cukup dari Teorema yang berkaitan dengan banyaknya subgraf segitiga, quadilateral murni, dan graf lengkap K_4 pada suatu graf terhubung G.

Untuk mempermudah dalam mencari nilai dari t^* dan g^*, dalam Tabel 4.1 di bawah ini adalah penyederhanaan dari t^* dan g^* untuk $\chi = 2$ hingga $\chi = 5$.

Tabel 4.1 Tabel t^* dan g^* untuk $\chi = 2$ sampai dengan $\chi = 5$

$\chi = 2$	$t^* = \frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)}$ $g^* = \frac{2}{3}\frac{n-4}{(m-1)(n-3)}\left(\binom{m}{2} - t_1 - m + 1\right)^2 - \binom{m}{2}\frac{m-5}{3} + (m-3)t_1 - m + 1$
$\chi = 3$	$t^* = \frac{m(m-n-3)+5n-6}{2(n-3)}$ $g^* = \frac{2}{3}\frac{n-5}{(m-3)(n-4)}\left(\binom{m}{2} - t_1 - 3m + 7\right)^2 - \binom{m}{2}\frac{m-11}{3} + (m-5)t_1 - 7m + 15$
$\chi = 4$	$t^* = \frac{m(m-n-8)+14n-20}{2(n-4)}$ $g^* = \frac{2}{3}\frac{n-6}{(m-6)(n-5)}\left(\binom{m}{2} - t_1 - 6m + 25\right)^2 - \binom{m}{2}\frac{m-20}{3} + (m-8)t_1 - 25m + 90$
$\chi = 5$	$t^* = \frac{m(m-n-15)+30n-50}{2(n-5)}$ $g^* = \frac{2}{3}\frac{n-7}{(m-10)(n-6)}\left(\binom{m}{2} - t_1 - 10m + 65\right)^2 - \binom{m}{2}\frac{m-32}{3} + (m-12)t_1 - 65m + 350$

Pada pembahasan sebelumnya telah dibuktikan bahwa graf garis $L(K_4)$ memenuhi syarat cukup pada Teorema 4.1 untuk memiliki akar kromatik kompleks. Graf garis $L(W_4)$ isomorf dengan graf garis $L(K_4)$. Sehingga, graf garis $L(W_4)$ pasti memiliki akar kromatik kompleks yang nilainya sama dengan graf garis $L(K_4)$. Oleh karena itu, pada Contoh 4.4 berikut ini, akan dibuktikan bahwa graf garis $L(W_4)$ memenuhi syarat cukup untuk memiliki akar kromatik kompleks sebagaimana diuraikan pada Preposisi 4.3.

Contoh 4.4. Graf garis $L(W_4)$ memiliki order $n = 6$, ukuran $m = 12$, bilangan kromatik $\chi = 3$, subgraf segitiga $t_1 = 8$, subgraf quadilateral murni $t_2 = 2$, dan $t_3 = 0$. Karena $\chi = 3$, maka diperoleh

$$t^* = \frac{m(m-n-3)+5n-6}{2(n-3)}$$
$$= \frac{12(3)+30-6}{2(3)}$$
$$= \frac{60}{6} = 10$$

Terlihat bahwa $t_1 < t^*$. Sehingga, sebagaimana Preposisi 4.3, syarat cukup graf garis $L(W_4)$ memiliki akar kromatik kompleks terpenuhi.

Dengan menggunakan deret (4.22) yang telah diubah menjadi deret $S_{n-\chi}$, Preposisi 4.2 dan Teorema 2.2.5, didapatkan Preposisi 4.4 berikut ini.

Preposisi 4.4. *Untuk suatu graf G dengan bilangan kromatik χ, order $n > \chi + 1$, dan ukuran m, diberikan*

$$B_\chi = \frac{m - \binom{\chi}{2}}{n - \chi}$$

dan

$$D_\chi = (n - \chi - 1)^2 \left(\binom{\chi}{2} - m\right)^2 - 2(n - \chi - 1)(n - \chi) s_{2,\chi}$$

dengan

$$s_{2,\chi} = \binom{m}{2} - t_1 - \binom{\chi}{2} m + \sum_{j=1}^{\chi-1} \binom{j+1}{2} j,$$

Jika $D_\chi \geq 0$ maka polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ memiliki sebuah akar r dengan

$$\mathrm{re}(r) \geq B_\chi + \frac{\sqrt{D_\chi}}{(n-\chi)(n-\chi-1)}$$

dan jika $D_\chi < 0$, maka polinomial $P(G,\lambda)$ memiliki akar r_1 dan r_2 sedemikian hingga

$$\mathrm{re}(r_1) \geq B_\chi$$

dan

$$\mathrm{im}(r_2) \geq \frac{\sqrt{-D_\chi}}{(n-\chi)(n-\chi-1)}$$

Bukti. Diberikan deret polinomial $S_{n-\chi}(G,\lambda)$ berikut ini:

$$S_{n-\chi}(G,\lambda) = \lambda^{n-\chi} + s_{1,\chi}\lambda^{n-\chi-1} + s_{2,\chi}\lambda^{n-\chi-2} + \cdots$$

Untuk mendapatkan turunan ke-k dari x^n, digunakan rumus

$$(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Berikut ini akan dicari turunan ke-$(n-\chi-2)$ dari $S_{n-\chi}(G,\lambda)$

$$S_{n-\chi}^{(n-\chi-2)}(G,\lambda) = \frac{(n-\chi)!}{\big((n-\chi)-(n-\chi-2)\big)!} \lambda^{n-\chi-(n-\chi-2)}$$

$$+\frac{(n-\chi-1)!}{\left((n-\chi-1)-(n-\chi-2)\right)!}s_{1,\chi}\lambda^{n-\chi-1-(n-\chi-2)}$$
$$+\frac{(n-\chi-2)!}{\left((n-\chi-2)-(n-\chi-2)\right)!}s_{2,\chi}\lambda^{n-\chi-2-(n-\chi-2)}$$
$$=\frac{(n-\chi)!}{2!}\lambda^2+\frac{(n-\chi-1)!}{1!}s_{1,\chi}\lambda^1+(n-\chi-2)!\,s_{2,\chi}\lambda^0$$

Maka diperoleh turunan ke-$(n-\chi-2)$ dari deret polinomial $S_{n-\chi}(G,\lambda)$ sebagai berikut:

$$S_{n-\chi}^{(n-\chi-2)}(G,\lambda)=\frac{(n-\chi)!}{2}\lambda^2+(n-\chi-1)!\left(\binom{\chi}{2}-m\right)\lambda$$
$$+(n-\chi-2)!\,s_{2,\chi}$$

Terlihat bahwa turunan ke-$(n-\chi-2)$ dari deret polinomial $S_{n-\chi}(G,\lambda)$ merupakan polinomial kuadratik. Sehingga, apa yang berlaku pada akar polinomial kuadratik berlaku juga pada akar dari turunan ke-$(n-\chi-2)$ dari deret polinomial $S_{n-\chi}(G,\lambda)$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa akar dari $S_{n-\chi}^{(n-\chi-2)}(G,\lambda)$ bersesuaian dengan pertidaksamaan pada Preposisi 4.5.

$$\frac{(n-\chi)!}{2}\lambda^2+(n-\chi-1)!\left(\binom{\chi}{2}-m\right)\lambda+(n-\chi-2)!\,s_{2,\chi}=0$$

Dengan memindahkan suku ketiga ke ruas kanan, diperoleh:

$$\lambda^2+\frac{2(n-\chi-1)!}{(n-\chi)!}\left(\binom{\chi}{2}-m\right)\lambda=-\frac{2(n-\chi-2)!}{(n-\chi)!}s_{2,\chi}$$

Selanjutnya, sederhanakan persamaan di atas menjadi:

$$\lambda^2+\frac{2(n-\chi-1)!}{(n-\chi)(n-\chi-1)!}\left(\binom{\chi}{2}-m\right)\lambda$$
$$=-\frac{2(n-\chi-2)!}{(n-\chi)(n-\chi-1)(n-\chi-2)!}s_{2,\chi}$$
$$\lambda^2+\frac{2}{n-\chi}\left(\binom{\chi}{2}-m\right)\lambda=-\frac{2}{(n-\chi)(n-\chi-1)}s_{2,\chi}$$

Metode melengkapkan kuadrat sempurna dapat digunakan di ruas kiri. Sehingga, persamaan di atas menjadi

$$\left(\lambda+\frac{\frac{2}{n-\chi}\left(\binom{\chi}{2}-m\right)}{2}\right)^2-\left(\frac{\frac{2}{n-\chi}\left(\binom{\chi}{2}-m\right)}{2}\right)^2=-\frac{2}{(n-\chi)(n-\chi-1)}s_{2,\chi}$$

$$\left(\lambda+\frac{\binom{\chi}{2}-m}{n-\chi}\right)^2-\left(\frac{\binom{\chi}{2}-m}{n-\chi}\right)^2=-\frac{2}{(n-\chi)(n-\chi-1)}s_{2,\chi}$$

Selanjutnya, suku kedua di ruas kiri dipindahkan ke ruas kanan

$$\left(\lambda+\frac{\binom{\chi}{2}-m}{n-\chi}\right)^2=\frac{\left(\binom{\chi}{2}-m\right)^2}{(n-\chi)^2}-\frac{2}{(n-\chi)(n-\chi-1)}s_{2,\chi}$$

Kemudian penyebut di ruas kanan disamakan

$$\left(\lambda+\frac{\binom{\chi}{2}-m}{n-\chi}\right)^2=\frac{(n-\chi-1)^2\left(\binom{\chi}{2}-m\right)^2-2(n-\chi)(n-\chi-1)s_{2,\chi}}{(n-\chi)^2(n-\chi-1)^2}$$

Selanjutnya, baik ruas kiri maupun kanan diberlakukan operasi akar.

$$\lambda+\frac{\binom{\chi}{2}-m}{n-\chi}=\pm\frac{\sqrt{(n-\chi-1)^2\left(\binom{\chi}{2}-m\right)^2-2(n-\chi)(n-\chi-1)s_{2,\chi}}}{(n-\chi)(n-\chi-1)}$$

Setelah itu, suku kedua pada ruas kiri dipindahkan ke ruas kanan.

$$\lambda=-\frac{\binom{\chi}{2}-m}{n-\chi}$$

$$\pm \frac{\sqrt{(n-\chi-1)^2\left(\binom{\chi}{2}-m\right)^2 - 2(n-\chi)(n-\chi-1)s_{2,\chi}}}{(n-\chi)(n-\chi-1)}$$

$$\lambda = \frac{m-\binom{\chi}{2}}{n-\chi} \pm \frac{\sqrt{(n-\chi-1)^2\left(\binom{\chi}{2}-m\right)^2 - 2(n-\chi)(n-\chi-1)s_{2,\chi}}}{(n-\chi)(n-\chi-1)}$$

Maka diperoleh

$$\lambda = B_\chi \pm \frac{\sqrt{D_\chi}}{(n-\chi)(n-\chi-1)}$$

Terlihat bahwa $B_\chi + \frac{\sqrt{D_\chi}}{(n-\chi)(n-\chi-1)}$ merupakan salah satu akar dari polinomial kuadratik $S_{n-\chi}^{(n-\chi-2)}(G,\lambda)$. Dengan kata lain, jika $D_\chi \geq 0$, maka polinomial kuadratik$S_{n-\chi}^{(n-\chi-2)}(G,\lambda)$ memiliki akar real minimal

$$B_\chi + \frac{\sqrt{D_\chi}}{(n-\chi)(n-\chi-1)}$$

Dan jika $D_\chi < 0$, maka polinomial kuadratik $S_{n-\chi}^{(n-\chi-2)}(G,\lambda)$ memiliki akar kompleks r_1 dan r_2 sedemikian hingga

$$\mathrm{re}(r_1) \geq B_\chi$$

dan

$$\mathrm{im}(r_2) \geq \frac{\sqrt{-D_\chi}}{(n-\chi)(n-\chi-1)}.$$

Teorema 2.2.5 mengakibatkan bahwa akar dari $S_{n-\chi}^{(n-\chi-2)}(G,\lambda)$ termuat dalam polygon konveks terkecil yang memuat seluruh akar $S_{n-\chi}(G,\lambda)$. Karena $S_{n-\chi}(G,\lambda)$ adalah faktor dari polinomial kromatik $P(G,\lambda)$, maka akar dari $S_{n-\chi}(G,\lambda)$ juga merupakan akar dari polinomial kromatik $P(G,\lambda)$. Oleh karena itu, jika $D_\chi \geq 0$, maka polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ memiliki suatu akar dengan bagian real minimal

$$B_\chi + \frac{\sqrt{D_\chi}}{(n-\chi)(n-\chi-1)}$$

Dan jika $D_\chi < 0$, maka polinomial kromatik $P(G,\lambda)$ memiliki akar kompleks r_1 dan r_2 sedemikian hingga

$$\mathrm{re}(r_1) \geq B_\chi$$

dan

$$\mathrm{im}(r_2) \geq \frac{\sqrt{-D_\chi}}{(n-\chi)(n-\chi-1)}.$$

■

Di awal pembahasan telah diuraikan bahwa graf roda W_4 isomorf dengan graf lengkap K_4, sehingga graf roda W_4 tidak memiliki akar kromatik kompleks. Akan tetapi, berbeda dengan graf roda order 5, W_5. Pada Contoh 4.5 berikut ini, akan ditunjukkan bahwa graf roda W_5 memenuhi syarat cukup untuk memiliki akar kromatik kompleks sebagaimana yang diuraikan pada Preposisi 4.4,.

Contoh 4.5. Graf roda W_5 memiliki order $n = 5$, ukuran $m = 8$, bilangan kromatik $\chi = 3$, subgraf $t_1 = 4$, $t_2 = 0$, dan $t_3 = 0$. Sehingga, diperoleh

$$\begin{aligned} D_\chi &= (n-\chi-1)^2\left(\binom{\chi}{2} - m\right)^2 - 2(n-\chi-1)(n-\chi)s_{2,\chi} \\ &= (1)^2(-2)^2 - 2(1)(2)s_{2,\chi} \\ &= 4 - 4\left(\binom{m}{2} - t_1 - \binom{\chi}{2}m + \sum_{j=1}^{\chi-1}\binom{j+1}{2}j\right) \end{aligned}$$

$$= 4 - 4\left(28 - 4 - 3 \cdot 8 + \left(\binom{2}{2}1 + \binom{3}{2}2\right)\right)$$
$$= 4 - 4(1 + 6)$$
$$= 4 - 28 = -24$$

Terlihat bahwa $D_\chi < 0$. Sebagaimana Preposisi 4.4, graf roda W_5 memiliki akar kromatik r_1 dan r_2 sedemikian hingga

$$\mathrm{re}(r_1) \geq B_\chi = \frac{m - \binom{\chi}{2}}{n - \chi}$$

$$\mathrm{re}(r_1) \geq \frac{8 - \binom{3}{2}}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

dan

$$\mathrm{im}(r_2) \geq \frac{\sqrt{-D_\chi}}{(n-\chi)(n-\chi-1)}$$

$$\mathrm{im}(r_2) \geq \frac{\sqrt{24}}{(2)(1)} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

Dengan memperhatikan Contoh 4.5 dan Lampiran 2, graf roda W_n, untuk $n \geq 5$ memiliki akar kromatik kompleks. Sedangkan dari Contoh 4.1 dan Lampiran 1, graf sikel C_n, untuk $n \geq 4$, juga memiliki akar kromatik kompleks.

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini, diberikan simpulan dari hasil kajian yang telah dilakukan mengenai syarat cukup polynomial kromatik graf terhubung agar bernilai kompleks. Selain itu, penulis juga menuliskan saran bagi kajian maupun penelitian yang lebih luas sehubungan kajian yang telah dilakukan pada bab sebelumnya.

5.1 Simpulan

Setelah melakukan kajian terhadap syarat cukup polynomial kromatik graf terhubung agar bernilai kompleks, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Graf lengkap K_n dengan n order, tidak memiliki akar kromatik bernilai kompleks. Begitu pula halnya dengan graf pohon T_n dengan n order.
2. Graf garis $L(K_n)$ yang tidak isomorf dengan graf lengkap K_n nya, bisa jadi memiliki akar kromatik kompleks. Sebagai contoh, graf garis $L(K_4)$.
3. Graf roda W_n dengan order $n \geq 5$, memiliki akar kromatik kompleks.
4. Graf sikel C_n dengan order $n \geq 4$, memiliki akar kromatik kompleks.

5.2 Saran

Berikut ini beberapa saran untuk kajian maupun penelitian selanjutnya mengenai syarat cukup graf terhubung memiliki akar kromatik kompleks.

1. Graf yang dikaji pada penelitian selanjutnya dapat lebih khusus, tidak hanya graf umum. Seperti graf petersen Graf Harborth, Graf Haewood, graf kubik, dan lain sebagainya.

2. Graf pohon tidak memiliki akar kromatik kompleks. Akan tetapi kajian mengenai akar kromatik pohon dapat dilakukan di bagian modulus akar kromatiknya. Khususnya mengenai modulus terkecil akar kromatik pohon.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Appel, K. dan Haken, W. (1977). "Every Planar Graph is Four Colorable Part I. Discharging". **Illinois Journal of Mathematics Vol. 21**, Hal. 429 - 490.

[2] Appel, K. dan Haken, W. (1977). "Every Planar Graph is Four Colorable Part II. Reducibility". **Illinois Journal of Mathematics Vol. 21**, Hal. 491 - 567.

[3] Barbeau, E. J. (1989). **Polynomials.** New York: Springer Verlag.

[4] Bielak, H. (2001). "Roots of Chromatic Polynomials". **Discrete Mathematics Vol. 231**, Hal. 97 - 102.

[5] Brown, J. I. (1998). "On The Roots of Chromatic Polynomials". **Journal of Combinatorial Theory Series B Vol. 72**, Hal. 251 - 256.

[6] Dong, F.M. (2005). **Chromatic Polynomial and Chromaticity of Graph.** World Scientific Publishing Company, illustrated edition.

[7] Farrell, E. J. (1980). "On Chromatic Coefisien". **Discrete Mathematics Vol. 29**, Hal. 257 - 264.

[8] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Polya, G. (1952). **Inequallities.** Cambridge: Cambridge University press.

[9] Hartsfield, N. dan Ringel, G. (2003). **Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction.** New York: Dover Publications.

[10] Henrici, P. (1974). **Applied and Computational Complex Analysis Vol. I.** New York: Wiley-Interscience.

[11] Jackson, B. (1993). “A zero-free interval for chromatic polynomials of graphs”. **Combinatorics, Probability and Computing Vol. 2**, Hal. 325–336.

[12] Lóvász, L. (2007). **Combinatorial Problems and Exercises 2nd edition.** American Mathematical Society.
[13] Sokal, A. D. (2004) "Chromatic roots are dense in the whole complex plane". **Combinatorics, Probability and Computing, Vol. 13**, Hal. 221 - 261.
[14] Thomassen, C. (1997). “The Zero-Free Intervals for Chromatic Polynomials of Graphs”. **Combinatorics, Probability and Computing, Vol. 6**, Hal. 497-506.

BIODATA PENULIS

Penulis memiliki nama Yuni Dewi Purnama Sari. Lahir di Gresik pada 6 Juni 1990. Penulis telah menempuh pendidikan formal dimulai dari MI Hidayatul Mubtadiin Glatik, MTs. Kanjeng Sepuh Sidayu, MA Kanjeng Sepuh Sidayu. Setelah lulus Sekolah Menengah, penulis melanjutkan kuliah di jurusan Matematika Fakulas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) dengan NRP 1208 1000 51 diterima melalui jalur SNMPTN (Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri) pada tahun angkatan 2008. Penulis selama kuliah di Jurusan Matematika ITS mengambil bidang dan minat Analisis dan Aljabar. Untuk membentuk jejaring yang luas ataupun membutuhkan informasi yang berhubungan dengan Tugas Akhir ini, penulis dapat dihubungi melalui email ydps_as@yahoo.com.

Lampiran 1

Graf Sikel C_n, dengan $n \geq 5$, yang memenuhi Teorema 4.1 untuk memiliki akar kromatik kompleks

1. Graf sikel C_5
   $t_1 = 0$
   $n = 5$
   $m = 5$
   $$\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$
   Terlihat bahwa $t_1 < \frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)}$, sehingga C_5 memiliki akar kromatik kompleks.

2. Graf sikel C_6
   $t_1 = 0$
   $n = 6$
   $m = 6$
   $$\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{5}{8}$$
   Terlihat bahwa $t_1 < \frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)}$, sehingga C_6 memiliki akar kromatik kompleks.

3. Graf sikel C_7
   $t_1 = 0$
   $n = 7$
   $m = 7$
   $$\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{6 \cdot 1}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$
   Terlihat bahwa $t_1 < \frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)}$, sehingga C_7 memiliki akar kromatik kompleks.

4. Graf sikel C_8

   $t_1 = 0$
   $n = 8$
   $m = 8$
   $$\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{7 \cdot 1}{2 \cdot 6} = \frac{7}{12}$$
   Terlihat bahwa $t_1 < \frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)}$, sehingga C_8 memiliki akar kromatik kompleks.

5. Graf sikel C_9

   $t_1 = 0$
   $n = 9$
   $m = 9$
   $$\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{8 \cdot 1}{2 \cdot 7} = \frac{4}{7}$$
   Terlihat bahwa $t_1 < \frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)}$, sehingga C_9 memiliki akar kromatik kompleks.

6. Graf sikel C_{10}

   $t_1 = 0$
   $n = 10$
   $m = 10$
   $$\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{9 \cdot 1}{2 \cdot 8} = \frac{9}{16}$$
   Terlihat bahwa $t_1 < \frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)}$, sehingga C_{10} memiliki akar kromatik kompleks.

7. Graf sikel C_{11}
   $t_1 = 0$
   $n = 11$
   $m = 11$
   $$\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{10 \cdot 1}{2 \cdot 9} = \frac{5}{9}$$
   Terlihat bahwa $t_1 < \frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)}$, sehingga C_{11} memiliki akar kromatik kompleks.

8. Graf sikel C_{12}
   $t_1 = 0$
   $n = 12$
   $m = 12$
   $$\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{11 \cdot 1}{2 \cdot 10} = \frac{11}{20}$$
   Terlihat bahwa $t_1 < \frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)}$, sehingga C_{12} memiliki akar kromatik kompleks.

9. Graf sikel C_{13}
   $t_1 = 0$
   $n = 13$
   $m = 13$
   $$\frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)} = \frac{12 \cdot 1}{2 \cdot 11} = \frac{6}{11}$$
   Terlihat bahwa $t_1 < \frac{(m-1)(m-n+1)}{2(n-2)}$, sehingga C_{13} memiliki akar kromatik kompleks.

Lampiran 2

Graf W_n, dengan $n \geq 6$, yang memenuhi Preposisi 4.3 untuk memiliki akar kromatik kompleks

1. Graf roda W_6
   $t_1 = 5$
   $n = 6$
   $m = 10$
   $$\chi = 4 \Rightarrow t^* = \frac{m(m-n-8)+14n-20}{2(n-4)}$$
   Diperoleh $t^* = 6$, sehingga $t_1 < t^*$. Jadi, W_6 memiliki akar kromatik kompleks.

2. Graf roda W_7
   $t_1 = 6$
   $n = 7$
   $m = 12$
   $$\chi = 3 \Rightarrow t^* = \frac{m(m-n-3)+5n-6}{2(n-3)}$$
   Diperoleh $t^* = 6\frac{5}{8}$, sehingga $t_1 < t^*$. Jadi, W_7 memiliki akar kromatik kompleks.

3. Graf Roda W_8
   $t_1 = 7$
   $n = 8$
   $m = 14$
   $$\chi = 4 \Rightarrow t^* = \frac{m(m-n-8)+14n-20}{2(n-4)}$$
   Diperoleh $t^* = 8$, sehingga $t_1 < t^*$. Jadi, W_8 memiliki akar kromatik kompleks.

4. Graf roda W_9

   $t_1 = 8$
   $n = 9$
   $m = 16$
   $\chi = 3 \Rightarrow t^* = \dfrac{m(m-n-3)+5n-6}{2(n-3)}$

   Diperoleh $t^* = 8\frac{3}{4}$, sehingga $t_1 < t^*$. Jadi, W_9 memiliki akar kromatik kompleks.

5. Graf Roda W_{10}

   $t_1 = 9$
   $n = 10$
   $m = 18$
   $\chi = 4 \Rightarrow t^* = \dfrac{m(m-n-8)+14n-20}{2(n-4)}$

   Diperoleh $t^* = 10$, sehingga $t_1 < t^*$. Jadi, W_{10} memiliki akar kromatik kompleks.

6. Graf roda W_{11}

   $t_1 = 10$
   $n = 11$
   $m = 20$
   $\chi = 3 \Rightarrow t^* = \dfrac{m(m-n-3)+5n-6}{2(n-3)}$

   Diperoleh $t^* = 10\frac{9}{16}$, sehingga $t_1 < t^*$. Jadi, W_{11} memiliki akar kromatik kompleks.

7. Graf Roda W_{12}
   $t_1 = 11$
   $n = 12$
   $m = 22$
   $$\chi = 4 \Rightarrow t^* = \frac{m(m-n-8)+14n-20}{2(n-4)}$$
   Diperoleh $t^* = 12$, sehingga $t_1 < t^*$. Jadi, W_{12} memiliki akar kromatik kompleks.

8. Graf roda W_{13}
   $t_1 = 12$
   $n = 13$
   $m = 24$
   $$\chi = 3 \Rightarrow t^* = \frac{m(m-n-3)+5n-6}{2(n-3)}$$
   Diperoleh $t^* = 12\frac{11}{20}$, sehingga $t_1 < t^*$. Jadi, W_{13} memiliki akar kromatik kompleks.

9. Graf Roda W_{14}
   $t_1 = 13$
   $n = 14$
   $m = 26$
   $$\chi = 4 \Rightarrow t^* = \frac{m(m-n-8)+14n-20}{2(n-4)}$$
   Diperoleh $t^* =$, sehingga $t_1 < t^*$. Jadi, W_{14} memiliki akar kromatik kompleks.