



TUGAS AKHIR - SM091332

ANALISA SIFAT-SIFAT ANTRIAN M/M/1 DENGAN *WORKING VACATION*

**DESI NUR FAIZAH
NRP 1209 100 017**

**Dosen Pembimbing
Dra. Laksmi Prita Wardhani, M.Si**

**JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2014**



FINAL PROJECT - SM091332

***ANALYSIS OF CHARACTERISTIC M/M/1 QUEUE
WITH WORKING VACATION***

**DESI NUR FAIZAH
NRP 1209 100 017**

**Supervisor
Dra. Laksmi Prita Wardhani, M.Si**

**MATHEMATICS DEPARTMENT
Faculty of Mathematics and Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2014**

ANALISA SIFAT-SIFAT ANTRIAN M/M/1 DENGAN WORKING VACATION

Nama Mahasiswa : Desi Nur Faizah
NRP : 1209 100 017
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : Dra. Laksmi Prita W., M.Si

Abstrak

Antrian M/M/1 memiliki laju kedatangan λ dan laju pelayanan μ_b (laju pelayanan pada waktu sibuk). Sistem antrian dengan Working Vacation (WV) memiliki dua laju pelayanan yaitu μ_v (laju pelayanan pada waktu libur) dan μ_b (laju pelayanan pada waktu sibuk). Working Vacation diambil saat server tidak dapat melayani pelanggan pada periode tertentu.

Pada Tugas Akhir ini digunakan sistem antrian M/M/1 dengan working vacation (M/M/1/WV). Analisa quasi birth-death process dan probabilitas steady state digunakan untuk mengkaji distribusi panjang antrian dan ekspektasi waktu tunggu pada antrian M/M/1/WV.

Hasil dari analisa quasi birth-death process dan probabilitas steady state diperoleh distribusi panjang antrian dalam sistem dan ekspektasi waktu tunggu dalam sistem akan meningkat jika laju pelayanan pada waktu libur meningkat ($\mu_b > \mu_v$). Jika ekspektasi waktu perbandingan waktu sibuk server memiliki nilai yang besar maka distribusi panjang antrian dalam sistem dan ekspektasi waktu tunggu dalam sistem juga bernilai besar, dengan syarat ($\rho < 1$).

Kata kunci: *antrian, probabilitas steady state, quasi birth-death process, working vacation.*

ANALYSIS OF CHARACTERISTIC M/M/1 QUEUE WITH WORKING VACATION

Name : Desi Nur Faizah
NRP : 1209 100 017
Department : Mathematics
Supervisor : Dra. Laksmi Prita W., M.Si

Abstract

M/M/1 queues have arrival rate λ and service rate μ_b (rate service at a busy time). Queuing system with Working Vacation (WV) has two rate services namely is μ_v (rate of service at holiday time) and μ_b (rate service at a busy time). Working Vacation retrieved server will stop serving customers during a certain period but did not rule out the server to perform service activities at that time.

This final project used M/M/1 queuing system with working vacation (M/M/1/WV). Analysis of quasi birth-death process and the steady state probability is used to analysis the distribution of queue length and expectations of waiting time in the M/M/1/WV queue.

Results of the analysis of quasi birth - death process and the steady state probability distribution of the queue length are distribution of the queue length in the system and expectations of waiting time in the system will increase if the rate of service at holiday time increasing ($\mu_b > \mu_v$). If expectations of comparisons busy time server has a great value so that queue length in the system and expectations of waiting time in the system is also have great value, the condition ($\rho < 1$).

Keywords: quasi birth-death process, queue, steady state probability, working vacation.

LEMBAR PENGESAHAN

**ANALISA SIFAT-SIFAT ANTRIAN M/M/1 DENGAN
WORKING VACATION**

**ANALYSIS OF CHARACTERISTIC M/M/1 QUEUE
WITH WORKING VACATION**

TUGAS AKHIR

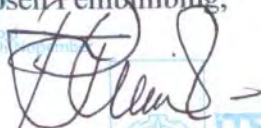
Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Studi Riset Operasi dan Pengolahan Data
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

DESI NUR FAIZAH
NRP. 1209 100 017

Menyetujui,

Dosen Pembimbing,



Dra. Laksmi Prita W., M.Si
NIP. 19611208 198803 2 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika,



Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001

Surabaya, Januari 2014

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadiran Allah SWT atas segala Rahmat dan Karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul “**Analisa Sifat-sifat Antrian dengan *Working Vacation***”.

Salah satu tujuan dari disusunnya Tugas Akhir ini adalah untuk memenuhi sebagian persyaratan dalam mencapai jenjang Sarjana Sains dari Jurusan Matematika ITS Surabaya.

Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik dan lancar atas kerja sama dan dukungan berbagai pihak. Sehubungan dengan itu, penulis bermaksud menyampaikan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA-ITS yang telah memberikan dukungan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
2. Ibu Dra. Laksmi Prita Wardhani, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang senantiasa meluangkan waktunya guna memberikan dukungan ilmu dan pengetahuan yang sangat bermanfaat bagi penyusunan Tugas Akhir ini.
3. Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si, Ibu Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes, dan Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si selaku dosen penguji atas semua masukan yang telah diberikan untuk kebaikan Tugas Akhir ini.
4. Ibu Soleha, S.Si, M.Si selaku koordinator Tugas Akhir yang telah memberi dukungan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
5. Bapak Drs. I Gusti Ngurah Rai Usadha, M.Si selaku dosen wali yang telah memberi arahan akademik selama ini.
6. Bapak dan ibu dosen Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.
7. Seluruh keluarga besar Jurusan Matematika yang telah memberikan kemudahan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Terima Kasih kepada semua yang telah membantu menyelesaikan Tugas Akhir ini. Penulis mengharapkan kritik dan

saran dari pembaca. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Januari 2014

Penulis

Special thank's to:

1. Allah SWT yang telah memberi rahmat, karunia dan petunjuk dalam setiap langkahku selama ini.
2. Bapak dan Ibu terima kasih atas doa, semangat, dukungan, kasih sayang dan pendidikan yang selalu diberikan. Dukungan dan motivasimu selalu membangkitkan semangat disaat rasa bosan dan putus asa hampir datang.
3. Kakakku Ika, adikku Ni'am terima kasih motivasi dan semangat yang telah diberikan. Keponakanku tersayang raffa yang selalu menghibur dengan kelucuannya sehingga tetap membuatku tersenyum dan selalu bisa menghilangkan sejenak rasa penatku.
4. Seseorang yang akan mendampingiku, Thiyo terima kasih selalu *support* dan memberi semangat. Inspirasi dan kehadiranmu menguatkanmu untuk tetap berjuang dalam menyelesaikan kuliah.
5. Sahabatku, Rani, Risky, Ema, Pupy, Izzah, Chintya, Roland, Resky, terima kasih karena selalu menemani dan selalu bersama disaat suka maupun duka.
6. Sahabatku dari kecil, aulia dan Rosi terima kasih selalu *support* aku untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
7. Mas Tony, mas Satria dan Fahim yang telah meluangkan waktu untuk *sharing* konsultasi tentang materi Tugas Akhir.
8. Mas Ali yang telah banyak membantu memberikan informasi tentang kelangsungan Tugas Akhir.
9. Ruzika, Itul, Rizky K, Nuri, Kresna dan semua teman-teman yang tidak bisa disebutkan satu per satu terima kasih atas dukungan dan doanya.
10. Teman-teman angkatan 2009 Matematika ITS, terima kasih atas persahabatan serta kekeluargaannya selama ini.
11. Teman-teman seperjuangan Tugas Akhir yang saling mendukung dan memotivasi satu sama lain.

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xviii
DAFTAR SIMBOL	xix
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
1.6 Sistematika Penulisan	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Teori Antrian	5
2.1.1 Model Struktur Antrian Dasar	5
2.1.2 Disiplin Antrian	7
2.1.3 Notasi Kendall	8
2.1.4 Hubungan antara L_s , W_s , L_q , dan W_q	9
2.1.5 Proses <i>Input</i> atau Kedatangan	10
2.1.6 Proses Keluar (Output)	10
2.2 Proses Poisson	10
2.3 Distribusi Eksponensial	12
2.4 <i>Quasi Birth Death Process</i>	12
2.5 Matriks Generator \tilde{N}	17
2.6 Deret Geometri Tak Berhingga	20
2.7 <i>Probability Generating Function</i>	21
2.8 <i>Matrix Geometric Solution</i>	22
2.9 Sistem Antrian dengan <i>Working Vacation</i> (M/M/1/WV)	22

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Studi Literatur	25
3.2 Analisa Sifat-sifat Antrian	25
3.3 Analisa dan Pembahasan.....	25
3.4 Penulisan dan Penarikan Kesimpulan.....	26

BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Antrian M/M/1/WV	27
4.1.1 <i>Quasi Birth and Death Process</i> Pada Model M/M/1/WV	27
4.1.2 Matriks Generator \tilde{N}	30
4.2 Distribusi Panjang Antrian M/M/1/WV.....	37
4.3 Ekspektasi Waktu Tunggu dalam Sistem Antrian M/M/1/WV	54
4.4 Simulasi Numerik	59

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan	67
5.2 Saran	68

DAFTAR PUSTAKA	69
-----------------------------	----

LAMPIRAN	71
-----------------------	----

BIODATA PENULIS	73
------------------------------	----

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1	<i>Single channel – single phase</i> 5
2.2	<i>Single channel – Multi Phase</i> 6
2.3	<i>Multi Channel – Single Phase</i> 6
2.4	<i>Multi chanel – Multi Phase</i> 7
2.5	Diagram transisi dari model antrian M/M/1:G/D/∞/∞..... 9
2.6	Transisi yang Mungkin dari $n - 1, n$ dari $n + 1$ ke n Pelanggan..... 15
2.7	Transisi yang Mungkin dari <i>state</i> 0..... 17
2.8	Diagram transisi dari sistem antrian M/M/1/WV..... 23
4.1	Diagram Transisi Gabungan dari Dua Periode Sistem Antrian M/M/1/WV..... 29
4.2	Grafik hubungan antara $E(L)$ dengan μ_v dan θ ($\rho = 0.2$)..... 62
4.3	Grafik hubungan antara $E(L)$ dengan μ_v dan θ ($\rho = 0.9$)..... 62
4.4	Grafik hubungan antara $E(W)$ dengan μ_v dan θ ($\rho = 0.2$)..... 65
4.5	Grafik hubungan antara $E(W)$ dengan μ_v dan θ ($\rho = 0.9$)..... 65

DAFTAR SIMBOL

λ	laju kedatangan rata-rata
μ_b	laju pelayanan pada waktu sibuk
μ_v	laju pelayanan pada waktu libur
n	jumlah pelanggan dalam sistem
ρ	ekspektasi perbandingan waktu sibuk <i>server</i>
j	periode pelayanan <i>server</i>
$J(t) = 0$	sistem pada periode pelayanan libur pada waktu
$J(t) = 1$	sistem pada periode pelayanan sibuk pada waktu ke t
$N(t)$	banyaknya kejadian yang muncul dalam waktu ke t
$L(t)$	jumlah pelanggan dalam sistem pada waktu t
S	<i>state space</i> untuk dua periode pelayanan
θ	parameter rata-rata pada waktu pelayanan yang memiliki distribusi eksponensial
R	<i>rate</i> matriks
A_{00}	matriks elemen dari matriks generator \tilde{N}
B_{10}	matriks elemen dari matriks generator \tilde{N}
B	matriks elemen dari matriks generator \tilde{N}
C	matriks elemen dari matriks generator \tilde{N}
A	matriks elemen dari matriks generator \tilde{N}
r	Menyatakan $\frac{1}{2\mu_v} (\lambda + \theta + \mu_v - \sqrt{(\lambda + \theta + \mu_v)^2 - 4\lambda\mu_v})$
π	probabilitas <i>steady state</i>
π_{n0}	probabilitas <i>steady state</i> pada waktu pelayanan libur sejumlah n pelanggan dalam sistem
π_{n1}	probabilitas <i>steady state</i> pada waktu pelayanan sibuk sejumlah n pelanggan dalam sistem
L	panjang antrian dalam sistem antrian M/M/1/WV
L_0	panjang antrian dalam antrian M/M/1 pada keadaan <i>steady state</i> dengan parameter $1 - \rho$

L_{wv}	panjang antrian dalam antrian M/M/1/WV
$G_L(z)$	<i>Probability Generating Function</i> dari panjang antrian dalam sistem
z	fungsi pembangkit (<i>generating function</i>)
$G_{L_{wv}}(z)$	<i>Probability Generating Function</i> dari panjang antrian dalam antrian M/M/1/WV
$P\{L_{wv} = 0\}$	probabilitas panjang antrian dalam antrian M/M/1/WV saat tidak ada pelanggan dalam sistem, atau dikatakan periode libur dimulai
$P\{L_{wv} = n\}$	probabilitas panjang antrian M/M/1/WV dalam keadaan <i>steady state</i> saat ada n pelanggan yang tersisa dalam sistem pada saat kepergian seorang pelanggan ($n \geq 1$)
$E(L)$	ekspektasi panjang antrian dalam sistem antrian M/M/1/WV
$E(L_0)$	ekspektasi panjang antrian dalam antrian M/M/1 pada keadaan <i>steady state</i> dengan parameter $1 - \rho$
$E(L_{wv})$	ekspektasi panjang antrian dalam antrian M/M/1/WV
W	waktu tunggu dalam sistem antrian M/M/1/WV
W_0	waktu tunggu dalam antrian M/M/1 yang mempunyai distribusi eksponensial dengan parameter $\mu_b(1 - \rho)$
W_{wv}	waktu tunggu pada antrian M/M/1/WV
$W^*(s)$	Diperoleh dari hubungan antara $G_L(z)$ dan W^* , yaitu $G_L(z) = W^*(\lambda(1 - z))$
$E(W)$	ekspektasi waktu tunggu dalam sistem antrian M/M/1/WV.
$E(W_0)$	ekspektasi waktu tunggu dalam antrian M/M/1 yang mempunyai distribusi eksponensial dengan parameter $\mu_b(1 - \rho)$.
$E(W_{wv})$	ekspektasi waktu tunggu pada antrian M/M/1/WV

K^* Pada panjang antrian dinyatakan dengan

$$\frac{1}{\left[\frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r) + r \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \right]}$$

Pada waktu tunggu dinyatakan dengan

$$\frac{1}{\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1 - r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right)}$$

DAFTAR TABEL

	Halaman
4.1	Distribusi Panjang Antrian dalam Sistem($E(L)$) dengan $\rho = 0.2$ 61
4.2	Distribusi Panjang Antrian dalam Sistem($E(L)$) dengan $\rho = 0.9$ 61
4.3	Ekspektasi Waktu Tunggu dalam Sistem($E(W)$) dalam Sistem dengan $\rho = 0.2$ 63
4.4	Ekspektasi Waktu Tunggu dalam Sistem($E(W)$) dalam Sistem dengan $\rho = 0.9$ 64

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori antrian adalah teori yang menyangkut studi matematis dari antrian atau baris-baris penungguan. Teori antrian menyangkut seluruh situasi dimana pelanggan harus antri untuk mendapatkan suatu pelayanan. Teori antrian sering digunakan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya antrian pada pelayanan kasir supermarket, antrian pada pembelian bahan bakar, antrian pada lampu merah, antrian pelayanan dokter, dan lain-lain.

Model antrian dengan proses pelayanan dan kedatangannya menggunakan distribusi eksponensial diantaranya adalah model antrian klasik (M/M/1), model antrian dengan s layanan (M/M/s) dan model antrian dengan populasi pelanggan terbatas (M/M/1/N) [1].

Terdapat beberapa penelitian yang sudah dilakukan sebelumnya mengenai teori antrian, diantaranya Restanti, N.M. (2011) [2] membahas tentang perhitungan jumlah *server* minimal pada sistem antrian *multiple-servers* model antrian M/M/s/∞ dan merumuskan total laba pendapatan maksimal dengan menggunakan pendekatan teori antrian. Simulasi antrian pelayanan bongkar muat kapal kontainer di Terminal Mirah Pelabuhan Tanjung Perak dan mengetahui rata-rata waktu tunggu kapal dalam antrian serta rata-rata waktu pelayanan yang dibahas oleh Abadi, R. (2010) [3]. Analisa karakteristik khusus dari sistem antrian tipe M/M/1 dengan sistem pelayanan fase lambat dan cepat serta mensimulasikan bentuk sistem antrian yang didapatkan secara numerik yang dibahas oleh Alhamzany, I.K. (2011) [4]. Analisis karakteristik khusus dari sistem antrian tipe M/M/c serta ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem sehingga dapat mengoptimalkan antrian tersebut dan mensimulasikan bentuk sistem antrian yang didapatkan yang dibahas oleh Budi, S. (2011) [5]. Penelitian tersebut adalah penelitian teori antrian pada kasus tertentu.

Antrian yang dibahas pada Tugas Akhir ini menggunakan model antrian klasik (M/M/1) mempunyai satu laju pelayanan (μ_b) yang selanjutnya digunakan untuk menganalisa sifat-sifat antrian dengan *working vacation* yaitu *server* akan berhenti melayani pelanggan selama periode tertentu namun tidak menutup kemungkinan *server* tersebut untuk melakukan aktivitas pelayanan pada saat itu, dengan kata lain pelanggan akan dilayani pada kecepatan yang lebih rendah dari biasanya [6]. *Server* yang tidak dapat melayani kemungkinan sedang dalam proses perbaikan ataupun sedang melayani pelanggan sekunder. Periode ketika *server* tidak dapat memberikan pelayanan dinamakan periode libur *server* (*vacation*), sedangkan periode ketika *server* memberikan pelayanan dinamakan periode pelayanan *server* (*working*). Antrian M/M/1 dengan *working vacation* ini mempunyai dua laju pelayanan, yaitu laju pelayanan waktu sibuk (μ_b) dan laju pelayanan waktu libur (μ_v).

Pada Tugas Akhir ini, antrian M/M/1 dengan *working vacation* digunakan untuk mengkaji distribusi panjang antrian sistem antrian M/M/1/WV dan mengkaji ekspektasi waktu tunggu sistem antrian M/M/1/WV yang memberikan informasi tentang antrian dengan *working vacation*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut maka permasalahan pada penelitian Tugas Akhir ini adalah

1. Bagaimana kajian distribusi panjang antrian pada sistem antrian M/M/1/WV.
2. Bagaimana kajian ekspektasi waktu tunggu pada sistem antrian M/M/1/WV.

1.3 Batasan Masalah

Pembahasan dalam Tugas Akhir ini dibatasi oleh beberapa hal berikut:

1. Sifat-sifat antrian digunakan untuk menemukan solusi dari antrian M/M/1/WV.

2. Model antrian yang digunakan adalah model M/M/1 atau disebut kasus *single server*.
3. Karakteristik khusus dari teori antrian yang diasumsikan terdiri dari jumlah pelanggan dalam sistem, proporsi waktu *server* memberikan pelayanan, dan proporsi waktu *server* memberikan pelayanan secara (libur).

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan Tugas Akhir ini adalah

1. Mengkaji distribusi panjang antrian pada sistem antrian M/M/1/WV.
2. Mengkaji ekspektasi waktu tunggu pada sistem antrian M/M/1/WV.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari Tugas Akhir ini adalah dengan mengetahui distribusi panjang antrian dan ekspektasi waktu tunggu antrian akan dapat dinilai kinerja *server* sehingga selanjutnya dapat dilakukan peningkatan kinerja *server*, selain itu dapat memberikan informasi tentang antrian dengan *working vacation*.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dari Tugas akhir ini sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir ini yang meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat, serta sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini berisi tentang dasar teori yang menunjang penulisan Tugas Akhir.

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini menjelaskan alur kerja dan metode yang digunakan untuk menyelesaikan Tugas Akhir.

BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas analisa sistem antrian dan model *quasi birth and death process* yang selanjutnya digunakan untuk mendapatkan distribusi panjang antrian sistem antrian M/M/1/WV dan ekspektasi waktu tunggu sistem antrian M/M/1/WV.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah sebelumnya serta saran yang diberikan untuk penelitian selanjutnya.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Teori Antrian

Teori antrian digunakan untuk merancang fasilitas pelayanan dalam mengatasi permintaan pelayanan dan menjaga keseimbangan antara waktu libur pelayanan dan waktu yang diperlukan selama periode antrian.

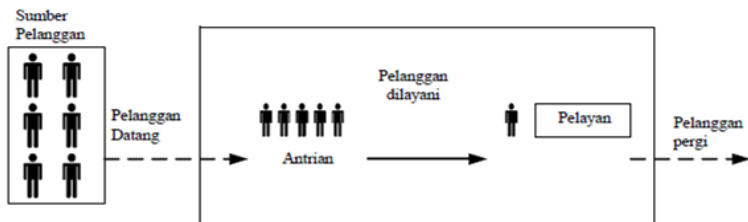
Sistem antrian merupakan suatu himpunan pelanggan, himpunan *server*, aturan yang mengatur kedatangan pelanggan dan pemrosesan masalah pelayanan antrian dengan lima komponen, yaitu pola kedatangan pelanggan, pola pelayanan, jumlah pelayan (*server*), kapasitas fasilitas untuk menampung pelanggan dan aturan dimana para pelanggan akan dilayani.

2.1.1 Model Struktur Antrian Dasar

Terdapat empat model struktur antrian dasar yang umum terjadi dalam seluruh sistem antrian [7], diantaranya:

1. *Single Channel–Single Phase*

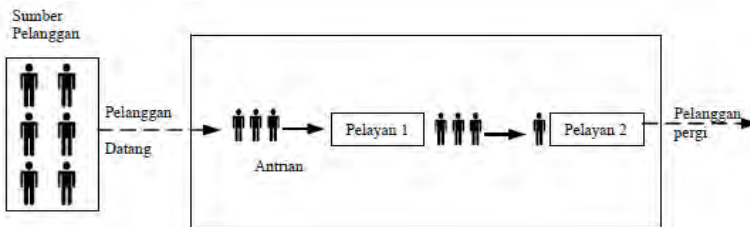
Single channel artinya hanya ada satu jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau hanya ada satu *server* sehingga pelanggan yang telah menerima pelayanan dapat langsung keluar dari sistem antrian. Misalnya, pembelian tiket bus yang dilayani oleh satu loket. Model antrian *Single Channel–Single Phase* ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 *Single channel – single phase*

2. *Single channel–Multi Phase*

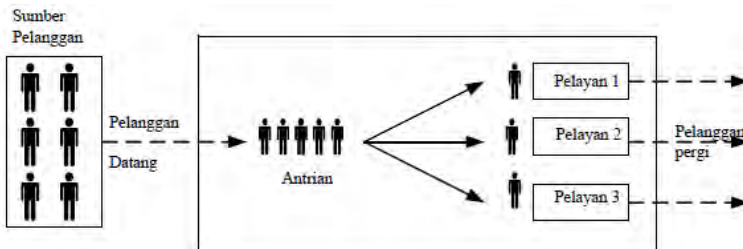
Multi phase berarti ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan dalam *phase*. Misalnya, proses *drive THRU* pada restoran cepat saji, dimana pada pelayanan pertama dilakukan pemesanan dan pembayaran terhadap produk yang akan dibeli kemudian pada pelayanan kedua dilakukan penerimaan produk yang sudah dipesan sebelumnya. Model antrian *Single channel–Multi Phase* ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 *Single channel – Multi Phase*

3. *Multi Channel–Single Phase*

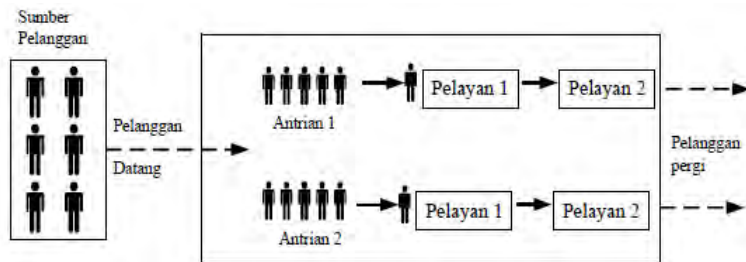
Sistem *multi channel-single phase* terjadi jika ada dua atau lebih *server* yang memiliki suatu antrian tunggal. Misalnya, pelayanan nasabah di Bank, pelayanan tersebut terdiri dari beberapa *teller* yang melayani pelanggan (nasabah) sesuai keperluan masing-masing dan sesuai urutan kedatangan nasabah. Model antrian *Multi Channel–Single Phase* ditunjukkan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 *Multi Channel – Single Phase*

4. Multi Channel-Multi Phase

Sistem ini terjadi jika ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dengan *server* lebih dari satu *phase*. Misalnya pada pelayanan pasien di rumah sakit dari pendaftaran, diagnosa, tindakan medis sampai pembayaran dilakukan secara berurutan dan memiliki lebih dari satu *server* yang melayani. Setiap sistem mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahap, sehingga lebih dari satu individu dapat dilayani pada suatu waktu. Model antrian *Multi Channel-Multi Phase* ditunjukkan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 *Multi channel – Multi Phase*

2.1.2 Disiplin Antrian

Disiplin antrian adalah aturan untuk memilih pelanggan mana yang akan dilayani terlebih dahulu atau disiplin pelayanan yang memuat urutan (*order*) pelanggan menerima layanan. Aturan pelayanan menurut urutan kedatangan didasarkan pada [8]:

1. FIFO (*First In First Out*) atau dikenal dengan FCFS (*First Come First Served*) merupakan aturan dimana pelanggan yang datang didahulukan untuk dilayani. Misalkan antrian kendaraan saat lampu merah.
2. LIFO (*Last In First Out*) atau dikenal dengan LCFS (*Last Come First Served*) merupakan antrian dimana pelanggan yang datang paling akhir akan dilayani terlebih dahulu. Misalkan antrian barang pada bongkar muat kapal kontainer, barang yang terakhir masuk akan dikeluarkan terlebih dahulu.
3. SIRO (*Service In Random Order*) atau dikenal dengan RSS (*Random Selection For Service*) dimana pelayanan dilakukan

secara acak. Misalkan antrian pada arisan dimana penarikan berdasarkan nomor undian.

4. Pelayanan berdasarkan prioritas (PRL) dimana pelanggan yang mempunyai prioritas yang lebih tinggi akan dilayani terlebih dahulu. Misalkan antrian pasien pada pelayanan Unit Gawat Darurat di Rumah Sakit.

2.1.3 Notasi Kendall

Notasi Kendall ditemukan oleh ahli statistik Inggris David G. Kendall. Notasi Kendall digunakan untuk mengkategorikan dan mendeskripsikan proses stokastik dan parameter yang terdapat dalam sistem antrian yang dinotasikan dalam suatu istilah matematika yang singkat [9]. Notasinya adalah $(a/b/c) : (d/e/f)$, dengan keterangan sebagai berikut:

a adalah distribusi kedatangan pelanggan.

b adalah distribusi waktu pelayanan.

c adalah banyaknya pelayanan yang ada dalam sistem.

d adalah disiplin antrian.

e adalah kapasitas sistem.

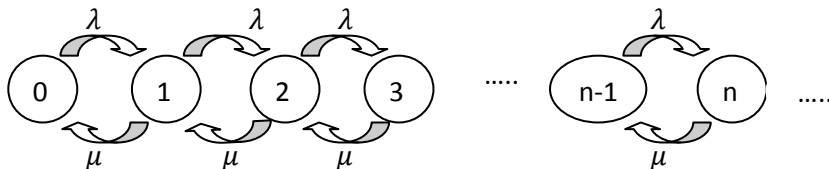
f adalah jumlah kedatangan.

Biasanya pada simbol pertama dan kedua terdapat simbol-simbol M, G atau D, masing-masing berarti:

1. Simbol M berasal dari Markovian, artinya waktu diantara dua kedatangan berdistribusi eksponensial, untuk simbol kedua M berarti waktu pelayanan berdistribusi eksponensial.
2. Simbol G berasal dari General, untuk menggambarkan bahwa distribusi antar waktu kedatangan dan lamanya waktu pelayanan tidak diketahui secara pasti.
3. Simbol D berasal dari Deterministik, untuk menggambarkan bahwa distribusi antar waktu kedatangan dan lamanya waktu pelayanan adalah konstan.
4. Simbol ketiga berkaitan dengan jumlah pelayanan atau banyaknya loket yang disediakan.

Sistem antrian M/M/1 memiliki satu *server* (*single server*) dan memiliki satu antrian (*single queue*). Sebagai contoh pada model antrian M/M/1:GD/ ∞/∞ , model ini memiliki server

tunggal tanpa batas kapasitas dengan peraturan pelayanan umum (GD) dan laju kedatangan berdistribusi poisson (M) serta waktu pelayanan berdistribusi eksponensial (M), dengan asumsi $\lambda_n = \lambda$ (laju kedatangan rata-rata) dan $\mu_n = \mu$ (laju pelayanan rata-rata) untuk semua n (jumlah pelanggan dalam sistem). Diagram transisi dari model antrian M/M/1:G/D/∞/∞ adalah



Gambar 2.5 Diagram transisi dari model antrian M/M/1:G/D/∞/∞

dengan, $\lambda_n = \lambda$, ($n = 0, 1, 2, 3 \dots$) dan
 $\mu_n = \mu$, ($n = 0, 1, 2, 3 \dots$)

Faktor utilitas untuk fasilitas pelayanan (ekspektasi perbandingan waktu sibuk *server*) dari model ini adalah $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

2.1.4 Hubungan antara L_s , W_s , L_q , dan W_q

Diasumsikan bahwa λ_n konstan untuk semua n , berarti hubungan antara L_s , W_s , L_q , dan W_q dinyatakan dalam rumus little [10], sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L_s &= \lambda W_s \\ L_q &= \lambda W_q \end{aligned} \quad (2.1)$$

Jika diasumsikan rata-rata waktu pelayanan $\left(\frac{1}{\mu}\right)$ konstan, maka

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Hubungan antara W_s dan W_q didefinisikan dengan

$$W = W_s + W_q$$

dengan,

L_s : Pelanggan dalam sistem

L_q : Pelanggan dalam antrian (ekspektasi panjang antrian)

W_s : Waktu tunggu dalam sistem

W_q : Waktu tunggu dalam antrian

W : Waktu tunggu dalam sistem

λ : Laju kedatangan

2.1.5 Proses *Input* atau *Kedatangan*

Proses *input* atau kedatangan adalah suatu cara dari individu untuk memasuki sistem baik secara konstan maupun random (banyak individu per periode waktu). Pola kedatangan yang paling sering terjadi biasanya berdistribusi Poisson atau disebut proses kedatangan secara random. Jika antrian dalam sistem relatif panjang kemungkinan sering terjadi penolakan, yaitu perilaku untuk meninggalkan sistem antrian [11].

2.1.6 Proses *Keluar* (*Output*)

Jika individu telah mendapatkan pelayanan, maka selanjutnya individu tersebut akan keluar dari sistem. Antrian terjadi karena kemampuan server lebih kecil daripada tingkat kedatangan pada suatu waktu. Jika terjadi sepanjang waktu maka tidak akan terjadi sistem antrian sehingga tidak ada *output* dari individu yang tidak mendapatkan pelayanan.

2.2 Proses Poisson

Proses Poisson adalah proses perhitungan yang mempunyai batasan tertentu dan mengikuti distribusi Poisson. Suatu proses $\{N(t), t \geq 0\}$ dengan $N(t)$ adalah banyaknya kejadian yang muncul dalam waktu ke t . Jika $N(t)$ suatu proses hitung maka memenuhi,

1. $N(t) \geq 0$.
2. $N(t)$ merupakan nilai yang bulat.
3. Jika $s < t$ maka $N(s) \leq N(t)$.
4. Jika $s < t$, maka $N(t) - N(s)$ merupakan banyak kejadian yang timbul dalam $(s, t]$.

Salah satu dari proses hitung yang paling utama digunakan adalah Proses Poisson, yang didefinisikan berikut ini.

Definisi 2.1

Suatu proses hitung $\{N(t), t \geq 0\}$ disebut Proses Poisson dengan laju λ dengan $\lambda \geq 0$ jika memenuhi syarat sebagai berikut:

1. $N(0) = 0$
2. $N(t)$ mempunyai sifat *independent increment* yaitu jumlah kejadian yang muncul pada setiap interval waktu tidak tergantung pada interval waktunya. Banyaknya kejadian yang terjadi sampai waktu t , yaitu $N(t)$ tidak bergantung pada banyaknya kejadian yang terjadi pada interval waktu $(t, t + s]$, yaitu $N(t + s) - N(t)$ untuk $t \geq 0$.
3. Proses $N(t)$ mempunyai sifat *stationary increment* yaitu banyaknya kejadian dalam interval waktu t berdistribusi poisson dengan rata-rata λt , jadi untuk semua $s, t \geq 0$.

$$P\{N(t + s) - N(s) = n\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$$

untuk $n = 0, 1, 2, \dots$

Definisi 2.1 (3) menyatakan bahwa suatu Proses Poisson memiliki sifat penambahan stasioner (*stationary increment*) dan juga $E(N(t)) = \lambda t$, yang menjelaskan mengapa λ disebut sebagai laju proses. Suatu proses hitung disebut sebagai Proses Poisson jika memenuhi sifat-sifat pada Definisi 2.2.

Definisi 2.2

Jika dimisalkan $N(t)$ menyatakan kejadian pada interval $[0, t]$ dan $P_n(t) = P\{n \text{ kejadian dalam interval } [0, t]\}$ memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $N(0) = 0$
2. Proses bersifat stasioner dan *independent increment*.
3. $P\{N(\Delta t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$. Dalam interval waktu Δt yang kecil ($\Delta t \rightarrow 0$) hanya ada satu kejadian yang muncul dalam probabilitas proporsional terhadap Δt yaitu $\lambda \Delta t$.
4. $P\{N(\Delta t) \geq 2\} = o(\Delta t)$. Tidak ada kejadian yang timbul lebih dari dua kejadian dalam interval waktu Δt .

Fungsi $o(\Delta t)$ adalah fungsi dari Δt , karena Δt nilainya kecil sekali mendekati nol maka

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \quad (2.2)$$

Salah satu alasan mengapa kedatangan diasumsikan mempunyai distribusi poisson adalah karena distribusi poisson bersifat acak terhadap waktu dan perilaku *state* saat ini cukup untuk memprediksi perilaku *state* berikutnya sehingga tidak diperlukan perilaku *state* yang terdahulu[12].

2.3 Distribusi Eksponensial

Suatu peubah acak X mempunyai distribusi eksponensial $X \sim EXP(\theta)$ dengan parameter $\theta > 0$ jika mempunyai pdf dalam bentuk:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & , x > 0 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Sedangkan CDF (Cumulative Distribution Function) dalam bentuk:

$$F(x; \theta) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} \quad , x > 0$$

Distribusi Eksponensial mempunyai sifat pelupa (memoryless property), yaitu:

$$P(X \leq s + t | X > t) = P(x \leq s)$$

Sifat ini menyatakan bahwa jika X merupakan usia pakai (lifetime) komponen tertentu maka persamaan diatas menyatakan bahwa probabilitas komponen telah berfungsi dengan baik dalam jangka waktu $(s + t)$, sedangkan jika usia pakai komponen telah mencapai t maka probabilitas komponen berfungsi dengan baik dalam jangka waktu s .

2.4 Quasi Birth Death Process

Quasi Birth Death Process merupakan perluasan dari *Proses Birth-Death*, proses ini sering disebut proses *input-output* dengan *input* misalnya orang yang datang pada suatu sistem dan *output* misalnya orang yang meninggalkan suatu sistem setelah mendapatkan pelayanan dari *server*. Proses *input-output* diterapkan pada proses antrian.

Proses kelahiran (birth) mendeskripsikan waktu antar kedatangan pada suatu antrian dan proses kematian (death) mendeskripsikan waktu pelayanan pada antrian[8]. Pada proses ini orang yang datang diasumsikan sesuai Proses Poisson dan waktu pelayanan diasumsikan sesuai distribusi eksponensial.

Berikut ini adalah asumsi dari proses *input-output* yang sesuai dengan Proses Poisson (PP):

1. P(tepat ada 1 *input* dalam $(t, t + \Delta t)|n$ pelanggan)
= $\lambda_n + o(t)$, $n \geq 0$.
2. P(tepat ada 1 *output* dalam $(t, t + \Delta t)|n$ pelanggan)
= $\mu_n + o(t)$.
3. P(tepat ada 0 *input* dalam $(t, t + \Delta t)|n$ pelanggan)
= $1 - (\lambda_n + o(t))$.
4. P(tepat ada 0 *output* dalam $(t, t + \Delta t)|n$ pelanggan)
= $1 - (\mu_n + o(t))$, $n \geq 1$.

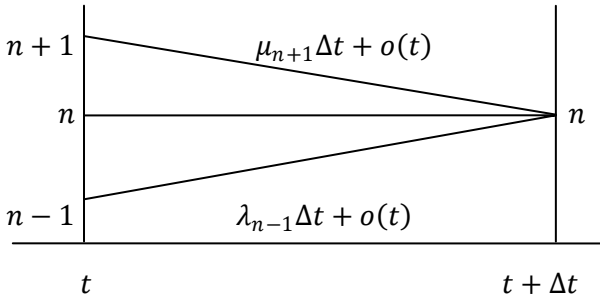
Tinjau proses berada di *state* n pada waktu $t + 1$, maka pada waktu t terdapat tiga kemungkinan yang saling *mutually eksklusif*, yaitu[4]:

1. Pada waktu t terdapat $(n - 1)$ pelanggan dan dalam interval waktu Δt terdapat satu pelanggan yang datang.
2. Pada waktu t terdapat n pelanggan dan dalam interval waktu Δt tidak ada satu pun pelanggan yang datang dan selesai dilayani (tidak ada transisi state).
3. Pada waktu t terdapat $(n + 1)$ pelanggan dan dalam interval waktu Δt terdapat satu pelanggan yang selesai dilayani.

Berikut ini akan dibuktikan untuk $P[N(t + \Delta t) = n]$ dan $P[N(t + \Delta t) = 0]$ agar diperoleh laju probabilitas sistem *input-output* $\frac{dP_n(t)}{dt}$ dan $\frac{dP_0(t)}{dt}$.

1. Memperoleh $\frac{dP_n(t)}{dt}$

Pandang proses *input-output* dengan n pelanggan pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Transisi yang Mungkin dari $n - 1, n$ dan $n + 1$ ke n Pelanggan

Sehingga probabilitas kemungkinan transisi jumlah pelanggannya adalah

$$\begin{aligned}
 P_n(t + \Delta t) &= P[N(t + \Delta t) = n] \\
 &= P[N(t + \Delta t) = n, N(t) = n - 1] \\
 &\quad + P[N(t + \Delta t) = n, N(t) = n] \\
 &\quad + P[N(t + \Delta t) = n, N(t) = n + 1] \\
 &= P_{n-1}(t)P_{n-1,n}(\Delta t) + P_n(t)P_{n,n}(\Delta t) \\
 &\quad + P_{n+1}(t)P_{n+1,n}(\Delta t) \\
 &= P_{n-1}(t)\{\lambda_{n-1}\Delta t + o(t)\} \\
 &\quad + P_n(t)\{(1 - \mu_n\Delta t - o(t))(1 - \lambda_n\Delta t - o(t))\} \\
 &\quad + P_{n+1}(t)\{\mu_{n+1}\Delta t + o(t)\} \\
 &= P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + P_{n-1}(t)o(t) + P_n(t) \\
 &\quad - P_n(t)\lambda_n\Delta t - 2P_n(t)o(t) - P_n(t)\mu_n\Delta t \\
 &\quad + P_n(t)\mu_n\lambda_n(\Delta t)^2 + P_n(t)\mu_n\Delta t o(t) \\
 &\quad + P_n(t)\lambda_n\Delta t o(t) + P_n(t)(o(t))^2 \\
 &\quad + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}\Delta t + P_{n+1}(t)o(t)
 \end{aligned}$$

Dengan memindahkan $P_n(t)$ ke ruas kiri dan kedua ruas dibagi dengan Δt , menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= P_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\frac{\Delta t}{\Delta t} + P_{n-1}(t)\frac{o(t)}{\Delta t} \\
 &\quad - P_n(t)\lambda_n\frac{\Delta t}{\Delta t} - 2P_n(t)\frac{o(t)}{\Delta t} - P_n(t)\mu_n\frac{\Delta t}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + P_n(t)\mu_n\lambda_n \frac{(\Delta t)^2}{\Delta t} + P_n(t)\mu_n \frac{\Delta t o(t)}{\Delta t} \\
& + P_n(t)\lambda_n \frac{\Delta t o(t)}{\Delta t} + P_n(t) \frac{(o(t))^2}{\Delta t} \\
& + P_{n+1}(t)\mu_{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta t} + P_{n+1}(t) \frac{o(t)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

karena $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{\Delta t} = 0$ maka didapat

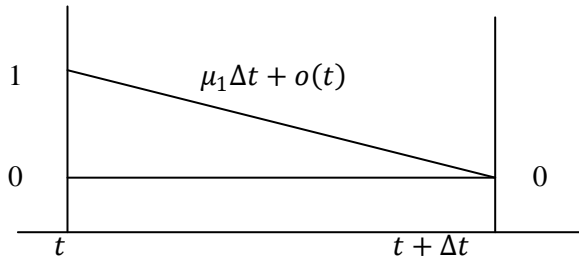
$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_n(t + \Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} & = P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} - P_n(t)\lambda_n \\
& - P_n(t)\mu_n + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}
\end{aligned}$$

Jadi, persamaan laju probabilitas untuk proses *input-output* dengan n pelanggan adalah

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)\lambda_{n-1} - P_n(t)\lambda_n - P_n(t)\mu_n + P_{n+1}(t)\mu_{n+1}$$

2. Memperoleh $\frac{dP_0(t)}{dt}$

Pandang $n = 0$ pada $P_n(t + \Delta t)$ dengan proses *input-output* ditunjukkan oleh Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Transisi yang Mungkin dari *state 0*

Sehingga probabilitas transisinya adalah

$$\begin{aligned}
P_0(t + \Delta t) & = P[N(t + \Delta t) = 0] \\
& = P[N(t + \Delta t) = 0, N(t) = 1] \\
& \quad + P[N(t + \Delta t) = 0, N(t) = 0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_1(t)P_{1,0}(\Delta t) + P_0(t)P_{0,0}(\Delta t) \\
&= P_1(t)\{\mu_1\Delta t + o(t)\} \\
&\quad + P_0(t)\{(1 - \mu_0\Delta t - o(t))(1 - \lambda_0\Delta t - to(t))\}
\end{aligned}$$

Karena tidak ada transisi dari 0 ke 1 pelanggan maka hanya terjadi proses *output* pada saat tidak ada pelanggan sehingga $\mu_0 = 0$, maka

$$\begin{aligned}
P_0(t + \Delta t) &= P_1(t)\mu_1\Delta t + P_1(t)o(t) + P_0(t) \\
&\quad - P_0(t)\lambda_0\Delta t - 2P_0(t)o(t) \\
&\quad + P_0(t)\lambda_0\Delta to(t) + P_0(t)(o(t))^2 \\
\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} &= P_1(t)\mu_1\frac{\Delta t}{\Delta t} + P_1(t)\frac{o(t)}{\Delta t} - P_0(t)\lambda_0\frac{\Delta t}{\Delta t} \\
&\quad - 2P_0(t)\frac{o(t)}{\Delta t} + P_0(t)\lambda_0\frac{\Delta to(t)}{\Delta t} \\
&\quad + P_0(t)\lambda_n\frac{\Delta to(t)}{\Delta t} + P_0(t)\frac{(o(t))^2}{\Delta t}
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.2), didapat

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t + \Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = P_1(t)\mu_1 - P_0(t)\lambda_0$$

Jadi, persamaan laju probabilitas untuk proses *input-output* dengan 0 pelanggan adalah

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)\mu_1 - P_0(t)\lambda_0$$

Sistem persamaan beda diferensial (yang biasanya disebut persamaan diferensial *kolmogorov forward*) menjelaskan tentang probabilitas proses *input-output* yaitu $\frac{dP_0(t)}{dt}$ dan $\frac{dP_n(t)}{dt}$. Dengan

$\frac{dP_n(t)}{dt}$ merupakan laju probabilitas sistem *input-output* dengan n

pelanggan sedangkan $\frac{dP_0(t)}{dt}$ adalah laju probabilitas sistem *input-*

output pada saat tidak ada pelanggan. Sistem antrian dalam

kondisi *steady state* berarti sistem dalam kondisi tersebut tidak

bergantung terhadap waktu sehingga $t \rightarrow \infty$. Disaat sistem berada

pada kondisi *steady state* untuk $n > 0$ dengan n merupakan

jumlah pelanggan maka tingkat ekspektasi *input-output* dari *state*

n harus sama atau dengan kata lain *input* (komponen yang masuk

ke sistem antrian) harus sama dengan *output* (komponen yang

keluar dari sistem antrian). Apabila sistem berada pada kondisi

steady state ($t \rightarrow \infty$) maka persamaan diferensial beda hingga tersebut berlaku $\frac{dP_0(t)}{dt} = 0$, $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ [13].

2.5 Matriks Generator \tilde{N}

Laju transisi suatu matriks dapat diketahui dari matriks generator \tilde{N} . Matriks generator \tilde{N} mendefinisikan hubungan antara laju perubahan dari probabilitas transisi. Misal ($N(t), t \geq 0$) merupakan rantai markov waktu kontinu dengan *state space* S . Diasumsikan $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $i, j \in S$ dan $\Delta t > 0$, probabilitas transisinya adalah[14]

$$p_{ij}(\Delta t) = P\{N(t + \Delta t) = j | N(t) = i\}$$

Untuk lebih jelasnya terdapat pada lemma berikut:

Lemma 2.1 [14]

Diasumsikan probabilitas transisi dari matriks $p(t)$ adalah kontinu untuk semua $t \geq 0$, maka

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(\Delta t) - I}{\Delta t} = p'(0) = \tilde{N}$$

Dengan syarat $p_{ij}(0) = 0$ untuk $i \neq j$ dan $p_{ii}(0) = 1$, serta $P(0) = \lim_{t \rightarrow 0} P(t) = I$.

Syarat tersebut diperoleh dengan mengacu pada definisi turunan, yaitu

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Dengan melihat definisi turunan tersebut maka syarat $p_{ij}(0) = 0$ untuk $i \neq j$ dan $p_{ii}(0) = 1$ dapat diperoleh sebagai berikut:

Memperoleh $p_{ij}(0) = 0$ untuk $i \neq j$.

$$p_{ij}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t + \Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t}$$

Jika $t = 0$, maka

$$p_{ij}'(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(0 + \Delta t) - p_{ij}(0)}{\Delta t}$$

Karena $p_{ij}(0) = 0$, maka

$$p_{ij}'(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(0 + \Delta t) - 0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$$

Jadi, terbukti jika $p_{ij}(t)$ dengan $t = 0$, maka $p_{ij}(0) = 0$.

$$p_{ij}(0) = 0$$

$$p_{ij}(t = 0) = 0$$

$$p_{ii}(0) = 1$$

$$p_{ii}(t = 0) = 1$$

Laju perubahan transisi dari dirinya sendiri adalah bernilai satu.

Matriks \tilde{N} disebut generator dari proses rantai markov waktu kontinu yang didefinisikan

$$-q_{ii} = \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} q_{ij} \cdot \quad (2.3)$$

Sesuai dengan syarat pada Lemma 2.1, misal (q_{ij}) dengan $i, j \in S$ mendiskripsikan elemen dari \tilde{N} maka elemen generator q_{ij} dan q_{ii} dapat dicari untuk membuktikan persamaan (2.3), sebagai berikut:

1. Untuk elemen generator q_{ij}

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t) - p_{ij}(0)}{\Delta t}$$

Berdasarkan syarat pada Lemma 2.1 bahwa $p_{ij}(0) = 0$ untuk $i \neq j$, maka

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t) - 0}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \geq 0, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (2.4)$$

2. Untuk elemen generator q_{ii}

Karena $P_{ij}(\Delta t) \geq 0$, perhatikan bahwa $q_{ij} \geq 0$ maka q_{ii} didefinisikan

$$q_{ii} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(\Delta t) - p_{ii}(0)}{\Delta t}$$

Berdasarkan syarat pada Lemma 2.1 bahwa $p_{ii}(0) = 1$ untuk $i \neq j$, maka

$$q_{ii} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t} \quad (2.5)$$

Jadi, diperoleh elemen generator

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \text{ dan } q_{ii} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t}.$$

Setelah persamaan elemen generator q_{ij} dan generator q_{ii} diperoleh, berdasarkan persamaan $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = 1, t \geq 0$, maka persamaan (2.3) dapat dibuktikan sebagai berikut:

$$1 - p_{ii}(\Delta t) = \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} p_{ij}(\Delta t)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [1 - p_{ii}(\Delta t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} p_{ij}(\Delta t)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$$

Berdasarkan persamaan (2.4) dan persamaan (2.5) didapatkan

$$-q_{ii} = \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} q_{ij}$$

Sehingga persamaan (2.3) terbukti benar, yaitu

$$-q_{ii} = \sum_{j=0, j \neq i}^{\infty} q_{ij}.$$

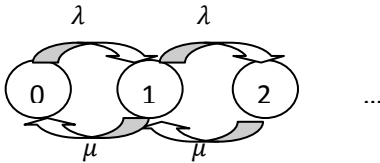
Matriks generator $\tilde{N} = [q_{ij}]$ secara umum dapat ditulis:

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Sehingga, sesuai pembuktian pada persamaan (2.3), matriks generator \tilde{N} dapat ditulis menjadi,

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^{\infty} q_{0j} & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -\sum_{j=0, j \neq 1}^{\infty} q_{1j} & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -\sum_{j=1, j \neq 2}^{\infty} q_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh, misalkan terdapat diagram transisi seperti dibawah ini:



Matriks transisi dari diagram tersebut adalah

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & \cdots \\ 0 & \mu & -\mu & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

2.6 Deret Geometri Tak Berhingga

Deret Geometri mempunyai bentuk:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

yang setiap sukunya diperoleh dari penggandaan suku sebelumnya dengan suatu konstanta r . Pengganda r disebut rasio dari deret tersebut.

Teorema 2.1[15]

Suatu deret geometri

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0),$$

Konvergen jika $|r| < 1$ dan divergen jika $|r| \geq 1$. Jika deret konvergen, maka jumlah deret adalah

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

S_{∞} adalah Jumlahan tak berhingga dari suatu deret geometri, a adalah suku pertama dari deret geometri dan r adalah rasio.

2.7 Probability Generating Function

Fungsi pembangkit (*generating function*) sering digunakan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan teori probabilitas. *Probability Generating Function* biasanya disingkat dengan pgf. Diasumsikan X merupakan variabel acak diskrit dengan peluang $P_n = P(X = n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ sehingga $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$.

Definisi 2.3[16]

Probability Generating Function dari variabel acak diskrit X adalah sebuah fungsi yang didefinisikan pada sebuah subset bilangan real yang dinotasikan sebagai

$$G_x(z) = E(z^x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \quad (2.6)$$

untuk suatu $z \in R$ dengan $|z| < 1$.

Fungsi pembangkit (*generating function*) secara luas sering digunakan dalam matematika dan memerankan peranan penting dalam penyelesaian yang berkaitan dengan teori probabilitas. Pgf merupakan bentuk polinomial dengan koefisiennya adalah probabilitas yang dihubungkan dengan berbagai distribusi diskrit. Pgf juga dapat sering mengurangi kesulitan dalam pekerjaan yang bersangkutan dengan analisis sebuah distribusi. Terdapat beberapa sifat-sifat pgf antara lain yaitu:

1. $G_x(1) = \sum_n P(X = n) = 1$
2. $G_x'(1) = \sum_n nP(X = n) = E(x)$
3. $G_x''(1) = \sum_n n(n-1)P(X = n) = E(X(X-1))$
 Sehingga $Var(X) = G_x''(1) + G_x'(1) - \{G_x'(1)\}^2$
4. $G_x(0) = p_0, G_x'(0) = p_1, G_x''(0) = 2p_2$, untuk k turunan dari pgf memenuhi $G_x^k(0) = k! p_k$.

2.8 Matrix Geometric Solution

Pada teori probabilitas, *matrix geometric solution* adalah metode yang digunakan untuk analisis proses quasi *birth-death*, rantai markov waktu kontinu, dan *rate* matriks transisi dengan struktur blok tridiagonal sebagai berikut[16]:

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} A_{00} & C & & & & \dots \\ B_{10} & A & C & & & \dots \\ & B & A & C & & \dots \\ & & B & A & C & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Dengan A_{00}, B_{10}, A, B, C adalah suatu matriks.

Probabilitas *steady state* π_n yang berhubungan dengan rate matriks (R), dapat ditulis:

$$\pi_n = \pi_1 R^{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (2.7)$$

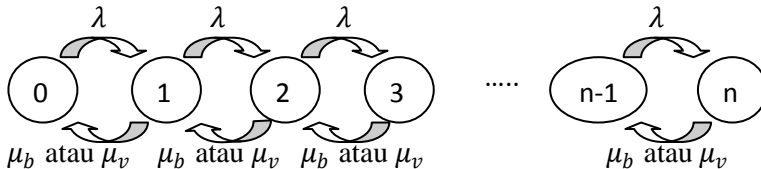
Dari persamaan (2.7), agar π_0 dan π_1 dapat diselesaikan, sehingga ditulis:

$$(\pi_0, \pi_1) \begin{bmatrix} A_{00} & C \\ B_{10} & RB + A \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$$

2.9 Sistem Antrian dengan Working Vacation (M/M/1/WV)

Definisi dari antrian dengan *working vacation* adalah *server* tunggal bekerja pada tingkat pelayanan yang lebih rendah dari biasanya, cara ini lebih baik daripada *server* harus benar-benar menghentikan layanan. *Server* dalam antrian ini memiliki waktu libur dan waktu pelayanan, *server* akan mengambil libur jika tidak ada pelanggan dalam sistem. Ketika waktu libur berakhir *server* akan kembali ke sistem untuk melihat antrian, jika ada antrian maka *server* akan melayani kembali tetapi jika tidak ada antrian maka *server* akan mengambil libur lagi dengan sebaran yang sama dan saling bebas dengan libur sebelumnya. Jika sekembalinya *server* dari libur sudah ada pelanggan yang mengantri maka *server* melayani secara terus menerus hingga tidak ada lagi pelanggan yang memerlukan pelayanan, selanjutnya *server* mengambil libur kembali, begitu seterusnya [12].

Sistem antrian M/M/1/WV memiliki satu *server*, memiliki satu antrian dan memiliki laju pelayanan rata-rata saat sibuk (μ_b) serta laju pelayanan rata-rata waktu libur (μ_v). Berikut ini adalah diagram transisi dari sistem antrian M/M/1/WV:



Gambar 2.8 Diagram transisi dari sistem antrian M/M/1/WV

Dalam sistem antrian ini laju pelayanan waktu sibuk (μ_b) diasumsikan sama dengan laju pelayanan rata-rata (μ). Suatu antrian terjadi jika laju pelayanan lebih kecil dari laju kedatangan ($\mu < \lambda$).

Dari Gambar 2.8 dapat dilihat bahwa untuk laju pelayanan, server menggunakan dua laju pelayanan yaitu *server* menggunakan laju pelayanan μ_b waktu sibuk atau *server* menggunakan laju pelayanan μ_v waktu libur, dengan $\mu_b > \mu_v$ untuk $\rho < 1$. Faktor utilitas untuk fasilitas pelayanan (ekspektasi perbandingan waktu sibuk *server*) dari model ini adalah $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Berdasarkan penjelasan tentang *working vacation* dapat dilihat bahwa, Jika $\rho < 1$ dan $\mu_b > \mu_v$ maka Jumlah pelanggan dalam sistem (L) adalah jumlahan dari dua variabel acak yang independen [6].

$$L = L_0 + L_{wv} \quad (2.8)$$

dengan,

L : Jumlah pelanggan dalam sistem.

L_0 : Jumlah pelanggan pada antrian M/M/1 pada keadaan *steady state* dengan parameter $1 - \rho$.

L_{wv} : Jumlah pelanggan dalam antrian M/M/1/WV

μ_b : Laju pelayanan rata-rata.

μ_v : Laju pelayanan rata-rata saat libur.

ρ : Faktor utilitas untuk fasilitas pelayanan (ekspektasi perbandingan dari waktu sibuk *server*)

Jika $\rho < 1$ dan $\mu_b > \mu_v$ maka waktu tunggu antrian tetap (W) dapat didekomposisikan kedalam jumlahan dari dua variabel random yang independen.

$$W = W_0 + W_{wv} \quad (2.9)$$

dengan,

W : Waktu tunggu dalam sistem

W_0 : Waktu tunggu dari pelanggan pada antrian M/M/1 yang mempunyai distribusi eksponensial dengan parameter $\mu_b(1 - \rho)$.

W_{wv} : Waktu tunggu dari pelanggan pada antrian M/M/1/WV

μ_b : Laju pelayanan rata-rata.

μ_v : Laju pelayanan rata-rata saat libur.

ρ : Faktor utilitas untuk fasilitas pelayanan (ekspektasi perbandingan dari waktu sibuk *server*).

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bagian ini diuraikan metode yang digunakan dalam penelitian secara rinci. Metode penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penulisan Tugas Akhir ini dapat berjalan secara sistematis.

3.1 Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan studi literatur mengenai materi yang menunjang penulisan Tugas Akhir. Dari permasalahan dan tujuan yang telah dirumuskan selanjutnya dilakukan studi literatur untuk memberi acuan pemecahan permasalahan. Studi literatur dilakukan terhadap jurnal-jurnal ilmiah, tugas akhir yang berhubungan dengan teori antrian. Selanjutnya, Pemahaman terhadap model sistem antrian dan *Quasi Birth-Death Process* sebagai ide untuk melakukan pembahasan masalah.

3.2 Analisa Sifat-sifat Antrian

Pada tahap ini dilakukan analisa mengenai sifat-sifat antrian $M/M/1/WV$, diantaranya mengenai *Quasi Birth-Death Process* dengan menentukan periode pelayanan, *state space* dan diagram transisi yang selanjutnya digunakan untuk menyelesaikan tujuan dari Tugas Akhir ini pada analisa dan pembahasan.

3.3 Analisa dan Pembahasan

Pada tahap ini dilakukan analisis dan pembahasan diantaranya mengenai analisa model antrian $M/M/1/WV$, analisa *Quasi Birth-Death Process* pada model $M/M/1/WV$, mendapatkan matriks generator \tilde{N} pada model $M/M/1/WV$ yang selanjutnya digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yaitu mendapatkan distribusi panjang antrian dan ekspektasi waktu tunggu pada antrian $M/M/1/WV$. Langkah – langkah analisa dan pembahasan dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Menentukan diagram transisi gabungan dari dua periode sistem antrian M/M/1/WV.
2. Menentukan matriks generator \tilde{N} .
3. Menentukan *rate* matriks R .
4. Menentukan probabilitas *steady state server* waktu libur dan probabilitas *steady state server* waktu sibuk.
5. Mencari distribusi panjang antrian dengan menggunakan *probability generating function* dan pengertian deret geometri.
6. Mencari ekspektasi waktu tunggu antrian dengan menggunakan Teorema Little.

3.4 Penulisan dan Penarikan Kesimpulan

Pada tahap ini dilakukan penulisan laporan tugas akhir sesuai dengan metode yang ada yang selanjutnya dilakukan penarikan kesimpulan dari hasil analisa dan pembahasan.

BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

4.1 Model Antrian M/M/1/WV

Berdasarkan antrian M/M/1 (server tunggal) yang memiliki laju kedatangan λ dan laju pelayanan μ_b (laju pelayanan pada waktu sibuk). Sistem antrian dengan *Working Vacation* (WV) diambil saat *server* tidak dapat melayani pelanggan pada periode tertentu. *Server* yang tidak dapat melayani ini mungkin sedang dalam proses perbaikan atau sedang melayani pelanggan sekunder, hal ini banyak ditemukan pada sistem produksi, sistem komunikasi dan sistem komputer. Periode saat *server* tidak dapat memberikan pelayanan dinamakan periode libur *server* dan periode saat *server* memberikan pelayanan dinamakan periode sibuk *server*.

Pada saat *server* dalam pelayanan WV, pelanggan yang masuk dalam antrian akan dilayani pada laju pelayanan μ_v (laju pelayanan pada waktu libur). Ketika waktu libur berakhir, jika tidak ada pelanggan dalam sistem antrian maka pelayanan dengan WV akan kembali diambil, namun jika ada pelanggan lagi yang masuk dalam sistem antrian maka *server* akan menukar laju pelayanan dari laju pelayanan libur ke laju pelayanan sibuk (μ_v ke μ_b) sehingga periode pelayanan sibuk akan kembali dimulai.

Berdasarkan Gambar 2.8 dapat dilihat bahwa laju pelayanan pada sistem antrian dengan WV, server menggunakan dua laju pelayanan yaitu *server* menggunakan laju pelayanan μ_b waktu sibuk atau *server* menggunakan laju pelayanan μ_v waktu libur.

4.1.1 *Quasi Birth and Death Process* Pada Model M/M/1/WV

Suatu antrian bertipe M/M/1 secara umum mempunyai arti bahwa *server* yang memberikan pelayanan kepada pelanggan adalah tunggal (single server). Antrian bertipe M/M/1/WV berarti *server* tunggal melayani para pelanggan dengan dua laju pelayanan, yaitu laju pelayanan waktu libur dan laju pelayanan waktu sibuk.

Diasumsikan waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan pada antrian WV adalah saling independen, serta disiplin antrian menggunakan disiplin antrian FCFS (First Come First Serve). Pada sistem antrian dengan WV ini terdapat dua periode yang dinotasikan j , keadaan ini dapat dinyatakan pada proses stokastik $\{J(t), t \geq 0\}$ dengan parameter waktu kontinu $t \in T, t \geq 0$, dan state space bersifat diskrit yaitu $S = \{0,1\}$ serta $N(t)$ adalah banyaknya kejadian yang muncul dalam waktu ke t dan T merupakan himpunan indeks yang disebut *parameter space*. Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{sistem pada periode pelayanan libur pada waktu ke } t \\ 1, & \text{sistem pada periode pelayanan sibuk pada waktu ke } t \end{cases}$$

Keadaan state $J(t)$ pada dua periode $j = 0,1$ dapat ditentukan oleh kondisi sebagai berikut:

1. Untuk $J(t) = 0$, laju kedatangannya Poisson (λ) dan laju pelayanannya eksponensial (μ_v), menurun daripada kondisi $j = 1$ yang memiliki laju pelayanan μ_b sehingga ($\mu_v \leq \mu_b$), serta waktu pelayanan pada periode ini mengikuti distribusi eksponensial berparameter θ .
2. Untuk $J(t) = 1$, laju kedatangannya Poisson (λ) dan laju pelayanannya eksponensial (μ_b).

Sistem antrian tersebut berjalan pada periode pelayanan yang berpindah-pindah, dari periode pelayanan libur $j = 0$ ke periode pelayanan sibuk $j = 1$ atau dari periode pelayanan sibuk $j = 1$ ke periode pelayanan libur $j = 0$.

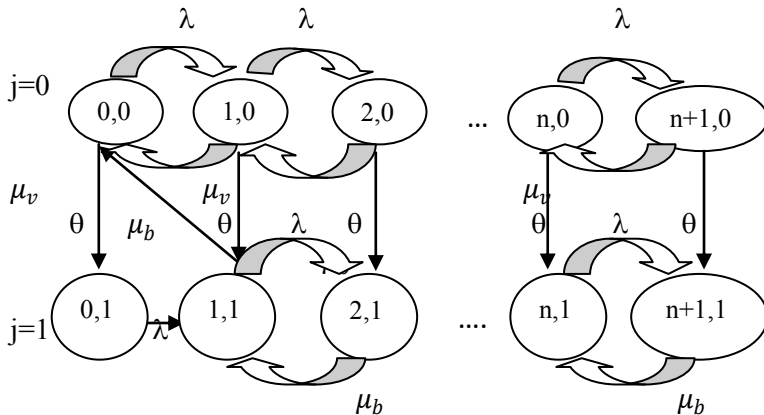
Dari dua periode pelayanan tersebut, jika didefinisikan $L(t)$ adalah jumlah pelanggan dalam sistem pada waktu t dan $\{L(t), J(t)\}$ adalah proses rantai markov serta S adalah ruang sampel atau biasa disebut *state space*. *State space* untuk dua periode pelayanannya adalah

$$S = \{(n, j) : n \geq 0, j = 0, 1\} \quad (4.1)$$

Dari persamaan (4.1) dapat dilihat bahwa terdapat dua *state* yang masing-masing mengindikasikan sistem berada pada periode libur dan sibuk. *State* $(n, 1)$ untuk $n \geq 1$ mengindikasikan bahwa

sistem berada pada periode sibuk ketika terdapat n pelanggan dalam sistem sedangkan *state* $(n, 0)$ $n \geq 0$ mengindikasikan bahwa sistem berada pada periode libur ketika terdapat n pelanggan dalam sistem. Sebagai contoh, *state space* $(3,1)$ untuk $n \geq 1$ mengindikasikan sistem berada pada periode sibuk ketika terdapat tiga pelanggan dalam sistem, *state space* $(2,0)$ untuk $n \geq 1$ mengindikasikan sistem berada pada periode libur ketika terdapat dua pelanggan dalam sistem.

Sehingga dari persamaan (4.1), diagram transisi untuk periode pelayanan libur dan periode pelayanan sibuk dapat digambarkan sebagai berikut[6]:



Gambar 4.1 Diagram Transisi Gabungan dari Dua Periode Sistem Antrian M/M/1/WV

Pada Gambar 4.1 tanda panah menunjukkan kemungkinan adanya transisi, transisi dapat terjadi dari $j = 0$ ke $j = 1$ atau sebaliknya. Laju dengan adanya transisi jumlah pelanggan adalah λ yang merupakan laju transisi dari n ke $n + 1$ (sebuah kelahiran) dan μ merupakan laju transisi dari $n + 1$ ke n (sebuah kematian), dimana μ_b adalah laju transisi dari periode libur ke periode sibuk dan μ_v adalah laju transisi dari periode sibuk ke periode libur serta θ merupakan laju perubahan dari $j = 0$ ke

$j = 1$. Pada kedatangan setiap pelanggan, waktu pelayanan berdistribusi eksponensial berparameter θ akan diaktifkan untuk memulai suatu layanan. Jika sistem tidak mengubah periode dari $j = 0$ ke $j = 1$ sebelum waktu individu berakhir maka pelanggan akan meninggalkan antrian dan tidak akan kembali lagi.

4.1.2 Matriks Generator \tilde{N}

Dari persamaan (2.5) yang merupakan matriks generator \tilde{N} secara umum, berikut ini adalah matriks generator \tilde{N} proses *input-output* pada antrian M/M/1 dengan *Working Vacation*. Dengan menggunakan urutan huruf, matriks generator \tilde{N} dapat ditulis sebagai berikut[14]:

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} A_{00} & C & & & \dots \\ B_{10} & A & C & & \dots \\ & B & A & C & \dots \\ & & B & A & C & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

dengan ruang sampel

$$S = \{(0,0), (1,0), (2,0), \dots, (0,1), (1,1), (2,1), \dots\}$$

Matriks generatormya adalah

$$\tilde{N} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (0,0) & (1,0) & (2,0) & \dots & (0,1) & (1,1) & (2,1) & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} (0,0) \\ (1,0) \\ (2,0) \\ \vdots \\ (0,1) \\ (1,1) \\ (2,1) \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} -(\lambda + \theta) & \lambda & 0 & \dots & \theta & 0 & 0 & \dots \\ \mu_v & -(\mu_v + \lambda + \theta) & \lambda & \dots & 0 & \theta & 0 & \dots \\ 0 & \mu_v & -(\mu_v + \theta) & \dots & 0 & 0 & \theta & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ \mu_b & 0 & 0 & \dots & 0 & -(\mu_b + \lambda) & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_b & -\mu_b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Setelah matriks generator dari Gambar 4.2 diperoleh, selanjutnya adalah memperoleh matriks A_{00}, B_{10}, B, C dan A dari matriks generator tersebut, sebagai berikut:

Dengan membagi berdasarkan dua periode yaitu $j = 0, 1$ dan melihat matriks generator yang sudah diperoleh sebelumnya,

maka matriks dari A_{00}, B_{10}, B, C dan A dapat dibuktikan sebagai berikut:

$$\begin{array}{l}
 \text{n:} \\
 \begin{array}{cccc}
 & & 0 & 1 & 2 & \dots \\
 & & j=0 & j=1 & j=0 & j=1 & \dots
 \end{array} \\
 \text{n:} \\
 \tilde{N}^* = 1 \begin{array}{l}
 \begin{array}{cccc}
 j=0 & -(\lambda + \theta) & \theta & \lambda & 0 & \dots \\
 j=1 & 0 & -\lambda & 0 & \lambda & \dots
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccc}
 j=0 & \mu_v & 0 & -(\mu_v + \lambda + \theta) & \theta & \dots \\
 j=1 & \mu_b & 0 & 0 & -(\mu_b + \lambda) & \dots
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccc}
 j=0 & 0 & 0 & \mu_v & 0 & \dots \\
 j=1 & 0 & 0 & 0 & \mu_b & \dots
 \end{array} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots
 \end{array}
 \end{array}$$

Sehingga dengan melihat \tilde{N}^* dan

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} A_{00} & C & & & \dots \\ B_{10} & A & C & & \dots \\ & B & A & C & \dots \\ & & B & A & C & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

diperoleh

$$A_{00} = \begin{bmatrix} -(\lambda + \theta) & \theta \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad B_{10} = \begin{bmatrix} \mu_v & 0 \\ \mu_b & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \mu_v & 0 \\ 0 & \mu_b \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

dan

$$A = \begin{bmatrix} -(\lambda + \theta + \mu_v) & \theta \\ 0 & -(\lambda + \mu_b) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Matriks \tilde{N} merupakan matriks tridiagonal, yaitu matriks bujursangkar yang semua elemennya bernilai nol kecuali elemen-

elemen pada tiga diagonalnya. Suatu matriks generator mempunyai diagonal utama yang bernilai negatif. Matriks generator \tilde{N} digunakan untuk menganalisa proses *birth-death* yang harus mempunyai penyelesaian non-negatif. Agar proses *birth-death* mempunyai penyelesaian minimal non-negatif maka digunakan persamaan kuadrat matriks, yaitu

$$R^2B + RA + C = 0 \quad (4.5)$$

Dengan R mendefinisikan *rate* matriks dan B, A, C adalah matriks dari elemen matriks generator \tilde{N} . Berikut ini adalah teorema yang digunakan untuk mendapatkan *rate* matriks(R) yang tertuang pada Teorema 4.1.

Teorema 4.1[6]

Diketahui A, B dan C merupakan matriks yang telah didapat pada persamaan (4.2), persamaan (4.3), dan persamaan (4.4). Jika

$\rho = \frac{\lambda}{\mu_b} < 1$, maka persamaan kuadrat matriks $R^2B + RA + C = 0$

mempunyai penyelesaian minimal non-negatif

$$R = \begin{bmatrix} r & \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

dengan

$$r = \frac{1}{2\mu_v} \left(\lambda + \theta + \mu_v - \sqrt{(\lambda + \theta + \mu_v)^2 - 4\lambda\mu_v} \right)$$

dan $0 < r < 1$.

Bukti:

Karena matriks A, B dan C pada persamaan (4.2), persamaan (4.3), dan persamaan (4.4) semuanya merupakan matriks segitiga atas maka diasumsikan untuk R juga merupakan matriks segitiga atas, sehingga R dapat ditulis

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya adalah mensubstitusi persamaan (4.2), persamaan (4.3), dan persamaan (4.4) ke persamaan (4.5), sebagai berikut:

$$R^2B + RA + C = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_v & 0 \\ 0 & \mu_b \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\lambda + \theta + \mu_v) & \theta \\ 0 & -(\lambda + \mu_b) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_{11}^2 & r_{11}r_{12} + r_{12}r_{22} \\ 0 & r_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_v & 0 \\ 0 & \mu_b \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -r_{11}(\lambda + \theta + \mu_v) & r_{11}\theta - r_{12}(\lambda + \mu_b) \\ 0 & -r_{22}(\lambda + \mu_b) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_{11}^2\mu_v & \mu_b r_{11}r_{12} + \mu_b r_{12}r_{22} \\ 0 & \mu_b r_{22}^2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -r_{11}(\lambda + \theta + \mu_v) + \lambda & r_{11}\theta - r_{12}(\lambda + \mu_b) \\ 0 & -r_{22}(\lambda + \mu_b) + \lambda \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_{11}^2\mu_v - r_{11}(\lambda + \theta + \mu_v) + \lambda & \mu_b r_{11}r_{12} + \mu_b r_{12}r_{22} + r_{11}\theta - r_{12}(\lambda + \mu_b) \\ 0 & \mu_b r_{22}^2 - r_{22}(\lambda + \mu_b) + \lambda \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh

$$\begin{cases} r_{11}^2\mu_v - r_{11}(\lambda + \theta + \mu_v) + \lambda = 0 & (4.7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_b r_{11}r_{12} + \mu_b r_{12}r_{22} + r_{11}\theta - r_{12}(\lambda + \mu_b) = 0 & (4.8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_b r_{22}^2 - r_{22}(\lambda + \mu_b) + \lambda = 0 & (4.9) \end{cases}$$

Untuk mendapatkan penyelesaian minimal non-negatif, maka r_{11} dan r_{22} harus didapatkan terlebih dahulu.

1. Memperoleh r_{11} dari persamaan (4.7).

Untuk memperoleh akar-akar dari persamaan (4.7), digunakan rumus abc, sebagai berikut:

$$r_{11}^2 \mu_v - r_{11}(\lambda + \theta + \mu_v) + \lambda = 0$$

$$(r_{11})_{1,2} = \frac{(\lambda + \theta + \mu_v) \pm \sqrt{(\lambda + \theta + \mu_v)^2 - 4\mu_v \lambda}}{2\mu_v}$$

$$= \frac{1}{2\mu_v} \left[(\lambda + \theta + \mu_v) \pm \sqrt{(\lambda + \theta + \mu_v)^2 - 4\mu_v \lambda} \right]$$

diperoleh akar-akar persamaannya, yaitu

$$(r_{11})_1 = \frac{1}{2\mu_v} \left[(\lambda + \theta + \mu_v) + \sqrt{(\lambda + \theta + \mu_v)^2 - 4\mu_v \lambda} \right]$$

atau

$$(r_{11})_2 = \frac{1}{2\mu_v} \left[(\lambda + \theta + \mu_v) - \sqrt{(\lambda + \theta + \mu_v)^2 - 4\mu_v \lambda} \right]$$

karena

$$r = \frac{1}{2\mu_v} \left(\lambda + \theta + \mu_v - \sqrt{(\lambda + \theta + \mu_v)^2 - 4\lambda\mu_v} \right)$$

dengan $0 < r < 1$.

maka untuk $(r_{11})_1$ memiliki akar persamaan $r > 1$ dan untuk

$(r_{11})_2$ memiliki akar persamaan $r < 1$, sehingga yang memenuhi

adalah akar persamaan $(r_{11})_2$, jadi $r_{11} = r$

2. Memperoleh r_{22} dari persamaan (4.9).

Untuk memperoleh akar-akar dari persamaan (4.9), digunakan rumus abc, sebagai berikut:

$$\mu_b r_{22}^2 - r_{22}(\lambda + \mu_b) + \lambda = 0$$

$$(r_{22})_{1,2} = \frac{(\lambda + \mu_b) \pm \sqrt{(\lambda + \mu_b)^2 - 4\mu_b \lambda}}{2\mu_b}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\mu_b} \left[(\lambda + \mu_b) \pm \sqrt{(\lambda + \mu_b)^2 - 4\mu_b\lambda} \right] \\
&= \frac{1}{2\mu_b} \left[(\lambda + \mu_b) \pm \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda\mu_b^2 + \mu_b^2 - 4\mu_b\lambda} \right] \\
&= \frac{1}{2\mu_b} \left[(\lambda + \mu_b) \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda\mu_b^2 + \mu_b^2} \right] \\
&= \frac{1}{2\mu_b} \left[(\lambda + \mu_b) \pm \sqrt{(\lambda - \mu_b)^2} \right] \\
&= \frac{1}{2\mu_b} [(\lambda + \mu_b) \pm (\lambda - \mu_b)]
\end{aligned}$$

dengan diketahui $\rho = \frac{\lambda}{\mu_b}$, diperoleh akar-akar persamaannya, yaitu

$$(r_{22})_1 = \frac{1}{2\mu_b} [(\lambda + \mu_b) + (\lambda - \mu_b)] = \frac{1}{2\mu_b} [2\lambda] = \frac{\lambda}{\mu_b} = \rho$$

atau

$$\begin{aligned}
(r_{22})_2 &= \frac{1}{2\mu_b} [(\lambda + \mu_b) - (\lambda - \mu_b)] \\
&= \frac{1}{2\mu_b} [2\mu_b] = 1
\end{aligned}$$

karena $\rho = \frac{\lambda}{\mu_b} < 1$ maka persamaan kuadrat matriks $R^2B + RA + C = 0$ mempunyai penyelesaian minimal non-negatif, sehingga akar persamaan yang memenuhi adalah $(r_{22})_1$, sehingga diperoleh $r_{22} = \rho$.

Setelah r_{11} dan r_{22} diperoleh, selanjutnya adalah mendapatkan r_{12} dengan substitusi $r_{11} = r$ dan $r_{22} = \rho$, ke persamaan (4.9), sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mu_b r_{12}(r_{11} + r_{22}) + \theta r_{11} - (\lambda + \mu_b)r_{12} &= 0 \\
\mu_b r_{12}(r + \rho) + \theta r - (\lambda + \mu_b)r_{12} &= 0 \\
\mu_b r_{12}(r + \rho) - (\lambda + \mu_b)r_{12} &= -\theta r \\
r_{12}(r\mu_b + \rho\mu_b - \mu_b - \lambda) &= -\theta r
\end{aligned}$$

$$r_{12} = \frac{-\theta r}{(r\mu_b + \rho\mu_b - \mu_b - \lambda)}$$

karena $\rho = \frac{\lambda}{\mu_b}$, maka

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{-\theta r}{\left(r\mu_b + \frac{\lambda}{\mu_b}\mu_b - \mu_b - \lambda\right)} \\ &= \frac{-\theta r}{(r\mu_b + \lambda - \mu_b - \lambda)} \\ &= \frac{-\theta r}{(r\mu_b - \mu_b)} \\ &= \frac{-\theta r}{\mu_b(r - 1)} \\ &= \frac{\theta r}{\mu_b(1 - r)} \end{aligned}$$

sehingga R diperoleh

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & \frac{\theta r}{\mu_b(1 - r)} \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$$

Jadi, terbukti bahwa persamaan kuadrat matriks $R^2B + RA + C = 0$ mempunyai penyelesaian minimal non-negatif

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & \frac{\theta r}{\mu_b(1 - r)} \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Pandang persamaan (4.8), dari penyelesaian akar-akar pada persamaan (4.8) telah diperoleh $r_{11} = r$. Sehingga $r_{11} = r$ disubstitusikan ke persamaan (4.8), menjadi

$$r^2\mu_v - r(\lambda + \theta + \mu_v) + \lambda = 0$$

Kedua ruas dibagi dengan r menjadi

$$r\mu_v - (\lambda + \theta + \mu_v) = -\frac{\lambda}{r}$$

$$\lambda + \theta + \mu_v - r\mu_v = \frac{\lambda}{r}$$

$$\lambda + \theta + \mu_v(1 - r) = \frac{\lambda}{r}$$

Kedua ruas dibagi dengan $(1 - r)$ menjadi

$$\frac{\lambda}{1 - r} + \frac{\theta}{1 - r} + \mu_v = \frac{\lambda}{r(1 - r)}$$

$$\frac{\theta}{1 - r} + \mu_v = \frac{\lambda}{r(1 - r)} - \frac{\lambda}{1 - r}$$

$$\frac{\theta}{1 - r} + \mu_v = \frac{\lambda - r\lambda}{r(1 - r)}$$

$$\frac{\theta}{1 - r} + \mu_v = \frac{\lambda(1 - r)}{r(1 - r)}$$

$$\frac{\theta}{1 - r} + \mu_v = \frac{\lambda}{r} \quad (4.10)$$

Persamaan (4.10) digunakan sebagai persamaan yang membantu pada analisa selanjutnya.

4.2 Distribusi Panjang Antrian Pada Sistem Antrian M/M/1/WV

Distribusi panjang antrian M/M/1/WV membicarakan tentang ekspektasi panjang antrian sistem antrian M/M/1/WV, distribusi panjang antrian dapat diperoleh dengan mendapatkan probabilitas *steady state* (π) dari antrian M/M/1/WV terlebih dahulu, dengan $N(t)$ adalah banyaknya kejadian yang muncul dalam waktu ke t dan $J(t)$ adalah periode pelayanan *server* pada waktu ke t .

Teorema 4.2 merupakan teorema yang digunakan untuk mendapatkan probabilitas *steady state server* dalam memberikan pelayanan pada waktu sibuk dan waktu libur.

Teorema 4.2[6]

Jika $\rho < 1$, maka probabilitas *steady state* distribusi bersama dari (N, J) adalah

$$\begin{cases} \pi_{n0} = \pi_{00} r^n, & n \geq 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \pi_{01} = \frac{\theta}{\lambda} \pi_{00}, \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} \pi_{n1} = \pi_{00} \left[\frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-1} r^j \rho^{n-1-j} + \frac{\theta r}{\mu_b} \rho^{n-1} \right], & n \geq 1 \end{cases} \quad (4.13)$$

dengan

$$\pi_{00} = \frac{(1-r)(1-\rho)}{1-\rho + \frac{\theta}{\lambda}(1-r)(1-\rho) + \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} + \frac{\theta}{\mu_b}(1-r)} \quad (4.14)$$

Bukti:

Probabilitas *steady state* pada model antrian M/M/1/WV ini berbentuk kontinu (π_{n0}, π_{n1}) , dengan π_{n0} merupakan probabilitas *steady state* pada waktu pelayanan libur sejumlah n pelanggan dalam sistem dan π_{n1} merupakan probabilitas *steady state* pada waktu pelayanan sibuk sejumlah n pelanggan dalam sistem. Teorema 4.2 dapat dibuktikan dengan mengambil *state* ($n \geq 1$). Berdasarkan persamaan (2.7), probabilitas *steady state* dari π_n adalah

$$\pi_n = \pi_1 R^{n-1}, \quad n \geq 1$$

atau

$$[\pi_{n0} \ \pi_{n1}] = [\pi_{10} \ \pi_{11}] R^{n-1}, \quad n \geq 1 \quad (4.15)$$

Sebelum membuktikan Teorema 4.2, dicari terlebih dahulu π_n untuk $n = 0$ yaitu $\pi_0 = [\pi_{00} \ \pi_{01}]$ dan untuk $n = 1$ yaitu $\pi_1 = [\pi_{10} \ \pi_{11}]$ dengan menggunakan persamaan (2.16),

$$[\pi_{00} \ \pi_{01} \ \pi_{10} \ \pi_{11}] \begin{bmatrix} A_{00} & C \\ B_{10} & RB + A \end{bmatrix} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}] \quad (4.16)$$

Sebelumnya dicari $RB + A$ sebagai berikut:

$$RB + A = \begin{bmatrix} r & \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_v & 0 \\ 0 & \mu_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} -(\lambda + \theta + \mu_v) & \theta \\ 0 & -(\lambda + \mu_b) \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} r\mu_v & \frac{\theta r}{(1-r)} \\ 0 & \rho\mu_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\lambda + \theta + \mu_v) & \theta \\ 0 & -(\lambda + \mu_b) \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} -(\lambda + \theta + (1-r)\mu_v) & \frac{\theta r}{(1-r)} + \theta \\ 0 & \rho\mu_b - \lambda - \mu_b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.10) diperoleh

$$RB + A = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{r} & \frac{\lambda}{r} - \mu_v \\ 0 & (\rho - 1)\mu_b - \lambda \end{bmatrix}$$

diketahui bahwa $\rho = \frac{\lambda}{\mu_b}$, sehingga $\lambda = \rho\mu_b$.

Jadi,

$$\begin{aligned}
RB + A &= \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{r} & \frac{\lambda}{r} - \mu_v \\ 0 & (\rho - 1)\mu_b - \lambda \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{r} & \frac{\lambda}{r} - \mu_v \\ 0 & (\rho - 1)\mu_b - \rho\mu_b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{r} & \frac{\lambda}{r} - \mu_v \\ 0 & -\mu_b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} A_{00} & C \\ B_{10} & RB + A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\lambda + \theta) & \theta & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda \\ \mu_v & 0 & -\frac{\lambda}{r} & \frac{\lambda}{r} - \mu_v \\ \mu_b & 0 & 0 & -\mu_b \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Selanjutnya substitusi persamaan (4.17) ke persamaan (4.16), menjadi

$$[\pi_{00} \ \pi_{01} \ \pi_{10} \ \pi_{11}] \begin{bmatrix} A_{00} & C \\ B_{10} & RB + A \end{bmatrix} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]$$

$$\begin{aligned}
 & [\pi_{00} \ \pi_{01} \ \pi_{10} \ \pi_{11}] \begin{bmatrix} -(\lambda + \theta) & \theta & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda \\ \mu_v & 0 & -\frac{\lambda}{r} & \frac{\lambda}{r} - \mu_v \\ \mu_b & 0 & 0 & -\mu_b \end{bmatrix} \\
 & = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]
 \end{aligned}$$

diperoleh,

$$-(\lambda + \theta)\pi_{00} + \mu_v\pi_{10} + \mu_b\pi_{11} = 0 \quad (4.18)$$

$$\theta\pi_{00} - \lambda\pi_{01} = 0 \quad (4.19)$$

$$\lambda\pi_{00} - \frac{\lambda}{r}\pi_{10} = 0 \quad (4.20)$$

$$\lambda\pi_{01} + \left(\frac{\lambda}{r} - \mu_v\right)\pi_{10} - \mu_b\pi_{11} = 0$$

Selanjutnya adalah mendapatkan π_0 dan π_1 dari persamaan (4.15) dengan π_{00} diasumsikan konstan karena π_{00} memuat variabel yang tidak berubah dan sudah diketahui. Persamaan (4.15) mempunyai batas untuk $n \geq 1$, sehingga hanya berlaku untuk π_1 , namun karena π_{00} konstan dan sudah diketahui maka untuk π_0 dapat menggunakan persamaan (4.15), sebagai berikut:

1. Mendapatkan π_0 .

Persamaan π_0 adalah $\pi_0 = [\pi_{00} \ \pi_{01}]$

Dari persamaan (4.19) akan diperoleh π_{01} , sebagai berikut:

$$\theta\pi_{00} - \lambda\pi_{01} = 0$$

$$\lambda\pi_{01} = \theta\pi_{00}$$

$$\pi_{01} = \frac{\theta}{\lambda}\pi_{00}$$

Sehingga persamaan $\pi_0 = [\pi_{00} \ \pi_{01}]$ menjadi,

$$\pi_0 = [\pi_{00} \ \pi_{01}] = \left[\pi_{00} \ \frac{\theta}{\lambda}\pi_{00} \right] = \pi_{00} \left[1 \ \frac{\theta}{\lambda} \right].$$

2. Mendapatkan π_1 .

Persamaan π_1 adalah $\pi_1 = [\pi_{10} \ \pi_{11}]$

Dari persamaan (4.20) akan diperoleh π_{10} , sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\lambda\pi_{00} - \frac{\lambda}{r}\pi_{10} &= 0 \\ \frac{\lambda}{r}\pi_{10} &= \lambda\pi_{00} \\ \pi_{10} &= \lambda\frac{r}{\lambda}\pi_{00} \\ \pi_{10} &= r\pi_{00}\end{aligned}$$

Dari persamaan (4.18) dan substitusi π_{10} akan diperoleh π_{11} , sebagai berikut:

$$\begin{aligned}-(\lambda + \theta)\pi_{00} + \mu_v\pi_{10} + \mu_b\pi_{11} &= 0 \\ -(\lambda + \theta)\pi_{00} + \mu_v r\pi_{00} + \mu_b\pi_{11} &= 0 \\ \mu_b\pi_{11} &= (\lambda + \theta - \mu_v r)\pi_{00} \\ \pi_{11} &= \frac{(\lambda + \theta - \mu_v r)}{\mu_b}\pi_{00}\end{aligned}$$

Substitusi persamaan (4.10), diperoleh

$$\begin{aligned}\pi_{11} &= \frac{(\lambda + \theta - \mu_v r)}{\mu_b}\pi_{00} \\ &= \frac{\left(\frac{r\theta}{1-r} + \mu_v r + \theta - \mu_v r\right)}{\mu_b}\pi_{00} \\ &= \frac{\left(\frac{r\theta}{1-r} + \theta\right)}{\mu_b}\pi_{00} \\ &= \frac{\left(\frac{(1-r)\theta + r\theta}{1-r}\right)}{\mu_b}\pi_{00} \\ &= \frac{\theta}{\mu_b(1-r)}\pi_{00}\end{aligned}$$

Sehingga persamaan $\pi_1 = [\pi_{10} \ \pi_{11}]$ menjadi,

$$\pi_1 = [\pi_{10} \ \pi_{11}] = \left[r\pi_{00} \ \frac{\theta}{\mu_b(1-r)}\pi_{00} \right] = \pi_{00} \left[r \ \frac{\theta}{\mu_b(1-r)} \right].$$

Selanjutnya, untuk R^{n-1} dapat diperoleh dengan melihat persamaan (4.6),

Jika,

$$R^n = \begin{bmatrix} r^n & \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-1} r^j \rho^{n-1-j} \\ 0 & \rho^n \end{bmatrix}$$

maka,

$$R^{n-1} = \begin{bmatrix} r^{n-1} & \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-2} r^j \rho^{n-2-j} \\ 0 & \rho^{n-1} \end{bmatrix}$$

Persamaan (4.11) dan (4.13) dapat diperoleh dari substitusi $[\pi_{10} \ \pi_{11}]$ dan R^{n-1} ke persamaan $\pi_n = [\pi_{n0} \ \pi_{n1}] = [\pi_{10} \ \pi_{11}] R^{n-1}$, sebagai berikut:

$$\begin{aligned} [\pi_{n0} \ \pi_{n1}] &= [\pi_{10} \ \pi_{11}] R^{n-1} \\ &= \pi_{00} \begin{bmatrix} r & \frac{\theta}{\mu_b(1-r)} \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{n-1} & \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-2} r^j \rho^{n-2-j} \\ 0 & \rho^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \pi_{00} r & \pi_{00} \frac{\theta}{\mu_b(1-r)} \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^{n-1} & \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-2} r^j \rho^{n-2-j} \\ 0 & \rho^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \pi_{00} r r^{n-1} & \pi_{00} r \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-2} r^j \rho^{n-2-j} + \pi_{00} \frac{\theta}{\mu_b(1-r)} \rho^{n-1} \\ 0 & \rho^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \pi_{00} r^n & \pi_{00} \left(\frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-2} r^{j+1} \rho^{n-2-j} + \frac{\theta}{\mu_b(1-r)} \rho^{n-1} \right) \\ 0 & \rho^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \pi_{00} r^n & \pi_{00} \left(\frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=1}^{n-1} r^j \rho^{n-1-j} + \frac{\theta}{\mu_b(1-r)} \rho^{n-1} \right) \\ 0 & \rho^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \pi_{00} r^n & \pi_{00} \left(\frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-1} r^j \rho^{n-1-j} - \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \rho^{n-1} + \frac{\theta}{\mu_b(1-r)} \rho^{n-1} \right) \\ 0 & \rho^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\pi_{00} r^n \quad \pi_{00} \left(\frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-1} r^j \rho^{n-1-j} + \frac{\theta(1-r)}{\mu_b(1-r)} \rho^{n-1} \right) \right] \\
&= \left[\pi_{00} r^n \quad \pi_{00} \left(\frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-1} r^j \rho^{n-1-j} + \frac{\theta}{\mu_b} \rho^{n-1} \right) \right]
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa:

$$\pi_{n0} = \pi_{00} r^n, \quad n \geq 0,$$

$$\pi_{01} = \frac{\theta}{\lambda} \pi_{00},$$

$$\pi_{n1} = \pi_{00} \left[\frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-1} r^j \rho^{n-1-j} + \frac{\theta}{\mu_b} \rho^{n-1} \right], n \geq 1 \quad \blacksquare$$

Setelah probabilitas *steady state* π_{n0} dan π_{n1} diperoleh, selanjutnya probabilitas *steady state* π_{n0} dan π_{n1} digunakan untuk menyelesaikan Teorema 4.3 berikut.

Teorema 4.3[6]

Jika $\rho < 1$ dan $\mu_b > \mu_v$, panjang antrian dalam sistem(L) merupakan jumlahan dua variabel acak yang independen, yaitu

$$L = L_0 + L_{wv}$$

Dengan L_0 adalah panjang antrian pada antrian M/M/1 pada keadaan *steady state* dengan parameter $1 - \rho$ dan L_{wv} adalah panjang antrian dalam antrian M/M/1/WV yang mempunyai modifikasi sebagai berikut:

$$P\{L_{wv} = 0\} = K_1^* \frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r)$$

$$P\{L_{wv} = n\} = K_1^* \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1 - r) r^n, \quad n \geq 1$$

dengan

$$K_1^* = \frac{\pi_{00}}{(1-r)(1-\rho)} \quad (4.21)$$

atau

$$K_1^* = \frac{1}{\left[\frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r) + r \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \right]} \quad (4.22)$$

Bukti:

Teorema 4.3 dibuktikan dengan menggunakan *Probability Generating Function*. Berdasarkan persamaan (2.6), pgf dari panjang antrian dalam sistem (L) bisa ditulis

$$G_L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n0} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n1} \quad (4.23)$$

Persamaan (4.23) dapat diselesaikan dengan menggunakan deret geometri, berikut ini adalah tahapan untuk menyelesaikan persamaan (4.23).

1. Menyelesaikan perhitungan $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n0}$.

Substitusi persamaan (4.11) diperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n0} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n [\pi_{00} r^n]$$

karena π_{00} konstan, maka

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n0} &= \pi_{00} \sum_{n=0}^{\infty} z^n r^n \\ &= \pi_{00} [z^0 r^0 + z^1 r^1 + z^2 r^2 + \dots \dots \dots] \\ &= \pi_{00} [1 + z^1 r^1 + z^2 r^2 + \dots \dots \dots] \\ &= \pi_{00} \frac{1}{1 - rz} \end{aligned} \quad (4.24)$$

2. Menyelesaikan perhitungan $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n1}$.

Substitusi persamaan (4.12) dan (4.13) diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n1} &= z^0 \pi_{01} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \pi_{n1} \\ &= \pi_{01} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \pi_{n1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\theta}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \pi_{n1} \\
&= \frac{\theta}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left[\pi_{00} \left(\frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-1} r^j \rho^{n-1-j} + \frac{\theta}{\mu_b} \rho^{n-1} \right) \right]
\end{aligned}$$

karena π_{00} konstan, maka

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n1} &= \pi_{00} \left[\frac{\theta}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left[\left(\frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \sum_{j=0}^{n-1} r^j \rho^{n-1-j} + \frac{\theta}{\mu_b} \rho^{n-1} \right) \right] \right] \\
&= \pi_{00} \left[\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \left(z^1 \sum_{j=0}^0 r^j \rho^{-j} + z^2 \sum_{j=0}^1 r^j \rho^{1-j} + z^3 \sum_{j=0}^2 r^j \rho^{2-j} + \dots \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\theta}{\mu_b} (z^1 \rho^0 + z^2 \rho^1 + z^3 \rho^2 + \dots) \right] \\
&= \pi_{00} \left[\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} (z^1 (r^0 \rho^0) + z^2 (r^0 \rho^1 + r^1 \rho^0) \right. \\
&\quad \left. + z^3 (r^0 \rho^2 + r^1 \rho^1 + r^2 \rho^0) + \dots \right) + \frac{\theta}{\mu_b} (z^1 + z^2 \rho^1 + z^3 \rho^2 + \dots) \left. \right] \\
&= \pi_{00} \left[\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \frac{z}{1-rz} \frac{1}{1-\rho z} + \frac{\theta}{\mu_b} \frac{z}{1-\rho z} \right]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Substitusi persamaan (4.24) dan persamaan (4.25) ke persamaan (4.23), diperoleh

$$\begin{aligned}
G_L(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n0} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n1} \\
&= \pi_{00} \left[\frac{1}{1-rz} + \frac{1}{\lambda} + \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \frac{z}{1-rz} \frac{1}{1-\rho z} + \frac{\theta}{\mu_b} \frac{z}{1-\rho z} \right] \\
&= \pi_{00} \frac{1}{1-\rho z} \frac{1}{1-r} \left[\frac{\theta}{\lambda} (1-\rho z)(1-r) + \frac{1-r}{1-rz} (1-\rho z) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \frac{z(1-r)}{1-rz} + \frac{\theta}{\mu_b} z(1-r) \right]
\end{aligned}$$

Misalkan, $K_1^* = \frac{\pi_{00}}{(1-r)(1-\rho)}$ sehingga

$$\begin{aligned}
G_L(z) &= \frac{1}{1-\rho z} \frac{1}{1-r} (K_1^*(1-r)(1-\rho)) \left[\frac{\theta}{\lambda} (1-\rho z)(1-r) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1-r}{1-rz} (1-\rho z) + \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \frac{z(1-r)}{1-rz} + \frac{\theta}{\mu_b} z(1-r) \right] \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho z} K_1^* \left[\frac{\theta}{\lambda} (1-\rho z)(1-r) + \frac{1-r}{1-rz} (1-\rho z) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \frac{z(1-r)}{1-rz} + \frac{\theta}{\mu_b} z(1-r) \right]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Persamaan (4.26) akan disederhanakan, dengan melihat persamaan (4.27), persamaan (4.28), dan persamaan (4.29).

1. Pada Teorema 4.1 diketahui bahwa $\rho = \frac{\lambda}{\mu_b}$, sehingga

$$\frac{\theta}{\mu_b} = \frac{\theta}{\frac{\lambda}{\rho}} = \frac{\theta}{\lambda} \rho \tag{4.27}$$

2. Bentuk persamaan $\frac{1-r}{1-rz} (1-\rho z)$ dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{1-r}{1-rz} (1-\rho z) &= \frac{(1-r)(1-\rho z)}{1-rz} \\
&= \frac{1-rz}{1-r-\rho z + \rho zr} \\
&= \frac{1-rz}{1-r-\rho z + \rho zr + rz - rz + r^2z - r^2z} \\
&= \frac{1-rz}{1-r-rz + r^2z + rz - r^2z - \rho z + \rho zr} \\
&= \frac{1-rz}{(1-r)(1-rz) + (r-\rho)(z-zr)} \\
&= (1-r) \frac{1-rz}{1-rz} + (r-\rho) \frac{(z-zr)}{1-rz} \\
&= (1-r) + (r-\rho) \frac{z(1-r)}{1-rz}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

3. Dengan melihat persamaan (4.10), bentuk persamaan $\frac{\theta r}{\mu_b(1-r)}$ dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{1-r} + \mu_v &= \frac{\lambda}{r} \\ \frac{\theta}{1-r} &= \frac{\lambda}{r} - \mu_v \\ \frac{\theta}{1-r} &= \frac{\lambda - r\mu_v}{r}\end{aligned}$$

kedua ruas dikalikan dengan r menjadi

$$\frac{\theta r}{1-r} = \lambda - r\mu_v$$

kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{\mu_b}$ menjadi

$$\frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} = \frac{\lambda - r\mu_v}{\mu_b}$$

Pada Teorema 4.1 diketahui bahwa $\rho = \frac{\lambda}{\mu_b}$, sehingga

$$\frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} = \rho - \frac{r\mu_v}{\mu_b} \quad (4.29)$$

Berikut ini adalah penyederhanaan persamaan (4.25), substitusi persamaan (4.27), persamaan (4.28), dan persamaan (4.29) ke persamaan (4.26), menjadi

$$\begin{aligned}G_L(z) &= \frac{1-\rho}{1-\rho z} K_1^* \left[\frac{\theta}{\lambda} (1-\rho z)(1-r) + \frac{1-r}{1-rz} (1-\rho z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} \frac{z(1-r)}{1-rz} + \frac{\theta}{\mu_b} z(1-r) \right] \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho z} K_1^* \left[\frac{\theta}{\lambda} (1-r-\rho z + \rho z r) \right. \\ &\quad \left. + \left((1-r) + (r-\rho) \frac{z(1-r)}{1-rz} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\rho - \frac{r\mu_v}{\mu_b} \right) \frac{z(1-r)}{1-rz} + \frac{\theta}{\lambda} \rho z (1-r) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-\rho}{1-\rho z} K_1^* \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} - \frac{\theta r}{\lambda} - \frac{\theta \rho z}{\lambda} + \frac{\theta \rho z r}{\lambda} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left((1-r) + (r-\rho) \frac{z(1-r)}{1-rz} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\rho - \frac{r\mu_v}{\mu_b} \right) \frac{z(1-r)}{1-rz} + \frac{\theta \rho z}{\lambda} - \frac{\theta \rho z r}{\lambda} \right] \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho z} K_1^* \left[\frac{\theta}{\lambda} - \frac{\theta r}{\lambda} + (1-r) + (r-\rho) \frac{z(1-r)}{1-rz} \right. \\
&\quad \left. + \left(\rho - \frac{r\mu_v}{\mu_b} \right) \frac{z(1-r)}{1-rz} \right] \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho z} K_1^* \left[\frac{\theta}{\lambda} - \frac{\theta r}{\lambda} + (1-r) + \frac{z(1-r)}{1-rz} \left(r - \rho + \left(\rho - \frac{r\mu_v}{\mu_b} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho z} K_1^* \left[\frac{\theta - \theta r + \lambda - \lambda r}{\lambda} + \frac{z(1-r)}{1-rz} \left(r - \frac{r\mu_v}{\mu_b} \right) \right] \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho z} K_1^* \left[\frac{\theta(1-r) + \lambda(1-r)}{\lambda} + \frac{z(1-r)}{1-rz} \left(r - \frac{r\mu_v}{\mu_b} \right) \right] \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho z} K_1^* \left[\frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1-r) + r \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \frac{z(1-r)}{1-rz} \right] \\
&= \frac{1-\rho}{1-\rho z} G_{L_{wv}}(z) \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Setelah penyederhanaan dari persamaan (4.26) diperoleh yaitu persamaan (4.30), selanjutnya adalah membuktikan persamaan (4.22) dengan substitusi persamaan (4.14) ke persamaan (4.21), menjadi

$$\begin{aligned}
K_1^* &= \frac{\pi_{00}}{(1-r)(1-\rho)} \\
\frac{1}{K_1^*} &= \frac{(1-r)(1-\rho)}{\pi_{00}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-r)(1-\rho) \frac{1-\rho + \frac{\theta}{\lambda}(1-r)(1-\rho) + \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} + \frac{\theta}{\mu_b}(1-r)}{(1-r)(1-\rho)} \\
&= 1-\rho + \frac{\theta}{\lambda}(1-r)(1-\rho) + \frac{\theta r}{\mu_b(1-r)} + \frac{\theta}{\mu_b}(1-r)
\end{aligned}$$

Substitusi persamaan (4.27) dan (4.29), diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{1}{K_1^*} &= 1-\rho + \frac{\theta}{\lambda}(1-\rho-r+r\rho) + \left(\rho - \frac{r\mu_v}{\mu_b}\right) + \frac{\theta}{\lambda}\rho(1-r) \\
&= 1-\rho + \frac{\theta}{\lambda} - \frac{\theta}{\lambda}\rho - \frac{\theta}{\lambda}r + \frac{\theta}{\lambda}r\rho + \rho - \frac{r\mu_v}{\mu_b} + \frac{\theta}{\lambda}\rho - \frac{\theta}{\lambda}\rho r \\
&= 1 + \frac{\theta}{\lambda} - \frac{\theta}{\lambda}r - \frac{r\mu_v}{\mu_b} + r - r \\
&= (1-r) + \frac{\theta}{\lambda}(1-r) + r - \frac{r\mu_v}{\mu_b} \\
&= (1-r)\left(1 + \frac{\theta}{\lambda}\right) + r\left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) \\
&= \frac{\theta + \lambda}{\lambda}(1-r) + r\left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) \\
&= \frac{1}{\frac{\theta + \lambda}{\lambda}(1-r) + r\left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right)}
\end{aligned}$$

Jadi, persamaan (4.26) terbukti bahwa

$$K_1^* = \frac{1}{\frac{\theta + \lambda}{\lambda}(1-r) + r\left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right)} \quad (4.31)$$

Panjang antrian dalam antrian $G_{L_{wv}}(z)$ diperoleh dari persamaan (4.30), sehingga,

$$G_{L_{wv}}(z) = K_1^* \left[\frac{\theta + \lambda}{\lambda}(1-r) + r\left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) \frac{z(1-r)}{1-rz} \right] \quad (4.32)$$

Persamaan (4.31) merupakan persamaan panjang antrian dalam antrian M/M/1/WV yang masih ada dalam kondisi pgf, berikut ini adalah penyelesaian pgf dari persamaan (4.31).

$$\begin{aligned}
G_{L_{wv}}(z) &= K_1^* \left[\frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r) + r \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \frac{z(1 - r)}{1 - rz} \right] \\
&= K_1^* \left[\frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r) + r \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) z(1 - r) \frac{1}{1 - rz} \right] \\
&= K_1^* \frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r) + K^* r \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) z(1 - r) \frac{1}{1 - rz}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan deret geometri, persamaan deret dari $\frac{1}{1-rz}$ adalah $(1 + r^1 z^1 + r^2 z^2 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} (rz)^n$, sehingga

$$\begin{aligned}
G_{L_{wv}}(z) &= K_1^* \frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r) + K_1^* r \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) z(1 - r) \sum_{n=0}^{\infty} (rz)^n \\
&= K_1^* \frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r) + K_1^* \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1 - r) \sum_{n=1}^{\infty} (rz)^{n+1} \\
&= K_1^* \frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r) + K_1^* \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1 - r) (rz)^{n+1} \\
&= K_1^* \frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r) + K_1^* \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1 - r) r^n z^n \\
&= K_1^* \frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} K_1^* \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1 - r) r^n \right) z^n
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Probabilitas panjang antrian dalam antrian M/M/1/WV(L_{wv}) pada persamaan (4.33) diperoleh dengan memperhatikan persamaan (4.23), sebagai berikut:

Dari persamaan (4.23), yaitu

$$G_L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n0} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n1} = G_{L_0}(z) + G_{L_{wv}}(z)$$

sehingga rumus pgf untuk L_{wv} adalah

$$\begin{aligned}
 G_{L_{wv}}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_{n1} \\
 G_{L_{wv}}(z) &= z^0 P\{L_{wv} = 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n P\{L_{wv} = n\} \\
 &= P\{L_{wv} = 0\} + \sum_{n=1}^{\infty} P\{L_{wv} = n\} z^n
 \end{aligned}$$

Lihat persamaan (4.33), diperoleh

$$P\{L_{wv} = 0\} = K_1 * \frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r), \quad \text{untuk } n = 0$$

dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{L_{wv} = n\} z^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} K_1 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1 - r) r^n \right) z^n$$

untuk $n \geq 1$

Sehingga probabilitas panjang antrian dalam antrian M/M/1/WV saat tidak ada pelanggan dalam sistem, atau dikatakan periode libur dimulai adalah

$$P\{L_{wv} = 0\} = K_1 * \frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r)$$

Probabilitas panjang antrian M/M/1/WV dalam keadaan *steady state* saat ada n pelanggan yang tersisa dalam sistem pada saat kepergian seorang pelanggan ($n \geq 1$) adalah

$$P\{L_{wv} = n\} = K_1 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1 - r) r^n \quad (4.34)$$

Jadi, terbukti benar bahwa panjang antrian dalam antrian M/M/1/WV adalah

$$\begin{aligned}
 P\{L_{wv} = 0\} &= K_1 * \frac{\theta + \lambda}{\lambda} \\
 P\{L_{wv} = n\} &= K_1 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1 - r) r^n, \quad n \geq 1
 \end{aligned}$$

■

Setelah panjang antrian dalam antrian M/M/1WV(L_{wv}) diperoleh, selanjutnya adalah mendapatkan distribusi dari L atau ditulis dengan $E(L)$. Sebelumnya akan dicari $E(L_0)$, sebagai berikut:

Untuk mendapatkan L_0 menggunakan rumus

$$P_n = \rho^n P_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

P_n merupakan peluang ada n pelanggan dalam sistem. dengan $P_0 = 1 - \rho$, sehingga $P_n = (1 - \rho)\rho^n$ untuk $\rho < 1, n = 1, 2, 3, \dots$

sehingga,

$$\begin{aligned} E(L_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n (1 - \rho)\rho^n \\ &= (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho \rho^{n-1} \\ &= (1 - \rho) \rho \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} \\ &= (1 - \rho) \rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^n \\ &= (1 - \rho) \rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \\ &= (1 - \rho) \rho \left(\frac{d}{d\rho} \frac{1}{1 - \rho} \right) \\ &= (1 - \rho) \rho \frac{1}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} \end{aligned} \tag{4.35}$$

Selanjutnya, ekspektasi dari (L_{wv}) dapat diperoleh dengan menggunakan rumus ekspektasi yaitu

$$E(x) = \sum_x x f(x)$$

sehingga,

$$\begin{aligned} E(L_{wv}) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{L_{wv} = n\}n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} K_1 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) (1-r)r^n n \\ &= K_1 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \\ &= K_1 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)r^{n+1} \\ &= K_1 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) (1-r)r \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)r^n \\ &= K_1 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) (1-r)r \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\right)^2 \end{aligned}$$

dengan menggunakan deret geometri, didapat

$$\begin{aligned} E(L_{wv}) &= K_1 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) (1-r)r \left(\frac{1}{1-r}\right)^2 \\ &= K_1 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) \frac{r}{1-r} \end{aligned}$$

Dengan menjumlahkan persamaan (4.34) dan persamaan (4.35) diperoleh distribusi panjang antrian (L), yaitu

$$\begin{aligned} E(L) &= E(L_0) + E(L_{wv}) \\ E(L) &= \frac{\rho}{1-\rho} + K_1 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) \frac{r}{1-r} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Setelah distribusi panjang antrian dalam sistem M/M/1/WV diperoleh, selanjutnya adalah mendapatkan ekspektasi waktu tunggu dari sistem antrian M/M/1/WV.

4.3 Ekspektasi Waktu Tunggu dalam Sistem Antrian M/M/1/WV

Waktu tunggu dalam sistem antrian M/M/1WV dinotasikan dengan (W). Hubungan antara waktu tunggu dengan panjang antrian dalam sistem antrian ditunjukkan pada persamaan (2.1). Teorema 4.4 berikut ini akan membuktikan ekspektasi waktu tunggu antrian dalam sistem antrian M/M/1/WV yang masih berhubungan dengan panjang antrian L pada Teorema 4.3 yang sudah dibuktikan sebelumnya.

Teorema 4.4[6]

Jika $\rho < 1$ dan $\mu_b > \mu_v$, waktu tunggu dalam sistem(W) merupakan jumlahan dua variabel acak yang independen, yaitu $W = W_0 + W_{wv}$

Dengan W_0 adalah waktu tunggu dari pelanggan pada antrian M/M/1 yang mempunyai distribusi eksponensial dengan parameter $\mu_b(1 - \rho)$ dan W_{wv} adalah waktu tunggu dari pelanggan pada antrian M/M/1/WV yang ditulis dengan,

$$W_{wv}^*(s) = K_2^* \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1 - r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \frac{\sigma}{\sigma + s} \right]$$

dengan

$$\sigma = \frac{\lambda}{r} (1 - r)$$

Bukti:

Dari Teorema 4.3, *Probability Generating Function*(pgf) dari jumlah pelanggan dalam sistem $G_L(z)$ adalah

$$G_L(z) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho z} K_1^* \left[\frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1 - r) + r \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \frac{z(1 - r)}{1 - rz} \right]$$

diketahui bahwa $z = 1 - \frac{s}{\lambda}$, sehingga

1. Untuk $\frac{1-\rho}{1-\rho z}$, dengan substitusi $z = 1 - \frac{s}{\lambda}$ dan $\rho = \frac{\lambda}{\mu_b}$, diperoleh,

$$\begin{aligned}
\frac{1-\rho}{1-\rho z} &= \frac{1-\frac{\lambda}{\mu_b}}{1-\frac{\lambda}{\mu_b}\left(1-\frac{s}{\lambda}\right)} = \frac{\frac{\mu_b-\lambda}{\mu_b}}{1-\frac{\lambda}{\mu_b}+\frac{\lambda s}{\mu_b \lambda}} = \frac{\frac{\mu_b-\lambda}{\mu_b}}{\frac{\mu_b-\lambda+s}{\mu_b}} \\
&= \left(\frac{\mu_b-\lambda}{\mu_b}\right)\left(\frac{\mu_b}{\mu_b-\lambda+s}\right) = \frac{\mu_b-\lambda}{\mu_b-\lambda+s} = \frac{\mu_b-\rho\mu_b}{\mu_b-\rho\mu_b+s} \\
&= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} \tag{4.37}
\end{aligned}$$

2. Untuk $\frac{1-r}{1-rz}$, dengan substitusi $z = 1 - \frac{s}{\lambda}$ diperoleh,

$$\begin{aligned}
\frac{1-r}{1-rz} &= \frac{1-r}{1-r\left(1-\frac{s}{\lambda}\right)} = \frac{1-r}{1-r+\frac{rs}{\lambda}} = \frac{1-r}{\frac{\lambda-r\lambda+rs}{\lambda}} \\
&= \frac{\lambda(1-r)}{\lambda(1-r)+rs} = \frac{\lambda(1-r)}{r\left(\frac{\lambda}{r}(1-r)\right)+s} = \frac{\frac{\lambda}{r}(1-r)}{\frac{\lambda}{r}(1-r)+s} = \frac{\sigma}{\sigma+s} \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Untuk memperoleh persamaan $W^*(s)$, digunakan persamaan (4.37) yang disubstitusi pada persamaan hubungan antara pgf dari L atau ditulis dengan $G_L(z)$ dan W^* , yaitu

$G_L(z) = W^*(\lambda(1-z))$, sehingga

$$\begin{aligned}
W^*(s) &= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \\
&\quad \left[\frac{\theta+\lambda}{\lambda}(1-r) + r\left(1-\frac{\mu_v}{\mu_b}\right)\left(1-\frac{s}{\lambda}\right)\frac{\sigma}{\sigma+s} \right] \\
&= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \left[\frac{\theta}{\lambda}(1-r) + (1-r) + r\left(1-\frac{\mu_v}{\mu_b}\right)\left(1-\frac{s}{\lambda}\right)\frac{\sigma}{\sigma+s} \right] \\
&= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \\
&\quad \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b}\right)(1-r) - \frac{\mu_v}{\mu_b}(1-r) + (1-r) + r\left(1-\frac{\mu_v}{\mu_b}\right)\left(1-\frac{s}{\lambda}\right)\frac{\sigma}{\sigma+s} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \\
&\quad \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + (1-r) \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) + r \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(1 - \frac{s}{\lambda} \right) \frac{\sigma}{\sigma+s} \right] \\
&= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \\
&\quad \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(1 - r + r \left(1 - \frac{s}{\lambda} \right) \frac{\sigma}{\sigma+s} \right) \right] \\
&= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \\
&\quad \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(1 - r + r \left(\frac{\sigma}{\sigma+s} - \frac{\sigma s}{\lambda(\sigma+s)} \right) \right) \right] \\
&= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \\
&\quad \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(1 - r + r \left(\frac{\lambda\sigma - \sigma s}{\lambda(\sigma+s)} \right) \right) \right] \\
&= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \\
&\quad \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(1 - r + r \left(\frac{\sigma(\lambda-s)}{\lambda(\sigma+s)} \right) \right) \right] \\
&= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \\
&\quad \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(\frac{(1-r)\lambda(\sigma+s) + r\sigma(\lambda-s)}{\lambda(\sigma+s)} \right) \right] \\
&= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \\
&\quad \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(\frac{\lambda\sigma + \lambda s - r\lambda\sigma + r\lambda s + r\lambda\sigma - r\sigma s}{\lambda(\sigma+s)} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(\frac{\lambda(\sigma+s) - rs(\lambda+\sigma)}{\lambda(\sigma+s)} \right) \right]$$

substitusi persamaan (4.38) diperoleh

$$\begin{aligned} W^*(s) &= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(\frac{\lambda \left(\frac{\lambda}{r} (1-r) + s \right) - rs \left(\lambda + \frac{\lambda}{r} (1-r) \right)}{\lambda \left(\frac{\lambda}{r} (1-r) + s \right)} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(\frac{\lambda \left(\frac{\lambda}{r} - \lambda + s \right) - rs \frac{\lambda}{r}}{\lambda \left(\frac{\lambda}{r} (1-r) + s \right)} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(\frac{\frac{\lambda^2}{r} - \lambda^2 + \lambda s - rs \frac{\lambda}{r}}{\lambda \left(\frac{\lambda}{r} - \lambda + s \right)} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(\frac{\lambda \left(\frac{\lambda}{r} - \lambda \right)}{\lambda \left(\frac{\lambda}{r} - \lambda + s \right)} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{r} - \lambda \right)}{\left(\frac{\lambda}{r} - \lambda + s \right)} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_b(1-\rho)}{\mu_b(1-\rho)+s} K_2^* \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma+s} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{sehingga } W_{wv}^*(s) = \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma+s} \right) \right]$$

Jadi, terbukti bahwa

$$W_{wv}^*(s) = \left[\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma + s} \right) \right] \quad \blacksquare$$

K_2^* diperoleh dari hasil yang ekivalen dengan K_1^* pada distribusi panjang antrian persamaan (4.31). Berikut ini akan diperoleh K_2^* yang ekivalen dengan persamaan (4.31).

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_1^*} &= \frac{\theta + \lambda}{\lambda} (1-r) + r \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \\ &= \left(1 + \frac{\theta}{\lambda} \right) (1-r) + (-(1-r) + 1) \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \\ &= \left(1 + \frac{\theta}{\lambda} \right) (1-r) - (1-r) \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \\ &= (1-r) \left[\left(1 + \frac{\theta}{\lambda} \right) - \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \right] + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \\ &= (1-r) \left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \end{aligned}$$

Jadi, K_2^* yang ekivalen dengan persamaan (4.35) adalah

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_2^*} &= \left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \\ K_2^* &= \frac{1}{\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) (1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right)} \end{aligned}$$

Selanjutnya adalah mendapatkan ekspektasi waktu tunggu dari antrian M/M/1/WW, dengan menggunakan hubungan antara distribusi panjang antrian dan waktu tunggu dalam sistem pada persamaan (2.1) dan substitusi persamaan (4.42), sehingga

$$\begin{aligned} E(W) &= \frac{1}{\lambda} E(L) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\rho}{1-\rho} + K_2^* \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \frac{r}{1-r} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\lambda} K_2^* \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b} \right) \frac{r}{1-r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\rho\mu_b} \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\lambda} K_2^* \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) \frac{r}{1-r} \\
 &= \frac{1}{\mu_b(1-\rho)} + K_2^* \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) \frac{r}{\lambda(1-r)}
 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan ekspektasi waktu tunggu dari sistem antrian M/M/1/WV, yaitu

$$E(W) = \frac{1}{\mu_b(1-\rho)} + K_2^* \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) \frac{r}{\lambda(1-r)}$$

4.4 Simulasi Numerik

Pada bagian ini digunakan rumusan distribusi panjang antrian dan ekspektasi waktu tunggu dengan inputan ekspektasi perbandingan waktu sibuk *server* yang berbeda. Simulasi Numerik ini dilakukan dengan bantuan *software* Matlab 7.8.0.

Langkah pertama diberikan nilai masukan parameter sebagai berikut:

Laju kedatangan : $\lambda > 0$ (pelanggan per satuan waktu)

Laju pelayanan pada waktu libur : $\mu_v > 0$ (pelanggan per satuan waktu)

Rata-rata pada waktu pelayanan : $\theta > 0$ (satuan waktu)

Ekspektasi perbandingan waktu sibuk *server* : ρ (satuan waktu) didefinisikan:

$$r = \frac{1}{2\mu_v} \left(\lambda + \theta + \mu_v - \sqrt{(\lambda + \theta + \mu_v)^2 - 4\lambda\mu_v} \right)$$

$$\mu_b = \frac{\lambda}{\rho}$$

$$K_1^* = \frac{1}{\frac{\theta + \lambda}{\lambda}(1-r) + r \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right)}$$

merupakan K^* pada distribusi panjang antrian.

$$K_2^* = \frac{1}{\left(\frac{\theta}{\lambda} + \frac{\mu_v}{\mu_b}\right)(1-r) + \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right)}$$

merupakan K^* pada ekspektasi waktu tunggu

$$E(L) = \frac{\rho}{1-\rho} + K_1^* \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) \frac{r}{1-r}$$

merupakan distribusi panjang antrian dalam sistem, dan

$$E(W) = \frac{1}{\mu_b(1-\rho)} + K_2^* \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) \frac{r}{\lambda(1-r)}$$

merupakan ekspektasi waktu tunggu dalam sistem.

Pada kedua simulasi diberikan nilai μ_v yang sama yaitu (0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9) yang artinya laju pelayanan pada waktu liburanya adalah 0.1 pelanggan per satuan waktu, 0.3 pelanggan per satuan waktu, 0.5 pelanggan per satuan waktu, 0.7 pelanggan per satuan waktu dan 0.9 pelanggan per satuan waktu. Kedua simulasi memiliki nilai θ yang sama yaitu (0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3) yang artinya rata-rata pada waktu pelayanannya 0.5 satuan waktu, 1 satuan waktu, 1.5 satuan waktu, 2 satuan waktu 2.5 satuan waktu dan 3 satuan waktu. Kedua simulasi diberikan nilai λ yang sama yaitu 0.85 yang artinya laju kedatangannya adalah 0.85 pelanggan per satuan waktu.

Dengan memberikan input ρ yang berbeda, yaitu $\rho = 0.2$ dan $\rho = 0.9$ dengan syarat $\rho < 1$ diperoleh nilai $E(L)$ seperti pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2.

Tabel 4.1 menunjukkan nilai $E(L)$ yang diperoleh dengan inputan $\rho = 0.2$, terlihat bahwa semakin kecil nilai μ_v dan nilai θ maka nilai $E(L)$ akan semakin besar. Tabel 4.2 menunjukkan nilai $E(L)$ yang diperoleh dengan inputan $\rho = 0.9$, terlihat bahwa semakin kecil nilai μ_v dan nilai θ maka nilai $E(L)$ akan semakin besar. Jika dilihat dari nilai ρ yang diinputkan, maka semakin besar input nilai ρ semakin besar pula nilai $E(L)$ yang didapatkan.

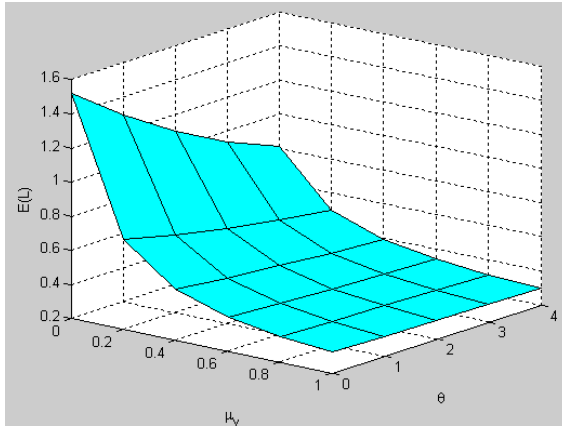
Tabel 4.1 Distribusi Panjang Antrian dalam Sistem($E(L)$) dengan $\rho = 0.2$

		θ					
		0.5	1	1.5	2	2.5	3
μ_v	0.1	1.5191	0.7292	0.4984	0.4006	0.3505	0.3217
	0.3	1.2913	0.6571	0.4658	0.3829	0.3397	0.3145
	0.5	1.0985	0.5957	0.4376	0.3673	0.3301	0.3080
	0.7	0.9393	0.5437	0.4131	0.3535	0.3214	0.3022
	0.9	0.8102	0.4997	0.3918	0.3413	0.3136	0.2968

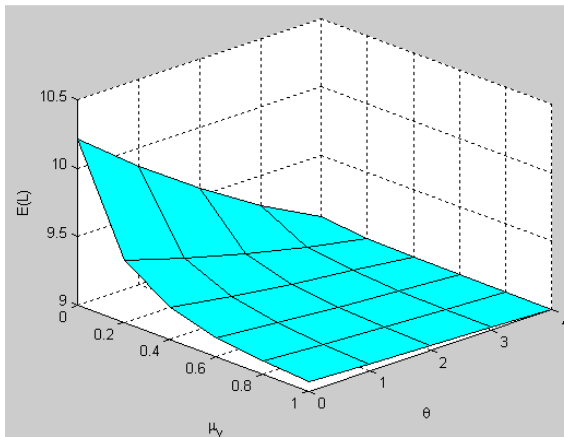
Tabel 4.2 Distribusi Panjang Antrian dalam Sistem($E(L)$) dengan $\rho = 0.9$

		θ					
		0.5	1	1.5	2	2.5	3
μ_v	0.1	10.2124	9.4488	9.2306	9.1391	9.0927	9.0660
	0.3	9.8664	9.3189	9.1648	9.1001	9.0671	9.0480
	0.5	9.5540	9.2043	9.1064	9.1064	9.0440	9.0316
	0.7	9.2803	9.1043	9.0549	9.0549	9.0230	9.0166
	0.9	9.0466	9.1076	9.0094	9.0094	9.0040	9.0029

Setelah menganalisa $E(L)$ dengan menggunakan Tabel 4.1 dan Tabel 4.2, selanjutnya adalah menganalisa $E(L)$ yang berhubungan dengan μ_v dan θ berdasarkan nilai ρ berbeda. Simulasi mengenai hubungan antara laju pelayanan pada waktu libur (μ_v) dan rata-rata waktu pelayanan (θ) dengan ekspektasi panjang antrian dalam sistem ($E(L)$) yang dilihat dari rata-rata waktu pelayanan (θ) yang berbeda ditunjukkan pada Gambar 4.2 dan Gambar 4.3.



Gambar 4.2 Grafik hubungan antara $E(L)$ dengan μ_v dan θ ($\rho = 0.2$)



Gambar 4.3 Grafik hubungan antara $E(L)$ dengan μ_v dan θ ($\rho = 0.9$)

Pada Gambar 4.2 diberikan input $\rho = 0,2$. Jika laju pelayanan pada waktu libur (μ_v) meningkat atau dengan kata lain *server* bekerja lebih cepat ($\mu_b > \mu_v$) dan rata-rata waktu pelayanan (θ) semakin kecil, maka ekspektasi panjang antrian dalam sistem

$(E(L))$ akan semakin meningkat. Jika rata-rata waktu pelayanan (θ) semakin besar maka panjang antrian dalam sistem ($E(L)$) akan semakin menurun.

Selanjutnya diberikan nilai $\rho = 0,9$ seperti ditunjukkan pada Gambar 4.3. Jika laju pelayanan pada waktu libur (μ_v) meningkat atau dengan kata lain *server* bekerja lebih cepat ($\mu_b > \mu_v$) dan rata-rata waktu pelayanan (θ) semakin kecil, maka ekspektasi panjang antrian dalam sistem ($E(L)$) akan semakin meningkat. Jika rata-rata waktu pelayanan (θ) semakin besar maka panjang antrian dalam sistem ($E(L)$) akan semakin menurun.

Besarnya nilai ρ menyebabkan panjang antrian dalam sistem ($E(L)$) juga berubah. Jika ekspektasi perbandingan waktu sibuk server (ρ) memiliki nilai yang besar maka panjang antrian dalam sistem ($E(L)$) juga nilainya semakin besar, sesuai syarat ($\rho < 1$).

Selanjutnya adalah analisa mengenai ekspektasi waktu tunggu dalam sistem $E(W)$, dengan memberikan input ρ yang berbeda, yaitu $\rho = 0.2$ dan $\rho = 0.9$ diperoleh ekspektasi waktu tunggu dalam sistem $E(W)$ ditunjukkan pada Tabel 4.3 dan Tabel 4.4.

Tabel 4.3 Ekspektasi Waktu Tunggu dalam Sistem($E(W)$) dalam Sistem dengan $\rho = 0.2$

		θ					
		0.5	1	1.5	2	2.5	3
μ_v	0.1	1.7872	0.8579	0.5864	0.4713	0.4124	0.3785
	0.3	1.5192	0.7731	0.5481	0.4505	0.3997	0.3700
	0.5	1.2924	0.7009	0.5148	0.4321	0.3883	0.3624
	0.7	1.1051	0.6396	0.4860	0.4159	0.3781	0.3555
	0.9	0.9532	0.5878	0.4609	0.4015	0.3689	0.3492

Tabel 4.4 Ekspektasi Waktu Tunggu dalam Sistem($E(W)$) dalam Sistem dengan $\rho = 0.9$

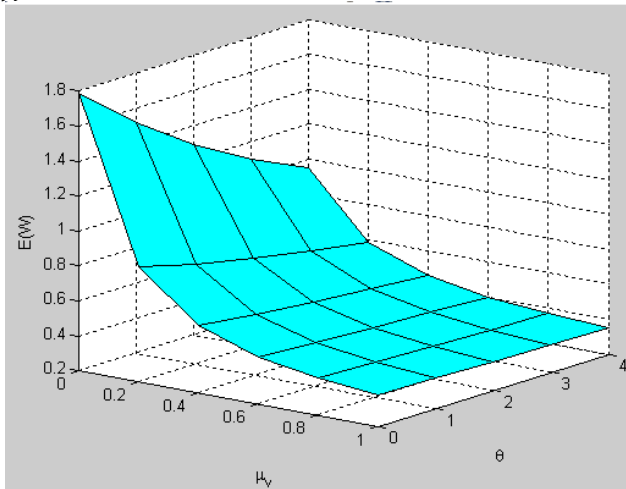
		θ					
		0.5	1	1.5	2	2.5	3
μ_v	0.1	12.0146	11.1163	10.8595	10.7519	10.6972	10.6658
	0.3	11.6075	10.9635	10.7821	10.7060	10.6672	10.6647
	0.5	11.2400	10.8286	10.7134	10.6649	10.6400	10.6255
	0.7	10.9179	10.7109	10.6528	10.6281	10.6153	10.6078
	0.9	10.6431	10.6089	10.5992	10.5951	10.5929	10.5916

Tabel 4.3 menunjukkan nilai $E(W)$ yang diperoleh dengan inputan $\rho = 0.2$, terlihat bahwa semakin kecil nilai μ_v dan nilai θ maka nilai $E(W)$ akan semakin besar. Tabel 4.4 menunjukkan nilai $E(W)$ yang diperoleh dengan inputan $\rho = 0.9$, terlihat bahwa semakin kecil nilai μ_v dan nilai θ maka nilai $E(W)$ akan semakin besar. Jika dilihat dari nilai ρ yang diinputkan, maka semakin besar nilai ρ akan semakin besar pula nilai $E(W)$ yang didapatkan.

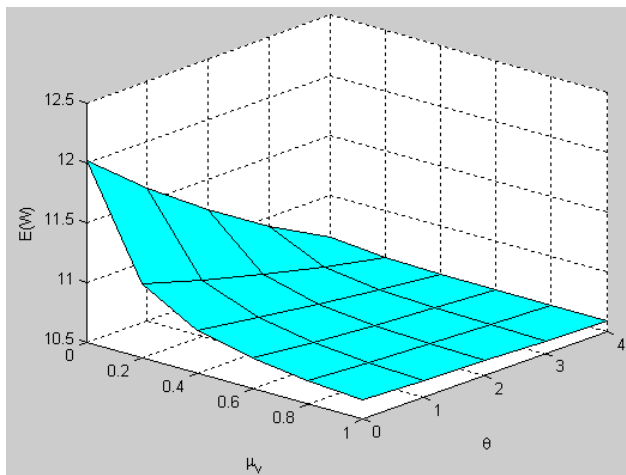
Setelah menganalisa $E(W)$ dengan menggunakan Tabel 4.3 dan Tabel 4.4, selanjutnya adalah menganalisa $E(W)$ yang berhubungan dengan μ_v dan θ berdasarkan nilai ρ berbeda. Simulasi mengenai hubungan antara laju pelayanan pada waktu libur (μ_v) dan rata-rata waktu pelayanan (θ) dengan ekspektasi waktu tunggu dalam sistem ($E(W)$) yang dilihat dari rata-rata waktu pelayanan (θ) yang berbeda ditunjukkan pada Gambar 4.4 dan Gambar 4.5.

Pada Gambar 4.4 diberikan input $\rho = 0,2$, jika laju pelayanan pada waktu libur (μ_v) meningkat atau dengan kata lain *server* bekerja lebih cepat ($\mu_b > \mu_v$) dan rata-rata waktu pelayanan (θ) semakin kecil, maka ekspektasi waktu tunggu dalam sistem ($E(W)$) akan semakin meningkat. Jika rata-rata waktu pelayanan

(θ) semakin besar maka ekspektasi waktu tunggu dalam sistem ($E(W)$) akan semakin menurun.



Gambar 4.4 Grafik hubungan antara $E(W)$ dengan μ_v dan θ ($\rho = 0.2$)



Gambar 4.5 Grafik hubungan antara $E(W)$ dengan μ_v dan θ ($\rho = 0.9$)

Selanjutnya diberikan nilai $\rho = 0,9$ seperti ditunjukkan pada Gambar 4.5. Jika laju pelayanan pada waktu libur (μ_v) meningkat atau dengan kata lain *server* bekerja lebih cepat ($\mu_b > \mu_v$) dan saat rata-rata waktu pelayanan (θ) semakin kecil, maka ekspektasi waktu tunggu dalam sistem ($E(W)$) akan semakin meningkat. Jika rata-rata waktu pelayanan (θ) semakin besar maka ekspektasi waktu tunggu dalam sistem ($E(W)$) akan semakin menurun.

Dapat dilihat bahwa, besarnya nilai ρ menyebabkan ekspektasi waktu tunggu dalam sistem ($E(W)$) juga berubah. Jika ekspektasi waktu perbandingan waktu sibuk server (ρ) memiliki nilai yang besar maka ekspektasi waktu tunggu dalam sistem ($E(W)$) juga nilainya semakin besar, dengan syarat ($\rho < 1$).

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diberikan kesimpulan sebagai hasil dari analisa dan pembahasan yang telah diperoleh dan saran sebagai pertimbangan dalam pengembangan atau penelitian lebih lanjut.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan keseluruhan hasil analisa dan pembahasan yang telah dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Distribusi panjang antrian dalam sistem adalah

$$E(L) = E(L_0) + E(L_{wv})$$
$$E(L) = \frac{\rho}{1-\rho} + K_1 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) \frac{r}{1-r}$$

Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa, jika laju pelayanan pada waktu libur meningkat atau dengan kata lain *server* bekerja lebih cepat ($\mu_b > \mu_v$) dan rata-rata waktu pelayanan semakin kecil, maka distribusi panjang antrian dalam sistem akan semakin meningkat. Jika rata-rata waktu pelayanan semakin besar maka distribusi panjang antrian dalam sistem akan semakin menurun. Nilai ρ menyebabkan distribusi panjang antrian dalam sistem berubah-ubah. Jika ekspektasi waktu perbandingan waktu sibuk *server* memiliki nilai yang besar maka distribusi panjang antrian dalam sistem juga bernilai besar, dengan syarat ($\rho < 1$).

2. Ekspektasi waktu tunggu dari sistem antrian adalah

$$E(W) = E(W_0) + E(W_{wv})$$
$$E(W) = \frac{1}{\mu_b(1-\rho)} + K_2 * \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_b}\right) \frac{r}{\lambda(1-r)}$$

Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa, jika laju pelayanan pada waktu libur meningkat atau dengan kata lain *server*

bekerja lebih cepat ($\mu_b > \mu_v$) dan rata-rata waktu pelayanan semakin kecil, maka ekspektasi waktu tunggu dalam sistem akan semakin meningkat. Jika rata-rata waktu pelayanan semakin besar maka ekspektasi waktu tunggu dalam sistem akan semakin menurun. Nilai ρ menyebabkan ekspektasi waktu tunggu dalam sistem berubah-ubah. Jika ekspektasi waktu perbandingan waktu sibuk server memiliki nilai yang besar maka ekspektasi waktu tunggu dalam sistem juga nilainya semakin besar, dengan syarat ($\rho < 1$).

5.2 Saran

Pada pembahasan Tugas Akhir ini telah didapatkan distribusi panjang antrian dan ekspektasi waktu tunggu dari antrian M/M/1 dengan *Working Vacation*, diharapkan pada penelitian selanjutnya bentuk model antrian yang digunakan adalah model antrian M/G/1 dan model antrian lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kleinrock, L. (1975). "Queueing System". Vol. 1: Theory. Canada: A Wiley-Interscience.
- [2] Restanti, N.M. (2011). "Kajian Aplikasi Sistem Antrian Tandem Dalam Strategi Penetapan Harga". Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- [3] Abadi, R. (2010). "Simulasi Antrian Pelayanan Bongkar Muat Kapal Kontainer". Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- [4] Alhamzany, I.K. (2011). "Analisa Antrian Tipe M/M/1 Dengan Sistem Pelayanan Fase Lambat dan Cepat". Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- [5] Budi, S. (2011). "Analisis Antrian Tipe M/M/c Dengan Sistem Pelayanan Fase Cepat dan Fase Lambat". Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- [6] Jang, J. dan Finn, S. (2002). "M/M/1 queue with working vacations (M/M/1/WV)". **Performance Evaluation** **50**. 41-52.
- [7] <http://repository.usu.ac.id/bitstream/123456789/16432/4/Chapter%20II.pdf>
Diakses tanggal 20 Februari 2013.
- [8] Subagyo, dkk. (2000). "Dasar-dasar Operations Research". BPFE. Yogyakarta.
- [9] Lasono, E. S. (2009). "Model Antrian Perencanaan dan Pengaturan Fasilitas Rawat Inap (Tempat Tidur) di Rumah Sakit". Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- [10] Hillier dan Lieberman. (2001). "Introduction to Operation Research". New York: McGraw-Hill Companies, Inc.
- [11] Hadiyeh, D.N, dan Khoirunnisak, M. (2006). "Sistem Antrian". Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- [12] Hawariyyah, S. (2006). "Antrian Bertipe M/G/1/N dengan *Server* yang Memiliki Waktu Pelayanan dan Waktu Libur". Institut Pertanian Bogor.

- [13] Haryono, dkk. (2007). Laporan Modul Ajar: **Proses Stokastik**. Jurusan Statistika ITS, Surabaya.
- [14] http://cgi.di.uoa.gr/~istavrak/courses/06_pms524_CTMC.pdf.
Diakses tanggal 30 April 2013.
- [15] Dosen – dosen Jurusan Matematika ITS. (2010). “**Kalkulus 2 Revisi Edisi 4**”. Jurusan Matematika FMIPA ITS, Surabaya. 329-331.
- [16] Allen, L.J.S. 2003. **an Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology**. New Jersey: Pearson Education, Inc.

BIODATA PENULIS



Desi Nur Faizah lahir di Tuban, 23 Desember 1990, merupakan anak kedua dari tiga bersaudara, dari pasangan suami istri Imam Turmudzi, S.Pd.I dan Siti Muqoddaroh. Pendidikan SD ditempuh di SD Islam Tuban lulus pada tahun 2003, pendidikan SMP ditempuh di SMP Negeri 1 Tuban lulus pada tahun 2006, dan pendidikan SMA ditempuh di SMA Negeri 1 Tuban lulus pada tahun 2009. Penulis melanjutkan pendidikan di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya (ITS), jurusan matematika fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam angkatan 2009 melalui jalur PMDK dan terdaftar dengan NRP. 1209 100 017. Di Jurusan Matematika ini penulis mengambil bidang minat Riset Operasi dan Pengolahan Data. Penulis pernah aktif berorganisasi di Himpunan Mahasiswa Matematika ITS periode 2010-2011 dan periode 2011-2012 sebagai staf Departemen Kewirausahaan. Penulis pernah berperan aktif sebagai Penanggung Jawab kota Bojonegoro dalam Olimpiade Matematika ITS (OMITS) tahun 2011.

Informasi yang berhubungan dengan Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke alamat email: desifaizah@gmail.com.

Lampiran

```
clear all;
close all;
clc;

mu_v = [0.1 0.3 0.5 0.7 0.9];
theta = [0.5 1 1.5 2 2.5 3];
lambda = 0.85;
rho= input('masukkan nilai rho = ');

if rho < 1
for i=1:length(mu_v)
    for j=1:length(theta)
        r(i,j) = (1/(2*mu_v(i)))*(lambda +
theta(j) + mu_v(i) - sqrt((lambda + theta(j) +
mu_v(i))^2 - 4*lambda*mu_v(i)));
        mu_b(i,j) = lambda/rho;
        K1(i,j) = 1/(((theta(j) +
lambda)/lambda)*(1-r(i,j)) + r(i,j)*(1-
(mu_v(i)/mu_b(i,j)))));
        K2(i,j) = 1/(((theta(j)/lambda) +
(mu_v(i)/mu_b(i,j)))*(1-r(i,j)) + (1-
(mu_v(i)/mu_b(i,j)))));
        E_L(i,j) = rho/(1-rho) + K1(i,j)*(1-
mu_v(i)/mu_b(i,j))*(r(i,j)/(1-r(i,j)));
        E_W(i,j) = 1/(mu_b(i,j)*(1-rho)) +
K2(i,j)*((1-
(mu_v(i)/mu_b(i,j)))*(r(i,j)/(lambda*(1-
r(i,j)))));
    end
end
E_L
E_W

figure(1)
[x,y]=meshgrid(0:.2:1,0:4);
surf(x,y,E_L)
colormap([0 1 1; 0 1 1])
```



```

xlabel('\mu_v');
ylabel('\theta');
zlabel('E(L)');

figure(2)
[x,y]=meshgrid(0:.2:1,0:4);
surf(x,y,E_W)
colormap([0 1 1; 0 1 1])
xlabel('\mu_v');
ylabel('\theta');
zlabel('E(W)');

else
    errordlg('Nilai rho harus kurang dari
1', 'Error');
    return;
end

```

Nilai ρ yang diinputkan harus kurang dari satu ($\rho < 1$), jika nilai yang diinputkan lebih dari satu maka program tidak bisa dijalankan sehingga menampilkan:

