Institut Teknologi Sepuluh Nopember

MK TESIS
SM 092306

PELABELAN TOTAL (a, d)-SIMPUL ANTIMAGIC PADA DIGRAF MATAHARI

YUNI LISTIANA
NRP 1212 201 013

Dosen Pembimbing:
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2014

THESIS - SM 092306

ON (a, d)-VERTEX ANTIMAGIC TOTAL LABELING OF SUN DIGRAPHS

YUNI LISTIANA
NRP 1212 201 013

Supervisors:
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

MASTER DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2014

PELABELAN TOTAL (a, d)-SIMPUL ANTIMAGIC PADA DIGRAF MATAHARI

Nama Mahasiswa	:	Yuni Listiana
NRP	:	1212 201 013
Jurusan	:	Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing	:	Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

Abstrak

Digraf $D(V, A)$ adalah graf yang setiap sisinya memiliki arah dengan memperhatikan urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sebuah sisi berarah tersebut. Sisi berarah pada digraf disebut sebagai busur. Pada digraf D, himpunan simpul dinotasikan sebagai V dan himpunan busur dinotasikan sebagai A. Banyak simpul di D dinyatakan dengan $|V|$ dan banyak busur di D dengan $|A|$. Andaikan $|V| = s$ dan $|A| = r$, maka pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada digraf D dapat didefinisikan sebagai sebuah fungsi bijektif $\lambda : V \cup A \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., s + r\}$ sedemikian hingga bobot total simpul untuk seluruh simpul di D membentuk sebuah barisan aritmatika $a, a + d, a + 2d, ..., a + (s - 1)d$, dengan bobot total adalah $Wt(v) = \Sigma_{u \in A^{+}(v)} \lambda(\overrightarrow{uv}) + \lambda(v) - \Sigma_{z \in A^{-}(v)} \lambda(\overrightarrow{vz})$, untuk $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{uv} \in A$, $d \geq 0$, dan a,d adalah bilangan bulat. Dalam penelitian ini, dilakukan konstruksi pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada digraf matahari. Digraf matahari, dinotasikan dengan $\overrightarrow{M_n}$, $n \geq 3$, didefinisikan sebagai digraf siklus, $\overrightarrow{C_n}$, dengan penambahan sebuah bandul berarah pada setiap simpulnya. Arah busur digraf matahari ditetapkan searah dengan arah perputaran jarum jam. Dari hasil penelitian didapatkan hasil konstruksi digraf matahari pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada $\overrightarrow{M_n}$ untuk nilai $d = 0, 1, 2, 3, 4$ dan $n \geq 3$.

Kata-kunci: *digraf matahari, pelabelan digraf, pelabelan total (a, d)-simpul antimagic.*

ON (a,d)-VERTEX ANTIMAGIC TOTAL LABELING OF SUN DIGRAPHS

Name	:	Yuni Listiana
NRP	:	1212 201 013
Department	:	Mathematics FMIPA-ITS
Supervisor	:	Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

Abstract

Digraph $D(V,A)$ is a graph which each of edge has orientation called arc. Notice that a set of vertices and a set of arcs on D, respectively, is denoted by V and A. The sum of vertices on D is called as order of D and denoted by $|V|$, while the sum of arcs on D is called as size of D and denoted by $|A|$. If $|V| = s$ and $|A| = r$, then the (a,d)-vertex antimagic total labeling of digraph D define as a bijection function of λ from the set of vertices V and the set of edges A to the integers $\{1,2,3,...,s+r\}$ such that the total weight of vertices form an arithmetical progression $a, a+d, a+2d, ..., a+(s-1)d$, with total weight of vertex is $Wt(v) = \Sigma_{u\in A^+(v)}\lambda(\overrightarrow{uv}) + \lambda(v) - \Sigma_{z\in A^-(v)}\lambda(\overrightarrow{vz})$, for $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{uv} \in A$, $d \geq 0$, and a,d is integer. In this thesis, we construct an (a,d)-vertex magic total labeling on sun digraph. Sun digraph, $\overrightarrow{M_n}$, $n \geq 3$, is defined as cycle digraph by adding an orientation pendant at each vertex of the cycle. The orientation of arcs in the sun digraph follow clockwise direction. The result of this thesis is a construction of (a,d)-vertex magic total labeling on $\overrightarrow{M_n}$, $n \geq 3$, for $d = 0,1,2,3,4$.

Key-words: *an (a,d)-vertex antimagic total labeling, digraphs labeling, sun digraph*

PELABELAN TOTAL (a,d)-SIMPUL ANTIMAGIC PADA DIGRAF MATAHARI

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

YUNI LISTIANA
NRP. 1212 201 013

Tanggal Ujian : 7 Juli 2014
Periode Wisuda : September 2014

Disetujui oleh:

Dr. Darmaji, S.Si., M.T. (Pembimbing)
NIP. 19691015 199412 1 001

Dr. Chairul Imron, MI.Komp. (Penguji 1)
NIP. 19611115 198703 1 003

Dr. Subiono, MS (Penguji 2)
NIP. 19570411 198403 1 001

Direktur Program Pascasarjana

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
PROGRAM PASCASARJANA

Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, MT
NIP. 19640405 199002 1 001

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Dengan menyebut nama Allah SWT yang maha pengasih lagi maha penyayang. Alhamdulillahi Robbil' Alamiin, Segala puji bagi Allah SWT yang melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul **Pelabelan Total (a, d)-Simpul Antimagic pada Digraf Matahari**. Tesis ini merupakan salah satu syarat untuk menyelesaikan studi Strata-2 dan memperoleh gelar Magister Sains pada Program Pascasarjana Matematika, Jurusan Matematika, FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Penulis menyadari, bahwa tesis ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan, arahan dan dukungan banyak pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya ke berbagai pihak yang membantu kelancaran penyelesaian tesis ini.

Terima kasih kepada Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, MT selaku Direktur program Pascasarjana ITS Surabaya dan kepada Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS, serta Dr. Subiono, M.S selaku Ketua Program Pascasarjana Matematika dan sekaligus dosen wali bagi penulis.

Terima kasih yang sebesar-besarnya juga saya ucapkan kepada Bapak Dr. Darmaji, S.Si, M.T, selaku Pembimbing tesis yang selalu membimbing dan memberikan arahan dalam menyelesaikan tesis ini, juga kepada Dr. Chairul Imron, MI.Komp selaku dosen penguji dalam ujian tesis. Tak lupa penulis sampaikan ucapan terima kasih yang teramat sangat kepada Prof. Dr. Mohammad Isa Irawan, M.T, Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc, Dr. Mahmud Yunus, M.Si, Dr. Imam Mukhlas, S.Si, M.T, dan Subchan, Ph.D atas kesediannya membagi ilmu di setiap perkuliahan.

Ucapan terima kasih juga dihaturkan kepada Prof. Drs. Slamin, M.CompSc, Ph.D, dosen inspiratif dari Universitas Jember, atas waktu dan kesabarannya ketika membimbing dan memberikan arahan kepada penulis dalam menyelesaikan tesis ini.

Kepada kedua orang tua, ayahanda Arbangi, S.Pd, M.M dan ibunda Durriyah, terima kasih atas segala doa dan dukungannya sehingga penulis bisa menyelesaikan studi dengan lancar. Terima kasih juga saya ucapkan kepada adik tercinta Sigit Tri Yulianto beserta keluarga besar saya di Bawean dan di Tulungagung. Kepada Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi (Dirjen Dikti) yang telah memberikan bantuan beasiswa penuh kepada penulis selama menempuh studi pascasarjana melalui program Beasiswa Unggulan (BU).

Kepada teman-teman seperjuangan, Kistosil fahim, Nur Aina Maziun, mbak Dian Mustofani, Abduh Riski, Ira Aprilia, Desi Lusiyanti, Retno Wahyu D, Imelda H. Eku Rimo, Standsyah Erma, Fenny Fitriani, Shofwan Ali Fauzi, Mohammad Rivai, Zainal Arifin, Elsen Ronando, mas Yoga Setiawan, Darsih Indayani, Mohammad Syaiful Pradana, mbak Siti Amiroch, Toni, pak Hari, dan Ssebunjo Wycliff. Kepada Mbak Angi, Mas Afif dan seluruh staf Jurusan Matematika FMIPA

ITS. Serta semua pihak yang tidak sempat disebutkan satu-persatu, penulis mohon maaf dan menyampaikan banyak terima kasih atas bantuannya.

Penulis berharap semoga penelitian ini, dapat bermanfaat bagi kita semua terutama dalam memperluas wawasan keilmuan kita tentang teori graf. Akhir kata, dengan penuh kerendahan hati, penulis menyadari bahwa ada kekurangan dan keterbatasan dalam penelitian ini, oleh karena itu masukan dan saran sangat diharapkan demi perbaikan kedepannya.

Wassalam
Surabaya, Juli 2014

Yuni Listiana

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$G(V,E)$	Graf G
V	Himpunan simpul pada G
E	Himpunan sisi pada G
p	Banyaknya simpul pada graf G atau *order* G
q	Banyaknya sisi pada graf G atau *size* G
$D(V,A)$	Digraf D
A	Himpunan sisi berarah pada D atau busur
$A^{+}(v)$	Himpunan busur yang berarah masuk ke simpul v
$A^{-}(v)$	Himpunan busur yang berarah keluar dari simpul v
s	Banyaknya simpul pada D
r	Banyaknya sisi berarah pada D
$\overrightarrow{M_n}$	Digraf Matahari
x_i	Simpul ke-i dari himpunan *simpul dalam* pada $\overrightarrow{M_n}$
y_i	Simpul ke-i dari himpunan *simpul luar* pada $\overrightarrow{M_n}$
$\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$	Sisi bagian dalam dari $\overrightarrow{M_n}$
$\overrightarrow{x_i y_i}$	Sisi bandul ke-i dari $\overrightarrow{M_n}$
(a,d)-PTSA	Pelabelan total (a,d)-simpul antimagic
w	Bobot simpul pada pelabelan busur
Wt	Bobot total simpul pada pelabelan total
W	Barisan bobot total dari seluruh simpul pada $\overrightarrow{M_n}$
a	Nilai awal dari W
d	Nilai beda dari W
α	(a,d)-PTSA pada $\overrightarrow{M_n}$
S_v	Jumlah semua label simpul
S_e	Jumlah semua label busur

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini diuraikan latar belakang mengapa penelitian ini dilakukan, rumusan masalah dan batasan masalah yang digunakan, tujuan-tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini, dan manfaat yang diharapkan dari penelitian ini.

1.1 Latar Belakang

Suatu graf G dapat dipandang sebagai sistem (V, E) dengan V himpunan simpul dan E himpunan sisi dari V. Pelabelan graf adalah suatu pemberian nilai (dengan bilangan bulat) pada simpul atau sisi dari graf atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu. Dalam hal ini, jika label diberikan pada simpul dan sisi, maka pelabelannya disebut sebagai pelabelan total (*total labelings*) (Sugeng, 2005). Berbagai macam pelabelan graf dikaji dan berkembang, baik konsep itu muncul untuk keperluan aplikasi maupun teoritis (Gallian, 2013).

Dalam terminologi mereka, suatu graf G dengan p simpul dan q sisi disebut antimagic jika sisi-sisinya dilabeli dengan bilangan bulat $\{1, 2, ..., q\}$ sedemikian hingga bobot semua simpul berbeda.

Konsep pelabelan antimagic pertama kali diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel (1994; 109), yang menyebutkan bahwa suatu graf G dengan p simpul dan q sisi disebut antimagic jika sisi-sisinya dilabeli dengan bilangan bulat $\{1, 2, ..., q\}$ sedemikian hingga bobot semua simpul berbeda. Selanjutnya, Bača, dkk (2003) memperkenalkan pelabelan total (a, d)-simpul antimagic atau (a, d)-*vertex antimagic total labeling* sebagai pelabelan total sedemikian hingga bobot simpulnya berbeda satu sama lain dan membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a dan nilai beda d. Bobot simpul pada simpul adalah jumlah label sisi yang bersisian pada simpul. Hingga kini telah dikembangkan berbagai jenis pelabelan graf, namun pelabelan graf dengan jenis pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada graf berarah (digraf) masih belum banyak dikerjakan.

Graf berarah atau digraf adalah graf yang setiap sisinya memiliki arah dan urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sebuah sisi diperhatikan. Pada tahun 2009, Hefetz, Müze, dan Schwartz menginvestigasi pelabelan antimagic dari graf berarah. Mereka menjelaskan bahwa pelabelan antimagic dari graf berarah D dengan s simpul dan r busur merupakan sebuah fungsi bijektif dari himpunan sisi berarah dari D terhadap himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, ..., r\}$ sedemikian hingga bobot tiap-tiap simpul pada D berbeda, dengan bobot simpul merupakan jumlah dari label sisi berarah yang masuk ke simpul tersebut dikurangi dengan jumlah label sisi berarah yang keluar dari simpul tersebut. Berdasarkan investigasi tersebut, (Meganingtyas, 2012) menemukan bahwa digraf *cycle* $\overrightarrow{C_n}$ dan digraf *circulant* $\overrightarrow{C}_{(n,\{1,2\})}$ memiliki pelabelan total super (a, d)-simpul antimagic untuk $d = 1, 2$. Sehingga dengan berdasarkan pada beberapa fenomena diatas, maka dalam penelitian ini akan diselidiki keberadaan pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada digraf Matahari $\overrightarrow{M_n}$, dan interval nilai d yang mungkin pada kasus ini. Selanjutnya, untuk memperingkas pelabelan total (a, d)-simpul antimagic akan disingkat menjadi (a, d)-PTSA.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan dalam penelitian ini adalah berapakah batas nilai d yang mungkin untuk pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada digraf Matahari dan bagaimana bentuk fungsi bijektif dari pelabelan yang dihasilkan untuk nilai d tersebut.

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan diselesaikan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada:

1. Pelabelan total (a, d)-simpul antimagic ((a, d)-PTSA).
2. Graf yang menjadi objek penelitian adalah digraf Matahari dengan satu arah.
3. Orientasi arah yang digunakan pada sisi-sisi digraf Matahari yaitu searah dengan arah perputaran jarum jam.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui berapakah batas nilai d yang mungkin untuk pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada digraf Matahari dan bagaimana bentuk fungsi bijektif dari pelabelan yang dihasilkan untuk nilai d tersebut.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. Memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf berarah (digraf),
2. Memberikan motivasi kepada pembaca untuk melakukan penelitian tentang pelabelan total simpul antimagic pada digraf jenis lain yang berbeda.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

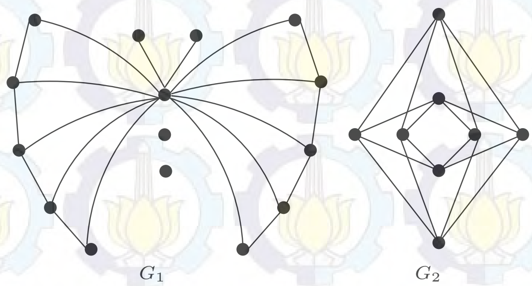
Pada bab tinjauan pustaka, akan diuraikan beberapa teori terkait yang dijadikan sebagai bahan rujukan dalam penelitian ini. Teori yang dimaksud adalah terminologi dasar graf dan digraf, definisi digraf matahari, dan pelabelan total (a, d)-simpul antimagic.

2.1 Terminologi Dasar Graf dan Digraf

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut simpul (*vertex*), dan E adalah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut v_1v_2 dari simpul-simpul $v_1, v_2 \in V$ yang disebut sisi (*edges*) (Slamin, 2009). Jumlah simpul pada graf G disebut *order* dari G dan dinotasikan dengan $|V|$, sedangkan jumlah sisi pada graf G disebut *size* dan dinotasikan dengan $|E|$.

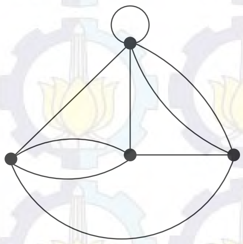
Misalkan v_1 dan v_2 adalah simpul dari graf G, maka v_1 dikatakan *adjacent* dengan v_2 jika terdapat sebuah sisi e diantara v_1 dan v_2. Selanjutnya, karena v_1 dan v_2 terletak pada sisi e, maka v_1 dan v_2 adalah *neighbors* atau dapat juga dikatakan v_1 dan v_2 *incident* dengan sisi e.

Jumlah sisi yang incident terhadap simpul v disebut sebagai *degree* atau derajat dari simpul v pada G, dinotasikan dengan *deg(v)*. Jika sebuah simpul v mempunyai derajat 0, maka v disebut sebagai *isolated vertex*. Sedangkan sebuah simpul yang hanya mempunyai derajat satu disebut sebagai *end vertex*, *leaf*, atau bandul. Jika semua simpul pada graf G mempunyai derajat yang sama maka G disebut sebagai graf *reguler*. Pada Gambar 2.1, graf G_1 merupakan contoh graf dengan 2 isolated vertex dan 2 leaf, sedangkan graf G_2 merupakan contoh graf reguler.



Gambar 2.1: G_1 graf dengan 2 *isolated vertex* dan 2 bandul, G_2 graf reguler

Jika pada suatu graf terdapat beberapa sisi berbeda yang menghubungkan pasangan simpul yang sama maka graf tersebut dikatakan memiliki sisi ganda (*multiple edge*). Sisi yang menghubungkan simpul yang sama disebut *loop*. Sebuah graf yang tidak mengandung sisi ganda atau *loop* disebut sebagai graf sederhana (*simple graph*). Gambar 2.2 merupakan graf dengan sisi ganda dan *loop*.

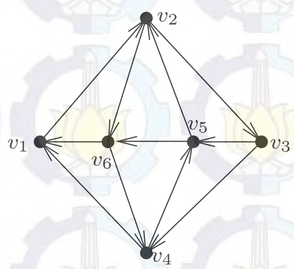


Gambar 2.2: Graf dengan sisi ganda dan *loop*

Sebuah graf G disebut terhubung (*connected*) jika untuk sembarang dua simpul u dan v pada G terdapat sebuah lintasan antara u dan v, sedangkan jika yang terjadi adalah sebaliknya maka G disebut tidak terhubung (*disconnected*) (Hartsfield dan Ringel, 1994). Selanjutnya, sebuah graf dikatakan berhingga (*finite graph*) jika jumlah simpulnya berhingga dan jika yang terjadi sebaliknya maka disebut sebagai graf tak berhingga.

Graf yang memiliki arah disebut graf berarah (*directed graph*) atau digraf (*digraph*). Digraf D terdiri dari himpunan elemen yang disebut simpul (*vertex*) dan himpunan pasangan terurut dari elemen-elemen yang disebut sisi berarah atau busur (*arc*). Himpunan simpul pada digraf D disebut himpunan simpul D, dinotasikan dengan V, sedangkan himpunan sisinya disebut himpunan busur D, dinotasikan dengan A (Slamin, 2009). Untuk membedakan notasi yang ada pada graf tidak berarah dengan graf berarah, maka *order* dan *size* pada graf berarah masing-masing dinotasikan dengan s dan r.

Pada graf berarah, $\overrightarrow{v_jv_k}$ dan $\overrightarrow{v_kv_j}$ menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain $\overrightarrow{v_jv_k} \neq \overrightarrow{v_kv_j}$. Untuk busur $\overrightarrow{v_jv_k}$ simpul v_j dinamakan simpul asal (*initial vertex*) dan simpul v_k dinamakan simpul tujuan (*terminal vertex*). Dalam sebuah digraf D, derajat-kedalam dari simpul v adalah banyaknya semua busur yang berarah masuk ke simpul tersebut, dinotasikan dengan $deg^+(v)$, sedangkan derajat-keluar dari simpul v adalah banyaknya semua busur yang berarah keluar dari simpul tersebut, $deg^-(v)$. Digraf pada Gambar 2.4 merupakan contoh dari graf berarah, sehingga $\overrightarrow{v_1v_2} \neq \overrightarrow{v_2v_1}$.



Gambar 2.3: Graf berarah

2.2 Digraf Matahari

Graf Matahari (*suns graph*), dinotasikan dengan M_n, $n \geq 3$, adalah sebuah graf yang dibentuk dari graf Siklus, C_n, yang pada setiap simpulnya terdapat bandul

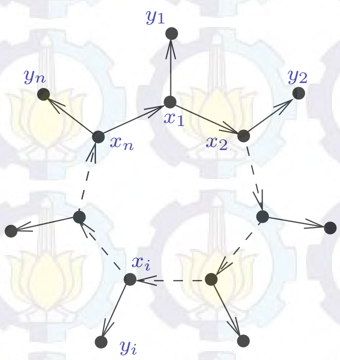
(Rahim dan Slamin, 2012). Sedemikian hingga jika v_j adalah simpul ke-j dari C_n dan a_j adalah simpul pada bandul ke-j, maka v_ja_j adalah sisi bandul ke-j untuk setiap $j = 1, 2, ..., n$. Graf Matahari memiliki *order* dan *size* masing-masing $2n$.

Gambar 2.4: Graf Matahari, M_5

Dengan merujuk pada pengertian graf Matahari, maka digraf Matahari, dinotasikan dengan $\overrightarrow{M_n}$, dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2.1. *Digraf Matahari, $\overrightarrow{M_n}$, merupakan digraf Siklus dengan penambahan sebuah bandul berarah pada setiap simpulnya.*

Dalam notasi pembentuk himpunan, himpunan simpul dan busur pada digraf Matahari $\overrightarrow{M_n}$, dapat dinotasikan dengan $V = \{x_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $A = \{\overrightarrow{x_ix_{i+1}} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\overrightarrow{x_nx_1}\} \cup \{\overrightarrow{x_iy_i} | 1 \leq i \leq n\}$ dengan $n \geq 3$. Simpul yang berasal dari digraf siklus atau *simpul luar* dinamakan dengan simpul x_i, sedangkan simpul yang berasal dari bandul atau *simpul luar* dinamakan dengan simpul y_i, $1 \leq i \leq n$. Sama halnya dengan graf Matahari, digraf Matahari juga memiliki *order* dan *size* sebanyak $2n$. Orientasi arah busur dari digraf Matahari dalam penelian ini yaitu searah dengan arah perputaran jarum jam. Gambar 2.5 merupakan contoh digraf Matahari $\overrightarrow{M_n}$.



Gambar 2.5: Digraf Matahari

2.3 Pelabelan Total (a, d)-simpul Antimagic ((a, d)-PTSA)

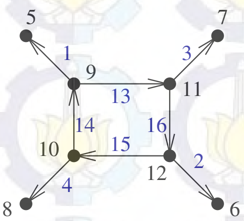
Pelabelan total (a, d)-simpul antimagic ((a, d)-PTSA) adalah pelabelan total dengan bobot simpul membentuk barisan aritmatika. Sebuah fungsi bijektif $\lambda : V \cup E \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., p + q\}$ dikatakan sebagai pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada graf $G(p,q)$ jika himpunan bobot total simpul untuk seluruh simpul di G adalah $W = \{wt(x)|x \in V\} = \{a, a+d, a+2d, ..., a+(p-1)d\}$, untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$, a, d bilangan bulat (Bača, dkk., 2003).

Pelabelan antimagic pada suatu digraf D yang mempunyai s simpul dan r busur merupakan sebuah fungsi bijektif himpunan busur D terhadap himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, ..., r\}$ sedemikian hingga bobot tiap-tiap simpul pada D berbeda, dengan bobot simpul merupakan jumlah dari label busur yang masuk ke simpul tersebut dikurangi dengan jumlah label busur yang keluar dari simpul tersebut (Hefetz, dkk., 2009). Pada pelabelan total (a,d)-simpul antimagic dari digraf D, seluruh simpul dan busur pada digraf dilabeli dengan bilangan dari 1 sampai dengan $s + r$ sehingga bobot simpulnya membentuk barisan aritmatika dengan nilai awal a dan beda d.

Dalam penelitian tentang pelabelan total (a,d)-simpul antimagic pada digraf ini, sifat-sifat pelabelan yang digunakan mengacu pada sifat-sifat untuk pelabelan total (a,d)-simpul antimagic yang telah diperkenalkan oleh Martin Bača dkk (2003). Namun dalam penelitian pada digraf Matahari nilai a tidak hanya dibatasi untuk bilangan bulat positif saja tetapi juga dimungkinkan untuk bilangan bulat negatif ataupun bilangan nol, sehingga nilai a dan d dibatasi untuk bilangan bulat, dengan $d \geq 0$. Jadi secara formal, pelabelan total (a,d)-simpul antimagic pada digraf dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.3.1. *Sebuah fungsi bijektif* $\lambda : V \cup A \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., s + r\}$ *dikatakan sebagai pelabelan total* (a,d)*-simpul antimagic pada digraf* $D(V,A)$ *jika bobot total simpul untuk seluruh simpul di* D *membentuk sebuah barisan aritmatika* $a, a + d, a + 2d, ..., a + (s-1)d$*, dengan bobot total adalah* $Wt(v) = \Sigma_{u\in A^+(v)}\lambda(\overrightarrow{uv}) + \lambda(v) - \Sigma_{z\in A^-(v)}\lambda(\overrightarrow{vz})$*, untuk* $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{uv} \in A$*, dan* a, d *adalah bilangan bulat,* $d \geq 0$.

Gambar 2.6 adalah contoh pelabelan total pada digraf matahari $\overrightarrow{M_4}$.



Gambar 2.6: Pelabelan total pada digraf Matahari

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang akan digunakan atau dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian.

1. Pemahaman konsep dan studi literatur
   Pada tahap ini dilakukan pemahaman konsep dan studi literatur mengenai pelabelan total simpul antimagic pada graf berarah dari berbagai sumber.

2. Observasi
   Peneliti melakukan observasi terhadap digraf Matahari sebagai pedoman untuk penelitian selanjutnya.

3. Mendapatkan interval nilai d
   Interval nilai d yang mungkin dapat ditentukan dengan mencari jumlah bobot total dari seluruh simpul pada digraf, jumlah label simpul maksimum dan minimum, serta bobot total minimum dan maksimum dari suatu simpul pada pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada digraf Matahari.

4. Melakukan pelabelan
   Melakukan pelabelan pada digraf Matahari dengan pelabelan total (a, d)-simpul antimagic untuk nilai-nilai d yang mungkin. Proses pelabelan dilakukan dengan memasangkan bilangan-bilangan dari 1 hingga $s + r$ sedemikian hingga himpunan bobot total dari (a, d)-PTSA membentuk barisan aritmatika dengan nilai awal a dan beda d. Proses ini dilakukan untuk beberapa digraf matahari dengan order kecil, selanjutnya ditentukan pola pelabelannya. Apabila pola pelabelana berlaku untuk beberapa digraf dengan n berbeda maka dikatakan pelabelan itu *expandable*.

5. Merumuskan fungsi bijektif pelabelan
   Menentukan fungsi bijektif pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada digraf Matahari dengan metode pengenalan pola.

6. Evaluasi
   Pada tahap ini melakukan evaluasi terhadap analisa yang telah dilakukan pada pelabelan total (a, d)-simpul antimagic dari digraf matahari. Apabila terdapat digraf yang tidak dapat dilabeli maka dievaluasi mengapa digraf tersebut tidak dapat dilabeli.

7. Menyusun laporan
   Laporan penelitian disusun dalam bentuk hasil dan pembahasan pada bab 4 yang dilanjutkan dengan kesimpulan akhir pada bab 5.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini akan menjabarkan hasil-hasil penelitian tentang konstruksi pelabelan total (a, d)-simpul antimagic (a, d-PTSA) pada digraf Matahari, $\overrightarrow{M_n}$. Hasil utama dari penelitian ini berupa konstruksi pelabelan yang dinyatakan dalam bentuk beberapa teorema. Penelitian ini diawali dengan menentukan interval nilai d yang mungkin dari (a, d)-PTSA pada digraf matahari, melakukan konstruksi (a, d)-PTSA untuk beberapa nilai d dan merumuskan fungsi bijektif PTSA dari hasil konstruksi dengan pengenalan pola untuk membuktikan bahwa digraf matahari merupakan (a, d)-PTSA.

Format penyajian temuan penelitian diawali melalui penyajian beberapa hasil konstruksi pelabelan pada $\overrightarrow{M_n}$ untuk beberapa nilai n, kemudian diikuti oleh teorema beserta pembuktiannya. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*). Selain itu, teorema-teorema dalam penelitian ini tidak bersifat biimplikatif sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

4.1 Interval Nilai d dari (a, d)-PTSA pada Digraf Matahari

Digraf Matahari, $\overrightarrow{M_n}$, adalah digraf yang diperoleh dengan penambahan sebuah bandul berarah pada setiap simpul dari digraf Siklus $\overrightarrow{C_n}$. Jika n adalah banyaknya simpul pada digraf siklus $\overrightarrow{C_n}$, maka banyaknya simpul s dan banyaknya busur r pada digraf matahari masing-masing adalah $2n$. Dalam penelitian ini, orientasi arah busur pada digraf Matahari adalah searah dengan arah perputaran jarum jam.

Himpunan simpul dan busur pada digraf Matahari $\overrightarrow{M_n}$, $n \geq 3$, secara matematis dinyatakan sebagai berikut:

$$V = \{x_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i | 1 \leq i \leq n\} \tag{4.1}$$
$$A = \{\overrightarrow{x_i x_{i+1}} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\overrightarrow{x_n x_1}\} \cup \{\overrightarrow{x_i y_i} | 1 \leq i \leq n\} \tag{4.2}$$

dengan x_i (*simpul dalam*) adalah simpul yang berasal dari $\overrightarrow{C_n}$ dan y_i (*simpul luar*) adalah simpul dari bandul yang menempel pada setiap simpul dari $\overrightarrow{C_n}$.

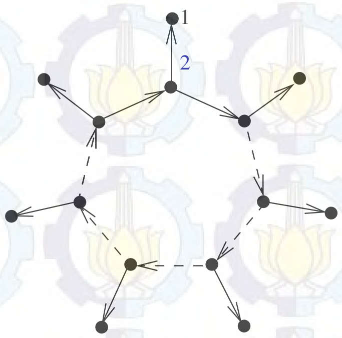
Pada definisi 2.3.1 disebutkan bahwa pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada digraf $D(V, A)$ adalah sebuah fungsi bijektif $\lambda : V \cup A \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., s + r\}$ sedemikian hingga bobot total simpul untuk seluruh simpul di D membentuk sebuah barisan aritmatika $(a, a+d, a+2d, ..., a+(s-1)d)$, untuk $d \geq 0$, a, d adalah bilangan bulat. Berdasarkan defnisi tersebut, simpul dan busur pada $\overrightarrow{M_n}$ akan dilabeli dengan bilangan $\{1, 2, 3, ..., 4n\}$. Sehingga jika $Wt(v)$ adalah bobot total simpul v maka:

$$Wt(v) = \sum_{u \in A^+(v)} \lambda(\overrightarrow{uv}) + \lambda(v) - \sum_{z \in A^-(v)} \lambda(\overrightarrow{vz}) \tag{4.3}$$

dengan $A^{+}(v)$ adalah himpunan busur yang berarah masuk ke simpul v, $\lambda(v)$ adalah label simpul v, dan $A^{-}(v)$ adalah himpunan busur yang berarah keluar dari simpul v.

Diketahui bahwa digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ terdiri dari n *simpul dalam* (x_i) dan n *simpul luar* (y_i). Derajat-kedalam dan derajat-keluar pada *simpul dalam* x_i masing-masing adalah $deg^{+}(x_i) = 1$ dan $deg^{-}(x_i) = 2$, sedangkan untuk *simpul luar* y_i adalah $deg^{+}(y_i) = 1$ dan $deg^{-}(y_i) = 0$. Sedemikian hingga, berdasarkan Persamaan 4.3 maka bobot total minimum simpul pada $\overrightarrow{M_n}$ dapat dilihat dari dua kasus, yaitu:

a. Kasus 1: Bobot total minimum pada simpul y_i, $1 \leq i \leq n$
Pada kasus kedua ini, bobot total simpul minimum dicapai ketika label sebarang simpul y merupakan bilangan terkecil, yaitu 1, dan label busur yang menuju simpul tersebut merupakan bilangan terkecil kedua, yakni 2, dengan 0 busur keluar dari simpul tersebut. Ilustrasi bobot total simpul minimum pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 4.1, sedangkan rumusan matematisnya ditunjukkan oleh Persamaan 4.4.



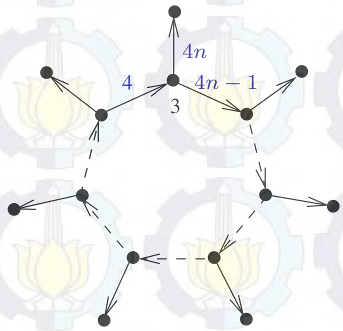
Gambar 4.1: Bobot Total Simpul Minimum pada Simpul y_i

$$\begin{aligned} Wt_{\lambda} &= 2 + 1 - 0 \\ &= 3 \end{aligned} \tag{4.4}$$

b. Kasus 2: Bobot total minimum pada simpul x_i, $1 \leq i \leq n$
Pada kasus ini, bobot total simpul minimum dicapai saat label simpul tersebut merupakan bilangan terkecil ketiga, yaitu 3. Label busur yang menuju simpul tersebut juga merupakan bilangan terkecil yang tersisa, yakni 4. Sedangkan, label dua busur yang keluar dari simpul tersebut masing-masing adalah dua bilangan terbesar, yakni $4n$ dan $4n - 1$. Ilustrasi bobot total simpul minimum pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 4.2, sedangkan rumusan matematisnya ditunjukkan oleh Persamaan 4.5.

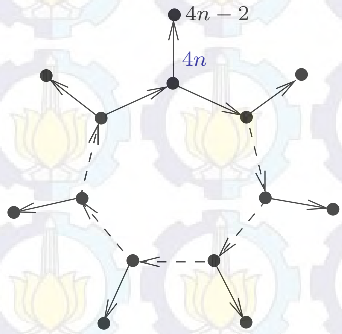
$$\begin{aligned} Wt_{\lambda} &= 4 + 3 - (4n + (4n - 1)) \\ &= 8 - 8n \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dengan menggunakan cara yang sama, bobot total simpul maksimum juga dibedakan menjadi dua kasus, yaitu:



Gambar 4.2: Bobot Total Simpul Minimum pada Simpul x_i

a. Kasus 1: Bobot total maksimum pada simpul y_i, $1 \leq i \leq n$
Pada kasus kedua ini, bobot total simpul maksimum dicapai ketika label sembarang simpul y merupakan bilangan terbesar yang tersisa, yaitu $4n-2$, dan label busur yang menuju simpul tersebut adalah bilangan terbesar yang mungkin, yakni $4n$, dengan 0 busur keluar dari simpul tersebut. Ilustrasi bobot total simpul maksimum pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 4.3, sedangkan rumusan matematisnya ditunjukkan oleh Persamaan 4.6.

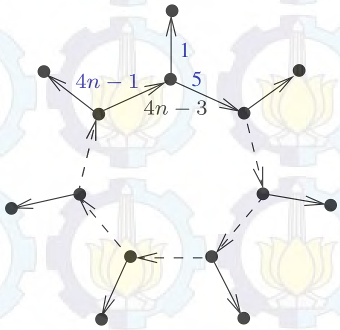


Gambar 4.3: Bobot Total Simpul Maksimum pada Simpul y_i

$$\begin{aligned} Wt_\lambda &= (4n) + (4n-2) - 0 \\ &= 8n - 2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

b. Kasus 2: Bobot total maksimum pada simpul x_i, $1 \leq i \leq n$
Pada kasus ini, bobot total simpul maksimum dicapai saat label pada sembarang simpul x merupakan bilangan terbesar yang mungkin, yaitu $4n-1$. Label busur yang menuju simpul juga merupakan bilangan terbesar yang tersisa, yakni $4n-3$. Sedangkan label dua busur yang keluar dari simpul tersebut masing-masing adalah dua bilangan terkecil yang mungkin, yakni 1 dan 5. Ilustrasi bobot total simpul maksimum pada kasus ini dapat dilihat pada Gambar 4.4, sedangkan rumusan matematisnya ditunjukkan oleh Persamaan 4.7.

$$\begin{aligned} Wt_\lambda &= (4n-1) + (4n-3) - (1+5) \\ &= 8n - 10 \end{aligned} \tag{4.7}$$



Gambar 4.4: Bobot Total Simpul Maksimum pada Simpul x_i

Berdasarkan Persamaan 4.4 dan 4.5, bobot total simpul minimum dari sebarang simpul pada $\overrightarrow{M_n}$ adalah $8-8n$, sedangkan bobot total simpul maksimum dari Persamaan 4.6 dan 4.7 adalah $8n-2$. Akibatnya $a \geq 8-8n$ dan $a+(2n-1)d \leq 8n-2$, sehingga:

$$\begin{aligned} a+(2n-1)d &\leq 8n-2 \\ d &\leq \frac{8n-2-a}{2n-1} \\ &\leq \frac{8n-2-(8-8n)}{2n-1} \\ &\leq \frac{16n-10)}{2n-1} \\ &\leq 8-\frac{2}{2n-1} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Karena $n \geq 3$, maka $0 < \frac{2}{2n-1} \leq \frac{2}{5}$, sedemikian hingga interval nilai d untuk (a,d)-PTSA pada $\overrightarrow{M_n}$ adalah $0 \leq d \leq 7$. Dalam tesis ini, hasil konstruksi (a,d)-PTSA pada digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ didapatkkan untuk nilai $d = 0, 1, 2, 3, 4$.

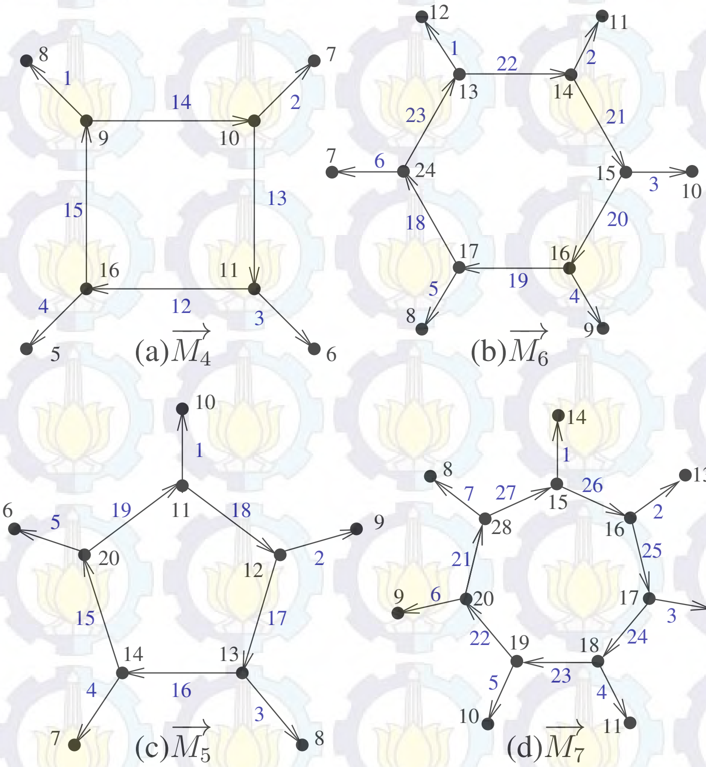
4.2 Pelabelan Total (a,d)-Simpul Antimagic pada Digraf Matahari dengan $d = 0$

Berikut ini diberikan konstruksi pelabelan total (a,d)-simpul antimagic pada $\overrightarrow{M_n}$ untuk nilai $d = 0$ melalui Teorema 4.2.1. Contoh pelabelan total (a,d)-simpul antimagic pada $\overrightarrow{M_n}$ untuk beberapa nilai n yang mendasari terbentuknya teorema dapat dilihat pada Gambar 4.5.

Teorema 4.2.1. *Digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ memiliki pelabelan total $(2n+1,0)$-simpul antimagic untuk setiap n bilangan bulat dan $n \geq 3$.*

Bukti. Didefinisikan pelabelan total sebagai $\alpha_1 : V \cup A \longrightarrow \{1,2,3,...,s+r\}$ dengan $s+r = 4n$ dan $n \geq 3$, sehingga label simpul dan busur dari $\overrightarrow{M_n}$ untuk pelabelan total $(a,0)$-simpul antimagic dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_1(x_i) = \begin{cases} 2n+i, & \text{jika } 1 \leq i \leq n-1 \\ 4n, & \text{jika } i = n \end{cases} \tag{4.9}$$



Gambar 4.5: $(a, 0)$-PTSA pada Digraf Matahari untuk Beberapa Nilai n

$$\alpha_1(y_i) = 2n + 1 - i, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \tag{4.10}$$

$$\begin{array}{lcll} \alpha_1(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) & = & 4n - i - 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n-1 \\ \alpha_1(\overrightarrow{x_n x_1}) & = & 4n - 1 & \\ \alpha_1(\overrightarrow{x_i y_i}) & = & i, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \end{array} \tag{4.11}$$

Sehingga didapatkan label simpul dan busur dari $\overrightarrow{M_n}$, yaitu $\alpha_1(V) = \{n+1, n+2, ..., 3n-1, 4n\}$ dan $\alpha_1(A) = \{1, 2, ..., n, 3n, 3n+1, ..., 4n-1\}$, yang masing-masing saling melengkapi. Jadi dapat disimpulkan bahwa α_1 adalah fungsi bijektif dari pelabelan $V \cup A$ kepada $\{1, 2, 3, ..., 4n\}$.

Jika Wt_{α_1} didefinisikan sebagai bobot total simpul dari simpul x_i dan y_i pada $\overrightarrow{M_n}$, maka:

$$Wt_{\alpha_1}(x_i) = \alpha_1(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}) + \alpha_1(x_i) - [\alpha_1(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \alpha_1(\overrightarrow{x_i y_i})] \tag{4.12}$$

dan

$$Wt_{\alpha_1}(y_i) = \alpha_1(\overrightarrow{x_i y_i}) + \alpha_1(y_i) \tag{4.13}$$

Sehingga, bobot total simpul untuk simpul x_i, $1 \leq i \leq n$, dapat ditentukan sebagai berikut:

a. Untuk $1 \leq i \leq n-1$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_1}(x_i) &= \alpha_1(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}) + \alpha_1(x_i) - [\alpha_1(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \alpha_1(\overrightarrow{x_i y_i})] \\ &= (4n - (i-1) - 1) + (2n + i) - [(4n + i + 1) + i] \\ &= 2n + 1 \end{aligned} \tag{4.14}$$

b. Untuk $i = n$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_1}(x_n) &= \alpha_1(\overrightarrow{x_{n-1}x_n}) + \alpha_1(x_n) - [\alpha_1(\overrightarrow{x_n x_1}) + \alpha_1(\overrightarrow{x_n y_n})] \\ &= (4n - (n-1) - 1) + 4n - [4n + 1 + n] \\ &= 2n + 1 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dengan cara yang sama, untuk $Wt_{\alpha_1}(y_i)$, $1 \leq i \leq n$ didapat sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_1}(y_i) &= \alpha_1(\overrightarrow{x_i y_i}) + \alpha_1(y_i) \\ &= i + (2n + 1 - i) \\ &= 2n + 1 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Karena $Wt_{\alpha_1}(x_i) = Wt_{\alpha_1}(y_i) = 2n + 1$, maka disimpulkan bahwa digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$, $n \geq 3$, memiliki pelabelan total (a, d)-simpul antimagic dengan $a = 2n + 1$ dan $d = 0$. Jadi terbukti bahwa digraf matahari memiliki pelabelan total $(2n + 1, 0)$-simpul antimagic untuk n bilangan bulat dan $n \geq 3$. □

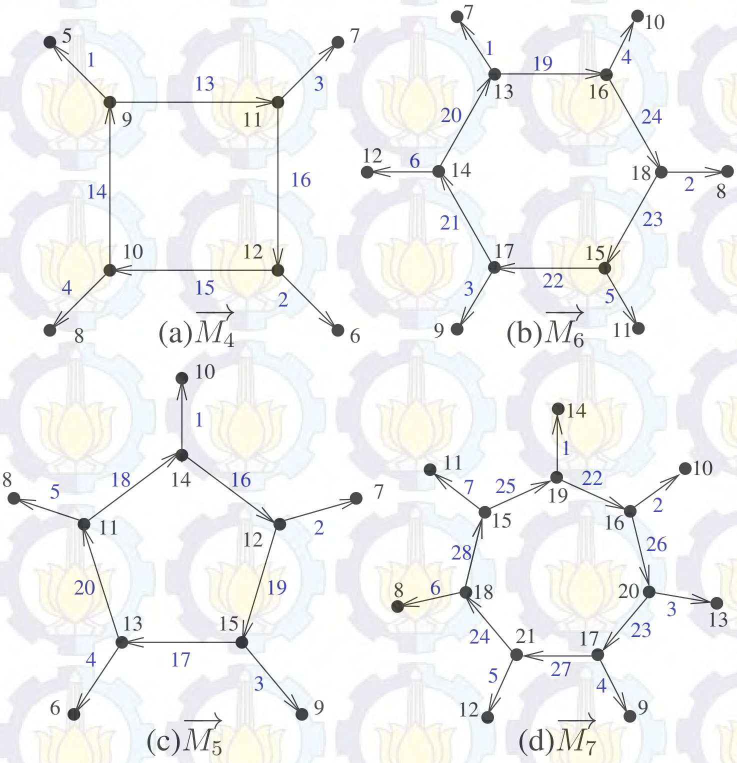
Dari penjabaran di atas, terbukti bahwa digraf Matahari $\overrightarrow{M_n}$ memiliki pelabelan total (a, d)-simpul antimagic untuk nilai $d = 0$, sehingga pelabelan α_1 juga merupakan pelabelan total simpul *magic* dengan konstanta *magic* $k = 2n + 1$. Pelabelan total simpul *magic* pada digraf $D(V, A)$ didefinisikan sebagai suatu pelabelan total $\lambda : V \cup A \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., s + r\}$ dengan suatu konstanta *magic* k sedemikian hingga bobot total setiap simpul v berlaku $Wt(v) = \Sigma_{u \in A^+(v)} \ \lambda(\overrightarrow{uv}) + \lambda(v) - \Sigma_{z \in A^-(v)} \ \lambda(\overrightarrow{vz}) = k$, dengan $A^+(v)$ adalah himpunan busur yang berarah masuk ke simpul v, $\lambda(v)$ adalah label simpul v, dan $A^-(v)$ adalah himpunan busur yang berarah keluar dari simpul v (Listiana, dkk., 2014).

4.3 Pelabelan Total (a, d)-Simpul Antimagic pada Digraf matahari dengan $d = 1$

Berikut ini diberikan konstruksi pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada digraf matahari untuk nilai $d = 1$ melalui Teorema 4.3.1. Gambar 4.6 merupakan hasil konstruksi $(a, 1)$-PTSA pada $\overrightarrow{M_n}$ untuk beberapa nilai n sebagai ilustrasi awal dari pembentukan teorema.

Teorema 4.3.1. *Digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ memiliki pelabelan total $(n + 1, 1)$-simpul antimagic untuk setiap n bilangan bulat dan $n \geq 3$.*

Bukti. Didefinisikan pelabelan total sebagai $\alpha_2 : V \cup A \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., s + r\}$ dengan $s + r = 4n$ dan $n \geq 3$, sehingga label simpul dan busur dari $\overrightarrow{M_n}$, $n \geq 3$,



Gambar 4.6: $(a, 1)$-PTSA pada Digraf Matahari untuk Beberapa Nilai n

untuk pelabelan total $(a, 1)$-simpul antimagic dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_2(x_i) = \begin{cases} \frac{4n+2}{2} + \frac{(-1)^{n+1}+1}{4}(n+1), & \text{jika } i = 1 \\ \frac{5n+2}{2} + \frac{(-1)^{n}+1}{4}(n+1) + \frac{(-1)^{n+1}}{2}(i), & \text{jika } i \text{ gasal} \\ \frac{4n+2}{2} + \frac{(-1)^{n}+1}{4}(n+2) + \frac{(-1)^{n+1}}{2}(i), & \text{jika } i \text{ genap} \\ 2n + 1 + \frac{(-1)^{n}+1}{2}, & \text{jika } i = n \end{cases} \tag{4.17}$$

$$\alpha_2(y_i) = \begin{cases} \frac{2n+1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}+1}{2}(n) + \frac{(-1)^{n}}{2}(i), & \text{jika } i \text{ gasal} \\ \frac{3n}{2} + \frac{(-1)^{n}}{2}(i) + \frac{(-1)^{n+1}+1}{4} & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.18}$$

$$\alpha_2(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) = \begin{cases} 3n + 1, & \text{jika } i = 1 \\ \frac{6n+i+1}{2} + \frac{(-1)^{n}+1}{4}(2n - 3i + 3), & \text{jika } i \text{ gasal} \\ \frac{7n+i+1}{2} + \frac{(-1)^{n}+1}{4}(n - 3i + 3), & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.19}$$

$$\alpha_2(\overrightarrow{x_n x_1}) = \frac{6n+1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}+1}{4}(n) + \frac{(-1)^{n}+1}{2}(3) \tag{4.20}$$

$$\alpha_2(\overrightarrow{x_i y_i}) = \begin{cases} \frac{i}{2} + \frac{(-1)^{n+1}+1}{4}(i) + \frac{(-1)^{n}+1}{4}, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ \frac{i}{2} + \frac{(-1)^{n+1}+1}{4}(i) + \frac{(-1)^{n}+1}{4}(n), & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.21}$$

Misal w_{α_2} didefinisikan sebagai bobot simpul dari pelabelan α_2 pada busur, maka w_{α_2} didapat dari jumlah label busur yang masuk ke suatu simpul dikurangi jumlah label busur yang keluar dari simpul tersebut. Sehingga bobot simpul w_{α_2} adalah sebagai berikut:

$$w_{\alpha_2}(x_i) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}+1}{4}(n) - \frac{i}{2} - \frac{(-1)^{n+1}+1}{4}(i) + \frac{(-1)^n}{2}, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ \frac{-n}{2} - \frac{(-1)^n+1}{2}(n) - \frac{(-1)^{n+1}+1}{4}(5), & \text{jika } i = 2 \\ \frac{-n-i-1}{2} - \frac{(-1)^{n+1}+1}{4}(i) + \frac{(-1)^n+1}{4}(3), & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.22}$$

Karena pada simpul luar tidak terdapat busur yang berarah keluar dan hanya terdapat sebuah simpul berarah masuk maka nilai $w_{\alpha_2}(y_i) = \alpha_2(\overrightarrow{x_i y_i})$, sehingga:

$$w_{\alpha_2}(y_i) = \begin{cases} \frac{i}{2} + \frac{(-1)^{n+1}+1}{4}(i) + \frac{(-1)^n+1}{4}, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ \frac{i}{2} + \frac{(-1)^{n+1}+1}{4}(i) + \frac{(-1)^n+1}{4}(n), & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.23}$$

Misal Wt_{α_2} adalah bobot total simpul dari simpul x_i dan y_i pada $\overrightarrow{M_n}$. Untuk pelabelan total α_2 pada $\overrightarrow{M_n}$, dengan n gasal, dengan menggunakan Persamaan 4.12 maka nilai bobot total pada simpul x_i, $1 \leq i \leq n$, adalah sebagai berikut:

a. Untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_2}(x_1) &= \alpha_2(\overrightarrow{x_n x_1}) + \alpha_2(x_1) - [\alpha_2(\overrightarrow{x_1 x_2}) + \alpha_2(\overrightarrow{x_1 y_1})] \\ &= \frac{7n+1}{2} + \frac{5n+3}{2} - (\frac{6n+2}{2} + 1) \\ &= \frac{12n+4}{2} - \frac{6n+4}{2} \\ &= 6n + 2 - 3n - 2 \\ &= 3n \end{aligned} \tag{4.24}$$

b. Untuk i gasal

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_2}(x_i) &= \alpha_2(\overrightarrow{x_{i-1} x_i}) + \alpha_2(x_i) - [\alpha_2(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \alpha_2(\overrightarrow{x_i y_i})] \\ &= \frac{7n+(i-1)+1}{2} + \frac{5n+i+2}{2} - (\frac{6n+i+1}{2} + i) \\ &= \frac{12n+2i+2}{2} - \frac{6n+3i+1}{2} \\ &= \frac{6n-i+1}{2} \end{aligned} \tag{4.25}$$

c. Untuk i genap

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_2}(x_i) &= \alpha_2(\overrightarrow{x_{i-1} x_i}) + \alpha_2(x_i) - [\alpha_2(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \alpha_2(\overrightarrow{x_i y_i})] \\ &= \frac{6n+(i-1)+1}{2} + \frac{4n+i+2}{2} - (\frac{7n+i+1}{2} + i) \\ &= \frac{10n+2i+2}{2} - \frac{7n+3i+1}{2} \\ &= \frac{3n-i+1}{2} \end{aligned} \tag{4.26}$$

d. Untuk $i = n$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_2}(x_n) &= \alpha_2(\overrightarrow{x_{n-1}x_n}) + \alpha_2(x_n) - [\alpha_2(\overrightarrow{x_nx_1}) + \alpha_2(\overrightarrow{x_ny_n})] \\ &= \frac{7n+(n-1)+1}{2} + \frac{4n+2}{2} - (\frac{7n+1}{2} + n) \\ &= \frac{12n+2}{2} - \frac{9n+1}{2} \\ &= \frac{3n+1}{2} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Sedangkan, nilai bobot total pada simpul y_i, $1 \leq i \leq n$, dengan menggunakan Persamaan 4.13, adalah sebagai berikut:

a. Untuk i gasal

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_2}(y_i) &= \alpha_2(\overrightarrow{x_iy_i}) + \alpha_2(y_i) \\ &= \frac{2i}{2} + \frac{4n-i+1}{2} \\ &= \frac{4n+i+1}{2} \end{aligned} \tag{4.28}$$

b. Untuk i genap

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_2}(y_i) &= \alpha_2(\overrightarrow{x_iy_i}) + \alpha_2(y_i) \\ &= \frac{2i}{2} + \frac{3n-i+1}{2} \\ &= \frac{3n+i+1}{2} \end{aligned} \tag{4.29}$$

Dari Persamaan 4.24 sampai dengan Persamaan 4.29, barisan bobot total untuk setiap simpul x_i dan y_i, $1 \leq i \leq n$, adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_2}(x_i) &= \frac{2n+2}{2}, \frac{2n+4}{2}, ..., \frac{3n-1}{2}, \frac{3n+1}{2}, \frac{5n+3}{2}, \frac{5n+5}{2}, ..., \frac{6n-2}{2}, \frac{6n}{2} \\ Wt_{\alpha_2}(y_i) &= \frac{3n+3}{2}, \frac{3n+5}{2}, ..., \frac{4n}{2}, \frac{4n+2}{2}, ..., \frac{5n-1}{2}, \frac{5n+1}{2} \end{aligned} \tag{4.30}$$

Dengan cara yang sama menggunakan Persamaan 4.12, pada $\overrightarrow{M_n}$ dengan n genap, bobot Wt_{α_2} untuk seluruh simpul x_i, $1 \leq i \leq n$, adalah sebagai berikut:

a. Untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_2}(x_1) &= \alpha_2(\overrightarrow{x_nx_1}) + \alpha_2(x_1) - [\alpha_2(\overrightarrow{x_1x_2}) + \alpha_2(\overrightarrow{x_1y_1})] \\ &= (3n+2) + (2n+1) - [3n+1+1] \\ &= 2n+1 \end{aligned} \tag{4.31}$$

b. Untuk i gasal

$$\begin{aligned}
Wt_{\alpha_2}(x_i) &= \alpha_2(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}) + \alpha_2(x_i) - [\alpha_2(\overrightarrow{x_ix_{i+1}}) + \alpha_2(\overrightarrow{x_iy_i})] \\
&= 4n - (i-1) + 2 + \frac{6n-i+3}{2} - (4n - i + 2 + \frac{i+1}{2}) \\
&= \frac{6n-i+5}{2} - \frac{i+1}{2} \\
&= \frac{6n-2i+4}{2} \\
&= 3n - i + 2 \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

c. Untuk i genap

$$\begin{aligned}
Wt_{\alpha_2}(x_i) &= \alpha_2(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}) + \alpha_2(x_i) - [\alpha_2(\overrightarrow{x_ix_{i+1}}) + \alpha_2(\overrightarrow{x_iy_i})] \\
&= 4n - (i-1) + 2 + \frac{5n-i+4}{2} - (4n - i + 2 + \frac{n+i}{2}) \\
&= \frac{5n-i+6}{2} - \frac{n+i}{2} \\
&= \frac{4n-2i+6}{2} \\
&= 2n - i + 3 \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

d. Untuk $i = n$

$$\begin{aligned}
Wt_{\alpha_2}(x_n) &= \alpha_2(\overrightarrow{x_{n-1}x_n}) + \alpha_2(x_n) - [\alpha_2(\overrightarrow{x_nx_1}) + \alpha_2(\overrightarrow{x_ny_n})] \\
&= (4n - (n-1) + 2) + (2n+2) - [3n + 2 + n] \\
&= 5n + 5 - 4n - 2 \\
&= n + 3 \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

Sedangkan, nilai bobot total pada simpul y_i, $1 \leq i \leq n$, dengan menggunakan Persamaan 4.13, adalah sebagai berikut:

a. Untuk i gasal

$$\begin{aligned}
Wt_{\alpha_2}(y_i) &= \alpha_2(\overrightarrow{x_iy_i}) + \alpha_2(y_i) \\
&= \frac{i+1}{2} + \frac{2n+i+1}{2} \\
&= n + i + 1 \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

b. Untuk i genap

$$\begin{aligned}
Wt_{\alpha_2}(y_i) &= \alpha_2(\overrightarrow{x_iy_i}) + \alpha_2(y_i) \\
&= \frac{n+i}{2} + \frac{3n+i}{2} \\
&= 2n + i \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

Dari Persamaan 4.31 sampai dengan Persamaan 4.36, barisan bobot total untuk setiap simpul x_i dan y_i, $1 \leq i \leq n$, pelabelan α_2 pada $\overrightarrow{M_n}$, n genap, adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_2}(x_i) &= n+1, n+3, n+5, ..., 2n-1, 2n+1, 2n+3..., 3n-3, 3n-1 \\ Wt_{\alpha_2}(y_i) &= n+2, n+4, ..., 2n-2, 2n, 2n+2, ..., 3n-2, 3n \end{aligned} \tag{4.37}$$

Bobot total Wt_{α_2} pada digraf $\overrightarrow{M_n}$ terhadap pelabelan α_2 untuk n gasal dan n genap disajikan pada Tabel 2 dan Tabel 3 dalam Lampiran.

Dari kedua kasus tersebut, dari Persamaan 4.30 dan 4.37 didapat barisan bobot total W untuk seluruh simpul di $\overrightarrow{M_n}$, baik untuk n gasal maupun n genap, adalah:

$$W = n+1, n+2, n+3, \ldots, 3n.$$

Bobot total yang diperoleh membentuk barisan aritmatika dengan nilai awal $a = n+1$ dan nilai beda $d = 1$. Pada kasus ketika n gasal, nilai terendah diperoleh dari Persamaan 4.26, yaitu pada simpul x_i untuk $i = n-1$. Sedangkan untuk n genap nilai terendah diperoleh dari Persamaan 4.33, yaitu pada simpul x_i ketika $i = 2$. Jadi pelabelan total α_2 adalah pelabelan total $(n+1, 1)$-simpul antimagic pada digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ untuk setiap n bilangan bulat dan $n \geq 3$. Dengan demikian, maka Teorema 4.3.1 terbukti. □

4.4 Pelabelan Total (a, d)-Simpul Antimagic pada Digraf matahari dengan $d = 2$

Untuk (a, d)-PTSA dengan nilai $d = 2$ pada digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$, $n \geq 3$, konstruksi pelabelan didapat untuk n gasal. Pada Gambar 4.7, diberikan ilustrasi awal dari konstruksi $(a, 2)$-PTSA pada $\overrightarrow{M_n}$ dengan nilai n yang terbatas.

Berikut ini diberikan konstruksi (a, d)-PTSA pada $\overrightarrow{M_n}$ untuk nilai $d = 2$ melalui Teorema 4.4.1.

Teorema 4.4.1. *Digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ memiliki pelabelan total $(1, 2)$-simpul antimagic untuk setiap n bilangan gasal dan $n \geq 3$.*

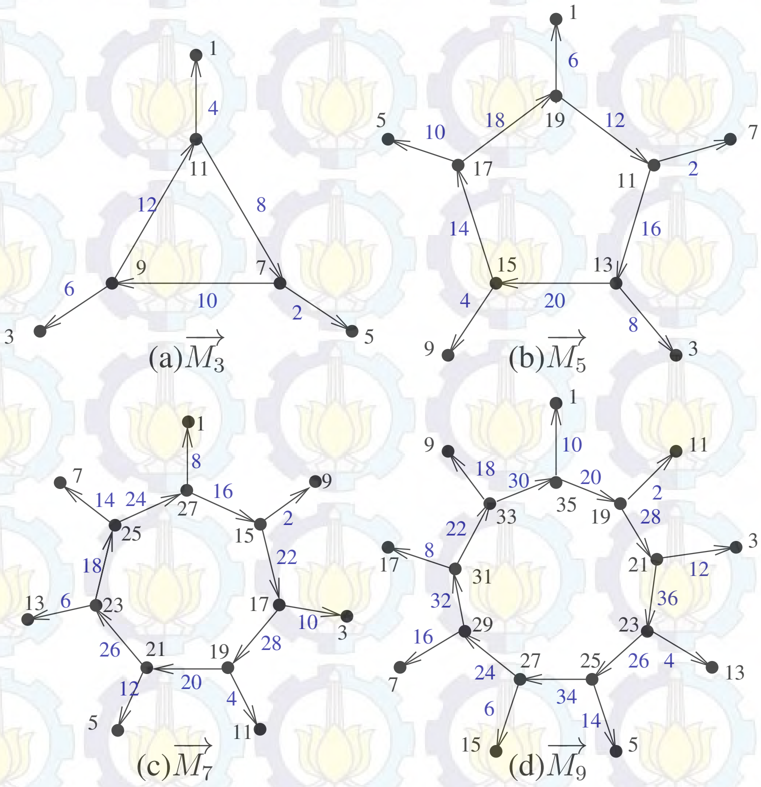
Bukti. Didefinisikan pelabelan total sebagai $\alpha_3 : V \cup A \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., s+r\}$ dengan $s+r = 4n$ dan $n \geq 3$. Sehingga label simpul dan busur dari digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$, n gasal, $n \geq 3$, untuk $(a, 2)$-PTSA diformulasikan sebagai berikut:

$$\alpha_3(x_i) = \begin{cases} 4n-1, & \text{jika } i = 1 \\ 2n+2i-3, & \text{jika } 2 \leq i \leq n \end{cases} \tag{4.38}$$

$$\alpha_3(y_i) = \begin{cases} i, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ n+i, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.39}$$

$$\alpha_3(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) = \begin{cases} 2n+2, & \text{jika } i = 1 \\ 4n-i+3, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ 3n-i+3, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.40}$$

$$\alpha_3(\overrightarrow{x_n x_1}) = 3n+3 \tag{4.41}$$



Gambar 4.7: $(a,2)$-PTSA pada Digraf Matahari untuk Beberapa Nilai n

$$\alpha_3(\overrightarrow{x_i y_i}) = \begin{cases} n+i, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ i, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.42}$$

Bobot simpul w_{α_3} adalah sebagai berikut:

$$w_{\alpha_3}(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{jika } i = 1 \\ -(n+1), & \text{jika } i = 2 \\ -2n-i+1, & \text{jika } 3 \leq i \leq n,\ i \text{ gasal} \\ n-i+1, & \text{jika } 4 \leq i \leq -1,\ i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.43}$$

$$w_{\alpha_3}(y_i) = \alpha_3(\overrightarrow{x_i y_i}) \tag{4.44}$$

Bobot total $Wt_{\alpha_3}(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, dari pelabelan total α_3 pada $\overrightarrow{M_n}$, menggunakan Persamaan 4.12 adalah:

a. Untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_3}(x_1) &= \alpha_3(\overrightarrow{x_n x_1}) + \alpha_3(x_1) - [\alpha_3(\overrightarrow{x_1 x_2}) + \alpha_3(\overrightarrow{x_1 y_1})] \\ &= (3n+3) + (4n-1) - [(2n+2) + (n+1)] \\ &= 4n-1 \end{aligned} \tag{4.45}$$

b. Untuk i gasal

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_3}(x_i) &= \alpha_3(\overrightarrow{x_{i-1} x_i}) + \alpha_3(x_i) - [\alpha_3(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \alpha_3(\overrightarrow{x_i y_i})] \\ &= (3n-(i-1)+3) + (2n+2i-3) - [(4n-i+3) + (n+i)] \\ &= i-2 \end{aligned} \tag{4.46}$$

c. Untuk i genap

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_3}(x_i) &= \alpha_3(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}) + \alpha_3(x_i) - [\alpha_3(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \alpha_3(\overrightarrow{x_i y_i})] \\ &= (4n - (i-1) + 3) + (2n + 2i - 3) - [(3n - i + 3) + i] \\ &= 3n + i - 2 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Sedangkan, bobot total $Wt_{\alpha_3}(y_i)$, $1 \leq i \leq n$, dengan menggunakan Persamaan 4.13, adalah sebagai berikut:

a. Untuk i gasal

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_3}(y_i) &= \alpha_3(\overrightarrow{x_i y_i}) + \alpha_3(y_i) \\ &= (n + i) + i \\ &= n + 2i \end{aligned} \tag{4.48}$$

b. Untuk i genap

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_3}(y_i) &= \alpha_3(\overrightarrow{x_i y_i}) + \alpha_3(y_i) \\ &= i + (n + i) \\ &= n + 2i \end{aligned} \tag{4.49}$$

Dari Persamaan 4.45 sampai dengan Persamaan 4.49, barisan bobot total untuk setiap simpul x_i dan y_i, $1 \leq i \leq n$, adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_3}(x_i) &= 1, 3, 5, ..., n-2, n, 3n+2, 3n+4, ..., 4n-1 \\ Wt_{\alpha_3}(y_i) &= n+2, n+4, n+6, ..., 3n-2, 3n \end{aligned} \tag{4.50}$$

Dari Persamaan 4.50 didapat barisan bobot total W untuk seluruh simpul di $\overrightarrow{M_n}$, n gasal, adalah:

$$W = 1, 3, 5, \ldots, 4n - 1.$$

Bobot total Wt_{α_3} membentuk barisan aritmatika dengan nilai awal $a = 1$ dan nilai beda $d = 2$. Pada Tabel 4 (terlampir), nilai terendah dari Wt_{α_3} terletak pada simpul x_i untuk $i = 3$. Dengan demikian disimpulkan bahwa $\overrightarrow{M_n}$, $n \geq 3$, memiliki (a, d)-PTSA dengan $a = 1$ dan $d = 2$. Jadi terbukti Teorema 4.4.1 terbukti. □

4.5 Pelabelan Total (a, d)-Simpul Antimagic pada Digraf matahari dengan $d = 3$

Kontruksi pelabelan total (a, d)-simpul antimagic dengan nilai $d = 3$ pada digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$, $n \geq 3$ dalam tesis ini didapat untuk n genap. Pada Gambar 4.8, diberikan ilustrasi awal dari konstruksi pelabelan pada digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ untuk beberapa nilai n.

Teorema 4.5.1. *Digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ memiliki pelabelan total $(\frac{4-n}{2}, 3)$-simpul antimagic untuk setiap n bilangan genap dan $n \geq 3$.*

Bukti. Didefinisikan pelabelan total $\alpha_4 : V \cup A \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., s + r\}$ dengan $s + r = 4n$ dan $n \geq 3$. Sehingga label busur dan simpul dari digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$, n genap, $n \geq 3$, untuk pelabelan total $(a, 3)$-simpul antimagic dirumuskan sebagai berikut:

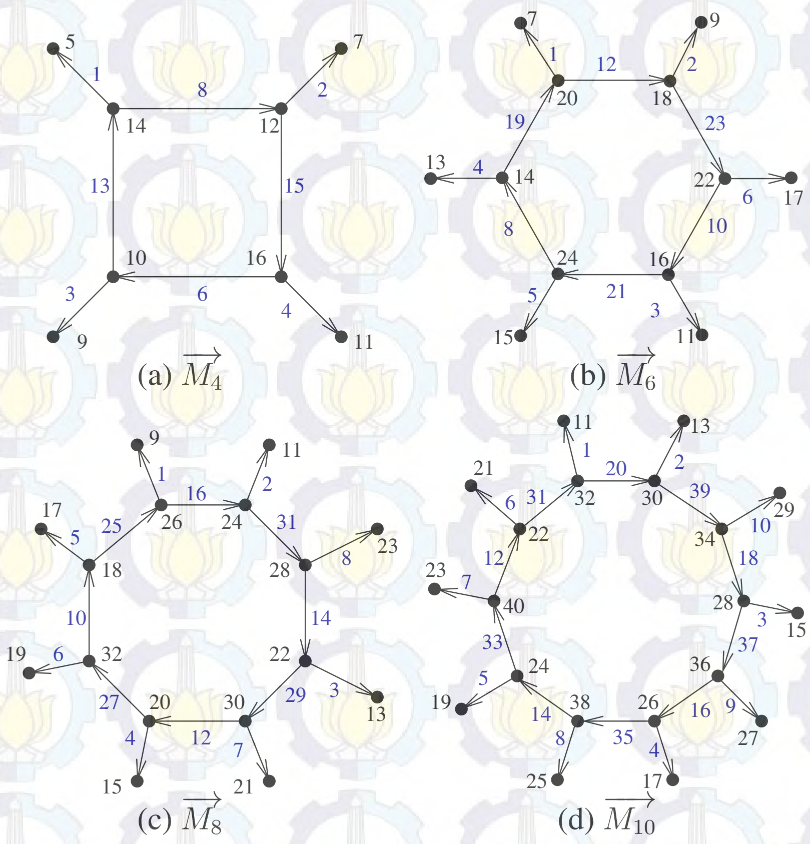
$$\alpha_4(x_i) = \begin{cases} 3n + i + 1, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ 3n - i + 2, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.51}$$

$$\alpha_4(y_i) = \begin{cases} n + 1, & \text{jika } i = 1 \\ 3n - i + 2, & \text{jika } 3 \leq i \leq n - 1,\ i \text{ gasal} \\ n + i + 1, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.52}$$

$$\alpha_4(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) = \begin{cases} 2n - i + 1, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ 4n - i + 1, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.53}$$

$$\alpha_4(\overrightarrow{x_n x_1}) \;=\; 3n + 1 \tag{4.54}$$

$$\alpha_4(\overrightarrow{x_i y_i}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = 1 \\ \frac{2n-i+3}{2}, & \text{jika } 3 \leq i \leq n - 1,\ i \text{ gasal} \\ \frac{i+2}{2}, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.55}$$



(a) $\overrightarrow{M_4}$ (b) $\overrightarrow{M_6}$

(c) $\overrightarrow{M_8}$ (d) $\overrightarrow{M_{10}}$

Gambar 4.8: $(a, 3)$-PTSA pada Digraf Matahari untuk Beberapa Nilai n

Bobot simpul w_{α_4} adalah:

$$w_{\alpha_4}(x_i) = \begin{cases} \frac{2n+i-1}{2}, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ \frac{-4n-i}{2}, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.56}$$

$$w_{\alpha_4}(y_i) = \alpha_4(\overrightarrow{x_i y_i}) \tag{4.57}$$

Bobot total $Wt_{\alpha_4}(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, dari pelabelan total α_4 pada $\overrightarrow{M_n}$, menggunakan Persamaan 4.12 adalah:

a. Untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_4}(x_1) &= \alpha_4(\overrightarrow{x_n x_1}) + \alpha_4(x_1) - [\alpha_4(\overrightarrow{x_1 x_2}) + \alpha_4(\overrightarrow{x_1 y_1})] \\ &= (3n+1) + (3n+2) - [2n+1] \\ &= 4n+2 \end{aligned} \tag{4.58}$$

b. Untuk i gasal

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_4}(x_i) &= \alpha_4(\overrightarrow{x_{i-1} x_i}) + \alpha_4(x_i) - [\alpha_4(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \alpha_4(\overrightarrow{x_i y_i})] \\ &= (4n-(i-1)+1) + (3n+i+1) - [(2n-i+1) + (\frac{2n-i+3}{2})] \\ &= \frac{8n+3i+1}{2} \end{aligned} \tag{4.59}$$

c. Untuk i genap

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_4}(x_i) &= \alpha_4(\overrightarrow{x_{i-1} x_i}) + \alpha_4(x_i) - [\alpha_4(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \alpha_4(\overrightarrow{x_i y_i})] \\ &= (2n-(i-1)+1) + (3n-i+2) - [(4n-i+1) + (\frac{i+2}{2})] \\ &= \frac{2n-3i+4}{2} \end{aligned} \tag{4.60}$$

Sedangkan, bobot total $Wt_{\alpha_4}(y_i)$, $1 \leq i \leq n$, dengan menggunakan Persamaan 4.13, adalah sebagai berikut:

a. Untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_4}(y_i) &= \alpha_4(\overrightarrow{x_1 y_1}) + \alpha_4(y_1) \\ &= 1 + (n+1) \\ &= n+2 \end{aligned} \tag{4.61}$$

b. Untuk i gasal

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_4}(y_i) &= \alpha_4(\overrightarrow{x_i y_i}) + \alpha_4(y_i) \\ &= (\frac{2n-i+3}{2}) + (3n-i+2) \\ &= \frac{8n-3i+7}{2} \end{aligned} \tag{4.62}$$

c. Untuk i genap

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_4}(y_i) &= \alpha_4(\overrightarrow{x_i y_i}) + \alpha_4(y_i) \\ &= (\frac{i+2}{2}) + (n+i+1) \\ &= \frac{2n+3i+4}{2} \end{aligned} \tag{4.63}$$

Dari Persamaan 4.58 sampai dengan Persamaan 4.63, barisan bobot total untuk setiap simpul x_i dan y_i, $1 \leq i \leq n$, adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_4}(x_i) &= \frac{-n+4}{2}, \frac{-n+10}{2}, ..., \frac{2n-2}{2}, \frac{8n+4}{2}, \frac{8n+10}{2} ..., \frac{11n-2}{2} \\ Wt_{\alpha_4}(y_i) &= \frac{2n+4}{2}, \frac{2n+10}{2}, ..., \frac{5n+4}{2}, \frac{5n+10}{2} \end{aligned} \tag{4.64}$$

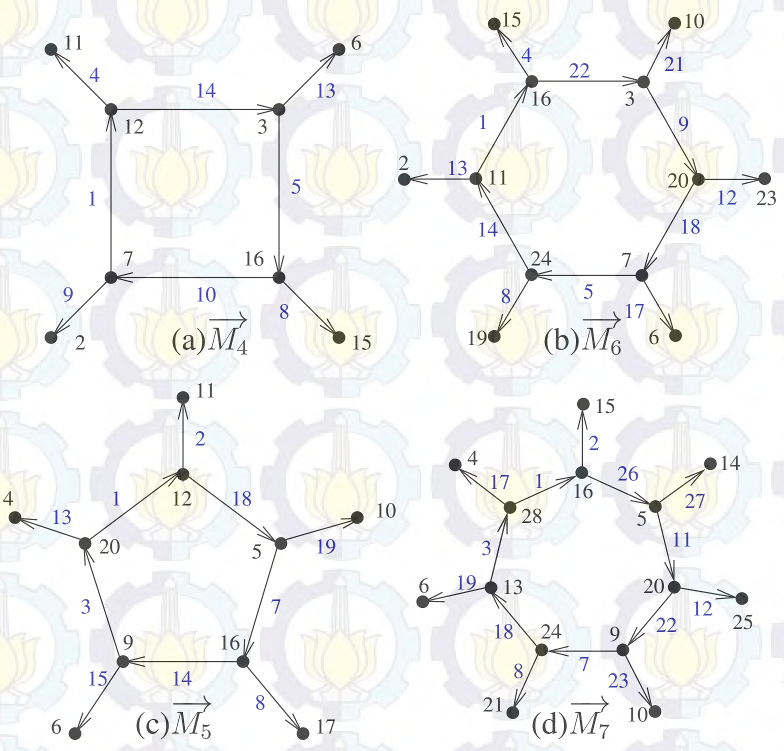
Dari Persamaan 4.64 didapat barisan bobot total W untuk seluruh simpul di $\overrightarrow{M_n}$, n gasal, adalah:

$$W = \frac{-n+4}{2}, \frac{-n+10}{2}, \ldots, \frac{11n-2}{2}.$$

Bobot total Wt_{α_4} membentuk barisan aritmatika dengan nilai awal $a = \frac{4-n}{2}$ dan nilai beda $d = 3$. Pada Tabel 5 (terlampir), nilai terendah dari Wt_{α_4} terletak pada simpul x_i untuk $i = n$. Dengan demikian disimpulkan bahwa $\overrightarrow{M_n}$, untuk n genap dan $n \geq 3$, memiliki (a, d)-PTSA dengan $a = \frac{4-n}{2}$ dan $d = 3$. Jadi terbukti Teorema 4.4.1 terbukti. □

4.6 Pelabelan Total (a, d)-Simpul Antimagic Pada Digraf matahari dengan $d = 4$

Pada Gambar 4.9, diberikan ilustrasi awal dari konstruksi $(a, 4)$-PTSA pada digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ untuk beberapa nilai n sebagai langkah awal untuk pembentukan teorema.



Gambar 4.9: $(a, 4)$-PTSA pada Digraf Matahari untuk Beberapa Nilai n

Teorema 4.6.1. *Digraf matahari* $\overrightarrow{M_n}$ *memiliki pelabelan total* $(-2n+3,4)$*-simpul antimagic untuk setiap* n *bilangan bulat dan* $n \geq 3$.

Bukti. Didefinisikan pelabelan total sebagai $\alpha_5 : V \cup A \longrightarrow \{1,2,3,...,s+r\}$ dengan $s+r=4n$ dan $n \geq 3$, sehingga label simpul dan busur dari digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$, $n \geq 3$, untuk $(a,4)$-PTSA dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_5(x_i) = \begin{cases} 2n+2i+(-1)^n+1, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ 2i+(-1)^{n+1}, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.65}$$

$$\alpha_5(y_i) = \begin{cases} 2n+2+(-1)^n, & \text{jika } i=1 \\ 4n-2i+4+(-1)^n, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ 2n-2i+3+(-1)^{n+1}, & \text{jika } i \text{ genap} \\ 3+(-1)^{n+1}, & \text{jika } i=n \end{cases} \tag{4.66}$$

$$\alpha_5(\overrightarrow{x_ix_{i+1}}) = \begin{cases} 4n-2i, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ 2n-2i+1, & \text{jika } i \text{ genap} \end{cases} \tag{4.67}$$

$$\alpha_5(\overrightarrow{x_nx_1}) \;=\; 1 \tag{4.68}$$

$$\alpha_5(\overrightarrow{x_iy_i}) = \begin{cases} 3+(-1)^n, & \text{jika } i=1 \\ 2n-2i+5+(-1)^n, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ 4n-2i+2+(-1)^{n+1}, & \text{jika } i \text{ genap} \\ 2n+2+(-1)^{n+1}, & \text{jika } i=n \end{cases} \tag{4.69}$$

Misalkan w_{α_5} didefinisikan sebagai bobot simpul dari pelabelan α_5 pada busur, maka:

$$w_{\alpha_5}(x_i) = \begin{cases} -4n+2i-2+(-1)^{n+1}, & \text{jika } i \text{ gasal} \\ -2n+2i-1+(-1)^n, & \text{jika } i \text{ genap} \\ -n+(-1)^n(n)-\frac{(-1)^{n+1}+1}{2}, & \text{jika } i=n \end{cases} \tag{4.70}$$

$$w_{\alpha_5}(y_i) = \alpha_5(\overrightarrow{x_iy_i}) \tag{4.71}$$

Misal Wt_{α_5} adalah bobot total simpul dari simpul x_i dan y_i pada $\overrightarrow{M_n}$. Untuk pelabelan total α_5 pada $\overrightarrow{M_n}$, dengan n gasal, dengan menggunakan Persamaan 4.12 maka nilai bobot total pada simpul x_i, $1 \leq i \leq n$, adalah sebagai berikut:

a. Untuk $i=1$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(x_1) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_nx_1})+\alpha_5(x_1)-[\alpha_5(\overrightarrow{x_1x_2})+\alpha_5(\overrightarrow{x_1y_1})] \\ &= 1+(2n+2)-[(4n-2)+2] \\ &= -2n+3 \end{aligned} \tag{4.72}$$

b. Untuk i gasal

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(x_i) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_{i-1}x_i})+\alpha_5(x_i)-[\alpha_5(\overrightarrow{x_ix_{i+1}})+\alpha_5(\overrightarrow{x_iy_i})] \\ &= (2n-2(i-1)+1)+(2n+2i)-[(4n-2i)+(2n-2i+4)] \\ &= -2n+4i-1 \end{aligned} \tag{4.73}$$

c. Untuk i genap

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(x_i) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_{i-1}x_i}) + \alpha_5(x_i) - [\alpha_5(\overrightarrow{x_ix_{i+1}}) + \alpha_5(\overrightarrow{x_iy_i})] \\ &= (4n-2(i-1)) + (2i+1) - [(2n-2i+1) + (4n-2i+3)] \\ &= -2n+4i-1 \end{aligned} \tag{4.74}$$

d. Untuk $i = n$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(x_n) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_{n-1}x_n}) + \alpha_5(x_n) - [\alpha_5(\overrightarrow{x_nx_1}) + \alpha_5(\overrightarrow{x_ny_n})] \\ &= (2n-2(n-1)+1) + 4n - [1 + (2n+3)] \\ &= 2n-1 \end{aligned} \tag{4.75}$$

Sedangkan, nilai bobot total pada simpul y_i, $1 \leq i \leq n$, dengan menggunakan Persamaan 4.13, adalah sebagai berikut:

a. Untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(y_i) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_1y_1}) + \alpha_5(y_1) \\ &= 2 + (2n+1) \\ &= 2n+3 \end{aligned} \tag{4.76}$$

b. Untuk i gasal

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(y_i) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_iy_i}) + \alpha_5(y_i) \\ &= (2n-2i+4) + (4n-2i+3) \\ &= 6n-4i+7 \end{aligned} \tag{4.77}$$

c. Untuk i genap

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(y_i) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_iy_i}) + \alpha_5(y_i) \\ &= (4n-2i+3) + (2n-2i+4) \\ &= 6n-4i+7 \end{aligned} \tag{4.78}$$

d. Untuk $i = n$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(y_i) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_iy_i}) + \alpha_5(y_i) \\ &= (2n+3) + 4 \\ &= 2n+7 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Dari Persamaan 4.72 sampai dengan Persamaan 4.79, barisan bobot total untuk setiap simpul x_i dan y_i, $1 \leq i \leq n$, adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(x_i) &= -2n+3, -2n+7, ..., 2n-1 \\ Wt_{\alpha_5}(y_i) &= 2n+3, 2n+7, ..., 6n-1 \end{aligned} \tag{4.80}$$

Dengan cara yang sama menggunakan Persamaan 4.12, pada $\overrightarrow{M_n}$ dengan n genap, bobot Wt_{α_5} untuk seluruh simpul x_i, $1 \leq i \leq n$, adalah sebagai berikut:

a. Untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(x_1) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_n x_1}) + \alpha_5(x_1) - [\alpha_5(\overrightarrow{x_1 x_2}) + \alpha_5(\overrightarrow{x_1 y_1})] \\ &= 1 + (2n+4) - [(4n-2) + 4] \\ &= -2n + 3 \end{aligned} \quad (4.81)$$

b. Untuk i gasal

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(x_i) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_{i-1} x_i}) + \alpha_5(x_i) - [\alpha_5(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \alpha_5(\overrightarrow{x_i y_i})] \\ &= (2n - 2(i-1) + 1) + (2n + 2i + 2) - [(4n - 2i) + (2n - 2i + 6)] \\ &= -2n + 4i - 1 \end{aligned} \quad (4.82)$$

c. Untuk i genap

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(x_i) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_{i-1} x_i}) + \alpha_5(x_i) - [\alpha_5(\overrightarrow{x_i x_{i+1}}) + \alpha_5(\overrightarrow{x_i y_i})] \\ &= (4n - 2(i-1)) + (2i - 1) - [(2n - 2i + 1) + (4n - 2i + 1)] \\ &= -2n + 4i - 1 \end{aligned} \quad (4.83)$$

d. Untuk $i = n$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(x_n) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_{n-1} x_n}) + \alpha_5(x_n) - [\alpha_5(\overrightarrow{x_n x_1}) + \alpha_5(\overrightarrow{x_n y_n})] \\ &= (4n - 2(n-1)) + (2n - 1) - [1 + (2n + 1)] \\ &= 2n - 1 \end{aligned} \quad (4.84)$$

Sedangkan, nilai bobot total pada simpul y_i, $1 \leq i \leq n$, dengan menggunakan Persamaan 4.13, adalah sebagai berikut:

a. Untuk $i = 1$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(y_i) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_1 y_1}) + \alpha_5(y_1) \\ &= 4 + (2n + 3) \\ &= 2n + 7 \end{aligned} \quad (4.85)$$

b. Untuk i gasal

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(y_i) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_i y_i}) + \alpha_5(y_i) \\ &= (2n - 2i + 6) + (4n - 2i + 5) \\ &= 6n - 4i + 11 \end{aligned} \quad (4.86)$$

c. Untuk i genap

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(y_i) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_i y_i}) + \alpha_5(y_i) \\ &= (4n - 2i + 1) + (2n - 2i + 2) \\ &= 6n - 4i + 3 \end{aligned} \quad (4.87)$$

d. Untuk $i = n$

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(y_i) &= \alpha_5(\overrightarrow{x_i y_i}) + \alpha_5(y_i) \\ &= (2n+1) + 2 \\ &= 2n + 3 \end{aligned} \tag{4.88}$$

Dari Persamaan 4.81 sampai dengan Persamaan 4.88, barisan bobot total untuk setiap simpul x_i dan y_i, $1 \leq i \leq n$, pelabelan α_5 pada $\overrightarrow{M_n}$, n genap, adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Wt_{\alpha_5}(x_i) &= -2n+3, -2n+7, ..., 2n-1 \\ Wt_{\alpha_5}(y_i) &= 2n+3, 2n+7, ..., 6n-1 \end{aligned} \tag{4.89}$$

Bobot total Wt_{α_5} pada digraf $\overrightarrow{M_n}$ terhadap pelabelan α_5 untuk n gasal dan n genap disajikan pada Tabel 6 dan Tabel 7 dalam Lampiran.

Dari kedua kasus tersebut, dari Persamaan 4.80 dan 4.89 didapat barisan bobot total W untuk seluruh simpul di $\overrightarrow{M_n}$, baik untuk n gasal maupun n genap, adalah:

$$W = -2n+3, -2n+7, -2n+11, \ldots, 6n-1.$$

Bobot total yang diperoleh membentuk barisan aritmatika dengan nilai awal $a = -2n+3$ dan nilai beda $d = 4$. Pada kasus ketika n gasal, nilai terendah diperoleh dari Persamaan 4.72, yaitu pada simpul x_1, dan untuk n genap nilai terendah diperoleh dari Persamaan 4.81, yaitu pada simpul x_1. Jadi pelabelan total α_5 adalah pelabelan total $(-2n+3, 4)$-simpul antimagic pada digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ untuk setiap n bilangan bulat dan $n \geq 3$. Dengan demikian , maka Teorema 4.6.1 terbukti. $\square$

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini akan diuraikan beberapa kesimpulan dari hasil pembahasan pada Bab 3 yang disertai dengan saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan konstruksi pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ yang telah dibahas pada Bab 3, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Batas atas d pada pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$, dengan $n \geq 3$, adalah $d \leq 8$ dengan d adalah bilangan bulat dan $d \geq 0$.

2. Digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ memiliki pelabelan total (a, d)-simpul antimagic, dengan $d = 0, 1, 4$ dan a untuk masing-masing d adalah $2n + 1$, $n + 1$, dan $-2n + 3$, untuk setiap n bilangan bulat dan $n \geq 3$.

3. Digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ memiliki pelabelan total $(1, 2)$-simpul antimagic untuk setiap n bilangan gasal dan $n \geq 3$.

4. Digraf matahari $\overrightarrow{M_n}$ memiliki pelabelan total $(\frac{4-n}{2}, 3)$-simpul antimagic untuk setiap n bilangan genap dan $n \geq 3$.

5.2 Saran

Dalam pelabelan total (a, d)-simpul antimagic pada digraf Matahari, $\overrightarrow{M_n}$, $n \geq 3$, nilai interval d adalah $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Sementara pada tesis ini konstruksi pelabelan total (a, d)-simpul antimagic yang telah dilakukan adalah untuk nilai $d = 0$, $d = 1$, $d = 2$, $d = 3$, dan $d = 4$. Dengan demikian penelitian dapat dilanjutkan dengan konstruksi (a, d)-PTSA pada $\overrightarrow{M_n}$, $n \geq 3$, untuk nilai d yang belum dilakukan yaitu $d = 5, 6, 7$.

DAFTAR PUSTAKA

Bača, M., Bertault, F., MacDougall, J.A, Miller, M., Simanjuntak, R., dan Slamin, (2003), ”Vertex Antimagic Total labelings of Graphs”, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, Vol. 23, hal. 67-83.

Dafik, (2008), *Pemodelan Matematika*, Buku Diktat: Mata Kuliah Pemodelan Matematika, FKIP Universitas jember, Jember.

Gallian, J.A., (2013), ”A Dynamic Survey of Graph Labelling”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, Edisi 16.

Hartsfield, N. dan Ringel, G., (1994), *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, Australia.

Hefetz, D., Müze, T. dan Schwartz, J., (2009), ”On Antimagic Directed Graphs”, *Journal of Graph Theory*, Vol. 64, No. 3, hal. 219-232.

Listiana, Y., Darmaji, dan Slamin, (2014), *Vertex Magic Total Labeling on Sun Digraphs*, *Proceeding* International Seminar on Mathematics Education dan Graph Theory, Universitas Islam Malang, *In Press*.

Meganingtyas, D.E.W., (2012), *Pelabelan Total Super* (a, d)*-titik Antimagic pada Digraf Sikel dan Generalisasinya*, Skripsi, Universitas Jember, Jember.

Rahim, M.T. dan Slamin, (2012), ”On Vertex-Magic Total Labeling of Union of Sun Graphs”, *Ars Combinatoria*, Vol.103, hal. 305-310.

Slamin, (2009), *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*, Jember University Press, Jember.

Sugeng, K.A., (2005), *Magic and Antimagic Labeling of Graphs*, Tesis Ph.D., University of Ballarat, Australia.

BIOGRAFI PENULIS

Penulis bernama Yuni Listiana, lahir di Gresik, 08 Juni 1989, dan merupakan putri pertama dari pasangan Bapak Arbangi, S.Pd, M.M dan Ibu Durriyah. Pendidikan formal tingkat sekolah dasar hingga menengah ditempuh oleh penulis di sebuah pulau kecil di utara Gresik yang bernama Pulau Bawean. Sekolah tersebut adalah SD Negeri Klompang Gubug 1, SMP Negeri 1 Tambak, dan SMA Negeri 1 Sangkapura. Pada tahun 2007, penulis melanjutkan pendidikan di jenjang universitas dengan terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember. Setelah menyelesaikan studi Strata 1 pada tahun 2011, setahun kemudian, penulis melanjutkan studi Strata 2 di Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya melalui program Beasiswa Unggulan (BU) Calon Dosen 2012. Tahun 2014, penulis berhasil merampungkan studi magister dengan tesis berjudul "Pelabelan Total (a,d)-Simpul Antimagic pada Digraf Matahari. Penulis bisa dihubungi melalui email *yuni.listiana7@gmail.com*.

LAMPIRAN

BOBOT TOTAL UNTUK (a, d)-PTSA PADA DIGRAF MATAHARI

1. (a, d)-PTSA untuk $d = 0$

1: Pelabelan Total $(a, 0)$-Simpul Antimagic pada Digraf Matahari

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\dots$	x_n
w_{α_1}	0	-1	-2	-3	$\dots$	$1 - 2n$
$\alpha_1(x_i)$	$2n + 1$	$2n + 2$	$2n + 3$	$2n + 4$	$\dots$	$4n$
Wt_{α_1}	$2n + 1$	$2n + 1$	$2n + 1$	$2n + 1$	$\dots$	$2n + 1$

	y_1	y_2	y_3	y_4	$\dots$	y_n
w_{α_1}	1	2	3	4	$\dots$	n
$\alpha_1(y_i)$	$2n$	$2n - 1$	$2n - 2$	$2n - 3$	$\dots$	$n + 1$
Wt_{α_1}	$2n + 1$	$2n + 1$	$2n + 1$	$2n + 1$	$\dots$	$2n + 1$

2. (a, d)-PTSA untuk $d = 1$

2: $(a, 1)$-PTSA pada Digraf Matahari untuk n Gasal

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\dots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
$\alpha_2(x_i)$	$\frac{5n+3}{2}$	$\frac{4n+4}{2}$	$\frac{5n+5}{2}$	$\frac{4n+6}{2}$	$\frac{5n+7}{2}$	$\dots$	$\frac{6n}{2}$	$\frac{5n+1}{2}$	$\frac{4n+2}{2}$
$w_{\alpha_2}(x_i)$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{-n-5}{2}$	$\frac{n-7}{2}$	$\frac{-n-9}{2}$	$\frac{n-11}{2}$	$\dots$	$\frac{-n-3}{2}$	$\frac{-3n+1}{2}$	$\frac{-n-1}{2}$
$Wt_{\alpha_2}(x_i)$	$\frac{6n}{2}$	$\frac{3n-1}{2}$	$\frac{6n-2}{2}$	$\frac{3n-3}{2}$	$\frac{6n-4}{2}$	$\dots$	$\frac{5n+3}{2}$	$\frac{2n+2}{2}$	$\frac{3n+1}{2}$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\dots$	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n
$\alpha_2(y_i)$	$\frac{4n}{2}$	$\frac{3n-1}{2}$	$\frac{4n-2}{2}$	$\frac{3n-3}{2}$	$\frac{4n-4}{2}$	$\dots$	$\frac{3n+3}{2}$	$\frac{2n+2}{2}$	$\frac{3n+1}{2}$
$w_{\alpha_2}(y_i)$	1	2	3	4	5	$\dots$	$\frac{2n-4}{2}$	$\frac{2n-2}{2}$	$\frac{2n}{2}$
$Wt_{\alpha_2}(y_i)$	$\frac{4n+2}{2}$	$\frac{3n+3}{2}$	$\frac{4n+4}{2}$	$\frac{3n+5}{2}$	$\frac{4n+6}{2}$	$\dots$	$\frac{5n-1}{2}$	$\frac{4n}{2}$	$\frac{5n+1}{2}$

3: $(a, 1)$-PTSA pada Digraf Matahari untuk n Genap

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\dots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
$\alpha_2(x_i)$	$2n + 1$	$\frac{5n+2}{2}$	$3n$	$\frac{5n}{2}$	$3n - 1$	$\dots$	$2n + 3$	$\frac{5n+4}{2}$	$2n + 2$
$w_{\alpha_2}(x_i)$	0	$\frac{-3n}{2}$	-1	$\frac{-n-2}{2}$	-2	$\dots$	$-n + 2$	$\frac{-n+2}{2}$	$-n + 1$
$Wt_{\alpha_2}(x_i)$	$2n + 1$	$n + 1$	$3n - 1$	$2n - 1$	$3n - 3$	$\dots$	$n + 5$	$2n + 3$	$n + 3$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\dots$	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n
$\alpha_2(y_i)$	$n + 1$	$\frac{3n+2}{2}$	$n + 2$	$\frac{3n+4}{2}$	$n + 3$	$\dots$	$2n - 1$	$\frac{3n}{2}$	$2n$
$w_{\alpha_2}(y_i)$	1	$\frac{n+2}{2}$	2	$\frac{n+4}{2}$	3	$\dots$	$n - 1$	$\frac{n}{2}$	n
$Wt_{\alpha_2}(y_i)$	$n + 2$	$2n + 2$	$n + 4$	$2n + 4$	$n + 6$	$\dots$	$3n - 2$	$2n$	$3n$

3. (a, d)-PTSA untuk $d = 2$

4: $(a, 2)$-PTSA pada Digraf Matahari

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\dots$	x_{n-1}	x_n
$\alpha_3(x_i)$	$4n-1$	$2n+1$	$2n+3$	$2n+5$	$2n+7$	$\dots$	$4n-5$	$4n-3$
$w_{\alpha_3}(x_i)$	0	$-n-1$	$-2n-2$	$n-3$	$-2n-4$	$\dots$	2	$-3n+1$
$Wt_{\alpha_3}(x_i)$	$4n-1$	n	1	$3n+2$	3	$\dots$	$4n-3$	$n-2$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\dots$	y_{n-1}	y_n
$\alpha_3(y_i)$	1	$n+2$	3	$n+4$	5	$\dots$	$n-1$	n
$w_{\alpha_3}(y_i)$	$n+1$	2	$n+3$	4	$n+5$	$\dots$	$n-1$	$2n$
$Wt_{\alpha_3}(y_i)$	$n+2$	$n+4$	$n+6$	$n+8$	$n+10$	$\dots$	$3n-2$	$3n$

4. (a, d)-PTSA untuk $d = 3$

5: Pelabelan Total $(a, 3)$-Simpul Antimagic pada Digraf Matahari

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\dots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n
$\alpha_4(x_i)$	$3n+2$	$3n$	$3n+4$	$3n-2$	$3n+6$	$\dots$	$2n+4$	$4n$	$2n+2$
$w_{\alpha_4}(x_i)$	$\frac{2n}{2}$	$\frac{-4n-2}{2}$	$\frac{2n+2}{2}$	$\frac{-4n-4}{2}$	$\frac{2n+4}{2}$	$\dots$	$\frac{-5n+2}{2}$	$\frac{3n-2}{2}$	$\frac{-5n}{2}$
$Wt_{\alpha_4}(x_i)$	$\frac{8n+4}{2}$	$\frac{2n-2}{2}$	$\frac{8n+10}{2}$	$\frac{2n-8}{2}$	$\frac{8n+16}{2}$	$\dots$	$\frac{-n+10}{2}$	$\frac{11n-2}{2}$	$\frac{-n+4}{2}$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\dots$	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n
$\alpha_4(y_i)$	$n+1$	$n+3$	$3n-1$	$n+5$	$3n-3$	$\dots$	$2n-1$	$2n+3$	$2n+1$
$w_{\alpha_4}(y_i)$	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{2n}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{2n-2}{2}$	$\dots$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n+4}{2}$	$\frac{n+2}{2}$
$Wt_{\alpha_4}(y_i)$	$\frac{2n+4}{2}$	$\frac{2n+10}{2}$	$\frac{8n-2}{2}$	$\frac{2n+16}{2}$	$\frac{8n-8}{2}$	$\dots$	$\frac{5n-2}{2}$	$\frac{5n+10}{2}$	$\frac{5n+4}{2}$

5. (a, d)-PTSA untuk $d = 4$

6: $(a, 4)$-PTSA pada Digraf Matahari untuk n Gasal

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\dots$	x_{n-1}	x_n
$\alpha_5(x_i)$	$2n+2$	5	$2n+6$	9	$2n+10$	$\dots$	$2n-1$	$4n$
$w_{\alpha_5}(x_i)$	$-4n+1$	$-2n+2$	$-4n+5$	$-2n+6$	$-4n+9$	$\dots$	-4	$-2n-1$
$Wt_{\alpha_5}(x_i)$	$-2n+3$	$-2n+7$	$-2n+11$	$-2n+15$	$-2n+19$	$\dots$	$2n-5$	$2n-1$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$\dots$	y_{n-1}	y_n
$\alpha_5(y_i)$	$2n+1$	$2n$	$4n-3$	$2n-4$	$4n-7$	$\dots$	6	4
$w_{\alpha_5}(y_i)$	2	$4n-1$	$2n-2$	$4n-5$	$2n-6$	$\dots$	$2n+5$	$2n+3$
$Wt_{\alpha_5}(y_i)$	$2n+3$	$6n-1$	$6n-5$	$6n-9$	$6n-13$	$\dots$	$2n+11$	$2n+7$

7: $(a, 4)$-PTSA pada Digraf Matahari untuk n Genap

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
$\alpha_5(x_i)$	$2n+4$	3	$2n+8$	7	$\ldots$	$4n$	$2n-1$
$w_{\alpha_5}(x_i)$	$-4n-1$	$-2n+4$	$-4n+3$	$-2n+8$	$\ldots$	$-2n-5$	0
$Wt_{\alpha_5}(x_i)$	$-2n+3$	$-2n+7$	$-2n+11$	$-2n+15$	$\ldots$	$2n-5$	$2n-1$

	y_1	y_2	y_3	y_4	$\ldots$	y_{n-1}	y_n
$\alpha_5(y_i)$	$2n+3$	$2n-2$	$4n-1$	$2n-6$	$\ldots$	$2n+7$	2
$w_{\alpha_5}(y_i)$	4	$4n-3$	$2n$	$4n-7$	$\ldots$	8	$2n+1$
$Wt_{\alpha_5}(y_i)$	$2n+7$	$6n-5$	$6n-1$	$6n-13$	$\ldots$	$2n+15$	$2n+3$