

TUGAS AKHIR - SM234801

**ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL
PENYEBARAN RUMOR DI MEDIA SOSIAL
BERDASARKAN AKUN TERHUBUNG DAN TIDAK
TERHUBUNG**

AISYAH FITRI

NRP 5002201004

Dosen Pembimbing

Prof. Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D.

NIP 19710513 199702 1 001

Program Studi Sarjana

Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2024



TUGAS AKHIR - SM234801

**ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL
PENYEBARAN RUMOR DI MEDIA SOSIAL
BERDASARKAN AKUN TERHUBUNG DAN TIDAK
TERHUBUNG**

AISYAH FITRI

NRP 5002201004

Dosen Pembimbing

Prof. Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D.

NIP 19710513 199702 1 001

Program Sarjana

Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2024



FINAL PROJECT - SM234801

**ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF RUMOR
SPREAD ON SOCIAL MEDIA BASED ON
CONNECTED AND UNCONNECTED ACCOUNTS**

AISYAH FITRI

NRP 5002201004

Supervisors

Prof. Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D.

NIP 19710513 199702 1 001

Bachelor Program

Departement of Mathematics

Faculty of Scientics

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2024

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN RUMOR DI MEDIA SOSIAL BERDASARKAN AKUN TERHUBUNG DAN TIDAK TERHUBUNG

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Program Studi S-1 Matematika Departemen Matematika Fakultas Sains dan Analitika Data Institut Teknologi Sepuluh Nopember

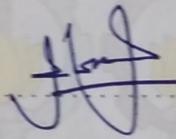
Oleh: AISYAH FITRI
NRP. 5002201004

Surabaya, Juli 2024

Disetujui oleh Tim Penguji Tugas Akhir:

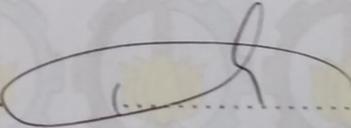
Pembimbing

1. Prof. Subchan, S.Si, M.Sc. Ph.D.
NIP. 19710513 199702 1 001

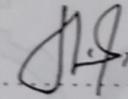
()

Penguji

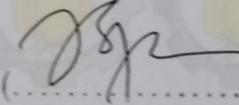
1. Prof. Dr. Chairul Imron, Ml.Komp.
NIP. 19611115 198703 1 003

()

2. Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si
NIP. 19761215 200312 2 001

()

3. Dr. Tahiyatul Asfhani, S.Si, M.Si
NIP. 19870728 201404 2 001

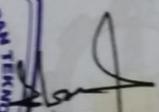
()

Mengetahui

Kepala Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data



Prof. Subchan, S. Si, M. Sc. Ph.D.
NIP. 19710513 199702 1 001

()



TUGAS AKHIR - SM234801

**ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL
PENYEBARAN RUMOR DI MEDIA SOSIAL
BERDASARKAN AKUN TERHUBUNG DAN TIDAK
TERHUBUNG**

AISYAH FITRI

NRP 5002201004

Dosen Pembimbing

Prof. Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D.

NIP 19710513 199702 1 001

Program Sarjana

Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2024



FINAL PROJECT - SM234801

**ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF RUMOR
SPREAD ON SOCIAL MEDIA BASED ON
CONNECTED AND UNCONNECTED ACCOUNTS**

AISYAH FITRI

NRP 5002201004

Supervisors

Prof. Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D.

NIP 19710513 199702 1 001

Bachelor Program

Departement of Mathematics

Faculty of Scientics

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2024

PERNYATAAN ORISINALITAS

Yang bertanda tangan disini:

Nama Mahasiswa / NRP : Aisyah Fitri / 5002201004

Departemen : Matematika

Dosen Pembimbing / NIP : Prof. Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D. / 19710513 199702 1 001

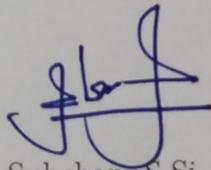
dengan ini menyatakan bahwa Tugas Akhir dengan judul “ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN RUMOR DI MEDIA SOSIAL BERDASARKAN AKUN TERHUBUNG DAN TIDAK TERHUBUNG” adalah hasil karya sendiri, bersifat orisinal, dan ditulis dengan mengikuti kaidah penulisan ilmiah.

Bilamana di kemudian hari ditemukan ketidaksesuaian dengan pernyataan ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan yang berlaku di Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, 30 Juli 2024

Mengetahui
Dosen Pembimbing

Mahasiswa



Prof. Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D.
NIP. 19710513 199702 1 001



Aisyah Fitri
NRP. 5002201004

ABSTRAK

ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN RUMOR DI MEDIA SOSIAL BERDASARKAN AKUN TERHUBUNG DAN TIDAK TERHUBUNG

Nama Mahasiswa / NRP : Aisyah Fitri / 5002201004
Departemen : Matematika FSAD -ITS
Dosen Pembimbing : Prof. Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D.

Abstrak

Rumor merupakan informasi yang tidak diketahui kebenarannya dan telah menyebar dari individu ke individu lain. Penyebaran rumor yang tidak terkendali akan menyebabkan kekhawatiran pada masyarakat karena adanya informasi yang belum tentu benar terjadi. Rumor banyak ditemukan di media sosial baik dari akun yang saling mengikuti (akun terhubung) maupun akun yang tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung). Oleh karena itu, dilakukan upaya untuk pengendalian penyebaran rumor berdasarkan dua jenis akun tersebut berupa penekanan terhadap akun terhubung dan tidak terhubung dengan tujuan untuk mengurangi populasi individu yang menyebarkan rumor. Pada Tugas Akhir ini dibahas mengenai modifikasi model SIMR (*Susceptible-Infected-Marketing-Removed*) penyebaran rumor di media sosial berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung, analisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan, analisa dan eksistensi kontrol optimal. Selanjutnya, kontrol optimal diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin dan dilakukan penyelesaian secara numerik dengan metode Runge-Kutta Orde Empat dengan bantuan Matlab. Kemudian, dari analisis hasil simulasi diperoleh bahwa setelah pemberian kontrol pada populasi individu yang menyebarkan rumor baik kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung) maupun kepada orang lain yang tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung) akan menurun lebih cepat.

Kata kunci: *Rumor, Kontrol Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin.*

ABSTRACT

ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF RUMOR SPREAD ON SOCIAL MEDIA BASED ON CONNECTED AND UNCONNECTED ACCOUNTS

Student Name / NRP : Aisyah Fitri / 5002201004
Departement : Mathematics SCIENTICS - ITS
Advisor : Prof. Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D.

Abstract

Rumors are information that is not known to be true and has spread from individual to other individual. The uncontrolled spread of rumors will cause concern among the public because there is information that is not necessarily true. Rumors are often found on social media, both from accounts that follow each other (connected accounts) and accounts that do not follow each other (unconnected accounts). Therefore, efforts are made to control the spread of rumors based on these two types of accounts in the form of emphasizing connected and unconnected accounts with the aim of reducing the population of individuals who spread rumors. In this final assignment, we discuss the modification of the SIMR (*Susceptible-Infected-Marketing-Removed*) model for spreading rumors on social media based on connected and unconnected accounts, analysis of stability around the equilibrium point, analysis and existence of optimal control. Next, optimal control is solved using Pontryagin's Minimum Principle and numerical solutions are carried out using the Fourth Order Runge-Kutta method with the help of Matlab. Then, from the analysis of the simulation results, it was found that after controlling the population of individuals who spread rumors both to friends who follow each other (connected accounts) and to other people who do not follow each other (unconnected accounts) will decrease more quickly.

Keywords: *Rumors, Optimal Control, Pontryagin's Minimum Principle.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT karena atas berkah, rahmat dan Ridho-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul :

”ANALISIS DAN KONTROL OPTIMAL PENYEBARAN RUMOR DI MEDIA SOSIAL BERDASARKAN AKUN TERHUBUNG DAN TIDAK TERHUBUNG”

sebagai salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat kerja sama, bantuan, dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada :

1. Orangtua penulis yang selalu memberikan do’a, semangat, nasehat, dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Kepala Departemen Matematika FSAD ITS yang telah memberikan dukungan fasilitas, sarana dan prasarana di kampus.
3. Sekretaris Departemen Bidang Akademik S1 Departemen Matematika FSAD ITS yang telah memberikan kebutuhan administrasi selama perkuliahan.
4. Bapak Prof. Subchan, S. Si, M. Sc, Ph. D. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi kepada penulis selama pengerjaan tugas akhir ini.
5. Bapak Prof. Dr. Subiono, MS selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FSAD ITS.
6. Bapak Prof. Dr. Chairul Imron, MI. Komp., Ibu Dian Winda Setywati S. Si, M. Si. dan Ibu Dr. Tahiyatul Asfihani, S. Si, M. Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan masukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
7. Seluruh jajaran dosen dan tenaga pendidik Departemen Matematika FSAD ITS yang telah memberikan ilmu, pengalaman, dukungan dan bantuan kepada penulis selama menempuh proses perkuliahan.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, 30 Juli 2024

Aisyah Fitri

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
PERNYATAAN ORISINALITAS	iii
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR SIMBOL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Rumor	6
2.3 Model SIMR	6
2.4 Kestabilan	8
2.5 Kriteria Routh-Hurwitz	10
2.6 Eksistensi Kontrol Optimal	10
2.7 Teori Kontrol Optimal	12
2.8 Metode Runge Kutta Orde 4	13
BAB III METODOLOGI	15
3.1 Tahap Penelitian	15
3.2 Diagram Alir	16
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	19
4.1 Model Matematika Penyebaran Rumor Berdasarkan Akun Terhubung dan Tidak Terhubung	19
4.2 Titik Kesetimbangan	22
4.3 Analisis Kestabilan di Titik Kesetimbangan	25
4.3.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Rumor (E_0)	28
4.3.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik (E_1)	30
4.4 Model Matematika Penyebaran Rumor Berdasarkan Akun Terhubung dan Tidak Terhubung dengan Kontrol	32
4.5 Kepositifan dan Ketunggalan	34

4.6	Eksistensi Kontrol Optimal	43
4.7	Penyelesaian Kontrol Optimal.....	47
4.8	Penyelesaian Numerik	52
	4.8.1 Penyelesaian Numerik Sebelum Dikontrol	52
	4.8.2 Penyelesaian Numerik Setelah Dikontrol	53
4.9	Analisis dan Hasil Simulasi	56
BAB V	KESIMPULAN DAN SARAN	61
5.1	Kesimpulan	61
5.2	Saran	62
	DAFTAR PUSTAKA	63
	DAFTAR LAMPIRAN	65
	Lampiran 1 <i>Source Code</i> Matlab	65
	UCAPAN TERIMA KASIH	73
	BIODATA PENULIS	75

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Kompartemen Model SIMR Penyebaran Rumor	7
Gambar 3.1	Diagram Alir	17
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen Model SIMR Penyebaran Rumor	20
Gambar 4.2	Diagram Kompartemen Model SIMR Penyebaran Rumor dengan Kontrol	33
Gambar 4.3	Perbandingan Perubahan Jumlah Populasi <i>Susceptible</i> Tanpa dan dengan Kontrol	57
Gambar 4.4	Perbandingan Perubahan Jumlah Populasi <i>Infected</i> Tanpa dan dengan Kontrol	58
Gambar 4.5	Perbandingan Perubahan Jumlah Populasi <i>Marketing</i> Tanpa dan dengan Kontrol	59
Gambar 4.6	Perbandingan Perubahan Jumlah Populasi <i>Removed</i> Tanpa dan dengan Kontrol	59
Gambar 4.7	Perubahan Pemberian Kontrol	60

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Kompartemen Model SIMR Penyebaran Rumor	7
Tabel 2.2	Parameter pada Model SIMR Penyebaran Rumor	8
Tabel 4.1	Variabel	20
Tabel 4.2	Parameter	20
Tabel 4.3	Nilai Parameter	56
Tabel 4.4	Nilai Awal	56

DAFTAR SIMBOL

- S : Individu yang tidak mengetahui adanya rumor tetapi rentan karena pengguna media sosial
- I : Individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung)
- M : Individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada orang yang tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung)
- R : Individu yang telah kehilangan minat dan berhenti menyebarkan rumor
- b : Tingkat pertumbuhan individu yang rentan
- d : Tingkat individu yang berhenti menyebarkan rumor
- α_1 : Laju interaksi individu *susceptible* dengan individu *infected*
- α_2 : Laju interaksi individu *susceptible* dengan individu *marketing*
- δ : Laju perubahan individu *infected* ke individu *removed*
- γ : Laju perubahan individu *infected* ke individu *marketing*
- a : Tingkat efek algoritma media sosial
- β : Laju perubahan individu *marketing* ke individu *removed*
- a_1 : Bobot kerugian dari individu *infected*
- a_2 : Bobot kerugian dari individu *marketing*
- b_1 : Bobot pada kontrol penekanan akun terhubung
- b_2 : Bobot pada kontrol penekanan akun tidak terhubung

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatarbelakangi permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun ke dalam suatu rumusan masalah serta diberikan batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang telah ditetapkan. Selanjutnya, dijabarkan juga manfaat yang diharapkan.

1.1 Latar Belakang

Seiring perkembangan teknologi yang semakin pesat, informasi dengan mudah diperoleh melalui media sosial seperti Instagram, TikTok, dan sebagainya. Menurut survei *Katadata Insight Center* (KIC), sebanyak 76% masyarakat Indonesia mendapatkan atau menyebarkan informasi melalui media sosial (Annur, 2023). Kemudahan yang diberikan media sosial dalam penyampaian informasi kepada publik membuat semua orang dengan mudah mengakses dan menyebarkan informasi. Informasi yang diperoleh atau disebarkan dapat berupa rumor. Rumor merupakan informasi yang belum diketahui kebenarannya dan telah tersebar dari orang ke orang. Hasil survei yang dilakukan oleh *Katadata Insight Center* (KIC) yang bekerjasama dengan Kementerian Komunikasi dan Informatika serta SiBerkreasi menyatakan setidaknya 30% hingga 60% masyarakat Indonesia mengetahui rumor saat mengakses dan berkomunikasi melalui media sosial (Fajri, 2023). Penyebaran rumor yang tidak terkendali akan berpengaruh pada masyarakat yang khawatir dengan adanya informasi-informasi yang tersebar.

Mengingat cepatnya penyebaran rumor dan berpengaruh pada kepercayaan masyarakat, maka diperlukan upaya pengendalian. Salah satu upaya yang dapat dilakukan yaitu kontrol optimal. Kontrol optimal merupakan model yang dibutuhkan dalam pengambilan keputusan untuk mencapai suatu tujuan (Rusmarlina, 2023). Salah satu penelitian yang menerapkan kontrol optimal adalah penelitian yang dilakukan oleh Darsih dan Subchan pada tahun 2020 untuk memodelkan kontrol optimal pada sistem manajemen inventori *multi-supplier* dengan *lead time* yang meminimumkan biaya persediaan (Idayani & Subchan, 2020). Selain itu, pada tahun 2020 dilakukan penelitian oleh Indah dan Didik dengan memodelkan kontrol optimal pada penyebaran virus influenza tipe A H1N1 dengan pengendalian lingkungan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin (Rahmadhania & Arif, 2020).

Beberapa penelitian tentang pemodelan pada penyebaran rumor juga telah dilakukan. Penelitian pertama kali dilakukan oleh Daley dan Kendall pada tahun 1965 yang membahas model SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) pada penyebaran rumor. Model tersebut tidak mempertimbangkan adanya waktu yang diperlukan untuk menerima atau menyebarkan rumor (Daley & Kendall, 1965). Pada tahun 2019, dilakukan penelitian oleh Linhe Zhu, Mengxue Liu, dan Yimin Li yang membahas model SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) penyebaran rumor pada jaringan sosial online (L. Zhu et al., 2019). Terdapat juga penelitian oleh He Zhu dan Jing Ma pada tahun 2019, dengan model SHIR (*Susceptible, Hesitated, Infected, Removed*) penyebaran rumor dalam jaringan heterogen random dengan pertemanan dinamis (H. Zhu & Ma, 2019). Dalam pemodelan penyebaran

rumor yang telah ada, tampaknya penyebaran dilakukan antar teman baik berkomunikasi secara langsung maupun media sosial. Faktanya pengguna media sosial tidak hanya mendapatkan informasi dari akun yang saling mengikuti, tetapi juga menerimanya dari akun yang tidak saling mengikuti. Akun yang saling mengikuti disebut juga akun terhubung, sedangkan akun yang tidak saling mengikuti disebut akun tidak terhubung. Informasi yang diterima dari akun tidak terhubung disebabkan oleh algoritma media sosial baik yang paling sering dicari maupun sedang viral.

Algoritma media sosial memiliki peran signifikan dalam mempercepat penyebaran rumor. Algoritma ini dirancang untuk memaksimalkan keterlibatan pengguna dengan menampilkan konten yang paling mungkin menarik perhatian mereka, dan mengidentifikasinya sebagai konten yang menarik banyak interaksi, seperti banyaknya komentar, *likes*, dan *shares*. Hal ini menyebabkan rumor dapat muncul di *feed* pengguna lain dan memperluas jangkauan penyebarannya dengan cepat. Selain itu, fitur trending topik dan sifat viral dari media semakin mempercepat penyebaran, dimana rumor dapat muncul di halaman utama atau direkomendasikan kepada lebih banyak orang yang memiliki minat serupa. Hal ini dapat terjadi karena algoritma tersebut tidak dapat membedakan antara informasi yang valid dan yang tidak. Akibatnya, pengguna media sosial dapat dengan mudah menemukan dan membagikan informasi yang tidak benar, sehingga rumor dapat tersebar dengan cepat dan luas (Fajri, 2023).

Berdasarkan uraian diatas dan memperhatikan model dari hasil penelitian yang telah dilakukan, pada tugas akhir ini dilakukan modifikasi pada model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan menambahkan asumsi baru berupa efek algoritma media sosial. Selanjutnya dibahas mengenai analisis kestabilan disekitar titik kesetimbangan, kepositifan dan ketunggalan solusi model, analisis kontrol optimal pada model penyebaran rumor di media sosial berdasarkan dua jenis akun yaitu akun terhubung dan akun tidak terhubung serta pemberian variabel kontrol berupa penekanan akun terhubung dan akun tidak terhubung. Sehingga, variabel kontrol tersebut dijadikan sebagai variabel yang nilainya diperoleh melalui teori kontrol optimal yaitu Prinsip Minimum Pontryagin dan penyelesaian simulasi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, dapat dirumuskan beberapa masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana analisis kestabilan sistem disekitar titik kesetimbangan pada model matematika penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung?
2. Bagaimana analisis dan eksistensi kontrol optimal pada model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung?
3. Bagaimana kontrol optimal pada model matematika penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan Prinsip Minimum Pontryagin?
4. Bagaimana analisis hasil simulasi numerik dalam penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, permasalahan akan dibatasi ruang lingkup pembahasannya yaitu sebagai berikut.

1. Model matematika penyebaran rumor di media sosial dan nilai parameter yang digunakan merujuk pada jurnal yang ditulis oleh Yu, Ying dkk (2022) dengan judul “*Stability Analysis and Optimal Control of a Rumor Propagation Model Based on Two Communication Modes: Friends and Marketing Account Pushing*” (Yu et al., 2022).
2. Kontrol yang digunakan pada model adalah penekanan akun terhubung pada individu *infected*, dan penekanan akun tidak terhubung pada individu *marketing*.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan sebelumnya, didapatkan beberapa tujuan sebagai berikut.

1. Menganalisis kestabilan sistem disekitar titik kesetimbangan pada model matematika penyebaran rumor berdasarkan dua komunikasi yaitu akun terhubung dan tidak terhubung.
2. Menganalisis dan membuktikan eksistensi kontrol optimal pada model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung.
3. Menentukan kontrol optimal pada model matematika penyebaran rumor di media berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan Prinsip Minimum Pontryagin.
4. Menganalisis hasil simulasi numerik dalam penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung.

1.5 Manfaat

Berikut adalah manfaat yang diharapkan.

1. Menambah wawasan tentang model matematika pada penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung.
2. Memberikan informasi kepada pembaca mengenai kontrol optimal pada penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung.
3. Penelitian ini diharapkan membantu dalam menyelesaikan permasalahan penyebaran rumor yang semakin marak di masyarakat.
4. Diharapkan penelitian ini dapat dijadikan referensi untuk penelitian selanjutnya.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dipaparkan penelitian yang berkaitan dengan kontrol optimal pada model penyebaran rumor yang telah dilakukan oleh penelitian sebelumnya. Selain itu, dijelaskan juga mengenai teori rumor, model SIMR (*Susceptible, Infected, Marketing, Removed*), kestabilan sistem di sekitar titik kesetimbangan, ketunggalan sistem, eksistensi kontrol optimal, teori kontrol optimal, dan Runge Kutta orde 4.

2.1 Penelitian Terdahulu

Dalam Tugas Akhir ini, model matematika yang digunakan merujuk pada beberapa penelitian terdahulu yang sesuai dengan topik yang dibahas. Penelitian yang dilakukan oleh Ying Yu, Jiaomin Liu, Jiadong Ren, dan Cuiyi Xiao pada tahun 2022 yang berjudul “*Stability Analysis and Optimal Control of a Rumor Propagation Model Based on Two Communication Modes: Friends and Marketing Account Pushing*” merupakan rujukan utama digunakan dalam Tugas Akhir ini. Pada paper tersebut penyebaran rumor dengan memperhatikan dua jenis akun penyebaran di media sosial, yaitu penyebaran melalui akun teman dan akun promosi dimodelkan. Seluruh populasi dikelompokkan menjadi empat kompartemen yaitu *Susceptible, Infected, Marketing, dan Removed*. Populasi *Susceptible* merupakan populasi yang belum mengetahui rumor tetapi rentan sebab menggunakan media sosial. Populasi *Infected* merupakan populasi yang telah terpapar atau mengetahui rumor dan menyebarkannya ke akun individu. Populasi *Marketing* merupakan populasi yang telah terpapar atau mengetahui rumor dan menyebarkannya ke akun pemasaran. Sedangkan, populasi *Removed* merupakan populasi yang telah kehilangan minat dan berhenti menyebarkan rumor. Ketika $R_0 < 1$ maka penyebaran rumor akan berhenti dan ketika $R_0 > 1$ maka rumor akan terus menyebar dalam sistem. Pada penelitian ini, diberikan kontrol berupa penekanan pada akun individu dan akun pemasaran dengan penyelesaian kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin (Yu et al., 2022).

Pada tahun 2022 dilakukan penelitian pada Tugas Akhir oleh Dinda Anisa' Maulina dengan judul “Analisis dan Kontrol Optimal Model SEIR pada Penyebaran Rumor dengan Kendali Sosial dan Hukuman (Studi Kasus: Mahasiswa ITS)”. Pada penelitian tersebut menggunakan model SEIR (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*) dengan pemberian kontrol berupa sosialisasi dan hukuman untuk mengurangi jumlah individu yang menyebarkan rumor (*infected*) pada Mahasiswa ITS dengan penyelesaian kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Populasi *Susceptible* merupakan individu yang tidak mengetahui adanya rumor namun rentan mengetahui rumor. Populasi *Exposed* merupakan individu yang mengetahui adanya rumor dan berpotensi menyebarkannya. Populasi *Infected* merupakan individu yang menyebarkan rumor. Sedangkan, populasi *Recovered* merupakan individu yang berhenti menyebarkan rumor. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dengan pemberian kontrol tersebut efektif dalam mengendalikan penyebaran rumor di kalangan Mahasiswa ITS (Maulina, 2022).

Selain itu, terdapat penelitian yang dilakukan oleh Verent Nindi Oktaviani Rusmarlina pada tahun 2023 dengan judul “Analisis Kestabilan dan Penerapan Kontrol

Optimal pada Model Penyebaran Rumor Melalui Liputan Media”. Pada penelitian tersebut dilakukan rekonstruksi model SIR (*Susceptible, Infected, Recovered*) menjadi empat subpopulasi yaitu X merupakan subpopulasi individu yang tidak mengetahui adanya rumor, X_m merupakan subpopulasi individu yang mengetahui adanya rumor namun tidak menyebarkan rumor, Y merupakan subpopulasi individu yang menyebarkan rumor, dan M merupakan efek kumulatif dari *awareness programs* akan adanya rumor yang didorong oleh liputan media. Setelah direkonstruksi model, dilakukan kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Pemberian kontrol berupa edukasi pada subpopulasi X dan X_m . Hasil penelitian menunjukkan bahwa dengan memberikan kontrol tersebut dapat mengurangi penyebaran rumor (Rusmarlina, 2023).

2.2 Rumor

Rumor adalah informasi mengenai suatu peristiwa atau isu yang menjadi perhatian publik yang belum dipastikan kebenarannya dan disebarkan dari orang ke orang. Rumor dapat berasal dari peristiwa publik yang berkaitan dengan suatu kelompok atau organisasi dan beredar di lingkungan tertentu sebelum perlahan menyebar ke lingkungan lain. Saat ini, rumor menyebar dengan dan luas dikarenakan perkembangan teknologi komunikasi yang semakin modern. Sebelumnya penyebaran rumor dilakukan dari mulut ke mulut, tetapi saat ini dapat dilakukan di media sosial. Hal ini memengaruhi persepsi publik dan menimbulkan tindakan yang tidak didasari oleh fakta (Rusmarlina, 2023).

Penyebaran rumor di media sosial dapat dipengaruhi oleh keterhubungan antar akun, baik yang terhubung maupun tidak terhubung (Yu et al., 2022). Akun terhubung merupakan akun yang saling mengikut. Akun ini apabila mempunyai jejaring sosial yang kuat, mampu mempercepat penyebaran rumor di dalam kelompok-kelompok tertentu. Sedangkan akun tidak terhubung merupakan akun yang tidak saling mengikuti. Akun ini berpeluang menyebarkan rumor di luar jaringan yang lebih luas, bergantung pada karakteristik konten itu sendiri untuk mencapai keterlibatan yang signifikan. Hal tersebut membuat penyebaran rumor dapat diterima banyak orang lebih cepat.

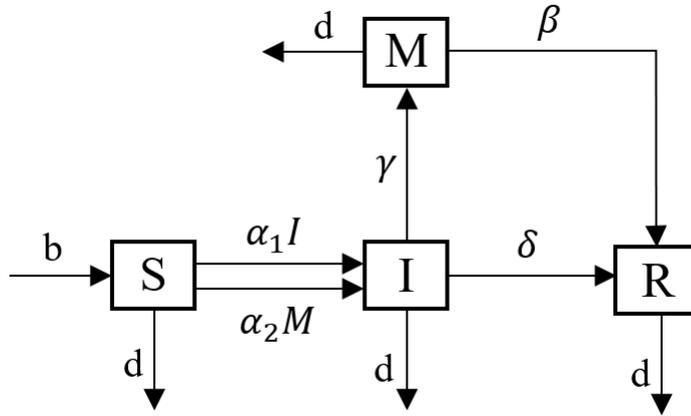
2.3 Model SIMR

Model matematika merupakan suatu persamaan atau himpunan persamaan yang memiliki penyelesaian dari variabel keadaannya berupa representasi dari permasalahan yang diberikan. Adapun model yang digunakan adalah model SIMR (*Susceptible, Infected, Marketing, Removed*). Kompartemen tersebut, yaitu (Yu et al., 2022):

Tabel 2.1 Kompartemen Model SIMR Penyebaran Rumor

Variabel	Deskripsi
S	Individu yang tidak mengetahui adanya rumor tetapi rentan karena sebagai pengguna media sosial
I	Individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung)
M	Individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada orang yang tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung)
R	Individu yang telah kehilangan minat dan berhenti menyebarkan rumor

Hubungan keempat kompartemen tersebut pada model SIMR direpresentasikan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Diagram Kompartemen Model SIMR Penyebaran Rumor

Gambar 2.1 menunjukkan kompartemen-kompartemen dalam Model SIMR. Sehingga diperoleh model matematika sebagai berikut.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = b(1 - S(t) - I(t) - M(t) - R(t)) - \alpha_1 S(t)I(t) - \alpha_2 M(t)S(t) - dS(t) \\ \frac{dI}{dt} = \alpha_1 S(t)I(t) + \alpha_2 M(t)S(t) - \delta I(t) - \gamma I(t) - dI(t) \\ \frac{dM}{dt} = \gamma I(t) - \beta M(t) - dM(t) \\ \frac{dR}{dt} = \delta I(t) + \beta M(t) - dR(t) \\ S(0) \geq 0, I(0) \geq 0, M(0) \geq 0, R(0) \geq 0, 0 \leq t \leq T \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Dengan kondisi awal, $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $M(0) = M_0$, dan $R(0) = R_0$. $(1 - S(t) - I(t) - M(t) - R(t))$ menunjukkan jumlah populasi yang belum terlibat dalam Sistem (2.1) dan berpotensi menjadi pengguna media sosial dengan laju konstan b (Yu et al., 2022).

Adapun parameter yang digunakan akan ditunjukkan pada Tabel 2.2 (Yu et al., 2022).

Tabel 2.2 Parameter pada Model SIMR Penyebaran Rumor

Parameter	Deskripsi
b	Tingkat pertumbuhan individu yang rentan
d	Tingkat kematian alami
α_1	Laju interaksi individu <i>susceptible</i> dengan individu <i>infected</i>
α_2	Laju interaksi individu <i>susceptible</i> dengan individu <i>marketing</i>
δ	Laju perubahan individu <i>infected</i> ke individu <i>removed</i>
γ	Laju perubahan individu <i>infected</i> ke individu <i>marketing</i>
β	Laju perubahan individu <i>marketing</i> ke individu <i>removed</i>

2.4 Kestabilan

Titik kesetimbangan adalah himpunan titik tetap dari suatu penyelesaian persamaan diferensial. Titik kesetimbangan juga merupakan kondisi sistem yang tetap, tidak berubah terhadap waktu atau konstan.

Definisi 2.1. (Perko, 2000) Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik setimbang (titik ekuilibrium dari persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$ jika $f(\bar{x}) = 0$

Kestabilan dilakukan untuk mengetahui apakah penyelesaian menuju titik setimbang atau tidak. Analisis kestabilan sistem diketahui berdasarkan kestabilan lokal. Kestabilan lokal dapat dianalisis berdasarkan nilai eigen dari pelinearan sistem persamaan diferensial tak linear di sekitar titik kesetimbangan. Linearisasi merupakan proses hampiran persamaan diferensial tak linear terhadap bentuk bentuk linear. Linearisasi pada Sistem (2.2) dapat dilakukan melalui ekspansi deret Taylor disekitar titik kesetimbangan. Jika $x = a$, ekspansi dari fungsi $f(x)$ diberikan sebagai berikut (Bora et al., 2024):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f^2(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^3(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + \dots$$

Ketika $x = 0$, fungsi ini dikenal sebagai deret Maclaaurin. Teorema Taylor menyatakan bahwa semua fungsi yang memenuhi kondisi tertentu dapat dinyatakan sebagai deret Taylor.

Diberikan suatu persamaan diferensial tak linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Untuk mempermudah, hanya dua suku pertama (orde nol dan orde pertama) dari deret yang digunakan dalam aproksimasi Taylor. Penggunaan tersebut untuk memastikan bahwa deret Taylor adalah polinomial linear. Misalkan (x_0, y_0) adalah titik kesetimbangan

dari sistem persamaan. Sehingga persamaan diferensial dapat didekati sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ g(x, y) &\approx g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nilai $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ akan bernilai nol di titik setimbang (x_0, y_0) sehingga (2.3) menjadi:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ g(x, y) &\approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

Misalkan $u = (x - x_0)$ dan $v = (y - y_0)$, maka diperoleh sistem linearisasi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)v \end{aligned}$$

dan diubah ke dalam matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

dalam hal ini matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

disebut Matriks Jacobian di sekitar titik kesetimbangan (x_0, y_0) (Subiono, 2023).

Teorema 2.1. (Subiono, 2023) Diberikan persamaan differensial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dengan matriks \mathbf{A} berukuran $n \times n$ dan mempunyai nilai karakteristik yang berbeda $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($k \leq n$).

1. Titik asal $\mathbf{x} = 0$ adalah stabil asimtotik bila dan hanya bila $Re\lambda_i < 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$.
2. Titik asal $\mathbf{x} = 0$ adalah stabil bila dan hanya bila $Re\lambda_i \leq 0$ untuk semua $i = 1, \dots, k$ dan untuk semua λ_i dengan $Re\lambda_i = 0$ multiplisitas aljabar sama dengan multiplisitas geometrinya.
3. Titik asal $\mathbf{x} = 0$ adalah tak stabil bila dan hanya bila $Re\lambda_i > 0$ untuk beberapa $i = 1, \dots, k$ atau ada λ_i dengan $Re\lambda_i = 0$ multiplisitas aljabar lebih besar dari multiplisitas geometrinya.

2.5 Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai-nilai karakteristik dari matriks A adalah akar-akar karakteristik dari polinomial

$$p(s) = \det(sI - A) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (2.4)$$

dengan $a_n = 1$. Tujuan penggunaan kriteria Routh-Hurwitz yaitu untuk mengecek langsung kestabilan melalui koefisien a_1 tanpa menghitung akar-akar dari polinomial dengan memberikan label dan suatu aturan penghitungan dari koefisien a_i dan akan diketahui bahwa apakah polinomial yang diberikan oleh Persamaan (2.4) mempunyai semua akar-akar bagian realnya bernilai negatif.

Berikut diberikan suatu polinomial

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, a_n \neq 0$$

dengan susunan tabel sebagai berikut.

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ s^0 & q & & & \end{array}$$

dimana $b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$ dan q diperoleh dari

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, & b_2 &= \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, & \dots \\ c_1 &= \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}, & c_2 &= \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}, & \dots \end{aligned}$$

Kriteria Routh-Hurwitz menyimpulkan bahwa jumlah akar-akar polinomial $q(s)$ yang bagian realnya positif dapat ditentukan dengan menghitung perubahan tanda dalam kolom pertama pada tabel kriteria Routh-Hurwitz. Apabila tidak ada perubahan tanda (semuanya bertanda positif atau semuanya bertanda negatif) pada kolom pertama, maka semua akar polinomial $q(s)$ bagian realnya adalah negatif. Jika polinomial ini merupakan polinomial akar-akar karakteristik dari matriks A, maka sistem ini adalah stabil (Subiono, 2023).

2.6 Eksistensi Kontrol Optimal

Sebelum membuktikan eksistensi kontrol optimal, akan dijelaskan teori-teori yang berhubungan dengan identifikasi terhadap eksistensi kontrol optimal. Teori-teori tersebut diantaranya yaitu fungsi terbatas, himpunan terbuka dan tertutup, fungsi kontinu, himpunan konveks, dan fungsi konveks. Pertama, diberikan definisi mengenai fungsi terbatas.

Definisi 2.1. (Bartle & Sherbert, 2000) Pandang D himpunan bagian tak kosong dari \mathbb{R} dan suatu fungsi $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan fungsi terbatas jika ada $B > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| < B$ untuk setiap $x \in D$.

Selanjutnya diberikan definisi persekitaran dari suatu titik \mathbb{R} .

Definisi 2.2. (Kreyszig, 1991) Suatu persekitaran titik x_0 di \mathbb{R} didefinisikan sebagai himpunan

$$V_\delta(x_0) = \{x \mid \|x - x_0\| < \delta\}$$

Kemudian, diberikan definisi himpunan terbuka.

Definisi 2.3. (Kreyszig, 1991) Suatu himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan terbuka jika untuk setiap $x \in A$ berlaku

$$V_\delta(x) \subseteq A$$

untuk suatu $\delta > 0$

Berikutnya diberikan definisi himpunan tertutup.

Definisi 2.4. (Kreyszig, 1991) Suatu himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan tertutup jika $\mathbb{R} \setminus A$ terbuka dimana $\mathbb{R} \setminus A$ merupakan himpunan komplemen dari himpunan A . Artinya untuk setiap $x \notin A$ ada $\delta > 0$ sedemikian hingga

$$V_\delta(x) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$$

Ini berarti dapat dinyatakan bahwa A tertutup jika untuk setiap $x \notin A$ ada $\delta > 0$ sedemikian hingga

$$A \cap V_\delta(x) = \emptyset$$

Kemudian diberikan teorema mengenai fungsi kontinu pada suatu selang interval.

Teorema 2.5. (Bartle & Sherbert, 2000) Diberikan I merupakan suatu interval di \mathbb{R} . Fungsi $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan kontinu di $a \in I$ jika memenuhi syarat-syarat berikut.

1. f terdefinisi di a
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ada
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ada

Selain itu diberikan definisi mengenai segmen garis.

Definisi 2.6. (Tuy, 1998) Diberikan $a, b \in \mathbb{R}^n$. Segmen garis yang melalui a dan b didefinisikan sebagai himpunan semua titik

$$(1 - \lambda)a + \lambda b, \forall \lambda \in [0, 1]$$

Berkaitan dengan sebelumnya, diberikan juga definisi himpunan konveks.

Definisi 2.7. (Tuy, 1998) Diberikan C himpunan bagian tak kosong dari \mathbb{R}^n . Himpunan C dikatakan himpunan konveks jika C memuat segmen garis dari sebarang dua titik di C atau dengan kata lain

$$(1 - \lambda)a + \lambda b \in C$$

untuk setiap $a, b \in C$ dan $\lambda \in [0, 1]$

Terakhir diberikan definisi dari fungsi konveks sebagai berikut.

Definisi 2.8. (Tuy, 1998) Pandang S himpunan bagian tak kosong dari \mathbb{R}^n dan suatu fungsi $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan fungsi konveks jika untuk setiap $x_1, x_2 \in S$ dan $\lambda \in [0, 1]$ berlaku

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

Untuk membuktikan eksistensi kontrol optimal digunakan Teorema 2.9 berikut.

Teorema 2.9. (Fleming & Rishel, 1975) Diberikan suatu sistem dari n variabel state, yaitu

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

dan diberikan $u(t)$ sebagai variabel kontrol pada himpunan kontrol U yang memenuhi persamaan differensial dan fungsi objektif. Kontrol optimal $J(u(t))$ dikatakan eksis apabila memenuhi kondisi berikut.

1. Himpunan kontrol U tidak kosong.
2. Himpunan kontrol U konveks dan tertutup.
3. Persamaan ruas kanan dari sistem dinamik kontinu terbatas oleh fungsi linear pada state dan kontrol optimal.
4. Integrand dari fungsi objektif konveks pada U .
5. Integrand dari fungsi objektif terbatas.

2.7 Teori Kontrol Optimal

Tujuan utama dari permasalahan kontrol optimal yaitu untuk menemukan kontrol yang akan diberikan pada sistem serta memenuhi kendala, dengan tujuan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan atau fungsi objektif (J) yang sesuai (Naidu, 2002). Berikut diformulasikan fungsi objektif pada kontrol optimal.

$$J(u(t)) = S(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2.5)$$

dengan kendala,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.6)$$

serta kondisi batas $\mathbf{x}(t_0) = x_0$ dan $\mathbf{x}(t_f) = x_f$ bebas, dimana t_0 adalah waktu awal, t_f adalah waktu akhir, bentuk Bolza pada persamaan J adalah fungsi tujuan dengan S adalah bentuk Mayer dan V adalah bentuk Lagrange (Naidu, 2002).

Salah satu metode yang sering digunakan dalam kontrol optimal adalah Prinsip Minimum Pontryagin. Prinsip ini merupakan prinsip yang digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal karena dapat menyatakan kondisi yang diperlukan agar memperoleh solusi yang optimal. Untuk menentukan kondisi tersebut, dibentuk suatu fungsi yang disebut fungsi Hamilton dengan memperkenalkan suatu variabel baru yaitu variabel *costate*. Adapun langkah-langkah penyelesaian dari masalah kontrol optimal yang diformulasikan sebelumnya adalah sebagai berikut (Naidu, 2002).

1. Membentuk fungsi Hamiltonian,

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}'(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (2.7)$$

2. Meminimumkan \mathcal{H} terhadap $\mathbf{u}(t)$ yaitu dengan cara berikut,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

sehingga diperoleh kondisi stasioner

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) \quad (2.8)$$

3. Dengan menggunakan $\mathbf{u}^*(t)$ yang telah diperoleh pada langkah 2, akan didapatkan fungsi Hamilton baru yang optimal, \mathcal{H}^* yaitu

$$\mathcal{H}^*(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) = \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) \quad (2.9)$$

4. Menyelesaikan persamaan *state* dan *costate*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^* \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \right)^* \end{cases} \quad (2.10)$$

dengan kondisi batas yang diberikan pada keadaan awal dan akhir yang disebut kondisi *transversality*, yaitu

$$\left(\mathcal{H}^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{t_f} \delta_{t_f} + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^* - \boldsymbol{\lambda}^*(t) \right)'_{t_f} \partial \mathbf{x}_f = 0 \quad (2.11)$$

5. Substitusikan hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4 ke persamaan $\mathbf{u}^*(t)$ pada langkah 2 untuk memperoleh kontrol yang optimal.

2.8 Metode Runge Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial dengan menggunakan pendekatan iterasi numerik. Metode ini digunakan untuk memperoleh derajat ketelitian yang lebih tinggi tanpa mencari turunan yang lebih tinggi dengan cari mengevaluasi fungsi (x, y) . Adapun bentuk umum dari

metode ini sebagai berikut,

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

dimana $\phi(x_i, y_i, h)$ adalah fungsi pertambahan yang menjelaskan rata-rata kemiringan pada suatu interval. Bentuk umum dari fungsi pertambahan yaitu sebagai berikut,

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n$$

dimana a konstan, dan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \\ k_3 &= f(x_i + p_2h, y_i + q_{22}k_2h) \\ &\vdots \\ k_n &= f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{(n-1)1}k_1h + q_{(n-1)2}k_2h + \dots + q_{(n-1)(n-1)}k_{n-1}h) \end{aligned}$$

dengan p dan q adalah konstanta, h adalah ukuran langkah, dan nilai k menyatakan hubungan perulangan (k_1 muncul dalam persamaan k_2 , k_2 muncul dalam persamaan k_3 , dan seterusnya). Pengulangan ini menyebabkan metode Runge-Kutta menjadi metode yang efisien untuk perhitungan komputer (Chapra & Canale, 2010).

Metode Runge-Kutta yang sering digunakan yaitu metode Runge-Kutta orde 4 karena memiliki tingkat ketelitian solusinya yang tinggi dibandingkan metode Runge-Kutta orde sebelumnya. Bentuk umum dari metode klasik Runge-Kutta orde 4 sebagai berikut (Chapra & Canale, 2010),

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (2.12)$$

dimana

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h) \\ k_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3h) \end{aligned}$$

BAB III METODOLOGI

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir ini dengan tujuan agar proses pengerjaan dapat terstruktur dengan baik sehingga dapat mencapai tujuan yang telah ditetapkan.

3.1 Tahap Penelitian

Berikut adalah langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penyelesaian permasalahan.

1. Studi Literatur

Pada tahapan ini, dipelajari mengenai model kompartemen penyebaran rumor, teori kontrol optimal dengan penyelesaiannya menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin serta dimulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde 4. Adapun referensi yang digunakan adalah jurnal ilmiah, buku tugas akhir, dan hasil penelitian lainnya yang berkaitan dengan topik penelitian.

2. Modifikasi Model Matematika

Pada tahap ini dilakukan modifikasi model matematika dari penelitian yang telah ada. Modifikasi yang dilakukan yaitu menambah efek algoritma media sosial pada laju perpindahan populasi *infected* ke populasi *marketing*.

3. Analisis Kestabilan Sistem

Pada tahap ini, dilakukan analisis kestabilan dari model SIMR penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung disekitar titik kesetimbangan. Sebelum menentukan kestabilan tersebut, ditentukan titik kesetimbangan bebas rumor dan titik eksistensi penyebaran rumor. Selanjutnya dilakukan pelinearan di sekitar titik kesetimbangan dengan menggunakan Matriks Jacobian agar sistem menjadi linear. Kestabilan dilakukan dengan menganalisis nilai eigen dari sistem berdasarkan teorema yang ada. Kemudian, dilakukan analisis dan ditentukan kestabilan di sekitar titik kesetimbangan yang telah diperoleh.

4. Formulasi Masalah Kontrol Optimal

Setelah menentukan model kompartemen, selanjutnya parameter yang digunakan dalam model tersebut digunakan untuk pengembangan model matematika penyebaran rumor dengan pemberian kontrol berupa penekanan terhadap akun terhubung dan tidak terhubung.

5. Kepositifan dan Ketunggalan Solusi Model Serta Eksistensi Kontrol Optimal

Pada tahap ini, dilakukan analisis kepositifan dan ketunggalan dari solusi model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung. Selanjutnya, dilakukan analisis eksistensi kontrol optimal dimana kontrol yang diberikan berupa penekanan akun terhubung dan tidak terhubung.

6. Menentukan Penyelesaian Kontrol Optimal

Tahap ini dilakukan perancangan masalah kontrol optimal dari model SIMR penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan membentuk fungsi objektif serta syarat batas yang perlu dipenuhi. Kemudian, dilakukan penyelesaian kontrol optimal dari model SIMR penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.

7. Simulasi Model dan Analisis Hasil Simulasi

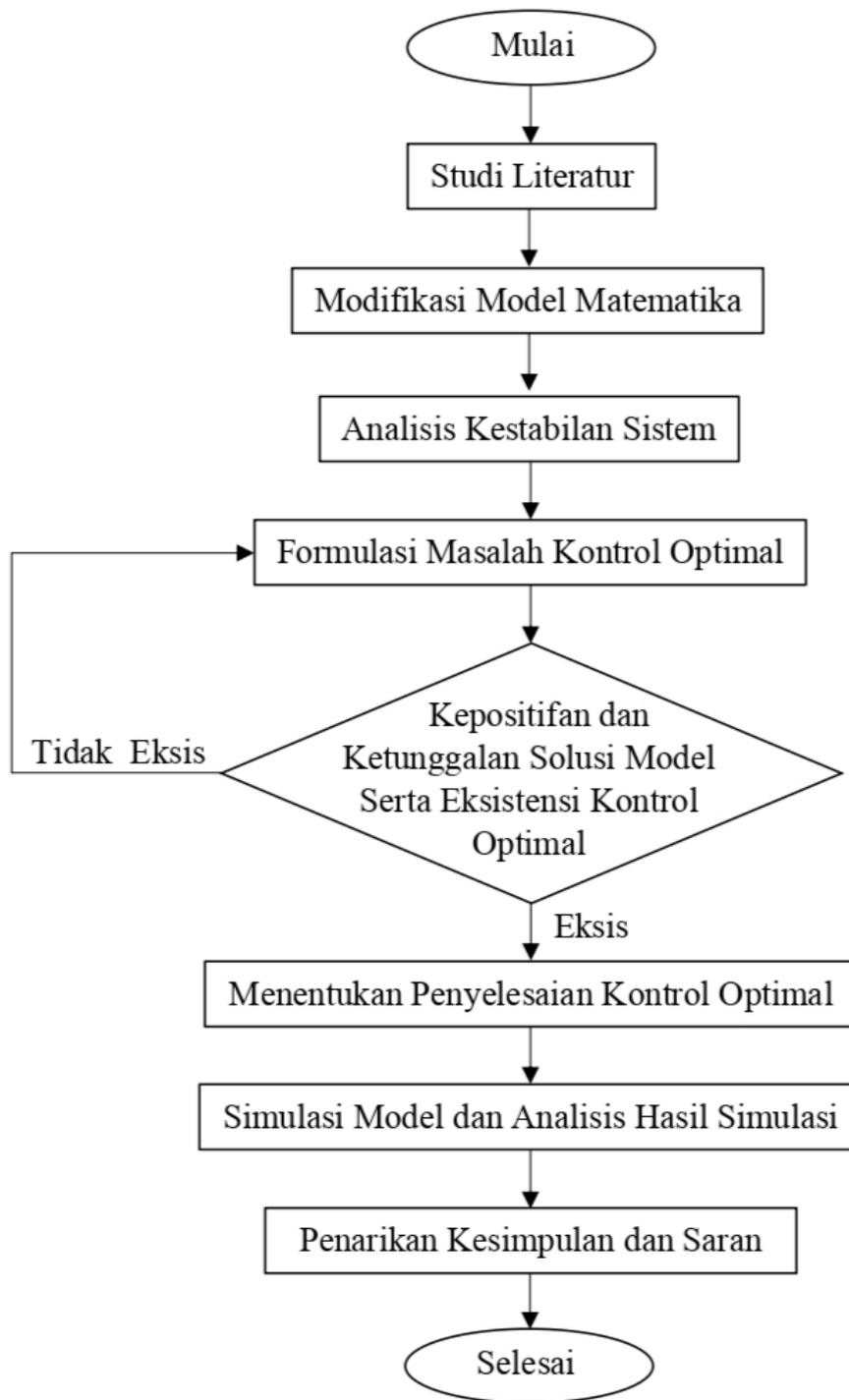
Pada tahap ini dilakukan simulasi secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan bantuan *software* MATLAB. Setelah itu, dilakukan analisis perbandingan keadaan sistem pada grafik model SIMR penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung sebelum dan sesudah diberi kontrol.

8. Penarikan Kesimpulan dan Saran

Tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan sebagai jawaban dari permasalahan yang terdapat dalam Tugas Akhir ini. Selanjutnya, diberikan saran sebagai perbaikan dan pengembangan untuk penelitian selanjutnya.

3.2 Diagram Alir

Adapun langkah-langkah penelitian dapat disajikan dalam diagram alir pada Gambar 3.1 sebagai berikut.



Gambar 3.1 Diagram Alir

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan modifikasi model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung, dilanjutkan dengan analisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan. Selanjutnya dilakukan pembentukan model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan kontrol optimal, dilanjutkan dengan analisis dan eksistensi kontrol optimal tersebut. Kemudian dilakukan penyelesaian masalah dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Kemudian dilakukan analisis dari simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta Orde 4.

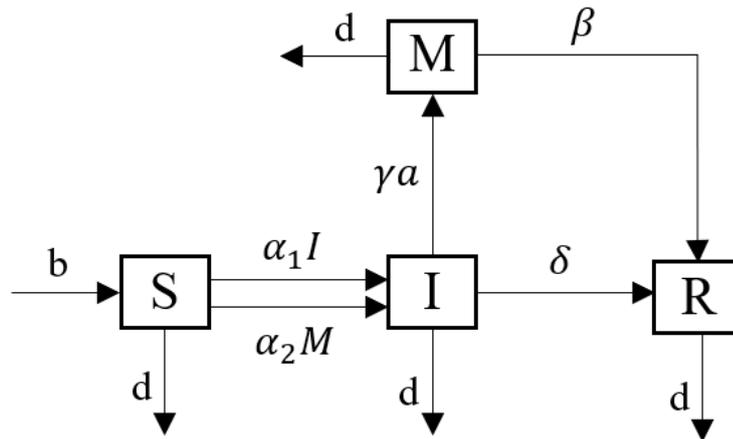
4.1 Model Matematika Penyebaran Rumor Berdasarkan Akun Terhubung dan Tidak Terhubung

Model matematika penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah pengembangan dari model matematika pada jurnal internasional yang berjudul "*Stability Analysis and Optimal Control of a Rumor Propagation Model Based on two Communication Modes: Friends and Marketing Account Pushing*" oleh Ying Yu, dkk. (Yu et al., 2022) dengan menambahkan parameter baru. Parameter tersebut adalah tingkat efek algoritma media sosial yang berpengaruh pada penyebaran rumor dari akun terhubung ke akun tidak terhubung. Model sebelumnya hanya mempertimbangkan laju perubahan individu *infected* menjadi individu *marketing*, yang mana hal tersebut hanya berdasarkan penyebar informasi aktif dan memiliki pengikut yang banyak. Adapun batasan dalam memodifikasi model matematika penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Tingkat pertumbuhan individu hanya ditujukan pada populasi *Susceptible*, dengan memasukkan proporsi individu yang menjadi pengguna media sosial ke dalam populasi rentan.
2. Tingkat kematian alami disebabkan oleh faktor individu yang telah berhenti menggunakan media sosial dan menutup akun, dan ditujukan untuk semua populasi.
3. Terdapat laju interaksi individu pengguna media sosial dengan akun yang saling mengikuti (akun terhubung) dan akun yang tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung).
4. Terdapat laju perubahan individu yang menyebarkan rumor kepada teman yang saling mengikuti (*infected*) ke individu yang menyebarkan rumor kepada orang lain yang tidak saling mengikuti (*marketing*) dan terdapat tingkat efek algoritma media sosial yang mempercepat penyebaran rumor dari akun terhubung ke akun tidak terhubung.
5. Populasi *removed* tidak hanya berasal dari individu yang menyebarkan rumor dari akun terhubung, namun juga berasal dari individu yang menyebarkan rumor ke akun tidak terhubung.

6. Populasi *removed* tidak dapat kembali ke populasi *susceptible* karena dianggap telah kehilangan minat untuk menyebarkan rumor.

Berdasarkan asumsi yang telah diberikan, dapat dibentuk diagram kompartemen penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung yaitu sebagai berikut: Gambar 2.1.



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen Model SIMR Penyebaran Rumor

Adapun definisi variabel dan parameter pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2

Tabel 4.1 Variabel

Variabel	Deskripsi
S	Individu yang tidak mengetahui adanya rumor tetapi rentan karena sebagai pengguna media sosial
I	Individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung)
M	Individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada orang yang tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung)
R	Individu yang telah kehilangan minat dan berhenti menyebarkan rumor

Tabel 4.2 Parameter

Parameter	Deskripsi
b	Tingkat pertumbuhan individu yang rentan
d	Tingkat kematian alami
α_1	Laju interaksi individu <i>susceptible</i> dengan individu <i>infected</i>
α_2	Laju interaksi individu <i>susceptible</i> dengan individu <i>marketing</i>
δ	Laju perubahan individu <i>infected</i> ke individu <i>removed</i>
γ	Laju perubahan individu <i>infected</i> ke individu <i>marketing</i>
a	Tingkat efek algoritma media sosial
β	Laju perubahan individu <i>marketing</i> ke individu <i>removed</i>

Berdasarkan Gambar 4.1 dan asumsi-asumsi yang diberikan, konstruksi model matematika penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Besarnya laju kelompok *susceptible* (S) atau kelompok rentan yang dipengaruhi oleh banyaknya pengguna media sosial sebesar b , sedangkan jumlahnya akan menurun karena individu rentan akan berinteraksi secara langsung dengan akun terhubung dan tidak terhubung sehingga mengakibatkan individu menjadi penyebar rumor melalui akun terhubung dengan laju α_1 dan tidak terhubung dengan laju α_2 . Individu akan keluar dari populasi *Susceptible* sebesar d juga mengakibatkan penurunan laju kelompok rentan. Sehingga laju perubahan populasi individu yang tidak mengetahui adanya rumor tetapi rentan karena sebagai pengguna media sosial dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 IS - \alpha_2 MS - dS.$$

2. Besarnya laju kelompok *infected* (I) akan bertambah saat individu rentan berinteraksi dengan akun terhubung yang membuat individu rentan terpengaruh untuk menjadi penyebar rumor kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung) dengan laju sebesar α_1 . Pertambahan kelompok *infected* juga dipengaruhi oleh individu rentan yang berinteraksi dengan akun tidak terhubung yang membuat individu rentan terpengaruh untuk menjadi penyebar rumor kepada orang lain yang tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung) dengan laju sebesar α_2 . Jumlah individu yang menyebarkan rumor kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung) akan menurun karena adanya laju perubahan penyebaran rumor dari akun terhubung ke akun tidak terhubung sebesar γ dan adanya tingkat efek algoritma media sosial yang menyebabkan hal yang sama sebesar a . Kelompok ini juga akan menurun apabila individu yang menyebarkan rumor melalui akun terhubung berhenti dan tidak menyebarkan kembali rumor dengan laju sebesar δ . Selain itu, individu yang telah berhenti menggunakan media sosial dan menutup akun sebesar d juga mengurangi kelompok *infected*. Sehingga laju perubahan populasi individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha_1 IS + \alpha_2 MS - \delta I - \gamma a I - dI.$$

3. Besarnya laju kelompok *marketing* (M) akan bertambah karena adanya laju perubahan penyebaran rumor dari akun terhubung ke akun tidak terhubung sebesar γ dan adanya tingkat efek algoritma media sosial yang menyebabkan hal yang sama sebesar a . Kelompok ini akan berkurang apabila terjadi individu yang menyebarkan rumor melalui akun tidak terhubung telah berhenti dan tidak minat menyebarkan rumor kembali dengan laju sebesar β . Selain itu, individu yang telah berhenti menggunakan media sosial dan menutup akun sebesar d juga mengurangi kelompok *marketing*. Sehingga laju perubahan populasi individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada orang yang tidak saling mengikuti (akun tidak

terhubung) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dM}{dt} = \gamma a I - \beta M - dM.$$

4. Besarnya laju kelompok yang telah sembuh, baik dari penyebaran melalui akun terhubung maupun tidak terhubung atau kelompok *removed* (R) akan bertambah ketika individu yang menyebarkan rumor melalui akun terhubung berhenti dan tidak menyebarkan kembali rumor dengan laju sebesar δ . Kelompok ini juga akan bertambah ketika individu yang menyebarkan rumor melalui akun tidak terhubung telah berhenti dan tidak minat menyebarkan rumor kembali dengan laju sebesar β . Selain itu, individu yang telah berhenti menggunakan media sosial dan menutup akun sebesar d juga mengurangi kelompok *removed*. Sehingga laju perubahan populasi individu yang telah kehilangan minat dan berhenti menyebarkan rumor dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + \beta M - dR.$$

Berdasarkan penjelasan tersebut, maka model matematika penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 SI - \alpha_2 MS - dS; \quad (4.1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha_1 SI + \alpha_2 MS - \delta I - \gamma a I - dI; \quad (4.2)$$

$$\frac{dM}{dt} = \gamma a I - \beta M - dM; \quad (4.3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + \beta M - dR \quad (4.4)$$

dengan kondisi awal

$$S(0) = S_0, I(0) = I_0, M(0) = M_0, R(0) = R_0.$$

4.2 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan adalah suatu keadaan dimana jumlah populasi tidak berubah terhadap waktu atau konstan. Titik kesetimbangan dari model matematika penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas rumor dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas rumor terjadi ketika tidak ada penyebaran rumor dalam suatu populasi atau dengan kata lain $I = 0$ dan $M = 0$.

Titik kesetimbangan bebas rumor diperoleh dengan $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$, $\frac{dM}{dt} = 0$, dan

$\frac{dR}{dt} = 0$. Karena $I = 0$ dan $M = 0$, maka dari Persamaan (4.1) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 SI - \alpha_2 MS - dS \\ 0 &= b(1 - S - I - M - R) - dS \\ 0 &= b - bS - bR - dS \\ 0 &= b - bR - S(b + d) \\ S &= \frac{b - bR}{b + d}.\end{aligned}$$

Kemudian, karena tidak ada penyebaran rumor baik melalui akun terhubung maupun tidak terhubung ($I = 0$, $M = 0$), menyebabkan tidak adanya individu yang berhenti menyebarkan rumor atau $R = 0$. Hal ini dibuktikan dari Persamaan (4.4) dengan mensubstitusikan $I = 0$ dan $M = 0$, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= \delta I(t) + \beta M(t) - dR(t) \\ 0 &= -dR \\ R^0 &= 0.\end{aligned}$$

Karena tidak ada individu yang berhenti menyebarkan rumor atau $R = 0$,

$$\begin{aligned}S &= \frac{b - bR}{b + d} \\ S^0 &= \frac{b}{b + d}.\end{aligned}$$

Sehingga titik kesetimbangan bebas rumor pada akun terhubung dan tidak terhubung adalah

$$E_0 = (S^0, I^0, M^0, R^0) = \left(\frac{b}{b + d}, 0, 0, 0 \right). \quad (4.5)$$

Selain itu, titik kesetimbangan endemik terjadi ketika dalam suatu populasi terdapat penyebaran rumor baik dari akun terhubung maupun tidak terhubung atau $I \neq 0$ dan $M \neq 0$ atau $I > 0$ dan $M > 0$. Sama seperti titik kesetimbangan bebas rumor, titik kesetimbangan endemik diperoleh dengan $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$, $\frac{dM}{dt} = 0$, dan $\frac{dR}{dt} = 0$. Dari Persamaan (4.3) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= \gamma a I - \beta M - dM \\ 0 &= \gamma a I - M(\beta + d) \\ M &= \frac{\gamma a I}{\beta + d}.\end{aligned} \quad (4.6)$$

Substitusi (4.6) ke Persamaan (4.4), sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dt} &= \delta I + \beta M - dR \\
0 &= \delta I + \beta \left(\frac{\gamma a I}{\beta + d} \right) - dR \\
R &= I \left(\frac{\gamma a}{d} + \frac{\beta \gamma a}{(\beta + d)d} \right). \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Substitusi (4.6) ke Persamaan (4.2), sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \alpha_1 S I + \alpha_2 M S - \delta I - \gamma a I - dI \\
0 &= \alpha_1 S I + \alpha_2 \left(\frac{\gamma a I}{\beta + d} \right) S - \delta I - \gamma a I - dI \\
0 &= \alpha_1 S + \alpha_2 \left(\frac{\gamma a}{\beta + d} \right) S - \delta - \gamma a - d \\
0 &= S \left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{\gamma a}{\beta + d} \right) - \delta - \gamma a - d \\
S^e &= \frac{(\beta + d)(\delta + \gamma a + d)}{\alpha_1(\beta + d) + \alpha_2 \gamma a}.
\end{aligned}$$

Kemudian untuk memperoleh I^e , substitusi Persamaan (??), Persamaan (4.6), dan Persamaan (4.7) ke Persamaan (4.1). Sehingga didapat

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 S I - \alpha_2 M S - dS \\
0 &= b - bS - bI - bR - bM - \alpha_1 S I - \alpha_2 M S - dS \\
0 &= b - bS - bI - b \left(I \left(\frac{\gamma a}{d} + \frac{\beta \gamma a}{(\beta + d)d} \right) \right) - b \left(\frac{\gamma a I}{\beta + d} \right) - \alpha_1 S I \\
&\quad - \alpha_2 \left(\frac{\gamma a}{d} + \frac{\beta \gamma a}{(\beta + d)d} \right) S - dS \\
0 &= b - bS - dS - I \left[b + \frac{b\gamma a}{\beta + d} + \frac{\beta \delta}{d} + \frac{b\beta \gamma a}{d(\beta + d)} + \alpha_1 S + \frac{\alpha_2 \gamma a}{\beta + d} S \right] \\
I^e &= \frac{bd(\beta + d) + bd(\beta + d)S^e - d^2(\beta + d)S^e}{bd(\beta + d) + bd\gamma a + b\delta(\beta + d) + b\beta \gamma a + d\alpha_2 \gamma a S^e + d\alpha_1(\beta + d)S^e}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$M^e = \frac{\gamma a I^1}{\beta + d}$$

dan

$$R^e = I^1 \left(\frac{\gamma a}{d} + \frac{\beta \gamma a}{(\beta + d)d} \right)$$

sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik yakni

$$E_1 = (S^e, I^e, M^e, R^e)$$

dengan

$$\begin{aligned} S^e &= \frac{(\beta + d)(\delta + \gamma a + d)}{\alpha_1(\beta + d) + \alpha_2 \gamma a}; \\ I^e &= \frac{bd(\beta + d) + bd(\beta + d)S^1 - d^2(\beta + d)S^1}{bd(\beta + d) + bd\gamma a + b\delta(\beta + d) + b\beta\gamma a + d\alpha_2\gamma aS^1 + d\alpha_1(\beta + d)S^1}; \\ M^e &= \frac{\gamma a I^1}{\beta + d}; \\ R^e &= I^1 \left(\frac{\gamma a}{d} + \frac{\beta \gamma a}{(\beta + d)d} \right). \end{aligned}$$

4.3 Analisis Kestabilan di Titik Kesetimbangan

Model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung merupakan sistem persamaan diferensial tak linear. Oleh sebab itu, untuk menganalisis kestabilan dari keempat persamaan laju perubahan populasi setiap individu tersebut perlu dilakukan linearisasi. Linearisasi terhadap suatu sistem persamaan diferensial dapat dilakukan dengan mencari pendekatan linear di sekitar titik kesetimbangan dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor dua suku pertama. Misalkan model matematika penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung pada Persamaan (4.1)-(4.4) didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 SI - \alpha_2 MS - dS = f_1(S, I, M, R); \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha_1 SI + \alpha_2 MS - \delta I - \gamma a I - dI = f_2(S, I, M, R); \\ \frac{dM}{dt} &= \gamma a I - \beta M - dM = f_3(S, I, M, R); \\ \frac{dR}{dt} &= \delta I + \beta M - dR = f_4(S, I, M, R) \end{aligned} \tag{4.8}$$

dengan titik kesetimbangan (S_0, I_0, M_0, R_0) , sehingga

$$\begin{aligned} f_1(S_0, I_0, M_0, R_0) &= 0; \\ f_2(S_0, I_0, M_0, R_0) &= 0; \\ f_3(S_0, I_0, M_0, R_0) &= 0; \\ f_4(S_0, I_0, M_0, R_0) &= 0. \end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan ekspansi deret Taylor dua suku pertama dari sistem di sekitar titik kesetimbangan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= f_1(S_0, I_0, M_0, R_0) + \frac{\partial f_1}{\partial S}(S_0, I_0, M_0, R_0)(S - S_0) + \frac{\partial f_1}{\partial I}(S_0, I_0, M_0, R_0)(I - I_0) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial M}(S_0, I_0, M_0, R_0)(M - M_0) + \frac{\partial f_1}{\partial R}(S_0, I_0, M_0, R_0)(R - R_0) \\ \frac{dI}{dt} &= f_2(S_0, I_0, M_0, R_0) + \frac{\partial f_2}{\partial S}(S_0, I_0, M_0, R_0)(S - S_0) + \frac{\partial f_2}{\partial I}(S_0, I_0, M_0, R_0)(I - I_0) \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial M}(S_0, I_0, M_0, R_0)(M - M_0) + \frac{\partial f_2}{\partial R}(S_0, I_0, M_0, R_0)(R - R_0) \\ \frac{dM}{dt} &= f_3(S_0, I_0, M_0, R_0) + \frac{\partial f_3}{\partial S}(S_0, I_0, M_0, R_0)(S - S_0) + \frac{\partial f_3}{\partial I}(S_0, I_0, M_0, R_0)(I - I_0) \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial M}(S_0, I_0, M_0, R_0)(M - M_0) + \frac{\partial f_3}{\partial R}(S_0, I_0, M_0, R_0)(R - R_0) \\ \frac{dR}{dt} &= f_4(S_0, I_0, M_0, R_0) + \frac{\partial f_4}{\partial S}(S_0, I_0, M_0, R_0)(S - S_0) + \frac{\partial f_4}{\partial I}(S_0, I_0, M_0, R_0)(I - I_0) \\ &\quad + \frac{\partial f_4}{\partial M}(S_0, I_0, M_0, R_0)(M - M_0) + \frac{\partial f_4}{\partial R}(S_0, I_0, M_0, R_0)(R - R_0) \end{aligned}$$

Karena (S_0, I_0, M_0, R_0) adalah titik kesetimbangan, maka berlaku $f_1(S_0, I_0, M_0, R_0) = f_2(S_0, I_0, M_0, R_0) = f_3(S_0, I_0, M_0, R_0) = f_4(S_0, I_0, M_0, R_0) = 0$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial S}(S_0, I_0, M_0, R_0)(S - S_0) + \frac{\partial f_1}{\partial I}(S_0, I_0, M_0, R_0)(I - I_0) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial M}(S_0, I_0, M_0, R_0)(M - M_0) + \frac{\partial f_1}{\partial R}(S_0, I_0, M_0, R_0)(R - R_0) \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\partial f_2}{\partial S}(S_0, I_0, M_0, R_0)(S - S_0) + \frac{\partial f_2}{\partial I}(S_0, I_0, M_0, R_0)(I - I_0) \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial M}(S_0, I_0, M_0, R_0)(M - M_0) + \frac{\partial f_2}{\partial R}(S_0, I_0, M_0, R_0)(R - R_0) \\ \frac{dM}{dt} &= \frac{\partial f_3}{\partial S}(S_0, I_0, M_0, R_0)(S - S_0) + \frac{\partial f_3}{\partial I}(S_0, I_0, M_0, R_0)(I - I_0) \\ &\quad + \frac{\partial f_3}{\partial M}(S_0, I_0, M_0, R_0)(M - M_0) + \frac{\partial f_3}{\partial R}(S_0, I_0, M_0, R_0)(R - R_0) \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{\partial f_4}{\partial S}(S_0, I_0, M_0, R_0)(S - S_0) + \frac{\partial f_4}{\partial I}(S_0, I_0, M_0, R_0)(I - I_0) \\ &\quad + \frac{\partial f_4}{\partial M}(S_0, I_0, M_0, R_0)(M - M_0) + \frac{\partial f_4}{\partial R}(S_0, I_0, M_0, R_0)(R - R_0) \end{aligned}$$

Kemudian, dimisalkan $(S - S_0) = v$, $(I - I_0) = w$, $(M - M_0) = x$, dan $(R - R_0) = y$, maka

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{dw}{dt}, \quad \frac{dM}{dt} = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dR}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= v \frac{\partial f_1}{\partial S}(S_0, I_0, M_0, R_0) + w \frac{\partial f_1}{\partial I}(S_0, I_0, M_0, R_0) + x \frac{\partial f_1}{\partial M}(S_0, I_0, M_0, R_0) \\ &\quad + y \frac{\partial f_1}{\partial R}(S_0, I_0, M_0, R_0) \\ \frac{dw}{dt} &= v \frac{\partial f_2}{\partial S}(S_0, I_0, M_0, R_0) + w \frac{\partial f_2}{\partial I}(S_0, I_0, M_0, R_0) + x \frac{\partial f_2}{\partial M}(S_0, I_0, M_0, R_0) \\ &\quad + y \frac{\partial f_2}{\partial R}(S_0, I_0, M_0, R_0) \\ \frac{dx}{dt} &= v \frac{\partial f_3}{\partial S}(S_0, I_0, M_0, R_0) + w \frac{\partial f_3}{\partial I}(S_0, I_0, M_0, R_0) + x \frac{\partial f_3}{\partial M}(S_0, I_0, M_0, R_0) \\ &\quad + y \frac{\partial f_3}{\partial R}(S_0, I_0, M_0, R_0) \\ \frac{dy}{dt} &= v \frac{\partial f_4}{\partial S}(S_0, I_0, M_0, R_0) + w \frac{\partial f_4}{\partial I}(S_0, I_0, M_0, R_0) + x \frac{\partial f_4}{\partial M}(S_0, I_0, M_0, R_0) \\ &\quad + y \frac{\partial f_4}{\partial R}(S_0, I_0, M_0, R_0) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Persamaan (4.9) merupakan hasil linearisasi dari Persamaan (4.8) disekitar titik kesetimbangan (S_0, I_0, M_0, R_0) . Persamaan tersebut dapat ditulis sebagai matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial M} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial M} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial M} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial M} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \end{bmatrix}_{(S_0, I_0, M_0, R_0)} \begin{bmatrix} v \\ w \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matriks Jacobian disekitar titik kesetimbangan (S_0, I_0, M_0, R_0) dari matriks diatas adalah

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial M} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial M} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial I} & \frac{\partial f_3}{\partial M} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4}{\partial S} & \frac{\partial f_4}{\partial I} & \frac{\partial f_4}{\partial M} & \frac{\partial f_4}{\partial R} \end{bmatrix}_{(S_0, I_0, M_0, R_0)}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial S} &= -b - \alpha_1 I - \alpha_2 M - d; & \frac{\partial f_2}{\partial S} &= \alpha_1 I + \alpha_2 M; \\
\frac{\partial f_1}{\partial I} &= b - \alpha_1 S; & \frac{\partial f_2}{\partial I} &= \alpha_1 S - \delta - \gamma a - d; \\
\frac{\partial f_1}{\partial M} &= -b - \alpha_2 M; & \frac{\partial f_2}{\partial M} &= \alpha_2 S; \\
\frac{\partial f_1}{\partial R} &= -b; & \frac{\partial f_2}{\partial R} &= 0; \\
\frac{\partial f_3}{\partial S} &= 0; & \frac{\partial f_4}{\partial S} &= 0; \\
\frac{\partial f_3}{\partial I} &= \gamma a; & \frac{\partial f_4}{\partial I} &= \delta; \\
\frac{\partial f_3}{\partial M} &= -\beta - d; & \frac{\partial f_4}{\partial M} &= \beta; \\
\frac{\partial f_3}{\partial R} &= 0; & \frac{\partial f_4}{\partial R} &= -d.
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -b - \alpha_1 I_0 - \alpha_2 M_0 - d & -b - \alpha_1 S_0 & -b - \alpha_2 S_0 & -b \\ \alpha_1 I_0 + \alpha_2 M_0 & \alpha_1 S_0 - \delta - \gamma a - d & \alpha_2 S_0 & 0 \\ 0 & \gamma a & -\beta - d & 0 \\ 0 & \delta & \beta & -d \end{bmatrix}.$$

Setelah didapatkan matriks Jacobian, diperoleh sistem persamaan linear dari hasil linearisasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= (-b - \alpha_1 I_0 - \alpha_2 M_0 - d)v + (-b - \alpha_1 S_0)w + (-b - \alpha_2 S_0)x - by; \\
\frac{dw}{dt} &= (\alpha_1 I_0 + \alpha_2 M_0)v + (\alpha_1 S_0 - \delta - \gamma a - d)w + (\alpha_2 S_0)x; \\
\frac{dw}{dt} &= \gamma aw + (-\beta - d)x; \\
\frac{dy}{dt} &= \delta w + \beta x - dy.
\end{aligned}$$

Kemudian setelah diketahui matriks Jacobiannya, dilakukan analisis kestabilan dari dua kasus yaitu kestabilan di sekitar titik kesetimbangan bebas rumor (E_0) dan titik kesetimbangan endemik (E_1).

4.3.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Rumor (E_0)

Untuk menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan bebas rumor (E_0), substitusikan titik kesetimbangan bebas rumor pada matriks Jacobian. Adapun titik kesetimbangan (E_0) yaitu $(\frac{b}{b+d}, 0, 0, 0)$, sehingga diperoleh matriks Jacobiannya

adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{J}_{E_0} = \begin{bmatrix} -b-d & -b - \frac{\alpha_1 b}{b+d} & -b - \frac{\alpha_2 b}{b+d} & -b \\ 0 & \frac{\alpha_1 b}{b+d} - \delta - \gamma a - d & \frac{\alpha_2 b}{b+d} & 0 \\ 0 & \gamma a & -\beta - d & 0 \\ 0 & \delta & \beta & -d \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik dari J_{E_0} adalah

$$\begin{aligned} \det(J_{E_0} - \lambda I) &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} -b-d & -b - \frac{\alpha_1 b}{b+d} & -b - \frac{\alpha_2 b}{b+d} & -b \\ 0 & \frac{\alpha_1 b}{b+d} - \delta - \gamma a - d & \frac{\alpha_2 b}{b+d} & 0 \\ 0 & \gamma a & -\beta - d & 0 \\ 0 & \delta & \beta & -d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} -b-d-\lambda & -b - \frac{\alpha_1 b}{b+d} & -b - \frac{\alpha_2 b}{b+d} & -b \\ 0 & \frac{\alpha_1 b}{b+d} - \delta - \gamma a - d - \lambda & \frac{\alpha_2 b}{b+d} & 0 \\ 0 & \gamma a & -\beta - d - \lambda & 0 \\ 0 & \delta & \beta & -d - \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0. \end{aligned}$$

Untuk mempermudah perhitungan digunakan ekspansi kofaktor terhadap kolom pertama, didapatkan

$$\begin{aligned} (-b-d-\lambda) &\left| \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 b}{b+d} - \delta - \gamma a - d - \lambda & \frac{\alpha_2 b}{b+d} & 0 \\ \gamma a & -\beta - d - \lambda & 0 \\ \delta & \beta & -d - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \\ (-b-d-\lambda) &\left[\left(\frac{\alpha_1 b}{b+d} - \delta - \gamma a - d - \lambda \right) (-\beta - d - \lambda)(-d - \lambda) \right. \\ &\quad \left. - \left((-d - \lambda)\gamma a \frac{\alpha_2 b}{b+d} \right) \right] = 0 \\ (-b-d-\lambda)(-d-\lambda) &\left[\left(\frac{\alpha_1 b}{b+d} - \delta - \gamma a - d - \lambda \right) (-\beta - d - \lambda) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma a \alpha_2 b}{b+d} \right] = 0 \\ (-b-d-\lambda)(-d-\lambda) &\left[-\frac{\beta \alpha_1 b}{b+d} - \frac{\alpha_1 b d}{b+d} - \frac{\alpha_1 b \lambda}{b+d} - \frac{\gamma a \alpha_2 b}{b+d} + \delta \beta \right. \\ &\quad \left. + \delta d + \delta \lambda + \gamma a \beta + \gamma a d + \gamma a \lambda + d \beta + d^2 + d \lambda + \beta \lambda + d \lambda + \lambda^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-b-d-\lambda)(-d-\lambda) \left[\lambda^2 + \lambda \left(-\frac{\alpha_1 b}{b+d} + \delta + \gamma a + 2d + \beta \right) - \frac{\beta \alpha_1 b}{b+d} \right. \\
\left. - \frac{\alpha_1 b d}{b+d} - \frac{\gamma a \alpha_2 b}{b+d} + \delta \beta + \delta d + \gamma a \beta + \gamma a d + d \beta + d^2 \right] = 0 \\
(-b-d-\lambda)(-d-\lambda) (A_0 \lambda^2 + A_1 \lambda + A_2) = 0 \quad (4.10)
\end{aligned}$$

dimana,

$$A_0 = 1;$$

$$A_1 = \frac{\alpha_1 b}{b+d} + \delta + \gamma a + 2d + \beta;$$

$$A_2 = -\frac{\beta \alpha_1 b}{b+d} - \frac{\alpha_1 b d}{b+d} - \frac{\gamma a \alpha_2 b}{b+d} + \delta \beta + \delta d + \gamma a \beta + \gamma a d + d \beta + d^2.$$

Berdasarkan persamaan karakteristik (4.10), diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -b - d; \\
\lambda_2 &= -d; \\
\lambda_{3,4} &= \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_0 A_2}}{2A_0}.
\end{aligned}$$

Karena nilai semua parameter bernilai positif, maka λ_1 dan λ_2 bernilai negatif. Model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung di sekitar titik kesetimbangan bebas rumor bersifat stabil asimtotik jika $Re(\lambda_3)$ dan $Re(\lambda_4)$ juga bernilai negatif dengan mengambil nilai $A_1 > 0$, karena nilai semua parameter bernilai positif maka $A_1 > 0$ terpenuhi.

4.3.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik (E_1)

Untuk menemukan kestabilan dari titik kesetimbangan (E_1), substitusikan titik kesetimbangan E_1 yaitu (S^e, I^e, M^e, R^e) , dengan

$$\begin{aligned}
S^e &= \frac{(\beta + d)(\delta + \gamma a + d)}{\alpha_1(\beta + d) + \alpha_2 \gamma a}; \\
I^e &= \frac{bd(\beta + d) + bd(\beta + d)S^e - d^2(\beta + d)S^e}{bd(\beta + d) + bd\gamma a + b\delta(\beta + d) + b\beta\gamma a + d\alpha_2\gamma a S^e + d\alpha_1(\beta + d)S^e}; \\
M^e &= \frac{\gamma a I^e}{\beta + d}; \\
R^e &= I^e \left(\frac{\gamma a}{d} + \frac{\beta \gamma a}{(\beta + d)d} \right).
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\mathbf{J}_{E_1} = \begin{bmatrix} a_1 - d & a_3 & a_7 & a_{11} \\ a_2 & a_4 & a_8 & 0 \\ 0 & a_5 & a_9 & 0 \\ 0 & a_6 & a_{10} & -d \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= -b - \lambda_1 I^e - \lambda_2 M^e; & a_7 &= -b - \lambda_2 S^e; \\ a_2 &= \lambda_1 I^e + \lambda_2 M^e; & a_8 &= \lambda_2 S^e; \\ a_3 &= -b - \lambda_1 S^e; & a_9 &= -\beta - d; \\ a_4 &= \lambda_1 S^e - \delta - \gamma a - d; & a_{10} &= \beta; \\ a_5 &= \gamma a; & a_{11} &= -b; \\ a_6 &= \delta. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari J_{E_1} adalah

$$\begin{aligned} \det(J_{E_1} - \lambda I) &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} a_1 - d & a_3 & a_7 & a_{11} \\ a_2 & a_4 & a_8 & 0 \\ 0 & a_5 & a_9 & 0 \\ 0 & a_6 & a_{10} & -d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} a_1 - d - \lambda & a_3 & a_7 & a_{11} \\ a_2 & a_4 - \lambda & a_8 & 0 \\ 0 & a_5 & a_9 - \lambda & 0 \\ 0 & a_6 & a_{10} & -d - \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^4 + [-a_1 - a_4 - a_9 + d] \lambda^3 + [a_4 a_9 d - a_1 a_4 a_9 + a_4 a_9 d + a_1 a_4 d - a_4 d^2 + a_1 a_9 d - a_9 d^2 - \\ a_5 a_8 d + a_1 a_5 a_8 - a_5 a_8 d + a_2 a_3 a_9 - 2a_2 a_3 d - a_2 a_6 a_{11} - a_2 a_5 a_7] \lambda^2 + \\ [a + 4a_9 d - a_1 a_4 a_9 + a_4 a_9 d + a_1 a_4 d - a_4 d^2 + a_1 a_9 d - a_9 d^2] \lambda + \\ [-a_1 a_4 a_9 d + a_4 a_9 d^2 + a_1 a_5 a_8 d - a_5 a_8 d^2 + a_2 a_3 a_9 d - a_2 a_5 a_{10} a_{11} + a_2 a_6 a_9 a_{11} - a_2 a_5 a_7 d] = 0 \end{aligned}$$

$$A_0 \lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda + A_4 = 0 \quad (4.11)$$

dengan

$$\begin{aligned} A_0 &= 1; \\ A_1 &= -a_1 - a_4 - a_9 + d; \\ A_2 &= a_4 a_9 - a_4 d + a_1 a_4 - a_4 d - a_9 d + a_1 a_9 - a_9 d - a_1 d + d^2 - a_5 a_8 - a_2 a_3; \\ A_3 &= a_4 a_9 d - a_1 a_4 a_9 + a_4 a_9 d + a_1 a_4 d - a_4 d^2 + a_1 a_9 d - a_9 d^2 - a_5 a_8 d + a_1 a_5 a_8 - a_5 a_8 d \\ &\quad + a_2 a_3 a_9 - 2a_2 a_3 d - a_2 a_6 a_{11} - a_2 a_5 a_7; \\ A_4 &= -a_1 a_4 a_9 d + a_4 a_9 d^2 + a_1 a_5 a_8 d - a_5 a_8 d^2 + a_2 a_3 a_9 d - a_2 a_5 a_{10} a_{11} + a_2 a_6 a_9 a_{11} - a_2 a_5 a_7 d. \end{aligned}$$

Untuk mengetahui sifat kestabilan di sekitar titik kesetimbangan endemik digunakan

kriteria Routh-Hurwitz. Sehingga diperoleh

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^4 & A_0 & A_2 & A_4 \\ \lambda^3 & A_1 & A_3 & \\ \lambda^2 & b_1 & b_2 & \\ \lambda^1 & c_1 & & \\ \lambda^0 & d_1 & & \end{array}$$

dengan

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{A_1 A_2 - A_0 A_3}{A_1} = \frac{A_1 A_2 - A_3}{A_3}; \\ b_2 &= \frac{A_1 A_4}{A_4} = A_4; \\ c_1 &= \frac{b_1 A_3 - b_2 A_1}{b_1} = \frac{\left(\frac{A_1 A_2 - A_0 A_3}{A_1}\right) A_3 - A_1 \left(\frac{A_1 A_4}{A_4}\right)}{\left(\frac{A_1 A_2 - A_0 A_3}{A_1}\right)} \\ &= \frac{(A_1 A_2 - A_0 A_3) A_3 - A_1 (A_1 A_4)}{(A_1 A_2 - A_0 A_3)} = \frac{(A_1 A_2 - A_3) A_3 - A_1^2 A_4}{(A_1 A_2 - A_3)}; \\ d_1 &= \frac{c_1 b_2}{c_1} = b_2 = A_4. \end{aligned}$$

Persamaan (4.11) memiliki akar-akar karakteristik yang negatif jika dan hanya jika A_1, b_1, c_1, d_1 bernilai positif. Artinya, $A_1, A_2, A_3, A_4 > 0, A_1 A_2 > A_3$ dan $(A_1 A_2 - A_3) A_3 > A_1^2 A_4$.

Oleh karena itu, model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung di sekitar titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik dengan memenuhi tiga syarat yaitu $A_1, A_2, A_3, A_4 > 0, A_1 A_2 > A_3$ dan $(A_1 A_2 - A_3) A_3 > A_1^2 A_4$. Namun, jika $A_1 < 0$ maka model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung bersifat tidak stabil.

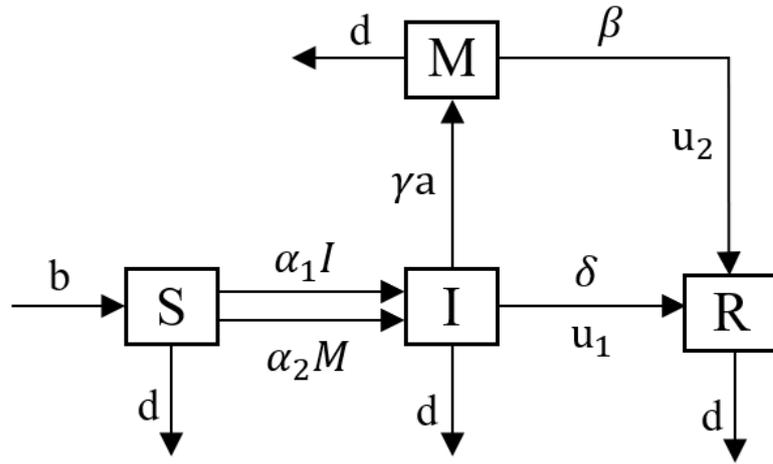
4.4 Model Matematika Penyebaran Rumor Berdasarkan Akun Terhubung dan Tidak Terhubung dengan Kontrol

Model matematika penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung terbentuk dari adanya interaksi antara populasi individu yang tidak mengetahui adanya rumor tetapi rentan karena sebagai pengguna media sosial, individu yang mengetahui rumor dan menyebarkan melalui akun terhubung, individu yang mengetahui rumor dan menyebarkan rumor melalui akun tidak terhubung, dan individu yang telah kehilangan minat dan berhenti menyebarkan rumor. Model matematika dikonstruksi dengan menambahkan kontrol berupa penekanan akun pada individu yang menyebarkan rumor baik melalui akun terhubung maupun tidak terhubung. Berikut adalah asumsi yang digunakan dalam upaya kontrol pada model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung.

1. Kontrol u_1 merupakan representasi usaha pencegahan penyebaran rumor berupa penekanan akun terhubung kepada individu yang menyebarkan rumor pada teman yang saling mengikuti.

2. Kontrol u_2 merupakan representasi usaha pencegahan penyebaran rumor berupa penekanan akun tidak terhubung kepada individu yang menyebarkan rumor pada orang yang tidak saling mengikuti.
3. Penekanan akun terhubung dan tidak terhubung dilakukan dengan penindakan langsung oleh pihak media sosial yaitu ketika terdeteksi pelaporan konten rumor oleh pengunanan media sosial lainnya, maka dilakukan penghapusan konten tersebut pada akun yang menyebarkannya. Apabila akun tersebut menyebarkan secara terus-menerus, maka dilakukan penutupan akun oleh pihak media sosial.
4. Pemberian kontrol berupa penekanan akun terhubung dan tidak terhubung dilakukan secara periodik tanpa mempertimbangkan individu yang terkena.

Berikut ini merupakan diagram kompartemen model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan adanya kontrol berupa penekanan akun terhubung dan tidak terhubung yang ditunjukkan pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2 Diagram Kompartemen Model SIMR Penyebaran Rumor dengan Kontrol

Berdasarkan Gambar 4.2, model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan kontrol dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 SI - \alpha_2 MS - dS; \quad (4.12)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha_1 SI + \alpha_2 MS - \delta I - \gamma a I - dI - u_1 I; \quad (4.13)$$

$$\frac{dM}{dt} = \gamma a I - \beta M - dM - u_2 M; \quad (4.14)$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + \beta M - dR + u_1 I + u_2 M. \quad (4.15)$$

Kontrol $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ merupakan kontrol yang terbatas, kontrol $u_1(t)$ menunjukkan tingkat efisiensi dari penekanan akun terhubung yang diberikan pada populasi individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung) dan kontrol $u_2(t)$ menunjukkan tingkat efisiensi dari penekanan akun tidak terhubung yang diberikan pada populasi individu yang mengetahui adanya

rumor dan menyebarkan rumor kepada orang yang tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung) sehingga dapat mengurangi penyebaran rumor di media sosial. Jika $u_1(t) = 1$ dan $u_2(t) = 1$ maka penekanan akun yang dilakukan pada populasi yang mengetahui rumor dan menyebarkan baik kepada teman (akun terhubung) maupun yang bukan teman (akun tidak terhubung) efektif (100% efektif). Sebaliknya, jika $u_1(t) = 0$ dan $u_2(t) = 0$ maka penekanan akun yang dilakukan tidak efektif. Sehingga akan dicari bentuk dari $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ yang optimal, dimana $0 \leq u_1(t) \leq 1$ dan $0 \leq u_2(t) \leq 1$.

Tujuan diberikannya kontrol pada populasi yang mengetahui rumor dan menyebarkan rumor baik kepada teman (akun terhubung) maupun bukan teman (akun tidak terhubung) adalah meminimumkan kerugian akibat penyebaran rumor individu *infected* dan *marketing* serta biaya operasional penekanan terhadap akun terhubung dan akun tidak terhubung. Terkadang kontrol yang diberikan tidak sesuai dengan tujuan dari kontrol tersebut, akibatnya ditunjukkan kontrol yang optimal pada model tersebut ada atau tidak. Adapun fungsi objektif dari model penyebaran rumor di media sosial berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung adalah sebagai berikut:

$$J(u_1, u_2) = \min \int_{t_0}^{t_f} \left[a_1 I(t) + a_2 M(t) + \frac{1}{2} (b_1 u_1^2(t) + b_2 u_2^2(t)) \right] dt \quad (4.16)$$

dimana

a_1 : bobot kerugian dari individu *infected*,

a_2 : bobot kerugian dari individu *marketing*,

b_1 : bobot pada kontrol penekanan akun terhubung, dan

b_2 : bobot pada kontrol penekanan akun tidak terhubung.

Selanjutnya tipe permasalahan kontrol pada Tugas Akhir ini adalah *fixed final time* (t_f) dengan kondisi $0 \leq t \leq t_f$ dan *free-final state* ($x(t_f)$) pada waktu awal ($x(t_0)$) sudah ditetapkan dan state pada waktu akhir ($x(t_f)$) tidak ditetapkan.

4.5 Kepositifan dan Ketunggalan

Model matematika penyebaran rumor di media sosial berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dikatakan valid jika memiliki solusi positif untuk setiap waktu t , maka perlu dibuktikan bahwa semua solusi sistem akan tetap positif sepanjang waktu $t \geq 0$.

Teorema 4.1. (Yu et al., 2022) Misal diberikan nilai awal $S(0) > 0, I(0) > 0, M(0) > 0, R(0) > 0$, maka solusi $S(t), I(t), M(t), R(t)$ adalah positif untuk semua $t \geq 0$ dan $N = S + I + M + R$ adalah terbatas

Bukti.

1. Pertama, dibuktikan jumlah populasi N adalah terbatas. Berdasarkan Persamaan (4.1) - (4.4) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dM}{dt} + \frac{dR}{dt} &= (1 - S - I - M - R) - d(S - I - M - R) \\ (\Rightarrow) \quad \frac{dN}{dt} &= b(1 - N) - dN \\ (\Rightarrow) \quad \frac{dN}{dt} &= b - (b + d)N \end{aligned}$$

misalkan $b + d = k$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= b - kN \\ (\Rightarrow) \quad \frac{dN}{dt} + kN &= b \end{aligned}$$

kalikan kedua ruas dengan faktor integrasi berupa e^{kt} , sehingga diperoleh

$$e^{kt} \frac{dN}{dt} + e^{kt} kN = e^{kt} b$$

misalkan $u = N(t)$ dan $v = e^{kt}$, sehingga $u' = \frac{dN}{dt}$ dan $v' = e^{kt} k$. Maka pertidaksamaan tersebut dapat ditulis ulang sebagai berikut.

$$u'v + uv' = vb$$

dengan menggunakan aturan produk dalam kalkulus, didapatkan bahwa $u'v + uv' = \frac{d}{dt}(uv)$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(uv) &= vb \\ (\Rightarrow) \quad \frac{d}{dt}(e^{kt} N(t)) &= e^{kt} b. \end{aligned}$$

Untuk mencari pada interval tertentu, kedua ruas pertidaksamaan diintegrasikan dari 0 hingga t sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{dt}(e^{kt} N(t)) dt &= \int_0^t e^{kt} b dt \\ (\Rightarrow) \quad (e^{kt} N(t))|_0^t &= \frac{e^{kt}}{k} \Big|_0^t \\ (\Rightarrow) \quad e^{kt} N(t) - N(0) &= \frac{b}{k} (e^{kt} - 1) \\ (\Rightarrow) \quad e^{kt} N(t) - N(0) &= \frac{b}{k} e^{kt} - \frac{b}{k} \\ (\Rightarrow) \quad e^{kt} N(t) &= N(0) + \frac{b}{k} e^{kt} - \frac{b}{k} \\ (\Rightarrow) \quad N(t) &= \left(N(0) - \frac{b}{k} \right) e^{-kt} + \frac{b}{k} \end{aligned}$$

substitusi $k = b + d$, sehingga diperoleh

$$N(t) = \left(N(0) - \frac{b}{b+d} \right) e^{-(b+d)t} + \frac{b}{b+d}.$$

Karena $N(0) \leq \frac{b}{b+d}$, diperoleh bahwa $N(t) \leq \left(N(0) - \frac{b}{b+d} \right) e^{-(b+d)t} + \frac{b}{b+d} \leq \frac{b}{b+d}$. Dengan demikian, total populasi terbatas untuk setiap kondisi awal $S(0), I(0), M(0)$, dan $R(0)$.

2. Diketahui bahwa $N(t) \leq \frac{b}{b+d}$ untuk semua $t \geq 0$. Dari Persamaan (4.1), diasumsikan bahwa terdapat $t \in [t_0, t_f]$ sedemikian hingga $S(t) \leq 0$. Misalkan $S^* = \{t \in [t_0, t_f] | S(t) \leq 0\}$. Kemudian, untuk $t^* = \inf S^*$ berlaku $S(t^*) = 0$ sehingga $S(t) > 0$ untuk $\forall t \in [t_0, t^*)$. Diketahui bahwa I dan M adalah fungsi kontinu pada interval $[t_0, t^*)$, sehingga terdapat $P \in \mathbb{R}$ dan $Q \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $|I(t)| < P$ dan $|M(t)| < Q$ untuk setiap $\forall t \in [t_0, t^*)$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} & \frac{dS}{dt} = b(1 - N) - \alpha_1 IS - \alpha_2 MS - dS \\ (\Rightarrow) & \frac{dS}{dt} > \frac{bd}{b+d} - \alpha_1 PS - \alpha_2 QS - dS \\ (\Rightarrow) & \frac{dS}{dt} + (\alpha_1 P + \alpha_2 Q + d)S > \frac{bd}{b+d} \end{aligned}$$

misalkan $\alpha_1 P + \alpha_2 Q + d = A$, sehingga diperoleh

$$\frac{dS}{dt} + AS > \frac{bd}{b+d}$$

kalikan kedua ruas dengan faktor integrasi berupa e^{At} , dengan syarat $e^{At} > 1$

$$e^{At} \frac{dS}{dt} + e^{At} AS > e^{At} \frac{bd}{b+d}$$

misalkan $u = S(t)$ dan $v = e^{At}$, sehingga $u' = \frac{dS}{dt}$ dan $v' = e^{At} A$. Maka pertidaksamaan tersebut dapat ditulis ulang sebagai berikut.

$$u'v + uv' > v \frac{bd}{b+d}$$

dengan menggunakan aturan produk dalam kalkulus, didapatkan bahwa $u'v + uv' = \frac{d}{dt}(uv)$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(uv) > v \frac{bd}{b+d} \\ (\Rightarrow) & \frac{d}{dt}(e^{At} S(t)) > e^{At} \frac{bd}{b+d}. \end{aligned}$$

Untuk mencari solusi pada interval tertentu, kedua ruas pertidaksamaan

diintegrasikan dari t_0 hingga t^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t^*} \frac{d}{dt}(e^{At} S(t)) dt > \int_{t_0}^{t^*} e^{At} \frac{bd}{b+d} dt \\
(\Rightarrow) \quad & \int_{t_0}^{t^*} \frac{d}{dt}(e^{At} S(t)) dt > \frac{bd}{b+d} \int_{t_0}^{t^*} e^{At} dt \\
(\Rightarrow) \quad & (e^{At} S(t))|_{t_0}^{t^*} > \frac{bd}{A(b+d)} e^{At}|_{t_0}^{t^*} \\
(\Rightarrow) \quad & e^{At^*} S(t^*) - e^{At_0} S(0) > \frac{bd}{A(b+d)} (e^{At^*} - e^{At_0}) \\
(\Rightarrow) \quad & e^{At^*} S(t^*) - e^{At_0} S(0) > \frac{bd}{A(b+d)} (e^{At^*} - e^{At_0}) \\
(\Rightarrow) \quad & e^{At^*} S(t^*) > e^{At_0} S(0) + \frac{bd}{A(b+d)} e^{At^*} - \frac{bd}{A(b+d)} e^{At_0} \\
(\Rightarrow) \quad & S(t^*) > e^{-At^*} \left(e^{At_0} S(0) - \frac{bd}{A(b+d)} e^{At_0} \right) + \frac{bd}{A(b+d)} > 0.
\end{aligned}$$

Namun, hal ini kontradiksi dengan pernyataan $S(t^*) \leq 0$, sehingga terbukti bahwa $S(t) > 0, \forall t \in [t_0, t_f]$.

3. Diasumsikan terdapat $t \in [t_0, t_f]$ sedemikian hingga $I(t) \leq 0$. Misalkan $I^* = \{t \in [t_0, t_f] | I(t) \leq 0\}$. Kemudian, untuk $t^* = \inf I^*$ berlaku $I(t^*) = 0$ sehingga $I(t) > 0$ untuk $\forall t \in [t_0, t^*)$. Perhatikan bahwa S dan I positif untuk $t \in [t_0, t^*)$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& \frac{dM}{dt} = \gamma a I - \beta M - dM - u_2 M \\
(\Rightarrow) \quad & \frac{dM}{dt} > -\beta M - dM - u_2 M \\
(\Rightarrow) \quad & \frac{dM}{dt} + (\beta + d + u_2) M > 0.
\end{aligned}$$

Asumsikan terdapat $t \in [t_0, t^*]$ dan memenuhi $M(t) \leq 0$, misalkan $M^* = \{t \in [t_0, t_f] | M(t) \leq 0\}$. Kemudian, untuk $t_M^* = \inf M^*$ berlaku $M(t^*) = 0$ sehingga $M(t) > 0$ untuk $\forall t \in [t_0, t^*)$. Selanjutnya, dimisalkan $\beta + d + u_2 = B$, sehingga diperoleh

$$\frac{dM}{dt} + BM > 0$$

kalikan kedua ruas dengan faktor integrasi berupa e^{Bt} , dengan syarat $e^{Bt} > 1$

$$\frac{dM}{dt} e^{Bt} + e^{Bt} BM > 0$$

misalkan $u = M(t)$ dan $v = e^{Bt}$, sehingga $u' = \frac{dM}{dt}$ dan $v' = e^{Bt} B$. Maka

pertidaksamaan tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

$$u'v + uv' > 0$$

dengan menggunakan aturan produk dalam kalkulus, didapatkan bahwa $u'v + uv' = \frac{d}{dt}(uv)$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(uv) > 0 \\ (\Rightarrow) & \frac{d}{dt}(e^{Bt}M) > 0. \end{aligned}$$

Untuk mencari solusi pada interval tertentu, kedua ruas pertidaksamaan diintegrasikan dari t_0 hingga t sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \frac{d}{dt}(e^{Bt}M(t))dt > 0 \\ (\Rightarrow) & M(t)e^{Bt} \Big|_{t_0}^t > 0 \\ (\Rightarrow) & M(t)e^{Bt} - M(t_0)e^{Bt_0} > 0 \\ (\Rightarrow) & M(t)e^{Bt} > M(t_0)e^{Bt_0} \\ (\Rightarrow) & M(t) > 0, \text{ untuk } t \in [t_0, t^*) \end{aligned}$$

diperoleh $M(t) > 0$. Akibatnya hal ini bertentangan dengan asumsi yang diberikan yakni $M(t^*) = 0$. Sehingga $M(t) > 0$ untuk setiap $t \in [t_0, t_f]$.

Kemudian diketahui bahwa S fungsi kontinu pada interval $[0, t_f]$, sehingga terdapat $K \in \mathbb{R}$ dan memenuhi $S(t) < K$ untuk setiap $t \in [0, t_f]$. Dari Persamaan (4.2) dapat diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{dI}{dt} = \alpha_1 IS + \alpha_2 MS - \delta I - \gamma a I - dI - u_1 I \\ (\Rightarrow) & \frac{dI}{dt} > \alpha_1 PI - \delta I - \gamma a I - dI - u_1 I, \forall t \in [0, t_f] \\ (\Rightarrow) & \frac{dI}{dt} + (\alpha_1 P + \delta + \gamma a + dI + u_1)I > 0 \end{aligned}$$

misalkan $\alpha_1 P + \delta + \gamma a + dI + u_1 = C$, sehingga diperoleh

$$\frac{dI}{dt} + CI > 0$$

kalikan kedua ruas dengan faktor integrasi berupa e^{Ct} , dengan syarat $e^{Ct} > 1$

$$\frac{dI}{dt}e^{Ct} + e^{Ct}CI > 0$$

misalkan $u = I(t)$ dan $v = e^{Ct}$, sehingga $u' = \frac{dI}{dt}$ dan $v' = e^{Ct}C$. Maka

pertidaksamaan tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

$$u'v + uv' > 0$$

dengan menggunakan aturan produk dalam kalkulus, didapatkan bahwa $u'v + uv' = \frac{d}{dt}(uv)$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(uv) > 0 \\ (\Rightarrow) & \frac{d}{dt}(e^{Ct}I(t)) > 0. \end{aligned}$$

Untuk mencari solusi pada interval tertentu, kedua ruas pertidaksamaan diintegrasikan dari t_0 hingga t^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t^*} \frac{d}{dt}(e^{Ct}I(t))dt > 0 \\ (\Rightarrow) & I(t)e^{Ct} \Big|_{t_0}^{t^*} > 0 \\ (\Rightarrow) & I(t^*)e^{Ct^*} - I(t_0)e^{Ct_0} > 0 \\ (\Rightarrow) & I(t^*)e^{Ct^*} > I(t_0)e^{Ct_0} \\ (\Rightarrow) & I(t^*) > 0, \text{ untuk } t \in [t_0, t^*) \end{aligned}$$

diperoleh $I(t^*) > 0$, hal ini bertentangan dengan asumsi yang diberikan yakni $I(t^*) = 0$. Sehingga $I(t) > 0$ untuk setiap $t \in [t_0, t_f]$.

4. Dari Persamaan (4.4), diasumsikan terdapat $t \in [t_0, t_f]$ dan memenuhi $R(t) \leq 0$. Misalkan $R^* = \{t \in [t_0, t_f] | R(t) \leq 0\}$. Kemudian, untuk $t^* = \inf R^*$ berlaku $R(t^*) = 0$ sehingga $R(t) > 0$ untuk $\forall t \in [t_0, t^*)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} & \frac{dR}{dt} = \delta I + \beta M - dR + u_1 I + u_2 M \\ (\Rightarrow) & \frac{dR}{dt} > -dR, \forall t \in [0, t^*) \\ (\Rightarrow) & \frac{dR}{dt} + dR > 0 \end{aligned}$$

kalikan kedua ruas dengan faktor integrasi berupa e^{dt} , dengan syarat $e^{dt} > 1$

$$\frac{dR}{dt} e^{dt} + e^{dt} dR > 0$$

misalkan $u = I(t)$ dan $v = e^{Ct}$, sehingga $u' = \frac{dI}{dt}$ dan $v' = e^{Ct}C$. Maka pertidaksamaan tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

$$u'v + uv' > 0$$

dengan menggunakan aturan produk dalam kalkulus, didapatkan bahwa $u'v + uv' =$

$\frac{d}{dt}(uv)$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(uv) > 0 \\ (\Rightarrow) \quad & \frac{d}{dt}(e^{dt}R(t)) > 0. \end{aligned}$$

Untuk mencari solusi pada interval tertentu, kedua ruas pertidaksamaan diintegrasikan dari t_0 hingga t^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t^*} \frac{d}{dt}(e^{dt}R(t))dt > 0 \\ (\Rightarrow) \quad & R(t)e^{dt} \Big|_{t_0}^{t^*} > 0 \\ (\Rightarrow) \quad & R(t^*)e^{dt^*} - R(t_0)e^{dt_0} > 0 \\ (\Rightarrow) \quad & R(t^*)e^{dt^*} > R(t_0)e^{dt_0} \\ (\Rightarrow) \quad & R(t^*) > 0, \text{ untuk } t \in [t_0, t^*) \end{aligned}$$

diperoleh $R(t^*) > 0$, hal ini bertentangan dengan asumsi yang diberikan yakni $R(t^*) = 0$. Sehingga $R(t) > 0$ untuk setiap $t \in [t_0, t_f]$.

Dari pembuktian di atas maka sistem model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan kontrol adalah valid. Hal ini mengakibatkan jika kondisi awal model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan kontrol bernilai positif, maka solusi model tersebut akan bernilai positif untuk setiap interval waktu. Namun model ini tidak menjamin bahwa solusi tunggal yang diberikan untuk kondisi awal. Sehingga, harus dibuktikan apakah solusi dari model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan kontrol memiliki solusi tunggal atau tidak.

Untuk menjamin model memiliki solusi tunggal, digunakan konsep dari kondisi Lipschitz. Maka akan dibuktikan Persamaan (4.1)-(4.4) memenuhi kondisi Lipschitz seperti yang diberikan pada Teorema berikut.

Teorema 4.2. *(Chen & Liu, 2010) Model sistem penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan kontrol yang memenuhi kondisi awal $S(0), I(0), M(0), R(0) > 0$ memiliki solusi tunggal*

Bukti.

Diasumsikan $X = (S, I, M, R)$, dan

$$f(X) = \begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \\ \frac{dM}{dt} \\ \frac{dR}{dt} \end{bmatrix}.$$

Kemudian, model sistem penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak

terhubung dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(X) = \begin{bmatrix} b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 SI - \alpha_2 MS - dS \\ \alpha_1 SI + \alpha_2 MS - \delta I - \gamma aI - dI - u_1 I \\ \gamma aI - \beta M - dM - u_2 M \\ \delta I + \beta M - dR + u_1 I + u_2 M \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $f(X)$ memiliki solusi tunggal dengan kondisi awal $S(0), I(0), M(0), R(0) > 0$. Perhatikan bahwa

$$f(X_1) - f(X_2) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

dimana,

$$\begin{aligned} y_1 &= b(-[S_1 - S_2] - [I_1 - I_2] - [M_1 - M_2] - [R_1 - R_2]) - \alpha_1[S_1 I_1 - S_2 I_2] \\ &\quad - \alpha_2[M_1 S_1 - M_2 S_2] - d[S_1 - S_2]; \\ y_2 &= \alpha_1[S_1 I_1 - S_2 I_2] + \alpha_2[M_1 S_1 - M_2 S_2] - \delta[I_1 - I_2] - \gamma a[I_1 - I_2] \\ &\quad - d[I_1 - I_2] - u_1[I_1 - I_2]; \\ y_3 &= \gamma a[I_1 - I_2] - \beta[M_1 - M_2] - d[M_1 - M_2] - u_2[M_1 - M_2]; \\ y_4 &= \delta[I_1 - I_2] + \beta[M_1 - M_2] - d[R_1 - R_2] + u_1[I_1 - I_2] + u_2[M_1 - M_2]. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa berdasarkan ketaksamaan segitiga, berlaku bahwa

$$\begin{aligned} \| f(X_1) - f(X_2) \| &= \left\| \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \right\| \\ &\leq \left\| \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| + \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_4 \end{bmatrix} \right\| \quad (\text{ketaksamaan segitiga}) \\ &= |y_1| + |y_2| + |y_3| + |y_4|. \end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned}
|y_1| &= |b(-[S_1 - S_2] - [I_1 - I_2] - [M_1 - M_2] - [R_1 - R_2]) - \alpha_1[S_1 - S_2][I_1 - I_2] \\
&\quad - \alpha_2[M_1 - M_2][S_1 - S_2] - d[S_1 - S_2]| \\
&= |b(-[S_1 - S_2] - [I_1 - I_2] - [M_1 - M_2] - [R_1 - R_2]) - \alpha_1[S_1(I_1 - I_2) \\
&\quad + I_2(S_1 - S_2)] - \alpha_2[M_1(S_1 - S_2) + S_2(M_1 - M_2)] - d[S_1 - S_2]| \\
&\leq |-b[S_1 - S_2]| + |-b[I_1 - I_2]| + |-b[M_1 - M_2]| + |-b[R_1 - R_2]| \\
&\quad + |-\alpha_1[S_1(I_1 - I_2)]| + |-\alpha_1[I_2(S_1 - S_2)]| + |-\alpha_2[M_1(S_1 - S_2)]| \\
&\quad + |-\alpha_2[S_2(M_1 - M_2)]| + |-d[S_1 - S_2]| \\
&= b|S_1 - S_2| + b|I_1 - I_2| + b|M_1 - M_2| + b|R_1 - R_2| + \alpha_1 S_1 |I_1 - I_2| \\
&\quad + \alpha_1 I_2 |S_1 - S_2| + \alpha_2 M_1 |S_1 - S_2| + \alpha_2 S_2 |M_1 - M_2| + d|S_1 - S_2|; \\
|y_2| &= \alpha_1[S_1 - S_2][I_1 - I_2] + \alpha_2[M_1 - M_2][S_1 - S_2] - \delta[I_1 - I_2] - \gamma a[I_1 - I_2] \\
&\quad - d[I_1 - I_2] - u_1[I_1 - I_2] \\
&= |\alpha_1[S_1(I_1 - I_2) + I_2(S_1 - S_2)] + \alpha_2[M_1(S_1 - S_2) + S_2(M_1 - M_2)] - \delta[I_1 - I_2] \\
&\quad - \gamma a[I_1 - I_2] - d[I_1 - I_2] - u_1[I_1 - I_2]| \\
&\leq |\alpha_1[S_1(I_1 - I_2)]| + |\alpha_1[I_2(S_1 - S_2)]| + |\alpha_2[M_1(S_1 - S_2)]| + |\alpha_2[S_2(M_1 - M_2)]| \\
&\quad + |-\delta[I_1 - I_2]| + |-\gamma a[I_1 - I_2]| + |-d[I_1 - I_2]| + |-u_1[I_1 - I_2]| \\
&= \alpha_1 S_1 |I_1 - I_2| + \alpha_1 I_2 |S_1 - S_2| + \alpha_2 M_1 |S_1 - S_2| + \alpha_2 S_2 |M_1 - M_2| \\
&\quad + \delta |I_1 - I_2| + \gamma a |I_1 - I_2| + d |I_1 - I_2| + u_1 |I_1 - I_2|; \\
|y_3| &= |\gamma a[I_1 - I_2] - \beta[M_1 - M_2] - d[M_1 - M_2] - u_2[M_1 - M_2]| \\
&\leq |\gamma a[I_1 - I_2]| + |-\beta[M_1 - M_2]| + |-d[M_1 - M_2]| + |-u_2[M_1 - M_2]| \\
&= \gamma a |I_1 - I_2| + \beta |M_1 - M_2| + d |M_1 - M_2| + u_2 |M_1 - M_2|; \\
|y_4| &= |\delta[I_1 - I_2] + \beta[M_1 - M_2] - d[R_1 - R_2] + u_1[I_1 - I_2] + u_2[M_1 - M_2]| \\
&\leq |\delta[I_1 - I_2]| + |\beta[M_1 - M_2]| + |-d[R_1 - R_2]| + |u_1[I_1 - I_2]| + |u_2[M_1 - M_2]| \\
&= \delta |I_1 - I_2| + \beta |M_1 - M_2| + d |R_1 - R_2| + u_1 |I_1 - I_2| + u_2 |M_1 - M_2|.
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa S, I, M, u_1, u_2 fungsi terbatas untuk setiap kondisi awal $N(0) \leq \frac{b}{b+d}$ sehingga terdapat L sedemikian hingga

$$\alpha_1 S, \alpha_1 I, \alpha_2 S, \alpha_2 M, u_1, u_2, b, d, \delta, \gamma a, \beta \leq L$$

yang artinya

$$\begin{aligned}
|y_1| &\leq b|S_1 - S_2| + b|I_1 - I_2| + b|M_1 - M_2| + b|R_1 - R_2| + \alpha_1 S_1 |I_1 - I_2| \\
&\quad + \alpha_1 I_2 |S_1 - S_2| + \alpha_2 M_1 |S_1 - S_2| + \alpha_2 S_2 |M_1 - M_2| + d|S_1 - S_2| \\
&\leq L|S_1 - S_2| + L|I_1 - I_2| + L|M_1 - M_2| + L|R_1 - R_2| + L|I_1 - I_2| \\
&\quad + L|S_1 - S_2| + L|S_1 - S_2| + L|M_1 - M_2| + L|S_1 - S_2|; \\
|y_2| &\leq \alpha_1 S_1 |I_1 - I_2| + \alpha_1 I_2 |S_1 - S_2| + \alpha_2 M_1 |S_1 - S_2| + \alpha_2 S_2 |M_1 - M_2| \\
&\quad + \delta|I_1 - I_2| + \gamma a|I_1 - I_2| + d|I_1 - I_2| + u_1|I_1 - I_2| \\
&\leq L|I_1 - I_2| + L|S_1 - S_2| + L|S_1 - S_2| + L|M_1 - M_2| + L|I_1 - I_2| \\
&\quad + L|I_1 - I_2| + L|I_1 - I_2| + L|I_1 - I_2|; \\
|y_3| &\leq \gamma a|I_1 - I_2| + \beta|M_1 - M_2| + d|M_1 - M_2| + u_2|M_1 - M_2| \\
&\leq L|I_1 - I_2| + L|M_1 - M_2| + L|M_1 - M_2| + L|M_1 - M_2|; \\
|y_4| &\leq \delta|I_1 - I_2| + \beta|M_1 - M_2| + d|R_1 - R_2| + u_1|I_1 - I_2| + u_2|M_1 - M_2| \\
&\leq L|I_1 - I_2| + L|M_1 - M_2| + L|R_1 - R_2| + L|I_1 - I_2| + L|M_1 - M_2|.
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}
\|f(X_1) - f(X_2)\| &\leq |y_1| + |y_2| + |y_3| + |y_4| \\
&\leq 6L|S_1 - S_2| + 10L|I_1 - I_2| + 8L|M_1 - M_2| + 2L|R_1 - R_2| \\
&\leq 10L(|S_1 - S_2| + |I_1 - I_2| + |M_1 - M_2| + |R_1 - R_2|).
\end{aligned}$$

Diketahui berdasarkan teorema ekivalensi norm, didapat bahwa

$$\begin{aligned}
&|S_1 - S_2| + |I_1 - I_2| + |M_1 - M_2| + |R_1 - R_2| \\
&\leq \eta \sqrt{(|S_1 - S_2|)^2 + (|I_1 - I_2|)^2 + (|M_1 - M_2|)^2 + (|R_1 - R_2|)^2}
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\|f(X_1) - f(X_2)\| &\leq |y_1| + |y_2| + |y_3| + |y_4| \\
&\leq 10L(|S_1 - S_2| + |I_1 - I_2| + |M_1 - M_2| + |R_1 - R_2|) \\
&\leq 10\eta L \|X_1 - X_2\|_2.
\end{aligned}$$

Ini berakibat bahwa f fungsi Lipschitz sehingga

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t f(X) dt$$

merupakan solusi sistem yang bersifat tunggal.

4.6 Eksistensi Kontrol Optimal

Solusi terbatas dari kendala (4.1)-(4.4) untuk interval waktu yang terbatas digunakan untuk membuktikan eksistensi kontrol optimal. Eksistensi dari kontrol optimal dapat dicari dengan menggunakan hasil dari Fleming dan Rishel (Fleming & Rishel, 1975). Kontrol optimal dikatakan eksis jika memenuhi kondisi berikut.

1. Himpunan kontrol U tidak kosong

Didefinisikan

$$U = \{(u_1, u_2) | 0 \leq u_1(t), u_2(t) \leq 1, \forall t \in [0, t_f]\}$$

adalah himpunan tidak kosong.

Hal ini dapat ditinjau dari Teorema 4.1 dan Teorema 4.2 dimana setiap $u \in U$ mempunyai solusi positif dan tunggal. Sehingga dapat disimpulkan himpunan U tidak kosong.

2. Himpunan kontrol U konveks dan tertutup

Untuk menunjukkan bahwa himpunan U adalah himpunan konveks dan tertutup, misalkan $v_1 = (u_1, u_2), v_2 = (u_1, u_2) \in U$. Diketahui bahwa

$$0 \leq u_{11}, u_{21}, u_{12}, u_{22} \leq 1$$

untuk $t \in [0, 1]$ dan $\lambda \in [0, 1]$ berlaku

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_{11}(t) \leq 1 \\ 0 &\leq \lambda u_{11}(t) \leq \lambda; \\ 0 &\leq u_{12}(t) \leq 1 \\ 0 &\leq \lambda u_{12}(t) \leq \lambda \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_{21}(t) \leq 1 \\ 0 &\leq (1 - \lambda)u_{21} \leq (1 - \lambda); \\ 0 &\leq u_{22}(t) \leq 1 \\ 0 &\leq (1 - \lambda)u_{22}(t) \leq (1 - \lambda). \end{aligned}$$

sehingga untuk setiap $\lambda \in [0, 1]$ berlaku

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda u_{11}(t) + (1 - \lambda)u_{21}(t) \leq \lambda + (1 - \lambda) \\ 0 &\leq \lambda u_{11}(t) + (1 - \lambda)u_{21}(t) \leq 1; \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda u_{12}(t) + (1 - \lambda)u_{22}(t) \leq \lambda + (1 - \lambda) \\ 0 &\leq \lambda u_{12}(t) + (1 - \lambda)u_{22}(t) \leq 1. \end{aligned}$$

Akibatnya

$$(1 - \lambda)v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} \lambda u_{11}(t) + (1 - \lambda)u_{21}(t) \\ \lambda u_{12}(t) + (1 - \lambda)u_{22}(t) \end{bmatrix} \in U.$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa U adalah himpunan konveks.

Untuk menunjukkan bahwa U adalah himpunan tertutup, cukup dengan menunjukkan bahwa untuk setiap barisan konvergen $(u_n) = (u_{1n}, u_{2n}) \subseteq U$ memenuhi $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in U$. Pernyataan ini ekuivalen dengan u_{1n} dan u_{2n} yang

merupakan barisan konvergen dengan $(x, y) = (\lim_{n \rightarrow \infty} u_{1n}, \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n}) \in U$.
Didefinisikan

$$\|u - v\| := \sup\{u(t) - v(t) | t \in [0, t_f]\}$$

Kemudian, diketahui bahwa u_{1n} dan u_{2n} adalah barisan konvergen sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in N$ yang memenuhi

$$\|u_{1n} - x\| < \varepsilon$$

dan

$$\|u_{2n} - y\| < \varepsilon.$$

Untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & \|u_{1n} - x\| < \varepsilon \\ (\Rightarrow) \quad & |u_{1n}(t) - x(t)| < \sup\{|u_{1n} - x(t)| | t \in [0, t_f]\} < \varepsilon \\ (\Rightarrow) \quad & -\varepsilon < x(t) - u_{1n}(t) < \varepsilon \\ (\Rightarrow) \quad & -\varepsilon \leq u_{1n}(t) - \varepsilon < x(t) < \varepsilon + u_{1n}(t) \leq \varepsilon + 1 \\ (\Rightarrow) \quad & -\varepsilon < x(t) < 1 + \varepsilon \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} & \|u_{2n} - y\| < \varepsilon \\ (\Rightarrow) \quad & |u_{2n}(t) - y(t)| < \sup\{|u_{2n} - y(t)| | t \in [0, t_f]\} < \varepsilon \\ (\Rightarrow) \quad & -\varepsilon < y(t) - u_{2n}(t) < \varepsilon \\ (\Rightarrow) \quad & -\varepsilon \leq u_{2n}(t) - \varepsilon < y(t) < \varepsilon + u_{2n}(t) \leq \varepsilon + 1 \\ (\Rightarrow) \quad & -\varepsilon < y(t) < 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena memenuhi untuk setiap $\varepsilon > 0$, diperoleh $0 \leq x(t), y(t) < 1$ dan $(x, y) \in U$. Maka, dapat disimpulkan bahwa U adalah himpunan tertutup. Sehingga, terbukti bahwa U konveks dan tertutup.

3. Fungsi $J : U \rightarrow R$ yang didefinisikan

$$J(u_1, u_2) = a_1 I + a_2 M + \frac{1}{2} (b_1 u_1^2(t) + b_2 u_2^2(t))$$

adalah fungsi konveks terbatas pada U .

Untuk membuktikan bahwa J merupakan fungsi konveks terbatas, pertama akan ditunjukkan bahwa I dan M adalah fungsi kontinu di $[0, t_f]$ sehingga terdapat $I_{min}, I_{max}, M_{min}$, dan M_{max} maka $I_{min} \leq I(t) \leq I_{max}$ dan $M_{min} \leq I(t) \leq M_{max}$. Diketahui pula $0 \leq u_1(t) \leq 1$ dan $0 \leq u_2(t) \leq 1$, sehingga

$$a_1 I_{min} + a_2 M_{min} \leq J(u_1, u_2) \leq a_1 I_{max} + a_2 M_{max} + \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$$

dalam hal ini dapat dikatakan bahwa J merupakan fungsi terbatas.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa J adalah fungsi konveks. Misalkan

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{2}b_1u_1^2 + \frac{1}{2}b_2u_2^2$$

dan matriks Hessian dari g sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dapat dikatakan bahwa H adalah semidefinit positif sehingga g merupakan fungsi konveks. Maka diperoleh bahwa g, a_1I , dan a_2M adalah fungsi konveks pada U , juga

$$J(u_1, u_2) = \frac{1}{2} (b_1u_1^2(t) + b_2u_2^2(t))$$

adalah fungsi konveks pada U .

Sehingga terbukti bahwa J adalah fungsi konveks terbatas.

4. Persamaan $S(t), I(t), M(t)$, dan $R(t)$ kontinu terbatas oleh fungsi linear pada u_1 dan u_2 . Diketahui bahwa $S(t), I(t), M(t)$, dan $R(t)$ merupakan fungsi kontinu pada $[0, t_f]$, maka $S(t), I(t), M(t)$, dan $R(t)$ adalah fungsi terbatas pada

$$0 < S(t) \leq S_{max}, 0 < I(t) \leq I_{max}, 0 < M(t) \leq M_{max}, 0 < R(t) \leq R_{max}$$

untuk setiap $t \in [0, t_f]$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1SI - \alpha_2MS - dS < b; \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha_1SI + \alpha_2MS - \delta I - \gamma aI - dI - u_1I < \alpha_1S_{max}I_{max} + \alpha_2M_{max}S_{max}; \\ \frac{dM}{dt} &= \gamma aI - \beta M - dM - u_2M < \gamma aI_{max}; \\ \frac{dR}{dt} &= \delta I + \beta M - dR + u_1I + u_2M < (\delta + 1)I_{max} + (\beta + 1)M_{max}. \end{aligned}$$

Sehingga ruas kanan pada persamaan model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung dengan dua kontrol terbatas. Dapat diketahui juga

bahwa sistem dengan kontrol dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= f_1(S, I, M, R) + u_1g_1(S, I, M, R) + u_2h_1(S, I, M, R); \\ \frac{dI}{dt} &= f_2(S, I, M, R) + u_1g_2(S, I, M, R) + u_2h_2(S, I, M, R); \\ \frac{dM}{dt} &= f_3(S, I, M, R) + u_1g_3(S, I, M, R) + u_2h_3(S, I, M, R); \\ \frac{dR}{dt} &= f_4(S, I, M, R) + u_1g_4(S, I, M, R) + u_2h_4(S, I, M, R).\end{aligned}$$

Dalam hal ini dapat disimpulkan bahwa sistem dengan kontrol dapat direpresentasikan sebagai fungsi linear terhadap u_1 dan u_2 . Sehingga terbukti bahwa sistem dengan kontrol terbatas secara linear terhadap u_1 dan u_2 .

4.7 Penyelesaian Kontrol Optimal

Pada Tugas Akhir ini difokuskan untuk meminimumkan individu *infected* dan *marketing*, serta biaya operasional dalam upaya kontrol yang digunakan. Oleh karena itu dapat diberikan fungsi objektif sebagai berikut:

$$J(u_1, u_2) = \min \int_{t_0}^{t_f} \left[a_1I(t) + a_2M(t) + \frac{1}{2} (b_1u_1^2(t) + b_2u_2^2(t)) \right] dt$$

dengan kendala

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1SI - \alpha_2MS - dS; \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha_1SI + \alpha_2MS - \delta I - \gamma aI - dI - u_1I; \\ \frac{dM}{dt} &= \gamma aI - \beta M - dM - u_2M; \\ \frac{dR}{dt} &= \delta I + \beta M - dR + u_1I + u_2M\end{aligned}$$

dimana

a_1 : bobot kerugian dari individu *infected*,

a_2 : bobot kerugian dari individu *marketing*,

b_1 : bobot pada kontrol penekanan akun terhubung, dan

b_2 : bobot pada kontrol penekanan akun tidak terhubung.

Nilai a_i dan b_j merupakan koefisien bobot parameter untuk meminimumkan populasi invidu *infected* dan *marketing* yang didasarkan pada biaya yang dikeluarkan dalam masing-masing upaya kontrol, dimana $a_i > 0$ dan $b_j > 0$ untuk setiap $i = 1, 2$ dan $j = 1, 2, 3$, serta t_f merupakan waktu akhir.

Berikut adalah langkah-langkah yang dalam penyelesaian kontrol optimal pada penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin.

Langkah 1: Membentuk fungsi *Hamiltonian*,

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}'(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

dimana

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ I(t) \\ M(t) \\ R(t) \end{bmatrix}, \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}$$

dan

$$V(S, I, M, R, u_1, u_2, t) = a_1 I + a_2 M + \frac{1}{2} (b_1 u_1^2(t) + b_2 u_2^2(t));$$

$$\mathbf{f}(S, I, M, R, u_1, u_2, t) = \begin{bmatrix} \frac{dS(t)}{dt} \\ \frac{dI(t)}{dt} \\ \frac{dM(t)}{dt} \\ \frac{dR(t)}{dt} \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & a_1 I + a_2 M + \frac{1}{2} (b_1 u_1^2(t) + b_2 u_2^2(t)) \\ & + \lambda_1 [b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 SI - \alpha_2 MS - dS] \\ & + \lambda_2 [\alpha_1 SI + \alpha_2 MS - \delta I - \gamma a I - dI - u_1 I] \\ & + \lambda_3 [\gamma a I - \beta M - dM - u_2 M] \\ & + \lambda_4 [\delta I + \beta M - dR + u_1 S + u_1 I + u_2 M]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Langkah 2: Meminimumkan fungsi *Hamiltonian* (\mathcal{H}) terhadap semua kontrol u ,

Kondisi stasioner dapat diperoleh dengan menurunkan Persamaan (4.17) terhadap masing-masing variabel kontrol u_1 , dan u_2

1. Persamaan (4.17) diturunkan terhadap u_1 , diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} &= 0 \\ b_1 u_1(t) - \lambda_2 I + \lambda_4 I &= 0 \\ b_1 u_1(t) &= \lambda_2 I - \lambda_4 I \\ u_1(t) &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_1} I \end{aligned} \quad (4.18)$$

karena $0 \leq u_1 \leq 1$, didapatkan

- (a) Jika $u_1 < 0$, maka

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_1} I &< 0 \\ (\lambda_2 - \lambda_4) I &< 0. \end{aligned}$$

Hal tersebut tidak mungkin terjadi karena $I > 0$ dimana kasus ini sama ketika $u_1 = 0$. Sehingga untuk $u_1 \leq 0$ berlaku $u_1^* = 0$.

(b) Jika $u_1 > 0$, maka

$$\begin{aligned} u_1 &> 0 \\ u_1 I &> 0. \end{aligned}$$

Hal tersebut tidak mungkin terjadi karena I yang telah diberi kontrol lebih besar daripada I sebelum diberi kontrol. Sehingga untuk $u_1 \geq 1$ berlaku $u_1^* = 1$.

(c) Jika $0 < u_1 < 1$, maka dapat diambil

$$u_1^*(t) = \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_1} I.$$

Hal ini didasarkan pada Persamaan (4.18) yang menyatakan bahwa

$$u_1(t) = \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_1} I < 0$$

dimana u_2 merupakan kontrol yang menyebabkan fungsi *Hamiltonian* minimum. Sehingga untuk $0 < u_1 < 1$ berlaku

$$u_1^*(t) = \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_1} I.$$

Sehingga beberapa kemungkinan hasil diperoleh, yaitu

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{jika } \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_1} I \leq 0 \\ \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_1} I, & \text{jika } 0 < \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_1} I < 1 \\ 1, & \text{jika } \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_1} I \geq 1 \end{cases}$$

Dari beberapa kemungkinan diatas, maka nilai kontrol u_1 yang optimal adalah

$$u_1^* = \min \left(\max \left(0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_2} I \right), 1 \right), 0 \leq u_1^* \leq 1.$$

2. Persamaan (4.17) diturunkan terhadap u_2 , diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} &= 0 \\ b_2 u_2(t) - \lambda_3 M + \lambda_4 M &= 0 \\ b_2 u_2(t) &= \lambda_3 M - \lambda_4 M \\ u_2(t) &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{b_2} M \end{aligned} \tag{4.19}$$

karena $0 \leq u_2 \leq 1$, didapatkan

(a) Jika $u_2 < 0$, maka

$$\frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{b_2} M < 0$$

$$(\lambda_3 - \lambda_4) M < 0.$$

Hal tersebut tidak mungkin terjadi karena $M > 0$ dimana kasus ini sama ketika $u_3 = 0$. Sehingga untuk $u_2 \leq 0$ berlaku $u_2^* = 0$.

(b) Jika $u_2 > 0$, maka

$$u_2 > 0$$

$$u_2 M > 0.$$

Hal tersebut tidak mungkin terjadi karena M yang telah diberi kontrol lebih besar daripada M sebelum diberi kontrol. Sehingga untuk $u_2 \geq 1$ berlaku $u_2^* = 1$.

(c) Jika $0 < u_2 < 1$, maka dapat diambil

$$u_2^*(t) = \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{b_2} M.$$

Hal ini didasarkan pada Persamaan (4.19) yang menyatakan bahwa

$$u_2(t) = \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{b_2} M < 0$$

dimana u_2 merupakan kontrol yang menyebabkan fungsi *Hamiltonian* minimum. Sehingga untuk $0 < u_2 < 1$ berlaku

$$u_2^*(t) = \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{b_2} M.$$

Sehingga diperoleh beberapa kemungkinan hasil yang diperoleh, yaitu

$$u_2^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{jika } \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{b_2} M \leq 0 \\ \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{b_2} M, & \text{jika } 0 < \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{b_2} M < 1 \\ 1, & \text{jika } \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{b_2} M \geq 1 \end{cases}$$

Berdasarkan beberapa kemungkinan diperoleh nilai kontrol u_3 yang optimal adalah

$$u_2^* = \min \left(\max \left(0, \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{b_2} M \right), 1 \right), 0 \leq u_2^* \leq 1.$$

Langkah 3: Menentukan fungsi *Hamiltonian* yang optimal (H^*) dengan cara substitusi

$u^*(t)$ ke dalam fungsi *Hamiltonian* (\mathcal{H})

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^* &= a_1 I + a_2 M + \frac{1}{2} [b_1 (u_1^*)^2(t) + b_2 (u_2^*)^2(t)] \\ &\quad + \lambda_1 [b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 SI - \alpha_2 MS - dS] \\ &\quad + \lambda_2 [\alpha_1 SI + \alpha_2 MS - \delta I - \gamma a I - dI - u_1^*(t)I] \\ &\quad + \lambda_3 [\gamma a I - \beta M - u_2^*(t)M] \\ &\quad + \lambda_4 [\delta I + \beta M - dR + u_1^*(t)I + u_2^*(t)M]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^* &= a_1 I + a_2 M + \frac{1}{2} \left[b_1 \left(\frac{(\lambda_1 - \lambda_4)}{b_1} I \right)^2 + b_2 \left(\frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_2} M \right)^2 \right] \\ &\quad + \lambda_1 [b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 SI - \alpha_2 MS - dS] \\ &\quad + \lambda_2 \left[\alpha_1 SI + \alpha_2 MS - \delta I - \gamma a I - dI - \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_1} I^2 \right] \\ &\quad + \lambda_3 \left[\gamma a I - \beta M - dM - \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{b_2} M^2 \right] \\ &\quad + \lambda_4 \left[\delta I + \beta M - dR + \frac{(\lambda_2 - \lambda_4)}{b_2} I^2 + \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)}{b_1} M^2 \right].\end{aligned}$$

Langkah 4: Menentukan persamaan *state* $\dot{x}^*(t)$ dan *costate* $\dot{\lambda}^*(t)$,

1. Persamaan *state* dalam kondisi optimal didapat dengan menurunkan fungsi *Hamiltonian* yang telah optimal terhadap λ ,

$$\dot{x}^*(t) = + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right)^*$$

diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{S}^*(t) &= + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_1} \right)^* = b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 SI - \alpha_2 MS - dS; \\ \dot{I}^*(t) &= + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_2} \right)^* = \alpha_1 SI + \alpha_2 MS - \delta I - \gamma a I - dI - u_1 I; \\ \dot{M}^*(t) &= + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_3} \right)^* = \gamma a I - \beta M - dM - u_2 M; \\ \dot{R}^*(t) &= + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_4} \right)^* = \delta I + \beta M - dR + u_1 I + u_2 M.\end{aligned}$$

2. Persamaan *costate* dalam kondisi optimal diperoleh dengan menurunkan fungsi *Hamiltonian* yang telah optimal terhadap masing-masing variabel *state*,

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \right)^*$$

diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1^*(t) &= - \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)^* = \lambda_1 (b + \alpha_1 I + \alpha_2 M + d) - \lambda_2 (\alpha_1 I + \alpha_2 M); \\ \dot{\lambda}_2^*(t) &= - \left(\frac{\partial H}{\partial I} \right)^* = -a_1 + (\lambda_2 - \lambda_4) \dot{u}_1^* + \lambda_1 (b + \alpha_1 S) + \lambda_2 (-\alpha_1 S + \gamma a + \delta + d) \\ &\quad - \lambda_3 \gamma a - \lambda_4 \delta; \\ \dot{\lambda}_3^*(t) &= - \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right)^* = -a_2 + (\lambda_3 - \lambda_4) \dot{u}_2^* + \lambda_1 (b + \alpha_2 S) - \lambda_2 \alpha_2 S + \lambda_3 (\beta + d) - \lambda_4 \beta; \\ \dot{\lambda}_4^*(t) &= - \left(\frac{\partial H}{\partial R} \right)^* = \lambda_1 b + \lambda_4 d.\end{aligned}$$

4.8 Penyelesaian Numerik

Model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4.

4.8.1 Penyelesaian Numerik Sebelum Dikontrol

Berikut adalah persamaan *state* pada model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung sebelum dikontrol.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \dot{S}(t) = b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 SI - \alpha_2 MS - dS = f_1(t, S(t), I(t), M(t), R(t)); \\ \frac{dI}{dt} &= \dot{I}(t) = \alpha_1 SI + \alpha_2 MS - \delta I - \gamma a I - dI = f_2(t, S(t), I(t), M(t), R(t)); \\ \frac{dM}{dt} &= \dot{M}(t) = \gamma a I - \beta M - dM = f_3(t, S(t), I(t), M(t), R(t)); \\ \frac{dR}{dt} &= \dot{R}(t) = \delta I + \beta M - dR = f_4(t, S(t), I(t), M(t), R(t)).\end{aligned}$$

Berikut adalah penyelesaian numerik pada model sebelum dikontrol dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

$$\begin{aligned}S_{i+1} &= S_i + \frac{p}{6} (k_{1,S} + 2k_{2,S} + 2k_{3,S} + k_{4,S}); \\ I_{i+1} &= I_i + \frac{p}{6} (k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I}); \\ M_{i+1} &= M_i + \frac{p}{6} (k_{1,M} + 2k_{2,M} + 2k_{3,M} + k_{4,M}); \\ R_{i+1} &= R_i + \frac{p}{6} (k_{1,R} + 2k_{2,R} + 2k_{3,R} + k_{4,R})\end{aligned}$$

dimana p merupakan ukuran langkah dan $p = 0.001$ dengan

$$\begin{aligned}
k_{1,S} &= f_1(t_i, S_i, I_i, M_i, R_i); \\
k_{1,I} &= f_2(t_i, S_i, I_i, M_i, R_i); \\
k_{1,M} &= f_3(t_i, S_i, I_i, M_i, R_i); \\
k_{1,R} &= f_4(t_i, S_i, I_i, M_i, R_i); \\
k_{2,S} &= f_1\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{1,Sp}, I_i + \frac{1}{2}k_{1,Ip}, M_i + \frac{1}{2}k_{1,Mp}, R_i + \frac{1}{2}k_{1,Rp}\right); \\
k_{2,I} &= f_2\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{1,Sp}, I_i + \frac{1}{2}k_{1,Ip}, M_i + \frac{1}{2}k_{1,Mp}, R_i + \frac{1}{2}k_{1,Rp}\right); \\
k_{2,M} &= f_3\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{1,Sp}, I_i + \frac{1}{2}k_{1,Ip}, M_i + \frac{1}{2}k_{1,Mp}, R_i + \frac{1}{2}k_{1,Rp}\right); \\
k_{2,R} &= f_4\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{1,Sp}, I_i + \frac{1}{2}k_{1,Ip}, M_i + \frac{1}{2}k_{1,Mp}, R_i + \frac{1}{2}k_{1,Rp}\right); \\
k_{3,S} &= f_1\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{2,Sp}, I_i + \frac{1}{2}k_{2,Ip}, M_i + \frac{1}{2}k_{2,Mp}, R_i + \frac{1}{2}k_{2,Rp}\right); \\
k_{3,I} &= f_2\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{2,Sp}, I_i + \frac{1}{2}k_{2,Ip}, M_i + \frac{1}{2}k_{2,Mp}, R_i + \frac{1}{2}k_{2,Rp}\right); \\
k_{3,M} &= f_3\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{2,Sp}, I_i + \frac{1}{2}k_{2,Ip}, M_i + \frac{1}{2}k_{2,Mp}, R_i + \frac{1}{2}k_{2,Rp}\right); \\
k_{3,R} &= f_4\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{2,Sp}, I_i + \frac{1}{2}k_{2,Ip}, M_i + \frac{1}{2}k_{2,Mp}, R_i + \frac{1}{2}k_{2,Rp}\right); \\
k_{4,S} &= f_1(t_i + p, S_i + k_{3,Sp}, I_i + k_{3,Ip}, M_i + k_{3,Mp}, R_i + k_{3,Rp}); \\
k_{4,I} &= f_2(t_i + p, S_i + k_{3,Sp}, I_i + k_{3,Ip}, M_i + k_{3,Mp}, R_i + k_{3,Rp}); \\
k_{4,M} &= f_3(t_i + p, S_i + k_{3,Sp}, I_i + k_{3,Ip}, M_i + k_{3,Mp}, R_i + k_{3,Rp}); \\
k_{4,R} &= f_4(t_i + p, S_i + k_{3,Sp}, I_i + k_{3,Ip}, M_i + k_{3,Mp}, R_i + k_{3,Rp}).
\end{aligned}$$

4.8.2 Penyelesaian Numerik Setelah Dikontrol

Model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung memiliki empat persamaan *state* dan *costate* setelah dikontrol sebagai berikut:

1. Persamaan *state*

$$\begin{aligned}
\dot{S}^*(t) &= b(1 - S - I - M - R) - \alpha_1 SI - \alpha_2 MS - dS \\
&= f_1^*(t, S(t), I(t), M(t), R(t), u_1^*(t), u_2^*(t)); \\
\dot{I}^*(t) &= \alpha_1 SI + \alpha_2 MS - \delta I - \gamma a I - dI \\
&= f_2^*(t, S(t), I(t), M(t), R(t), u_1^*(t), u_2^*(t)); \\
\dot{M}^*(t) &= \gamma a I - \beta M - dM \\
&= f_3^*(t, S(t), I(t), M(t), R(t), u_1^*(t), u_2^*(t)); \\
\dot{R}^*(t) &= \delta I + \beta M - dR \\
&= f_4^*(t, S(t), I(t), M(t), R(t), u_1^*(t), u_2^*(t)).
\end{aligned}$$

Berikut adalah penyelesaian numerik setelah dikontrol dengan menggunakan metode

Runge-Kutta orde empat.

$$\begin{aligned}
S_{i+1}^* &= S_i^* + \frac{p}{6} (k_{1,S^*} + 2k_{2,S^*} + 2k_{3,S^*} + k_{4,S^*}); \\
I_{i+1}^* &= I_i^* + \frac{p}{6} (k_{1,I^*} + 2k_{2,I^*} + 2k_{3,I^*} + k_{4,I^*}); \\
M_{i+1}^* &= M_i^* + \frac{p}{6} (k_{1,M^*} + 2k_{2,M^*} + 2k_{3,M^*} + k_{4,M^*}); \\
R_{i+1}^* &= R_i^* + \frac{p}{6} (k_{1,R^*} + 2k_{2,R^*} + 2k_{3,R^*} + k_{4,R^*})
\end{aligned}$$

dimana p merupakan ukuran langkah dan $p = 0.001$ dengan

$$\begin{aligned}
k_{1,S^*} &= f_1^*(S(t), I(t), M(t), R(t), u_1^*(t), u_2^*(t)); \\
k_{1,I^*} &= f_2^*(S(t), I(t), M(t), R(t), u_1^*(t), u_2^*(t)); \\
k_{1,M^*} &= f_3^*(S(t), I(t), M(t), R(t), u_1^*(t), u_2^*(t)); \\
k_{1,R^*} &= f_4^*(S(t), I(t), M(t), R(t), u_1^*(t), u_2^*(t)); \\
k_{2,S^*} &= f_1^*\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{1,S^*}p, I_i + \frac{1}{2}k_{1,I^*}p, M_i + \frac{1}{2}k_{1,M^*}p, R_i + \frac{1}{2}k_{1,R^*}p, u_{1i}^*, u_{2i}^*\right); \\
k_{2,I^*} &= f_2^*\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{1,S^*}p, I_i + \frac{1}{2}k_{1,I^*}p, M_i + \frac{1}{2}k_{1,M^*}p, R_i + \frac{1}{2}k_{1,R^*}p, u_{1i}^*, u_{2i}^*\right); \\
k_{2,M^*} &= f_3^*\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{1,S^*}p, I_i + \frac{1}{2}k_{1,I^*}p, M_i + \frac{1}{2}k_{1,M^*}p, R_i + \frac{1}{2}k_{1,R^*}p, u_{1i}^*, u_{2i}^*\right); \\
k_{2,R^*} &= f_4^*\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{1,S^*}p, I_i + \frac{1}{2}k_{1,I^*}p, M_i + \frac{1}{2}k_{1,M^*}p, R_i + \frac{1}{2}k_{1,R^*}p, u_{1i}^*, u_{2i}^*\right); \\
k_{3,S^*} &= f_1^*\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{2,S^*}p, I_i + \frac{1}{2}k_{2,I^*}p, M_i + \frac{1}{2}k_{2,M^*}p, R_i + \frac{1}{2}k_{2,R^*}p, u_{1i}^*, u_{2i}^*\right); \\
k_{3,I^*} &= f_2^*\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{2,S^*}p, I_i + \frac{1}{2}k_{2,I^*}p, M_i + \frac{1}{2}k_{2,M^*}p, R_i + \frac{1}{2}k_{2,R^*}p, u_{1i}^*, u_{2i}^*\right); \\
k_{3,M^*} &= f_3^*\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{2,S^*}p, I_i + \frac{1}{2}k_{2,I^*}p, M_i + \frac{1}{2}k_{2,M^*}p, R_i + \frac{1}{2}k_{2,R^*}p, u_{1i}^*, u_{2i}^*\right); \\
k_{3,R^*} &= f_4^*\left(t_i + \frac{1}{2}p, S_i + \frac{1}{2}k_{2,S^*}p, I_i + \frac{1}{2}k_{2,I^*}p, M_i + \frac{1}{2}k_{2,M^*}p, R_i + \frac{1}{2}k_{2,R^*}p, u_{1i}^*, u_{2i}^*\right); \\
k_{4,S^*} &= f_1^*(t_i + p, S_i + k_{3,S^*}p, I_i + k_{3,I^*}p, M_i + k_{3,M^*}p, R_i + k_{3,R^*}p, u_{1i}^*, u_{2i}^*); \\
k_{4,I^*} &= f_2^*(t_i + p, S_i + k_{3,S^*}p, I_i + k_{3,I^*}p, M_i + k_{3,M^*}p, R_i + k_{3,R^*}p, u_{1i}^*, u_{2i}^*); \\
k_{4,M^*} &= f_3^*(t_i + p, S_i + k_{3,S^*}p, I_i + k_{3,I^*}p, M_i + k_{3,M^*}p, R_i + k_{3,R^*}p, u_{1i}^*, u_{2i}^*); \\
k_{4,R^*} &= f_4^*(t_i + p, S_i + k_{3,S^*}p, I_i + k_{3,I^*}p, M_i + k_{3,M^*}p, R_i + k_{3,R^*}p, u_{1i}^*, u_{2i}^*).
\end{aligned}$$

2. Persamaan *costate*

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,i-1}^* &= \lambda_{1,i}^* - \frac{p_1}{6} (k_{1,\lambda_1^*} + 2k_{2,\lambda_1^*} + 2k_{3,\lambda_1^*} + k_{4,\lambda_1^*}); \\
\lambda_{2,i-1}^* &= \lambda_{2,i}^* + \frac{p_1}{6} (k_{1,\lambda_2^*} + 2k_{2,\lambda_2^*} + 2k_{3,\lambda_2^*} + k_{4,\lambda_2^*}); \\
\lambda_{3,i-1}^* &= \lambda_{3,i}^* + \frac{p_1}{6} (k_{1,\lambda_3^*} + 2k_{2,\lambda_3^*} + 2k_{3,\lambda_3^*} + k_{4,\lambda_3^*}); \\
\lambda_{4,i-1}^* &= \lambda_{4,i}^* + \frac{p_1}{6} (k_{1,\lambda_4^*} + 2k_{2,\lambda_4^*} + 2k_{3,\lambda_4^*} + k_{4,\lambda_4^*})
\end{aligned}$$

4.9 Analisis dan Hasil Simulasi

Pada pembahasan ini dijelaskan mengenai hasil simulasi dengan bantuan *software* Matlab R2021b. Adapun parameter yang digunakan untuk mensimulasikan hasil pada penelitian ini diberikan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Sumber
b	0.4	(Yu et al., 2022)
d	0.04	(Yu et al., 2022)
α_1	0.1	(Yu et al., 2022)
α_2	0.1	(Yu et al., 2022)
δ	0.1	(Yu et al., 2022)
γ	0.1	(Yu et al., 2022)
a	0.05	Asumsi
β	0.1	(Yu et al., 2022)

Nilai parameter dari tingkat efek algoritma media sosial (a) menggambarkan faktor yang dapat mempercepat penyebaran rumor melalui akun tidak terhubung sehingga mempengaruhi laju perpindahan individu *infected* (I) ke individu *marketing* (M). Akun tidak terhubung cenderung memiliki jangkauan yang lebih terbatas, memiliki sedikit pengikut, dan kurang kredibilitas dalam media sosial. Oleh karena ini, parameter tingkat efek algoritma media sosial dapat dinilai lebih rendah dalam penyebaran rumor.

Pada pembahasan kepositifan diperoleh syarat batas untuk total populasi sebesar $\frac{b}{b+d}$, dengan memasukkan nilai parameter pada batas tersebut didapatkan total populasi harus kurang dari 0.91 juta individu atau 91% dari total populasi. Sehingga diberikan nilai awal populasi pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4 Nilai Awal

Populasi	Nilai Awal (juta)	Sumber
S	0.499	(Reportal, 2024)
I	0.3	(Yu et al., 2022)
M	0.05	(Yu et al., 2022)
R	0	(Yu et al., 2022)
Total Populasi	0.849	

Kemudian, dengan memasukkan nilai parameter pada Tabel 4.3 ke dalam titik kesetimbangan bebas rumor pada (4.5), didapatkan titik kesetimbangan bebas rumor yaitu $E_0 = (0.9091, 0, 0, 0)$. Adapun untuk titik kesetimbangan endemik yaitu $E_1 = (1.4, 0.5668, 0.0202, 0.0709)$. Berdasarkan pembahasan analisis kestabilan disekitar titik kesetimbangan bebas rumor, diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_1 = -0.4400$$

$$\lambda_2 = -0.0400$$

$$\lambda_3 = -0.1450$$

$$\lambda_4 = -0.0491$$

karena nilai $\lambda_{1,2,3,4} < 0$, maka sistem bersifat stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan bebas rumor.

Selanjutnya, berdasarkan pembahasan analisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan endemik, diperoleh syarat sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A_1, A_2, A_3, A_4 &> 0 \\ A_1 A_2 &> A_3 \\ (A_1 A_2 - A_3) A_3 &> A_1^2 A_4 \end{aligned}$$

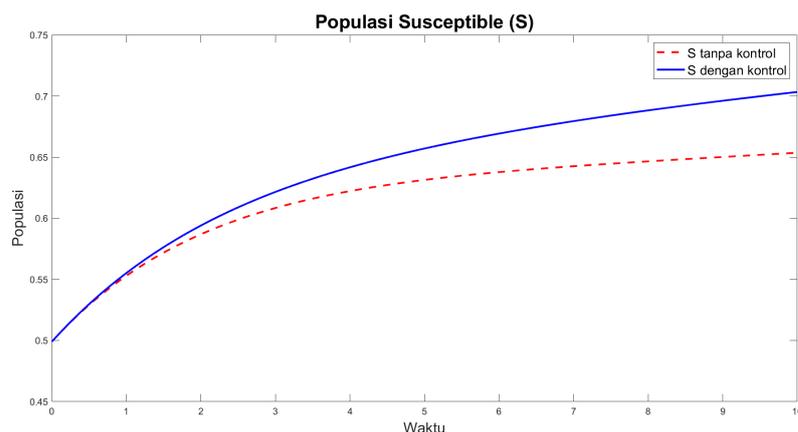
Jika syarat tersebut terpenuhi, maka sistem bersifat stabil asimtotik. Dengan memsubstitusikan nilai parameter pada Tabel 4.3, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.5637 \\ A_2 &= 0.1298 \\ A_3 &= 0.0124 \\ A_4 &= 0.0005 \\ A_1 A_2 &= 0.0731 \\ (A_1 A_2 - A_3) A_3 &= 0.0008 \\ A_1^2 A_4 &= 0.0002 \end{aligned}$$

karena syarat terpenuhi, maka sistem bersifat stabil asimtotik di sekitar titik kesetimbangan endemik.

Berikut disajikan hasil perbandingan simulai numerik pada model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung tanpa kontrol dan dengan kontrol, dengan pemberian bobot $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{1}{3}$, dan $b_2 = \frac{1}{3}$ sebagai berikut:

1. Populasi *Susceptible* (S)

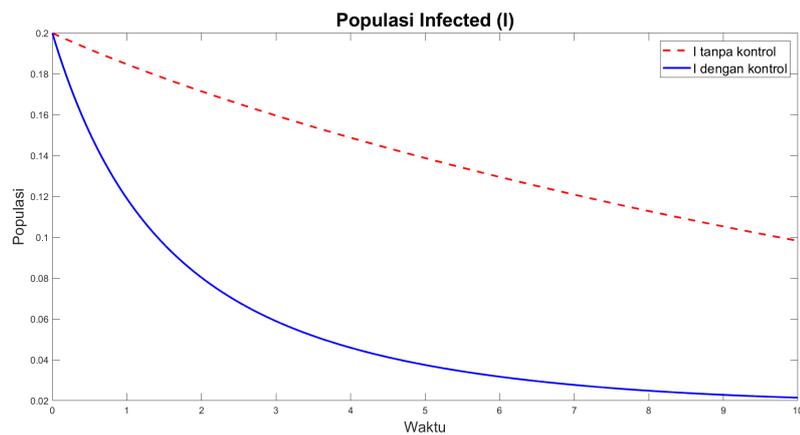


Gambar 4.3 Perbandingan Perubahan Jumlah Populasi *Susceptible* Tanpa dan dengan Kontrol

Berdasarkan Gambar 4.3 diketahui bahwa jumlah populasi individu *susceptible* tanpa kontrol meningkat hingga waktu ke-10 sebanyak 65%. Selanjutnya, jumlah populasi individu *susceptible* dengan kontrol mengalami peningkatan hingga waktu ke-10 sebanyak 70%. Peningkatan yang terjadi pada populasi individu *susceptible*

tanpa dan dengan kontrol dikarenakan adanya individu yang menggunakan media sosial menjadi penyebar rumor kepada teman (akun terhubung) dan bukan teman (akun tidak terhubung). Jumlah populasi individu *susceptible* dengan kontrol memiliki kenaikan yang lebih cepat dikarenakan adanya individu *susceptible* yang tercegah dari penyebaran rumor.

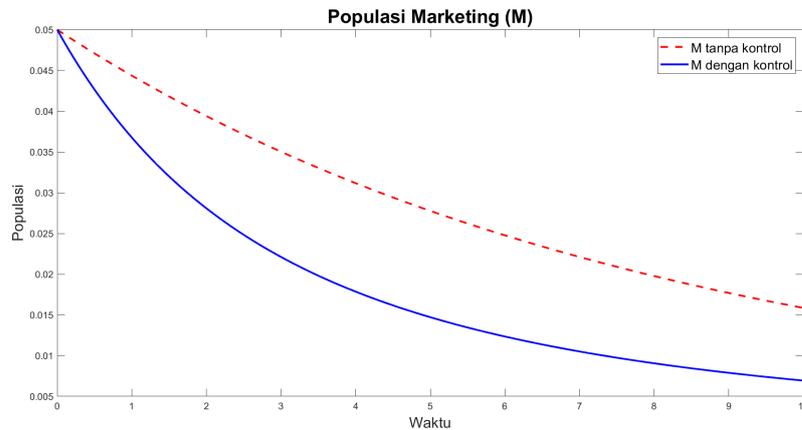
2. Populasi *Infected* (I)



Gambar 4.4 Perbandingan Perubahan Jumlah Populasi *Infected* Tanpa dan dengan Kontrol

Berdasarkan Gambar 4.4 diketahui bahwa jumlah populasi individu *infected* tanpa kontrol mengalami penurunan hingga tahun ke-10 sebesar 9.8%. Penurunan tersebut dipengaruhi oleh adanya kematian alami berupa penutupan akun dan telah berhenti menggunakan media sosial. Selain itu, adanya individu yang telah kehilangan minat dan berhenti menyebarkan rumor sehingga menjadi individu *removed*. Selanjutnya, jumlah populasi individu *infected* juga mengalami penurunan setelah diberi kontrol. Penurunan terjadi hingga tahun ke-10 sebesar 2.1%. Perubahan yang terjadi pada jumlah populasi individu *infected* sebelum dan sesudah dikontrol disebabkan oleh individu *infected* yang diberikan kontrol berupa penekanan akun terhubung pada individu *infected*.

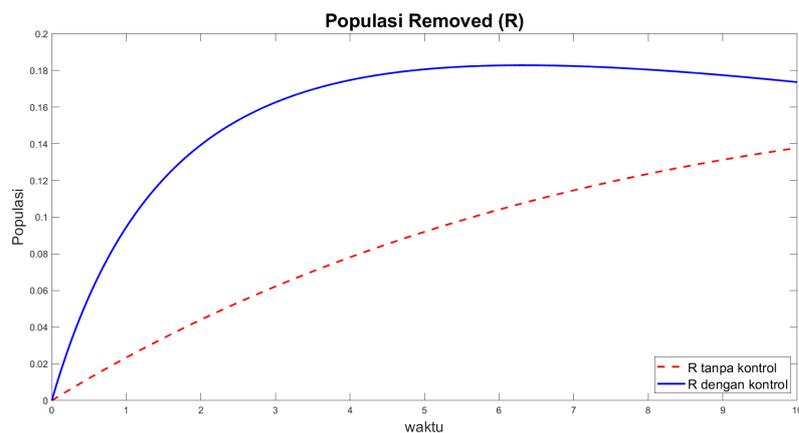
3. Populasi *Marketing*



Gambar 4.5 Perbandingan Perubahan Jumlah Populasi *Marketing* Tanpa dan dengan Kontrol

Berdasarkan Gambar 4.5 diketahui bahwa jumlah populasi individu *marketing* tanpa kontrol mengalami penurunan hingga tahun ke-10 sebesar 1.5%. Penurunan tersebut dipengaruhi oleh adanya kematian alami berupa penutupan akun dan telah berhenti menggunakan media sosial. Selain itu, adanya individu yang telah kehilangan minat dan berhenti menyebarkan rumor sehingga menjadi individu *removed*. Selanjutnya, jumlah populasi individu *marketing* juga mengalami penurunan setelah diberi kontrol. Penurunan terjadi hingga tahun ke-10 sebesar 0.6%. Perubahan yang terjadi pada jumlah populasi individu *marketing* sebelum dan sesudah dikontrol disebabkan oleh individu *marketing* yang diberikan kontrol berupa penekanan akun tidak terhubung pada individu *marketing*.

4. Populasi *Removed*

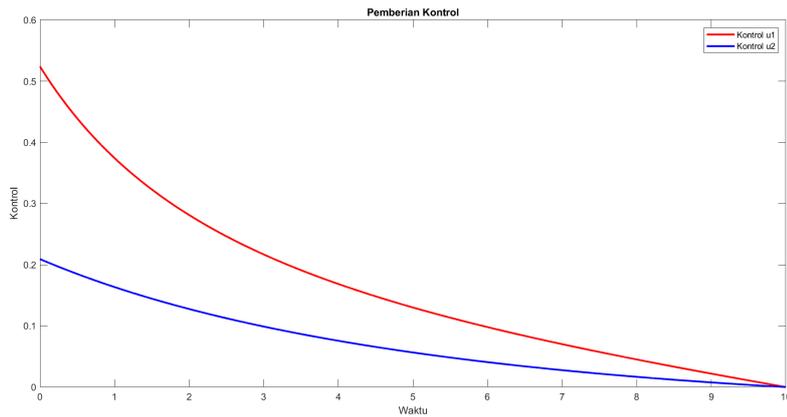


Gambar 4.6 Perbandingan Perubahan Jumlah Populasi *Removed* Tanpa dan dengan Kontrol

Berdasarkan Gambar 4.6 diketahui bahwa jumlah populasi individu *removed* sebelum dikontrol mengalami peningkatan hingga tahun ke-10 sebesar 13%. Peningkatan tersebut dipengaruhi oleh adanya individu *infected* dan *marketing* yang

berhenti dan telah kehilangan minat menyebarkan rumor sehingga menjadi individu *removed*. Selanjutnya, jumlah populasi individu *removed* setelah diberi kontrol juga mengalami peningkatan hingga tahun ke-10 sebesar 17%. Perubahan yang terjadi pada jumlah populasi individu sebelum dan sesudah dikontrol disebabkan oleh individu *infected* dan *marketing* yang diberikan kontrol berupa penekanan pada akun terhubung dan tidak terhubung sehingga individu *infected* dan *marketing* berubah menjadi *removed*.

5. Kontrol optimal yang diberikan (u_1^* dan u_2^*)



Gambar 4.7 Perubahan Pemberian Kontrol

Berdasarkan Gambar 4.7 diperoleh bahwa pemberian kontrol penekanan pada akun terhubung (u_1) yang diberikan pada individu yang mengetahui lalu menyebarkan rumor kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung) memiliki nilai awal sebesar 0.5 yang mengalami penurunan seiring berjalannya waktu. Hal ini menunjukkan bahwa pemberian kontrol tersebut semakin berkurang akibat terdapat individu yang telah berhenti dan kehilangan minat untuk menyebarkan rumor. Sedangkan, pemberian kontrol penekanan pada akun tidak terhubung (u_2) yang diberikan pada individu yang mengetahui lalu menyebarkan rumor kepada orang lain yang tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung) memiliki nilai awal sebesar 0.2 yang mengalami penurunan seiring berjalannya waktu. Penurunan terjadi akibat pemberian kontrol tersebut semakin berkurang karena terdapat individu yang telah berhenti dan kehilangan minat untuk menyebarkan rumor. Perbedaan periode awal pada u_1 dan u_2 disebabkan oleh akun terhubung lebih berpengaruh dalam penyebaran rumor dibandingkan akun tidak terhubung.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diuraikan kesimpulan yang diperoleh dari hasil pembahasan penelitian ini. Selain itu, terdapat juga saran yang dapat digunakan sebagai pengembangan untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan, didapatkan kesimpulan dari Tugas Akhir sebagai berikut

1. Model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas rumor (E_0) dan titik kesetimbangan endemik (E_1). Kestabilan sistem disekitar titik kesetimbangan bebas rumor dianalisis dengan menggunakan nilai eigen dan diperoleh bahwa sistem bersifat stabil asimtotik. Hal ini berarti rumor tidak menyebar dalam populasi. Kemudian, kestabilan sistem disekitar titik kesetimbangan endemik dianalisis dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz dan diperoleh bahwa sistem bersifat stabil asimtotik. Hal ini berarti rumor terus menyebar dalam populasi.
2. Analisis pada model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung terbukti memiliki solusi yang positif dan tunggal. Hasil kepositifan pada model ini menunjukkan bahwa terdapat individu disetiap populasi serta memiliki solusi tunggal. Kemudian, analisis pada kontrol optimal juga terbukti eksis yang selanjutnya dicari menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Eksistensi menunjukkan bahwa kontrol yang diberikan pada model ini dapat meminimumkan penyebaran rumor melalui akun terhubung dan tidak terhubung.
3. Pemberian kontrol pada model penyebaran rumor berdasarkan akun terhubung dan tidak terhubung bertujuan untuk meminimalkan jumlah individu yang menyebarkan rumor (*infected* dan *marketing*) dengan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin. Sebelum dilakukan pemberian kontrol, terlebih dahulu dianalisis eksistensi kontrol optimal sistem dan pada hasil analisis terbukti eksis. Kontrol yang diberikan berupa u_1 yaitu penekanan akun terhubung untuk individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung) (*infected*) dan kontrol u_2 yaitu penekanan akun tidak terhubung untuk individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada orang lain atau tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung) (*marketing*).
4. Hasil simulasi menunjukkan bahwa dengan pemberian kontrol berupa penekanan akun terhubung terhadap populasi individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung), dan penekanan akun tidak terhubung terhadap populasi individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada orang yang tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung) mengalami penurunan seiring berjalannya waktu. Hal ini

mengakibatkan populasi individu yang tidak mengetahui adanya rumor namun rentan karena pengguna media sosial, dan populasi individu yang telah kehilangan minat dan berhenti menyebarkan rumor mengalami kenaikan yang lebih cepat. Sehingga pemberian kontrol optimal dapat mengurangi penyebaran rumor yang dilakukan oleh populasi individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung), dan penekanan akun tidak terhubung terhadap populasi individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada orang yang tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung). Namun, karena akun terhubung lebih berpengaruh dalam penyebaran rumor sehingga pemberian kontrol terhadap populasi individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada teman yang saling mengikuti (akun terhubung) lebih besar daripada pemberian kontrol terhadap populasi individu yang mengetahui adanya rumor dan menyebarkan kepada orang yang tidak saling mengikuti (akun tidak terhubung).

5.2 Saran

Adapun yang dapat disarankan dari penelitian ini adalah pada penelitian selanjutnya dapat dikembangkan metode kontrol optimal selain yang dibahas pada penelitian ini dengan data yang lebih aktual. Selain itu, karena dalam penelitian ini terdapat dua kontrol optimal, sehingga dapat disarankan juga dilakukan pengujian pada setiap kontrol untuk perbandingan kontrol yang lebih efektif.

DAFTAR PUSTAKA

- Annur, C. M. (2023). *Media Sosial, Sumber Informasi Utama Masyarakat Indonesia*. <https://databoks.katadata.co.id/datapublish/2023/05/30/media-sosial-sumber-informasi-utama-masyarakat-indonesia>. (diakses pada 23 Januari 2024)
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis (vol. 2)*. Wiley New York.
- Bora, N. R., Burkholder, D., & dan Sarah Tschirhart, N. M. (2024). *Chemical process dynamics and controls*. University of Michigan.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2010). *Numerical methods for engineers*. Mcgraw-hill.
- Chen, X., & Liu, B. (2010). Existence and uniqueness theorem for uncertain differential equations. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 9, 69-81.
- Daley, D. J., & Kendall, D. G. (1965). Stochastic Rumours. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1(1), 42-55.
- Fajri, N. (2023). *Hoaks Merajalela? Jangan Sampai Kamu Jadi Korbannya!* <https://www.djkn.kemenkeu.go.id/kpkn1-tangerang1/baca-artikel/15915/Hoaks-Merajalela-Jangan-Sampai-Kamu-Jadi-Korbannya.html>. (diakses pada 23 Januari 2024)
- Fleming, W. H., & Rishel, R. W. (1975). *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer Science Business Media.
- Idayani, D., & Subchan. (2020). Optimal control of multi-supplier inventory management with lead time. *International Journal of Computing Science and Applied Mathematics*, 6(1), 23-32.
- Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications (vol. 17)*. John Wiley Sons.
- Maulina, D. A. (2022). *Analisis dan kontrol optimal model seir pada penyebaran rumor dengan kendali sosialisasi dan hukuman (studi kasus: Mahasiswa its)* (Unpublished doctoral dissertation). Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Naidu, D. S. (2002). *Optimal control systems*. USAH: CRC Press LLC.
- Perko, L. (2000). *Differential equations and dynamical systems*. New York: Springer.
- Rahmadhania, I., & Arif, D. K. (2020). Kontrol optimal pada model penyebaran virus influenza tipe a h1n1 dengan menggunakan prinsip minimum ponyryagin. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 17(1), 67-81.
- Reportal, D. (2024). *DIGITAL 2024: INDONESIA*. <https://datareportal.com/reports/digital-2024-indonesia>. (diakses pada 20 Juni 2024)
- Rusmarlina, V. N. O. (2023). Analisis kestabilan dan penerapan kontrol optimal pada model penyebaran rumor melalui liputan media. *Jurnal Ilmiah Matematika*, 11(1), 35-48.
- Subiono. (2023). *Sistem linear dan kontrol optimal*. Departemen Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Tuy, H. (1998). *Convex analysis and global optimization*. Springer.

- Yu, Y., Liu, J., Ren, J., & Xiao, C. (2022). Stability analysis and optimal control of a rumor propagation model based on two communication modes: Friends and marketing account pushing. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 19(5), 4407-4428.
- Zhu, H., & Ma, J. (2019). Analysis of shir rumor propagation in random heterogeneous networks with dynamic friendships. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 513, 257-271.
- Zhu, L., Liu, M., & Li, Y. (2019). The dynamics analysis of a rumor propagation model in online social networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 520, 118-137.

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 *Source Code Matlab*

```
1 function y = codeeee(A, Q, alpha1, alpha2, d, q, beta, gamma,
   a1, a2, b1, b2)
2 TP =100;
3 A = 0.4;
4 Q = 0.05;
5 alpha1 = 0.1;
6 alpha2 = 0.1;
7 q = 0.1;
8 gamma = 0.1;
9 beta = 0.1;
10 d = 0.04;
11 a1 = 1/3;
12 a2 = 1/3;
13 b1 = 1/3;
14 b2 = 1/3;
15 test = -1;
16 delta = 0.00000001;
17 N = 10000;
18 t = linspace(0,10,N+1);
19 t0 = 0;
20 tf = 10;
21 h = (tf-t0)/N;
22 h2 = h/2;
23 S0 = 0.499;
24 I0 = 0.2;
25 M0 = 0.05;
26 R0 = 0.0;
27
28 %% Without Control
29 % Initial Value
30 Swc = zeros(1,N+1);
31 Iwc = zeros(1,N+1);
32 Mwc = zeros(1,N+1);
33 Rwc = zeros(1,N+1);
34
35 %Initial value of population
36 Swc(1) = S0;
37 Iwc(1) = I0;
38 Mwc(1) = M0;
39 Rwc(1) = R0;
40
```

```

41 %Solve Runge Kutte 4th order
42 for i=1:N
43     K11 = A*(1-Swc(i)-Iwc(i)-Mwc(i)-Rwc(i)) - alpha1*Swc(i)*
         Iwc(i) - alpha2*Mwc(i)*Swc(i) - d*Swc(i);
44     K21 = alpha1*Swc(i)*Iwc(i) + alpha2*Mwc(i)*Swc(i) - q*Iwc
         (i) - gamma*Q*Iwc(i) - d*Iwc(i);
45     K31 = gamma*Q*Iwc(i) - beta*Mwc(i) - d*Mwc(i);
46     K41 = q*Iwc(i) + beta*Mwc(i) -d*Rwc(i);
47     K1 = [K11;K21;K31;K41];
48
49     K12 = A*(1-(Swc(i)+h2*K11)-(Iwc(i)+h2*K21)-(Mwc(i)+h2*K31
         )-(Rwc(i)+h2*K41)) - alpha1*(Swc(i)+h2*K11)*(Iwc(i)+h2
         *21) - alpha2*(Mwc(i)+h2*K31)*(Swc(i)+h2*K11) - d*(Swc
         (i)+h2*K11);
50     K22 = alpha1*(Swc(i)+h2*K11)*(Iwc(i)+h2*K21) + alpha2*(
         Mwc(i)+h2*K31)*(Swc(i)+h2*K11) - q*(Iwc(i)+h2*K21) -
         gamma*Q*(Iwc(i)+h2*K21) - d*(Iwc(i)+h2*K21);
51     K32 = gamma*Q*(Iwc(i)+h2*K21) - beta*(Mwc(i)+h2*K31) - d
         *(Mwc(i)+h2*K31);
52     K42 = q*(Iwc(i)+h2*K21) + beta*(Mwc(i)+h2*K31) -d*(Rwc(i)
         +h2*K41);
53     K2 = [K12;K22;K32;K42];
54
55     K13 = A*(1-(Swc(i)+h2*K12)-(Iwc(i)+h2*K22)-(Mwc(i)+h2*K32
         )-(Rwc(i)+h2*K42)) - alpha1*(Swc(i)+h2*K12)*(Iwc(i)+h2
         *22) - alpha2*(Mwc(i)+h2*K32)*(Swc(i)+h2*K12) - d*(Swc
         (i)+h2*K12);
56     K23 = alpha1*(Swc(i)+h2*K12)*(Iwc(i)+h2*K22) + alpha2*(
         Mwc(i)+h2*K32)*(Swc(i)+h2*K12) - q*(Iwc(i)+h2*K22) -
         gamma*Q*(Iwc(i)+h2*K22) - d*(Iwc(i)+h2*K22);
57     K33 = gamma*Q*(Iwc(i)+h2*K22) - beta*(Mwc(i)+h2*K32) - d
         *(Mwc(i)+h2*K32);
58     K43 = q*(Iwc(i)+h2*K22) + beta*(Mwc(i)+h2*K32) -d*(Rwc(i)
         +h2*K42);
59     K3 = [K13;K23;K33;K43];
60
61     K14 = A*(1-(Swc(i)+h*K13)-(Iwc(i)+h*K23)-(Mwc(i)+h*K33)-(
         Rwc(i)+h*K43)) - alpha1*(Swc(i)+h*K13)*(Iwc(i)+h*23) -
         alpha2*(Mwc(i)+h*K33)*(Swc(i)+h*K13) - d*(Swc(i)+h*
         K13);
62     K24 = alpha1*(Swc(i)+h*K13)*(Iwc(i)+h*K23) + alpha2*(Mwc(
         i)+h*K33)*(Swc(i)+h*K13) - q*(Iwc(i)+h*K23) - gamma*Q
         *(Iwc(i)+h*K23) - d*(Iwc(i)+h*K23);
63     K34 = gamma*Q*(Iwc(i)+h*K23) - beta*(Mwc(i)+h*K33) - d*(
         Mwc(i)+h*K33);
64     K44 = q*(Iwc(i)+h*K23) + beta*(Mwc(i)+h*K33) -d*(Rwc(i)+h
         *K43);

```

```

65     K4 = [K14;K24;K34;K44];
66
67     Swc(i+1) = Swc(i)+h/6*(K11+2*K12+2*K13+K14);
68     Iwc(i+1) = Iwc(i)+h/6*(K21+2*K22+2*K23+K24);
69     Mwc(i+1) = Mwc(i)+h/6*(K31+2*K32+2*K33+K34);
70     Rwc(i+1) = Rwc(i)+h/6*(K41+2*K42+2*K43+K44);
71 end
72
73 %Initial value to construct a vector sequence
74 u1 = zeros(1,N+1);
75 u2 = zeros(1,N+1);
76 S = zeros(1,N+1);
77 I = zeros(1,N+1);
78 M = zeros(1,N+1);
79 R = zeros(1,N+1);
80 L1 = zeros(1,N+1);
81 L2 = zeros(1,N+1);
82 L3 = zeros(1,N+1);
83 L4 = zeros(1,N+1);
84
85 %Initial value of population
86 S(1) = S0;
87 I(1) = I0;
88 M(1) = M0;
89 R(1) = R0;
90 %Solve Runge Kutte 4th order
91 while test < 0
92     oldu1 = u1;
93     oldu2 = u2;
94     oldS = S;
95     oldI = I;
96     oldM = M;
97     oldR = R;
98     oldL1 = L1;
99     oldL2 = L2;
100    oldL3 = L3;
101    oldL4 = L4;
102
103 %% Solve state
104 for i=1:N
105     K11 = A - A*S(i) - A*I(i) - A*M(i) - A*R(i) - alpha1*S(i)
        *I(i) - alpha2*M(i)*S(i) - d*S(i);
106     K21 = alpha1*S(i)*I(i) + alpha2*M(i)*S(i) - q*I(i) -
        gamma*Q*I(i) - d*I(i) - u1(i)*I(i);
107     K31 = gamma*Q*I(i) - beta*M(i) - d*M(i) - u2(i)*M(i);
108     K41 = q*I(i) + beta*M(i) -d*R(i) + u1(i)*I(i) + u2(i)*M(i)
        );

```

```

109 K1 = [K11;K21;K31;K41];
110
111 K12 = A - A*(S(i)+h2*K11) - A*(I(i)+h2*K21) - A*(M(i)+h2*
      K31) - A*(R(i)+h2*K41) - alpha1*(S(i)+h2*K11)*(I(i)+h2
      *21) - alpha2*(M(i)+h2*K31)*(S(i)+h2*K11) - d*(S(i)+h2
      *K11);
112 K22 = alpha1*(S(i)+h2*K11)*(I(i)+h2*K21) + alpha2*(M(i)+
      h2*K31)*(S(i)+h2*K11) - q*(I(i)+h2*K21) - gamma*Q*(I(i)
      )+h2*K21) - d*(I(i)+h2*K21) - (u1(i+1)+u1(i))/2*(I(i)+
      h2*K21);
113 K32 = gamma*Q*(I(i)+h2*K21) - beta*(M(i)+h2*K31) - d*(M(i)
      )+h2*K31) - (u2(i+1)+u2(i))/2*(M(i)+h2*K31);
114 K42 = q*(I(i)+h2*K21) + beta*(M(i)+h2*K31) -d*(R(i)+h2*
      K41) + (u1(i)+u1(i+1))/2*(I(i)+h2*K21) + (u2(i)+u2(i
      +1))/2*(M(i)+h2*K31);
115 K2 = [K12;K22;K32;K42];
116
117 K13 = A - A*(S(i)+h2*K12) - A*(I(i)+h2*K22) - A*(M(i)+h2*
      K32) - A*(R(i)+h2*K42) - alpha1*(S(i)+h2*K12)*(I(i)+h2
      *22) - alpha2*(M(i)+h2*K32)*(S(i)+h2*K12) - d*(S(i)+h2
      *K12);
118 K23 = alpha1*(S(i)+h2*K12)*(I(i)+h2*K22) + alpha2*(M(i)+
      h2*K32)*(S(i)+h2*K12) - q*(I(i)+h2*K22) - gamma*Q*(I(i)
      )+h2*K22) - d*(I(i)+h2*K22) - (u1(i+1)+u1(i))/2*(I(i)+
      h2*K22);
119 K33 = gamma*Q*(I(i)+h2*K22) - beta*(M(i)+h2*K32) - d*(M(i)
      )+h2*K32) - (u2(i+1)+u2(i))/2*(M(i)+h2*K32);
120 K43 = q*(I(i)+h2*K22) + beta*(M(i)+h2*K32) -d*(R(i)+h2*
      K42) + (u1(i)+u1(i+1))/2*(I(i)+h2*K22) + (u2(i)+u2(i
      +1))/2*(M(i)+h2*K32);
121 K3 = [K13;K23;K33;K43];
122
123 K14 = A - A*(S(i)+h*K13) - A*(I(i)+h*K23) - A*(M(i)+h*K33
      ) - A*(R(i)+h*K43) - alpha1*(S(i)+h*K13)*(I(i)+h*23) -
      alpha2*(M(i)+h*K33)*(S(i)+h*K13) - d*(S(i)+h*K13);
124 K24 = alpha1*(S(i)+h*K13)*(I(i)+h*K23) + alpha2*(M(i)+h*
      K33)*(S(i)+h*K13) - q*(I(i)+h*K23) - gamma*Q*(I(i)+h*
      K23) - d*(I(i)+h*K23) - u1(i+1)*(I(i)+h*K23);
125 K34 = gamma*Q*(I(i)+h*K23) - beta*(M(i)+h*K33) - d*(M(i)+
      h*K43) - u2(i+1)*(M(i)+h*K33);
126 K44 = q*(I(i)+h*K23) + beta*(M(i)+h*K33) -d*(R(i)+h*K43)
      + u1(i+1)*(I(i)+h*K23) + u2(i+1)*(M(i)+h*K33);
127 K4 = [K14;K24;K34;K44];
128
129 S(i+1) = S(i)+h/6*(K11+2*K12+2*K13+K14);
130 I(i+1) = I(i)+h/6*(K21+2*K22+2*K23+K24);
131 M(i+1) = M(i)+h/6*(K31+2*K32+2*K33+K34);

```

```

132     R(i+1) = R(i)+h/6*(K41+2*K42+2*K43+K44);
133 end
134
135 %% Solve costate
136 for i = 1:N
137     j = N+2-i;
138     L11 = A*L1(j) + alpha1*I(j)*L1(j) + alpha2*M(j)*L1(j) +
        d*L1(j) - alpha1*I(j)*L2(j) - alpha2*M(j)*L2(j);
139     L21 = - a1 + A*L1(j) + alpha1*S(j)*L1(j) - alpha1*S(j)*L2
        (j) + gamma*Q*L2(j) + q*L2(j) + d*L2(j) + u1(j)*L2(j)-
        gamma*Q*L3(j) - q*L4(j) - u1(j)*L4(j);
140     L31 = - a2 + A*L1(j) + alpha2*S(j)*L1(j) - alpha2*S(j)*L2
        (j) + beta*L3(j) + d*L3(j) + u2(j)*L3(j) - beta*L4(j)
        - u2(j)*L4(j);
141     L41 = A*L1(j) + d*L4(j);
142
143     L12 = A*(L1(j)-h2*L11) + alpha1*(I(j)+I(j-1))/2*(L1(j)-h2
        *L11) + alpha2*(M(j) + M(j-1))/2*(L1(j)-h2*L11) + d*(
        L1(j)-h2*L11) - alpha1*(I(j)+I(j-1))/2*(L2(j)-h2*L21)
        - alpha2*(M(j)+M(j-1))/2*(L2(j)-h2*L21);
144     L22 = - a1 + A*(L1(j)-h2*L11) + alpha1*(S(j)+S(j-1))/2*(
        L1(j)-h2*L11) - alpha1*(S(j)+S(j-1))/2*(L2(j)-h2*L21)
        + gamma*Q*(L2(j)-h2*L21) + q*(L2(j)-h2*L21) + d*(L2(j)
        -h2*L21) + (u1(j)+u1(j-1))/2*(L2(j)-h2*L21) - gamma*Q*(
        L3(j)-h2*L31) - q*(L4(j)-h2*L41) - (u1(j)+u1(j-1))/2*(
        L4(j)-h2*L41);
145     L32 = - a2 + A*(L1(j)-h2*L11) + alpha2*(S(j)+S(j-1))/2*(
        L1(j)-h2*L11) - alpha2*(S(j)+S(j-1))/2*(L2(j)-h2*L21)
        + beta*(L3(j)-h2*L31) + d*(L3(j)-h2*L31) + (u2(j)+u2(j
        -1))/2*(L3(j)-h2*L31) - beta*(L4(j)-h2*L41) - (u2(j)+
        u2(j-1))/2*(L4(j)-h2*L41);
146     L42 = A*(L1(j)-h2*L11) + d*(L4(j)-h2*L41);
147
148     L13 = A*(L1(j)-h2*L12) + alpha1*(I(j)+I(j-1))/2*(L1(j)-h2
        *L12) + alpha2*(M(j) + M(j-1))/2*(L1(j)-h2*L12) + d*(
        L1(j)-h2*L12) - alpha1*(I(j)+I(j-1))/2*(L2(j)-h2*L22)
        - alpha2*(M(j)+M(j-1))/2*(L2(j)-h2*L22);
149     L23 = - a1 + A*(L1(j)-h2*L12) + alpha1*(S(j)+S(j-1))/2*(
        L1(j)-h2*L12) - alpha1*(S(j)+S(j-1))/2*(L2(j)-h2*L22)
        + gamma*Q*(L2(j)-h2*L22) + q*(L2(j)-h2*L22) + d*(L2(j)
        -h2*L22) + (u1(j)+u1(j-1))/2*(L2(j)-h2*L22) - gamma*Q*(
        L3(j)-h2*L32) - q*(L4(j)-h2*L42) - (u1(j)+u1(j-1))/2*(
        L4(j)-h2*L42);
150     L33 = - a2 + A*(L1(j)-h2*L12) + alpha2*(S(j)+S(j-1))/2*(
        L1(j)-h2*L12) - alpha2*(S(j)+S(j-1))/2*(L2(j)-h2*L22)
        + beta*(L3(j)-h2*L32) + d*(L3(j)-h2*L32) + (u2(j)+u2(j
        -1))/2*(L3(j)-h2*L32) - beta*(L4(j)-h2*L42) - (u2(j)+

```

```

    u2(j-1))/2*(L4(j)-h2*L42);
151 L43 = A*(L1(j)-h2*L12) + d*(L4(j)-h2*L42);
152
153 L14 = A*(L1(j)-h*L13) + alpha1*(I(j)+I(j-1))/2*(L1(j)-h*
    L13) + alpha2*(M(j) + M(j-1))/2*(L1(j)-h*L13) + d*(L1(
    j)-h*L13) - alpha1*(I(j)+I(j-1))/2*(L2(j)-h*L23) -
    alpha2*(M(j)+M(j-1))/2*(L2(j)-h*L23);
154 L24 = - a1 + A*(L1(j)-h*L13) + alpha1*(S(j)+S(j-1))/2*(L1
    (j)-h*L13) - alpha1*(S(j)+S(j-1))/2*(L2(j)-h*L23) +
    gamma*Q*(L2(j)-h*L23) + q*(L2(j)-h*L23) + d*(L2(j)-h*
    L23) + u1(j-1)*(L2(j)-h*L23) - gamma*Q*(L3(j)-h*L33) -
    q*(L4(j)-h*L43) - u1(j-1)/2*(L4(j)-h*L43);
155 L34 = - a2 + A*(L1(j)-h*L13) + alpha2*(S(j)+S(j-1))/2*(L1
    (j)-h*L13) - alpha2*(S(j)+S(j-1))/2*(L2(j)-h*L23) +
    beta*(L3(j)-h*L33) + d*(L3(j)-h*L33) + u2(j-1)*(L3(j)-
    h*L33) - beta*(L4(j)-h*L43) - u2(j-1)*(L4(j)-h*L43);
156 L44 = A*(L1(j)-h*L13) + d*(L4(j)-h*L43);
157
158 L1(j-1) = L1(j)-h/6*(L11+2*L12+2*L13+L14);
159 L2(j-1) = L2(j)-h/6*(L21+2*L22+2*L23+L24);
160 L3(j-1) = L3(j)-h/6*(L31+2*L32+2*L33+L34);
161 L4(j-1) = L4(j)-h/6*(L41+2*L42+2*L43+L44);
162 end
163
164 y1 = (L2-L4).*I/b1;
165 y2 = (L3-L4).*M/b2;
166 z1 = min([max([y1;zeros(1,N+1)]); ones(1,N+1)]);
167 z2 = min([max([y2;zeros(1,N+1)]); ones(1,N+1)]);
168 u1 = 0.5*(z1+oldu1);
169 u2 = 0.5*(z2+oldu2);
170 test = delta*(sum(abs(u1))+sum(abs(u2)))-(sum(abs(u1-oldu1))+
    sum(abs(u2-oldu2)))
171 end
172
173 figure(1);
174 plot(t, Swc, 'r--','LineWidth',2); hold on;
175 plot(t, S, 'b-','LineWidth',2);
176 lgd = legend('S tanpa kontrol', 'S dengan kontrol');
177 lgd.FontSize = 14;
178 title('Populasi Susceptible (S)','FontSize',20);
179 xlabel('Waktu','FontSize',16);
180 ylabel('Populasi','FontSize',16);
181
182 figure(2);
183 plot(t, Iwc, 'r--','LineWidth',2); hold on;
184 plot(t, I, 'b-','LineWidth',2);
185 lgd=legend('I tanpa kontrol', 'I dengan kontrol');

```

```

186 lgd.FontSize = 14;
187 title('Populasi Infected (I)', 'FontSize', 20);
188 xlabel('Waktu', 'FontSize', 16);
189 ylabel('Populasi', 'FontSize', 16);
190
191 figure(3);
192 plot(t, Mwc, 'r--', 'LineWidth', 2); hold on;
193 plot(t, M, 'b-', 'LineWidth', 2);
194 lgd = legend('M tanpa kontrol', 'M dengan kontrol');
195 lgd.FontSize = 14;
196 title('Populasi Marketing (M)', 'FontSize', 20);
197 xlabel('Waktu', 'FontSize', 16);
198 ylabel('Populasi', 'FontSize', 16);
199
200 figure(4);
201 plot(t, Rwc, 'r--', 'LineWidth', 2); hold on;
202 plot(t, R, 'b-', 'LineWidth', 2);
203 lgd = legend('R tanpa kontrol', 'R dengan kontrol');
204 lgd.FontSize = 14;
205 title('Populasi Removed (R)', 'FontSize', 20);
206 xlabel('waktu', 'FontSize', 16);
207 ylabel('Populasi', 'FontSize', 16);
208
209 figure(5);
210 plot(t, u1, 'r-', 'LineWidth', 2); hold on;
211 plot(t, u2, 'b-', 'LineWidth', 2);
212 legend('Kontrol u1', 'Kontrol u2');
213 title('Pemberian Kontrol');
214 xlabel('Waktu');
215 ylabel('Kontrol');

```


UCAPAN TERIMA KASIH

Penyelesaian penulisan tugas akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis yang telah mendukung dan memotivasi penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Saudara kandung penulis yang selalu memberikan semangat dan selalu menjadi penghibur bagi penulis.
2. Mas Alvian Alif Hidayatullah yang telah membimbing dan banyak membantu dalam pengerjaan Tugas Akhir ini.
3. Emma, Faizah, Fathimah, Lia, dan Yeni selaku sahabat penulis yang telah menemani kehidupan perkuliahan yang selalu berbagi suka dan duka bersama serta memberikan dukungan dan semangat untuk penulis.
4. Ela, Enji, Yohana, Niken, Renanda, Aufar, dan Rizki selaku teman satu bimbingan penulis yang telah membantu dan memberikan semangat dalam pengerjaan Tugas Akhir.
5. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah memberikan doa dan dukungan dalam bentuk apapun kepada penulis.

Penulis juga mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari berbagai pihak untuk penyempurnaan isi tugas akhir ini. Akhir kata, semoga tugas akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang bersangkutan.

Surabaya, 30 Juli 2024

Aisyah Fitri

BIODATA PENULIS



Nama lengkap penulis Aisyah Fitri, lahir di Serui pada tanggal 19 Januari 2002. Sebelum menempuh bangku perkuliahan, penulis memulai pendidikan formal mulai dari TK Darussalam (2006-2008), MI Darussalam (2008-2014), SMP Negeri 1 Serui (2014-2017), dan SMA Negeri 1 Serui (2017-2020). Pada tahun 2020, penulis meneruskan pendidikan ke jenjang Strata-1 di Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya, melalui jalur SNMPTN dengan nomor registrasi peserta (NRP) 5002201004. Dimasa perkuliahan penulis aktif dalam organisasi dan kepanitiaan yaitu menjadi Staff Jaringan dan Media di Lembaga Kajian Kerohanian Islam (LKKI) Departemen Matematika ITS (2022), Staff Eksternal di Olimpiade Matematika ITS (OMITS) 15th (2022), Staff Creative Design di Olimpiade Matematika ITS (OMITS) 16th (2023), serta Staff Publikasi di SEMARAK IBNU MUQLAH (2021).

Selama di Departemen Matematika, penulis saat menjalani kuliah lebih dominan mengambil Bidang Studi Pemodelan dan Simulasi. Adapun informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditunjukkan ke penulis melalui email aisyahf636@gmail.com