



TESIS - SM235401

SOLUSI NUMERIK OPSI CURAH HUJAN DI JAWA TIMUR

**ELISABETH YEYEN SETYORINI
6002221015**

Dosen Pembimbing
Endah R. M. Putri, S.Si., M.T., Ph.D

Program Studi Magister
Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2024



TESIS - SM235401

**SOLUSI NUMERIK OPSI CURAH HUJAN DI JAWA
TIMUR**

**ELISABETH YEYEN SETYORINI
6002221015**

**Dosen Pembimbing
Endah R. M. Putri, S.Si., M.T., Ph.D**

**Program Studi Magister
Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2024**



THESIS - SM235401

**NUMERICAL SOLUTION FOR RAINFALL
OPTIONS IN EAST JAVA**

**ELISABETH YEYEN SETYORINI
6002221015**

**Supervisor
Endah R. M. Putri, S.Si., M.T., Ph.D**

**Master's Degree Program
Departement of Mathematics
Faculty of Scientics
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
2024**

LEMBAR PENGESAHAN TESIS

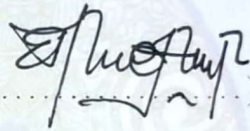
Telah disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Matematika (M.Mat)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Oleh:

ELISABETH YEYEN SETYORINI
NRP: 6002221015

Tanggal Ujian: 25 Juli 2024
Periode Wisuda: September 2024


Disetujui oleh:
Pembimbing:

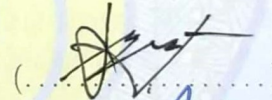
1. Endah R. M. Putri, S.Si., M.T., Ph.D
NIP. 19761213 200212 2 001

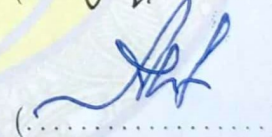

(.....)

Penguji:

1. Prof. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp
NIP. 19611115 198703 1 003
2. Dr. Drs. Bandung Arry S., M.I.Komp
NIP. 19630605 198903 1 003
3. Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si., M.T.
NIP. 19710928 199802 2 001


(.....)


(.....)


(.....)



SURAT PERNYATAAN KEASLIAN TESIS

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Elisabeth Yeyen Setyorini
NRP : 6002221015
Program Studi : S2 Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa isi sebagian maupun keseluruhan Tesis saya yang berjudul:

“SOLUSI NUMERIK OPSI CURAH HUJAN DI JAWA TIMUR”

adalah benar-benar hasil karya intelektual mandiri, diselesaikan tanpa menggunakan bahan-bahan yang tidak diizinkan dan bahan karya pihak lain yang saya akui sebagai karya mandiri.

Semua referensi yang dikutip maupun dirujuk telah ditulis secara lengkap pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari diketahui terjadi penyimpangan dari pernyataan yang saya buat, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Surabaya, 30 Juli 2024
Mahasiswa,



Elisabeth Yeyen Setyorini
NRP. 6002221015

SOLUSI NUMERIK OPSI CURAH HUJAN DI JAWA TIMUR

Nama Mahasiswa : Elisabeth Yeyen Setyorini
NRP : 6002221015
Dosen Pembimbing : Endah R. M. Putri, S.Si., M.T., Ph.D

ABSTRAK

Jawa Timur merupakan salah satu provinsi yang mengalami adanya perubahan iklim serta cuaca. Salah satu fenomena yang terjadi ialah tingginya curah hujan. Terjadinya curah hujan tinggi serta berkepanjangan dapat menyebabkan bencana alam, salah satunya banjir. Hal tersebut dapat memberikan dampak kerugian finansial dalam kehidupan manusia, sehingga diperlukan pengelolaan risiko yang tepat. Produk keuangan berbentuk derivatif menjadi jawaban yang tepat bagi permasalahan tersebut. Opsi curah hujan merupakan produk keuangan derivatif yang memberikan lindung nilai terhadap risiko cuaca dengan aset dasar curah hujan. Oleh karena kondisi tersebut, Tesis ini membahas mengenai valuasi opsi berbasis curah hujan. Pada bagian awal dilakukan modifikasi model stokastik curah hujan yang mengikuti proses Ornstein-Uhlenbeck dilanjutkan dengan valuasi harga opsi *call* tipe Eropa untuk kasus curah hujan berlebih (*rainfall excess*). Valuasi harga opsi dilakukan dengan menyelesaikan persamaan diferensial parsial menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Parameter-parameter di dalamnya, diestimasi berdasarkan data curah hujan di Jawa Timur. Hasil valuasi menunjukkan bahwa harga opsi cenderung mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya kuantitas curah hujan dan indeks curah hujan *rainfall excess*.

Kata kunci: *Opsi Curah Hujan, Ornstein-Uhlenbeck, Rainfall Excess, Beda Hingga.*

NUMERICAL SOLUTION FOR RAINFALL OPTIONS IN EAST JAVA

Student Name : Elisabeth Yeyen Setyorini
NRP : 6002221015
Supervisor : Endah R. M. Putri, S.Si., M.T., Ph.D

ABSTRACT

East Java is one of the provinces experiencing climate and weather changes. One notable phenomenon is the increase in heavy rainfall. The occurrence of continuous and high rainfall can cause natural disasters, one of which is flooding. This can have financial impacts on human life, thus requiring appropriate risk management. Financial products in the form of derivatives are the right answer to this problem. Rainfall options are financial products that provide hedging against weather risks with rainfall as the underlying asset. Due to these circumstances, this Thesis explores the valuation of rainfall-based options. Initially, a stochastic rainfall model following the Ornstein-Uhlenbeck process is modified, followed by the valuation of European call options for the case of rainfall excess. The option pricing is conducted by solving the partial differential equation using the explicit scheme of finite difference method. The parameters involved are estimated based on rainfall data from East Java. The valuation results indicate that the option prices tend to increase with the rise in both the quantity of rainfall and the rainfall excess index.

Keywords: *Rainfall Options, Ornstein-Uhlenbeck, Rainfall Excess, Finite Difference.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Tuhan YME karena atas berkat dan penyertaan-Nya, penulis dapat menyelesaikan Tesis ini sebagai salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Magister Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Tesis ini dapat diselesaikan dengan baik berkat kerja sama dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Sutopo dan Ibu Johana Dyah Susanti sebagai orang tua, serta Elisabeth Pistio Indah Saraswati dan Elisabeth Febriana Kurnia Santi sebagai saudara yang selalu mendoakan dan memotivasi penulis agar dapat menyelesaikan Tesis ini.
2. Ibu Endah R. M. Putri, S.Si., M.T., Ph.D selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan serta motivasi kepada penulis selama pengerjaan Tesis.
3. Bapak Prof. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp, Bapak Dr. Drs. Bandung Arry S., M.I.Komp, dan Ibu Dr. Valeriana Lukitosari, S.Si., M.T. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran, sehingga Tesis ini dapat diselesaikan dengan baik.
4. Kepala Departemen Matematika ITS beserta seluruh jajaran yang telah memberikan dukungan selama masa perkuliahan di Departemen Matematika ITS.
5. Kepala Program Studi Pascasarjana Departemen Matematika ITS atas arahan yang diberikan sepanjang masa perkuliahan.
6. Bapak Prof. Dr. Subiono, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan bimbingan.
7. Bapak/Ibu dosen pengajar, tendik dan keluarga besar Departemen Matematika ITS atas segala ilmu dan bantuan yang telah diberikan.

Akhir kata, semoga Tesis ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan dan dapat dijadikan sebagai sarana pengembangan keilmuan di masa mendatang.

Surabaya, 16 Juli 2024

Elisabeth Yeyen Setyorini

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
SURAT PERNYATAAN KEASLIAN TESIS	iii
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR ISTILAH	xvii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	4
1.5 Manfaat	4
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Derivatif Cuaca Berbasis Curah Hujan	7
2.3 Indeks Curah Hujan	7
2.4 Proses Stokastik Ornstein-Uhlenbeck	8
2.5 Opsi Curah Hujan	9
2.6 Feynman-Kac Multivariat	9
2.7 Persamaan Diferensial Parsial untuk Valuasi Harga Opsi	12
2.8 Estimasi Parameter	13
2.8.1 Estimasi Komponen Musiman	13
2.8.2 Estimasi Volatilitas	14
2.8.3 Estimasi Kecepatan <i>Mean-Reversion</i>	15
2.9 Algoritma Gauss-Newton	15
2.10 Interpolasi	16
2.10.1 Interpolasi <i>Linear Spline</i>	16
2.10.2 Interpolasi <i>Quadratic Spline</i>	17
2.10.3 Interpolasi <i>Cubic Spline</i>	18
2.11 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit	18
BAB 3 METODE PENELITIAN	21

BAB 4	HASIL DAN PEMBAHASAN	25
4.1	Praproses Data	25
4.1.1	Pengumpulan Data	25
4.1.2	Interpolasi Data	26
4.2	Modifikasi Model Stokastik Ornstein-Uhlenbeck	27
4.3	Estimasi Komponen Musiman	28
4.3.1	Estimasi $\theta(t)$ dengan Fungsi $\sin(\omega t + \phi)$	28
4.3.2	Estimasi $\theta(t)$ dengan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi <i>sin</i>	30
4.3.3	Estimasi $\theta(t)$ dengan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi <i>cos</i>	36
4.4	Estimasi Volatilitas dan Kecepatan <i>Mean-reversion</i>	40
4.5	Pengolahan Data Tanpa diawali Interpolasi	41
4.6	Validasi Model Ornstein-Uhlenbeck Modifikasi	43
4.7	Solusi Numerik	46
4.7.1	Transformasi Variabel Waktu	46
4.7.2	Diskritisasi Persamaan Diferensial Parsial	47
4.7.3	Valuasi Opsi Curah Hujan Menggunakan Data Curah Hujan yang diinterpolasi	52
4.7.4	Valuasi Opsi Curah Hujan Menggunakan Data Curah Hujan yang Tidak diinterpolasi	58
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	63
5.1	Kesimpulan	63
5.2	Saran	64
	DAFTAR PUSTAKA	65
	DAFTAR LAMPIRAN	67
	Lampiran 1 <i>Script</i> MATLAB untuk Interpolasi	67
	Lampiran 2 <i>Script</i> MATLAB Metode <i>Ordinary Least Square</i>	69
	Lampiran 3 <i>Script</i> MATLAB Algoritma Gauss-Newton untuk Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi <i>sin</i>	70
	Lampiran 4 <i>Script</i> MATLAB Algoritma Gauss-Newton untuk Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi <i>cos</i>	75
	Lampiran 5 <i>Script</i> MATLAB Estimasi <i>Volatilitas</i>	78
	Lampiran 6 <i>Script</i> MATLAB Estimasi <i>Mean-Reversion</i>	79
	Lampiran 7 <i>Script</i> MATLAB Proses Ornstein-Uhlenbeck	80
	Lampiran 8 <i>Script</i> MATLAB Valuasi Opsi <i>Call</i> dengan Metode Beda Hingga Eksplisit	82
	BIOGRAFI PENULIS	87

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Diagram Penelitian.	21
Gambar 4.1	Curah Hujan Bulanan di Jawa Timur (2014-2023) Hasil Interpolasi (a) <i>Linear Spline</i> (b) <i>Quadratic Spline</i> (c) <i>Cubic Spline</i>	26
Gambar 4.2	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang ($\theta(t)$) menggunakan Fungsi $\sin(\omega t + \phi)$	30
Gambar 4.3	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi \sin untuk $n = 2$	32
Gambar 4.4	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi \sin untuk $n = 3$	34
Gambar 4.5	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi \sin untuk $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$	35
Gambar 4.6	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi \sin untuk $n = 10$	35
Gambar 4.7	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi \cos untuk $n = 2$	37
Gambar 4.8	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi \cos untuk $n = 3, 4, 5, 6$	38
Gambar 4.9	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi \cos untuk $n = 7$	39
Gambar 4.10	Data Curah Hujan di Jawa Timur Tanpa Interpolasi.	41
Gambar 4.11	Perbandingan Nilai Rata-Rata Jangka Panjang Curah Hujan $\theta_{10}(t)$ terhadap Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi \sin	42
Gambar 4.12	Hasil Simulasi Ornstein-Uhlenbeck dengan 1.000 Iterasi (a) diawali Interpolasi (b) Tanpa Interpolasi.	43
Gambar 4.13	Hasil Simulasi Ornstein-Uhlenbeck dengan 10.000 Iterasi (a) diawali Interpolasi (b) Tanpa Interpolasi.	44
Gambar 4.14	Hasil Simulasi Ornstein-Uhlenbeck dengan 100.000 Iterasi (a) diawali Interpolasi (b) Tanpa Interpolasi.	45

Gambar 4.15 Skema Beda Hingga Eksplisit untuk Opsi <i>Call</i>	51
Gambar 4.16 Profil 3 Dimensi $V(x, y, T)$ Opsi <i>Call</i> untuk $\tau_0 = 1$ dan $T = 2$	53
Gambar 4.17 Profil 2 Dimensi $V(x, y, T)$ saat $\tau_0 = 1$ dan $T = 2$. (a) Opsi <i>call</i> dengan $x = 30$ (b) Opsi <i>call</i> dengan $y = 100$	54
Gambar 4.18 Pertumbuhan Tanaman Padi Berdasarkan Curah Hujan di Jawa Timur (2014-2023) (a) Jumlah Produksi Tanaman Padi (ton) (b) Curah Hujan (mm).	55
Gambar 4.19 Efek Variasi Pada Waktu Jatuh Tempo (T) (a) Opsi <i>call</i> dengan $x = 30$ (b) Opsi <i>call</i> dengan $y = 100$	56
Gambar 4.20 Efek Variasi Pada Nilai Volatilitas (σ) (a) Opsi <i>call</i> dengan $x = 30$ (b) Opsi <i>call</i> dengan $y = 100$	57
Gambar 4.21 Profil 3 Dimensi $V(x, y, T)$ Opsi <i>Call</i> untuk $\tau_0 = 1$ dan $T = 2$ dengan Data Curah Hujan yang Tidak diinterpolasi.	59
Gambar 4.22 Profil 2 Dimensi $V(x, y, T)$ saat $\tau_0 = 1$ dan $T = 2$ dengan Data Curah Hujan yang Tidak diinterpolasi. (a) Opsi <i>call</i> dengan $x = 30$ (b) Opsi <i>call</i> dengan $y = 100$	59
Gambar 4.23 Efek Variasi Pada Waktu Jatuh Tempo (T) Tanpa Interpolasi (a) Opsi <i>call</i> dengan $x = 30$ (b) Opsi <i>call</i> dengan $y = 100$	60
Gambar 4.24 Efek Variasi Pada Nilai Volatilitas (σ) Tanpa Interpolasi (a) Opsi <i>call</i> dengan $x = 30$ (b) Opsi <i>call</i> dengan $y = 100$	61

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Referensi Utama Pendukung Penelitian.	6
Tabel 4.1	Data Curah Hujan Harian	25
Tabel 4.2	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta(t)$	30
Tabel 4.3	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_2(t)$ menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi <i>sin</i>	31
Tabel 4.4	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_3(t)$ menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi <i>sin</i>	33
Tabel 4.5	Nilai MSE $\theta_n(t)$ untuk Fungsi <i>sin</i>	34
Tabel 4.6	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_{10}(t)$ menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi <i>sin</i>	36
Tabel 4.7	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_2(t)$ menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi <i>cos</i>	37
Tabel 4.8	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_7(t)$ menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi <i>cos</i>	39
Tabel 4.9	Nilai MSE $\theta_n(t)$ untuk Fungsi <i>cos</i>	40
Tabel 4.10	Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_{10}(t)$ menggunakan Deret Fourier <i>Truncated</i> Fungsi <i>sin</i> Tanpa Interpolasi.	42
Tabel 4.11	Parameter-parameter untuk Valuasi Opsi Curah Hujan . . .	52

DAFTAR ISTILAH

Algoritma	: Instruksi yang dirancang secara urut untuk memecahkan permasalahan.
Deret	: Jumlahan suku-suku dari suatu barisan.
Deterministik	: Suatu kejadian yang sudah pasti, artinya tidak melibatkan keacakan.
Domain	: Daerah asal atau himpunan dimana fungsi didefinisikan.
<i>Fitting</i>	: Penyesuaian model dengan data asli, sehingga mampu menggambarkan hubungan antar variabel dalam data.
Interior	: Berhubungan dengan titik yang letaknya dalam domain komputasi.
Iterasi	: Pengulangan yang dilakukan untuk mendapatkan solusi dalam suatu proses komputasi.
Martingale	: Kondisi dimana nilai harapan suatu variabel acak di masa depan sama dengan nilai saat ini.
<i>Mean-reversion</i>	: Kecenderungan nilai untuk kembali ke rata-ratanya setelah mengalami penyimpangan.
Model	: Representasi matematis dari suatu kejadian.
Multivariat	: Hubungan antara dua atau lebih variabel.
<i>Non-catastrophic</i>	: Kondisi tidak terjadi bencana atau kerugian besar.
Parameter	: Ukuran yang menggambarkan suatu model matematis.
Polinomial	: Suatu bentuk matematika yang melibatkan variabel, koefisien, dengan operasinya.
<i>Pseudocode</i>	: Penulisan algoritma dengan bahasa yang mirip dengan pemrograman atau bisa dikatakan kode semu.
Stokastik	: Proses yang melibatkan elemen acak atau tidak pasti.
<i>Truncated</i>	: Terbatas atau terpotong. Dalam Tesis ini, deret Fourier dipotong hingga mendapatkan pendekatan terbaik.
Valuasi	: Penetapan nilai atau harga suatu aset.
Volatilitas	: Ukuran fluktuasi suatu aset dalam rentang waktu tertentu.

BAB 1

PENDAHULUAN

Bab ini memuat latar belakang penulisan Tesis, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, serta manfaat penelitian.

1.1 Latar Belakang

Perubahan iklim dan cuaca menjadi isu kompleks yang sedang marak diperbincangkan di dunia internasional. Terjadinya perubahan iklim dan cuaca dapat diukur dengan beberapa komponen, yaitu suhu, curah hujan, kelembapan udara, kondisi awan, angin, serta radiasi matahari. Suhu serta curah hujan merupakan komponen yang paling berpengaruh (Dyah Susilokarti, 2015). Selama dua dekade pertama abad ke-21 (2001-2020), suhu permukaan global telah meningkat sebesar $0,99 [0,84 \text{ hingga } 1,10]^{\circ}\text{C}$ lebih tinggi dibandingkan tahun 1850-1900. Lebih spesifik lagi, pada tahun 2011-2020 peningkatan lebih besar terjadi di darat ($1,59 [1,34 \text{ hingga } 1,83]^{\circ}\text{C}$) dibandingkan di lautan ($0,88 [0,68 \text{ hingga } 1,01]^{\circ}\text{C}$) (IPCC, 2023).

Indonesia merupakan negara tropis yang memiliki dua musim, yaitu kemarau dan penghujan. Pada wilayah tropis, kenaikan suhu akan diikuti dengan peningkatan intensitas curah hujan akibat dari tingginya penguapan di laut (Chia Chou & Tu, 2009). Peningkatan suhu serta curah hujan yang berkepanjangan tentu bukan hal yang menguntungkan, dengan kata lain perubahan iklim dan cuaca meningkatkan potensi terjadinya bencana alam. Fenomena alam yang terjadi, yaitu kebakaran hutan serta banjir. Hal tersebut tentu juga berdampak terhadap turunnya hasil panen. Dari beberapa kasus ini, dapat dilihat bahwa perubahan iklim memberikan dampak buruk yang berantai. Menurut Badan Nasional Penanggulangan Bencana (BNPB), mulai tahun 2010 hingga 2022 terjadi kenaikan bencana hidrometeorologi sebesar

82% di Indonesia. Persentase tersebut menunjukkan bahwa begitu besar pengaruh perubahan iklim di Indonesia.

Kondisi cuaca yang diterangkan sebelumnya dapat mengakibatkan kerugian finansial yang tidak sedikit. Hal tersebut menjadi risiko yang tidak dapat dihindari, sehingga diperlukan suatu lindung nilai. Produk keuangan yang mampu memberikan perlindungan terhadap risiko cuaca adalah derivatif cuaca. Derivatif cuaca dirancang untuk memberikan ganti rugi ketika terjadi cuaca yang buruk dalam artian berfungsi sebagai lindung nilai terhadap risiko cuaca non-bencana (Ivana Stulec, 2016). Jawa Timur sendiri tidak terhindarkan dari risiko perubahan iklim, dimana salah satunya yaitu tingginya curah hujan. Dalam bidang keuangan tingkat curah hujan selama periode waktu tertentu sangat penting dalam memperkirakan nilai keamanan finansial (Sam Cramer, 2017). Oleh karena itu, dilakukan penelitian untuk membahas mengenai derivatif cuaca dengan aset dasar berupa curah hujan.

Terdapat beberapa teori valuasi derivatif curah hujan. Melanie Cao mengusulkan model valuasi harga untuk derivatif curah hujan. Pendekatan didasarkan pada model curah hujan harian yang menangkap karakteristik paling penting dari presipitasi. Namun Melanie Cao menghitung premi yang wajar dan tidak memperhitungkan harga pasar risiko curah hujan (Melanie Cao, 2004). Gunther Leobacher mengonstruksi model Gamma Markov yang sesuai untuk proses curah hujan dengan memperhitungkan perubahan musiman dari presipitasi dan menunjukkan harga *utility indifference* dengan utilitas eksponensial (Gunther Leobacher, 2011). Shah melakukan simulasi proses curah hujan harian menggunakan *generalized linear models* (GLM) dan melakukan valuasi dengan menggunakan curah hujan harian sebagai aset dasarnya (Shah, 2017).

Melalui peninjauan bahwa indeks curah hujan merupakan faktor utama dalam opsi curah hujan, penulis terlebih dahulu berfokus pada pemodelan curah hujan berdasarkan kondisi di Jawa Timur. Penelitian ini menekankan kondisi *rainfall excess*, sehingga tepat dapat memberikan

gambaran kondisi Jawa Timur yang sedang dalam kondisi curah hujan berlebih. Curah hujan dimodelkan sebagai proses *mean-reverting* Ornstein-Uhlenbeck. Berikutnya, dilakukan valuasi terhadap harga opsi curah hujan berdasarkan data Jawa Timur. Skema yang digunakan adalah beda hingga eksplisit. Penelitian ini diharapkan mampu memberikan kontribusi ilmu, serta valuasi opsi curah hujan yang dilakukan dapat digunakan sebagai salah satu langkah manajemen risiko perubahan iklim, khususnya akibat curah hujan yang tinggi di Jawa Timur.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang diangkat dalam Tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana modifikasi model stokastik curah hujan yang dapat menggambarkan kondisi di Jawa Timur?
2. Bagaimana mendapatkan valuasi harga opsi dengan aset dasar adalah curah hujan?
3. Bagaimana analisis terhadap hasil simulasi?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam Tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Data yang digunakan merupakan data curah hujan bulanan lima daerah di Provinsi Jawa Timur periode Januari 2014 - Desember 2023.
2. Kondisi yang diamati adalah saat curah hujan berlebih (*rainfall excess*).
3. *Software* yang digunakan untuk seluruh simulasi adalah MATLAB 2023a.
4. Parameter harga pasar risiko diasumsikan konstan dengan nilai $\lambda = 0$. Nilai suku bunga serta *tick* yang digunakan secara berturut-turut, yaitu $r = 0,06$ dan $tick = 5$ poin indeks rupiah.
5. Produk derivatif cuaca yang digunakan yaitu opsi tipe Eropa.

1.4 Tujuan

Tujuan yang dicapai dalam Tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Memodifikasi model stokastik dari curah hujan sesuai kondisi di Jawa Timur.
2. Melakukan valuasi opsi dengan aset dasar adalah curah hujan.
3. Melakukan analisis terhadap hasil simulasi.

1.5 Manfaat

Manfaat yang didapatkan pada Tesis ini adalah sebagai berikut:

1. Memperoleh model matematika yang tepat untuk menggambarkan model curah hujan di Jawa Timur.
2. Sebagai langkah manajemen risiko atas perubahan iklim di Jawa Timur.
3. Hasil penelitian ini dapat dijadikan referensi para peneliti untuk mengembangkan ilmu pengetahuan di bidang keuangan khususnya derivatif cuaca.

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini membahas mengenai penelitian terdahulu serta terdapat beberapa teori yang dijadikan dasar pengerjaan Tesis.

2.1 Penelitian Terdahulu

Terdapat banyak penelitian yang membahas mengenai konstruksi model derivatif cuaca serta valuasi harga opsi cuaca. Aset dasar yang dalam kebanyakan penelitian tersebut adalah berupa suhu. Penelitian yang dilakukan penulis membahas mengenai derivatif cuaca dengan curah hujan sebagai aset dasar. Tesis ini menitikberatkan pada kondisi *rainfall excess*, yaitu kondisi curah hujan berlebih. Hal ini disesuaikan dengan kondisi perubahan iklim di Indonesia yang saat ini mengalami fenomena curah hujan yang tinggi. Oleh karena itu, penelitian terdahulu yang dibahas merupakan penelitian yang mendukung pengerjaan Tesis. Referensi utama yang digunakan dimuat dalam Tabel 2.1.

Mayoritas pasar cuaca didominasi oleh derivatif cuaca berbasis suhu, seperti penelitian yang ditunjukkan oleh Peter Alaton dan Li. Kedua penelitian tersebut membahas bagaimana untuk melakukan valuasi pada derivatif cuaca yang bergantung pada suhu. Meskipun memiliki aset dasar yang berbeda dengan penelitian ini, tetapi penulis menjadikannya sebagai referensi utama dengan alasan baik suhu maupun curah hujan sama-sama mengikuti proses Ornstein-Uhlenbeck. Curah hujan umumnya dimodelkan melalui akumulasi jumlah curah hujan harian atau bulanan. Martin Odening menyatakan bahwa model curah hujan harian sebaiknya digunakan secara hati-hati karena cenderung mengabaikan variabilitas curah hujan (Martin Odening, 2007). Gunther Leobacher melakukan konstruksi model serta valuasi derivatif

curah hujan dengan memperhatikan perubahan musiman. Penelitian tersebut menggunakan metode estimasi Likelihood untuk mengestimasi beberapa parameter yang diperlukan dalam valuasi (Gunther Leobacher, 2011). Brenda Lopez Cabrera membahas mengenai derivatif curah hujan dengan tujuan memodelkan indeks curah hujan melalui distribusi normal-invers Gaussian, kemudian dilakukan valuasi *futures* curah hujan (Brenda López Cabrera, 2013). Clarinda Nhangumbe dalam penelitian terbarunya juga melakukan konstruksi model serta valuasi opsi curah hujan dalam kondisi *rainfall defice*. Dalam penelitiannya, dikatakan bahwa dinamika curah hujan mengikuti proses Ornstein-Uhlenbeck serta ditunjukkan beberapa perilaku opsi *put* serta *call* ketika mengalami kondisi *rainfall defice* (Clarinda Nhangumbe, 2024). Hal serupa juga akan ditunjukkan dalam penelitian ini, yaitu menunjukkan perilaku yang ditunjukkan opsi tipe Eropa, tetapi dalam kondisi *rainfall excess*.

Tabel 2.1 Referensi Utama Pendukung Penelitian.

Referensi	Judul	Pokok Bahasan
(Peter Alaton, 2002)	<i>On Modelling and Pricing Weather Derivatives</i>	Penentuan model harga derivatif cuaca dengan pembayaran yang bergantung pada suhu.
(Gunther Leobacher, 2011)	<i>On Modelling and Pricing Rainfall Derivatives with Seasonality</i>	Konstruksi model cuaca yang memperhitungkan perubahan musiman dalam presipitasi.
(Li, 2018)	<i>Pricing Weather Derivatives with Partial Differential Equations of the Ornstein-Uhlenbeck Process</i>	Perbandingan valuasi derivatif cuaca menggunakan skema beda hingga dengan simulasi Monte Carlo dan pendekatan Alaton.
(Clarinda Nhangumbe, 2024)	<i>Numerical Solutions of An Option Pricing Rainfall Weather Derivatives Model</i>	Konstruksi model derivatif curah hujan serta valuasi harga opsi dalam kondisi <i>rainfall defice</i> .

2.2 Derivatif Cuaca Berbasis Curah Hujan

Kontrak keuangan yang diperdagangkan di pasar derivatif untuk mengurangi risiko akibat kejadian cuaca adalah derivatif cuaca. Kontrak keuangan ini dirancang untuk memberikan ganti rugi, sehingga berfungsi sebagai "lindung nilai" terhadap risiko cuaca yang bersifat *non-catastrophic*. Fluktuasi cuaca *non-catastrophic* meliputi periode hangat atau dingin, periode hujan atau kering, dan sebagainya (Stephen Jewson, 2005). Derivatif cuaca berbeda dengan asuransi, perbedaan utamanya terletak pada cara kompensasi kerugian. Pada asuransi, pemegang kontrak harus membuktikan bahwa mereka mengalami kerugian finansial akibat cuaca, sedangkan pada derivatif cuaca, pembayaran hanya didasarkan pada hasil aktual cuaca.

Keberadaan derivatif cuaca dapat memberikan proteksi pada perusahaan-perusahaan yang keuntungannya bergantung pada cuaca. Penelitian ini membahas mengenai derivatif cuaca dengan aset dasar curah hujan, sehingga disebut sebagai derivatif curah hujan. Sebagaimana diketahui bahwa curah hujan bukan suatu barang yang memiliki bentuk fisik, sehingga tidak ada pasar fisik untuk indeks curah hujan. Beberapa atribut yang digunakan dalam mendefinisikan kontrak derivatif curah hujan, yaitu periode kontrak, stasiun pengukuran sebagai lokasi pengukuran yang disepakati dalam kontrak, kemudian variabel curah hujan. Atribut berikutnya, yaitu indeks curah hujan yang berupa *rainfall defice* (RD) dan *rainfall excess* (RE), kemudian fungsi *pay-off* yang menentukan bagaimana pembayaran dilakukan berdasarkan nilai indeks curah pada akhir periode kontrak, dan atribut terakhir, yaitu premi (Stephen Jewson, 2005).

2.3 Indeks Curah Hujan

Defisit curah hujan (*rainfall defice*), dinyatakan dengan RD, merupakan kondisi dimana jumlah milimeter curah hujan rata-rata (x_t) berada di bawah curah hujan dasar (x_{das}). Persamaan matematikanya yaitu:

$$f(x_t) = \max\{x_{das} - x_t, 0\} = (x_{das} - x_t)^+. \quad (2.1)$$

Kondisi lain, yaitu kelebihan curah hujan (*rainfall excess*), disimbolkan dengan RE adalah kondisi dimana jumlah milimeter curah hujan rata-rata (x_t) berada di atas curah hujan dasar (x_{das}). RE dinyatakan dengan:

$$f(x_t) = \max\{x_t - x_{das}, 0\} = (x_t - x_{das})^+. \quad (2.2)$$

Indeks kumulatif (y_t) dari variabel cuaca dasar merupakan jumlah curah hujan selama periode $[0, t]$. Nilai y_t dinyatakan sebagai berikut (Li, 2018):

$$y_t = \int_0^t f(x_s) ds, \quad (2.3)$$

dan

$$dy_t = f(x_t) dt. \quad (2.4)$$

2.4 Proses Stokastik Ornstein-Uhlenbeck

Misal suatu aset berada dalam kondisi netral risiko Q , yang ditandai dengan harga risiko pasar λ (Øksendal, 2000). Selanjutnya, pandang x_t sebagai variabel acak yang menyatakan jumlah curah hujan dalam waktu t . Perubahan total curah hujan yang mungkin terjadi dalam suatu periode dapat diasumsikan mengikuti proses *mean-reverting* Ornstein-Uhlenbeck yang didefinisikan oleh (Clarinda Nhangumbe, 2024):

$$dx_t = [\alpha(\theta(t) - x_t) + \theta'(t) - \lambda\sigma]dt + \sigma dW_t^Q \quad (2.5)$$

dengan

- x_t : Curah hujan saat waktu t .
- α : Kecepatan *mean reversion*.
- $\theta(t)$: Nilai rata-rata jangka panjang dari proses.
- σ : Volatilitas.
- W_t^Q : Proses Wiener dalam kondisi netral risiko Q .

2.5 Opsi Curah Hujan

Opsi adalah suatu kontrak antara dua pihak untuk membeli maupun menjual aset dengan harga tertentu sebelum atau pada saat waktu yang disepakati. Opsi *call* memberikan hak kepada investor untuk membeli aset dasar dengan waktu dan harga tertentu. Sebaliknya, opsi *put* memberikan hak kepada investor untuk menjual aset pada waktu dan harga tertentu. Harga pada opsi dikenal sebagai harga pelaksanaan (*strike price*) dan waktu kontrak dikenal sebagai tanggal jatuh tempo (*maturity*) (Hull, 2015).

Risiko curah hujan dapat dikelola dengan membeli opsi RD atau RE, baik Amerika, Asia, maupun Eropa. Opsi *put* dan *call* tipe Eropa yang secara berturut-turut dinyatakan dengan:

$$V_P(x, y_T, T) = tick \times (K - y_T)^+ = tick \times \max\{K - y_T, 0\} \quad (2.6)$$

dan

$$V_C(x, y_T, T) = tick \times (y_T - K)^+ = tick \times \max\{y_T - K, 0\} \quad (2.7)$$

dengan,

y_T : Nilai RD atau RE saat tanggal jatuh tempo T .

K : Nilai pelaksanaan.

$tick$: Nilai yang digunakan untuk mengonversi kuantitas di sisi kanan menjadi nilai uang.

2.6 Feynman-Kac Multivariat

Teorema 1 (Feynman-Kac) (Chen, 2017): *Misalkan W_t^1 dan W_t^2 adalah Brownian Motion yang saling independen. Tinjau persamaan diferensial stokastik dua dimensi berikut ini:*

$$dx_t = \beta_1(u, x_u, y_u)du + \gamma_{11}(u, x_u, y_u)dW_u^1 + \gamma_{12}(u, x_u, y_u)dW_u^2, \quad (2.8)$$

$$dy_t = \beta_2(u, x_u, y_u)du + \gamma_{21}(u, x_u, y_u)dW_u^1 + \gamma_{22}(u, x_u, y_u)dW_u^2. \quad (2.9)$$

Misal diberikan fungsi $h(x, y)$ dan r konstan untuk $T > 0$ yang tetap serta $t \in [0, T]$. Didefinisikan:

$$V(t, x, y) = E[e^{-r(T-t)}h(x_T, y_T)|x_t = x, y_t = y], \quad (2.10)$$

maka V memenuhi:

$$\begin{aligned} V_t + \beta_1 V_x + \beta_2 V_y + \frac{1}{2}(\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2)V_{xx} + (\gamma_{11}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22})V_{xy} \\ + \frac{1}{2}(\gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2)V_{yy} = rV \end{aligned} \quad (2.11)$$

dan kondisi terminal:

$$V(t, x, y) = h(x, y) \quad (2.12)$$

untuk semua x dan y .

Bukti: Tinjau $e^{-rt}V(t, x, y) = e^{-rt}E[e^{-r(T-t)}h(x_T, y_T)]$ sebagai suatu Martingale $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} e^{-rs}V(s, x_s, y_s) &= e^{-rs}E[e^{-r(T-s)}h(x_T, y_T)|F_s] \\ &= E[e^{-rT}h(x_T, y_T)|F_s], \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} e^{-rt}V(t, x_t, y_t) &= e^{-rt}E[e^{-r(T-t)}h(x_T, y_T)|F_t] \\ &= E[e^{-rT}h(x_T, y_T)|F_t], \end{aligned} \quad (2.14)$$

sehingga:

$$\begin{aligned} E[e^{-rt}V(t, x_t, y_t)|F_s] &= E[e^{-rt}E[e^{-r(T-t)}h(x_T, y_T)|F_t]|F_s] \\ &= E[e^{-rT}h(x_T, y_T)|F_s] \\ &= e^{-rs}f(s, x_s, y_s). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Tinjau bahwa $d(e^{-rt}V(t, x, y))$ dapat diselesaikan menggunakan formula Ito:

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}V(t, x, y)) &= -re^{-rt}V(t, x, y)dt + e^{-rt}d(V(t, x, y)) + \frac{1}{2}(0) \\
&= -re^{-rt}V(t, x, y)dt + e^{-rt}[V_t dt + V_x dx + V_y dy + \frac{1}{2}V_{xx}(dx)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}V_{yy}(dy)^2 + \frac{1}{2}V_{xy}dxdy] \\
&= e^{-rt}[-rV dt + V_t dt + V_x dx + V_y dy + \frac{1}{2}V_{xx}(dx)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}V_{yy}(dy)^2 + \frac{1}{2}V_{xy}dxdy]. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Dalam Persamaan (2.16), akan dicari terlebih dahulu nilai dx^2 , dy^2 , dan $dxdy$ menggunakan Persamaan (2.8) dan (2.9):

$$\begin{aligned}
dx^2 &= (\beta_1 dt + \gamma_{11} dW_1 + \gamma_{12} dW_2)(\beta_1 dt + \gamma_{11} dW_1 + \gamma_{12} dW_2) \\
&= \beta_1^2 dt^2 + \beta_1 \gamma_{11} dt dW_1 + \beta_1 \gamma_{12} dt dW_2 + \beta_1 \gamma_{11} dt dW_1 + \gamma_{11}^2 dW_1^2 \\
&\quad + \gamma_{11} \gamma_{12} dW_1 dW_2 + \beta_1 \gamma_{12} dt dW_2 + \gamma_{11} \gamma_{12} dW_1 dW_2 + \gamma_{12}^2 dW_2^2 \\
&= \gamma_{11}^2 dt + \gamma_{12}^2 dt. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dy^2 &= (\beta_2 dt + \gamma_{21} dW_1 + \gamma_{22} dW_2)(\beta_2 dt + \gamma_{21} dW_1 + \gamma_{22} dW_2) \\
&= \beta_2^2 dt^2 + \beta_2 \gamma_{21} dt dW_1 + \beta_2 \gamma_{22} dt dW_2 + \beta_2 \gamma_{21} dt dW_1 + \gamma_{21}^2 dW_1^2 \\
&\quad + \gamma_{21} \gamma_{22} dW_1 dW_2 + \beta_2 \gamma_{22} dt dW_2 + \gamma_{21} \gamma_{22} dW_1 dW_2 + \gamma_{22}^2 dW_2^2 \\
&= \gamma_{21}^2 dt + \gamma_{22}^2 dt. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dxdy &= (\beta_1 dt + \gamma_{11} dW_1 + \gamma_{12} dW_2)(\beta_2 dt + \gamma_{21} dW_1 + \gamma_{22} dW_2) \\
&= \beta_1 \beta_2 dt^2 + \beta_1 \gamma_{21} dt dW_1 + \beta_1 \gamma_{22} dt dW_2 + \beta_2 \gamma_{11} dt dW_1 + \gamma_{11} \gamma_{21} dW_1^2 \\
&\quad + \gamma_{11} \gamma_{22} dW_1 dW_2 + \beta_2 \gamma_{12} dt dW_2 + \gamma_{12} \gamma_{21} dW_1 dW_2 + \gamma_{12} \gamma_{22} dW_2^2 \\
&= \gamma_{11} \gamma_{21} dt + \gamma_{12} \gamma_{22} dt. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Substitusikan Persamaan (2.17), (2.18), dan (2.19) ke dalam Persamaan (2.16), diperoleh:

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}V(t, x, y)) &= e^{-rt}[-rVdt + V_tdt + V_x(\beta_1dt + \gamma_{11}dW_1 + \gamma_{12}dW_2) \\
&\quad + V_y(\beta_2dt + \gamma_{21}dW_1 + \gamma_{22}dW_2) + \frac{1}{2}V_{xx}(\gamma_{11}^2dt + \gamma_{12}^2dt) \\
&\quad + \frac{1}{2}V_{xy}(\gamma_{11}\gamma_{21}dt + \gamma_{12}\gamma_{22}dt) + \frac{1}{2}V_{yy}(\gamma_{21}^2dt + \gamma_{22}^2dt)] \\
d(e^{-rt}V(t, x, y)) &= e^{-rt}[(-rV + V_t + \beta_1V_x + \beta_2V_y + \frac{1}{2}V_{xx}(\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}V_{xy}(\gamma_{11}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22}) + \frac{1}{2}V_{yy}(\gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2))dt \\
&\quad + (V_x\gamma_{11} + V_y\gamma_{21})dW_1 + (V_x\gamma_{12} + V_y\gamma_{22})dW_2]. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Ambil $t = 0$ dan $dt = 1$, maka Persamaan (2.20) dapat disederhanakan ke bentuk deterministiknya. Perubahan stokastik yang terkait proses Wiener diabaikan sebagai langkah awal dalam menganalisis sistem stokastik, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
V_t + \beta_1V_x + \beta_2V_y + \frac{1}{2}(\gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2)V_{xx} + (\gamma_{11}\gamma_{21} + \gamma_{12}\gamma_{22})V_{xy} \\
+ \frac{1}{2}(\gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2)V_{yy} = rV. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

2.7 Persamaan Diferensial Parsial untuk Valuasi Harga Opsi

Valuasi harga opsi bergantung pada aset dasar, dalam hal ini adalah curah hujan. Teorema Feynman-Kac digunakan untuk membentuk suatu hubungan antara persamaan diferensial stokastik dengan persamaan diferensial parsial. Implementasinya yaitu dikenakan pada PD stokastik (2.5) dan (2.4), sehingga PDP untuk valuasi harga opsi adalah sebagai berikut (Clarinda Nhangumbe, 2024):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f(x)\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma(x, t)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - rV = 0 \tag{2.22}$$

dengan

- x : Rata-rata curah hujan.
- y : Indeks kumulatif curah hujan.
- t : Waktu.
- r : Suku bunga bebas risiko.
- $f(x)$: RD atau RE yang secara berturut-turut dimuat oleh Persamaan (2.1) dan (2.2).

Fungsi $\gamma(x, t)$ dinyatakan oleh:

$$\gamma(x, t) = \alpha(\theta(t) - x) + \theta'(t) - \lambda\sigma. \quad (2.23)$$

2.8 Estimasi Parameter

Estimasi dilakukan untuk mendapatkan parameter-parameter yang dimuat dalam Persamaan (2.5), yaitu volatilitas (σ) dan kecepatan *mean reversion* (α). Sedangkan untuk parameter harga risiko pasar (λ), perlu dilakukan observasi terhadap harga pasar dari beberapa kontrak. Tetapi, karena belum ada pasar derivatif yang sepenuhnya berkembang untuk kontrak, maka digunakan $\lambda = 0$ (Martin Odening, 2007). Selain itu $\theta(t)$ sebagai komponen musiman juga perlu diestimasi nilainya.

2.8.1 Estimasi Komponen Musiman

Proses stokastik x_t berfluktuasi di sekitar θ , dimana θ merupakan nilai rata-rata jangka panjang. Fungsi $\theta(t)$ dapat diestimasi menggunakan (Peter Alaton, 2002):

$$\theta(t) = P + Qt + R[\sin(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\sin\phi]. \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) dapat ditulis sebagai:

$$\theta(t) = P + Qt + R\sin(\omega t + \phi), \quad (2.25)$$

kemudian dengan adanya perubahan variabel, Persamaan (2.25) menjadi:

$$\theta(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin(\omega t) + \beta_4 \cos(\omega t), \quad (2.26)$$

dengan

$$P = \beta_1; \quad Q = \beta_2; \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\beta_4}{\beta_3} \right); \quad R = \frac{\beta_3}{\cos(\phi)}.$$

Selain menggunakan cara di atas, dapat digunakan deret Fourier *truncated*. Fungsi $\theta(t)$ dinyatakan sebagai berikut (Clarinda Nhangumbe, 2024):

$$\theta_n(t) = m + \sum_{k=1}^n a_k \sin \left(\frac{2k\pi}{12}(t - v) \right) + \sum_{k=1}^n b_k \cos \left(\frac{2k\pi}{12}(t - v) \right), \quad (2.27)$$

dengan t dalam skala bulanan. Parameter m, a_k, b_k, v diestimasi dengan menggunakan algoritma Gauss-Newton. Persamaan (2.27) dapat divariasikan guna mendapatkan nilai rata-rata jangka panjang terbaik kemudian dibandingkan dengan rata-rata curah hujan bulanan $D(j)$ berikut:

$$D(j) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R(j, i),$$

dengan N adalah jumlah periode (tahun) yang diamati dan $R(j, i)$ adalah jumlah curah hujan dalam bulan j di tahun i .

2.8.2 Estimasi Volatilitas

Nilai estimator volatilitas (σ) diperoleh dari data yang dikumpulkan setiap bulan. Diberikan tahun tertentu μ dengan N_μ bulan dan curah hujan yang diamati dalam tahun μ dinyatakan oleh x_j dengan $j = 1, 2, \dots, N_\mu$. Estimator didasarkan pada variasi kuadrat dari x_j (Clarinda Nhangumbe, 2024), yaitu:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{N_\mu} \sum_{j=0}^{N_\mu-1} (x_{j+1} - x_j)^2. \quad (2.28)$$

2.8.3 Estimasi Kecepatan *Mean-Reversion*

Estimasi kecepatan *mean-reversion* (α) dilakukan menggunakan metode fungsi estimasi Martingale (Bo Martin Bibby, 1995). Untuk suatu proses stokastik:

$$dx_t = a(x_t, \xi) + \sigma(x_t, \xi)dW_t, \quad (2.29)$$

estimator tak bias ξ adalah nilai nol dari fungsi Martingale yang diberikan oleh:

$$G_n(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{b}(x_{(i-1)\Delta}; \xi)}{\sigma^2(x_{(i-1)\Delta}; \xi)} x_{i\Delta} - [E[x_i | x_{i-1}]] \quad (2.30)$$

dengan $\dot{b} = \frac{\partial b}{\partial \xi}$. Persamaan (2.30) dapat dituliskan menjadi:

$$G_n(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_{i-1} - x_{i-1}}{\sigma_{i-1}^2} [x_i - \theta_i - e^{-\alpha}(x_{i-1} - \theta_{i-1}^m)], \quad (2.31)$$

sehingga diperoleh untuk $i = 1, 2, \dots, n$ sebagai berikut:

$$\alpha = -\log \left(\frac{\sum_{i=1}^n Z_{i-1}(x_i - \theta_i)}{\sum_{i=1}^n Z_{i-1}(x_{i-1} - \theta_{i-1})} \right), \quad (2.32)$$

dengan

$$Z_{i-1} = \frac{\theta_{i-1} - x_{i-1}}{\sigma^2}. \quad (2.33)$$

2.9 Algoritma Gauss-Newton

Algoritma Gauss-Newton merupakan metode untuk meminimalkan permasalahan kuadrat terkecil (*least-squares*) (van Emmerich, 2005). Perhatikan Persamaan (2.27), misal ambil salah satu variasi menggunakan fungsi *sin*:

$$\theta_n(t) = m + \sum_{k=1}^n a_k \sin \left(\frac{2k\pi}{12}(t - v) \right). \quad (2.34)$$

Metode Gauss-Newton diimplementasikan untuk mendapatkan kombinasi parameter, sehingga dapat menyelesaikan:

$$\min_{m, a_k, v} \|f(\cdot, m, a_1, \dots, a_n, v) - D(\cdot)\|_2^2$$

dengan:

$$f(t, m, a_1, \dots, a_n, v) = m + a_1 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t - v)\right) + \dots + a_n \sin\left(\frac{n\pi}{6}(t - v)\right).$$

Formula dari metode Gauss-Newton adalah sebagai berikut:

$$[J]^{jT} [J]^j \{\Delta a\} = [J]^{jT} \{d\}^j, \quad (2.35)$$

dengan J merupakan matriks Jacobian yang memuat turunan parsial suatu fungsi, j mewakili iterasi, d merupakan suatu vektor yang memuat pengurangan dari fungsi, dan Δa adalah selisih dari parameter yang dicari. Kemudian hasil akhir didapat dengan:

$$\{a\}^{j+1} = \{a\}^j + \{\Delta a\}. \quad (2.36)$$

2.10 Interpolasi

Interpolasi merupakan salah satu metode untuk memperoleh data yang hilang tanpa menghilangkan karakteristik dari data asli (Steven C. Chapra, 2021). Terdapat tiga metode interpolasi yang dicobakan dalam Tesis ini, yaitu: *linear spline*, *quadratic spline*, dan *cubic spline*.

2.10.1 Interpolasi *Linear Spline*

Hubungan yang paling sederhana antara dua titik adalah garis lurus. Spline orde pertama, $s_i(x)$ untuk sekelompok data dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dapat didefinisikan sebagai fungsi linear (Steven C. Chapra, 2021):

$$s_i(x) = f(x_i) + b_i(x - x_i), \quad (2.37)$$

dengan b_i adalah gradien dari garis lurus yang menghubungkan titik-titik:

$$b_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

2.10.2 Interpolasi *Quadratic Spline*

Quadratic spline digunakan untuk mendapatkan turunan polinomial orde kedua dalam setiap interval data. Polinomial untuk setiap interval secara umum dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dinyatakan sebagai:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2. \quad (2.38)$$

Terdapat beberapa kondisi yang harus dipenuhi (Steven C. Chapra, 2021):

- (a) Fungsi harus melewati semua titik (kondisi kontinuitas):

$$f(x_i) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2, \quad a_i = f(x_i). \quad (2.39)$$

Oleh karena itu, konstanta dalam setiap persamaan kuadrat harus sama dengan nilai variabel terikat di awal interval. Hasil kemudian dapat disubstitusikan ke dalam:

$$s_i(x) = f(x_i) + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2. \quad (2.40)$$

- (b) Nilai fungsi dari polinomial yang bersebelahan harus sama di titik simpul (*knots*). Kondisi ini dapat ditulis untuk titik simpul $i + 1$ sebagai:

$$f(x_i) + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 = f(x_{i+1}). \quad (2.41)$$

- (c) Turunan pertama di simpul-simpul interior harus sama. Berdasarkan Persamaan (2.38), turunan pertamanya adalah $s'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i)$, sehingga:

$$b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) = b_{i+1}. \quad (2.42)$$

- (d) Asumsikan bahwa turunan kedua adalah nol pada titik pertama. Karena turunan kedua Persamaan (2.38) adalah $2c_i$, maka $c_1 = 0$.

2.10.3 Interpolasi *Cubic Spline*

Tujuan dari interpolasi *cubic spline* adalah menurunkan suatu polinomial berderajat tiga untuk setiap interval antara simpul-simpul dan $i = 1, \dots, n$ sebagai berikut:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad (2.43)$$

dengan demikian, untuk $n + 1$ titik data terdapat n interval. Kondisi yang harus dipenuhi, yaitu:

- (a) Nilai-nilai fungsi harus sama di simpul-simpul interior.
- (b) Fungsi pertama dan terakhir harus melewati titik akhir.
- (c) Turunan pertama di simpul-simpul interior harus sama.
- (d) Turunan kedua di simpul-simpul interior harus sama.
- (e) Turunan kedua di simpul-simpul ujung adalah nol.

Untuk mempermudah proses interpolasi, dilakukan *built-in script* pada MATLAB.

2.11 Metode Beda Hingga Skema Eksplisit

Metode beda hingga skema eksplisit merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk untuk mengaproksimasi solusi persamaan diferensial parsial. Pada skema eksplisit, variabel pada waktu $n + 1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu n . Solusi pendekatan untuk valuasi $V(x, y, \tau)$ dinyatakan dengan $V_{j,k}^n \approx V(x_j, y_k, \tau_n)$. Berikutnya didefinisikan operator-operator sebagai berikut (Clarinda Nhangumbe, 2024):

$$\Delta_y^+ V_{j,k}^n = V_{j,k+1}^n - V_{j,k}^n, \quad (2.44)$$

$$\Delta_{0x} V_{j,k}^n = V_{j+1,k}^n - V_{j-1,k}^n, \quad (2.45)$$

$$\delta_x^2 V_{j,k}^n = V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n \quad (2.46)$$

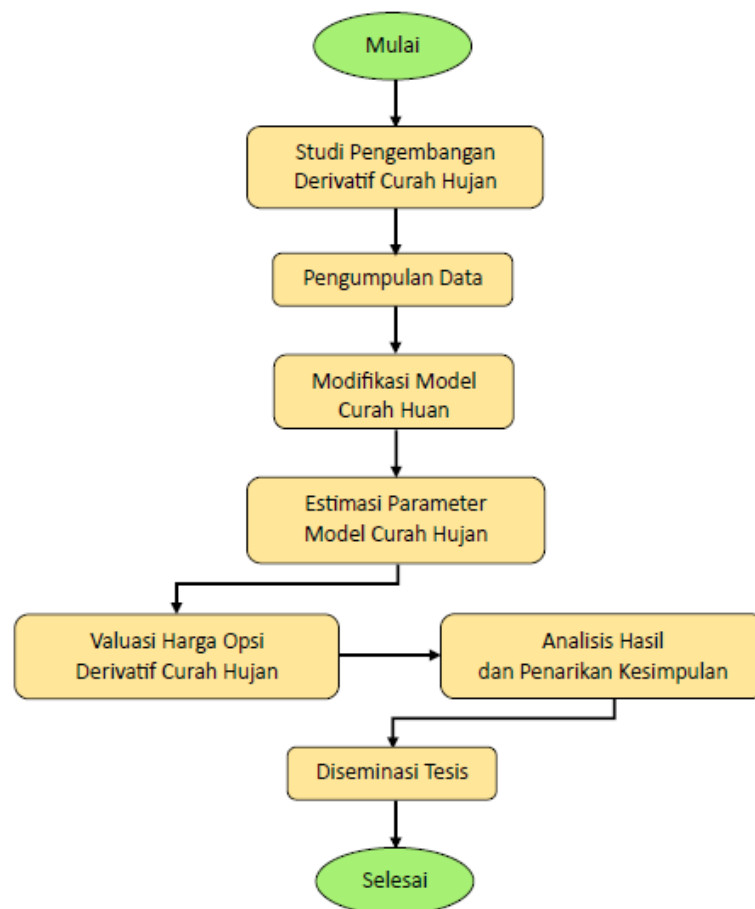
dan skema eksplisit dinyatakan sebagai berikut (Clarinda Nhangumbe, 2024):

$$\begin{aligned} V_{j,k}^{n+1} = & V_{j,k}^n - r\Delta\tau V_{j,k}^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta y} f_j \Delta_y^+ V_{j,k}^n + \frac{\gamma_j^n \Delta\tau}{2\Delta x} \Delta_{0x} V_{j,k}^n \\ & + \left[\frac{(\gamma_j^n)^2 \Delta\tau^2}{2\Delta x^2} + \frac{\sigma^2 \Delta\tau}{2\Delta x^2} \right] \delta_x^2 V_{j,k}^n. \end{aligned} \quad (2.47)$$

BAB 3

METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan secara umum mengenai langkah-langkah pengerjaan Tesis dengan beberapa tahapan yang dimuat dalam Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram Penelitian.

1. Studi Pengembangan Derivatif Curah Hujan

Studi pengembangan diawali dengan mengidentifikasi permasalahan curah hujan di Jawa Timur. Bersamaan dengan itu dipelajari juga pengembangan-pengembangan yang telah dilakukan oleh peneliti terdahulu

dan tertulis dalam jurnal ilmiah, terutama yang membahas mengenai pembentukan model serta valuasi derivatif cuaca dengan aset dasar curah hujan. Selain melalui jurnal ilmiah, studi pengembangan juga dilakukan dengan literatur buku, tesis, dan lain-lain.

2. Pengumpulan Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu data curah hujan bulanan di provinsi Jawa Timur periode Januari 2014 hingga Desember 2023. Data diperoleh dari website data *online* Badan Meteorologi, Klimatologi, dan Geofisika (BMKG) dengan rincian: Kabupaten Banyuwangi (Stasiun Meteorologi Banyuwangi), Kabupaten Malang (Stasiun Klimatologi Jawa Timur), Kabupaten Pasuruan (Stasiun Geofisika Pasuruan), Kabupaten Sumenep (Stasiun Meteorologi Trunojoyo), dan Kota Surabaya (Stasiun Meteorologi Perak I).

3. Modifikasi Model Curah Hujan

Model curah hujan diasumsikan mengikuti proses stokastik *mean-reverting* Ornstein-Uhlenbeck. Pada bagian ini dilakukan modifikasi model curah hujan guna menyesuaikan dengan kondisi yang ada di Jawa Timur. Dari model stokastik Ornstein-Uhlenbeck, modifikasi dilakukan dengan membuat parameter harga risiko pasar menjadi tidak bernilai ($\lambda = 0$). Modifikasi tersebut dilakukan dengan alasan di Indonesia belum ada produk derivatif cuaca yang diperdagangkan, sehingga tidak dapat diperkirakan harga risiko pasar yang tepat.

4. Estimasi Parameter dalam Model Curah Hujan

Pada tahap ini dilakukan estimasi parameter-parameter model curah hujan yang mengikuti proses *mean-reverting* Ornstein-Uhlenbeck. Parameter-parameter yang perlu diestimasi, yaitu komponen musiman (rata-rata jangka panjang), volatilitas, serta kecepatan *mean-reversion*. Khusus untuk estimasi komponen musiman, dilakukan beberapa *fitting* hingga nilainya mendekati nilai rata-rata curah hujan bulanan. Proses estimasi dilakukan dengan metode

yang telah dijelaskan dalam Subbab 2.8 dan dihitung menggunakan MATLAB R2023a.

5. Valuasi Harga Opsi Curah Hujan

Opsi yang akan divalusi adalah opsi *call* tipe Eropa. Valuasi harga opsi curah hujan dilakukan dengan menyelesaikan persamaan diferensial parsial menggunakan parameter-parameter yang telah didapatkan pada tahap sebelumnya. Proses valuasi dilakukan secara numerik menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Secara spesifik, kondisi yang dipertimbangkan dalam penelitian ini adalah saat *rainfall excess*. Seluruh penghitungan nilai opsi dilakukan menggunakan MATLAB R2023a.

6. Analisis Hasil dan Penarikan Kesimpulan

Pada tahap ini, akan dilakukan analisis hasil dari penelitian yang dilakukan. Tahap analisis ditujukan untuk mengetahui bagaimana hasil valuasi harga opsi curah hujan jika dihadapkan dengan kondisi di Jawa Timur. Setelah itu dilakukan penarikan kesimpulan dan diharapkan kesimpulan dapat menjawab rumusan masalah dan tujuan yang telah diajukan. Selain kesimpulan, akan diberikan saran mengenai hal-hal yang dapat dikembangkan untuk penelitian selanjutnya. Semua pengerjaan akan dibukukan menjadi Tesis dan merupakan hasil akhir dari laporan penelitian yang telah dikerjakan.

7. Diseminasi Tesis

Pada tahap ini, sebagian atau seluruh hasil pengerjaan Tesis akan disusun menjadi jurnal ilmiah dan diajukan ke dalam pangkalan data jurnal nasional atau internasional bereputasi sebagai salah satu syarat kelulusan program magister sesuai dengan peraturan akademik Institut Teknologi Sepuluh Nopember tahun 2024.

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini memuat praproses data, modifikasi model stokastik Ornstein-Uhlenbeck, estimasi parameter, dan valuasi opsi curah hujan. Data curah hujan bulanan digunakan untuk mengestimasi parameter dalam model Ornstein-Uhlenbeck, lalu dilakukan valuasi opsi curah hujan dengan menyelesaikan PDP secara numerik menggunakan metode beda hingga skema eksplisit.

4.1 Praproses Data

Bagian ini bertujuan untuk menentukan data curah hujan yang digunakan serta melakukan penanganan terhadap adanya *missing value*.

4.1.1 Pengumpulan Data

Data yang digunakan berbentuk *time series* dan berasal dari *website* Badan Meteorologi, Klimatologi, dan Geofisika (BMKG) dengan tautan berikut: <https://dataonline.bmkg.go.id/home>. Lima wilayah yang digunakan telah disebutkan pada Bab III. Pada awalnya, data yang tersedia adalah dalam skala harian seperti yang ditunjukkan Tabel 4.1. Terlihat bahwa terdapat *missing value*, artinya data curah hujan saat hari tersebut tidak terukur. Tidak diketahui alasan yang melatarbelakangi tidak terukurnya data.

Tabel 4.1 Data Curah Hujan Harian

Tanggal	Curah Hujan (mm)				
	SM Banyuwangi	SK Jawa Timur	SG Pasuruan	SM Trunojoyo	SM Perak I
01-01-2014	1,4	1,6	10,5	0,1	
02-01-2014		2	4,3	0	
03-01-2014	2,4	0	0	59,9	0
04-01-2014	5,4	13,5		14,3	6,8
05-01-2014	1,8	92,3		8,7	76,3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30-12-2023	2,6	1,4		0	6,7
31-12-2023	4,8	34	1	10,2	

4.1.2 Interpolasi Data

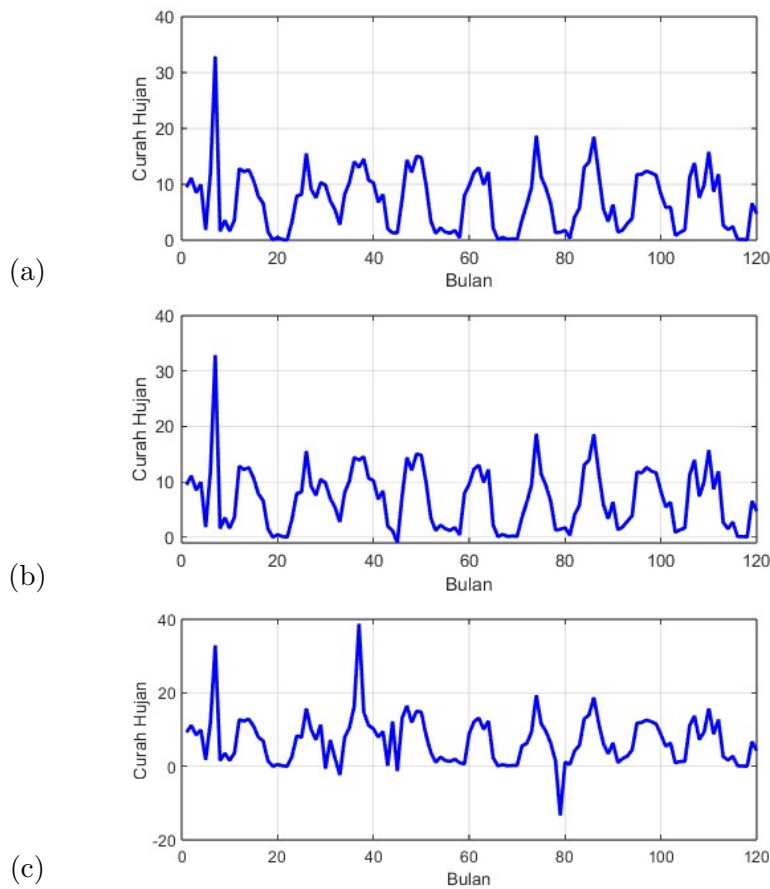
Tahap berikutnya adalah melakukan interpolasi terhadap data curah hujan harian. Hal tersebut dilakukan sebagai upaya dalam mengaproksimasi nilai yang tidak tersedia pada suatu rentang tanpa mengubah tren data.

a. Interpolasi *Linear Spline*

Pada percobaan pertama, aproksimasi nilai dilakukan menggunakan interpolasi *linear spline*. Perhatikan Tabel 4.1, pada tanggal 02-01-2014 di daerah Banyuwangi curah hujan tidak terukur. Berdasarkan Persamaan (2.37) diperoleh:

$$s_1 = 1,4 + \left(\frac{2,4 - 1,4}{3 - 1} \right) (2 - 1) = 1,9.$$

Hal serupa juga dilakukan untuk tanggal lain serta daerah lain. *Script* MATLAB interpolasi *linear spline* termuat dalam Lampiran 1.



Gambar 4.1 Curah Hujan Bulanan di Jawa Timur (2014-2023) Hasil Interpolasi (a) *Linear Spline* (b) *Quadratic Spline* (c) *Cubic Spline*.

Data harian yang telah diinterpolasi kemudian dicari nilai rata-ratanya untuk setiap bulan, sehingga kini terdapat 120 data curah hujan. Pertimbangan diambil skala bulanan, yaitu karena curah hujan lebih tepat digambarkan secara bulanan mengingat tidak setiap hari terjadi hujan. Selain itu, dalam skala bulanan dapat dilihat kapan periode turun hujan lebat dan tidak. Hasil interpolasi *linear spline* ditunjukkan oleh Gambar 4.1a.

b. Interpolasi *Quadratic Spline* dan *Cubic Spline*

Percobaan kedua, yaitu menggunakan interpolasi *quadratic spline*. Interpolasi ini langsung dilakukan menggunakan MATLAB dengan *script* seperti pada Lampiran 1. Hasil interpolasi menunjukkan bahwa pada tanggal tertentu terdapat nilai negatif, sehingga memberikan nilai negatif pula pada rata-rata curah hujan bulanan seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.1b. Hal serupa juga terjadi ketika dilakukan interpolasi *cubic spline*. *Script* MATLAB interpolasi *cubic spline* termuat dalam Lampiran 1, serta visualisasi hasil interpolasi dalam skala bulanan ditunjukkan oleh Gambar 4.1c. Karena curah hujan tidak ada yang bernilai negatif, maka hasil interpolasi *quadratic spline* dan *cubic spline* tidak dapat digunakan ke tahap berikutnya. Berdasarkan ketiga interpolasi yang telah dilakukan, hasil yang dapat digunakan adalah dari interpolasi *linear spline* karena memberikan nilai yang tak negatif.

4.2 Modifikasi Model Stokastik Ornstein-Uhlenbeck

Model stokastik Ornstein-Uhlenbeck pada dasarnya digunakan untuk menggambarkan pola cuaca yang kembali ke nilai rata-rata jangka panjang setelah mengalami deviasi. Model Ornstein-Uhlenbeck yang ada pada penelitian sebelumnya ditunjukkan oleh Persamaan (2.5). Model tersebut dituliskan kembali sebagai berikut:

$$dX_t = [\alpha(\theta(t) - X_t) + \theta'(t) - \lambda\sigma]dt + \sigma dW_t^Q.$$

Pada tahap selanjutnya, diasumsikan bahwa parameter harga risiko pasar menjadi sama dengan nol ($\lambda = 0$). Hal tersebut dilakukan dengan alasan

di Indonesia sendiri belum ada produk derivatif cuaca yang diperdagangkan, sehingga tidak dapat diperkirakan harga risiko pasar yang tepat. Model stokastik Ornstein-Uhlenbeck menjadi sebagai berikut:

$$dx_t = [\alpha(\theta(t) - x_t) + \theta'(t)]dt + \sigma dW_t^Q. \quad (4.1)$$

Untuk selanjutnya, model pada Persamaan (4.1) yang digunakan dalam penelitian ini.

4.3 Estimasi Komponen Musiman

Komponen musiman adalah rata-rata jangka panjang dari curah hujan dan disimbolkan dengan $\theta(t)$. Rata-rata jangka panjang dapat memberikan gambaran secara umum mengenai pola curah hujan. Mulanya terdapat 120 data curah hujan, lalu dicari nilai rata-rata curah hujan dari tiap bulan yang sama selama 10 tahun yang menghasilkan 12 nilai. Kedua belas nilai rata-rata curah hujan bulanan tersebut dijadikan pembandingan bagi nilai rata-rata jangka panjang. Pada bagian ini dilakukan beberapa *fitting*, pertama menggunakan fungsi *sin* yang mengikuti Persamaan (2.26), berikutnya dengan variasi deret Fourier *truncated* seperti pada Persamaan (2.27).

4.3.1 Estimasi $\theta(t)$ dengan Fungsi $\sin(\omega t + \phi)$

Percobaan pertama untuk mendapatkan nilai rata-rata jangka panjang yang mendekati nilai rata-rata curah hujan bulanan dilakukan menggunakan Persamaan (2.26), yang ditulis kembali sebagai berikut:

$$\theta(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin(\omega t) + \beta_4 \cos(\omega t).$$

Parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, dan β_4 diestimasi menggunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS) dengan implementasi langsung pada MATLAB. Berikut ini adalah *pseudocode* dari OLS, sedangkan untuk implementasi pada MATLAB termuat dalam Lampiran 2.

Algoritma 4.1 Metode Ordinary Least Square

Input: Data waktu t , Data curah hujan M

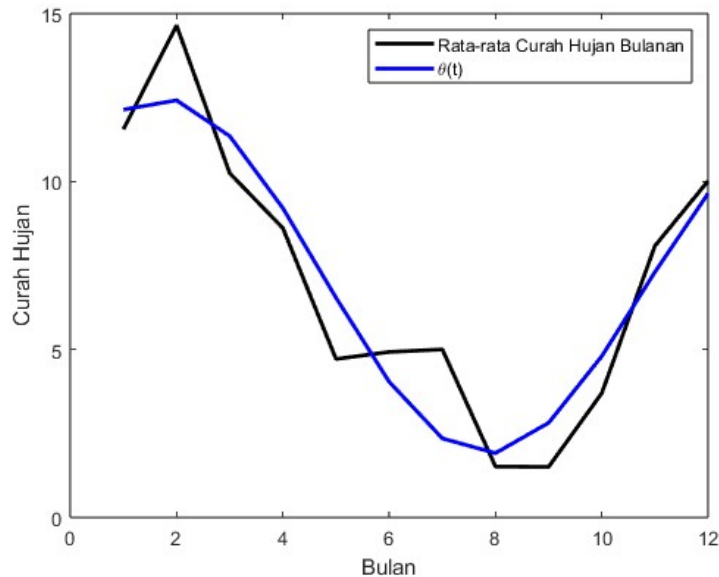
Output: Nilai Parameter β hasil estimasi

- 1: Baca data dari file dan sheet yang ditentukan
 - 2: $t \leftarrow$ data waktu dari file
 - 3: $M \leftarrow$ data curah hujan dari file
 - 4: Definisikan $\omega \leftarrow \frac{2\pi}{12}$
 - 5: Buat matriks X
 - 6: $X \leftarrow [1 \ t[i] \ \sin(\omega t[i]) \ \cos(\omega t[i])]$ untuk i dari 1 hingga panjang t
 - 7: Hitung transpose dari X
 - 8: $X_{\text{transpose}} \leftarrow X^T$
 - 9: Hitung $X^T X$ (hasil kali transpose dari X dan X)
 - 10: $X^T X \leftarrow X_{\text{transpose}} \cdot X$
 - 11: Hitung $X^T Y$ (hasil kali transpose dari X dan M)
 - 12: $X^T Y \leftarrow X_{\text{transpose}} \cdot M$
 - 13: Hitung invers dari $X^T X$
 - 14: $(X^T X)^{-1} \leftarrow \text{inverse}(X^T X)$
 - 15: Hitung estimasi β menggunakan OLS
 - 16: $\beta \leftarrow (X^T X)^{-1} \cdot X^T Y$
 - 17: Tampilkan estimasi β
 - 18: **print** "Nilai Estimasi Beta: ", β
-

Nilai parameter β dari estimasi menggunakan OLS secara berturut-turut, yaitu: 7,5713; -0,0812; 4,0233; dan 3,0471. Keempat nilai parameter tersebut disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.26) dan memberikan nilai rata-rata jangka panjang yang dimuat dalam Tabel 4.2. Ketika dibandingkan dengan rata-rata curah hujan bulanan, nilai MSE (*Mean Square Error*) yang dihasilkan yaitu 1,8205. Skor tersebut sebenarnya sudah kecil, tetapi tetap dicoba menggunakan metode lain, yaitu deret Fourier *truncated* dengan harapan memberikan nilai MSE yang lebih kecil. Visualisasi perbandingan nilai rata-rata jangka panjang dengan nilai rata-rata curah hujan bulanan ditunjukkan oleh Gambar 4.2.

Tabel 4.2 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta(t)$.

t	Rata-rata Curah Hujan Bulanan	$\theta(t)$
1	11,55492473	12,14061149
2	14,64527543	11,35089386
3	10,24555376	9,207081676
4	8,61185719	6,53790306
5	4,715533749	4,036795888
6	4,925585714	2,352163427
7	5,000612903	1,913635205
8	1,513487931	2,816948124
9	1,504608796	1,647082593
10	3,700823833	4,798293839
11	8,08554127	7,305005985
12	10,01584719	9,643646688



Gambar 4.2 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang ($\theta(t)$) menggunakan Fungsi $\sin(\omega t + \phi)$.

4.3.2 Estimasi $\theta(t)$ dengan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *sin*

Estimasi kali ini menggunakan deret Fourier *truncated* yang dilakukan dalam kondisi $b_k = 0$, sehingga Persamaan (2.27) menjadi:

$$\theta_n(t) = m + \sum_{k=1}^n a_k \sin \left(\frac{2k\pi}{12} (t - v) \right), \quad (4.2)$$

dimana nilai parameter m, a_k, v diestimasi dengan tujuan meminimalkan perbedaan terhadap rata-rata. Ketika diberikan jumlah harmonik $n = 2$,

fungsi $\theta_n(t)$ dari Persamaan (4.2) dapat dinyatakan sebagai:

$$\theta_2(t) = m + a_1 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t - v)\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi}{6}(t - v)\right). \quad (4.3)$$

Nilai m, a_1, a_2 , dan v diperoleh melalui penerapan algoritma Gauss-Newton. *Pseudocode* algoritma Gauss-Newton dimuat dalam Algoritma 4.2 dan implementasinya pada MATLAB untuk fungsi *sin* termuat dalam Lampiran 3. Nilai parameter hasil estimasi untuk $n = 2$, yaitu $m = 7,0433; a_1 = -5,2381; a_2 = 1,0402; v = 4,9534$. Keempat parameter tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.3), sehingga diperoleh nilai $\theta_2(t)$ seperti yang dimuat oleh Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_2(t)$ menggunakan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *sin*.

t	Rata-rata Curah Hujan Bulanan	$\theta_2(t)$
1	11,55492473	12,5165718122570
2	14,64527543	12,2290998402582
3	10,24555376	10,5892419771173
4	8,61185719	8,67649963613975
5	4,715533749	6,96624559475477
6	4,925585714	5,23949323086399
7	5,000612903	3,31882162272546
8	1,513487931	1,75601816482980
9	1,504608796	1,64708259298827
10	3,700823833	3,66130692887783
11	8,08554127	7,22183640015725
12	10,01584719	10,6973821990305

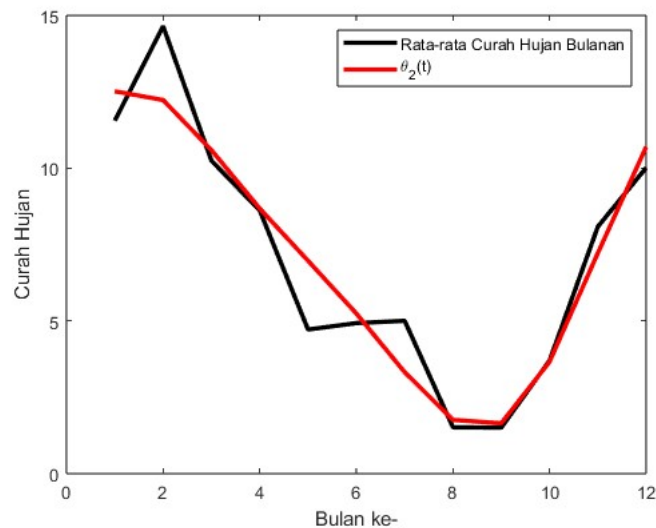
Berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat dihitung nilai MSE $\theta_2(t)$ terhadap nilai rata-rata curah hujan bulanan. Skor MSE yang dihasilkan sebesar 1,3474. Nilai MSE tersebut lebih kecil jika dibandingkan dengan MSE menggunakan $\sin(\omega t + \phi)$, sehingga hasil estimasi rata-rata jangka panjang dengan $\sin(\omega t + \phi)$ tidak dapat digunakan. Perhatikan pula Gambar 4.3, terlihat bahwa grafik $\theta_2(t)$ belum mendekati pola dari rata-rata curah hujan bulanan. Oleh karena itu, simulasi dengan deret Fourier *truncated* fungsi *sin* terus dilanjutkan hingga memberikan MSE yang lebih kecil serta plot yang mendekati rata-rata curah hujan bulanan.

Algoritma 4.2 Metode Gauss-Newton

Input: Data waktu t , Data presipitasi M , Toleransi $tol = 0.0001$, Parameter awal a , Jumlah iterasi maksimum $itermax = 50$

Output: Parameter yang dioptimalkan a

```
1: Baca data dari file dan sheet yang ditentukan
2:  $t \leftarrow$  data waktu dari file
3:  $M \leftarrow$  data pengukuran dari file
4:  $data\_length \leftarrow$  panjang dari  $t$ 
5:  $a \leftarrow$  parameter awal
6: for  $iter \leftarrow 1$  hingga  $itermax$  do
7:   for  $i \leftarrow 1$  hingga  $data\_length$  do
8:      $\theta[i] \leftarrow a[1]$ 
9:     for  $k \leftarrow 1$  hingga  $n$  do
10:       $\theta[i] \leftarrow \theta[i] + a[2k] \cdot \sin\left(\frac{k\pi(t[i]-a[2k+1])}{6}\right)$ 
11:    end for
12:     $j[i, 1] \leftarrow 1$ 
13:    for  $k \leftarrow 1$  hingga  $n$  do
14:       $j[i, 2k] \leftarrow \sin\left(\frac{k\pi(t[i]-a[2k+1])}{6}\right)$ 
15:       $j[i, 2k+1] \leftarrow -\frac{k\pi}{6} \cdot a[2k] \cdot \cos\left(\frac{k\pi(t[i]-a[2k+1])}{6}\right)$ 
16:    end for
17:     $d[i] \leftarrow M[i] - \theta[i]$ 
18:  end for
19:   $da \leftarrow \text{inverse}(\text{transpose}(j) \cdot j) \cdot (\text{transpose}(j) \cdot d)$ 
20:   $a \leftarrow a + \text{transpose}(da)$ 
21:  if semua elemen  $da < tol$  then
22:    print "Metode Gauss-Newton telah konvergen"
23:    break
24:  end if
25: end for
```



Gambar 4.3 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *sin* untuk $n = 2$.

Estimasi dilanjutkan dengan jumlah harmonik $n = 3$, sehingga Persamaan (4.2) dinyatakan sebagai berikut:

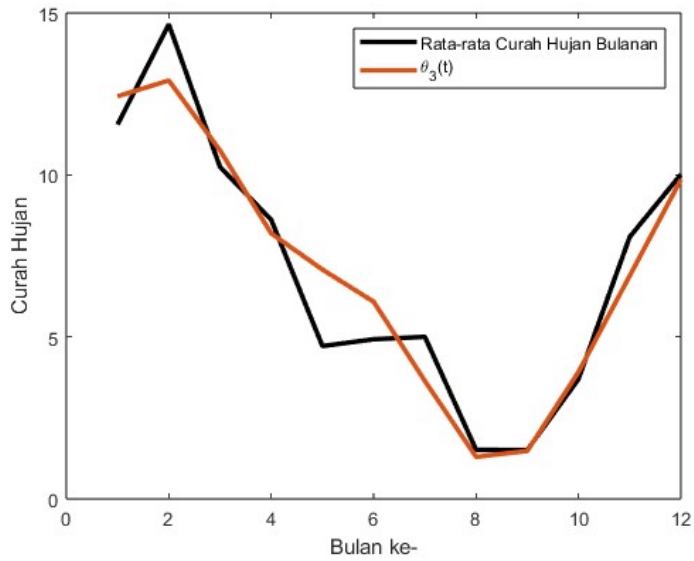
$$\begin{aligned} \theta_3(t) = m + a_1 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t - v)\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi}{6}(t - v)\right) \\ + a_3 \sin\left(\frac{3\pi}{6}(t - v)\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Metode Gauss-Newton memberikan nilai $m = 7,0433$; $a_1 = -5,2164$; $a_2 = 1,1075$; $a_3 = 0,5973$ dan $v = 5,0533$. Kelima parameter tersebut disubstitusikan dalam Persamaan (4.4) dan memberikan nilai $\theta_3(t)$ seperti pada Tabel 4.4. Plot nilai $\theta_3(t)$ terhadap rata-rata curah hujan bulanan ditunjukkan oleh Gambar 4.4. Skor MSE $\theta_3(t)$ terhadap rata-rata curah hujan bulanan adalah sebesar 1,21. Terlihat bahwa skor MSE mengalami penurunan.

Berdasarkan nilai MSE dua percobaan, yaitu saat $n = 2$ dan $n = 3$ dapat dikatakan bahwa terdapat potensi penurunan MSE jika berikutnya dilakukan penambahan harmonik. Oleh sebab itu, *fitting* deret Fourier *truncated* fungsi *sin* tetap dilanjutkan dengan menambahkan jumlah harmoniknya hingga mendapat skor MSE minimum dan visualisasi terbaik.

Tabel 4.4 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_3(t)$ menggunakan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *sin*.

t	Rata-rata Curah Hujan Bulanan	$\theta_3(t)$
1	11,55492473	12,4248678359780
2	14,64527543	12,9146602643610
3	10,24555376	10,7550674784007
4	8,61185719	8,19281337156789
5	4,715533749	7,07712609949558
6	4,925585714	6,08411923588883
7	5,000612903	3,63877488970058
8	1,513487931	1,29550717159479
9	1,504608796	1,47805723187656
10	3,700823833	3,91674390275356
11	8,08554127	6,88590646454861
12	10,01584719	9,85595605383391



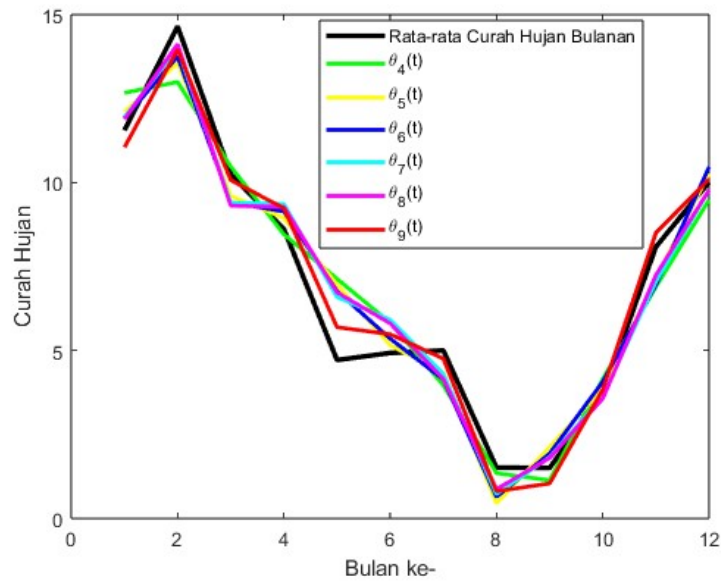
Gambar 4.4 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *sin* untuk $n = 3$.

Simulasi untuk mencari nilai rata-rata jangka panjang dilanjutkan dengan jumlah harmonik $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Tabel 4.5 memuat nilai MSE untuk masing-masing harmonik. Terlihat bahwa MSE terus mengalami penurunan seiring bertambahnya jumlah harmonik dan MSE terkecil terjadi saat $n = 10$, yaitu sebesar $1,9611 \times 10^{-8}$. Skor tersebut sudah sangat minim dan mendekati nol, sehingga *fitting* dengan deret Fourier *truncated* fungsi *sin* dapat dihentikan.

Tabel 4.5 Nilai MSE $\theta_n(t)$ untuk Fungsi *sin*.

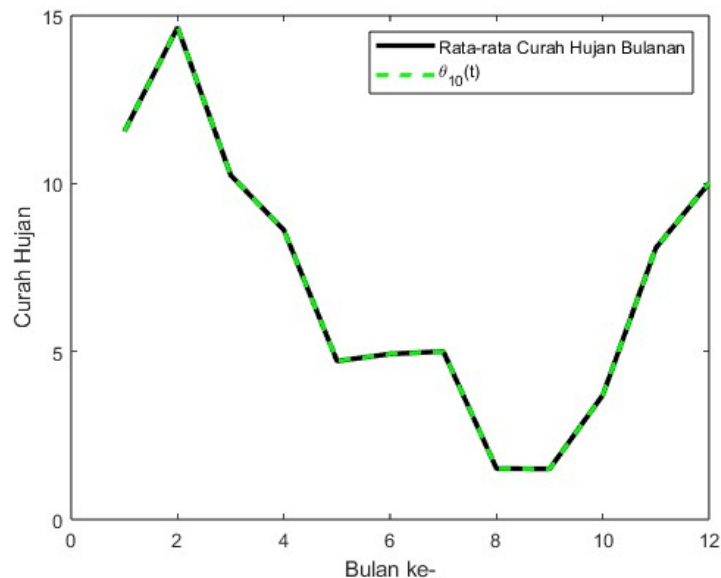
n	MSE
2	1,3474
3	1,21
4	1,1534
5	0,83638
6	0,79945
7	0,72235
8	0,71029
9	0,28271
10	$1,9611 \times 10^{-8}$

Plot nilai rata-rata jangka panjang untuk $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ terhadap nilai rata-rata curah hujan bulanan ditunjukkan oleh Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *sin* untuk $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Visualisasi hasil *fitting* terbaik menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi *sin* dapat dilihat pada Gambar 4.6.



Gambar 4.6 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *sin* untuk $n = 10$.

Tabel 4.6 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_{10}(t)$ menggunakan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *sin*.

t	Rata-rata Curah Hujan Bulanan	$\theta_{10}(t)$
1	11,55492473	11,5550565347698
2	14,64527543	14,6451077577723
3	10,24555376	10,2454203288118
4	8,61185719	8,61181002546867
5	4,715533749	4,71588204792374
6	4,925585714	4,92567112625033
7	5,000612903	5,00057396290689
8	1,513487931	1,51339322844131
9	1,504608796	1,50469375144058
10	3,700823833	3,70078805828865
11	8,08554127	8,08539831887615
12	10,01584719	10,0158048590499

Script MATLAB *fitting* deret Fourier *truncated* fungsi *sin* secara lengkap dimuat dalam Lampiran 3.

4.3.3 Estimasi $\theta(t)$ dengan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *cos*

Fitting dengan fungsi *cos* berada dalam kondisi $a_k = 0$, sehingga digunakan persamaan berikut:

$$\theta_n(t) = m + \sum_{k=1}^n b_k \cos\left(\frac{2k\pi}{12}(t - v)\right). \quad (4.5)$$

Simulasi untuk fungsi *cos* dilakukan untuk $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Estimasi parameter m, b_k dan v juga dilakukan menggunakan algoritma Gauss-Newton. *Fitting* menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi *cos* untuk jumlah harmonik $n = 2$ terdefinisi sebagai berikut:

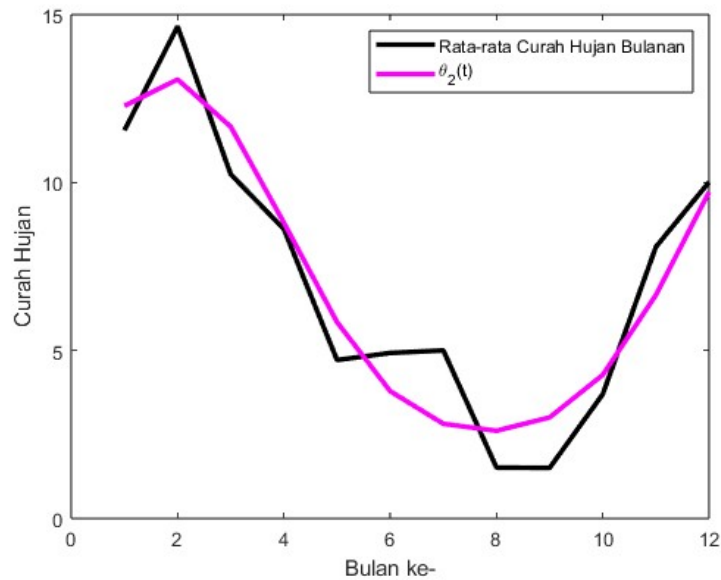
$$\theta_2(t) = m + b_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}(t - v)\right) + b_2 \cos\left(\frac{2\pi}{6}(t - v)\right). \quad (4.6)$$

Berdasarkan implementasi Gauss-Newton, diperoleh: $m = 7,0433; b_1 = 5,2454; b_2 = 0,8048$; dan $v = 1,8523$. Keempat parameter disubstitusikan ke dalam Persamaan (4.6) dan memberikan nilai $\theta_2(t)$ yang dimuat dalam Tabel 4.7. Berdasarkan perbandingan hasil simulasi terhadap nilai rata-rata curah hujan bulanan, diperoleh skor MSE sebesar 1,526. Nilai tersebut masih

Tabel 4.7 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_2(t)$ menggunakan Deret Fourier *Truncated Fungsi cos*.

t	Rata-rata Curah Hujan Bulanan	$\theta_2(t)$
1	11,55492473	12,2799670756542
2	14,64527543	13,0682145136545
3	10,24555376	11,6599696586294
4	8,61185719	8,80223366348046
5	4,715533749	5,84285589491423
6	4,925585714	3,78725746948948
7	5,000612903	2,81657124400923
8	1,513487931	2,60877049406991
9	1,504608796	3,00707702943152
10	3,700823833	4,27442801685607
11	8,08554127	6,65335909736139
12	10,01584719	9,71889584244963

lebih besar dibandingkan dengan hasil estimasi menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi *sin* walaupun berada dalam kondisi yang sama, yaitu $n = 2$. Plot estimasi $\theta_2(t)$ dengan menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi *cos* ditunjukkan oleh Gambar 4.7.

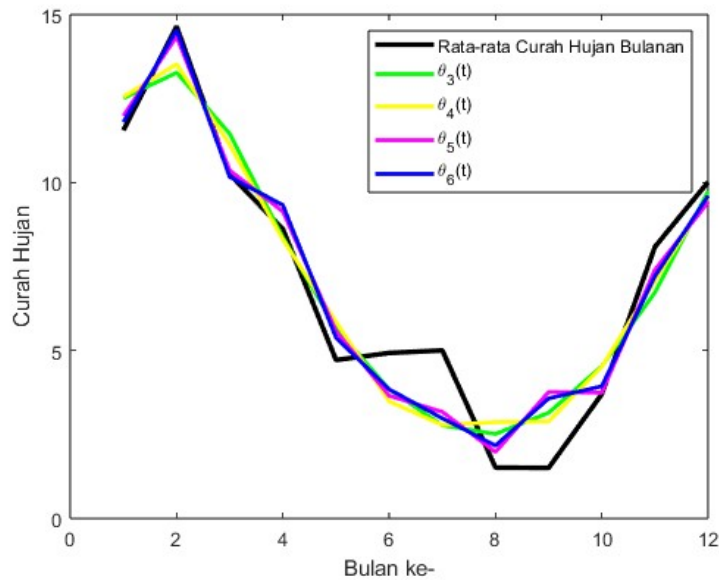


Gambar 4.7 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier *Truncated Fungsi cos* untuk $n = 2$.

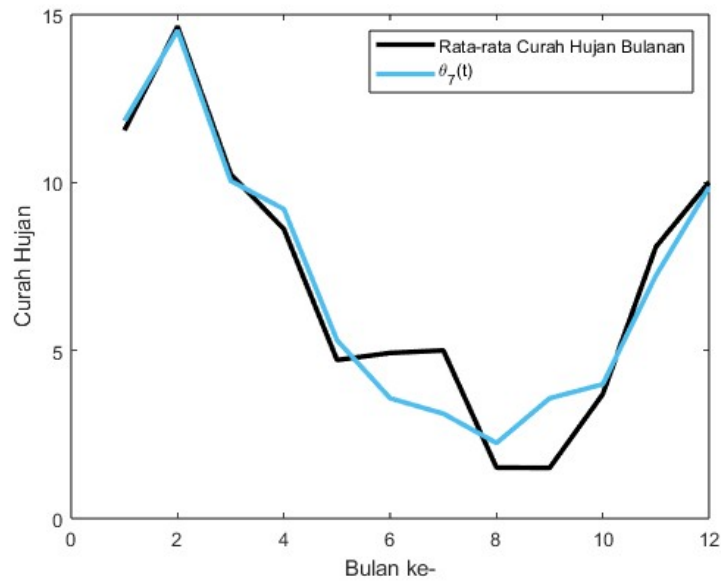
Simulasi dilanjutkan untuk $n = 3, 4, 5, 6$. Visualisasi hasil estimasi ditunjukkan oleh Gambar 4.8. Terlihat bahwa plot $\theta_n(t)$ semakin mendekati pola rata-rata curah hujan bulanan. Kondisi *fitting* terbaik dengan deret Fourier fungsi *cos* terjadi saat $n = 7$. Fungsi $\theta_7(t)$ dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \theta_7(t) = & m + b_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}(t - v)\right) + b_2 \cos\left(\frac{2\pi}{6}(t - v)\right) + b_3 \cos\left(\frac{3\pi}{6}(t - v)\right) \\ & + \dots + b_6 \cos\left(\frac{6\pi}{6}(t - v)\right) + b_7 \cos\left(\frac{7\pi}{6}(t - v)\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Script MATLAB implementasi Gauss-Newton untuk memperoleh nilai $m, b_1, b_2, \dots, b_6, b_7$, dan v dimuat dalam Lampiran 4. Secara berturut-turut kesembilan parameter tersebut bernilai 7,0433; -5,2390; 0,8958; -0,1406; 0,3245; -0,8559; 0,2653; -0,1978; dan 7,7578. Nilai parameter hasil simulasi kemudian disubstitusikan dalam Persamaan (4.7) dan memberikan nilai $\theta_7(t)$ seperti pada Tabel 4.8, serta visualisasinya terhadap data rata-rata curah hujan bulanan ditunjukkan Gambar 4.9.



Gambar 4.8 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *cos* untuk $n = 3, 4, 5, 6$.



Gambar 4.9 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Rata-rata Jangka Panjang menggunakan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *cos* untuk $n = 7$.

Tabel 4.8 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_7(t)$ menggunakan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *cos*.

t	Rata-rata Curah Hujan Bulanan	$\theta_7(t)$
1	11,55492473	11,9902689817366
2	14,64527543	14,3441121236835
3	10,24555376	10,3582388981926
4	8,61185719	9,13619741033013
5	4,715533749	5,57108041153508
6	4,925585714	3,65032758334004
7	5,000612903	3,17182958051825
8	1,513487931	1,97651119633669
9	1,504608796	3,76411651339485
10	3,700823833	3,74253756659959
11	8,08554127	7,40426561462267
12	10,01584719	9,41011411971004

Fitting menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi *cos* dengan $n = 7$ dikatakan terbaik karena MSE yang dihasilkan paling minimum dibanding saat $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Perhatikan Tabel 4.9, jelas bahwa MSE $n = 7$ adalah yang terkecil. Meskipun skor MSE mengalami penurunan, tetapi dengan jumlah harmonik yang sama skornya tidak pernah kurang dari hasil milik fungsi *sin* pada Tabel 4.5. Oleh karena itu, estimasi rata-rata jangka panjang

menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi *cos* dihentikan sampai $n = 7$ saja.

Tabel 4.9 Nilai MSE $\theta_n(t)$ untuk Fungsi *cos*.

n	MSE
2	1,526
3	1,4709
4	1,4197
5	1,0353
6	0,99833
7	0,98868

Berdasarkan tiga cara estimasi yang dilakukan untuk memperoleh nilai rata-rata jangka panjang, *fitting* terbaik ditunjukkan oleh deret Fourier *truncated* fungsi *sin* dengan jumlah harmonik 10. Oleh sebab itu, hasil estimasi tersebutlah yang digunakan untuk validasi model stokastik Ornstein-Uhlenbeck modifikasi.

4.4 Estimasi Volatilitas dan Kecepatan *Mean-reversion*

Komponen lain yang diestimasi, yaitu volatilitas (σ) serta *mean-reversion* (α). Volatilitas diestimasi dengan mengikuti Persamaan (2.28):

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{N_\mu} \sum_{j=0}^{N_\mu-1} (x_{j+1} - x_j)^2.$$

N_μ merupakan banyak bulan yang diobservasi, dalam hal ini 12 bulan. Sedangkan x_j menyatakan curah hujan ke- j . Nilai volatilitas yang dihasilkan, yaitu 7,2286. *Script* MATLAB untuk mengestimasi volatilitas dimuat oleh Lampiran 5.

Estimasi *mean-reversion* dilakukan menggunakan Persamaan (2.32) yang dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\alpha = -\log \left(\frac{\sum_{i=1}^n Z_{i-1}(x_i - \theta_i)}{\sum_{i=1}^n Z_{i-1}(x_{i-1} - \theta_{i-1})} \right),$$

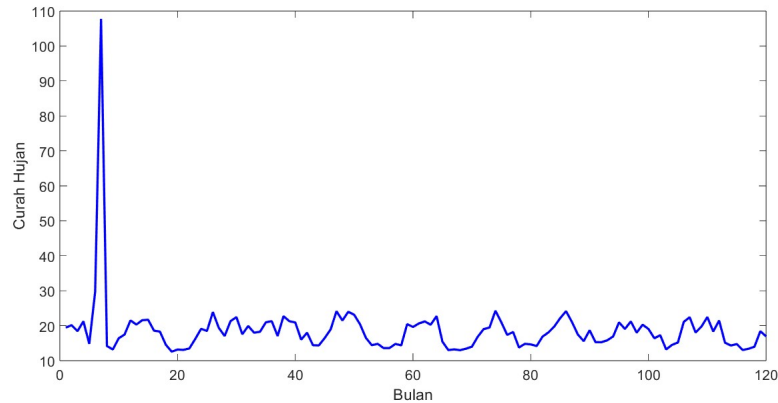
dimana

$$Z_{i-1} = \frac{\theta_{i-1} - x_{i-1}}{\sigma^2}.$$

x_i menyatakan curah hujan ke- i . Komponen musiman θ_i telah diperoleh sebelumnya, seperti termuat dalam Tabel 4.6. Begitu pula nilai volatilitas juga telah didapatkan. Nilai α yang diperoleh, yaitu 1,5834. *Script* MATLAB estimasi *mean-reversion* ada dalam Lampiran 6.

4.5 Pengolahan Data Tanpa diawali Interpolasi

Subbab 4.2 hingga 4.4 memuat serangkaian pengolahan data menggunakan interpolasi. Sebaliknya, bagian ini berisi serangkaian pengolahan data tanpa diawali dengan interpolasi. Data curah hujan yang semula dalam skala harian dirubah menjadi skala bulanan dengan langsung mencari nilai rata-rata curah hujan, sehingga total data curah hujan saat ini ada sebanyak 120 data, seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.10.



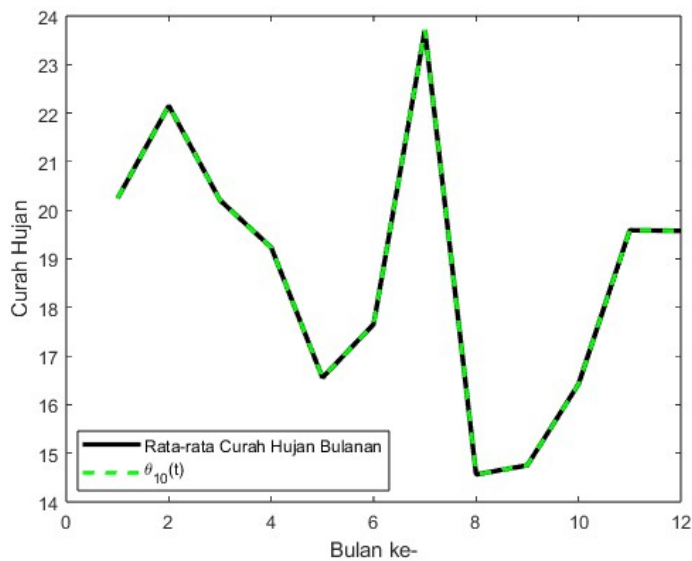
Gambar 4.10 Data Curah Hujan di Jawa Timur Tanpa Interpolasi.

Dari 120 data curah hujan dengan skala bulanan, kemudian dicari nilai rata-rata tiap bulan yang sama dari tahun yang berbeda. Berikutnya dapat dilakukan estimasi paramater, di antaranya nilai rata-rata jangka panjang dari curah hujan, nilai volatilitas, dan kecepatan *mean-reversion*. Estimasi nilai rata-rata jangka panjang ($\theta(t)$) menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi *sin* dilakukan dengan jumlah harmonik $n = 10$. Hasil estimasi dimuat oleh Tabel 4.10 dan plot yang ditunjukkan Gambar 4.11. Skor MSE yang dihasilkan, yaitu sebesar $1,3207 \times 10^{-7}$. Skor tersebut lebih besar nilainya dibandingkan MSE $\theta_{10}(t)$ milik fungsi *sin* yang diawali interpolasi data. Hasil estimasi rata-

rata jangka panjang $\theta_{10}(t)$ tanpa interpolasi ini tetap digunakan agar dapat dibandingkan hasil akhirnya dengan yang diawali dengan interpolasi.

Tabel 4.10 Perbandingan Nilai Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan $\theta_{10}(t)$ menggunakan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *sin* Tanpa Interpolasi.

t	Rata-rata Curah Hujan Bulanan	$\theta_{10}(t)$
1	20,24744678	20,2474349
2	22,14963019	22,14956749
3	20,20649032	20,20592173
4	19,23430099	19,23501987
5	16,55482978	16,55466903
6	17,65584891	17,65522917
7	23,71305481	23,71344997
8	14,56340235	14,5631685
9	14,75090843	14,750806
10	16,42331919	16,42311462
11	19,58790231	19,58792676
12	19,57743323	19,57769195



Gambar 4.11 Perbandingan Nilai Rata-Rata Jangka Panjang Curah Hujan $\theta_{10}(t)$ terhadap Rata-rata Curah Hujan Bulanan dengan Deret Fourier *Truncated* Fungsi *sin*.

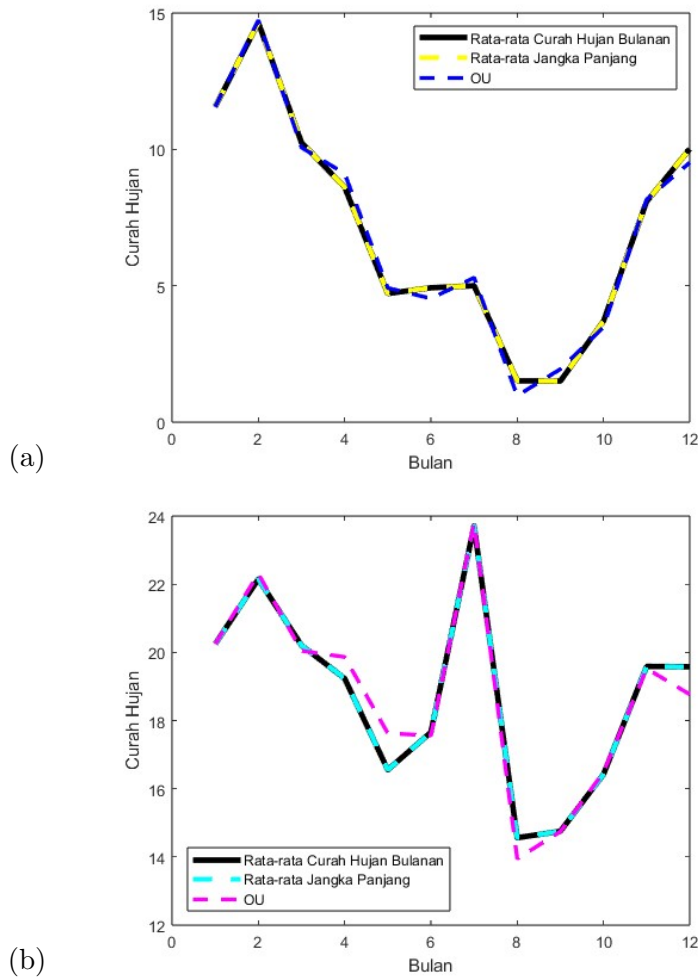
Estimasi berikutnya, yaitu untuk mendapatkan nilai parameter volatilitas serta kecepatan *mean-reversion*. Kedua parameter tersebut didapat dengan menerapkan Persamaan (2.28) dan Persamaan (2.32). Secara berturut-turut, nilai volatilitas serta kecepatan *mean-reversion* yang dihasilkan, yaitu 12,4986 dan 0,64867.

4.6 Validasi Model Ornstein-Uhlenbeck Modifikasi

Bagian ini memuat penjelasan bagaimana model Ornstein-Uhlenbeck yang telah dimodifikasi mampu menggambarkan perilaku curah hujan di Jawa Timur. Melalui beberapa simulasi sebelumnya, diperoleh nilai rata-rata jangka panjang, volatilitas, serta *mean-reversion*. Model stokastik Ornstein-Uhlenbeck yang digunakan adalah sebagai berikut:

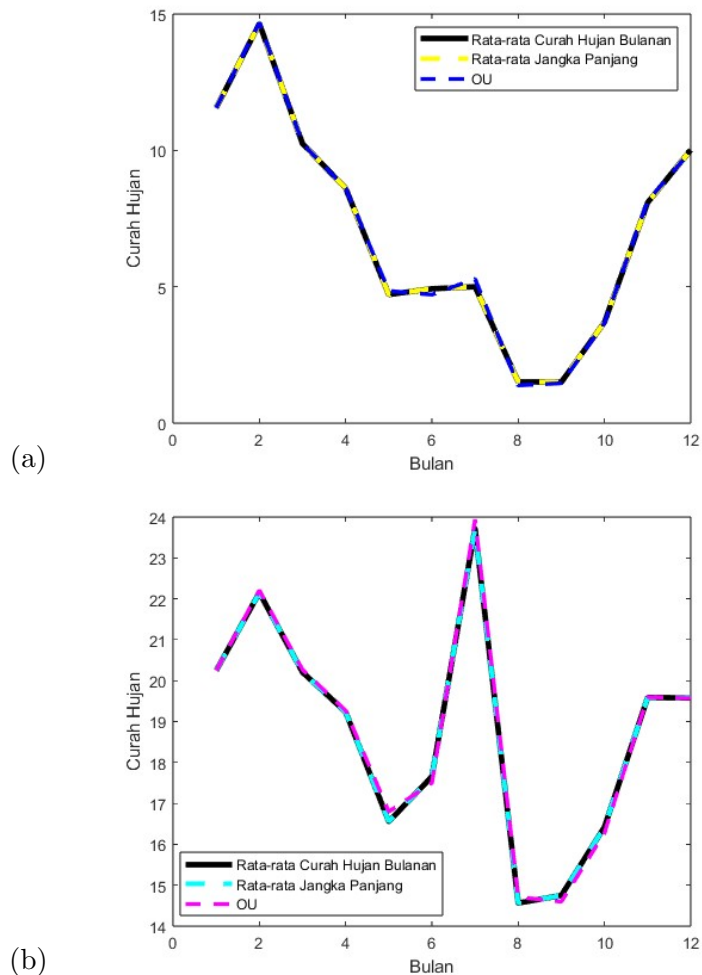
$$dx_t = [\alpha(\theta(t) - X_t) + \theta'(t)]dt + \sigma dW_t^Q.$$

Parameter yang telah didapatkan kemudian disubstitusikan dalam dx_t . *Script* MATLAB simulasi Ornstein-Uhlenbeck dimuat oleh Lampiran 7.



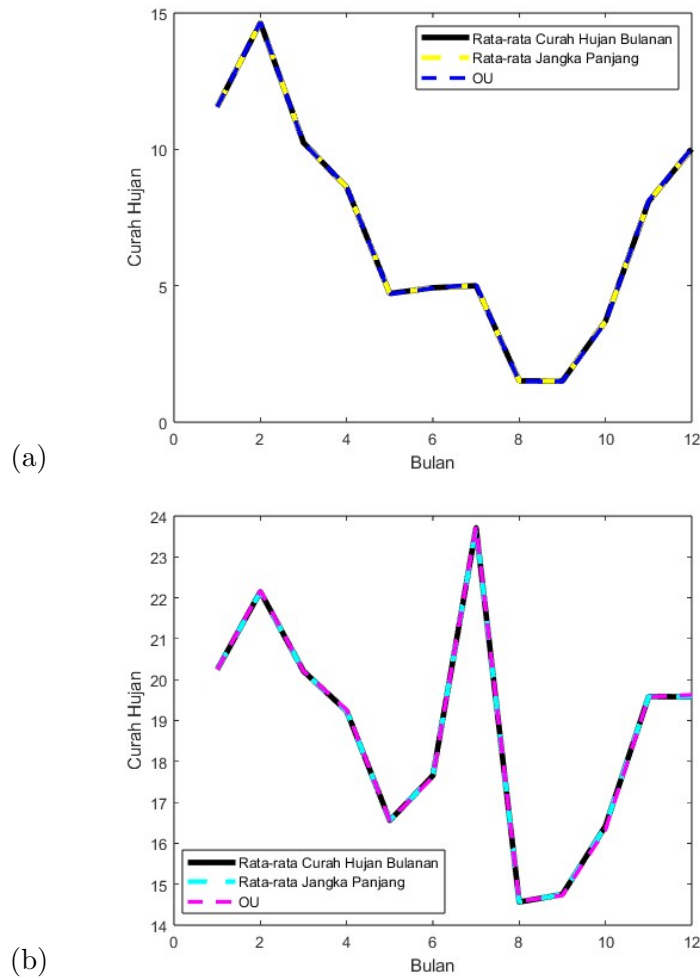
Gambar 4.12 Hasil Simulasi Ornstein-Uhlenbeck dengan 1.000 Iterasi (a) diawali Interpolasi (b) Tanpa Interpolasi.

Perlu diingat juga bahwa terdapat dua skema yang dibahas, yaitu yang diawali dengan interpolasi dan tanpa interpolasi. Hasil simulasi dengan 1000 iterasi ditunjukkan Gambar 4.12. Terlihat bahwa plot Ornstein-Uhlenbeck telah mengikuti pola data rata-rata curah hujan bulanan. Gambar 4.12a merupakan hasil simulasi Ornstein-Uhlenbeck jika diawali interpolasi, dengan skor MSE sebesar 0,11374. Sedangkan, Gambar 4.12b menunjukkan hasil simulasi Ornstein-Uhlenbeck tanpa diawali dengan interpolasi. Skor MSE yang dihasilkan yaitu 0,22167, lebih besar dibanding dengan hasil milik yang diinterpolasi.



Gambar 4.13 Hasil Simulasi Ornstein-Uhlenbeck dengan 10.000 Iterasi (a) diawali Interpolasi (b) Tanpa Interpolasi.

Iterasi ditingkatkan menjadi 10.000 seperti ditunjukkan oleh Gambar 4.13. Skor MSE yang dihasilkan, yaitu secara berturut-turut untuk yang diawali dengan interpolasi dan tanpa interpolasi bernilai 0,014237 dan 0,017413. Ketika ditingkatkan lagi menjadi 100.000 iterasi, nilai MSE yang dihasilkan menjadi semakin baik. Secara berturut-turut skor MSE simulasi Ornstein-Uhlenbeck dengan interpolasi dan tanpa interpolasi, yaitu sebesar 0,00049373 dan 0,0013167. Kedua nilai *error* tersebut sudah sangat minim dengan visualisasi yang juga semakin serupa data asli seperti yang ditunjukkan Gambar 4.14. Hal tersebut menunjukkan bahwa model Ornstein-Uhlenbeck yang telah dimodifikasi merupakan model yang tepat untuk menggambarkan perilaku curah hujan di Jawa Timur.



Gambar 4.14 Hasil Simulasi Ornstein-Uhlenbeck dengan 100.000 Iterasi (a) diawali Interpolasi (b) Tanpa Interpolasi.

4.7 Solusi Numerik

Bagian ini memuat proses mendapatkan solusi numerik yang meliputi transformasi variabel waktu, penentuan kondisi batas, pendiskritan persamaan diferensial parsial, dan valuasi opsi curah hujan menggunakan skema beda hingga eksplisit.

4.7.1 Transformasi Variabel Waktu

Diketahui PDP (2.22) untuk valuasi opsi curah hujan yang dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f(x) \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - rV = 0.$$

Penyelesaian masalah diawali dengan melakukan perubahan variabel $\tau - \tau_0 = T - t$. Dalam konteks valuasi opsi dan analisis PDP, transformasi dari waktu t ke waktu hingga jatuh tempo $\tau - \tau_0 = T - t$ sering digunakan untuk menyederhanakan pemecahan masalah. Transformasi tersebut mengakibatkan data diinterpretasikan sebagai kondisi awal daripada kondisi terminal. PDP menjadi:

$$\frac{\partial V}{\partial t} - f(x) \frac{\partial V}{\partial y} - \gamma(x, \tau) \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rV = 0, \quad (4.8)$$

dengan $\gamma(x, \tau) = \alpha(\theta(T + \tau_0 - \tau) - x) - \theta'(T + \tau_0 - \tau)$. Kontrak dilakukan dalam domain waktu $[\tau_0, \tau_f]$ dengan $\tau_f = T + \tau_0$ dan T adalah waktu jatuh tempo. Berikutnya diberikan kondisi awal opsi *call* tipe Eropa, yaitu :

$$V_C(x, y, \tau_0) = tick \times (y - K)^+, \quad (4.9)$$

serta kondisi batas yang didefinisikan oleh (Clarinda Nhangumbe, 2024):

$$\frac{\partial V_C}{\partial x}(x_{min}, y, \tau) = 0,$$

$$V_C(x_{max}, y, \tau) = tick \times (y - Ke^{-r(\tau-\tau_0)})^+,$$

$$V_C(x, y_{max}, \tau) = tick \times (y_{max} - Ke^{-r(\tau-\tau_0)}). \quad (4.10)$$

4.7.2 Diskritisasi Persamaan Diferensial Parsial

Pendekatan terhadap Persamaan (4.8) dengan metode beda hingga mempertimbangkan domain komputasi: $[x_{min}, x_{max}]$ untuk sumbu x , $[y_{min}, y_{max}]$ untuk sumbu y , dan $[\tau_0, \tau_f]$ untuk sumbu waktu. Titik-titik *grid* pada domain diskrit ditempatkan secara merata baik dalam ruang maupun waktu dengan langkah yang dinyatakan oleh (Clarinda Nhangumbe, 2024):

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{N_x}, \quad (4.11)$$

$$\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{N_y},$$

$$\Delta \tau = \frac{\tau_f - \tau_0}{N_\tau}. \quad (4.12)$$

Oleh karena itu, domain komputasional dinyatakan sebagai himpunan semua kombinasi titik-titik *grid* yang didefinisikan oleh variabel diskrit:

$$\{(x_j, y_k, \tau_n), j = 0, \dots, N_x; k = 0, \dots, N_y; n = 0, \dots, N_\tau\},$$

dengan

$$\begin{aligned} x_j &= x_{min} + j\Delta x, \\ y_k &= y_{min} + k\Delta y, \\ \tau_n &= \tau_0 + n\Delta \tau. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Variabel x_j mewakili nilai curah hujan ke- j , y_k mewakili indeks kumulatif curah hujan ke- k , dan τ_n mewakili periode waktu. N_x, N_y, N_τ adalah jumlah indeks dalam rentang diskrit untuk masing-masing variabel. Pendekatan solusi untuk $V(x, y, \tau)$ dinyatakan oleh $V_{j,k}^n \approx V(x_j, y_k, \tau_n)$. Kemudian untuk fungsi $f(x)$ dinyatakan sebagai $f_j = f(x_j)$ yang berarti f_j adalah nilai fungsi f pada titik x_j dalam domain diskrit. Sedangkan fungsi $\gamma(x, \tau)$ dinyatakan sebagai $\gamma_j^n = \gamma(x_j, \tau_n)$, artinya γ_j^n adalah nilai parameter γ pada titik x_j dan τ_n dalam domain diskrit.

Perhatikan Persamaan (4.8), khususnya pada fungsi f dan γ . Fungsi f selalu bernilai tak negatif, sehingga digunakan pendekatan *downwind* pada arah y (Clarinda Nhangumbe, 2024). Pergerakan metode *downwind* adalah searah, oleh sebab itu metode ini mampu menjaga stabilitas dan akurasi dari simulasi.

Dalam konteks PDP dan pemodelan matematika, difusi dan adveksi adalah dua proses penting yang menggambarkan pergerakan serta perubahan zat. Persamaan (4.8) melibatkan "difusi-adveksi" untuk menggambarkan pergerakan nilai opsi dalam domain ruang dan waktu. Komponen difusi ditunjukkan oleh volatilitas, sedangkan komponen adveksi dinyatakan dengan $\gamma(x, \tau)$. Fungsi $\gamma(x, \tau)$ dapat bernilai positif atau negatif, sehingga digunakan skema Lax-Wendroff (Clarinda Nhangumbe, 2024). Selain itu, penggunaan Lax-Wendroff pada skema eksplisit, yaitu sebab Lax-Wendroff mampu memberikan pendekatan yang stabil dan akurat meskipun dalam kondisi volatilitas yang rendah dan didominasi oleh komponen adveksi $\gamma(x, \tau)$.

Berikut ini beberapa skema yang digunakan untuk mendiskritisasi PDP (4.8):

(a) Skema *downwind* pada arah y :

$$\frac{\partial V}{\partial y} \approx \frac{V_{j,k+1}^n - V_{j,k}^n}{\Delta y}. \quad (4.14)$$

(b) Skema Lax-Wendroff untuk komponen adveksi:

Ekspansi deret Taylor dari V di sekitar (x, τ) untuk waktu $\tau + \Delta\tau$ adalah sebagai berikut:

$$V(x, \tau + \Delta\tau) = V(x, \tau) + \Delta\tau \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{(\Delta\tau)^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + O((\Delta\tau)^3). \quad (4.15)$$

Diketahui persamaan adveksi:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = -c \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (4.16)$$

dengan mengambil turunan terhadap waktu dari Persamaan (4.16), diperoleh:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (4.17)$$

Substitusi Persamaan (4.16) dan (4.17) ke dalam bentuk ekspansi deret Taylor Persamaan (4.15) menghasilkan:

$$V(x, \tau + \Delta\tau) = V(x, \tau) - c\Delta\tau \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{(\Delta\tau)^2}{2} c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + O((\Delta\tau)^3). \quad (4.18)$$

Langkah berikutnya, yaitu digunakan pendekatan beda hingga pusat orde satu dan dua untuk diskritisasi turunan parsial dalam ruang. Secara berturut-turut kedua pendekatan tersebut dinyatakan oleh:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{V_{j+1,k} - V_{j-1,k}}{2\Delta x}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{V_{j+1,k} - 2V_{j,k} + V_{j-1,k}}{\Delta x^2}. \quad (4.20)$$

Substitusi Persamaan (4.19) dan (4.20) ke dalam Persamaan (4.18), didapat:

$$\begin{aligned} V_{j,k}^{n+1} &= V_{j,k}^n - \frac{c\Delta\tau}{2\Delta x} (V_{j+1,k}^n - V_{j-1,k}^n) + \frac{c^2\Delta\tau^2}{2\Delta x^2} \dots \\ &\quad (V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Untuk $c = \gamma_j^n$, skema Lax-Wendroff dinyatakan sebagai berikut (LeVeque, 1992):

$$\begin{aligned} V_{j,k}^{n+1} &= V_{j,k}^n - \frac{\gamma_j^n \Delta\tau}{2\Delta x} (V_{j+1,k}^n - V_{j-1,k}^n) + \frac{(\gamma_j^n)^2 \Delta\tau^2}{2\Delta x^2} (V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n) \\ &\Leftrightarrow \frac{V_{j,k}^{n+1} - V_{j,k}^n}{\Delta\tau} + \frac{\gamma_j^n}{2\Delta x} (V_{j+1,k}^n - V_{j-1,k}^n) - \frac{(\gamma_j^n)^2 \Delta\tau}{2\Delta x^2} \dots \\ &\quad (V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n) = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Skema Lax-Wendroff memiliki akurasi orde kedua dalam waktu dan ruang dengan *error* diskritisasi $O(\Delta\tau^2)$ dan $O(\Delta x^2)$.

(c) Skema beda pusat untuk orde dua:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n}{\Delta x^2}. \quad (4.23)$$

Persamaan (4.14), (4.22), dan (4.23) disubstitusikan dalam persamaan diferensial parsial, sehingga diperoleh skema beda hingga eksplisit yang sesuai dengan PDP (4.8) seperti yang dinyatakan oleh Persamaan (4.24).

$$\begin{aligned} & \frac{V_{j,k}^{n+1} - V_{j,k}^n}{\Delta\tau} - f_j \left(\frac{V_{j,k+1}^n - V_{j,k}^n}{\Delta y} \right) - \frac{\gamma_j^n}{2\Delta x} (V_{j+1,k}^n - V_{j-1,k}^n) - \frac{(\gamma_j^n)^2 \Delta\tau}{2\Delta x^2} \dots \\ & (V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n) - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n}{\Delta x^2} \right) + rV_{j,k}^n = 0 \\ \Leftrightarrow & V_{j,k}^{n+1} - V_{j,k}^n - \frac{f_j \Delta\tau}{\Delta y} (V_{j,k+1}^n - V_{j,k}^n) - \frac{\gamma_j^n \Delta\tau}{2\Delta x} (V_{j+1,k}^n - V_{j-1,k}^n) - \frac{(\gamma_j^n)^2 \Delta\tau^2}{2\Delta x^2} \dots \\ & (V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n) - \frac{\sigma^2 \Delta\tau}{2\Delta x^2} (V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n) + r\Delta\tau V_{j,k}^n = 0 \\ \Leftrightarrow & V_{j,k}^{n+1} = V_{j,k}^n - r\Delta\tau V_{j,k}^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta y} f_j (V_{j,k+1}^n - V_{j,k}^n) + \frac{\gamma_j^n \Delta\tau}{2\Delta x} (V_{j+1,k}^n - V_{j-1,k}^n) + \\ & \frac{(\gamma_j^n)^2 \Delta\tau^2}{2\Delta x^2} (V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n) + \frac{\sigma^2 \Delta\tau}{2\Delta x^2} (V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n) \\ \Leftrightarrow & V_{j,k}^{n+1} = V_{j,k}^n - r\Delta\tau V_{j,k}^n + \frac{\Delta\tau}{\Delta y} f_j (V_{j,k+1}^n - V_{j,k}^n) + \frac{\gamma_j^n \Delta\tau}{2\Delta x} (V_{j+1,k}^n - V_{j-1,k}^n) + \\ & \left[\frac{(\gamma_j^n)^2 \Delta\tau^2}{2\Delta x^2} + \frac{\sigma^2 \Delta\tau}{2\Delta x^2} \right] (V_{j+1,k}^n - 2V_{j,k}^n + V_{j-1,k}^n). \quad (4.24) \end{aligned}$$

Untuk memudahkan proses komputasi, dilakukan perubahan variabel pada Persamaan (4.24) menjadi seperti berikut ini:

$$V_{j,k}^{n+1} = AV_{j,k}^n + BV_{j+1,k}^n + CV_{j-1,k}^n + DV_{j,k+1}^n \quad (4.25)$$

dengan

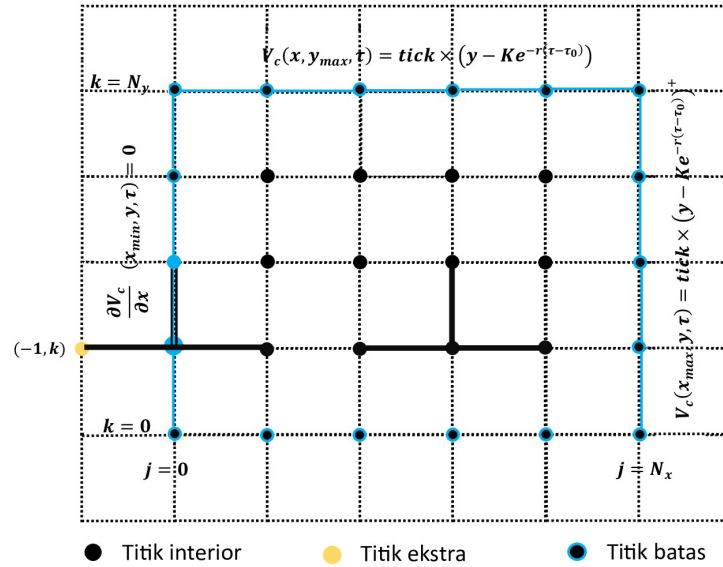
$$A = 1 - r\Delta\tau - \frac{\Delta\tau}{\Delta y} f_j - 2 \left(\frac{(\gamma_j^n)^2 \Delta\tau^2}{2\Delta x^2} + \frac{\sigma^2 \Delta\tau}{2\Delta x^2} \right), \quad (4.26)$$

$$B = \frac{\gamma_j^n \Delta\tau}{2\Delta x} + \left(\frac{(\gamma_j^n)^2 \Delta\tau^2}{2\Delta x^2} + \frac{\sigma^2 \Delta\tau}{2\Delta x^2} \right), \quad (4.27)$$

$$C = -\frac{\gamma_j^n \Delta\tau}{2\Delta x} + \left(\frac{(\gamma_j^n)^2 \Delta\tau^2}{2\Delta x^2} + \frac{\sigma^2 \Delta\tau}{2\Delta x^2} \right), \quad (4.28)$$

$$D = \frac{\Delta\tau}{\Delta y} f_j. \quad (4.29)$$

Perhatikan Gambar 4.15, pada kasus opsi *call* di arah sumbu x terdapat dua kondisi batas, sedangkan di arah sumbu y hanya terdapat satu kondisi batas. Titik-titik $\{(0, k) : k = 0, 1, \dots, N_y\}$ mewakili kondisi batas Neumann. Titik-titik $\{(N_x, k) : k = 0, 1, \dots, N_y - 1\}$ dan $(j, N_y) : j = 0, 1, \dots, N_x\}$ mewakili kondisi batas Dirichlet. Nilai pada kondisi batas Dirichlet adalah trivial, berbeda halnya dengan kondisi Neumann yang berbentuk gradien atau perubahan fungsi. Oleh karena itu, nilai batas Neumann perlu diaproksimasi menggunakan beda pusat untuk turunan orde pertama, yaitu pada $j = 0$ digunakan $V_{1,k}^n = V_{-1,k}^n$ pada setiap langkah waktu.



Gambar 4.15 Skema Beda Hingga Eksplisit untuk Opsi *Call*.

4.7.3 Valuasi Opsi Curah Hujan Menggunakan Data Curah Hujan yang diinterpolasi

Pada bagian ini, disajikan simulasi untuk mendapatkan nilai opsi curah hujan menggunakan data curah hujan Jawa Timur tahun 2014-2023 yang telah diinterpolasi. Seluruh proses penghitungan nilai opsi dilakukan menggunakan MATLAB dengan *script* yang termuat dalam Lampiran 8. Kondisi yang diamati dalam Tesis ini, yaitu saat *rainfall excess* (RE) yang diwakili oleh fungsi $f_j = maks(0, x_j - x_{das})$. x_{das} menyatakan rata-rata curah hujan bulanan selama jumlah bulan yang termasuk dalam suatu periode. Nilai suku bunga bebas risiko yang digunakan, yaitu $r = 0,06$ mengacu pada BI *rate*. Ukuran *tick* adalah 5 poin dengan satuan rupiah yang dipilih berdasarkan

Tabel 4.11 Parameter-parameter untuk Valuasi Opsi Curah Hujan

Parameter	Nilai
α	1,5834
σ	7,2286
r	0,06
K	2,276586947
$tick$	5
x_{das}	7,0433
x_{min}	0
x_{max}	200
y_{min}	0
y_{max}	200

kategori rata-rata nilai saham yang bergerak pada sektor pertanian. Nilai parameter volatilitas (σ) dan kecepatan *mean-reversion* (α) dalam proses Ornstein-Uhlenbeck telah diestimasi sebelumnya, dan termuat dalam Subbab 4.3. *Strike price* (K) pada kontrak opsi didapat dengan mengambil nilai rata-rata indeks curah hujan selama periode kontrak. Nilai curah hujan minimum dan maksimum secara berturut-turut dinyatakan oleh x_{min} dan x_{max} , lalu nilai indeks kumulatif curah hujan minimum dan maksimum dinyatakan dengan y_{min} dan y_{max} . Seluruh parameter yang diperlukan dalam simulasi dimuat dalam Tabel 4.11. Fungsi rata-rata jangka panjang $\theta(T + \tau_0 - \tau)$ didefinisikan

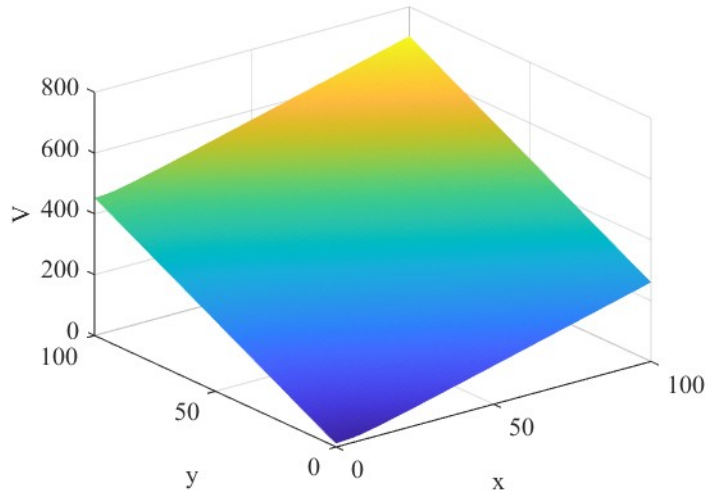
oleh:

$$\begin{aligned} \theta_{10}(T + \tau_0 - \tau) = & m + a_1 \sin \left(\frac{\pi(T + \tau_0 - \tau - v)}{6} \right) + a_2 \sin \dots \\ & \left(\frac{2\pi(T + \tau_0 - \tau - v)}{6} \right) + a_3 \sin \left(\frac{3\pi(T + \tau_0 - \tau - v)}{6} \right) \\ & + \dots + a_{10} \sin \left(\frac{10\pi(T + \tau_0 - \tau - v)}{6} \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

dengan turunan fungsi Persamaan (4.30) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \theta'_{10}(T + \tau_0 - \tau) = & a_1 \frac{\pi}{6} \sin \left(\frac{\pi(T + \tau_0 - \tau - v)}{6} \right) + a_2 \frac{2\pi}{6} \sin \dots \\ & \left(\frac{2\pi(T + \tau_0 - \tau - v)}{6} \right) + a_3 \frac{3\pi}{6} \sin \left(\frac{3\pi(T + \tau_0 - \tau - v)}{6} \right) \\ & + \dots + a_{10} \frac{10\pi}{6} \sin \left(\frac{10\pi(T + \tau_0 - \tau - v)}{6} \right) .. \end{aligned} \quad (4.31)$$

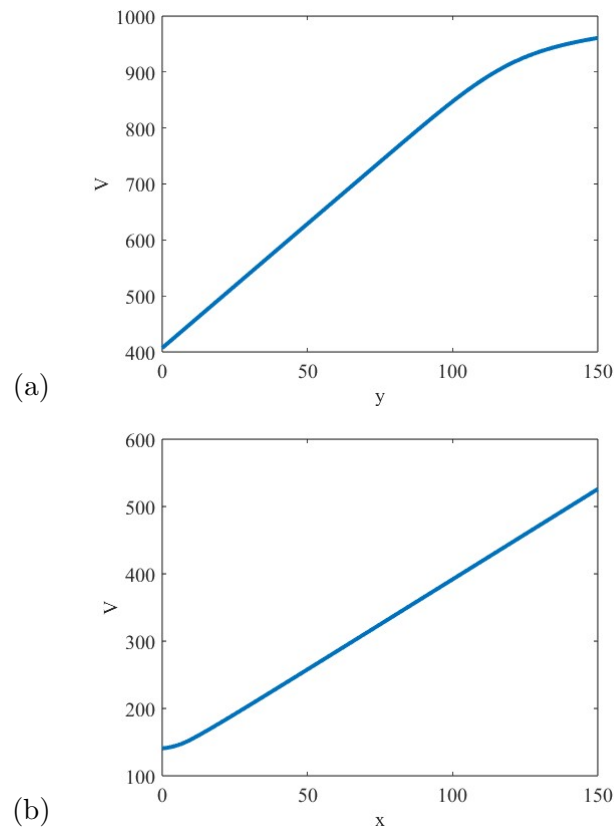
Persamaan (4.30) dan (4.31) digunakan untuk mendapatkan nilai γ_j^n .



Gambar 4.16 Profil 3 Dimensi $V(x, y, T)$ Opsi *Call* untuk $\tau_0 = 1$ dan $T = 2$.

Hasil valuasi dalam bentuk tiga dimensi dan dua dimensi secara berturut-turut ditunjukkan oleh Gambar 4.16 dan Gambar 4.17 dengan waktu komputasi 106,3375 detik. Gambar 4.16 menampilkan perilaku keseluruhan dari opsi *call* curah hujan dengan kontrak selama 2 bulan, dari bulan Februari

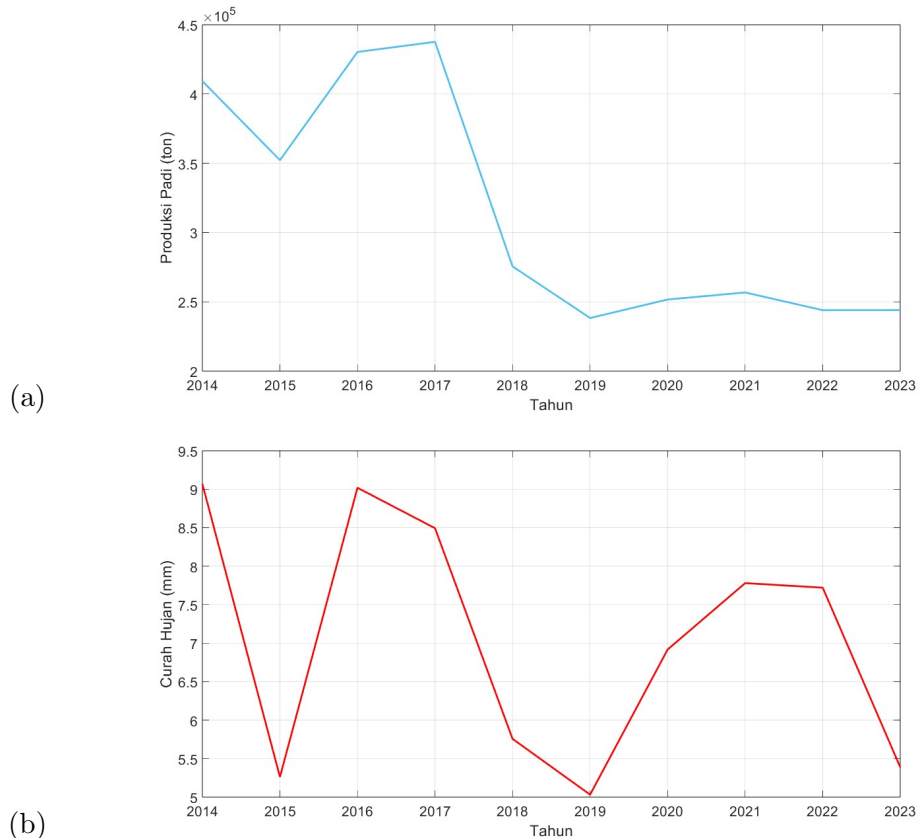
$\tau_0 = 1$ dan berakhir pada bulan April $T + \tau_0 = 3$ di daerah Jawa Timur. Gambar 4.17a dan Gambar 4.17b menampilkan kontur $V(x, y, T)$ yang lebih jelas untuk nilai curah hujan dan indeks kumulatif RE tertentu. Terlihat bahwa harga opsi *call* meningkat seiring peningkatan indeks RE (y) dan curah hujan (x). Peningkatan nilai opsi *call* tersebut hanya terbatas sampai nilai x_{max} dan y_{max} yang telah didefinisikan. Jika melebihi nilai x_{max} dan y_{max} , maka pembayaran ganti rugi tidak bisa menggunakan produk derivatif berupa opsi, melainkan menggunakan asuransi.



Gambar 4.17 Profil 2 Dimensi $V(x, y, T)$ saat $\tau_0 = 1$ dan $T = 2$. (a) Opsi *call* dengan $x = 30$ (b) Opsi *call* dengan $y = 100$.

Dalam konteks pertanian, terdapat keterkaitan yang menarik antara opsi, curah hujan, dan produksi padi. Keterkaitan tersebut yaitu dalam hal manajemen risiko dan strategi pertanian. Curah hujan yang tinggi dapat memberikan dampak signifikan terhadap pertumbuhan tanaman dan kualitas hasil panen. Jika ditinjau dari dampak positifnya, maka curah hujan yang

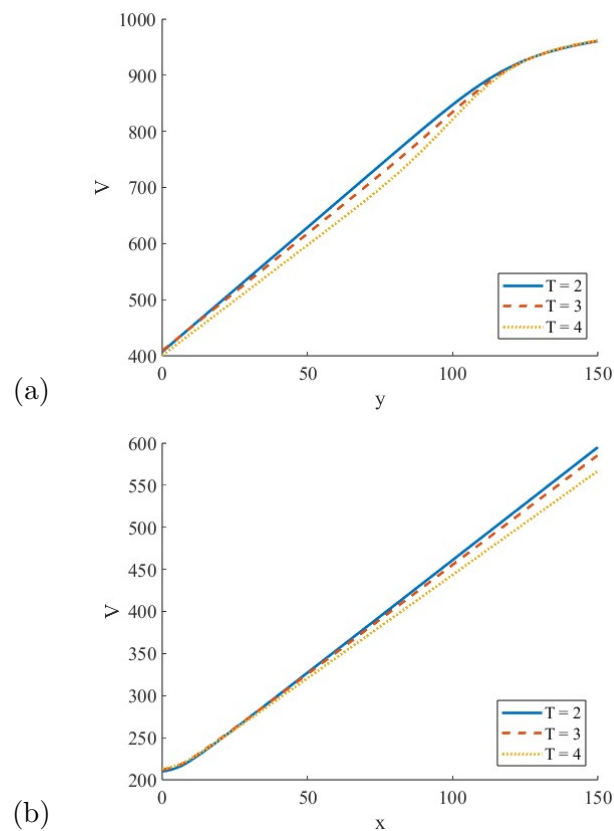
tinggi berarti meningkatkan pertumbuhan padi serta menghasilkan beras yang unggul. Perhatikan Gambar 4.18, pada tahun 2015-2016 terlihat bahwa jumlah produksi padi mengalami kenaikan seiring dengan meningkatnya curah hujan. Hal tersebut menjadi sinyal positif bagi perusahaan pertanian karena harga beras dapat mengalami kenaikan. Memang pada umumnya ketika produksi padi meningkat, harga beras turun atau setidaknya tetap stabil karena pasokan yang lebih besar. Tetapi dalam kenyataan ada banyak faktor lain yang dapat mempengaruhi harga beras. Faktor-faktor tersebut, yaitu tingginya biaya produksi seperti harga pupuk, lalu tingginya permintaan menjelang hari besar, dan lain-lain (Cahyani, 2024).



Gambar 4.18 Pertumbuhan Tanaman Padi Berdasarkan Curah Hujan di Jawa Timur (2014-2023) (a) Jumlah Produksi Tanaman Padi (ton) (b) Curah Hujan (mm).

Sebaliknya, peningkatan nilai opsi *call* seiring dengan peningkatan curah hujan dan indeks RE juga mengartikan adanya peningkatan risiko akibat

curah hujan berlebih. Perhatikan kembali Gambar 4.18, pada tahun 2019-2022 curah hujan yang dialami tidak jauh berbeda dengan tahun 2016-2017, akan tetapi jumlah produksi padinya rendah. Hal tersebut sebenarnya dapat terjadi bukan hanya karena curah hujan, tetapi juga dipengaruhi oleh berbagai faktor lain. Dalam situasi ini, opsi *call* menjadi berharga. Adanya opsi *call* dapat menjadi sarana lindung nilai dari kemungkinan kenaikan harga padi ketika harus membeli padi tambahan di pasar. Selain sebagai sarana lindung nilai, adanya opsi *call* dapat memberikan peluang keuntungan dari kenaikan harga yang diantisipasi.

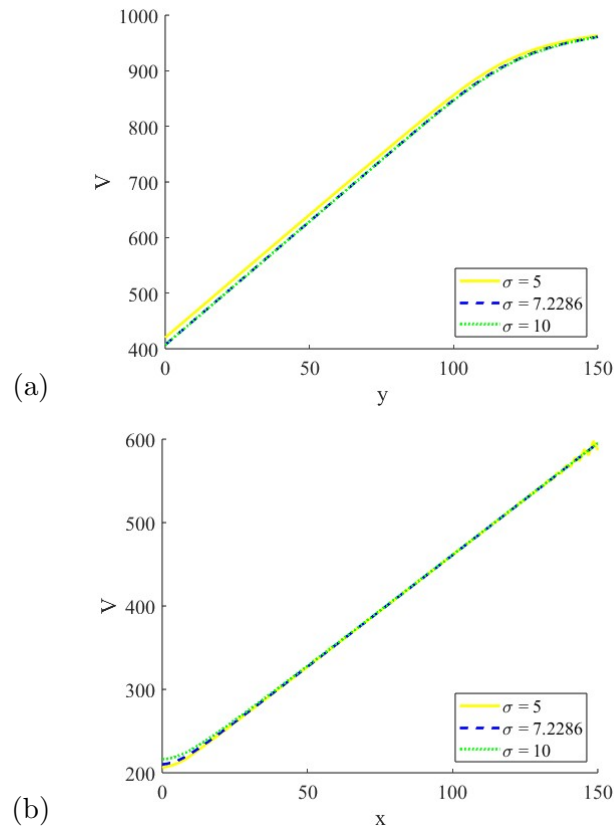


Gambar 4.19 Efek Variasi Pada Waktu Jatuh Tempo (T) (a) Opsi *call* dengan $x = 30$ (b) Opsi *call* dengan $y = 100$.

Analisis selanjutnya mengkaji bagaimana variasi dalam periode kontrak mempengaruhi harga opsi curah hujan. Penulis membandingkan tiga periode kontrak, di antaranya: Februari-April dengan $\tau_0 = 1$ dan $\tau_f = 3$; Februari-Mei dengan $\tau_0 = 1$ dan $\tau_f = 4$; serta Februari-Juni dengan $\tau_0 = 1$

dan $\tau_f = 5$. Gambar 4.19 menunjukkan bagaimana perilaku opsi curah hujan dengan adanya variasi waktu jatuh tempo. Keseluruhan waktu komputasi adalah 545,0587 detik. Pada Gambar 4.19a, terlihat bahwa nilai opsi curah hujan terhadap indeks RE (y) mengalami peningkatan seiring bertambahnya masa kontrak. Berbeda halnya dengan yang ditunjukkan Gambar 4.19b, nilai opsi curah hujan terhadap kuantitas curah hujan (x) justru mengalami penurunan seiring bertambahnya masa kontrak.

Variasi berikutnya difokuskan pada nilai volatilitas (σ) untuk melihat bagaimana hal tersebut memengaruhi harga opsi *call* curah hujan. Beberapa nilai volatilitas yang diuji, yaitu: 5; 7,2286; dan 10. Perbandingan nilai opsi



Gambar 4.20 Efek Variasi Pada Nilai Volatilitas (σ) (a) Opsi *call* dengan $x = 30$ (b) Opsi *call* dengan $y = 100$.

curah hujan berdasarkan masing-masing volatilitas ditunjukkan oleh Gambar 4.20. Waktu komputasi yang diperlukan adalah 335,9571 detik. Nilai opsi *call* terhadap indeks RE (y) mengalami penurunan nilai ketika nilai volatilitasnya

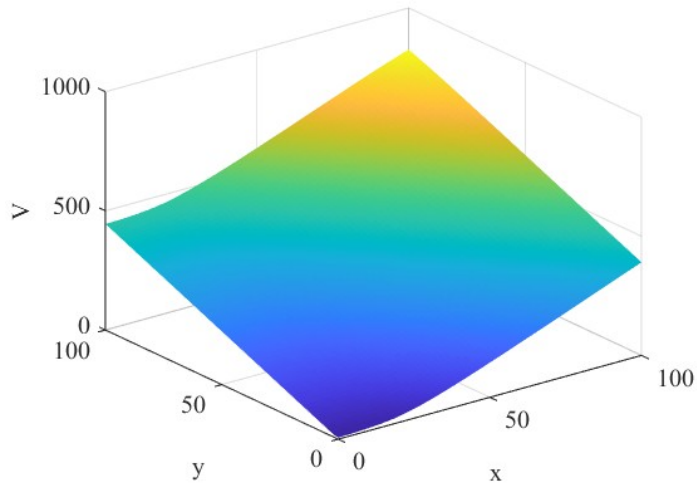
ditingkatkan, seperti ditunjukkan oleh Gambar 4.20a. Pada Gambar 4.20b terlihat sekilas bahwa tidak terdapat perubahan besar pada nilai opsi *call* terhadap kuantitas curah hujan. Tetapi jika dilakukan *zoom in*, terdeteksi bahwa nilai opsi *call* terhadap kuantitas curah hujan (x) juga mengalami penurunan seiring bertambahnya nilai volatilitas.

Hasil yang ditunjukkan Gambar 4.20 sebenarnya berkebalikan dengan kondisi yang sering ditemui. Pada umumnya, semakin besar nilai volatilitasnya, maka nilai opsi akan cenderung semakin tinggi. Volatilitas mencerminkan fluktuasi harga aset, sehingga ketika volatilitasnya besar ada potensi keuntungan yang lebih besar bagi pemegang opsi. Namun, kondisi pada Gambar 4.20 sebenarnya dapat terjadi mengingat adanya campur tangan parameter lain yang berbeda. Demikian beberapa variasi yang dilakukan untuk melihat bagaimana perilaku opsi *call* curah hujan sesuai dengan perubahan nilai parameter.

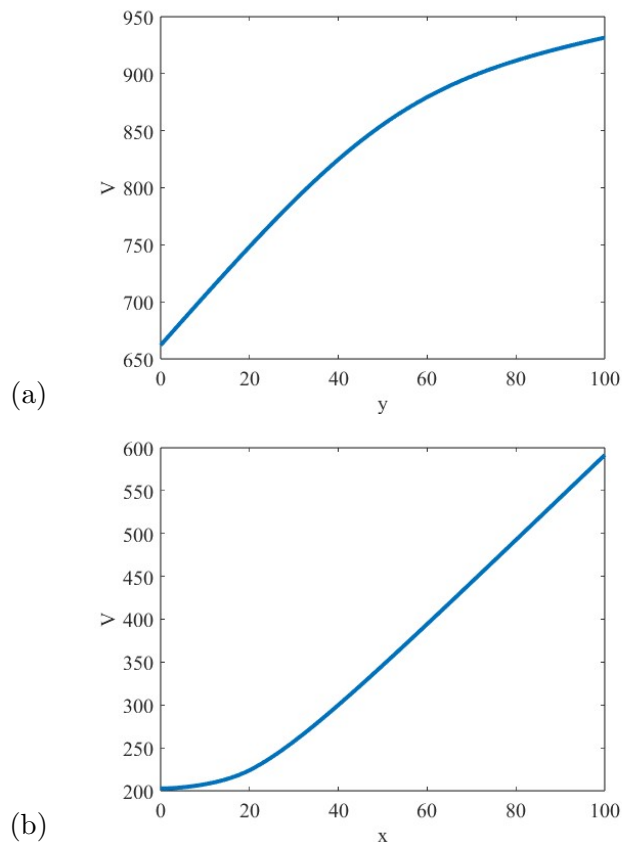
4.7.4 Valuasi Opsi Curah Hujan Menggunakan Data Curah Hujan yang Tidak diinterpolasi

Pada Subbab 4.7.3 telah dijelaskan bagaimana perilaku opsi curah hujan berdasarkan data curah hujan yang telah diinterpolasi. Bagian ini memuat hal sebaliknya, yaitu valuasi opsi dengan data curah hujan yang tidak diinterpolasi. Beberapa parameter yang turut terpengaruh dengan tidak dilakukannya interpolasi telah dihitung nilainya, yaitu: $\sigma = 12,4986$; $\alpha = 0,64867$; $x_{das} = 18,72204727$; dan $K = 1,799595617$. Untuk nilai rata-rata jangka panjang juga telah diperoleh sebelumnya. Kondisi rata-rata jangka panjang terbaik dinyatakan dengan fungsi pada Persamaan (4.30) dan fungsi turunannya seperti pada Persamaan (4.31).

Misal diberikan kontrak opsi dengan periode 2 bulan, dari bulan Februari $\tau_0 = 1$ dan berakhir pada bulan April $T + \tau_0 = 3$. Hasil valuasi opsi *call* dalam bentuk tiga dimensi dan dua dimensi secara berturut-turut ditunjukkan oleh Gambar 4.21 dan Gambar 4.22 dengan waktu komputasi 151,3592 detik.



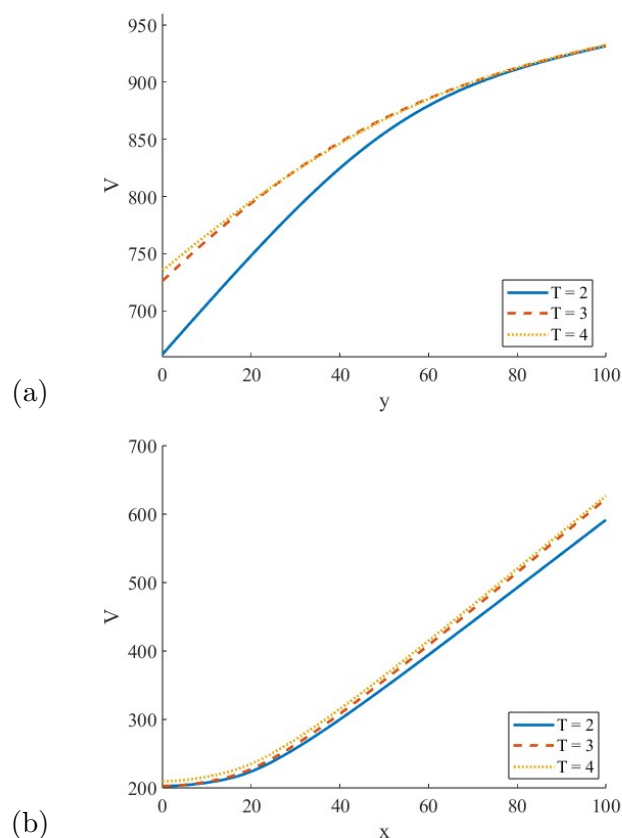
Gambar 4.21 Profil 3 Dimensi $V(x, y, T)$ Opsi *Call* untuk $\tau_0 = 1$ dan $T = 2$ dengan Data Curah Hujan yang Tidak diinterpolasi.



Gambar 4.22 Profil 2 Dimensi $V(x, y, T)$ saat $\tau_0 = 1$ dan $T = 2$ dengan Data Curah Hujan yang Tidak diinterpolasi. (a) Opsi *call* dengan $x = 30$ (b) Opsi *call* dengan $y = 100$.

Berdasarkan Gambar 4.22a terlihat bahwa dalam kondisi curah hujan tertentu, nilai opsi *call* cenderung mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya indeks curah hujan RE. Hal serupa seperti pada Gambar 4.22b, yaitu dalam kondisi indeks curah hujan RE tertentu, nilai opsi *call* juga mengalami peningkatan seiring bertambahnya kuantitas curah hujan.

Untuk melihat lebih jauh bagaimana perilaku opsi *call* curah hujan, dilakukan variasi periode kontrak. Variasi periode kontrak yang diberikan, yaitu: Februari-April ($\tau_0 = 1, \tau_f = 3$), Februari-Mei ($\tau_0 = 1, \tau_f = 4$), dan Februari-Juni ($\tau_0 = 1, \tau_f = 5$). Hasil valuasi ditunjukkan oleh Gambar 4.23 dengan waktu komputasi 601,5406 detik. Gambar 4.23a menunjukkan bahwa

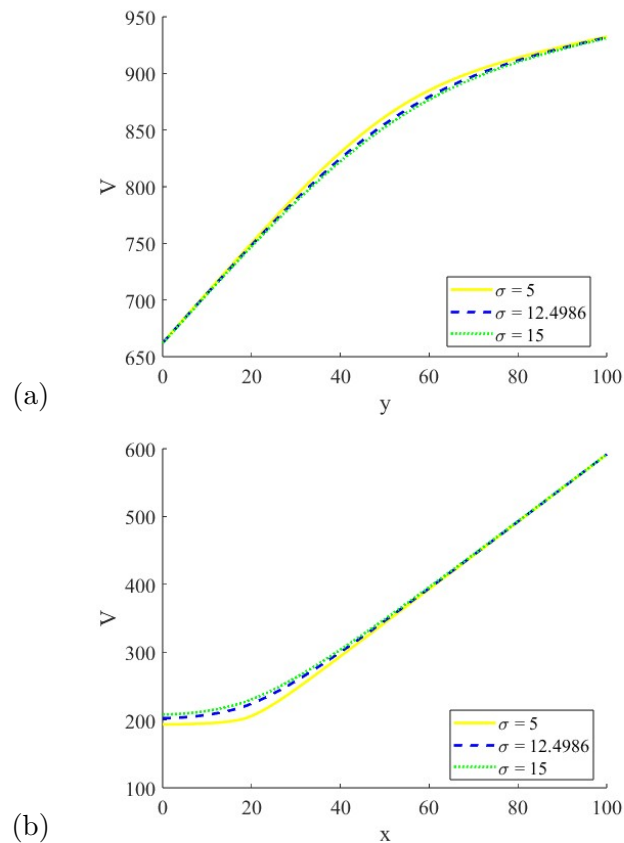


Gambar 4.23 Efek Variasi Pada Waktu Jatuh Tempo (T) Tanpa Interpolasi
 (a) Opsi *call* dengan $x = 30$ (b) Opsi *call* dengan $y = 100$.

nilai opsi *call* terhadap indeks curah hujan RE mengalami peningkatan seiring bertambahnya masa kontrak. Hal yang sama ditunjukkan oleh Gambar 4.23b, terlihat bahwa nilai opsi *call* terhadap kuantitas curah hujan cenderung

mengalami peningkatan seiring bertambahnya masa kontrak.

Variasi lain dilakukan terhadap nilai volatilitas. Beberapa nilai volatilitas yang diujikan yaitu: 5; 12,4986; dan 15. Hasil valuasi opsi *call* ditunjukkan oleh Gambar 4.24 dengan waktu komputasi 360,4565 detik. Pada Gambar 4.24a, terlihat bahwa dengan bertambahnya nilai volatilitas menyebabkan nilai opsi *call* terhadap indeks curah RE mengalami penurunan.



Gambar 4.24 Efek Variasi Pada Nilai Volatilitas (σ) Tanpa Interpolasi (a) Opsi *call* dengan $x = 30$ (b) Opsi *call* dengan $y = 100$.

Hal serupa terjadi, yaitu dengan bertambahnya nilai volatilitas, nilai opsi *call* terhadap kuantitas curah hujan juga turut mengalami penurunan seperti ditunjukkan oleh Gambar 4.24b.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini memuat kesimpulan dari seluruh pembahasan sesuai dengan tujuan penelitian Tesis. Selain itu, diberikan beberapa saran yang berguna untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang telah didapatkan, diperoleh kesimpulan dari Tesis sebagai berikut:

1. Model stokastik Ornstein-Uhlenbeck yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$dx_t = [\alpha(\theta(t) - x_t) + \theta'(t)]dt + \sigma dW_t^Q.$$

Nilai komponen musiman/rata-rata jangka panjang ($\theta(t)$) terbaik diperoleh dengan menggunakan deret Fourier *truncated* fungsi *sin* yang dinyatakan oleh:

$$\begin{aligned} \theta_{10}(t) = m + a_1 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t - v)\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi}{6}(t - v)\right) + \dots \\ + a_9 \sin\left(\frac{9\pi}{6}(t - v)\right) + a_{10} \sin\left(\frac{10\pi}{6}(t - v)\right). \end{aligned}$$

2. Valuasi opsi *call* tipe Eropa untuk curah hujan dilakukan dengan mencari solusi PDP menggunakan skema beda hingga eksplisit. Hasil valuasi menunjukkan bahwa nilai opsi *call* curah hujan ($V(x, y, \tau)$) dalam periode serta batas curah hujan tertentu, cenderung meningkat seiring dengan bertambahnya kuantitas curah hujan (x) dan indeks *rainfall excess* (RE) (y).

3. Perilaku nilai opsi curah hujan ketika dilakukan variasi pada:

- (a) Periode kontrak, yaitu nilai opsi curah hujan terhadap indeks RE mengalami peningkatan seiring bertambahnya masa kontrak. Sebaliknya, nilai opsi terhadap kuantitas curah hujan mengalami penurunan seiring bertambahnya masa kontrak.
- (b) Volatilitas, yaitu nilai opsi curah hujan terhadap indeks RE dan kuantitas curah hujan mengalami penurunan ketika volatilitasnya ditingkatkan.

5.2 Saran

Adapun saran yang dapat diberikan sebagai berikut:

1. Valuasi dalam Tesis ini hanya menggunakan opsi *call*, sehingga untuk penelitian selanjutnya disarankan menggunakan opsi *put* agar dapat dilihat bagaimana kinerja dari tiap jenis opsi dalam kondisi curah hujan berlebih (*rainfall excess*).
2. Untuk melengkapi data curah hujan dapat menggunakan algoritma *Expectation Maximization* (EM).
3. Tesis ini tidak memerhatikan faktor harga risiko pasar (λ), oleh karena itu penelitian selanjutnya disarankan meneliti efek dari harga risiko pasar.

DAFTAR PUSTAKA

- Bo Martin Bibby, M. S. (1995). Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes. *Bernoulli* 1, 1(2), 17-39.
- Brenda López Cabrera, M. R., Martin Odening. (2013). Pricing rainfall futures at the cme. *Journal of Banking Finance*, 37, 4286–4298.
- Cahyani, R. (2024). Faktor penyebab naiknya harga beras dan solusi mengatasinya. *Jambi Prima*.
- Chen, N. (2017). *Connections with partial differential equations and the feynman-kac theorem*. SEEM 5670: Advanced Models in Financial Engineering, Department of Systems Engineering and Engineering Management, The Chinese University of Hong Kong.
- Chia Chou, C.-A. C., J. David Neelin, & Tu, J.-Y. (2009). Evaluating the “rich-get-richer” mechanism in tropical precipitation change under global warming. *Journal of Climate*, 22, 1982–2005.
- Clarinda Nhangumbe, E. S. (2024). Numerical solutions of an option pricing rainfall weather derivatives model. *Computers and Mathematics with Applications*, 153, 43-55.
- Dyah Susilokarti, S. S. L. S., Sigit Supadmo Arif. (2015). Identifikasi perubahan iklim berdasarkan data curah hujan di wilayah selatan jatiluhur kabupaten subang, jawa barat. *AGRITECH*, 35(1), 1-8.
- Gunther Leobacher, P. N. (2011). On modelling and pricing rainfall derivatives with seasonality. *Applied Mathematical Finance*, 18(1), 71-91.
- Hull, J. C. (2015). *Options, futures, and other derivatives ninth edition*. New Jersey, Pearson.
- IPCC. (2023). *Climate change 2023: Synthesis report*. Switzerland, World Meteorological Organization, United Nations Environment Programme.
- Ivana Stulec, T. B., Kristina Petljak. (2016). Effectiveness of weather

- derivatives as a hedge against the weather risk in agriculture. *Agricultural Economics*, 62(8), 356–362.
- LeVeque, R. J. (1992). *Numerical methods for conservation laws second edition*. Birkhliuser Verlag, Basel, Switzerland.
- Li, P. (2018). Pricing weather derivatives with partial differential equations of the ornstein–uhlenbeck process. *Computers and Mathematics with Applications*, 75, 1044–1059.
- Martin Odening, W. X., Oliver Musshoff. (2007). Analysis of rainfall derivatives using daily precipitation models: opportunities and pitfalls,. *Agricultural Finance Review*, 67, 135-156.
- Melanie Cao, J. W., Anlong Li. (2004). Precipitation modeling and contract valuation: a frontier in weather derivativess. *Journal of Alternative Investments*, 7, 93–99.
- Peter Alaton, D. S., Boualem Djehiche. (2002). On modelling and pricing weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 9(1), 1-22.
- Sam Cramer, A. A. F. A. K. A., Michael Kampouridis. (2017). An extensive evaluation of seven machine learning methods for rainfall prediction in weather derivatives. *Expert Systems With Applications*, 85, 169–181.
- Shah, A. (2017). Pricing of rainfall derivatives using generalized linear models of the daily rainfall process. *International Agricultural Risk, Finance and Insurance Conference (IARFIC) 2017 Paris meetings paper*, 1-22.
- Stephen Jewson, A. B. (2005). *Weather derivatives valuation: The meteorological, statistical, financial and mathematical foundations*. New York, Cambridge University Press.
- Steven C. Chapra, R. P. C. (2021). *Numerical method for engineers eighth edition*. New York, McGraw-Hill Higher Education.
- van Emmerich, C. (2005). *Master thesis: Modelling and simulating of rain derivative*. University of Wuppertal.
- Øksendal, B. (2000). *Stochastic differential equations: An introduction with applications fifth edition*. New York, Springer-Verlag.

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1

Script MATLAB untuk Interpolasi

1. *Linear Spline*

```
1 file = 'Data.xlsx';
2 sheet_name = 'Banyuwangi';
3 data = readtable(file, 'Sheet', sheet_name);
4
5 x = data.RR;
6 y = isnan(x);
7
8 % Cari indeks titik-titik yang tidak NaN
9 idx_valid = find(~y);
10
11 % Lakukan interpolasi linear splines
12 x_interp = interp1(idx_valid, x(~y), find(y), 'linear', 'extrap');
13 x(y) = x_interp;
14
15 % Simpan hasil interpolasi ke dalam file Excel baru
16 data_interp = data;
17 data_interp.RR = x;
18 output_file = 'inter1.xlsx';
19 writetable(data_interp, output_file);
20 disp('Interpolasi selesai, data disimpan dalam file Excel baru.');
```

2. *Quadratic Spline*

```
1 file = 'Data.xlsx';
2 sheet_name = 'Banyuwangi';
3 data = readtable(file, 'Sheet', sheet_name);
4
5 x = data.RR;
6 y = isnan(x);
7
8 idx_valid = find(~y);
9 x_data = idx_valid;
10 y_data = x(idx_valid);
11 x_interp = find(y);
12
13 % Lakukan interpolasi spline kuadrat
```

```

14 y_interp = quadratic_spline(x_data, y_data, x_interp);
15 x(y) = y_interp;
16
17 % Simpan hasil interpolasi ke dalam file Excel baru
18 data_interp = data;
19 data_interp.RR = x;
20 output_file = 'inter2.xlsx';
21 writetable(data_interp, output_file);
22 disp('Interpolasi selesai, data disimpan dalam file Excel baru.');
```

3. Cubic Spline

```

1 file = 'Data.xlsx';
2 sheet_name = 'Pasuruan';
3 data = readtable(file, 'Sheet', sheet_name);
4
5 x = data.RR;
6 y = isnan(x);
7
8 % Cari indeks titik-titik yang tidak NaN
9 idx_valid = find(~y);
10
11 % Lakukan interpolasi kubik
12 x_interp = interp1(idx_valid, x(~y), find(y), 'spline');
13 x(y) = x_interp;
14
15 % Simpan hasil interpolasi ke dalam file Excel baru
16 data_interp = data;
17 data_interp.RR = x;
18 output_file = 'inter3.xlsx';
19 writetable(data_interp, output_file);
20 disp('Interpolasi selesai, data disimpan dalam file Excel baru.');
```

Lampiran 2

Script MATLAB Metode Ordinary Least Square

```
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% OLS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 file_path = 'Data_Interpolated.xlsx';
3 sheet_name = 'Sheet3';
4 data = readtable(file_path, 'Sheet', sheet_name);
5 t = data.time;
6 M = data.mavg;
7
8 % Bentuk matriks
9 omega = 2 * pi / 12;
10 X = [ones(size(t)), t, sin(omega * t), cos(omega * t)];
11
12 % Hitung estimasi beta menggunakan OLS
13 beta = (X' * X) \ (X' * M);
14
15 disp('Nilai Estimasi Beta:');
16 disp('beta_OLS(1) ='); disp(beta(1));
17 disp('beta_OLS(2) ='); disp(beta(2));
18 disp('beta_OLS(3) ='); disp(beta(3));
19 disp('beta_OLS(4) ='); disp(beta(4));
20
21 % Nilai theta_t
22 theta_t = beta(1) + beta(2) * t + beta(3) * sin(omega*t) + beta(4) * cos(
    omega* t);
23
24 figure;
25 plot(t, M, 'LineWidth', 2, 'Color', 'black', 'DisplayName', 'Rata-rata
    Bulanan');
26 hold on;
27 plot(t, theta_t, 'LineWidth', 2, 'Color', 'blue', 'DisplayName', '\theta(
    t)');
28 xlabel('Bulan ke-');
29 ylabel('Curah Hujan');
30 legend('show');
31 grid on;
32 hold off;
```

Lampiran 3

Script MATLAB Algoritma Gauss-Newton untuk Deret Fourier *Truncated* Fungsi *sin*

```

1 function a = GaussNewton(t,M)
2 tol = 0.0001;
3 % a = [7.04 5 4 6.25];           %n=2
4 % a = [10 5 4 7 6.5];           %n=3
5 % a = [11 4 5 4 3 7];           %n=4
6 % a = [7.04 2 3 2 4 3 6.5];     %n=5
7 % a = [7 5 2 3 2 4 3 6.5];     %n=6
8 % a = [7 5 2 3 2 4 5 3 6.5];   %n=7
9 % a = [7 2 3 2 3 2 3 2 3 6.5]; %n=8
10 % a = [7 2 3 2 4 3 2 3 2 3 6.5]; %n=9
11 a = [7 2 3 2 4 3 2 4 3 2 3 6.5]; %n=10
12 itermax = 50;
13 file_path = 'Data_Interpolated.xlsx';
14 sheet_name = 'Sheet3';
15 data = readtable(file_path, 'Sheet', sheet_name);
16 t = data.time';
17 M = data.mavg';
18 n = length(t);
19
20 for iter = 1:itermax
21     a0 = a(1);     a6 = a(7);
22     a1 = a(2);     a7 = a(8);
23     a2 = a(3);     a8 = a(9);
24     a3 = a(4);     a9 = a(10);
25     a4 = a(5);     a10 = a(11);
26     a5 = a(6);     a11 = a(12);
27     for i = 1:n
28         %-----n=2-----
29         % theta(i) = a0 + a1 .* sin(pi*(t(i)-a3)/6) + a2 .* sin(2*pi*(t(i)
30         )-a3)/6);
31         % j(i,1) = 1;
32         % j(i,2) = sin(pi*(t(i)-a3)/6);
33         % j(i,3) = sin(2*pi*(t(i)-a3)/6);
34         % j(i,4) = -pi/6.*a1.*cos(pi*(t(i)-a3)/6)-pi/3.*a2.*cos(pi*(t(i)-
35         a3)/3);
36         %-----n=3-----
37         % theta(i) = a0 + a1 .* sin(pi*(t(i)-a4)/6) + a2 .* sin(2*pi*(t(i)
38         )-a4)/6) + a3 .* sin(3*pi*(t(i)-a4)/6);
39         % j(i,1) = 1;

```

```

38     % j(i,2) = sin(pi*(t(i)-a4)/6);
39     % j(i,3) = sin(2*pi*(t(i)-a4)/6);
40     % j(i,4) = sin(3*pi*(t(i)-a4)/6);
41     % j(i,5) = - pi/6 .* a1 .* cos(pi*(t(i)-a4)/6) - pi/3 .*a2 .*cos(
pi*(t(i)-a4)/3) - pi/2 .*a3 .*cos(pi*(t(i)-a4)/2);
42
43     %-----n=4-----
44     % theta(i) = a0 + a1 .* sin(pi*(t(i)-a5)/6) + a2 .* sin(2*pi*(t(i)
)-a5)/6) + a3 .* sin(3*pi*(t(i)-a5)/6)+ a4 .* sin(4*pi*(t(i)-a5)/6);
45     % j(i,1) = 1;
46     % j(i,2) = sin(pi*(t(i)-a5)/6);
47     % j(i,3) = sin(2*pi*(t(i)-a5)/6);
48     % j(i,4) = sin(3*pi*(t(i)-a5)/6);
49     % j(i,5) = sin(4*pi*(t(i)-a5)/6);
50     % j(i,6) = - pi/6 .* a1 .* cos(pi*(t(i)-a5)/6) - pi/3 .*a2 .*cos(
pi*(t(i)-a5)/3) - pi/2 .*a3 .*cos(pi*(t(i)-a5)/2) - 2*pi/3.*a4.*cos(2*
pi*(t(i)-a5)/3);
51
52     %-----n=5-----
53     % theta(i) = a0 + a1 .* sin(pi*(t(i)-a6)/6) + a2 .* sin(2*pi*(t(i)
)-a6)/6) + a3 .* sin(3*pi*(t(i)-a6)/6) + a4 .* sin(4*pi*(t(i)-a6)/6)+
a5 .* sin(5*pi*(t(i)-a6)/6);
54     % j(i,1) = 1;
55     % j(i,2) = sin(pi*(t(i)-a6)/6);
56     % j(i,3) = sin(2*pi*(t(i)-a6)/6);
57     % j(i,4) = sin(3*pi*(t(i)-a6)/6);
58     % j(i,5) = sin(4*pi*(t(i)-a6)/6);
59     % j(i,6) = sin(5*pi*(t(i)-a6)/6);
60     % j(i,7) = - pi/6 .* a1 .* cos(pi*(t(i)-a6)/6) - pi/3 .*a2 .*cos(
pi*(t(i)-a6)/3) - pi/2 .*a3 .*cos(pi*(t(i)-a6)/2) - 2*pi/3 .*a4 .*cos
(2*pi*(t(i)-a6)/3) - 5*pi/6 .*a5 .*cos(5*pi*(t(i)-a6)/6);
61
62     %-----n=6-----
63     % theta(i) = a0 + a1 .* sin(pi*(t(i)-a7)/6) + a2 .* sin(2*pi*(t(i)
)-a7)/6) + a3 .* sin(3*pi*(t(i)-a7)/6) + a4 .* sin(4*pi*(t(i)-a7)/6)+
a5 .* sin(5*pi*(t(i)-a7)/6) +a6.*sin(6*pi*(t(i)-a7)/6);
64     % j(i,1) = 1;
65     % j(i,2) = sin(pi*(t(i)-a7)/6);
66     % j(i,3) = sin(2*pi*(t(i)-a7)/6);
67     % j(i,4) = sin(3*pi*(t(i)-a7)/6);
68     % j(i,5) = sin(4*pi*(t(i)-a7)/6);
69     % j(i,6) = sin(5*pi*(t(i)-a7)/6);
70     % j(i,7) = sin(6*pi*(t(i)-a7)/6);
71     % j(i,8) = - pi/6 .* a1 .* cos(pi*(t(i)-a7)/6) - pi/3 .*a2 .*cos(
pi*(t(i)-a7)/3) -pi/2 .*a3 .*cos(pi*(t(i)-a7)/2) -2*pi/3 .*a4 .*cos(2*
pi*(t(i)-a7)/3) - 5*pi/6 .*a5 .*cos(5*pi*(t(i)-a7)/6) -pi.*a6.*cos(pi

```

```

*(t(i)-a7));
72
73     %-----n=7-----
74     % theta(i) = a0 + a1 .* sin(pi*(t(i)-a8)/6) + a2 .* sin(2*pi*(t(i)
)-a8)/6) + a3 .* sin(3*pi*(t(i)-a8)/6) + a4 .* sin(4*pi*(t(i)-a8)/6)+
a5 .* sin(5*pi*(t(i)-a8)/6) +a6.*sin(6*pi*(t(i)-a8)/6) + a7.*sin(7*pi
*(t(i)-a8)/6);
75     % j(i,1) = 1;
76     % j(i,2) = sin(pi*(t(i)-a8)/6);
77     % j(i,3) = sin(2*pi*(t(i)-a8)/6);
78     % j(i,4) = sin(3*pi*(t(i)-a8)/6);
79     % j(i,5) = sin(4*pi*(t(i)-a8)/6);
80     % j(i,6) = sin(5*pi*(t(i)-a8)/6);
81     % j(i,7) = sin(6*pi*(t(i)-a8)/6);
82     % j(i,8) = sin(7*pi*(t(i)-a8)/6);
83     % j(i,9) = -pi/6 .* a1 .* cos(pi*(t(i)-a8)/6) - pi/3 .*a2 .*cos(
pi*(t(i)-a8)/3) -pi/2 .*a3 .*cos(pi*(t(i)-a8)/2) -2*pi/3 .*a4 .*cos(2*
pi*(t(i)-a8)/3) - 5*pi/6 .*a5 .*cos(5*pi*(t(i)-a8)/6) -pi.*a6.*cos(pi
*(t(i)-a8))- 7*pi/6 .*a7.*cos(7*pi*(t(i)-a8)/6);
84
85     %-----n=8-----
86     % theta(i) = a0 + a1 .* sin(pi*(t(i)-a9)/6) + a2 .* sin(2*pi*(t(i)
)-a9)/6) + a3 .* sin(3*pi*(t(i)-a9)/6) + a4 .* sin(4*pi*(t(i)-a9)/6)+
a5 .* sin(5*pi*(t(i)-a9)/6) +a6.*sin(6*pi*(t(i)-a9)/6)+a7.*sin(7*pi*(t
(i)-a9)/6)+a8.*sin(8*pi*(t(i)-a9)/6);
87     % j(i,1) = 1;
88     % j(i,2) = sin(pi*(t(i)-a9)/6);
89     % j(i,3) = sin(2*pi*(t(i)-a9)/6);
90     % j(i,4) = sin(3*pi*(t(i)-a9)/6);
91     % j(i,5) = sin(4*pi*(t(i)-a9)/6);
92     % j(i,6) = sin(5*pi*(t(i)-a9)/6);
93     % j(i,7) = sin(6*pi*(t(i)-a9)/6);
94     % j(i,8) = sin(7*pi*(t(i)-a9)/6);
95     % j(i,9) = sin(8*pi*(t(i)-a9)/6);
96     % j(i,10) = - pi/6 .* a1 .* cos(pi*(t(i)-a9)/6) - pi/3 .*a2 .*cos
(pi*(t(i)-a9)/3) - pi/2 .*a3 .*cos(pi*(t(i)-a9)/2) - 2*pi/3 .*a4 .*cos
(2*pi*(t(i)-a9)/3) - 5*pi/6 .*a5 .*cos(5*pi*(t(i)-a7)/6) - pi.*a6.*cos
(pi*(t(i)-a9))-7*pi/6.*a7.*cos(7*pi*(t(i)-a9)/6)-4*pi/3.*a8.*cos(4*pi
*(t(i)-a9)/3);
97
98     %-----n=9-----
99     % theta(i) = a0 + a1 .* sin(pi*(t(i)-a10)/6) + a2 .* sin(2*pi*(t(
i)-a10)/6) + a3 .* sin(3*pi*(t(i)-a10)/6) + a4 .* sin(4*pi*(t(i)-a10)
/6)+ a5 .* sin(5*pi*(t(i)-a10)/6) +a6.*sin(6*pi*(t(i)-a10)/6)+a7.*sin
(7*pi*(t(i)-a10)/6)+a8.*sin(8*pi*(t(i)-a10)/6) + a9 .*sin(9*pi*(t(i)-
a10)/6);

```



```

100     % j(i,1) = 1;
101     % j(i,2) = sin(pi*(t(i)-a10)/6);
102     % j(i,3) = sin(2*pi*(t(i)-a10)/6);
103     % j(i,4) = sin(3*pi*(t(i)-a10)/6);
104     % j(i,5) = sin(4*pi*(t(i)-a10)/6);
105     % j(i,6) = sin(5*pi*(t(i)-a10)/6);
106     % j(i,7) = sin(6*pi*(t(i)-a10)/6);
107     % j(i,8) = sin(7*pi*(t(i)-a10)/6);
108     % j(i,9) = sin(8*pi*(t(i)-a10)/6);
109     % j(i,10) = sin(9*pi*(t(i)-a10)/6);
110     % j(i,11) = - pi/6 .* a1 .* cos(pi*(t(i)-a10)/6) - pi/3 .*a2 .*
cos(pi*(t(i)-a10)/3) - pi/2 .*a3 .*cos(pi*(t(i)-a10)/2) - 2*pi/3 .*a4
.*cos(2*pi*(t(i)-a10)/3) - 5*pi/6 .*a5 .*cos(5*pi*(t(i)-a10)/6) - pi.*
a6.*cos(pi*(t(i)-a10))-7*pi/6.*a7.*cos(7*pi*(t(i)-a10)/6)-4*pi/3.*a8.*
cos(4*pi*(t(i)-a10)/3)-3*pi/2.*a9.*cos(3*pi*(t(i)-a10)/2);
111
112     %-----n=10-----
113     theta(i) = a0 + a1 .* sin(pi*(t(i)-a11)/6) + a2 .* sin(2*pi*(t(i)
-a11)/6) + a3 .* sin(3*pi*(t(i)-a11)/6) + a4 .* sin(4*pi*(t(i)-a11)/6)
+ a5 .* sin(5*pi*(t(i)-a11)/6) +a6.*sin(6*pi*(t(i)-a11)/6)+a7.*sin(7*
pi*(t(i)-a11)/6)+a8.*sin(8*pi*(t(i)-a11)/6) + a9 .*sin(9*pi*(t(i)-a11)
/6) + a10 .*sin(10*pi*(t(i)-a11)/6);
114     j(i,1) = 1;
115     j(i,2) = sin(pi*(t(i)-a11)/6);
116     j(i,3) = sin(2*pi*(t(i)-a11)/6);
117     j(i,4) = sin(3*pi*(t(i)-a11)/6);
118     j(i,5) = sin(4*pi*(t(i)-a11)/6);
119     j(i,6) = sin(5*pi*(t(i)-a11)/6);
120     j(i,7) = sin(6*pi*(t(i)-a11)/6);
121     j(i,8) = sin(7*pi*(t(i)-a11)/6);
122     j(i,9) = sin(8*pi*(t(i)-a11)/6);
123     j(i,10) = sin(9*pi*(t(i)-a11)/6);
124     j(i,11) = sin(10*pi*(t(i)-a11)/6);
125     j(i,12) = - pi/6 .* a1 .* cos(pi*(t(i)-a11)/6) - pi/3 .*a2 .*cos(
pi*(t(i)-a11)/3) - pi/2 .*a3 .*cos(pi*(t(i)-a11)/2) - 2*pi/3 .*a4 .*
cos(2*pi*(t(i)-a11)/3) - 5*pi/6 .*a5 .*cos(5*pi*(t(i)-a11)/6) - pi.*a6
.*cos(pi*(t(i)-a11))-7*pi/6.*a7.*cos(7*pi*(t(i)-a11)/6)-4*pi/3.*a8.*
cos(4*pi*(t(i)-a11)/3)-3*pi/2.*a9.*cos(3*pi*(t(i)-a11)/2)-5*pi/3.*a9.*
cos(5*pi*(t(i)-a11)/3);
126     d(i) = M(i) - theta(i);
127     end
128     da = (j' * j) \ (j' * d');
129     a = a + da';
130
131     % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
(da(4)) < tol)

```

```

132 % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
      (da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol)
133 % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
      (da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol && abs(da(6)) < tol)
134 % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
      (da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol && abs(da(6)) < tol && abs(da(7)) <
      tol)
135 % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
      (da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol && abs(da(6)) < tol && abs(da(7)) <
      tol && abs(da(8)) < tol)
136 % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
      (da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol && abs(da(6)) < tol && abs(da(7)) <
      tol && abs(da(8)) < tol && abs(da(9)) < tol)
137 % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
      (da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol && abs(da(6)) < tol && abs(da(7)) <
      tol && abs(da(8)) < tol && abs(da(9)) < tol && abs(da(10)) < tol)
138 % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
      (da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol && abs(da(6)) < tol && abs(da(7)) <
      tol && abs(da(8)) < tol && abs(da(9)) < tol && abs(da(10)) < tol &&
      abs(da(11)) < tol)
139 if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs(
      da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol && abs(da(6)) < tol && abs(da(7)) <
      tol && abs(da(8)) < tol && abs(da(9)) < tol && abs(da(10)) < tol &&
      abs(da(11)) < tol && abs(da(12)) < tol)
140     disp('Gauss-Newton method has converged');
141     break
142 end
143 end
144 end

```

Catatan: Untuk mendapatkan nilai koefisien sesuai jumlah harmonik (n), perlu dilakukan penyesuaian dengan memberikan tanda "%" pada *syntax* lain. Misal: untuk mendapatkan koefisien saat $n = 10$, maka kode yang tidak berhubungan dengan kondisi $n = 10$ diberi "%", dan berlaku untuk kondisi lainnya.

Lampiran 4

Script MATLAB Algoritma Gauss-Newton untuk Deret Fourier *Truncated* Fungsi *cos*

```

1 function a = GausswNewton(t,M)
2 tol = 0.0001;
3 % a = [7.04 5 4 6.25]; %n=2
4 % a = [10 5 4 7 6.5]; %n=3
5 % a = [11 4 5 4 3 7]; %n=4
6 % a = [7.04 2 3 2 4 3 6.5]; %n=5
7 % a = [7 5 2 3 2 4 3 6.5]; %n=6
8 a = [7 5 2 3 2 4 5 3 6.5]; %n=7
9 itermax = 50;
10 file_path = 'Data_Interpolated.xlsx';
11 sheet_name = 'Sheet3';
12 data = readtable(file_path, 'Sheet', sheet_name);
13 t = data.time';
14 M = data.mavg';
15 n = length(t);
16
17 for iter = 1:itermax
18     a0 = a(1);     a5 = a(6);
19     a1 = a(2);     a6 = a(7);
20     a2 = a(3);     a7 = a(8);
21     a3 = a(4);     a8 = a(9);
22     a4 = a(5);
23     for i = 1:n
24         %-----n=2-----
25         % theta(i) = a0 + a1 .* cos(pi*(t(i)-a3)/6) + a2 .* cos(2*pi*(t(i)
26         )-a3)/6);
27         % j(i,1) = 1;
28         % j(i,2) = cos(pi*(t(i)-a3)/6);
29         % j(i,3) = cos(2*pi*(t(i)-a3)/6);
30         % j(i,4) = pi/6.*a1.*sin(pi*(t(i)-a3)/6)+pi/3.*a2.*cos(pi*(t(i)-
31         a3)/3);
32
33         %-----n=3-----
34         % theta(i) = a0 + a1 .* cos(pi*(t(i)-a4)/6) + a2 .* cos(2*pi*(t(i)
35         )-a4)/6) + a3 .* cos(3*pi*(t(i)-a4)/6);
36         % j(i,1) = 1;
37         % j(i,2) = cos(pi*(t(i)-a4)/6);
38         % j(i,3) = cos(2*pi*(t(i)-a4)/6);
39         % j(i,4) = cos(3*pi*(t(i)-a4)/6);
40         % j(i,5) = pi/6 .* a1 .* sin(pi*(t(i)-a4)/6) + pi/3 .*a2 .*sin(pi
41         *(t(i)-a4)/3) + pi/2 .*a3 .*sin(pi*(t(i)-a4)/2);

```

```

38
39      %-----n=4-----
40      % theta(i) = a0 + a1 .* cos(pi*(t(i)-a5)/6) + a2 .* cos(2*pi*(t(i)
41      )-a5)/6) + a3 .* cos(3*pi*(t(i)-a5)/6) + a4 .* cos(4*pi*(t(i)-a5)/6);
42      % j(i,1) = 1;
43      % j(i,2) = cos(pi*(t(i)-a5)/6);
44      % j(i,3) = cos(2*pi*(t(i)-a5)/6);
45      % j(i,4) = cos(3*pi*(t(i)-a5)/6);
46      % j(i,5) = cos(4*pi*(t(i)-a5)/6);
47      % j(i,6) = pi/6 .* a1 .* sin(pi*(t(i)-a5)/6) + pi/3 .*a2 .*sin(pi
48      *(t(i)-a5)/3) + pi/2 .*a3 .*sin(pi*(t(i)-a5)/2) + 2*pi/3.*a4.*sin(2*pi
49      *(t(i)-a5)/3);
50
51      %-----n=5-----
52      % theta(i) = a0 + a1 .* cos(pi*(t(i)-a6)/6) + a2 .* cos(2*pi*(t(i)
53      )-a6)/6) + a3 .* cos(3*pi*(t(i)-a6)/6) + a4 .* cos(4*pi*(t(i)-a6)/6)+
54      a5 .* cos(5*pi*(t(i)-a6)/6);
55      % j(i,1) = 1;
56      % j(i,2) = cos(pi*(t(i)-a6)/6);
57      % j(i,3) = cos(2*pi*(t(i)-a6)/6);
58      % j(i,4) = cos(3*pi*(t(i)-a6)/6);
59      % j(i,5) = cos(4*pi*(t(i)-a6)/6);
60      % j(i,6) = cos(5*pi*(t(i)-a6)/6);
61      % j(i,7) = pi/6 .* a1 .* sin(pi*(t(i)-a6)/6) + pi/3 .*a2 .*sin(pi
62      *(t(i)-a6)/3) + pi/2 .*a3 .*sin(pi*(t(i)-a6)/2) + 2*pi/3 .*a4 .*sin(2*
63      pi*(t(i)-a6)/3) + 5*pi/6 .*a5 .*sin(5*pi*(t(i)-a6)/6);
64
65      %-----n=6-----
66      % theta(i) = a0 + a1 .*cos(pi*(t(i)-a7)/6) + a2 .* cos(2*pi*(t(i)
67      -a7)/6) + a3 .* cos(3*pi*(t(i)-a7)/6) + a4 .* cos(4*pi*(t(i)-a7)/6)+
68      a5 .* cos(5*pi*(t(i)-a7)/6) + a6.*cos(6*pi*(t(i)-a7)/6);
69      % j(i,1) = 1;
70      % j(i,2) = cos(pi*(t(i)-a7)/6);
71      % j(i,3) = cos(2*pi*(t(i)-a7)/6);
72      % j(i,4) = cos(3*pi*(t(i)-a7)/6);
73      % j(i,5) = cos(4*pi*(t(i)-a7)/6);
74      % j(i,6) = cos(5*pi*(t(i)-a7)/6);
75      % j(i,7) = cos(6*pi*(t(i)-a7)/6);
76      % j(i,8) = pi/6 .* a1 .* sin(pi*(t(i)-a7)/6) + pi/3 .*a2 .*sin(pi
77      *(t(i)-a7)/3) +pi/2 .*a3 .*sin(pi*(t(i)-a7)/2) +2*pi/3 .*a4 .*sin(2*pi
78      *(t(i)-a7)/3) + 5*pi/6 .*a5 .*sin(5*pi*(t(i)-a7)/6) +pi.*a6.*sin(pi*(t
79      (i)-a7));
80
81      %-----n=7-----
82      % theta(i) = a0 + a1 .*cos(pi*(t(i)-a8)/6) + a2 .* cos(2*pi*(t(i)
83      -a8)/6) + a3 .* cos(3*pi*(t(i)-a8)/6) + a4 .* cos(4*pi*(t(i)-a8)/6)+

```

```

a5 .* cos(5*pi*(t(i)-a8)/6) +a6.*cos(6*pi*(t(i)-a8)/6)+a7.*cos(7*pi*(t
(i)-a8)/6);
71     % j(i,1) = 1;
72     % j(i,2) = cos(pi*(t(i)-a8)/6);
73     % j(i,3) = cos(2*pi*(t(i)-a8)/6);
74     % j(i,4) = cos(3*pi*(t(i)-a8)/6);
75     % j(i,5) = cos(4*pi*(t(i)-a8)/6);
76     % j(i,6) = cos(5*pi*(t(i)-a8)/6);
77     % j(i,7) = cos(6*pi*(t(i)-a8)/6);
78     % j(i,8) = cos(7*pi*(t(i)-a8)/6);
79     % j(i,9) = pi/6 .* a1 .* sin(pi*(t(i)-a8)/6) + pi/3 .*a2 .*sin(pi
*(t(i)-a8)/3) +pi/2 .*a3 .*sin(pi*(t(i)-a8)/2) +2*pi/3 .*a4 .*sin(2*pi
*(t(i)-a8)/3) + 5*pi/6 .*a5 .*sin(5*pi*(t(i)-a8)/6) +7*pi/6 .*a7.*sin
(7*pi*(t(i)-a8)/6);
80
81     d(i) = M(i) - theta(i);
82 end
83 da = (j' * j) \ (j' * d');
84 a = a + da';
85
86 % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
(da(4)) < tol)
87 % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
(da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol)
88 % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
(da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol && abs(da(6)) < tol)
89 % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
(da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol && abs(da(6)) < tol && abs(da(7)) <
tol)
90 % if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs
(da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol && abs(da(6)) < tol && abs(da(7)) <
tol && abs(da(8)) < tol)
91 if (abs(da(1)) < tol && abs(da(2)) < tol && abs(da(3)) < tol && abs(
da(4)) < tol && abs(da(5)) < tol && abs(da(6)) < tol && abs(da(7)) <
tol && abs(da(8)) < tol && abs(da(9)) < tol)
92     disp('Gauss-Newton method has converged');
93     break
94 end
95 end
96 end

```

Catatan: Untuk mendapatkan nilai koefisien sesuai jumlah harmonik (n), perlu dilakukan penyesuaian dengan memberikan tanda "%" pada *syntax* lain. Misal: untuk mendapatkan koefisien saat $n = 7$, maka kode yang tidak berhubungan dengan kondisi $n = 7$ diberi "%", dan berlaku untuk kondisi lainnya.

Lampiran 5

Script MATLAB Estimasi *Volatilitas*

```
1 file_path = 'Data_Interpolated.xlsx';
2 sheet_name = 'Sheet3';
3 data = readtable(file_path, 'Sheet', sheet_name);
4 X = data.mavg;
5 N = length(X);
6
7 % Hitung selisih kuadrat antara setiap dua entri berturut-turut
8 selisih_kuadrat = zeros(N-1, 1);
9 for j = 1:N-1
10     selisih_kuadrat(j) = (X(j+1) - X(j))^2;
11 end
12
13 % Hitung Volatilitas
14 sigma_mu = 1/N*sum(selisih_kuadrat);
15
16 disp(['Nilai volatilitas: ', num2str(sigma_mu)]);
```

Lampiran 6

Script MATLAB Estimasi Mean-Reversion

```
1 file_path = 'Data_Interpolated.xlsx';
2 sheet_name = 'Sheet3';
3 data = readtable(file_path, 'Sheet', sheet_name);
4 X = data.mavg;
5 theta = data.theta_ols;
6 sigma = 7.2286;
7 n = length(X);
8
9 % Hitung Z
10 Z = zeros(1, n);
11 for i = 1:n
12     if i == 1
13         Z(i) = (theta(i) - X(i)) / sigma^2;
14     else
15         Z(i) = (theta(i-1) - X(i-1)) / sigma^2;
16     end
17 end
18
19 % Hitung mean-reversion
20 sum1 = 0;
21 sum2 = 0;
22 for i = 2:n
23     sum1 = sum1 + Z(i-1)*(X(i)-theta(i));
24     sum2 = sum2 + Z(i-1)*(X(i-1)-theta(i-1));
25 end
26
27 alpha = -log(sum1/sum2);
28 disp(['Nilai alpha: ', num2str(alpha)]);
```

Lampiran 7

Script MATLAB Proses Orstein-Uhlenbeck

```
1 file_path = 'Data_Interpolated.xlsx';
2 sheet_name = 'Sheet3';
3 data = readtable(file_path, 'Sheet', sheet_name);
4 t = data.time;
5 M = data.mavg;
6 theta_t = data.thetasin;
7 N = length(t);
8
9 alpha = 1.5834;
10 sigma = 7.2286;
11
12 % Nilai koefisien n = 10
13 a60 = 7.0433;          a66 = -0.4293;
14 a61 = -5.2454;        a67 = -0.0254;
15 a62 = 0.3579;         a68 = 0.3535;
16 a63 = -0.4698;        a69 = -1.2757;
17 a64 = -0.0275;        a70 = -1.0054;
18 a65 = -0.9028;        a71 = 4.8523;
19
20 th = @(t) a60 + a61*sin(pi*(t-a71)/6) + a62*sin(2*pi*(t-a71)/6) + ...
21     a63*sin(3*pi*(t-a71)/6) + a64*sin(4*pi*(t-a71)/6) + ...
22     a65*sin(5*pi*(t-a71)/6) + a66*sin(6*pi*(t-a71)/6) + ...
23     a67*sin(7*pi*(t-a71)/6) + a68*sin(8*pi*(t-a71)/6) + ...
24     a69*sin(9*pi*(t-a71)/6) + a70*sin(10*pi*(t-a71)/6);
25
26 dt = 1;
27 num_paths = 100000;
28 x = zeros(N, num_paths);
29 rng(1);
30
31 for j = 1:num_paths
32     x(1,j) = 11.55505653;
33     for i = 1:N-1
34         % Nilai theta(t) dan dtheta(t)/dt
35         theta_i = th(t(i));
36         theta_i_plus_dt = th(t(i) + dt);
37         dtheta_dt = (theta_i_plus_dt - theta_i) / dt;
38
39         % Nilai dX_t sesuai dengan persamaan OU yang diberikan
40         dX = (alpha * (theta_i - x(i, j)) + dtheta_dt) * dt + sigma *
            sqrt(dt) * randn;
41
```



```

42     % Update nilai x pada waktu t_{i+1} untuk path ke-j
43     x(i+1, j) = x(i, j) + dX;
44     end
45 end
46
47 predicted_values = mean(x, 2);
48 mse = mean((predicted_values-M).^2);
49 disp(['Nilai MSE :' num2str(mse)]);
50
51 figure;
52 plot(t, M, 'LineWidth', 3.5, 'Color', 'black', 'DisplayName', 'Rata-rata
    Bulanan');
53 hold on;
54 plot(t, theta_t, 'LineWidth', 3, 'Color', 'yellow', 'LineStyle', '--', '
    DisplayName', 'Tren Jangka Panjang');
55 hold on;
56 plot(t, predicted_values, 'LineWidth', 2.5, 'Color', 'blue', 'LineStyle',
    '--', 'DisplayName', 'OU');
57
58 xlabel('Bulan');
59 ylabel('Curah Hujan');
60 legend('show');
61 grid on;
62 hold off;

```

Lampiran 8

Script MATLAB Valuasi Opsi *Call* dengan Metode Beda Hingga Eksplisit

```
1 clear all; clc;
2
3 %% Domain komputasi
4 x_das = 7.0433;      % rata-rata curah hujan
5 x_min = 0;          % curah hujan minimum
6 x_max = 200;        % curah hujan maksimum
7 y_min = 0;          % indeks curah hujan minimum
8 y_max = 200;        % indeks curah hujan maksimum
9 tau_0 = 1;          % awal kontrak
10 T = 2;              % maturity kontrak
11 tau_f = tau_0+T;    % akhir kontrak
12
13 %% Parameter untuk menyelesaikan PDP
14 K = 2.276586947;    % rata-rata indeks curah hujan
15 r = 0.06;           % suku bunga
16 tick = 5;           % fraksi harga
17
18 %% Parameter dari proses OU
19 sigma = 7.2286;     % volatilitas
20 alpha = 1.5834;     % kecepatan mean-reversion
21
22 %% Parameter fungsi theta(t)
23 a60 = 7.0433;       a66 = -0.4293;
24 a61 = -5.2454;      a67 = -0.0254;
25 a62 = 0.3579;       a68 = 0.3535;
26 a63 = -0.4698;      a69 = -1.2757;
27 a64 = -0.0275;      a70 = -1.0054;
28 a65 = -0.9028;      v = 4.8523;
29
30 %% Grid untuk domain
31 d_x = (x_max-x_min)/(2^7) % ruang
32 d_y = d_x;              % ruang
33 d_tau = 10^-5           % waktu
34
35 N_x = fix((x_max-x_min)/d_x);
36 N_y = fix((y_max-y_min)/d_y);
37 N_tau = fix((tau_f-tau_0)/d_tau);
38
39 x = x_min:d_x:x_max;
40 y = y_min:d_y:y_max;
```

```

41 tau = tau_0:d_tau:tau_f;
42
43 [Xi,Yi] = meshgrid(x(1:end),y(1:end));
44
45 % Fungsi RE dalam PDP
46 fJ = zeros(N_y+1,N_x+1);
47 fJ = Xi-x_das;
48
49 % Kondisi awal V(x,y,0)
50 Vcall = zeros(N_y+1,N_x+1);
51 Vcall(1:N_y+1,1:N_x+1) = tick .* max(0,Yi-K); % solusi awal
52
53 % Kondisi batas (inisialisasi)
54 Vcall(1:N_y,N_x+1) = tick .* max(0,Yi(1:N_y,1)-K); % V(x_max,y,0)
55 Vcall(N_y+1,1:N_x+1) = tick .* max(0,Yi(N_y+1,1:N_x+1)-K); % V(x,y_max,0)
56
57 %% Iterasi metode numerik
58 k = 1:N_y;
59 j = 2:N_x;
60 for n = 2:N_tau+1
61     % Inisialisasi fungsi gamma(x,t)
62     theta_awal = zeros(N_y+1,N_x+1); % theta
63     theta_aksen = zeros(N_y+1,N_x+1); % turunan theta
64     gammaN = zeros(N_y+1,N_x+1); % gamma(x,t)
65
66     % Estimasi gamma (bulanan)
67     theta_awal = a60 + a61*sin(pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + a62*sin(2*pi
68     *(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + ...
69     a63*sin(3*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + a64*sin(4*pi*(T+tau_0-tau(
70     n-1)-v)/6) + ...
71     a65*sin(5*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + a66*sin(6*pi*(T+tau_0-tau(
72     n-1)-v)/6) + ...
73     a67*sin(7*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + a68*sin(8*pi*(T+tau_0-tau(
74     n-1)-v)/6) + ...
75     a69*sin(9*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + a70*sin(10*pi*(T+tau_0-tau
76     (n-1)-v)/6);
77
78     theta_aksen = a61*(pi/6)*sin(pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + a62*(2*pi
79     /6)*sin(2*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + ...
80     a63*(3*pi/6)*sin(3*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + a64*(4*pi/6)*sin
81     (4*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + ...
82     a65*(5*pi/6)*sin(5*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + a66*(6*pi/6)*sin
83     (6*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + ...
84     a67*(7*pi/6)*sin(7*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + a68*(8*pi/6)*sin
85     (8*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + ...
86     a69*(9*pi/6)*sin(9*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6) + a70*(10*pi/6)*sin

```

```

(10*pi*(T+tau_0-tau(n-1)-v)/6);
78
79 gammaN = alpha*(theta_awal-Xi)-theta_aksen;
80
81 % Koefisien Skema Eksplisit
82 A = 1-r*d_tau - (d_tau)/(d_y).*fJ.*max(0,sign(fJ)) - ...
83     (sigma^2*d_tau)/(d_x^2) - ((d_tau^2)/(d_x^2)).*gammaN.*gammaN;
84 B = (d_tau)/(2*d_x).*gammaN + (sigma^2*d_tau)/(2*d_x^2) + ((d_tau^2)
85     /(2*d_x^2)).*gammaN.*gammaN;
86 C = (-d_tau)/(2*d_x).*gammaN + (sigma^2*d_tau)/(2*d_x^2) + ((d_tau^2)
87     /(2*d_x^2)).*gammaN.*gammaN;
88 D = (d_tau)/(d_y).*fJ.*max(0,sign(fJ));
89
90 % Skema Eksplisit
91 vn      = Vcall;
92 vnNx0   = vn(k,2);
93
94 % Hitung titik awal di x (Batas Neumann)
95 Vcall(k,1) = A(k,1).*vn(k,1) + B(k,1).*vn(k,2) + C(k,1).*vnNx0 + D(k
96     ,1).*vn(k+1,1);
97
98 % Hitung titik interior
99 Vcall(k,j) = A(k,j).*vn(k,j) + B(k,j).*vn(k,j+1) + C(k,j).*vn(k,j-1)
100     + D(k,j).*vn(k+1,j);
101
102 % Kondisi Batas
103 Vcall(1:N_y,N_x+1)=tick.*max(0,Yi(1:N_y,N_x+1)-K*exp(-r*(tau(n)-tau_0
104     ))); % V(x_max,y,t)
105 Vcall(N_y+1,1:N_x+1)= tick*(Yi(N_y+1,1:N_x+1)- K.*exp(-r*(tau(n)-
106     tau_0))); % V(x,y_max,t)
107 end
108
109 %% Visualisasi
110 % plot surface 3D
111 figure(1)
112 xx=x(1:N_x/2+1);
113 yy=y(1:N_y/2+1);
114 Vplot=Vcall(1:N_x/2+1,1:N_y/2+1);
115 surf(xx,yy,Vplot,'EdgeColor','none');
116 set(gca,'FontName','Times','FontSize',15);
117 xlabel('x','FontSize',15);
118 ylabel('y','FontSize',15);
119 zlabel('V','FontSize',15);
120
121 % plot untuk curah hujan tertentu
122 figure(2)
123 plot(y,Vcall(:,100),'linewidth',3);

```

```
117 set(gca, 'FontName', 'Times', 'FontSize', 15);
118 xlabel('y', 'FontSize', 15);
119 ylabel('V', 'FontSize', 15);
120 xlim([0 150]);
121
122 % plot untuk indeks curah hujan tertentu
123 figure(3)
124 plot(x, Vcall(20, :), 'linewidth', 3);
125 set(gca, 'FontName', 'Times', 'FontSize', 15);
126 xlabel('x', 'FontSize', 15);
127 ylabel('V', 'FontSize', 15);
128 xlim([0 150]);
```


BIOGRAFI PENULIS



Nama lengkap penulis adalah Elisabeth Yeyen Setyorini, lahir di Kediri pada tanggal 30 September 2000. Pendidikan formal yang pernah ditempuh yaitu SD Kristen Petra Kediri (2006-2012), SMP Negeri 1 Kediri (2012-2015), SMA Negeri 1 Kediri (2015-2018), dan Sarjana Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember (2018-2022). Penulis kemudian melanjutkan studi S2 di Departemen Matematika ITS pada tahun 2022 dengan program beasiswa *freshgraduate*. Selama menjalani masa perkuliahan sarjana, penulis mengikuti organisasi kampus yaitu sebagai kepala biro progresi pengembangan sumber daya musik PSM ITS 2019/2020. Penulis juga menjadi panitia dalam beberapa kegiatan kampus yaitu sebagai staf dana pembinaan kerohanian mahasiswa baru kristen PMK ITS 2019/2020, ketua pelaksana CBT PSM ITS 2020 dan menjadi sekretaris UKM EXPO ITS 2020. Pencapaian di bidang non-akademik, yaitu pada tahun 2019 penulis pernah meraih dua medali emas pada kompetisi paduan suara internasional (KICC) pada kategori *mix choir* dan *folklore*. Selama perkuliahan magister, penulis mengisi waktu dengan menjadi tentor lembaga bimbingan belajar. Minat penulis yaitu pada bidang matematika terapan, khususnya ilmu keuangan. Demikian biodata tentang penulis, jika terdapat kritik dan saran mengenai laporan Tesis ini dapat menghubungi penulis melalui email elisabethsetyorini30@gmail.com. Terima kasih.

