TUGAS AKHIR - SM234801

DIMENSI METRIK MONOFONIK LOKAL GRAF *DEGREE SPLITTING*

MUHAMMAD YUSTI PERMANA SATRIADI

NRP 5002201151

Dosen Pembimbing

Dr. Dra. Rinurwati, M.Si.

NIP 19640304 198903 2 002

Program Studi Sarjana

Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2024

TUGAS AKHIR - SM234801

DIMENSI METRIK MONOFONIK LOKAL GRAF *DEGREE SPLITTING*

MUHAMMAD YUSTI PERMANA SATRIADI

NRP 5002201151

Dosen Pembimbing

Dr. Dra. Rinurwati, M.Si.

NIP 19640304 198903 2 002

Program Sarjana

Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2024

FINAL PROJECT - SM234801

MONOPHONIC LOCAL METRIC DIMENSION OF DEGREE SPLITTING GRAPHS

MUHAMMAD YUSTI PERMANA SATRIADI

NRP 5002201151

Supervisors

Dr. Dra. Rinurwati, M.Si.

NIP 19640304 198903 2 002

Bachelor Program

Departement of Mathematics

Faculty of Scientics

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2024

LEMBAR PENGESAHAN

DIMENSI METRIK MONOFONIK LOKAL GRAF *DEGREE SPLITTING*

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Matematika pada
Program Studi S-1 Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh: **MUHAMMAD YUSTI PERMANA SATRIADI**
NRP. 5002201151

Surabaya, Juli 2024
Disetujui oleh Tim Penguji Tugas Akhir:

Pembimbing

1. Dr. Dra. Rinurwati, M.Si. (..................)
   NIP. 19640304 198903 2 002

Penguji

1. Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si. (..................)
   NIP. 19761215 200312 2 001

2. Dr. Sunarsini, S.Si, M.Si. (..................)
   NIP. 19691004 199402 2 001

3. Drs. Sadjidon, M.Si. (..................)
   NIP. 19630909 198903 1 005

Mengetahui
Kepala Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data

Prof. Subchan, S.Si, M.Sc, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001

PERNYATAAN ORISINALITAS

Yang bertanda tangan disini:

Nama Mahasiswa / NRP	:	Muhammad Yusti Permana Satriadi / 5002201151
Departemen	:	Matematika
Dosen Pembimbing / NIP	:	Dr. Dra. Rinurwati, M.Si. / 19640304 198903 2 002

dengan ini menyatakan bahwa Tugas Akhir dengan judul "**DIMENSI METRIK MONOFONIK LOKAL GRAF *DEGREE SPLITTING***" adalah hasil karya sendiri, bersifat orisinal, dan ditulis dengan mengikuti kaidah penulisan ilmiah.

Bilamana di kemudian hari ditemukan ketidaksesuaian dengan pernyataan ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan yang berlaku di Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, 31 Juli 2024

Mengetahui
Dosen Pembimbing

Dr. Dra. Rinurwati, M.Si.
NIP. 19640304 198903 2 002

Mahasiswa

Muhammad Yusti Permana Satriadi
NRP. 5002201151

ABSTRAK

DIMENSI METRIK MONOFONIK LOKAL GRAF *DEGREE SPLITTING*

Nama Mahasiswa / NRP	:	Muhammad Yusti Permana Satriadi / 5002201151
Departemen	:	Matematika FSAD -ITS
Dosen Pembimbing	:	Dr. Dra. Rinurwati, M.Si.

Abstrak

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E, $W = \{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset V$ adalah himpunan terurut, dan $u, v \in V$. Representasi monofonik $mr(v|W)$ dari v terhadap W adalah k-*tuple* $(dm(v, v_1), dm(v, v_2), ..., dm(v, v_k))$, dengan $dm(v, v_i), i \in \{1, 2, .., k\}$ adalah jarak monofonik dari simpul v ke simpul v_i. Himpunan W disebut himpunan pembeda monofonik dari G jika $mr(u|W) \neq mr(v|W)$. Himpunan W disebut himpunan pembeda monofonik lokal jika simpul-simpul yang bertetangga dari G memiliki representasi monofonik yang berbeda terhadap W. Himpunan pembeda monofonik lokal dengan banyaknya elemen minimal disebut himpunan pembeda monofonik lokal minimal untuk G, dan kardinalitasnya disebut dimensi metrik monofonik lokal dari G, $mdim_l(G)$. Graf *degree splitting* adalah graf dengan $V = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup ... \cup S_k \cup T$ dan $T = V - \bigcup_j S_j$, dengan setiap S_j adalah himpunan simpul berderajat sama dan banyak elemennya minimal dua. Graf *degree splitting* dari G, $DS(G)$, diperoleh dari G dengan menambahkan simpul-simpul $w_1, w_2, ..., w_j$ dan menghubungkan w_j ke setiap simpul di S_j untuk $1 \leq j \leq k$, dengan k banyaknya derajat simpul-simpul di G. Dalam Tugas Akhir ini ditentukan dan dianalisis dimensi metrik monofonik lokal dari graf-graf khusus dan graf *degree splitting*. Dari penelitian ini diperoleh: $mdim_l(P_n) = 1$; $mdim_l(C_n) = 1$ jika n genap dan $mdim_l(C_n) = 2$ jika n ganjil; $mdim_l(S_n) = 1$; $mdim_l(K_n) = n - 1$; $mdim_l(K_{m,n}) = 1$; $mdim_l(DS(P_n)) = 1$ untuk n ganjil kecuali 5 dan $mdim_l(DS(P_n)) = 2$ jika n genap atau $n = 5$; $mdim_l(DS(C_n)) = 2$; $mdim_l(DS(K_n)) = n$; $mdim_l(DS(S_n)) = 1$; $mdim_l(DS(K_{m,n}) = 1$ jika $m \neq n$ dan $mdim_l(DS(K_{m,n}) = 2$ jika $m = n$.

Kata kunci: *dimensi metrik; dimensi metrik lokal; dimensi metrik monofonik; dimensi metrik monofonik lokal; graf degree splitting*

ABSTRACT

MONOPHONIC LOCAL METRIC DIMENSION OF DEGREE SPLITTING GRAPHS

Student Name / NRP	:	Muhammad Yusti Permana Satriadi / 5002201151
Departement	:	Mathematics SCIENTICS - ITS
Advisor	:	Dr. Dra. Rinurwati, M.Si.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a connected graph with vertex set V and edge set E, $W = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V$ is an ordered set, and $u, v \in V$. The monophonic representation $mr(v|W)$ of v with respect to W is the k-tuple $(dm(v, v_1), dm(v, v_2), \ldots, dm(v, v_k))$, where $dm(v, v_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, is the monophonic distance from vertex v to vertex v_i. The set W is called a monophonic resolving set of G if $mr(u|W) \neq mr(v|W)$. The set W is called a local monophonic resolving set if the adjacent vertices of G have different monophonic representations with respect to W. A local monophonic resolving set with the minimum number of elements is called a minimal local monophonic resolving set for G, and its cardinality is called the local monophonic metric dimension of G, denoted by $mdim_l(G)$. A *degree splitting* graph is a graph with $V = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \ldots \cup S_k \cup T$ and $T = V - \bigcup_j S_j$, where each S_j is a set of vertices with the same degree and has at least two elements. The *degree splitting* graph of G, denoted by $DS(G)$, is obtained from G by adding vertices $w_1, w_2, \ldots, w_j$ and connecting w_j to every vertex in S_j for $1 \leq j \leq k$, where k is the number of degrees of the vertices in G. In this Thesis, the local monophonic metric dimension of special graphs and degree splitting graphs are determined and analyzed. The results of this research are as follows: $mdim_l(P_n) = 1$; $mdim_l(C_n) = 1$ if n is even and $mdim_l(C_n) = 2$ if n is odd; $mdim_l(S_n) = 1$; $mdim_l(K_n) = n - 1$; $mdim_l(K_{m,n}) = 1$; $mdim_l(DS(P_n)) = 1$ for odd n except 5 and $mdim_l(DS(P_n)) = 2$ if n is even or $n = 5$; $mdim_l(DS(C_n)) = 2$; $mdim_l(DS(K_n)) = n$; $mdim_l(DS(S_n)) = 1$; $mdim_l(DS(K_{m,n}) = 1$ if $m \neq n$ and $mdim_l(DS(K_{m,n}) = 2$ if $m = n$.

Keywords: *metric dimension; local metric dimension; monophonic metric dimension; local monophonic metric dimension; degree splitting graph*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT karena atas berkah, rahmat dan Ridho-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul :

"DIMENSI METRIK MONOFONIK LOKAL GRAF
DEGREE SPLITTING"

sebagai salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat kerja sama, bantuan, dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada :

1. Orang tua yang telah memberikan support, nasehat dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.

2. Ibu Dr. Dra. Rinurwati, M.Si., selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan dengan penuh kesabaran kepada penulis selama pengerjaan Tugas Akhir ini.

3. Bapak Dr. Budi Setiyono, S.Si., M.T., selaku dosen wali yang telah memberikan arahan dengan penuh kesabaran kepada penulis selama masa perkuliahan.

4. Kepala Departemen Matematika FSAD ITS dan Sekretaris Departemen Matematika FSAD ITS beserta jajarannya.

5. Bapak/Ibu dosen pengajar yang tidak bisa penulis sebutkan satu per satu, yang telah memberikan ilmu dan pengalaman yang bermanfaat kepada penulis, serta segenap Karyawan, Tendik dan keluarga besar Departemen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember atas dukungan dan bantuannya.

6. Teman-teman seperjuangan, Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Angkatan 2020 yaitu angkatan MATRIXX yang telah mengisi hari - hari penulis dengan penuh keceriaan, motivasi dan pengalaman.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, 01 Agustus 2024

Muhammad Yusti Permana Satriadi

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Deskripsi	Halaman
G	Graf	1
u	Simpul pada graf	1
v	Simpul pada graf	1
$d(u,v)$	Jarak antara simpul u dan v	1
$dm(u,v)$	Jarak monofonik dari u ke v	1
W	Himpunan pembeda	1
$r(v\|W)$	Representasi simpul v terhadap W	1
$\dim(G)$	Dimensi metrik graf G	1
$\mathrm{mdim}(G)$	Dimensi metrik monofonik graf G	1
P_n	Graf lintasan dengan n simpul	2
C_n	Graf siklus dengan n simpul	2
K_n	Graf lengkap dengan n simpul	2
S_n	Graf bintang dengan n simpul	2
$K_{m,n}$	Graf bipartit lengkap	2
V	Himpunan simpul dalam graf	3
E	Himpunan sisi dalam graf	3
e	Sisi pada graf	3
$\mathrm{rad}(G)$	Jari-jari graf G	5
$\mathrm{diam}(G)$	Diameter graf G	5
$\|W\|$	Kardinalitas dari himpunan pembeda	7
$DS(G)$	Graf *degree splitting* dari G	8
$\mathrm{mdim}_l(G)$	Dimensi metrik monofonik lokal graf G	11
$\mathrm{mdim}_l(P_n)$	Dimensi metrik monofonik lokal graf P_n	11
$\mathrm{mdim}_l(C_n)$	Dimensi metrik monofonik lokal graf C_n	12
$\sim$	Bertetangga	13
$\mathrm{mdim}_l(S_n)$	Dimensi metrik monofonik lokal graf S_n	13
$\mathrm{mdim}_l(K_{m,n})$	Dimensi metrik monofonik lokal graf $K_{m,n}$	14
$\mathrm{mdim}_l(K_n)$	Dimensi metrik monofonik lokal graf K_n	16
$\mathrm{mdim}_l(DS(P_n))$	Dimensi metrik monofonik lokal graf $DS(P_n)$	17
$\mathrm{mdim}_l(DS(C_n))$	Dimensi metrik monofonik lokal graf $DS(C_n)$	19
$\mathrm{mdim}_l(DS(S_n))$	Dimensi metrik monofonik lokal graf $DS(S_n)$	23
$\mathrm{mdim}_l(DS(K_n))$	Dimensi metrik monofonik lokal graf $DS(K_n)$	25
$\mathrm{mdim}_l(DS(K_{m,n}))$	Dimensi metrik monofonik lokal graf $DS(K_{m,n})$	27

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dimensi metrik merupakan salah satu bidang kajian penelitian dalam teori graf. Dimensi metrik pada graf pertama kali diperkenalkan secara terpisah oleh Slater pada 1975 dengan istilah bilangan lokasi untuk graf terhubung dan oleh Harary dan Melter pada 1976 dengan istilah dimensi metrik (Chartrand, Eroh, Johnson, & Oellermann, 2000). Dimensi metrik, sebagai ukuran yang menggambarkan jarak atau kedekatan antara simpul-simpul dalam suatu graf, memainkan peran penting dalam pemahaman struktur dan sifat graf. Jarak antara simpul u dan v dalam graf terhubung G, $d(u, v)$ adalah panjang dari lintasan u-v terpendek dalam G (P. Santhakumaran & Mahendran, 2013). Lintasan $u - v$ pada graf disebut sebagai lintasan monofonik jika merupakan lintasan tanpa tali busur. Panjang lintasan monofonik terpanjang dari $u - v$ disebut sebagai jarak monofonik dari u ke v, $dm(u, v)$. Lintasan $u-$ v dengan panjang sama dengan $dm(u, v)$ dikenal sebagai lintasan monofonik $u - v$ (P. Santhakumaran & Mahendran, 2013).

Dimensi metrik adalah konsep dalam teori graf yang mengukur kardinalitas minimal dari himpunan pembeda pada graf (Avadayappan, Bhuvaneshwari, & Gandhi, 2017). Dalam konteks dimensi metrik, himpunan W dapat berperan sebagai himpunan pembeda. Representasi suatu simpul v terhadap W yang dinotasikan $r(v|W)$ merupakan urutan yang terdiri dari k elemen, dimana masing-masing elemen dalam urutan tersebut merupakan jarak antara simpul v dan masing-masing elemen dalam himpunan W. Himpunan W disebut himpunan pembeda jika setiap simpul berbeda representasinya terhadap W, dan setiap himpunan pembeda dengan banyaknya elemen minimal disebut sebagai basis untuk G, kardinalitasnya disebut dimensi metrik $\dim(G)$(Chartrand et al., 2000). Dimensi metrik lokal, pertama kali diperkenalkan oleh Okamoto, dkk. pada 2010, didefinisikan sebagai jumlah minimal simpul-simpul yang diperlukan untuk membedakan simpul-simpul yang bertetangga(Okamoto, Crosse, Phinezy, Zhang, & Kalamazoo, 2010), sedangkan dimensi metrik monofonik diperkenalkan oleh J. Suji Priya dan T. Muthu Nesa Beula pada tahun 2023. Dimensi metrik monofonik adalah kardinalitas minimal dari himpunan pembeda monofonik yang dinotasikan dengan $mdim(G)$, dan selanjutnya jika konsep ini dikombinasikan dengan konsep lokal maka himpunan W disebut himpunan pembeda monofonik lokal dari G, yaitu jika representasi monofonik dari setiap simpul yang bertetangga berbeda, dan kardinalitas minimal dari himpunan pembeda monofonik lokal tersebut adalah dimensi metrik monofonik lokal yang disimbolkan dengan $\mathrm{mdim}_l(G)$ (Priya & Beula, 2023).

Dalam Tugas Akhir ini Penulis mengembangkan konsep dengan mengkombinasikan konsep lintasan monofonik dan lokal dalam dimensi metrik pada graf dengan *degree splitting*.Topik ini dipilih karena beberapa alasan: pertama, konsep dimensi metrik monofonik lokal masih belum banyak dieksplorasi, sehingga penelitian ini berpotensi memberikan kontribusi baru dalam bidang teori graf. Kedua, pemahaman yang lebih baik tentang dimensi metrik monofonik lokal dapat diterapkan dalam berbagai bidang seperti jaringan komputer, biologi, dan ilmu sosial, dimana analisis graf sering digunakan. Ketiga, penelitian ini menawarkan tantangan intelektual yang signifikan dalam memahami dan mengkarakterisasi graf berdasarkan dimensi metriknya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana cara menghitung dimensi metrik monofonik lokal dari graf *degree splitting*?
2. Bagaimana pola representasi monofonik dari graf - graf dengan *degree splitting*?
3. Bagaimana analisis pola dan hasil perhitungan dimensi metrik monofonik lokal pada graf *degree splitting*?

1.3 Batasan Masalah

Ruang lingkup permasalahan dalam Tugas Akhir ini dibatasi pada graf terhubung berordo $n \geq 4$. Graf yang ditentukan dimensi metrik monofonik lokalnya yaitu beberapa graf khusus antara lain graf lintasan P_n, siklus C_n, lengkap K_n, bintang S_n, dan graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ beserta graf hasil *degree splitting*nya.

1.4 Tujuan

1. Mengetahui cara mendapatkan dimensi metrik monofonik lokal pada graf khusus, dan graf dengan *degree splitting*.
2. Mendapatkan pemahaman terkait pola representasi antar simpul pada graf *degree splitting*.
3. Dapat mengeksplorasi struktur graf dengan memahami analisis pola dan hasil dimensi metrik monofonik lokal pada graf *degree splitting*.

1.5 Manfaat

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan wawasan baru tentang dimensi metrik lokal, khususnya dalam konteks lintasan monofonik, yang dapat diterapkan dalam pemodelan dan analisis jaringan kompleks. Hasil penelitian ini dapat mendukung perkembangan teori graf dan aplikasi di berbagai bidang seperti jaringan sosial, transportasi, dan ilmu komputer.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Terkait Terdahulu

Subbab ini menjabarkan hasil penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti terdahulu yang berkaitan dengan dimensi metrik biasa, monofonik, dan lokal. Chartrand dkk. adalah peneliti yang pertama kali melakukan penelitian mengenai dimensi metrik pada tahun 2000. Pada tahun 2009 Okamoto, Phinezy, and Zhang memperkenalkan konsep dimensi metrik lokal, dan sampai saat ini baru J. Suji Priya dan T. Muthu Nesa Beula mengangkat konsep dimensi metrik monofonik pada suatu graf. Dalam Tugas Akhir ini dikembangkan suatu konsep dengan menggabungkan konsep lokal dan monofonik pada dimensi metrik suatu graf yang disebut dimensi metrik monofonik lokal. Adapun graf yang ditentukan dimensi metrik monofonik lokalnya adalah graf khusus dan graf dengan *degree splitting*, selanjutnya dianalisis pola yang dihasilkan.

2.2 Terminologi Dasar Graf

Perlu diperhatikan dahulu terkait beberapa terminologi dasar dalam teori graf yang menggambarkan simpul dan sisi pada graf tak berarah. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis $G = (V, E)$, dengan V adalah himpunan simpul tidak kosong, sedangkan E adalah himpunan sisi, mungkin kosong yang menghubungkan sepasang simpul. Jika u dan v adalah simpul-simpul pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan simpul u dan v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dilambangkan dengan $e = uv$ (Avadayappan et al., 2017). Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang saling isomorfik dan dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga hubungan kebersisian tetap terjaga. Jika v adalah simpul dalam suatu graf G, maka derajat simpul v adalah banyaknya sisi yang berhubungan langsung dengan simpul v. Dua simpul u dan v pada suatu graf G disebut bertetangga jika u dan v adalah simpul ujung dari suatu sisi e dari G. Sisi e yang demikian disebut bersisian dengan simpul u dan v, dan dikatakan e menghubungkan u dan v dalam graf G (Chartrand & Zhang, 2012).

Graf G disebut bipartit jika himpunan simpul V dapat dibagi menjadi dua himpunan saling asing V_1 dan V_2 sedemikian rupa sehingga setiap sisi dalam graf menghubungkan simpul dari V_1 dengan simpul dari V_2, dengan kata lain bahwa tidak ada sisi dalam G yang menghubungkan dua simpul dalam V_1 atau dua simpul dalam V_2. Jika kondisi ini terpenuhi, maka pasangan (V_1, V_2) disebut suatu bipartisi dari himpunan simpul V.(Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2016). Dalam teori graf, lintasan adalah urutan sisi yang berbeda dalam graf dimana setiap sisi terhubung secara berurutan. Dengan kata lain, lintasan adalah urutan simpul $v_1, v_2, ..., v_k$ dalam graf sehingga setiap simpul v_i terhubung dengan simpul v_{i+1} untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$. Selanjutnya ada kardinalitas, dimana istilah ini merujuk pada jumlah elemen dalam suatu himpunan. Istilah ini dapat digunakan dalam berbagai konteks terkait dengan graf, seperti jumlah simpul, jumlah sisi, dan jumlah himpunan bagian dari himpunan simpul atau himpunan sisi tertentu (Trudeau, 1993).

2.3 Jenis - Jenis Graf

Berikut graf-graf yang digunakan dalam penelitian ini :

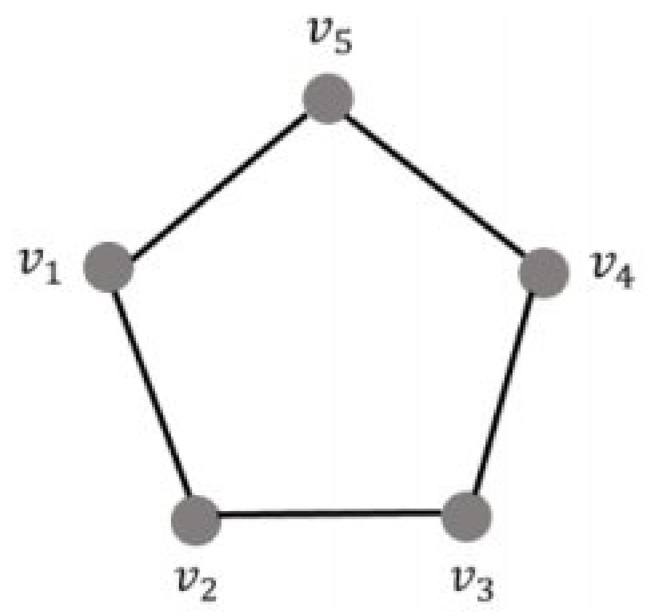
Definisi 2.1. *(Trudeau, 1993) Graf lintasan P_n merupakan graf dengan ordo n dan size $n-1$, dengan simpul dinotasikan sebagai $v_1, v_2, \ldots, v_n$ untuk $n \geq 1$ dan sisi $v_i v_{i+1}$ untuk $i \in \{1, 2, .., n-1\}$.*

Contoh 2.1. Graf lintasan dengan lima simpul, ditunjukkan pada Gambar 2.1.

Gambar 2.1 Graf P_5

Definisi 2.2. *(Trudeau, 1993) Graf siklus C_n merupakan graf dengan ordo n dan size n, dengan simpul dinotasikan sebagai $v_1, v_2, \ldots, v_n$ untuk $n \geq 3$ dan sisi $v_1 v_n$ dan $v_i v_{i+1}$ untuk $i \in \{1, 2, .., n-1\}$.*

Contoh 2.2. Graf siklus dengan lima simpul, ditunjukkan pada Gambar 2.2.

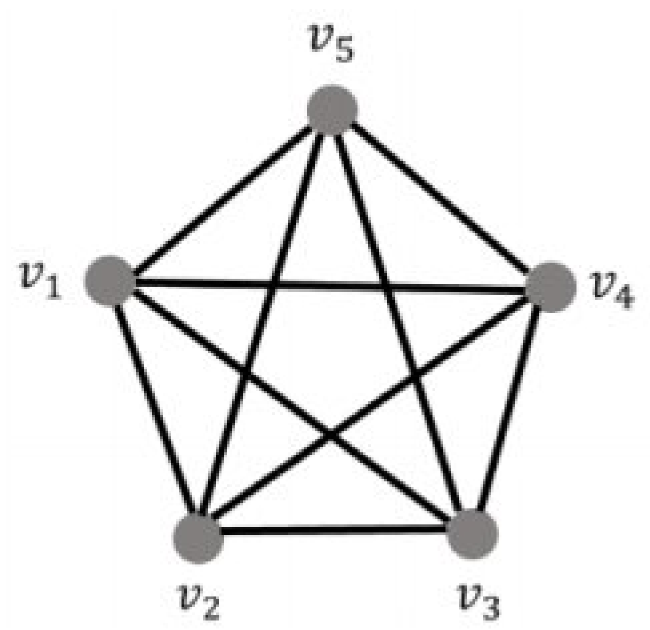


Gambar 2.2 Graf C_5

Definisi 2.3. *(Aldous & Wilson, 2000) Graf lengkap K_n merupakan graf yang setiap dua simpulnya bertetangga.*

Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Setiap simpul di K_n memiliki derajat $n-1$. Banyaknya sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

Contoh 2.3. Graf lengkap dengan lima simpul, ditunjukkan pada Gambar 2.3.

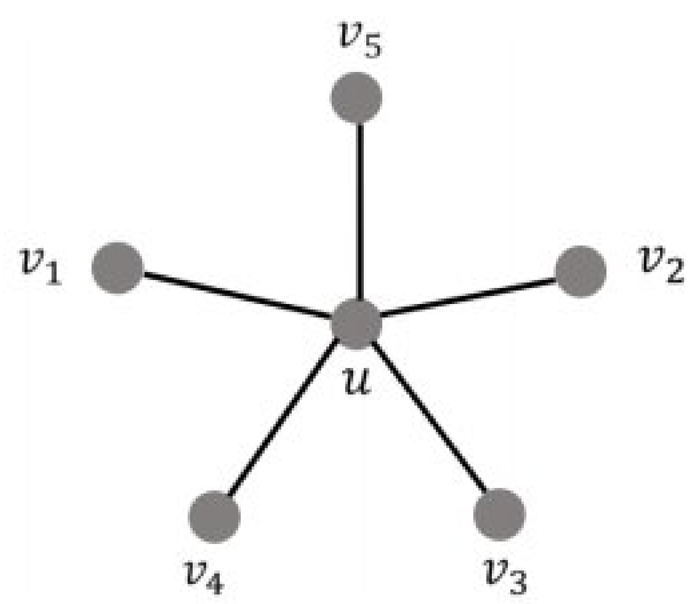


Gambar 2.3 Graf K_5

Definisi 2.4. *(Chartrand et al., 2016) Graf bintang merupakan graf pohon dengan n simpul, satu simpul mempunyai derajat $n-1$ dan $n-1$ simpul mempunyai derajat 1.*

Graf bintang berordo n dinotasikan sebagai S_n, graf ini isomorfik dengan graf bipartit lengkap $K_{1,n-1}$.

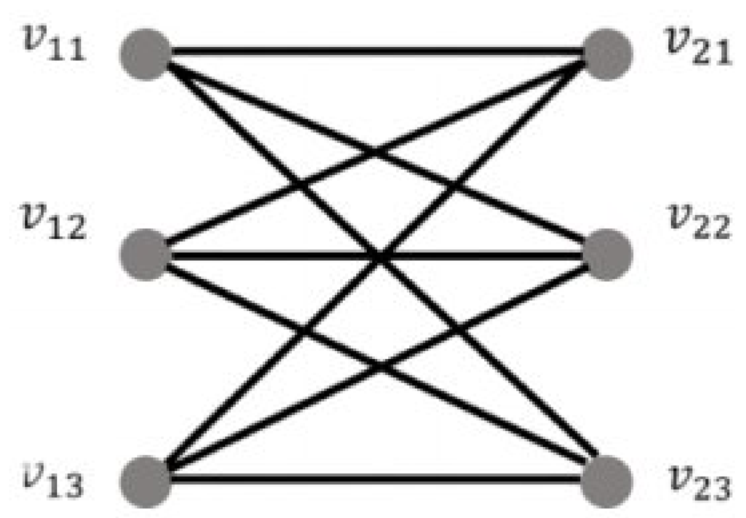
Contoh 2.4. Graf bintang dengan lima simpul, ditunjukkan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Graf S_5

Definisi 2.5. *(Aldous & Wilson, 2000) Graf bipartit lengkap merupakan graf bipartit yang setiap simpul di V_1 terhubung pada setiap simpul di V_2 oleh sebuah sisi.*

Contoh 2.5. Graf bipartit lengkap dengan lima simpul, ditunjukkan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Graf $K_{3,3}$

2.4 Lintasan dan Jarak Monofonik

Sebuah tali busur dari lintasan dalam graf terhubung G adalah sisi u_iu_j dengan $j \geq i+2$. Lintasan $u-v$ disebut sebagai lintasan monofonik jika merupakan lintasan tanpa tali busur. Panjang lintasan monofonik terpanjang dari $u-v$ disebut sebagai jarak monofonik dari u ke v, $dm(u,v)$. Lintasan monofonik $u-v$ dengan panjangnya sama dengan $dm(u,v)$ disebut lintasan monofonik $u-v$(Titus & Santhakumaran, 2017).

Untuk setiap dua simpul u dan v di G, jarak $d(u,v)$ dari u ke v didefinisikan sebagai panjang lintasan $u-v$ terpendek di G. Eksentrisitas $e(v)$ dari simpul v di G adalah jarak maksimal dari v ke simpul di G. Jari-jari $rad(G)$ dari G adalah eksentrisitas minimal di antara simpul-simpul di G, sedangkan diameter diam G dari G adalah eksentrisitas maksimal di antara simpul-simpul di G. Jarak antara dua simpul adalah konsep fundamental dalam teori graf, dan jarak ini adalah metrik pada himpunan simpul G(Titus & Santhakumaran, 2018).

Pada tahun 2011, Santhakumaran dan Titus memperkenalkan dan mempelajari konsep-konsep jarak monofonik pada graf. Untuk setiap dua simpul u dan v di G, lintasan $u-v$ adalah lintasan monofonik $u-v$ jika tidak memuat tali busur. Jarak monofonik

$d(u, v)$ dari u ke v didefinisikan sebagai panjang dari lintasan monofonik $u-v$ terpanjang di G. Untuk simpul v di G, eksentrisitas monofonik dari v adalah jarak monofonik antara v dengan simpul yang terjauh dari v di G (Santhakumaran & Titus, 2011).

Contoh 2.6. Pada Gambar 2.6 terdapat graf G dengan himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_5v_8\}$. Misalkan ingin mencari lintasan monofonik dari simpul v_1 ke v_8 maka didapatkan $v_1 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8$. Jika lintasan yang ditentukan berupa $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8$ maka bukan termasuk lintasan monofonik karena pada saat melewati $v_1 - v_2 - v_3 - v_4$ terbentuk tali busur yaitu sisi v_1v_4, sehingga tidak memenuhi syarat sebagai lintasan monofonik. Selanjutnya untuk contoh dari jarak monofonik dengan menggunakan graf yang sama, misalkan untuk menghitung jarak monofonik dari simpul v_1 ke v_8 yaitu $dm(v_1, v_8)$. Diketahui lintasan monofonik dari v_1 ke v_8 adalah $v_1 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_8$, tampak bahwa lintasan monofonik tersebut memiliki lima sisi, sehingga didapatkan jarak monofonik dari simpul v_1 ke v_8, $dm(v_1, v_8) = 5$.

2.5 Dimensi Metrik

Dimensi metrik adalah kardinalitas minimal dari himpunan pembeda pada graf G, yang dinotasikan dengan $\dim(G)$. Jika u dan v adalah dua simpul dalam graf terhubung G, jarak dari u ke v adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v dalam G, $d(u, v)$. Jika $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subseteq V(G)$, adalah himpunan terurut. Representasi dari simpul v terhadap W, $r(v \mid W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots, d(v, w_k))$. Himpunan W disebut sebagai himpunan pembeda untuk G jika representasi dari setiap dua simpul u dan v berbeda, $r(u \mid W) \neq r(v \mid W)$. Oleh karena itu, jika W adalah himpunan pembeda dengan kardinalitas k untuk suatu graf G berordo n, maka himpunan $\{r(v \mid W) \mid v \in V(G)\}$ terdiri dari n k-vektor yang berbeda. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimal untuk suatu graf G disebut sebagai himpunan pembeda minimal (basis) (Barragan-Ramirez & Rodriguez-Velazquez, 2017).

Chartrand et al. mengkarakterisasi semua graf yang mempunyai dimensi metrik 1; $n-1$ dan $n-2$; dengan n menyatakan banyak simpul dari graf G. Hasil Chartrand et.al. tersebut seperti tertuang dalam Teorema 2.1.

Teorema 2.1. *(Chartrand et al., 2000) Jika G adalah graf terhubung dengan banyak simpul $n \geq 2$, maka*

(a) *$dim(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lintasan dengan n simpul, P_n.*

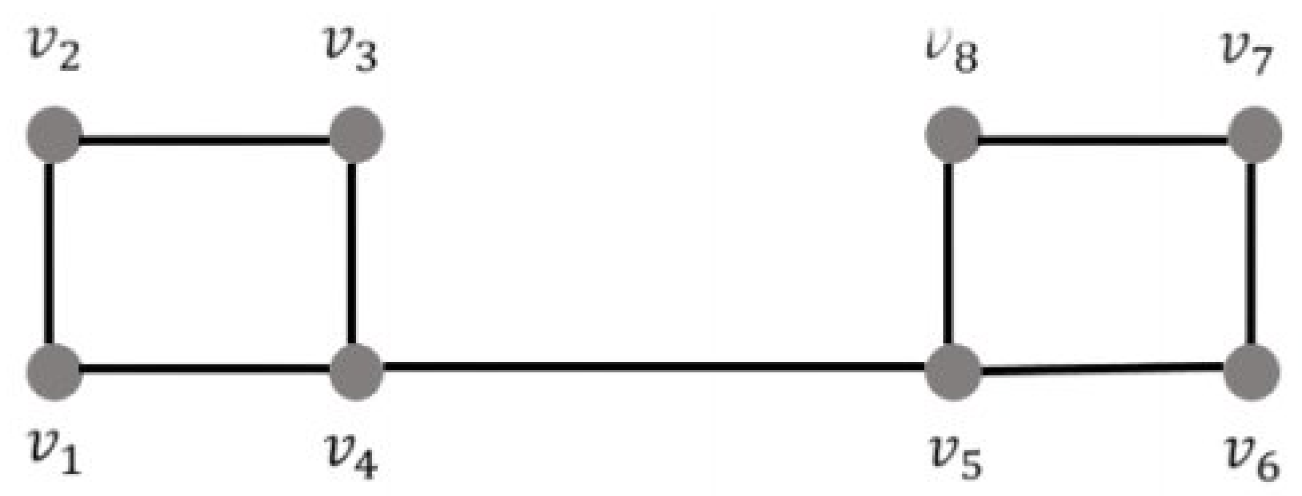
(b) *$dim(G) = n - 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap dengan n simpul, K_n.*

(c) *$dim(G) = n - 2$ dengan $n \geq 4$ jika dan hanya jika G adalah*

  (i) *graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ $(m, n \geq 1)$; atau*

  (ii) *graf hasil operasi join dari graf lengkap dengan r simpul dan graf kosong dengan s simpul, $K_r + \overline{K_s}$ $(r \geq 1, s \geq 2)$; atau*

  (iii) *graf hasil operasi join dari graf lengkap dengan r simpul dan gabungan graf trivial dan graf lengkap dengan s simpul, $K_r + (K_1 \cup K_s)$ $(r, s \geq 1)$.*



Gambar 2.6 Graf G

Contoh 2.7. Graf G pada Gambar 2.6 adalah contoh graf berdimensi metrik dua. Karena, jika dipilih himpunan $W = \{v_1, v_8\}$ maka representasi untuk simpul-simpul G terhadap W sebagai berikut:

$$r(v_1 \mid W) = (0, 3)$$
$$r(v_2 \mid W) = (1, 4)$$
$$r(v_3 \mid W) = (2, 3)$$
$$r(v_4 \mid W) = (1, 2)$$
$$r(v_5 \mid W) = (2, 1)$$
$$r(v_6 \mid W) = (3, 2)$$
$$r(v_7 \mid W) = (4, 1)$$
$$r(v_8 \mid W) = (3, 0)$$

Tampak bahwa representasi setiap simpul dari G terhadap W semuanya berbeda. Kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal karena G bukan graf lintasan, sehingga dimensi metrik graf G, $dim(G) = 2$.

2.6 Dimensi Metrik Lokal

Dimensi metrik lokal adalah kardinalitas minimal dari himpunan pembeda lokal pada G, yang dinotasikan dengan $\dim_l(G)$. Okamoto, Phinezy, dan Zhang pada 2010 menentukan dimensi metrik lokal dari hasil gabungan dan komposisi dari beberapa kelas graf khusus, yaitu graf lengkap, siklus, dan lintasan. Mereka melakukan karakterisasi semua graf terhubung *nontrivial* berordo $n > 3$ dengan dimensi metrik lokal $n - k$ untuk $k \in \{1, 2\}$. Mereka menunjukkan bahwa graf-graf tersebut memiliki jumlah simpul tetangga yang besar(Okamoto et al., 2010).

Teorema 2.2. *(Okamoto et al., 2010) Jika G adalah graf terhubung berordo n dengan $n > 1$, maka $dim_l(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf bipartit.*

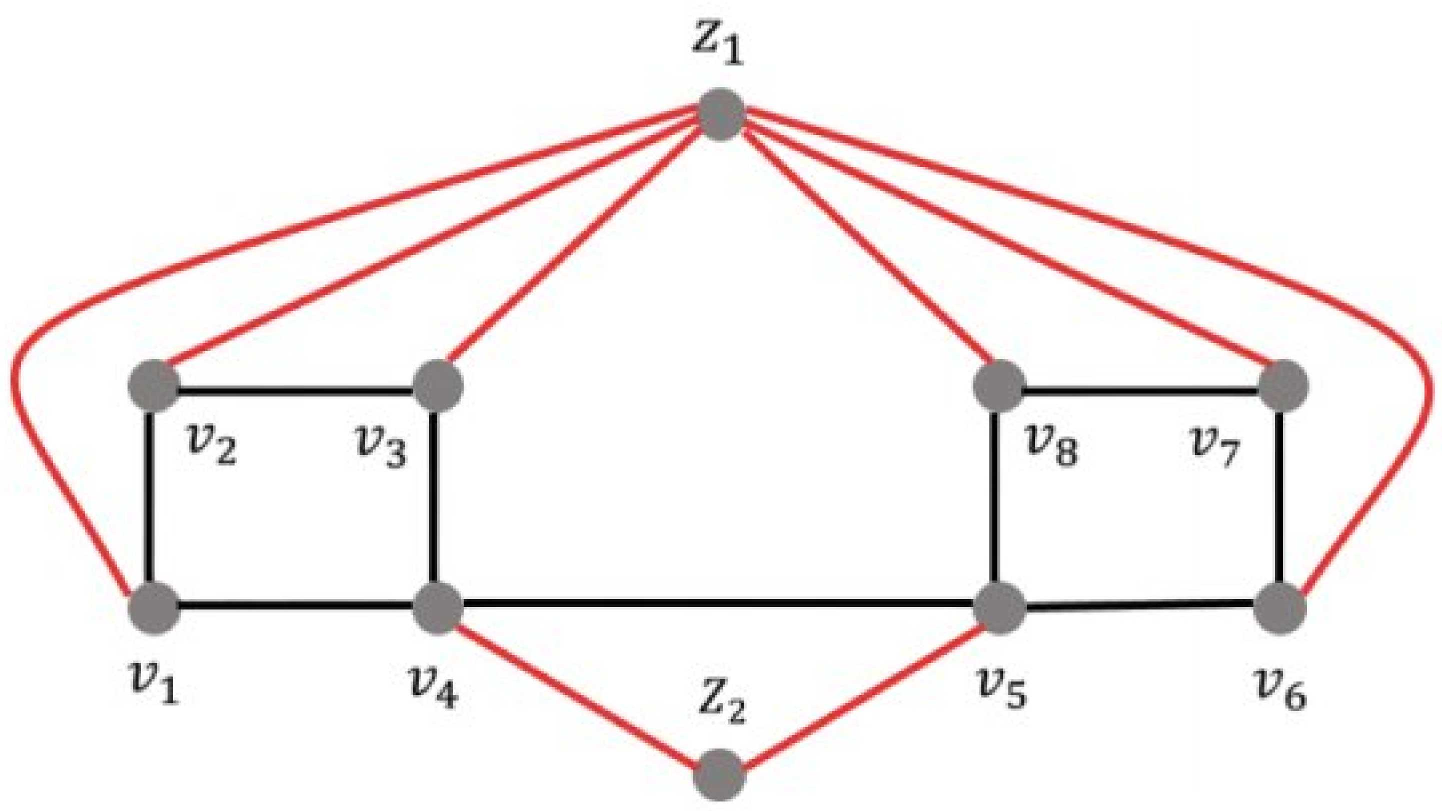
Contoh 2.8. Graf G pada Gambar 2.7 adalah contoh graf dengan dimensi metrik lokal satu (Teorema 2.2), sebab G adalah graf bipartit yaitu graf terhubung berordo delapan dengan bipartisi $V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ dan $V_2 = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$.

2.7 Graf *Degree Splitting*

Dimisalkan $G = (V, E)$ merupakan graf dengan himpunan simpul V yang dapat dibagi menjadi beberapa himpunan bagian $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_t$ dan T. Setiap himpunan S_i untuk $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ merupakan himpunan semua simpul berderajat sama dan banyak elemennya minimal dua. Himpunan T adalah himpunan simpul yang tidak termasuk dalam himpunan-himpunan S_i, yaitu $T = V - \bigcup_{i=1}^{t} S_i$. Graf *degree splitting* dari G,

$DS(G)$, diperoleh dari G dengan menambahkan simpul-simpul baru $z_1, z_2, \ldots, z_t$. Setiap simpul baru z_i dihubungkan ke setiap simpul di himpunan S_i untuk $1 \leq i \leq t$ (Priya & Beula, 2023). Dengan demikian, graf *degree splitting* $DS(G)$ memberikan struktur baru yang memisahkan simpul-simpul berdasarkan derajatnya dengan menambahkan simpul-simpul penghubung untuk setiap kelompok tersebut.

Contoh 2.9. Dalam graf G pada Gambar 2.7 terdapat simpul-simpul v_1, v_2, v_3, v_6, v_7, dan v_8 yang masing-masing berderajat dua, maka simpul-simpul tersebut dikelompokkan dalam satu himpunan S_1 dan ditambahkan simpul baru z_1 yang terhubung ke masing-masing simpul tersebut dalam graf $DS(G)$. Terdapat pula simpul v_4 dan v_5 yang masing-masing berderajat tiga, maka simpul-simpul tersebut dikelompokkan dalam satu himpunan S_2 dan ditambahkan simpul baru z_2 yang terhubung ke masing-masing simpul tersebut dalam graf $DS(G)$. Jadi $V(DS(G)) = S_1 \cup S_2 \cup T$, dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_6, v_7, v_8\}$, $S_2 = \{v_4, v_5\}$, dan $T = \{\}$. Gambar 2.7 merupakan contoh hasil *degree splitting* pada graf G pada Gambar 2.6:



Gambar 2.7 Graf *Degree Splitting* DS(G)

BAB III
METODOLOGI

3.1 Tahapan Penelitian

Dalam Tugas Akhir ini, sebelum masuk tahapan penelitian dilakukan studi literatur menggunakan referensi-referensi dari buku dan jurnal yang berkaitan dengan dimensi metrik, dimensi metrik lokal dan dimensi metrik monofonik selanjutnya dilakukan tahapan penelitian dengan langkah-langkah yang diuraikan sebagai berikut :

Tahap Pertama :

Menentukan nilai dimensi metrik monofonik lokal dari graf-graf khusus antara lain graf lintasan, siklus, lengkap, bintang, dan bipartit lengkap. Selanjutnya dilakukan perhitungan untuk mencari dimensi metrik monofonik lokal juga untuk graf-graf sebelumnya yang dikenai *degree splitting*. Berikut langkah-langkah yang dilakukan berlaku untuk setiap graf.

(1) Menggambarkan graf G.

(2) Melabeli simpul sedemikian sehingga label simpulnya berbeda.

(3) Memilih simpul-simpul calon elemen himpunan pembeda W.

(4) Menentukan jarak monofonik antara dua simpul berdasarkan definisi lintasan monofonik yaitu lintasan terpanjang antara dua simpul yang tidak memiliki tali busur.

(5) Menentukan representasi monofonik masing-masing simpul terhadap himpunan W.

(6) Mengamati apakah untuk setiap dua simpul yang bertetangga representasi monofoniknya sudah berbeda.

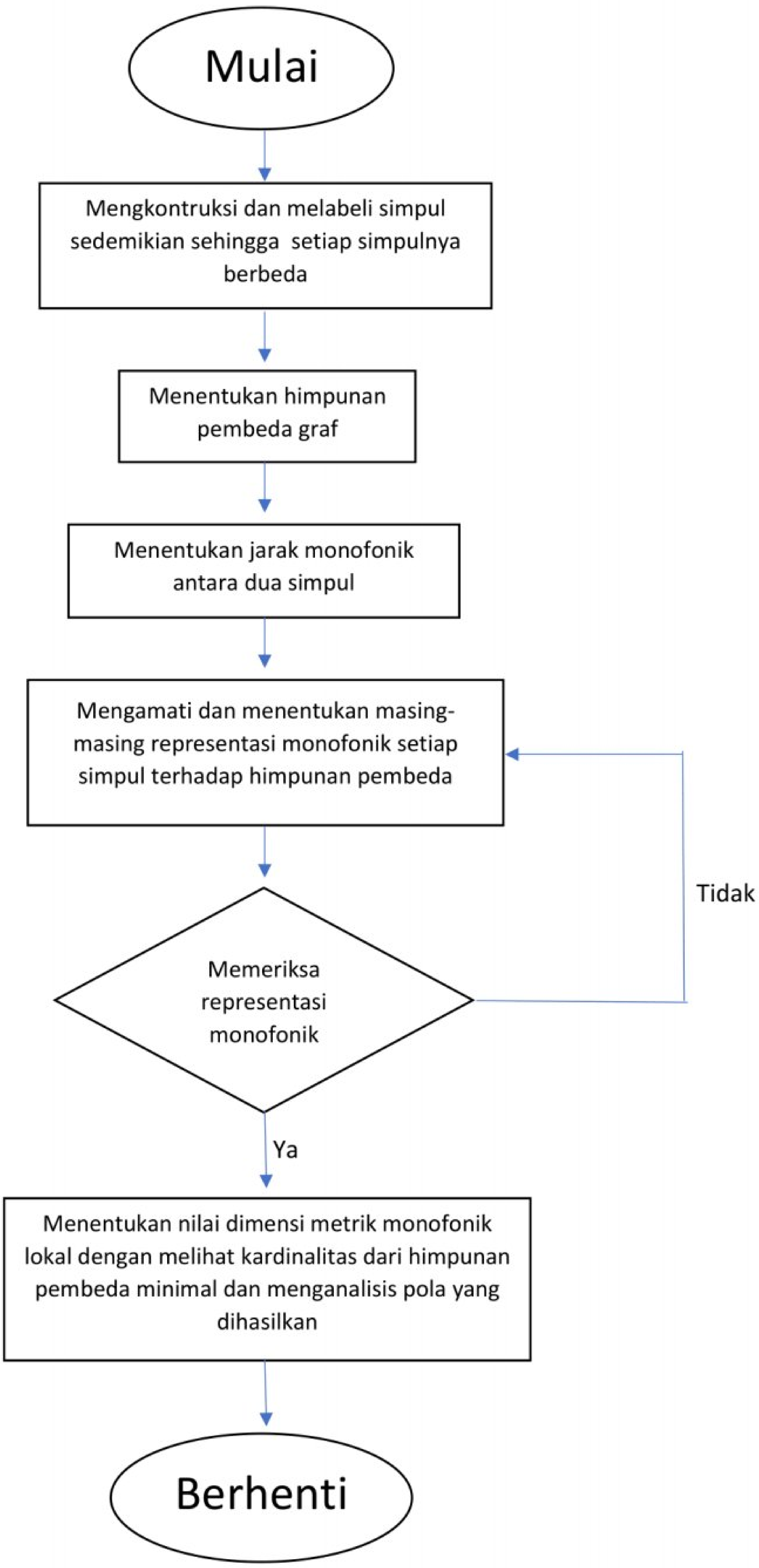
(7) Menentukan nilai dimensi metrik monofonik lokal dengan melihat kardinalitas dari himpunan pembeda W dengan minimal anggota yang dapat menghasilkan representasi setiap simpul sesuai dengan poin (5).

Pada tahap ini konfigurasi dan perhitungan dimensi metrik pada grafnya dilakukan dengan menggunakan $n \geq 4$ dengan maksud untuk memastikan bahwa setiap graf yang diuji berbeda strukturnya.

Tahap Kedua :

Pada tahap ini dilakukan analisis dan penarikan kesimpulan terkait hasil nilai dimensi metrik monofonik lokal maupun pola hasil representasi setiap simpul pada setiap graf.

3.2 Diagram Alir



Gambar 3.1 Diagram Alir

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Graf Khusus

Pada bagian ini dibahas terkait hasil teorema yang diperoleh dan pembuktian dimensi metrik monofonik lokal $mdim_l(G)$ dengan G adalah graf-graf khusus yaitu antara lain graf lintasan P_n, graf siklus C_n, graf lengkap K_n, graf bintang S_n, dan graf bipartit lengkap $K_{m,n}$. Nilai dimensi metrik monofonik lokal tidak selalu sama pada setiap graf bahkan pada graf yang sama antara n genap dan ganjil dapat menghasilkan nilai berbeda, tergantung kardinalitas minimal dari himpunan pembeda monofonik lokal ketika direpresentasikan terhadap setiap simpul pada suatu graf G.

4.1.1 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Graf Bipartit

Berikut ditunjukkan bahwa untuk $G \in \{P_n, S_n, K_{m,n}\}$ dimensi metrik monofonik lokalnya, $mdim_l(G) = 1$. **4.1.1.1 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Graf P_n**

Diberikan graf lintasan P_n dengan himpunan simpul $V(P_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Dimensi metrik monofonik lokal dari graf P_n dengan $n \geq 4$ ditunjukkan pada Teorema 4.1.

Gambar 4.1 Graf lintasan P_n

Teorema 4.1. *Jika G adalah graf lintasan P_n dengan ordo $n \geq 4$, maka dimensi metrik monofonik lokal dari graf G, $mdim_l(G) = 1$.*

Bukti. Dipilih $W = \{v_1\}$, dibuktikan W merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari P_n. Karena simpul-simpul dalam $V(P_n)$ terhubung membentuk lintasan dengan v_1 dan v_n tidak terhubung, maka $dm(v_1, v_i) = i - 1$ untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Akibatnya untuk setiap $v_i, v_j \in V(P_n)$ dengan $i, j \in \{1, 2, ..., n\}, i \neq j$, $mr(v_i|W) = (dm(v_1, v_i)) \neq (dm(v_1, v_j)) = mr(v_j|W)$, sehingga $W = \{v_1\}$ merupakan himpunan pembeda monofonik dari P_n. Dengan demikian berarti W juga merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari P_n, dan $|W| = 1$ adalah minimal. Jadi W merupakan basis monofonik lokal dari P_n, sehingga dimensi metrik monofonik lokal P_n, $mdim_l(P_n) = 1$. □

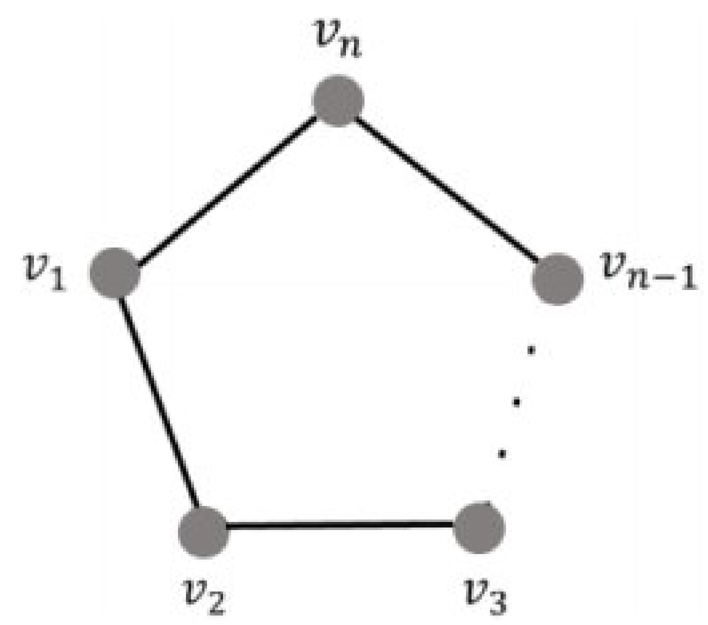
Contoh 4.1. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal $mdim_l(G)$ dengan G adalah P_5 yaitu graf lintasan dengan ordo lima (Gambar 2.1). Dipilih $W = \{v_1\}$. Representasi monofonik simpul $v_i \in V(P_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ terhadap W sebagai berikut:

$$mr(v_1 \mid W) = (0)$$
$$mr(v_2 \mid W) = (1)$$
$$mr(v_3 \mid W) = (2)$$
$$mr(v_4 \mid W) = (3)$$
$$mr(v_5 \mid W) = (4)$$

Himpunan W merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari P_5 karena simpul-simpul dalam $V(P_5)$ terhubung membentuk lintasan dengan v_1 dan v_5 tidak terhubung, maka $dm(v_1, v_i) = i - 1$ untuk $i \in \{1, 2, ..., n\}$ karena $dm(v_1, v_5) = 4$. Akibatnya untuk setiap $v_i, v_j \in V(P_5)$ dengan $i, j \in \{1, 2, ..., 5\}, i \neq j$, $mr(v_i|W) = (dm(v_1, v_i)) \neq (dm(v_1, v_j)) = mr(v_j|W)$, sehingga $W = \{v_1\}$ merupakan himpunan pembeda monofonik dari P_5. Dengan demikian berarti W juga merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari P_5, dan $|W| = 1$ adalah minimal. Jadi W merupakan basis monofonik lokal dari P_5, sehingga dimensi metrik monofonik lokal grafP_5, $mdim_l(P_5) = 1$.

4.1.1.2 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Graf C_n dengan Ordo Genap

Diberikan graf siklus C_n dengan himpunan simpul $V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ (Gambar 4.2). Dimensi metrik monofonik lokal dari graf C_n dengan $n \geq 4$, seperti disebutkan dalam Teorema 4.2.



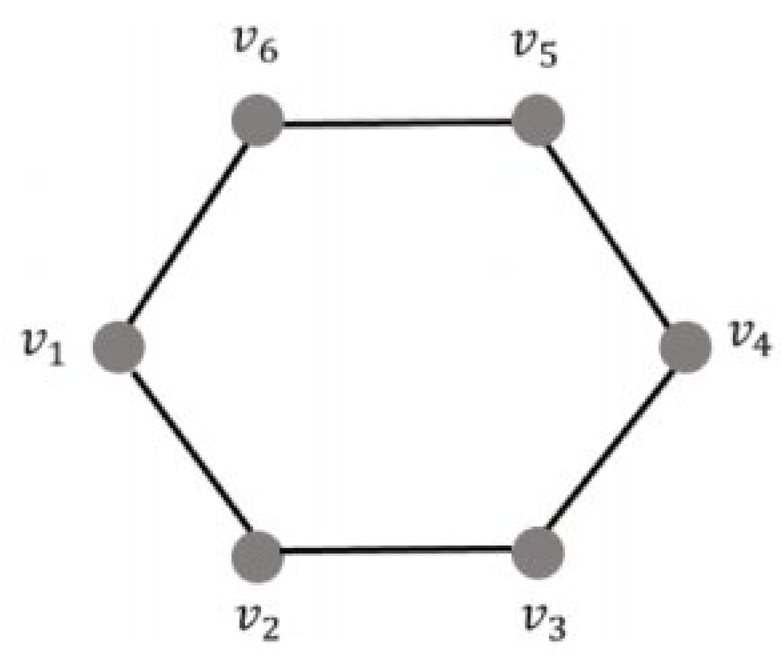
Gambar 4.2 Graf Siklus C_n

Teorema 4.2. *Jika G adalah graf siklus C_n dengan ordo $n \geq 4$, maka dimensi metrik monofonik lokal dari graf G dengan ordo genap, $mdim_l(G) = 1$.*

Bukti. Untuk n genap, dipilih $W = \{v_1\}$. Dibuktikan W merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari C_n. Representasi monofonik dari simpul-simpul di $V(C_n)$:

$$mr(v_i|W) = \begin{cases} (0), & \text{jika } i = 1 \\ (1), & \text{jika } i \in \{2, n\} \\ (n - i + 1), & \text{jika } 3 \leq i \leq \frac{n}{2} \\ (i - 1), & \text{jika } \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n - 1 \end{cases}$$

Tampak bahwa $mr(v_i|W) = mr(v_{n-i+2}|W)$, tetapi v_i tidak bertetangga dengan v_{n-i+2} dikarenakan $d(v_i, v_{n-i+2}) \geq 2$. Jadi hanya simpul yang tidak bertetangga saja yang representasinya sama, sehingga setiap simpul yang bertetangga, pasti representasi monofoniknya berbeda. Oleh karena itu W adalah himpunan pembeda monofonik lokal dari graf C_n dan $|W| = 1$ adalah minimal. Jadi W adalah basis monofonik lokal dari C_n dengan n genap, sehingga dimensi metrik monofonik lokal dari C_n, $mdim_l(C_n) = 1$. □



Gambar 4.3 Graf C_6

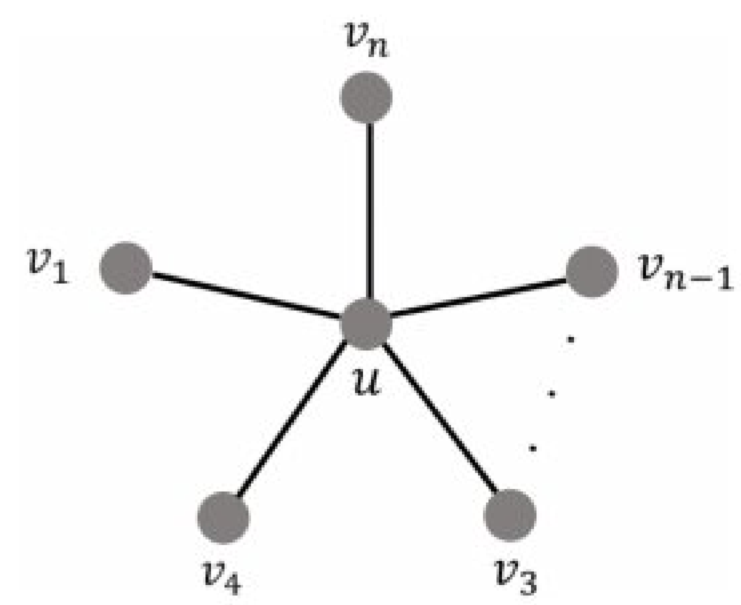
Contoh 4.2. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal dari C_6 (Gambar 4.3), $mdim_l(C_6)$. Dipilih $W = \{v_1\}$. Dibuktikan W himpunan pembeda monofonik lokal dari C_6. Representasi monofonik dari $v_i \in V(C_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ terhadap W sebagai berikut:

$$mr(v_1 \mid W) = (0)$$
$$mr(v_2 \mid W) = (1)$$
$$mr(v_3 \mid W) = (4)$$
$$mr(v_4 \mid W) = (3)$$
$$mr(v_5 \mid W) = (4)$$
$$mr(v_6 \mid W) = (1)$$

Tampak bahwa setiap simpul $v_i \sim v_{i+1}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, simpul $v_6 \sim v_1$ dan $mr(v_i|W) \neq mr(v_{i+1}|W)$, demikian pula $mr(v_6|W) \neq mr(v_1|W)$. Jadi W adalah himpunan pembeda monofonik lokal dari C_6. Kardinalitas W sama dengan satu adalah minimal, sehingga W adalah basis monofonik lokal dari C_6, sehingga dimensi metrik monofonik lokal dari C_6, $mdim_l(C_6) = 1$.

4.1.1.3 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Graf S_n

Diberikan graf bintang S_n dengan himpunan simpul $V(S_n) = \{u, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$(Gambar 4.4). Dimensi metrik monofonik lokal dari graf S_n dengan $n \geq 4$ ditunjukkan pada Teorema 4.3.



Gambar 4.4 Graf Bintang S_n

Teorema 4.3. *Jika G adalah graf bintang S_n dengan ordo $n \geq 4$, maka dimensi metrik monofonik lokal dari graf G, $mdim_l(G) = 1$.*

Bukti. Dipilih $W = \{v_1\}$, dibuktikan W merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari S_n. Representasi monofonik dari simpul-simpul di $V(S_n)$:

$$mr(v|W) = \begin{cases} (0), & v = v_1 \\ (1), & v = u \\ (2), & v \in \{v_2, v_3, \ldots, v_n\} \end{cases}$$

Tampak bahwa untuk simpul-simpul $v_i \in \{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ representasi monofoniknya sama tetapi setiap dua simpul berbeda $v_i, v_j \in V(S_n) \setminus \{u\}$ tidak bertetangga. Simpul-simpul yang bertetangga yaitu u dengan setiap v_i dan memiliki representasi monofonik berbeda, maka $W = \{v_1\}$ merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari S_n dengan $|W| = 1$ adalah minimal. Jadi W merupakan basis monofonik lokal dari S_n, sehingga dimensi metrik monofonik lokal dari S_n, $mdim_l(S_n) = 1$. □

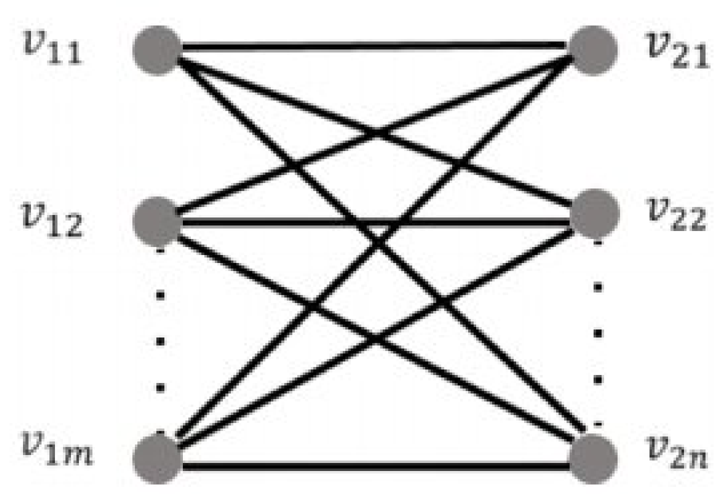
Contoh 4.3. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal graf bintang S_5 (Gambar 2.4). Dipilih $W = \{v_1\}$. Representasi monofonik simpul $v_i \in V(S_5) = \{u, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ terhadap W, sebagai berikut:

$$mr(u \mid W) = (1)$$
$$mr(v_1 \mid W) = (0)$$
$$mr(v_2 \mid W) = (2)$$
$$mr(v_3 \mid W) = (2)$$
$$mr(v_4 \mid W) = (2)$$
$$mr(v_5 \mid W) = (2)$$

Tampak bahwa untuk simpul-simpul $v_i \in \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ representasi monofoniknya sama tetapi semuanya tidak saling bertetangga. Simpul-simpul yang bertetangga yaitu u dengan setiap $v_i \in \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ memiliki representasi monofonik berbeda, maka $W = \{v_1\}$ merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari S_5 dengan $|W| = 1$ adalah minimal. Jadi W merupakan basis monofonik lokal dari S_5, sehingga dimensi metrik monofonik lokal dari S_5, $mdim_l(S_5) = 1$.

4.1.1.4 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Graf $K_{m,n}$

Diberikan graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ (Gambar 4.5) dengan himpunan simpul $V(K_{m,n}) = V_1 \cup V_2 = \{v_{11}, v_{12}, ..., v_{1m}\} \cup \{v_{21}, v_{22}, ..., v_{2n}\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Dimensi metrik monofonik lokal dari graf $K_{m,n}$ dengan $n \geq 4$ adalah satu, seperti disebutkan dalam Teorema 4.4.



Gambar 4.5 Graf Bipartit Lengkap $K_{m,n}$

Teorema 4.4. *Jika G adalah graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ dengan ordo $m + n \geq 4$, maka dimensi metrik monofonik lokal dari graf G, $mdim_l(G) = 1$.*

Bukti. Dipilih $W = \{v_{11}\}$. Dibuktikan W merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari $K_{m,n}$. Representasi monofonik dari simpul-simpul di $V(K_{m,n})$:

$$mr(v|W) = \begin{cases} (0), & v = v_{11} \\ (1), & v \in \{v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}\} \\ (2), & v \in \{v_{12}, v_{13}, \ldots, v_{1m}\} \end{cases}$$

Tampak bahwa untuk setiap $v_{1i} \in V_1 \subset V(K_{m,n})$ dan $v_{2j} \in V_2 \subset V(K_{m,n})$, $mr(v_{1i}|W) \neq mr(v_{2j}|W)$, dengan v_{1i} bertetangga dengan v_{2j}, $i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., m\}$. Jadi W adalah himpunan pembeda monofonik lokal dari $K_{m,n}$. Kardinalitas W, $|W| = 1$ adalah minimal, sehingga W adalah basis monofonik lokal dari $K_{m,n}$ dan oleh karena itu dimensi metrik monofonik lokal dari $K_{m,n}$, $mdim_l(K_{m,n}) = 1$. □

Contoh 4.4. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal dari $K_{3,3}$ (Gambar 2.5), $mdim_l(K_{3,3})$. Dipilih $W = \{v_{11}\}$ sebagai himpunan pembeda monofonik lokal dari $K_{3,3}$. Representasi monofonik dari $v_i \in V(K_{3,3}) = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}\}$ terhadap W sebagai berikut:

$$mr(v_{11} \mid W) = (0)$$
$$mr(v_{12} \mid W) = (2)$$
$$mr(v_{13} \mid W) = (2)$$
$$mr(v_{21} \mid W) = (1)$$
$$mr(v_{22} \mid W) = (1)$$
$$mr(v_{23} \mid W) = (1)$$

Tampak bahwa untuk setiap $v_{1i} \in V_1 \subset V(K_{3,3})$ dan $v_{2j} \in V_2 \subset V(K_{3,3})$, $mr(v_{1i}|W) \neq mr(v_{2j}|W)$, dengan v_{1i} bertetangga dengan v_{2j}, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Jadi W adalah himpunan pembeda monofonik lokal dari $K_{3,3}$. Kardinalitas W, $|W| = 1$ adalah minimal, sehingga W adalah basis monofonik lokal dari $K_{3,3}$ dan oleh karena itu dimensi metrik monofonik lokal dari $K_{3,3}$, $mdim_l(K_{3,3}) = 1$.

4.1.2 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Graf C_n dengan Ordo Ganjil

Teorema 4.5. *Jika G adalah graf siklus C_n dengan ordo $n \geq 4$, maka dimensi metrik monofonik lokal dari graf G dengan ordo ganjil, $mdim_l(G) = 2$.*

Bukti. Untuk n ganjil, dipilih $W = \{v_1, v_2\}$. Dibuktikan W merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari C_n. Representasi monofonik dari simpul-simpul di $V(C_n)$:

$$mr(v_i|W) = \begin{cases} (0, 1), & \text{jika } i = 1 \\ (1, 0), & \text{jika } i = 2 \\ (n - i + 1, 1), & \text{jika } i = 3 \\ (n - i + 1, n - i + 2), & \text{jika } 4 \leq i \leq \frac{n+1}{2} \\ (n - i + 2, n - i + 2), & \text{jika } i = \frac{n+1}{2} + 1 \\ (i - 1, i - 2), & \text{jika } \frac{n+1}{2} + 1 \leq i \leq n - 1 \\ (1, n - i + 1), & \text{jika } i = n \end{cases}$$

Tampak bahwa untuk setiap $v_i, v_j \in V(C_n)$ dengan $v_i \neq v_j$, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, representasi monofonik dari v_i dan v_j berbeda, yaitu $mr(v_i|W) \neq mr(v_j|W)$. Akibatnya representasi monofonik dari setiap dua simpul dari C_n yang bertetangga berbeda, sehingga $W = \{v_1, v_2\}$ merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari C_n. Kardinalitas dari W, $|W| = 2$ adalah minimal sebab jika diambil $W' = \{v_1\} \subset V(C_n)$ dengan $|W'| = 1 < |W| = 2$, terdapat $mr(v_{\frac{(n+1)}{2}}|W') = mr(v_{\left(\frac{(n+1)}{2}+1\right)}|W')$ dengan $v_{\frac{(n+1)}{2}}$ dan $v_{\left(\frac{(n+1)}{2}+1\right)}$ bertetangga. Jadi W adalah basis monofonik lokal dari C_n, sehingga dimensi metrik monofonik lokal dari C_n $mdim_l(C_n) = 2$. □

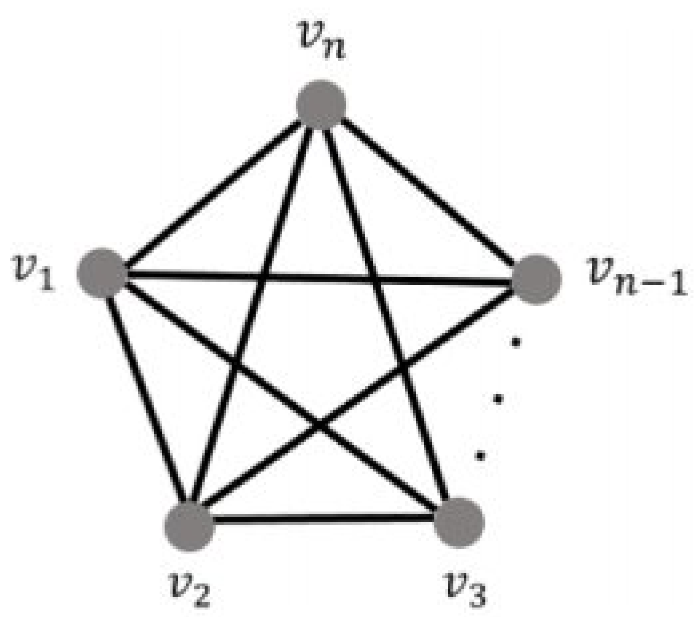
Contoh 4.5. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal dari C_5 (Gambar 2.2), $mdim_l(C_5)$. Dipilih $W = \{v_1, v_2\}$ sebagai himpunan pembeda monofonik lokal dari C_5. Representasi monofonik dari $v_i \in V(C_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ terhadap W sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
mr(v_1 \mid W) &= (0, 1) \\
mr(v_2 \mid W) &= (1, 0) \\
mr(v_3 \mid W) &= (3, 1) \\
mr(v_4 \mid W) &= (3, 3) \\
mr(v_5 \mid W) &= (1, 3)
\end{aligned}$$

Tampak bahwa untuk setiap $v_i, v_j \in V(C_n)$ dengan $v_i \neq v_j$, $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, representasi monofonik dari v_i dan v_j berbeda, yaitu $mr(v_i|W) \neq mr(v_j|W)$. Akibatnya representasi monofonik dari setiap dua simpul dari C_5 yang bertetangga berbeda, sehingga $W = \{v_1, v_2\}$ merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari C_n. Kardinalitas dari W, $|W| = 2$ adalah minimal sebab jika diambil $W' = \{v_1\} \subset V(C_5)$ dengan $|W'| = 1 < |W| = 2$, terdapat $mr(v_3|W') = (3) = mr(v_4|W')$ dengan v_3 dan v_4 bertetangga. Jadi W adalah basis monofonik lokal dari C_5, sehingga dimensi metrik monofonik lokal dari C_n $mdim_l(C_5) = 2$.

4.1.3 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Graf K_n

Diberikan graf lengkap K_n dengan himpunan simpul $V(K_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Dimensi metrik monofonik lokal dari graf K_n dengan $n \geq 4$ adalah $n-1$ seperti disebutkan dalam Teorema 4.6.



Gambar 4.6 Graf Lengkap K_n

Teorema 4.6. *Jika G adalah graf lengkap K_n dengan ordo $n \geq 4$, maka dimensi metrik monofonik lokal dari graf G, $mdim_l(G) = n - 1$.*

Bukti. Dipilih $W = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$. Dibuktikan W merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari K_n. Representasi monofonik dari v_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ di $V(K_n)$ adalah: $mr(v_i|W) = (dm(v_i, v_1), dm(v_i, v_2), ..., dm(v_i, v_{n-1}))$ dengan

$$dm(v_i, v_j) = \begin{cases} 0, & \text{jika } i = j \\ 1, & \text{jika } i \neq j \end{cases}, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

dan $mr(v_n|W) = (1, 1, ..., 1)$. Tampak bahwa representasi monofonik dari simpul-simpul di K_n semuanya berbeda dan setiap dua simpul di K_n bertetangga. Jadi W himpunan pembeda monofonik lokal dari K_n. Kardinalitas W, $|W| = n - 1$, minimal sebab jika diambil W' dengan $|W'| < |W|$ yaitu $|W'| = |W| - 1$ dan $W' = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}\}$ maka terdapat dua simpul di K_n dengan representasi monofonik sama yaitu simpul v_{n-1} dan v_n dengan $mr(v_{n-1}|W') = (\underbrace{1, 1, ..., 1}_{n-2 \text{ suku}}) = mr(v_n|W')$. Oleh karena itu W' bukan himpunan pembeda monofonik lokal dari K_n. Jadi W adalah basis monofonik lokal dari K_n, sehingga $mdim_l(K_n) = n - 1$. □

Contoh 4.6. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal graf K_5 (Gambar 2.3), $mdim_l(K_5)$. Dipilih $W = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sebagai himpunan pembeda monofonik lokal dari K_5. Didapatkan representasi monofonik dari $v_i \in V(K_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ terhadap W sebagai berikut:

$$\begin{aligned} mr(v_1 \mid W) &= (0, 1, 1, 1) \\ mr(v_2 \mid W) &= (1, 0, 1, 1) \\ mr(v_3 \mid W) &= (1, 1, 0, 1) \\ mr(v_4 \mid W) &= (1, 1, 1, 0) \\ mr(v_5 \mid W) &= (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Tampak bahwa representasi monofonik dari setiap $v_i \in V(K_5)$ terhadap W berbeda dan setiap dua simpul di K_5 bertetangga. Jadi W himpunan pembeda monofonik lokal dari K_5. Kardinalitas W, $|W| = 4$, minimal sebab jika diambil W' dengan $|W'| < |W|$ yaitu $|W'| = |W| - 1$ dan $W' = \{v_1, v_2, v_3\}$ maka terdapat dua simpul di K_5 dengan representasi monofonik sama yaitu simpul v_4 dan v_5, $mr(v_4|W') = (1, 1, 1) = mr(v_5|W')$. Oleh karena itu W' bukan himpunan pembeda monofonik lokal dari K_5. Jadi W adalah basis monofonik lokal dari K_5, sehingga $mdim_l(K_5) = 4$

4.2 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Graf *Degree Splitting*

Pada subbab ini diberikan hasil dan pembahasan dimensi metrik monofonik lokal dari graf - graf khusus dengan *degree splitting* yaitu dengan menambah sisi dan simpul baru dari hasil penarikan setiap minimal dua simpul dengan derajat yang sama. Untuk sisi-sisi pada graf yang baru ada setelah proses *degree splitting* disajikan dengan warna merah.

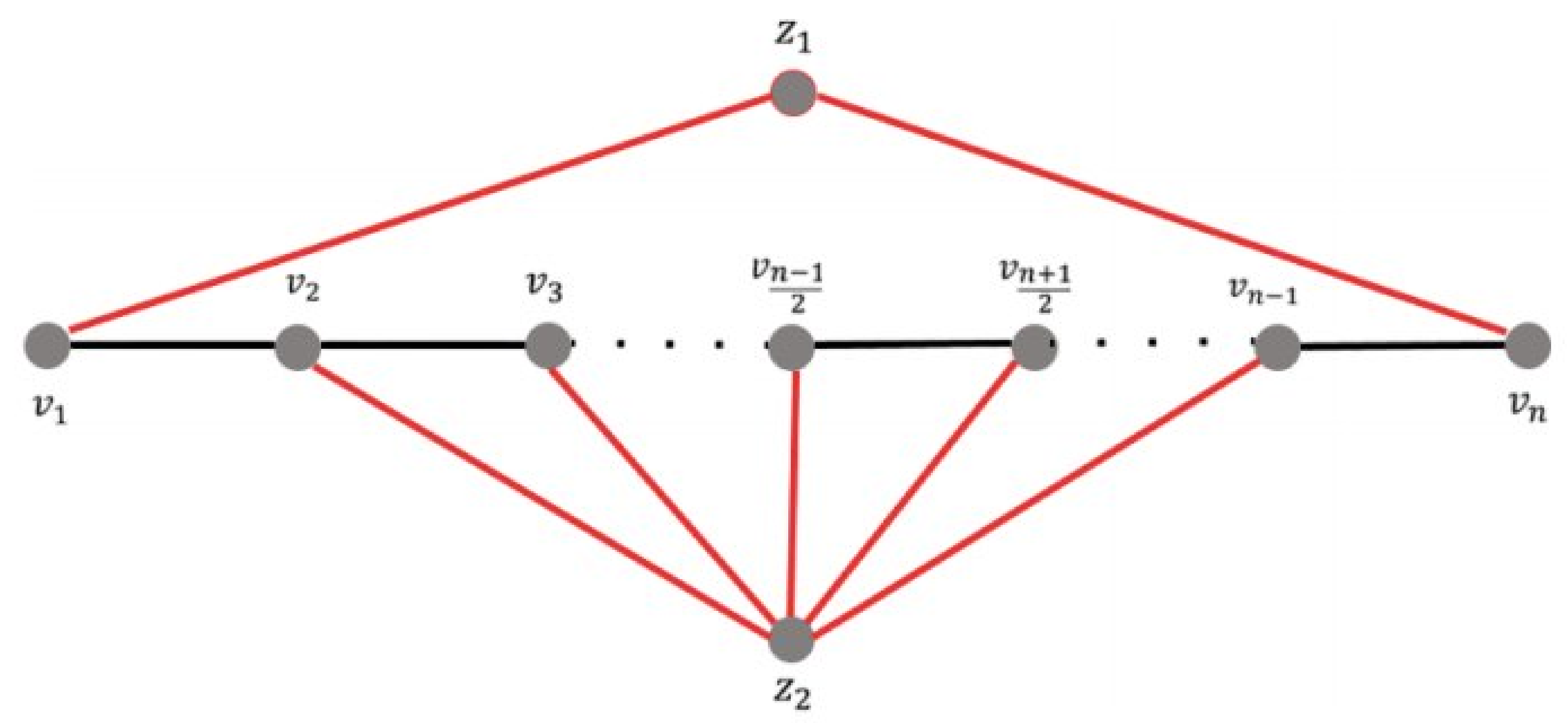
4.2.1 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Pada Graf $DS(P_n)$

Graf lintasan P_n dengan *degree splitting* memiliki himpunan simpul $V(DS(P_n)) = \{v_1, v_2, ..., v_n, z_1, z_2\}$ seperti tampak pada Gambar 4.7.

Teorema 4.7. *Jika G adalah graf hasil degree splitting dari graf lintasan $DS(P_n)$ dengan ordo $n \geq 4$, maka dimensi metrik monofonik lokal dari graf G,*

$$mdim_l(G)) = \begin{cases} 1, & n = 2k+1, k \in \{3, 4, 5, ...\} \\ 2, & n = \begin{cases} 5 \\ 2k, k \in \{2, 3, 4, ...\} \end{cases} \end{cases}.$$

Bukti. Dibuktikan W merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari $DS(P_n)$. Terdapat dua kasus n ganjil dan n genap yaitu untuk



Gambar 4.7 Graf $DS(P_n)$ untuk n ganjil

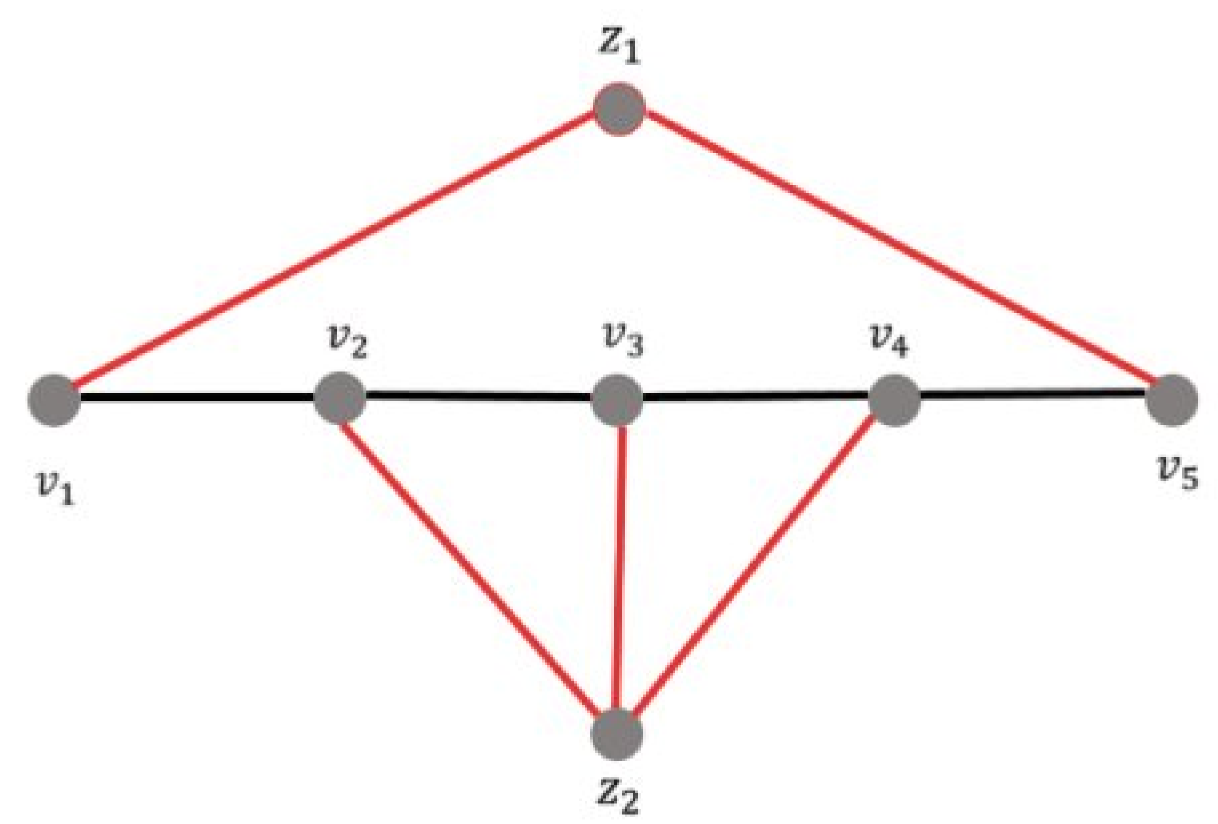
1. Untuk n ganjil, dipilih $W = \{z_1\}$. Representasi monofonik dari simpul-simpul di $V(DS(P_n))$:

$$mr(v_i|W) = \begin{cases} (1), & i \in \{1, n\} \\ (n-i+1), & 2 \leq i \leq \frac{n-1}{2} \\ (i), & \frac{n+1}{2} \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$mr(z_1|W) = (0)$$

$$mr(z_2|W) = (3)$$

Tampak bahwa setiap simpul di graf $DS(P_n)$ memiliki representasi monofonik yang berbeda terhadap W, sehingga untuk simpul-simpul yang bertetangga representasinya juga pasti berbeda. Jadi W adalah himpunan pembeda monofonik lokal dari $DS(P_n)$. Kardinalitas W sama dengan satu adalah minimal, sehingga W adalah basis monofonik lokal dari $DS(P_n)$. Jadi dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(P_n)$, $mdim_l(DS(P_n)) = 1$.

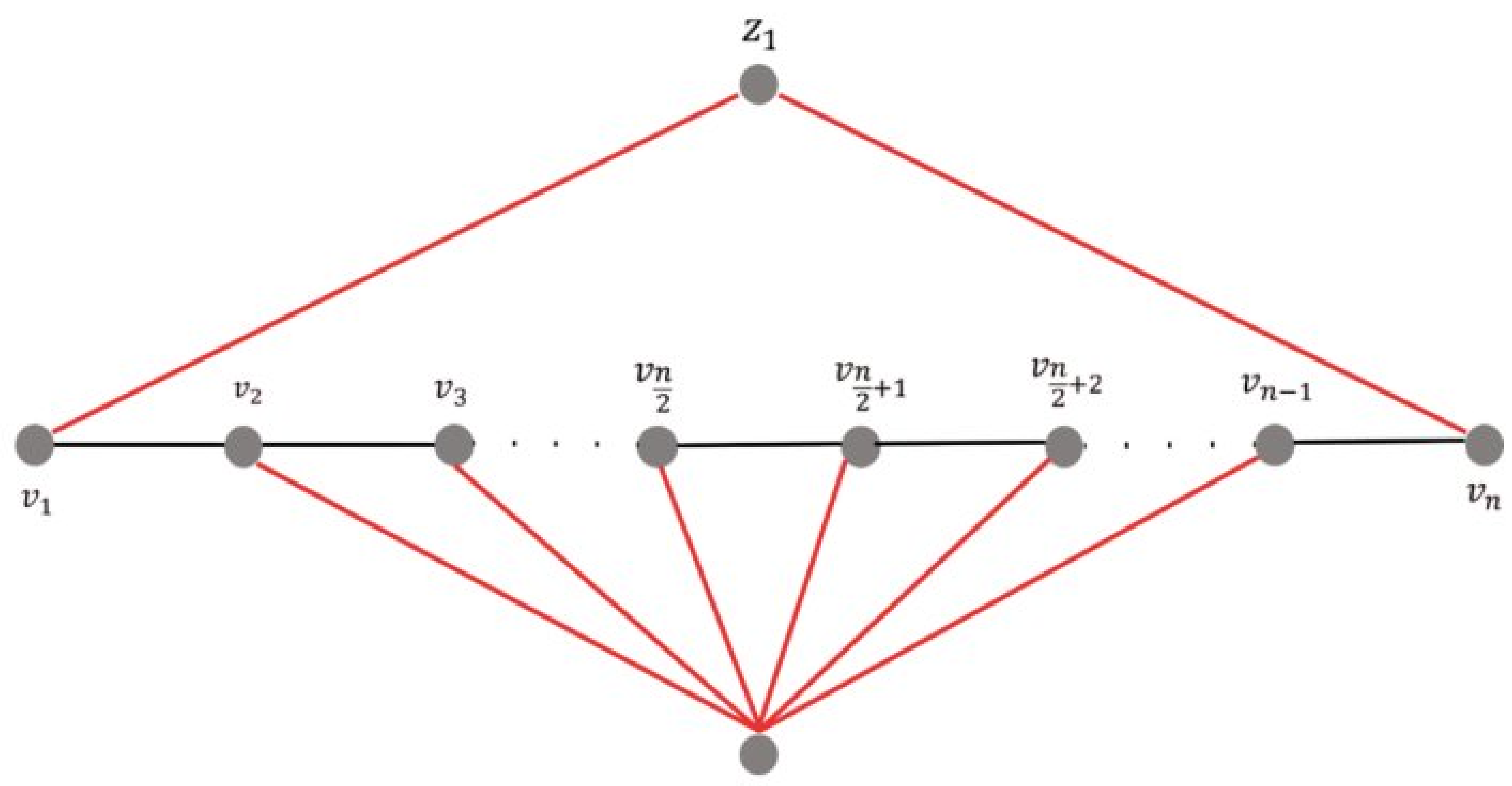


Gambar 4.8 Graf $DS(P_5)$

Contoh 4.7. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(P_5)$ (Gambar 4.8), $mdim_l(DS(P_5))$. Dipilih $W = \{v_1, z_1\}$. Didapatkan representasi monofonik dari $v_i \in V(DS(P_5)) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, z_1, z_2\}$ terhadap W sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
mr(z_1 \mid W) &= (1,0) \\
mr(z_2 \mid W) &= (4,3) \\
mr(v_1 \mid W) &= (0,1) \\
mr(v_2 \mid W) &= (1,4) \\
mr(v_3 \mid W) &= (4,3) \\
mr(v_4 \mid W) &= (3,4) \\
mr(v_5 \mid W) &= (4,1)
\end{aligned}$$

Tampak bahwa $mr(z_2|W) = (4,3) = mr(v_3|W)$, tetapi z_2 dan v_3 tidak bertetangga. Jadi setiap simpul bertetangga di graf $DS(P_5)$ memiliki representasi monofonik yang berbeda terhadap W. Kardinalitas W, $|W| = 1$ adalah minimal sebab jika dipilih $W' \subset V(DS(P_5))$ dengan $|W'| = 1$ yaitu $W' = \{v_1\}$, maka terdapat minimal dua simpul dengan representasi sama, misalnya simpul z_2 dan v_3 memiliki representasi monofonik yang sama terhadap $W' = \{v_1\}$ dan saling bertetangga. Oleh karena itu W' bukan himpunan pembeda monofonik lokal dari $DS(P_5)$, sehingga kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal. Jadi $W = \{v_1, z_1\}$ merupakan basis monofonik lokal dari graf $DS(P_5)$. Oleh karena itu dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(P_5)$, $mdim_l(DS(P_5)) = 2$.



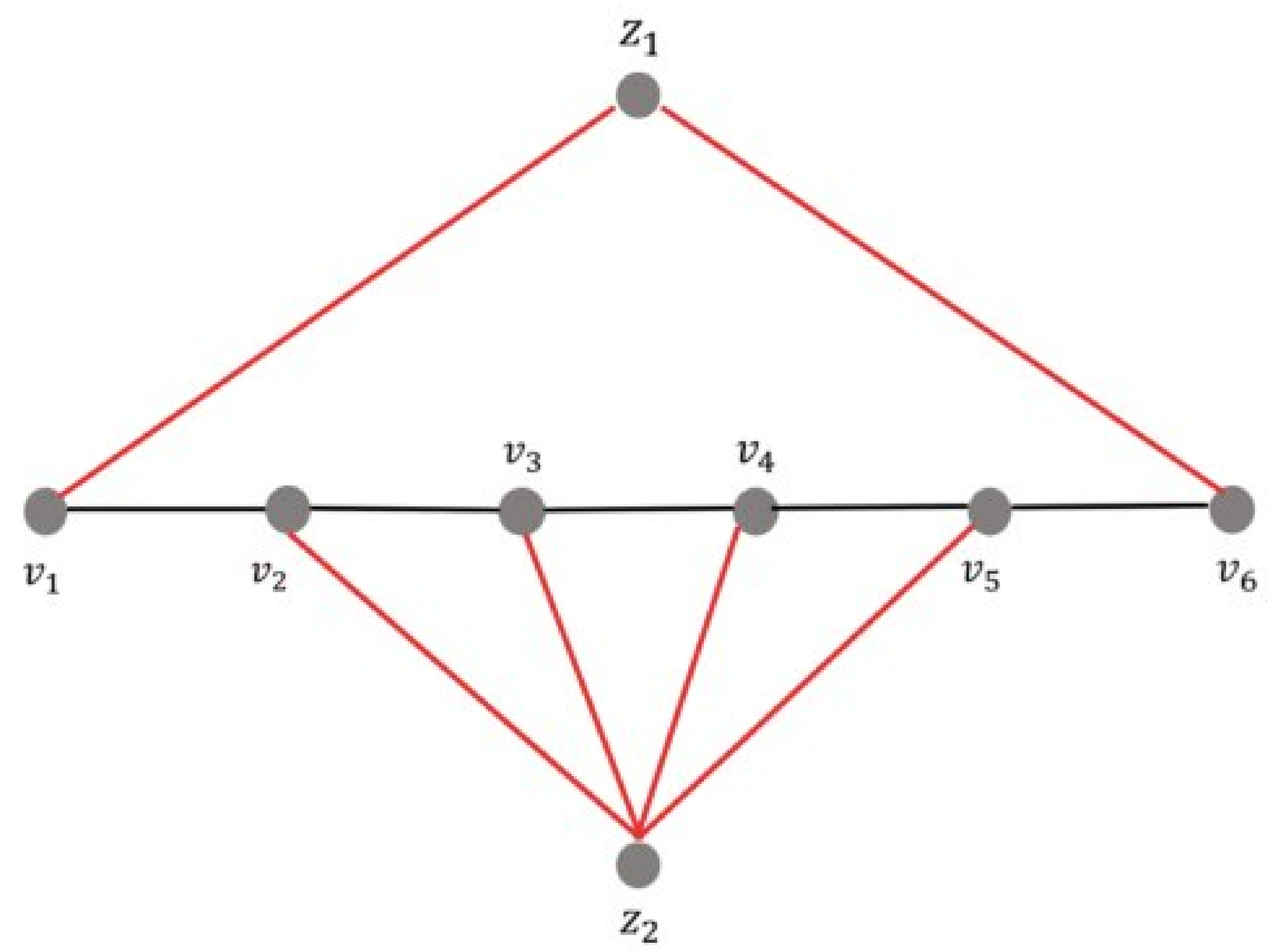
Gambar 4.9 Graf $DS(P_n)$ untuk n genap

2. Untuk n genap, dipilih $W = \{v_1, z_1\}$. Representasi monofonik dari simpul-simpul

di $V(DS(P_n))$:

$$mr(v_i|W) = \begin{cases} (1,0), & i=1 \\ (n-i+1,1), & i=2 \\ (n-i+1, n-i+2), & 3 \leq i \leq \frac{n}{2} \\ (i,i), & i = \frac{n}{2}+1 \\ (i, i-1), & \frac{n}{2}+2 \leq i \leq n-1 \\ (1, n-1), & i=n \end{cases}$$
$$mr(z_1|W) = (1,0)$$
$$mr(z_2|W) = (4,3)$$

Tampak bahwa setiap simpul di graf $DS(P_n)$ memiliki representasi monofonik yang berbeda terhadap W. Kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal, sebab jika dipilih $W' \subset V(DS(P_n))$ dengan $|W'| = 1$ yaitu $W' = \{z_1\}$, maka terdapat minimal dua simpul dengan representasi sama, misalnya simpul $v_{\frac{n}{2}}$ dan $v_{\frac{n}{2}+1}$ memiliki representasi monofonik yang sama terhadap $W' = \{z_1\}$ karena $dm(v_{\frac{n}{2}}, z_1) = 4 = dm(v_{\frac{n}{2}+1}, z_1)$. Oleh karena itu W' bukan himpunan pembeda monofonik lokal dari P_n sehingga kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal. Jadi $W = \{v_1, z_1\}$ merupakan basis monofonik lokal dari graf $DS(P_n)$ dengan n genap. Jadi dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(P_n)$, $mdim_l(DS(P_n)) = 2$.



Gambar 4.10 Graf $DS(P_6)$

Contoh 4.8. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(P_6)$ (Gambar 4.10), $mdim_l(DS(P_6))$. Dipilih $W = \{v_1, z_1\}$. Didapatkan representasi monofonik dari $v_i \in V(DS(P_6)) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, z_1, z_2\}$ terhadap W sebagai berikut:

$$mr(z_1 \mid W) = (1, 0)$$
$$mr(z_2 \mid W) = (4, 3)$$
$$mr(v_1 \mid W) = (0, 1)$$
$$mr(v_2 \mid W) = (1, 5)$$
$$mr(v_3 \mid W) = (5, 4)$$
$$mr(v_4 \mid W) = (4, 4)$$
$$mr(v_5 \mid W) = (4, 5)$$
$$mr(v_6 \mid W) = (5, 1)$$

Tampak bahwa setiap simpul bertetangga di graf $DS(P_6)$ memiliki representasi monofonik yang berbeda terhadap W. Kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal sebab jika dipilih $W' \subset V(DS(P_6))$ dengan $|W'| = 1$ yaitu $W' = \{v_1\}$, maka terdapat minimal dua simpul dengan representasi sama, misalnya simpul z_2, v_4, dan v_5 memiliki representasi monofonik yang sama terhadap $W' = \{v_1\}$ dan saling bertetangga. Oleh karena itu W' bukan himpunan pembeda monofonik lokal dari $DS(P_6)$, sehingga kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal. Jadi $W = \{v_1, z_1\}$ merupakan basis monofonik lokal dari graf $DS(P_6)$ dengan n ganjil. Oleh karena itu dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(P_6)$, $mdim_l(DS(P_6)) = 2$.

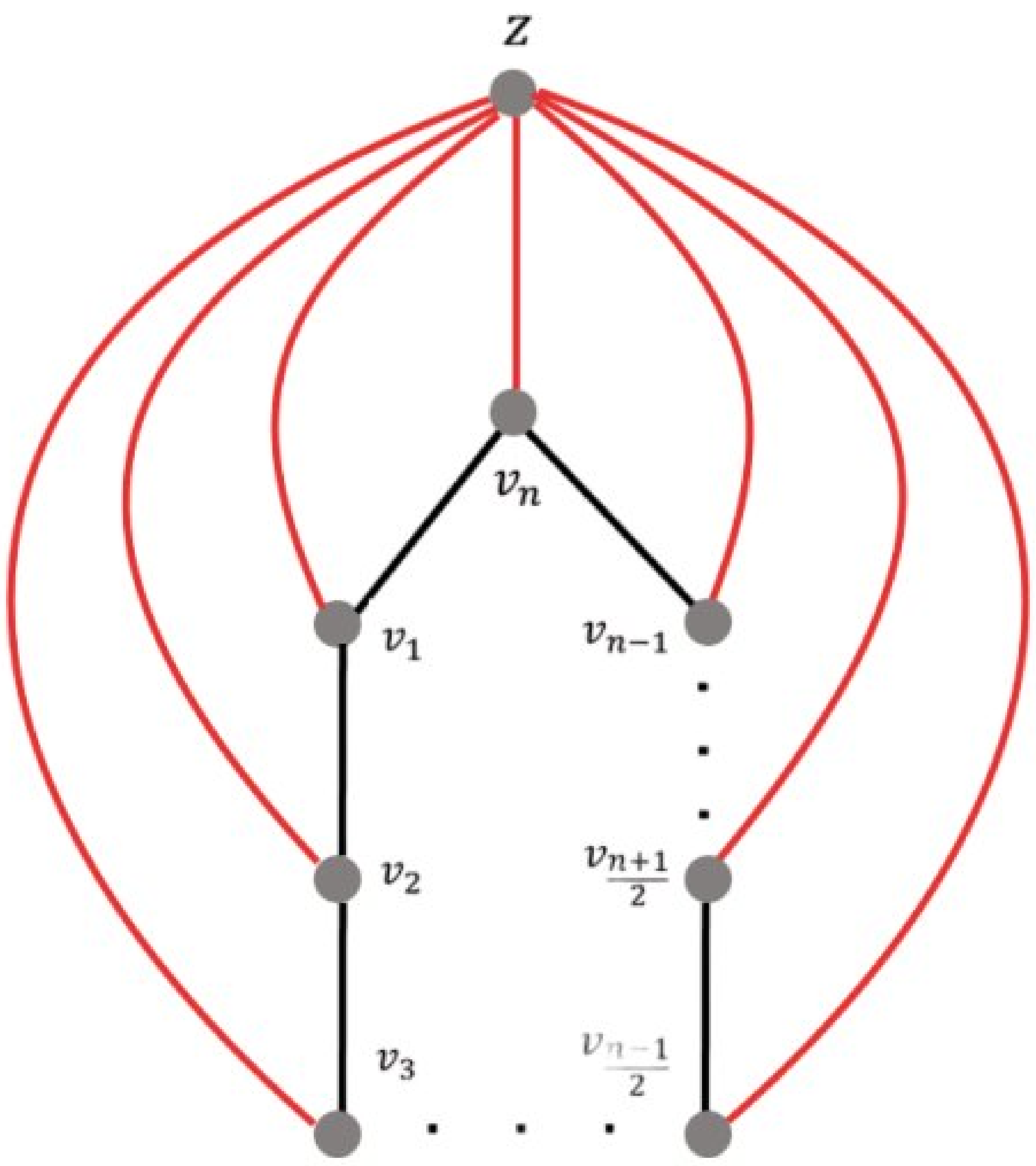
□

4.2.2 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Pada Graf $DS(C_n)$

Graf siklus C_n dengan *degree splitting* memiliki himpunan simpul $V(DS(C_n)) = \{v_1, v_2, ..., v_n, z\}$ seperti tampak pada Gambar 4.11.

Teorema 4.8. *Jika G adalah graf hasil degree splitting dari graf siklus $DS(C_n)$ dengan ordo $n \geq 4$, maka dimensi metrik monofonik lokal dari graf G, $mdim_l(G) = 2$.*

Bukti. Terdapat dua kasus:



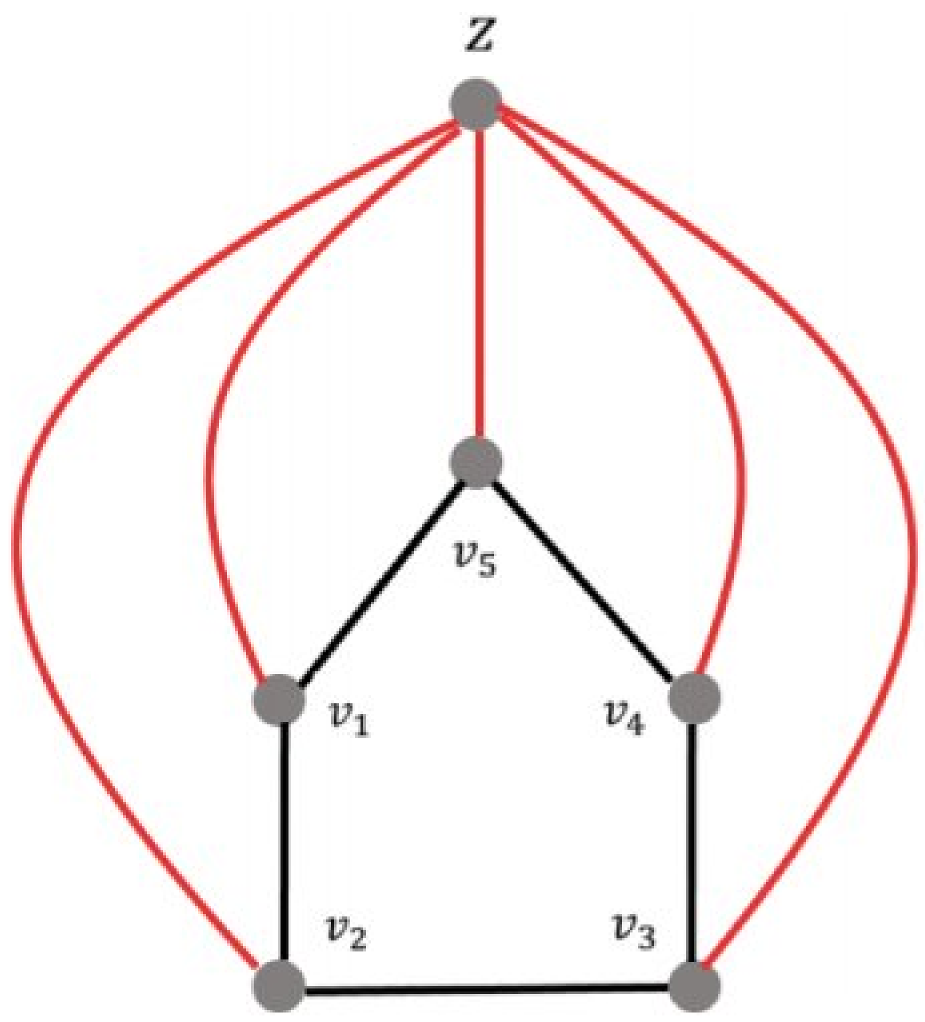
Gambar 4.11 Graf $DS(C_n)$ untuk n ganjil

1. Untuk n ganjil, dipilih $W = \{v_1, v_n\}$. Representasi monofonik simpul-simpul di $V(DS(C_n))$:

$$mr(v_i \mid W) = \begin{cases} (0,1) & i = 1 \\ (1,0) & i = n \\ (1, n-2) & i = 2 \\ (n-2, 1) & i = n-1 \\ (n-i+1, n-i) & 3 \leq i < \frac{n+1}{2} \\ (i,i) & i = \frac{n+1}{2} \\ (i-1, i) & \frac{n+1}{2} + 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

$$mr(z \mid W) = (1,1)$$

Tampak bahwa setiap simpul di graf $DS(C_n)$ memiliki representasi monofonik yang berbeda terhadap W. Kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal, sebab jika dipilih $W' \subset V(DS(C_n))$ dengan $|W'| = 1$ yaitu $W' = \{v_1\}$, maka terdapat minimal dua simpul bertetangga dengan representasi sama, misalnya simpul v_2 dan v_n memiliki representasi monofonik yang sama terhadap $W' = \{v_1\}$ yaitu $mr(v_2|W') = (1) = mr(v_n|W')$. Oleh karena itu W' bukan himpunan pembeda monofonik lokal dari C_n, sehingga kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal. Jadi $W = \{v_1, v_n\}$ merupakan basis monofonik lokal dari graf $DS(C_n)$ dengan n ganjil. Jadi dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(C_n)$, $mdim_l(DS(C_n)) = 2$.

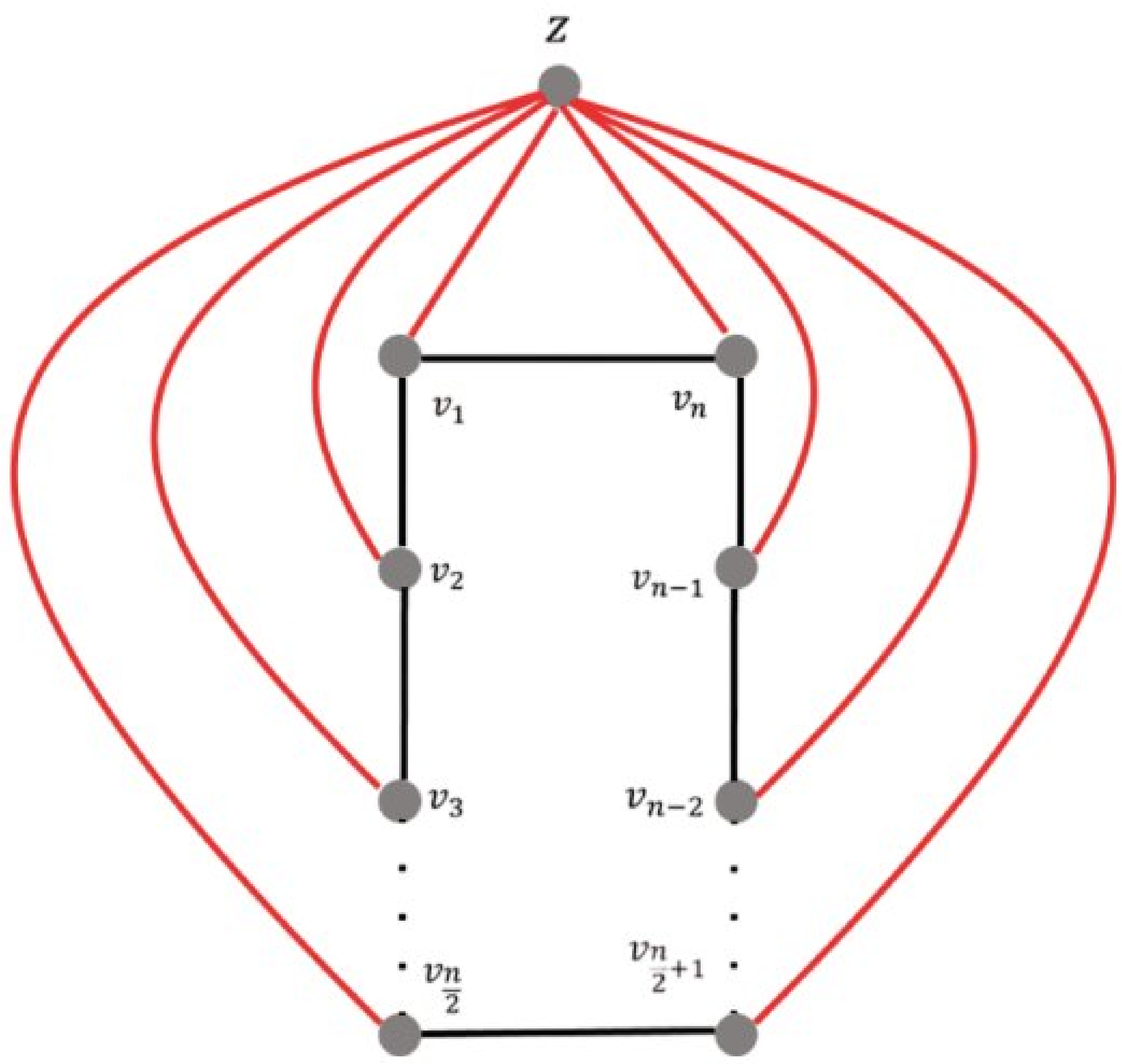


Gambar 4.12 Graf $DS(C_5)$

Contoh 4.9. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal graf $DS(C_5)$, $mdim_l(DS(C_5))$ (Gambar 4.12). Dipilih $W = \{v_1, v_5\}$. Didapatkan representasi monofonik $v \in V(DS(C_5)) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, z\}$ terhadap W sebagai berikut:

$$\begin{aligned} mr(z \mid W) &= (1,1) \\ mr(v_1 \mid W) &= (0,1) \\ mr(v_2 \mid W) &= (1,3) \\ mr(v_3 \mid W) &= (3,3) \\ mr(v_4 \mid W) &= (3,1) \\ mr(v_5 \mid W) &= (1,0) \end{aligned}$$

Tampak bahwa setiap simpul di graf $DS(C_5)$ memiliki representasi monofonik yang berbeda terhadap W, sehingga W adalah himpunan pembeda monofonik dari $DS(C_5)$ sekaligus himpunan pembeda monofonik lokal dari $DS(C_5)$. Kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal, sebab jika dipilih $W' \subset V(DS(C_5))$ dengan $|W'| = 1$ yaitu $W' = \{v_1\}$, maka terdapat minimal dua simpul bertetangga dengan representasi sama, misalnya simpul v_3 dan v_4 memiliki representasi monofonik yang sama terhadap $W' = \{v_1\}$ yaitu $mr(v_3|W') = (3) = mr(v_4|W')$. Jadi W' bukan himpunan pembeda monofonik lokal dari C_5, sehingga kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal. Oleh karena itu $W = \{v_1, v_5\}$ merupakan basis monofonik lokal dari graf $DS(C_5)$, sehingga dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(C_5)$, $mdim_l(DS(C_5)) = 2$.



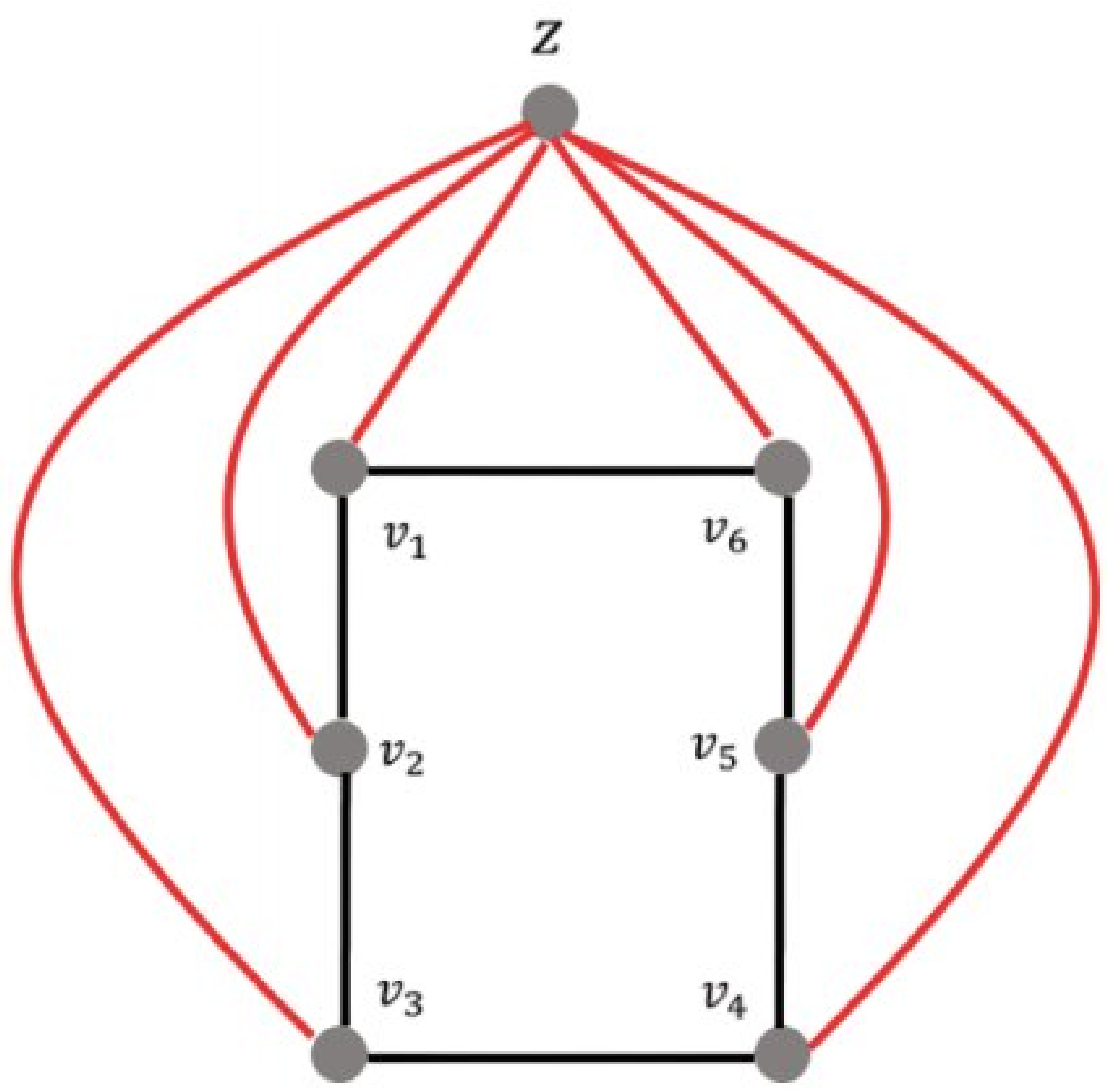
Gambar 4.13 Graf $DS(C_n)$ untuk n genap

2. Untuk n genap, dipilih $W = \{v_1, v_n\}$. Representasi monofonik simpul-simpul di $V(DS(C_n))$:

$$mr(v_i \mid W) = \begin{cases} (0,1), & i = 1 \\ (1,0), & i = n \\ (1, n-2), & i = 2 \\ (n-2, 1), & i = n-1 \\ (n-i+1, n-i), & 3 \le i \le \frac{n}{2} \\ (i-1, i), & \frac{n}{2}+1 \le i \le n-2 \end{cases}$$

$$mr(z \mid W) = (1,1)$$

Tampak bahwa setiap simpul di graf $DS(C_n)$ memiliki representasi monofonik yang berbeda terhadap W sehingga representasi monofonik untuk simpul yang bertetangga juga berbeda. Jadi W adalah himpunan pembeda monofonik lokal dari $DS(C_n)$. Kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal, sebab jika dipilih $W' \subset V(DS(C_n))$ dengan $|W'| = 1$ yaitu $W' = \{v_1\}$, maka terdapat minimal dua simpul bertetangga dengan representasi sama, misalnya simpul z dan v_n memiliki representasi monofonik yang sama terhadap $W' = \{v_1\}$ yaitu $mr(z|W') = (1) = mr(v_n|W')$. Oleh karena itu W' bukan himpunan pembeda monofonik lokal dari $DS(C_n)$, sehingga kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal. Oleh karena itu $W = \{v_1, v_n\}$ merupakan basis monofonik lokal dari graf $DS(C_n)$ dengan n genap, sehingga dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(C_n)$, $mdim_l(DS(C_n)) = 2$.



Gambar 4.14 Graf $DS(C_6)$

Contoh 4.10. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal graf $DS(C_6)$, $mdim_l(DS(C_6))$ (Gambar 4.14). Dipilih $W = \{v_1, v_6\}$. Didapatkan representasi monofonik $v \in V(DS(C_6)) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, z\}$ terhadap W sebagai berikut:

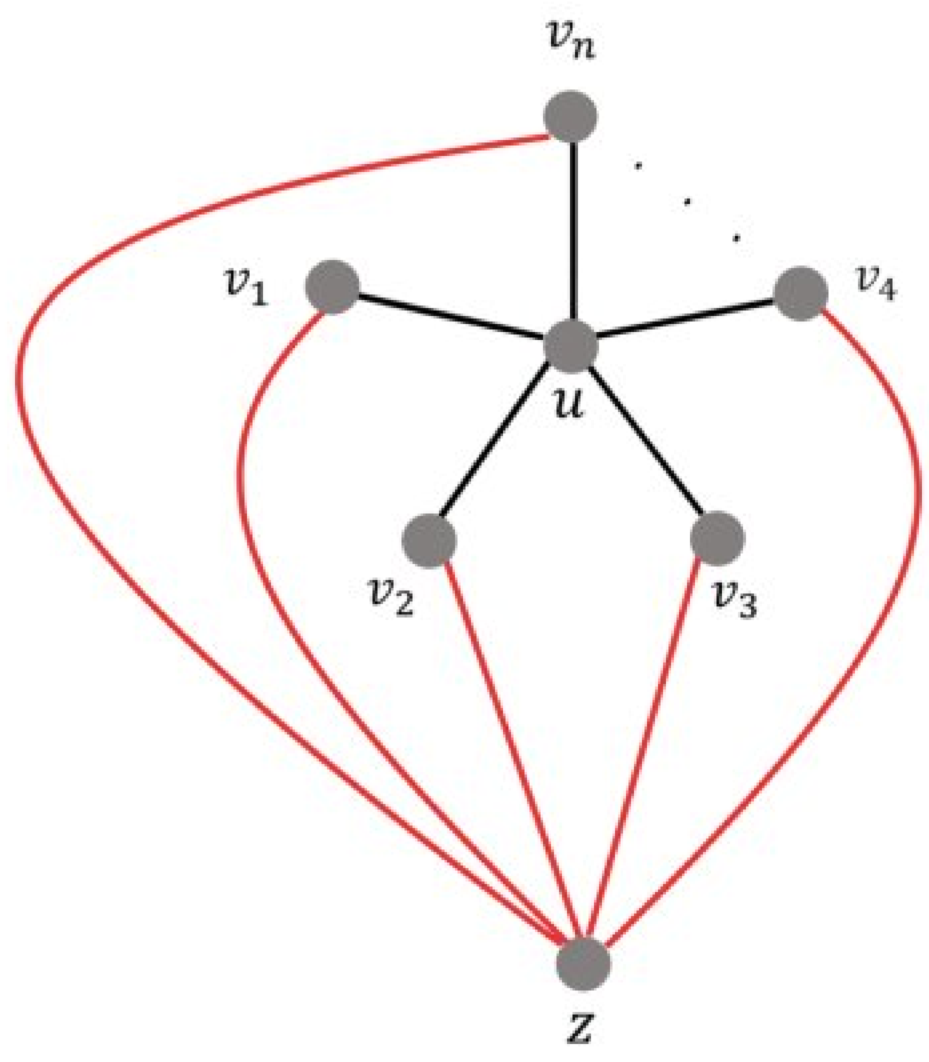
$$\begin{aligned}
mr(z \mid W) &= (1, 1)\\
mr(v_1 \mid W) &= (0, 1)\\
mr(v_2 \mid W) &= (1, 4)\\
mr(v_3 \mid W) &= (4, 3)\\
mr(v_4 \mid W) &= (3, 4)\\
mr(v_5 \mid W) &= (4, 1)\\
mr(v_6 \mid W) &= (1, 0)
\end{aligned}$$

Tampak bahwa setiap simpul di graf $DS(C_6)$ memiliki representasi monofonik yang berbeda terhadap W, sehingga W adalah himpunan pembeda monofonik dari $DS(C_6)$ sekaligus himpunan pembeda monofonik lokal dari $DS(C_6)$. Kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal, sebab jika dipilih $W' \subset V(DS(C_6))$ dengan $|W'| = 1$ yaitu $W' = \{v_1\}$, maka terdapat minimal dua simpul bertetangga dengan representasi sama, misalnya simpul v_2 dan z memiliki representasi monofonik yang sama terhadap $W' = \{v_1\}$ yaitu $mr(v_2|W') = (1) = mr(z|W')$. Oleh karena itu W' bukan himpunan pembeda monofonik lokal dari C_6, sehingga kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal. Jadi $W = \{v_1, v_6\}$ merupakan basis monofonik lokal dari graf $DS(C_6)$. Jadi dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(C_6)$, $mdim_l(DS(C_6))$ $= 2$.

□

4.2.3 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Pada Graf $DS(S_n)$

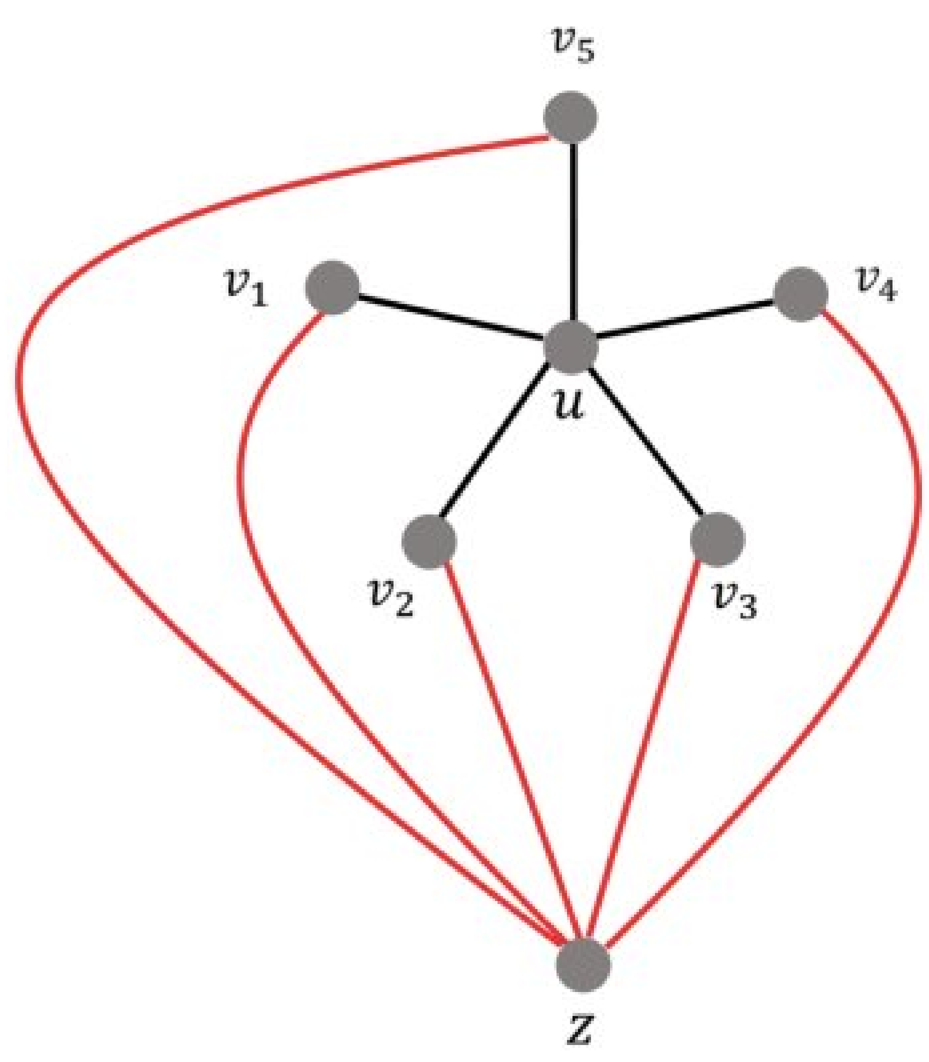
Graf bintang S_n dengan *degree splitting* memiliki himpunan simpul $V(DS(P_n)) = \{u, v_1, v_2, ..., v_n, z\}$ seperti tampak pada Gambar 4.15.



Gambar 4.15 Graf $DS(S_n)$

Teorema 4.9. *Jika G adalah graf hasil degree splitting dari graf bintang $DS(S_n)$ dengan ordo $n \geq 4$, maka dimensi metrik monofonik lokal dari graf G, $mdim_l(G) = 1$.*

Bukti. Karena graf $DS(S_n)$ isomorfik dengan graf bipartit lengkap $K_{2,n}$ dengan $V(K_{2,n}) = V_1 \cup V_2$ dengan $V_1 = \{u, z\}$ dan $V_2 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, maka $mdim_l(DS(S_n)) = 1$ (Teorema 4.4). $\square$

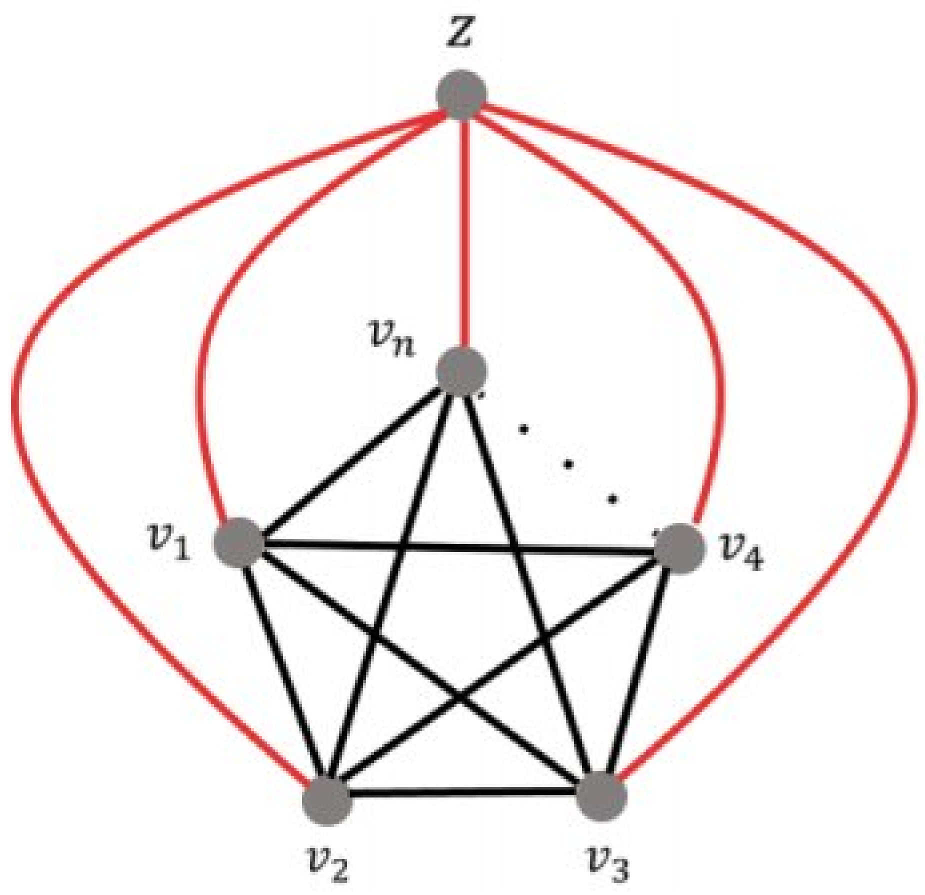


Gambar 4.16 Graf $DS(S_5)$

Contoh 4.11. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(S_5)$ $mdim_l(DS(S_5))$ (Gambar 4.16). Karena jelas bahwa graf $DS(S_5)$ adalah graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ dengan $m = 2$ dan $n = 5$ maka $mdim_l(DS(S_5)) = 1$ (Teorema 4.4).

4.2.4 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Pada Graf $DS(K_n)$

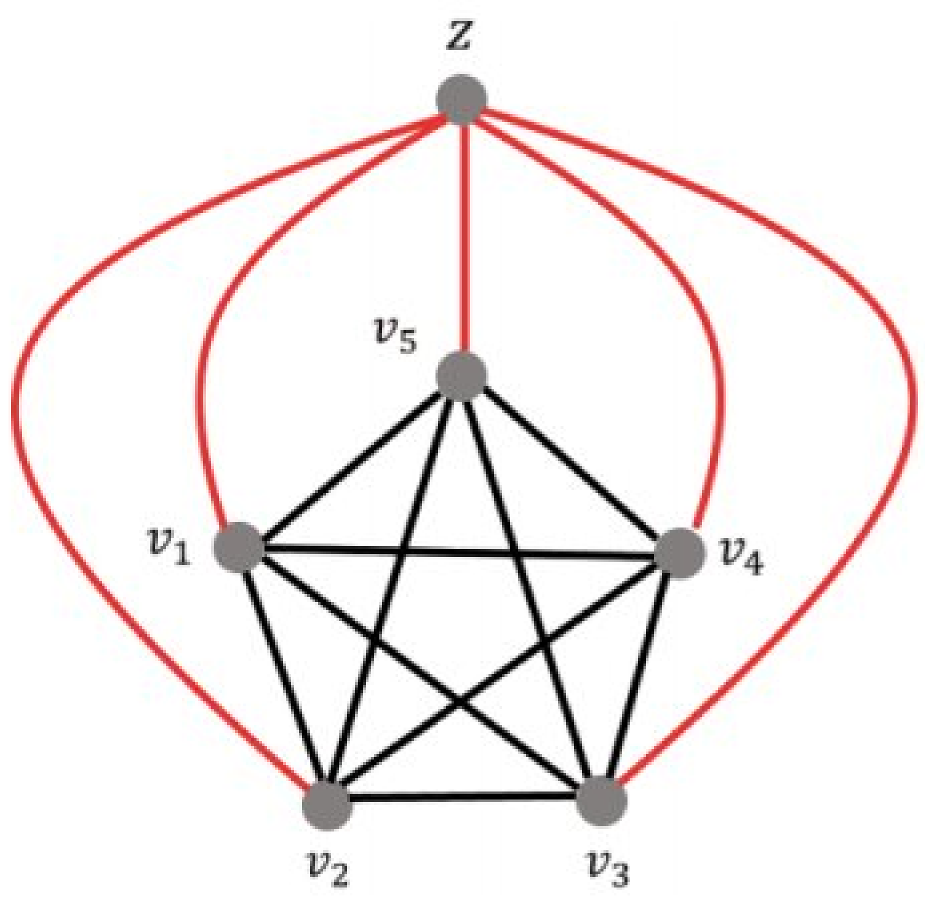
Graf lengkap K_n dengan *degree splitting* memiliki himpunan simpul $V(DS(K_n)) = \{v_1, v_2, ..., v_n, z\}$ seperti tampak pada Gambar 4.17.



Gambar 4.17 Graf $DS(K_n)$

Teorema 4.10. *Jika G adalah graf hasil degree splitting dari graf lengkap K_n, $DS(K_n)$ dengan ordo $n \geq 4$, maka dimensi metrik monofonik lokal dari graf G, $mdim_l(G) = n$.*

Bukti. Karena graf $DS(K_n)$ isomorfik dengan graf K_{n+1} maka $mdim_l(DS(K_n)) = (n + 1) - 1 = n$ (Teorema 4.6). $\square$



Gambar 4.18 Graf $DS(K_5)$

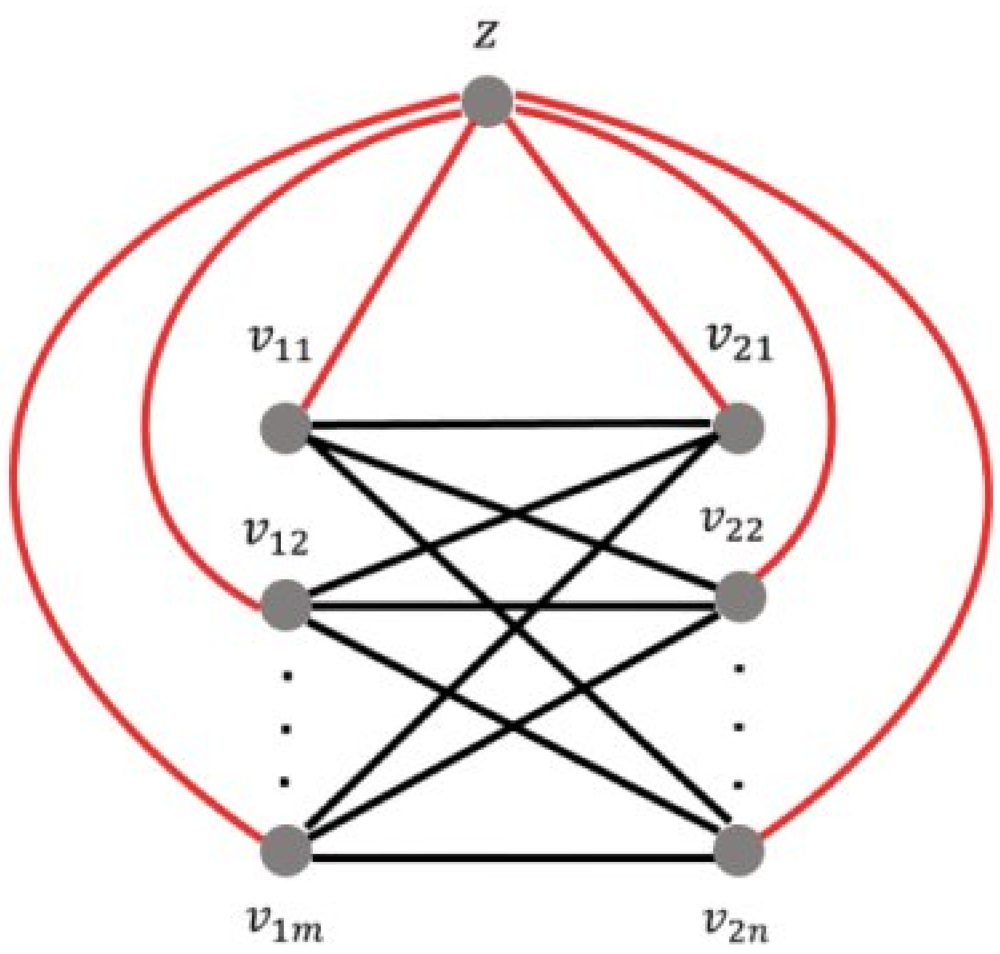
Contoh 4.12. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(K_5)$, $mdim_l(G)$ (Gambar 4.18). Karena graf $DS(K_5)$ isomorfik dengan graf K_6 maka $mdim_l(DS(K_5)) = 6 - 1 = 5$ (Teorema 4.6).

4.2.5 Dimensi Metrik Monofonik Lokal Pada Graf $DS(K_{m,n})$

Graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ dengan *degree splitting* memiliki himpunan simpul $V(DS(K_{m,n})) = \{v_{11}, v_{12}, ..., v_1m, v_{21}, v_{22}, ..., v_{2n}, z\}$ seperti tampak pada Gambar 4.19 dan Gambar 4.21.

Teorema 4.11. *Jika G adalah graf hasil degree splitting dari graf bipartit lengkap $DS(K_{m,n})$ dengan ordo $m \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka dimensi metrik monofonik lokal dari graf G,* $mdim_l(G) = \begin{cases} 1, & jika\ m \neq n \\ 2, & jika\ m = n \end{cases}.$

Bukti. Terdapat dua kasus:

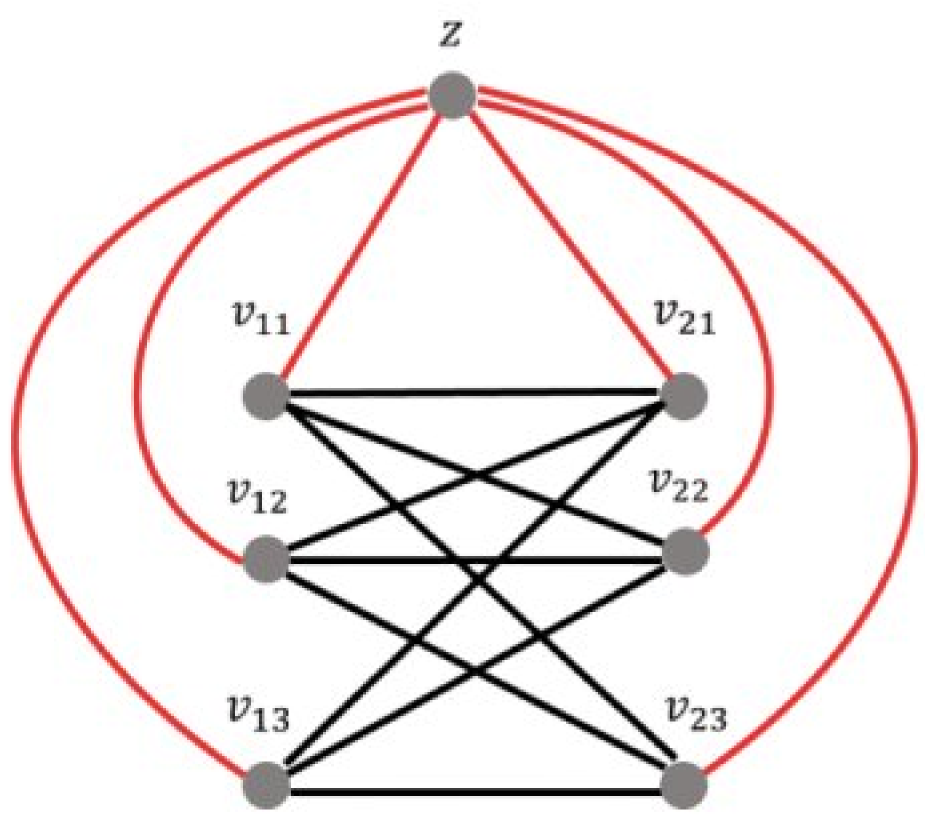


Gambar 4.19 Graf $DS(K_{m,n})$ dengan $m = n$

1. Untuk $m = n$, dipilih $W = (v_{11}, v_{21})$. Dibuktikan W merupakan himpunan pembeda monofonik lokal dari graf $DS(K_{m,n})$. Representasi monofonik dari simpul-simpul di $V(DS(K_{m,n}))$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} mr(z|W) &= (1,1) \\ mr(v_{11}|W) &= (0,1) \\ mr(v_{21}|W) &= (1,0) \\ mr(v_{1i}|W) &= (2,1), i \in \{2,3,..,m=n\}, v_{1i} \not\sim v_{1j} \\ mr(v_{2i}|W) &= (1,2), i \in \{2,3,..,m=n\}, v_{2i} \not\sim v_{2j} \end{aligned}$$

   Tampak bahwa representasi monofonik untuk simpul-simpul yang bertetangga dalam $DS(K_{m,n})$berbeda. Jadi W adalah himpunan pembeda monofonik lokal dari $DS(K_{m,n})$. Kardinalitas W, $|W| = 2$ adalah minimal, sebab jika $W' \subset V(DS(K_{m,n}))$ dengan $|W'| = 1$, misalkan $W' = \{v_{11}\}$, maka yang memiliki representasi monofonik yang sama terhadap W' adalah z dengan setiap simpul v_{2i}, $i \in \{1,2,...,n\}$ yaitu $mr(z|W') = (1) = mr(v_{2i}|W)$. Oleh karena itu, W' bukan himpunan pembeda monofonik lokal dari $DS(K_{m,n})$. Dengan demikian kardinalitas W, dengan $|W| = 2$ adalah minimal. Jadi, $W = \{v_{11}, v_{21}\}$ merupakan basis monofonik lokal dari graf $DS(K_{m,n})$. Dengan demikian, dimensi pembeda monofonik lokal dari $DS(K_{m,n})$, $mdim_l(DS(K_{m,n})) = 2$.

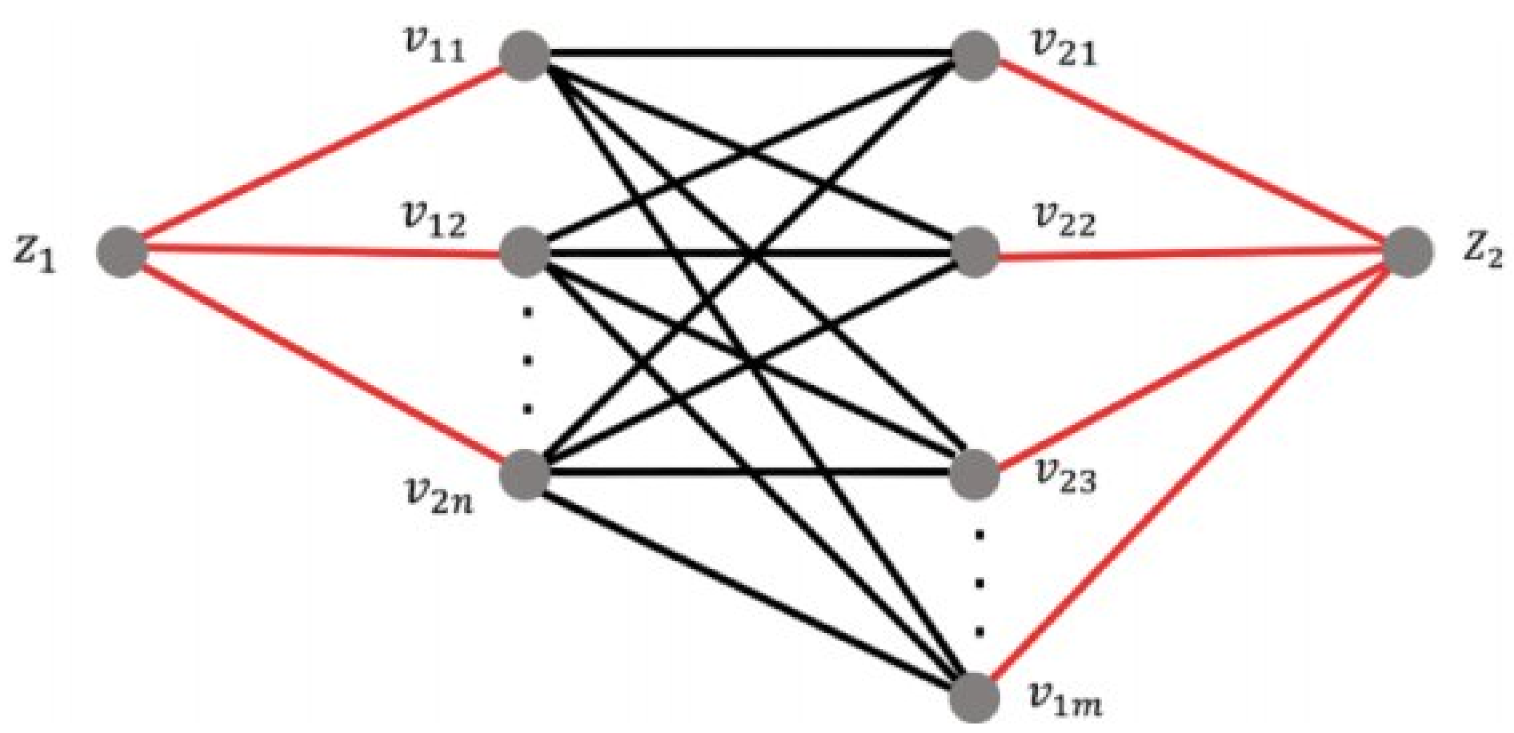


Gambar 4.20 Graf $DS(K_{3,3})$

Contoh 4.13. Misalkan dicari dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(K_{3,3})$ (Gambar 4.20), $mdim_l(DS(K_{3,3}))$. Dipilih $W = \{v_{11}, v_{21}\}$. Didapatkan representasi monofonik dari $v \in V(DS(K_{3,3})) = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, z\}$ terhadap W sebagai berikut:

$$\begin{aligned} mr(z \mid W) &= (1,1) \\ mr(v_{11} \mid W) &= (0,1) \\ mr(v_{21} \mid W) &= (1,0) \\ mr(v_{12} \mid W) &= (2,1) \\ mr(v_{22} \mid W) &= (1,2) \\ mr(v_{13} \mid W) &= (2,1) \\ mr(v_{23} \mid W) &= (1,2) \end{aligned}$$

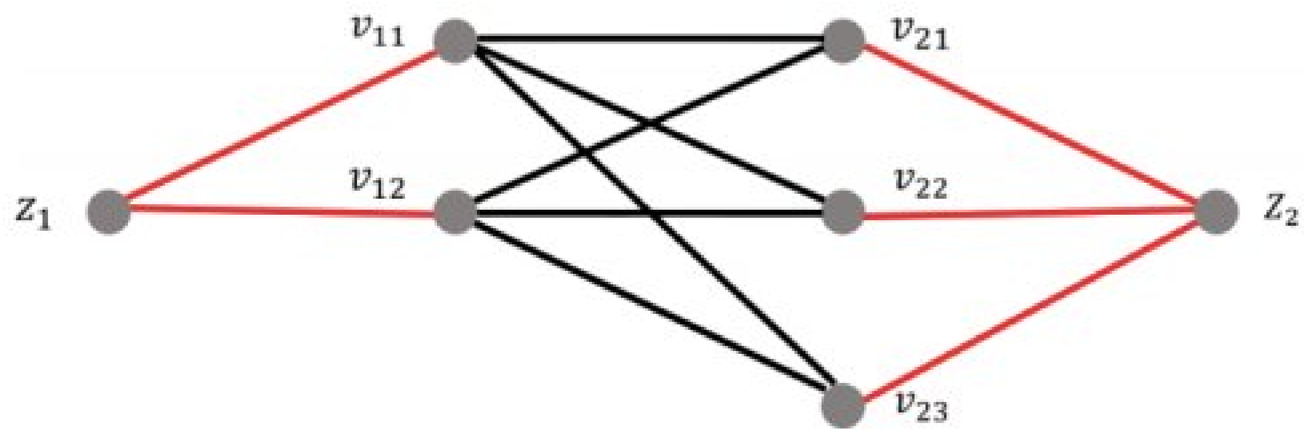
Tampak bahwa representasi monofonik untuk simpul-simpul bertetangga dalam $DS(K_{3,3})$, yaitu v_{1i} dan v_{2i}, $i \in \{1,2,3\}$ semuanya berbeda. Jadi W adalah himpunan pembeda monofonik lokal untuk $DS(K_{3,3})$. Jika dipilih $W' \subset V(DS(K_{3,3}))$ dengan $|W'| = 1$, misalkan $W' = \{v_{11}\}$, maka ada simpul-simpul bertetangga yang memiliki representasi monofonik yang sama yaitu z dengan setiap $v_{2i}, i \in \{1,2,3\}$. Oleh karena itu, W' bukan himpunan pembeda monofonik lokal dari $DS(K_{3,3})$. Dengan demikian, kardinalitas W dengan $|W| = 2$ adalah minimal. Jadi, $W = \{v_{11}, v_{21}\}$ merupakan basis monofonik lokal dari graf $DS(K_{3,3})$. Dengan demikian, dimensi metrik monofonik lokal dari $DS(K_{3,3})$, $mdim_l(DS(K_{3,3})) = 2$.



Gambar 4.21 Graf $DS(K_{m,n})$ dengan $m \neq n$

2. Untuk $m \neq n$, graf $DS(K_{m,n})$ seperti ditunjukkan pada Gambar 4.21. Karena graf

$DS(K_{m,n})$ dengan $m \neq n$ isomorfik dengan graf bipartit lengkap $K_{m+1,n+1}$, maka $mdim_l(DS(K_{m,n})) = mdim_l(K_{m+1,n+1}) = 1$ (Teorema 4.4).



Gambar 4.22 Graf $DS(K_{2,3})$

Contoh 4.14. Karena graf $DS(K_{m,n})$ dengan $m = 2$ dan $n = 3$ isomorfik dengan graf bipartit lengkap $K_{3,4}$, maka $mdim_l(DS(K_{2,3})) = mdim_l(K_{3,4}) = 1$ (Teorema 4.4).

□

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari hasil penelitian dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, dapat diambil simpulan sebagai berikut:

1. Dimensi metrik monofonik lokal dari G, dan graf *degree splitting*nya dihitung dengan menggunakan definisi dimensi metrik monofonik lokal.

2. Pola representasi monofonik dari simpul graf *degree splitting* G adalah:

$$r(V|W) = (dm(v, w_1), dm(v, w_2), ..., dm(v, w_k))$$

dengan $(dm(v, w_i)) = \begin{cases} 0, & \text{jika } w_i \in W \\ 1, & \text{jika } v \sim w_i \end{cases}$ dan $2 \leq dm(v, w_i) \leq diam(DS(G))$

3. (a) Dimensi metrik monofonik lokal dari G, $mdim_l(G) = 1$ jika dan hanya jika $G \in \{P_n; C_n, n \text{ genap}; S_n; K_{m,n}; DS(P_n), n \text{ ganjil dan } n \neq 5; DS(S_n); DS(K_{m,n}, m \neq n)\}$ yaitu G graf bipartit.

   (b) Dimensi metrik monofonik lokal dari G, $mdim_l(G)$ dengan $G \in \{C_n, n \text{ ganjil}; DS(P_n), n \text{ genap atau } n = 5; DS(C_n); DS(K_{m,n}), m = n\}$ adalah dua.

5.2 Saran

Dalam penelitian Tugas Akhir ini dilakukan perhitungan dan pembuktian dimensi metrik monofonik lokal pada graf khusus dan graf hasil *degree splitting*nya. Penelitian selanjutnya yang berhubungan dengan topik ini dapat dilakukan untuk mencari dimensi metrik monofonik lokal pada graf hasil operasi yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Aldous, J., & Wilson, R. (2000). *Graphs and applications.* ([Preprint]) doi: 10.1007/978-1-4471-0467-4

Avadayappan, S., Bhuvaneshwari, M., & Gandhi, R. (2017). Distance in degree splitting graphs. *International Journal of Engineering Research and Applications*, *07*(07), 14–21. doi: 10.9790/9622-0707061421

Barragan-Ramirez, G., & Rodriguez-Velazquez, J. (2017). The local metric dimension of strong product graphs.
(Cornell University Library, URL: `https://arxiv.org/pdf/1505.06155v1.pdf`)

Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., & Oellermann, O. R. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, *105*, 99-113.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). *Graphs and digraphs (sixth edition).* New York: Taylor Francis Graph.

Chartrand, G., & Zhang, P. (2012). *A first course in graph theory.* New York: Dover Publication, Inc.

Okamoto, F., Crosse, L., Phinezy, B., Zhang, P., & Kalamazoo. (2010). The local metric dimension of a graph. *Mathematica Bohemica*, *135*(3), 239-255. Retrieved from `http://dml.cz/dmlcz/140702`

Priya, J. S., & Beula, T. M. N. (2023). The monophonic metric dimension of degree splitting graph. *Tuijin Jishu/Journal of Propulsion Technology*, *44*(4), 2742–2747. doi: 10.52783/tjjpt.v44.i4.1350

P. Santhakumaran, A., & Mahendran, M. (2013). The connected open monophonic number of a graph. *International Journal of Computer Applications*, *80*(1), 39–42. doi: 10.5120/13828-1627

Santhakumaran, A. P., & Titus, P. (2011). Monophonic distance in graphs. *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, *3*, 159–169.

Titus, P., & Santhakumaran, A. (2017). Monophonic distance in graphs. In B. Sirmacek (Ed.), *Graph theory* (chap. 6). Rijeka: IntechOpen. Retrieved from `https://doi.org/10.5772/intechopen.68668` doi: 10.5772/intechopen.68668

Titus, P., & Santhakumaran, A. (2018). Monophonic distance in graphs. *Graph Theory - Advanced Algorithms and Applications.* (Preprint) doi: 10.5772/intechopen.68668

Trudeau, R. J. (1993). *Introduction to graph theory.* New York: Dover Publications, Inc.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penyelesaian penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis yang telah mendukung dan memotivasi penulis. Oleh sebab itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Semua teman-teman bimbingannya Bu Rinur yang membantu dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

2. Semua teman-teman dari Banyuwangi baik yang berkuliah di ITS maupun diluar ITS yang senantiasa saling memberi semangat selama perkuliahan dan pengerjaan Tugas Akhir ini.

Penulis juga mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari berbagai pihak untuk penyempurnaan isi Tugas Akhir ini. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang bersangkutan.

Surabaya, 01 Agustus 2024

Muhammad Yusti Permana Satriadi

BIODATA PENULIS

Nama Lengkap penulis Muhammad Yusti Permana Satriadi. Penulis lahir di Cilegon 30 Januari 2002 yang merupakan anak pertama dari dua bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal, yaitu di SD Negeri 2 Wringinagung Banyuwangi (2008-2014), SMP Negeri 2 Gambiran Banyuwangi (2014-2017), SMA Negeri 1 Gambiran (2017-2020). Setelah lulus SMA pada tahun 2020, Penulis melanjutkan pendidikan ke jenjang S1 di Departemen Matematika, FSAD ITS melalui jalur UTBK SBMPTN dan menjadi mahasiswa dengan nomor registrasi pokok (NRP) 5002201151. Dalam bidang akademik, Penulis tertarik pada rumpun Aljabar dan Analisis. Sedangkan dalam bidang nonakademik Penulis pernah aktif dalam mengikuti kegiatan UKM Catur ITS. Penulis menerima informasi, kritik, dan saran mengenai penulisan laporan kerja praktik ini dengan tangan terbuka. Untuk informasi lebih lanjut, dapat menghubungi penulis melalui email muhammadyusti9@gmail.com.