

30662/14/07



**ITS**  
Institut  
Teknologi  
Sepuluh Nopember



RS Ma  
54.  
Kni  
A-1  
207

**TUGAS AKHIR - SM 1330**

**PERTIDAKSAMAAN KONSTRAIN DALAM KALKULUS  
VARIASI DAN APLIKASINYA PADA MASALAH  
BRACHISTOCHRONE**

IKA KRISDIANA  
NRP 1203 109 014

Dosen Pembimbing  
Dra. Sri Suprpti H, MSi

JURUSAN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2007

PERPUSTAKAAN ITS	
Tgl. Terima	3 - 8 - 2007
Terima Dari	H
No. Agenda Prp.	729097



**ITS**  
Institut  
Teknologi  
Sepuluh Nopember

**FINAL PROJECT - SM 1330**

**INEQUALITY CONSTRAIN IN CALCULUS OF  
VARIATION AND ITS APPLICATIONS IN  
BRACHISTOCHRONE PROBLEMS**

**IKA KRISDIANA**  
NRP 1203 109 014

Supervisor  
Dra. Sri Suprapti H, MSi

**MATHEMATICS DEPARTMENT**  
Faculty of Mathematics and Science  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya 2007

## LEMBAR PENGESAHAN

### **PERTIDAKSAMAAN KONSTRAIN DALAM KALKULUS VARIASI DAN APLIKASINYA PADA MASALAH BRACHISTOCHRONE**

#### **TUGAS AKHIR**

**Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
Pada**

**Bidang Minat Riset Operasi dan Simulasi  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Oleh :

**IKA KRISDIANA**

Nrp. 1203 109 014

Disetujui oleh Pembimbing Tugas Akhir :

Dra. Sri Suprpti H, MSi



**SURABAYA, AGUSTUS 2007**

# PERTIDAKSAMAAN KONSTRAIN DALAM KALKULUS VARIASI DAN APLIKASINYA PADA MASALAH BRACHISTOCHRONE

**Nama Mahasiswa** : Ika Krisdiana  
**NRP** : 1203 109 014  
**Jurusan** : Matematika FMIPA ITS  
**Dosen pembimbing** : Dra. Sri Suprapti H, MSi

## Abstrak

Kalkulus variasi adalah suatu metode untuk menyelidiki nilai maksimum atau minimum dari integral tertentu yang bergantung pada suatu fungsi. Salah satu perannya dapat dipakai untuk menyelesaikan masalah *Brachistochrone* yaitu suatu masalah untuk mencari lintasan terpendek dari sebuah manik-manik yang meluncur pada sebuah kawat dari suatu titik ke titik lain dengan waktu yang minimum, dari peristiwa itu didapatkan persamaan sikloida. Metode yang digunakan adalah metode Euler-Lagrange yaitu salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dalam kalkulus variasi.

*Brachistochrone* yang dibahas disini adalah *Brachistochrone* yang dimodifikasi yaitu dengan peluncuran manik-manik yang dibatasi oleh suatu konstrain sehingga pada suatu titik tertentu akan mengalami penurunan yang sangat kecil (*limited descent*) dan akhirnya berhenti. Hal ini akan mempengaruhi waktu yang ditempuh oleh manik-manik. Hasil dari analisa ini dibandingkan dengan masalah tanpa konstrain. Setelah dianalisa waktu yang ditempuh manik-manik dengan konstrain lebih besar daripada waktu yang ditempuh tanpa menggunakan konstrain.

**kata kunci:** Euler lagrange, brachistochrone, konstrain

# INEQUALITY CONSTRAIN IN CALCULUS OF VARIATIONS AND ITS APPLICATIONS IN BRACHISTOCHRONE PROBLEMS

**Name** : Ika Krisdiana  
**NRP** : 1203 109 014  
**Departement of** : Matematics FMIPA ITS  
**Supervisor** : Dra. Sri Suprapti H, MSi

## Abstract

Calculus of Variations is a method for studying maximum or minimum of integrals that depends on a function. Calculus of Variations can be used for solving Brachistochrone problem find the shortest distance a bead that slide on a wire from the higher point to the lower point, a cycloid is found by that event. Method that used for solving optimation problem in Calculus of Variations is Euler Lagrange.

Brachistochrone that studied for this find project is a problem with the bead slide that limited by a constrain, then on a fixed point will occur the limited descent and finally stopped. This event will influence time of descent of a bead. The result of this study will be compared to the problem without constrain. After analysis, time of descent of a bead with constrain is greater than time of descent of a bead without costrain.

**Keywords** : Euler Lagrange, Brachistochrone, costrain.

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, penulis panjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Penulis menyusun Tugas Akhir dengan judul

### **Pertidaksamaan Konstrain Dalam Kalkulus Variasi dan Aplikasinya Pada Masalah Brachistochrone**

Sebagai salah satu persyaratan dalam meraih gelar Sarjana Sains.

Penyusunan Tugas Akhir ini tidak terlepas dari bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada yang terhormat:

1. Mama dan Ayah tercinta, yang selalu memberikan doa, semangat, dukungan moral serta material dan semua yang telah dilakukan oleh penulis.
2. Ibu Dra. Sri Suprapti Hartatiati, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah banyak memberi bimbingan dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
3. ketua Jurusan Matematika ITS, Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc beserta Seluruh Dosen dan Karyawan Jurusan Matematika ITS.
4. Ibu Dra. Mardijah, MT dan bapak Drs. I G Ngurah Rai U, MSi selaku dosen penguji.
5. Bapak Drs. Soehardjoepri, M.Si selaku Dosen Wali Penulis.
6. Masku yang telah memberikan cinta dan sayangnya selama ini atas semua doa, semangat, dukungan, bantuan dan ketulusannya.
7. Adik sepupuku dwi dan riyon serta saudara-saudaraku yang telah memberikan semangat, dukungan seta doanya.
8. Teman-temanku endri', vira, tangguh, penthul, nunik, yulies, henry atas doa dan bantuannya.
9. Sahabatku fajar, oki', rahma, yang memberikan doa, semangat dan bantuannya.
10. Teman-teman '03 semuanya dan rekan-rekan Himatika ITS yang memberikan doa dan semangatnya.

11. Bapak kosku dan mbak-mbak kosku T103: mb'kitty, mb'lidya, mb'wawa, mb' nyit2, dhe' riyen n dhe' rari' atas semua doa, semangat dan bantuannya.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan saran dan kritik dari pembaca. Harapan penulis semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi Semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Agustus 2007

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Masalah .....	2
1.4 Tujuan dan Manfaat .....	2
1.5 Sistematika Penulisan .....	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Optimasi Dalam Kalkulus Variasi .....	5
2.2 Pemakaian Kalkulus Variasi secara Sederhana .....	7
2.2.1 Bidang Putar Minimal .....	7
2.2.2 Masalah Umum Geodesik .....	8
2.3 Persamaan Diferensial Euler .....	9
2.4 Persamaan Euler Lagrange .....	13
2.5 Penerapan Persamaan Diferensial Euler .....	14
2.6 Licin Sepotong-potong (Piecewise-Smooth) dan Kontinu Sepotong-potong (Piecewise-Continuous) pada Fungsi Extremals .....	16
<b>BAB III METODOLOGI</b> .....	19
<b>BAB IV PEMBAHASAN</b>	
4.1 Masalah Brachistochrone .....	19
4.2 Pertidaksamaan Konstrain .....	27
4.3 Penerapan Pertidaksamaan Konstrain .....	27
4.4 Teorema-teorema yang Mendukung Penyelesaian Masalah	33
4.5 Masalah Brachistochrone dengan Limited Descent .....	37
4.6 Penerapan Pertidaksamaan Konstrain dalam Masalah Brachistochrone .....	45



**BAB V KESIMPULAN DAN SARAN**

5.1 Kesimpulan ..... 47  
5.2 Saran ..... 47  
**DAFTAR PUSTAKA..... 49**  
**BIODATA PENULIS..... 51**



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Kurva $y = y(x)$ .....	6
Gambar 2.2 Bidang Putar Minimal.....	8
Gambar 2.3 Kurva $Y = y(x) + \varepsilon\eta(x)$ .....	10
Gambar 2.4 Piecewise Continuous (PWC).....	16
Gambar 2.5 Piecewise Smooth (PWS) .....	17
Gambar 4.1 Masalah Brachistochrone.....	21
Gambar 4.2 $x = a + \sigma(\theta - \sin \theta)$ , $y = A - \sigma(1 - \cos \theta)$ ....	26
Gambar 4.3 $\hat{y}_f(x) = x^2 - 7x + 10$ dan $\varphi(x) = 6 - 2x$ .....	31
Gambar 4.4 Kurva $\hat{y}_c(x)$ .....	32
Gambar 4.5 Brachistochone dengan Limited Descent.....	38

# BAB I

## PENDAHULUAN

LAMUDY  
XEROX

# BAB I PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Mengoptimalkan merupakan sifat alami manusia. Misalnya manusia ingin mengoptimalkan keuntungan, meminimalkan biaya, menempuh suatu tujuan dengan waktu yang tercepat, dan lain-lain. Salah satu teori matematika yang digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah optimasi disebut dengan kalkulus variasi. Berbagai macam kondisi persamaan kostrain dapat juga diselesaikan dengan kalkulus variasi. Secara umum pertidaksamaan kostrain yang digunakan dalam kalkulus variasi adalah  $y(x) \geq \varphi(x)$  pada  $[a,b]$  untuk menentukan fungsi kontinu  $\varphi(x)$  [6]. Salah satu pemakaiannya adalah untuk menyelesaikan masalah *Brachistochrone* dengan *limited descent*.

*Brachistochrone* adalah suatu peristiwa meluncurnya manik-manik pada sebuah kawat dari suatu titik ke titik yang lain, dengan mengabaikan gaya gesek dan tetap dalam pengaruh gaya gravitasi. Dalam peristiwa ini yang menjadi pertanyaan adalah bagaimana manik-manik tersebut meluncur dengan waktu yang minimum. *Brachistochrone* ini pertama kali diperkenalkan oleh Johann Benoulli pada tahun 1696, berasal dari bahasa Yunani yaitu *Brachitos* yang berarti terpendek(shortest) dan *Chranos* yang berarti waktu(time) [6].

Masalah *Brachistochrone* penting dalam perkembangan sejarah matematika, dan dalam penyelesaiannya masalah ini menggunakan metode Euler-Lagrange. Metode Euler-Lagrange adalah suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi di dalam kalkulus variasi. Masalah *Brachistochrone* inilah sekaligus tanda lahirnya perluasan matematika yang dikenal dengan kalkulus variasi [3,5].

Masalah *Brachistochrone* yang akan dibahas disini adalah *Brachistochrone* yang dimodifikasi yaitu dengan peluncuran manik-manik yang dibatasi oleh suatu kostrain sehingga pada

suatu titik tertentu akan mengalami penurunan yang sangat kecil (*limited descent*) dan akhirnya berhenti [6].

### 1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang di angkat dalam Tugas Akhir yang diusulkan ini adalah

1. Bagaimana penerapan konstrain dalam masalah Brachistochrone.
2. Bagaimana menentukan waktu yang ditempuh manik-manik sampai berhenti dengan konstrain

$$A - G \geq \frac{2(b - a)}{\pi}.$$

3. Bagaimana perbandingan waktu tempuh tanpa konstrain dengan waktu tempuh menggunakan konstrain.

### 1.3 Batasan Masalah

Dalam pembahasan Tugas Akhir ini, permasalahan akan dibatasi oleh  $b$  tertentu dan  $y(b)$  tidak spesifik tetapi  $y(x)$  dibatasi tidak kurang dari  $G$  ( $< A$ ), sehingga  $y(x) \geq G$  untuk semua  $x$  di  $[a, b]$ .

### 1.4 Tujuan dan Manfaat

Dalam penulisan Tugas Akhir ini mempunyai tujuan yaitu dapat mengaplikasikan pertidaksamaan konstrain dalam kalkulus variasi khususnya masalah *brachistochrone* dengan *limited descent*.

Manfaat penulisan Tugas Akhir ini adalah dapat menyelesaikan masalah *Brachistochrone* dengan suatu konstrain.

## 1.5 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

### Bab I Pendahuluan

Uraian yang akan dibahas dalam bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan tugas akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penulisan tugas akhir serta sistematika penulisan tugas akhir.

### Bab II Tinjauan Pustaka

Uraian yang akan dibahas dalam bab ini berisi tentang optimasi dalam kalkulus variasi, pemakaian kalkulus variasi secara sederhana, persamaan diferensial Euler, persamaan Euler-Lagrange, penerapan persamaan Euler-Lagrange, *piece-wise smooth* dan *piece-wise continous* dalam fungsi ekstremal.

### Bab III Metodologi

Uraian yang akan dibahas dalam bab ini berisi tentang langkah-langkah yang akan dilakukan dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

### Bab IV Pembahasan

Uraian yang akan di bahas dalam bab ini berisi tentang masalah *Brachistochrone*, pertidaksamaan konstrain yang mempengaruhi sehingga *Brachistochrone* mengalami *limited descent*, teorema-teorema yang mendukung dalam penyelesaian masalah dan penyelesaian masalah yang dipengaruhi konstrain, penerapan pertidaksamaan konstrain pada masalah *Brachistochrone*.

### Bab V Kesimpulan dan Saran

Uraian yang akan dibahas dalam Bab ini berisi tentang kesimpulan dari semua pembahasan dan saran bagi pembaca.

## BAB II

# TINJAUAN PUSTAKA

AL-AMIDY  
XEROX

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan diuraikan teori dasar yang berhubungan dengan pembahasan masalah, antara lain optimasi dalam kalkulus variasi, pemakaian kalkulus variasi secara sederhana, persamaan diferensial Euler, persamaan diferensial Euler Lagrange, penerapan Euler Lagrange, penjelasan *Piecewise smooth* dan *piecewise continuous*

### 2.1 Optimasi Dalam Kalkulus Variasi

Masalah optimasi dalam kalkulus variasi yaitu suatu masalah untuk mencari nilai maksimum atau minimum dari suatu integral tertentu sehingga dapat dicari fungsi  $y(x)$  pada interval  $a \leq x \leq b$  yang digambarkan dalam fungsi di bawah ini:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (2.1)$$

dimana  $y' \equiv \frac{d(y)}{dx}$

Untuk beberapa permasalahan,  $y(x)$  pada persamaan (2.1) diberikan untuk memenuhi kondisi akhir  $y(a) = A$  dan  $y(b) = B$ , dimana  $A$  dan  $B$  adalah konstan.

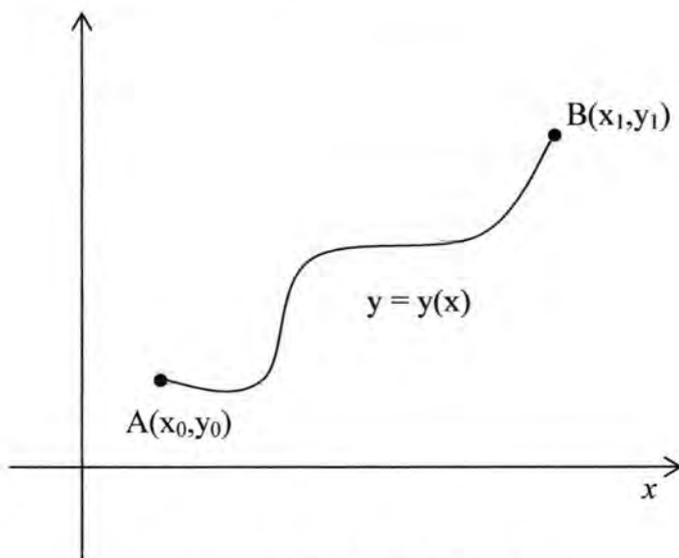
Adapun masalah pengoptimalan  $J[y]$  merupakan masalah dasar pada kalkulus variasi. Pada permasalahan ini, masalah dasarnya sebagai berikut

$$\min_{y \in k} \{ J[y] \mid y(a) = A, y(b) = B \} \quad (2.2)$$

dimana  $k$  adalah kumpulan dari fungsi perbandingan yang memenuhi syarat. Selain menentukan nilai stasioner baik nilai maksimum atau nilai minimum dari fungsi  $y = f(x)$ , Banyak masalah yang dijumpai dimana harus dicari maksimum atau minimum dari suatu besaran khusus yang terdiri dari integral-

integral tertentu yang nilainya tergantung pada fungsi-fungsi. Besaran khusus ini dinamakan fungsional.

Sebagai gambaran awal panjang busur  $s$  pada bidang dari suatu kurva antara dua titik-titik yang diberikan  $A(x_0, y_0)$  dan  $B(x_1, y_1)$ .



Gambar 2.1 Kurva  $y = y(x)$

Besaran  $s$  dapat dihitung jika persamaan kurva  $y = y(x)$  diketahui, dan:

$$s\{y(x)\} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Secara umum masalah dalam kalkulus variasi adalah mencari kurva  $y = y(x)$  dimana  $y(x_1) = y_1$  dan  $y(x_2) = y_2$  sehingga untuk suatu fungsi

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (2.3)$$

mencapai maksimum atau minimum yang disebut nilai extreme atau stasioner. Kurva  $y = y(x)$  yang memenuhi sifat ini disebut extremal.

## 2.2 Pemakaian Kalkulus Variasi secara Sederhana

### 2.2.1 Bidang Putar Minimal

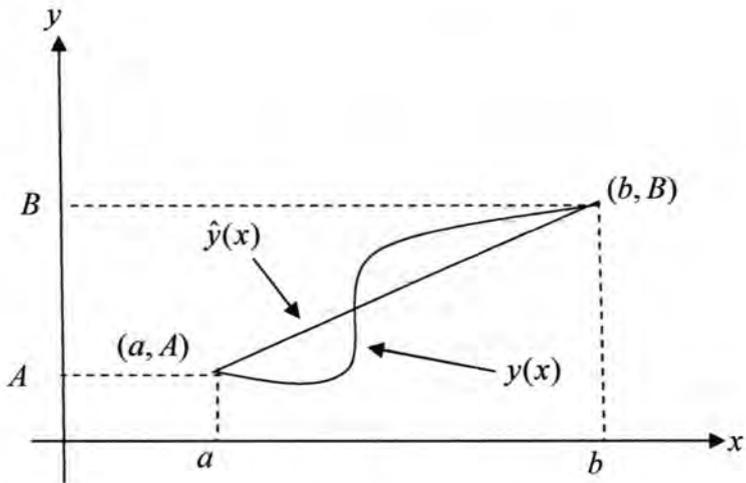
Sebagai contoh khusus dari masalah dalam kalkulus variasi adalah diberikan kurva  $y(x)$  berada diatas sumbu  $x$  dimana  $a \leq x \leq b$  (gambar 2.2). Area permukaan bidang putar yang dihasilkan dengan perputaran kurva ini terhadap sumbu  $x$  adalah

$$J[y] = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (2.4)$$

dimana  $( )' = \frac{d( )}{dx}$ , dengan  $y(a) = A$  dan  $y(b) = B$ . Untuk mendapatkan kurva  $\hat{y}(x)$  yang merupakan bentuk minimum dari kurva  $y(x)$  adalah suatu permasalahan optimasi dalam kalkulus variasi. Hal ini diwujudkan dalam masalah dasar dari kalkulus variasi seperti yang digambarkan oleh persamaan (2.1) dan (2.2) dengan

$$F(x, y, y') = 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}$$





Gambar 2.2 Bidang Putar Minimal

### 2.2.2 Masalah Umum Geodesik

Masalah area permukaan yang minimum pada persamaan (2.4) adalah suatu kasus khusus dari masalah umum geodesik. Hal ini merupakan suatu masalah dasar untuk integral

$$J[y] = k \int_a^b y^n \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (2.5)$$

dengan  $n = 0$  dan  $k = 1$  merupakan permasalahan yang sesuai dengan masalah geodesik, yaitu permasalahan dalam menentukan jarak yang paling pendek antara dua titik dalam suatu bidang. Dari permasalahan  $n = 1$  ini sesuai dengan persamaan (2.4) jika diambil  $k = 2\pi$ .

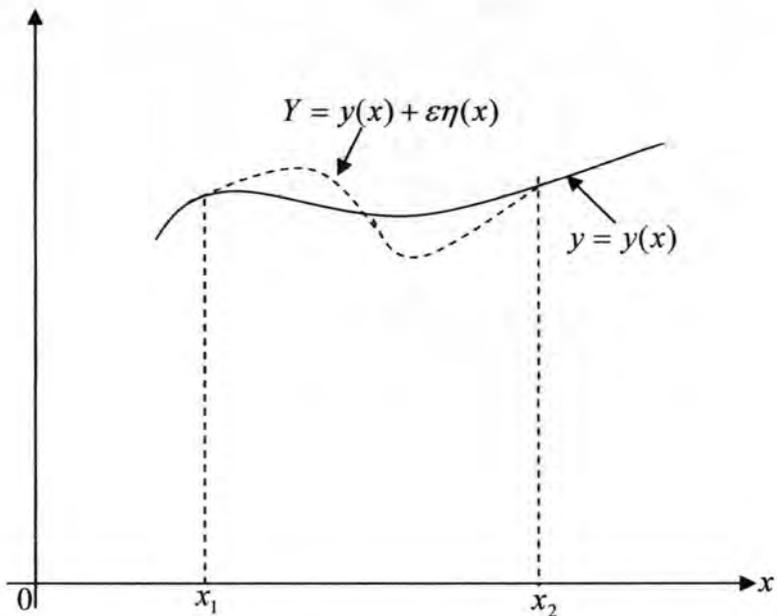
Masalah *Brachistochrone* klasik yang berarti “waktu terpendek” dalam bahasa Yunani yang sesuai dengan  $n = -1/2$ . Masalah ini mula-mula diajukan oleh Johann Bernoulli pada tahun 1696 sebagai tantangan kepada saudaranya Jacob

khususnya dan kepada dunia matematika secara umum. *Brachistochrone* adalah sebuah manik-manik yang meluncur dari suatu titik ke titik yang lain pada suatu kawat berbentuk kurva  $y(x)$  dalam suatu bidang. Permasalahan *Brachistochrone* adalah mencari bagaimana bentuk dari kurva  $y(x)$  yang meminimalisasi waktu lintasan manik-manik di bawah pengaruh gaya gravitasi yang melintas pada kawat dari titik yang lebih tinggi (a,A) ke titik paling rendah (b,B).[6]

### 2.3 Persamaan Diferensial Euler

Dalam mencari kurva  $y = y(x)$  yang diinginkan, ditinjau pengaruh pada integral pada persamaan (2.3) dari kurva disekitarnya. Misalnya:

$$Y = y(x) + \varepsilon\eta(x)$$



Gambar 2.3 Kurva  $Y = y + \epsilon\eta(x)$

Dalam hal ini  $\eta(x)$  adalah suatu fungsi sebarang dan  $\epsilon$  suatu parameter sebarang. Dalam hal ini kurva  $Y = y(x) + \epsilon\eta(x)$  yang melalui titik  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$  dikehendaki bahwa:

$$\eta(x_1) = 0 \text{ dan } \eta(x_2) = 0$$

Misalkan  $y = y(x)$  adalah kurva yang menghubungkan titik  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$  yang menyebabkan nilai

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \text{ mencapai extremal. } Y = y(x) + \epsilon\eta(x)$$

dimana  $\eta(x_1) = 0$  dan  $\eta(x_2) = 0$  adalah kurva disekelilingnya yang menghubungkan titik  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$ .

Nilai integral sepanjang kurva disekelilingnya adalah:

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x)) dx \quad (2.6)$$

Karena  $y(x)$  merupakan penyelesaian dari masalah ini maka integral ini mempunyai nilai maksimum atau minimum pada saat  $\varepsilon = 0$ . Karena  $I(\varepsilon)$  adalah fungsi dari satu variable  $\varepsilon$ , maka  $I'(\varepsilon) = 0$  pada saat  $\varepsilon = 0$ :

$$\left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

Didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \varepsilon} \right] dx \quad (2.7)$$

jika

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [u(x) + \varepsilon\eta(x)] = \eta(x)$$

dan

$$\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [u'(x) + \varepsilon\eta'(x)] = \eta'(x)$$

Sehingga persamaan (2.7) menjadi

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx$$

Karena  $\varepsilon = 0$ , didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx \quad (2.8)$$

Integral parsial dari bentuk kedua pada persamaan (2.8) adalah

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) dx$$

Karena  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , maka

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

sehingga,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) dx$$

Disubstitusikan ke persamaan (2.8), didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) \right] dx = 0 \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx = 0 \quad (2.10)$$

Karena  $\eta(x)$  sebarang dalam persamaan (2.10), mengakibatkan fungsi bernilai nol, yaitu

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

Persamaan (2.11) disebut **persamaan diferensial Euler**.

Persamaan (2.10) ditunjukkan dengan kontradiksi sebagai berikut:

Karena dalam persamaan (2.10) koefisien  $\eta(x)$  sama dengan nol,  $\eta(x)$  sebarang maka selalu dapat dipilih:

1.  $\eta(x)$  yang positif, untuk  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} > 0$
2.  $\eta(x)$  yang negative, untuk  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} < 0$

## 2.4 Persamaan Euler Lagrange

Persamaan Euler Lagrange dibedakan menjadi 2 yaitu:

- a. Suatu persamaan Euler-Lagrange sederhana menghasilkan fungsi integral  $F$  yang tidak memuat variable  $y$ . Diketahui bahwa  $\left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)$  adalah 0, maka persamaan diferensial Euler menjadi:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \text{ atau } \frac{\partial F}{\partial y'} = c$$

Suatu yang tetap konstan. Dengan begitu untuk fungsi ekstrimisasi menghasilkan penyelesaian dari suatu persamaan dengan menggunakan  $y'$  dan  $x$  saja, suatu persamaan diferensial orde pertama [7].

Jika lebih lanjut  $F$  tidak memuat variable  $x$ , seperti halnya menjadi bebas pada  $y$ , derivative parsial  $\left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$  adalah suatu fungsi  $y'$  sendiri.

- b. Diketahui persamaan

$$\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F \right) = y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} - y' \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$= -y' \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] - \frac{\partial F}{\partial x}$$

Merupakan integral pertama untuk persamaan Euler-Lagrange. Dalam masalah tertentu  $F$  tidak memuat variabel  $x$  bebas karena  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  maka persamaan Euler-Lagrange

menjadi:

$$\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F \right) = 0 \text{ atau } y' \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - F = c_1$$

$c_1$  merupakan suatu konstanta yang tetap. Dengan begitu fungsi ekstrimisasi di peroleh ketika penyelesaian suatu persamaan diferensial orde pertama menggunakan  $y$  dan  $y'$ .

## 2.5 Penerapan Persamaan Diferensial Euler

Diberikan sebuah contoh penerapan persamaan diferensial euler sebagai berikut:

1. Dapatkan persamaan kurva stasioner untuk

$$\int_0^1 (16y - (y'')^2 + x^2) dx \quad \text{dengan syarat}$$

$$y(0) = 0, y(1) = 4, y'(0) = -1, y'(1) = 2.$$

Penyelesaian:

Dengan diketahui:  $f(x, y, y', y'') = 16y - (y'')^2 + x^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 16, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y''} = -2y'',$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y''} \right) = -2y''', \quad \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial f}{\partial y''} \right) = -2y''^4$$

$$\text{syarat ekstrem: } \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial f}{\partial y''} \right) = 0$$

sehingga dari masalah ini didapatkan bentuk persamaan ekstremnya sebagai berikut:

$$16 - y^4 = 0$$

Persamaan karakteristiknya adalah

$$PK : k^4 - 16 = 0$$

$$: (k + 2)(k - 2)(k + 2i)(k - 2i)$$

Dari persamaan karakteristik didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + e^{0x} (c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x)$$

$$y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x} - 2c_3 \sin 2x + 2c_4 \cos 2x$$

Dengan mensubstitusikan

$$y(0) = 0, y(1) = 4, y'(0) = -1, y'(1) = 2$$

Sehingga didapatkan:

$$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$y(1) = c_1 e^2 + c_2 e^{-2} + c_3 \cos 2 + c_4 \sin 2 = 4$$

$$y'(0) = 2c_1 - 2c_2 + 2c_4 = -1$$

$$y'(1) = 2c_1 e^2 - 2c_2 e^{-2} - 2c_3 \sin 2 + 2c_4 \cos 2 = 2$$

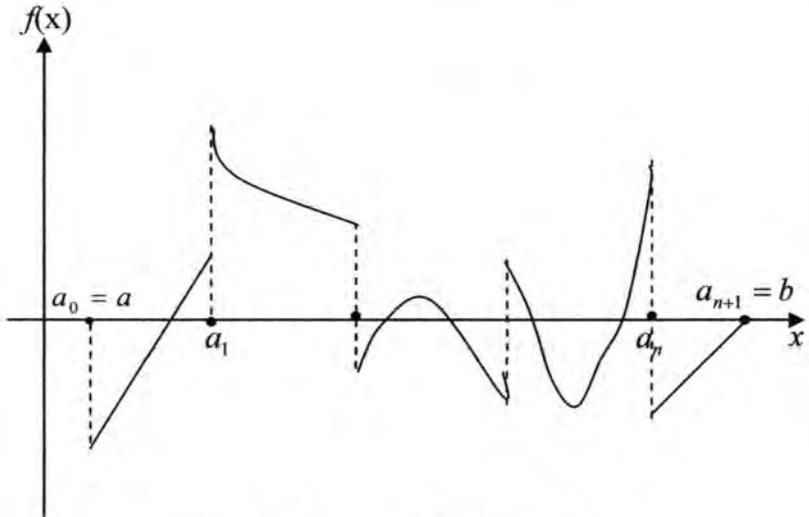
Maka didapatkan penyelesaian sebagai berikut:

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

## 2.6 Licin Sepotong-potong (*Piecewise Smooth*) dan Kontinu Sepotong-potong (*Piecewise Continuous*) pada fungsi Extremals

Dalam perkembangan matematika khususnya dalam kalkulus variasi penyelesaian masalah yang berhubungan dengan fungsi *Piecewise smooth* (PWS) dan *piecewise continuous* (PWC), secara umum teorinya dalam bentuk definisi dan notasi. Misalnya fungsi  $f(x)$  didefinisikan dalam interval  $[a, b]$  dikatakan *piecewise continuous* (PWC) jika dalam subinterval

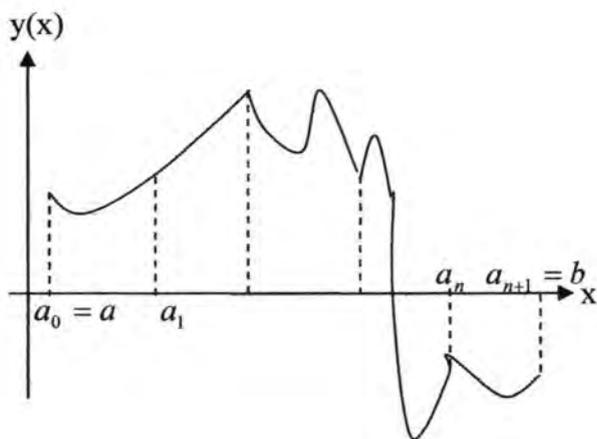
$(a_i, a_{i+1})$  pada  $[a, b]$  kontinu disekeliling interval  $(a_i, a_{i+1})$  dengan  $f$  limitnya terbatas pada  $a_i$  dan  $a_{i+1}$ . Hal ini terlihat dalam grafik di bawah ini.



Gambar 2.4 Piecewise Continuous (PWC)

Fungsi  $y(x)$  dikatakan *piecewise smooth* (PWS) jika memenuhi tiga persyaratan sebagai berikut yaitu:

- Kontinu pada  $[a, b]$ .
- Terdeferensiable pada  $[a, b]$  kecuali untuk titik yang terbatas.
- Turunan  $y'$  PWC pada  $[a, b]$ . [5]



Gambar 2.5 Piecewise Smooth (PWS)

## BAB III

# METODOLOGI

AL-AMUDY  
XEROX

### BAB III METODOLOGI

Langkah-langkah penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Study literatur  
Pada tahap ini penulis mengumpulkan bahan dari berbagai buku penunjang yang berhubungan dengan permasalahan.
2. Kajian masalah *Brachistochrone*  
Pada tahap ini penulis menguraikan masalah awal mula terjadinya masalah *Brachistochrone* dan metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah *Brachistochrone*. Masalah ini kunci awal dari penyelesaian masalah.
3. Teorema-teorema yang digunakan dalam penyelesaian masalah  
Pada tahap ini penulis menguraikan teorema-teorema yang digunakan dalam penyelesaian masalah misalnya teorema yang berhubungan dengan masalah pertidaksamaan konstrain. Akan diuraikan empat teorema yang mendukung penyelesaian masalah *Brachistochrone* dengan limited descent.  
Pada tahap ini penulis menyelesaikan permasalahan masalah *Brachistochrone* dengan Limited Descent.
4. Kesimpulan dan saran  
Pada tahap ini setelah penulis melakukan analisa dan menyelesaikan permasalahan, dapat ditarik suatu kesimpulan dari tugas akhir yang telah dilakukan.
5. Penulisan laporan  
Pada tahap ini dilakukan seiring dengan lima langkah di atas dan dilakukan penyempurnaan laporan sebagai tahap akhir penulisan laporan.

## **BAB IV**

# **PEMBAHASAN**

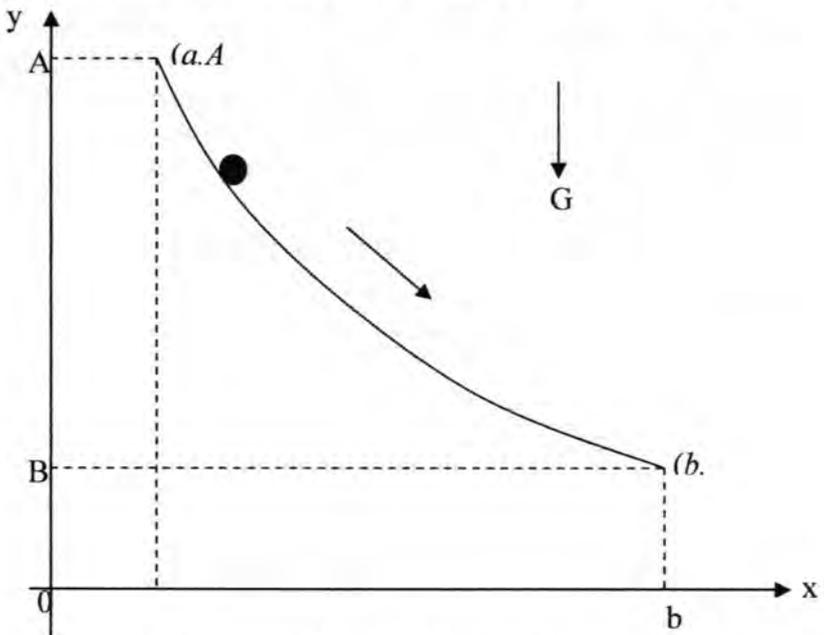
AI-AMUDY  
ZEROX

## BAB IV PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas tentang masalah *Brachistochrone*, pertidaksamaan konstrain yang mempengaruhi sehingga *Brachistochrone* mengalami limited descent, penerapan pertidaksamaan konstrain, teorema-teorema yang mendukung dalam penyelesaian masalah yang dipengaruhi konstrain.

### 4.1 Masalah Brachistochrone

Sebuah manik-manik bermassa  $m$  meluncur dari titik  $(a, A)$  ke titik  $(b, B)$  yang mengabaikan gaya gesek dan tetap dalam pengaruh gaya gravitasi. Sekarang yang menjadi permasalahan adalah “Bagaimana bentuk kurva yang menjadi lintasan manik-manik pada kawat dengan waktu minimum” [5].



Gambar 4.1 Masalah Brachistochrone

Kurva penyelesaian untuk kawat adalah berbentuk lingkaran *cycloid*, yang menerangkan bahwa kurva sedikit keluar dari titik pada tepi lingkaran roda. Masalah itu sekarang disebut dengan *Brachistochrone*. Masalah *Brachistochrone* disini hubungannya dengan kecepatan manik-manik yang dirumuskan dengan  $v = \frac{ds}{dt}$  atau  $dt = \frac{ds}{v}$  dan total waktu yang ditempuh adalah  $T$ . Dalam hal ini dirumuskan dengan:

$$T = \int_{x=a}^{x=b} \frac{ds}{v} = \int_a^b \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4.1)$$

dimana  $a \leq x \leq b$

kurva diatas menghubungkan dua titik yaitu  $(a, A)$  dan  $(b, B)$  sehingga

$$y(a) = A \text{ dan } y(b) = B \text{ untuk } (B < A) \quad (4.2)$$

Telah jelas bahwa masalah *Brachistochrone* sendiri adalah meluncurnya manik-manik dari suatu titik ke titik lain yang mengabaikan gaya gesek dan tetap dalam pengaruh gaya gravitasi. Dalam hal ini gaya yang mempengaruhi adalah gaya kinetik  $Ek$  dan gaya potensial  $Ep$ . Dari teori fisika mekanika didapatkan bahwa:

Energi kinetik di  $(a, A)$  + energi potensial di  $(a, A)$  = energi kinetik di  $(b, B)$  + energi potensial di  $(b, B) = E$

$Ek$  di  $(a, A)$  +  $Ep$  di  $(a, A)$  =  $Ek$  di  $(b, B)$  +  $Ep$  di  $(b, B) = E$

(4.3)

Sehingga didapatkan

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + mgA = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = E \quad (4.4)$$

karena mula-mula manik-manik dalam keadaan diam, sehingga  $v_o = 0$



sehingga diperoleh

$$mgA = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = E$$

dimana

$m$	= Massa benda (kg)
$v_0$	= Kecepatan awal dari suatu benda (m/s)
$v$	= Kecepatan akhir (m/s)
$g$	= Konstanta gravitasi ( $m/s^2$ )
$y$	= Variabel
$A$	= Tinggi benda (m)
$E$	= Energi Total ( Joule)

Dari persamaan diatas didapatkan persamaan kecepatan yaitu

$$v = \sqrt{2g(\gamma - y)}, \gamma = \frac{E}{mg} \quad (4.5)$$

Dengan menggunakan persamaan (4.5) pada persamaan (4.1) maka

$$T = \int_a^b \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(\gamma - y)}} dx \quad (4.6)$$

dimana  $y(x)$  tidak seharusnya lebih besar dari pada  $\gamma$  untuk semua  $x$  pada  $(a, b)$ . Masalah penentuan  $y(x)$  yang memenuhi persamaan (4.2) dan yang meminimumkan  $T$  merupakan masalah dasar dalam kalkulus variasi. Untuk manik-manik yang bermula pada saat diam memiliki  $v_0 = 0$  sehingga  $\gamma = A$ . Pada masalah ini, integral pada persamaan (4.6) memiliki keistimewaan pengintegralan pada titik akhir pada  $x = a$ . Keistimewaan titik akan diberikan pada  $v_0 > 0$ .

Dengan  $z(x) = \gamma - y$  dimana  $y \geq 0$  untuk  $a \leq x \leq b$ , persamaan (4.6) menjadi



$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+z'^2}{z}} dx \quad (4.7)$$

Integral pada sisi kanan persamaan (4.7) adalah bentuk  $k = 1/\sqrt{2g}$  dan  $n = -1/2$ . Karena pengintegralan ini tidak tergantung pada  $x$  secara explicit, maka untuk mendapatkan persamaan diferensial Euler dari persamaan (4.7) adalah

$$F - z'F_{z'} = \frac{1}{\sqrt{z(1+z'^2)}} = c_0 \quad (4.8)$$

Pada persamaan (4.8) dibuktikan untuk  $z'$  (diharapkan untuk menjadi non negative) untuk memberikan

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{1-c_0^2 z}{c_0^2 z}} \quad \text{atau} \quad c_1 + \int_0^u \sqrt{\frac{u}{1-u}} du = c_0^2 x \quad (4.9)$$

dimana  $u = c_0^2 z$ . Integral dari  $\sqrt{\frac{u}{1-u}}$  dapat dievaluasi dengan

memberikan  $u = \sin^2 \frac{\theta}{2}$  dengan  $du = 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta$ .

Substitusi ini memberikan hasil dari persamaan (4.9)

$$c_1 + \int_0^\theta 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = c_1 + \int_0^\theta (1 - \cos 2 \cdot \frac{\theta}{2}) d\theta = c_0^2 x$$

atau

$$x = \alpha + \sigma(\theta - \sin \theta) \quad (4.10)$$

Dimana  $\sigma = \frac{1}{(2c_0^2)}$  dan  $\alpha = \frac{c_1}{c_0^2}$ . Tapi  $\theta$  dihubungkan pada  $z$

dengan  $z = u/c_0^2 = (\sin^2 \frac{\theta}{2})/c_0^2$

atau

$$z = \alpha + \sigma(1 - \cos \theta) \quad (4.11)$$



maka persamaan (4.10) dan (4.11) adalah kurva sikloida, dimana  $\alpha \neq 0$ .

Persamaan (4.10) dan (4.11) merupakan parametrisasi dalam  $\theta$ . Untuk penyelesaian non trivial yang melewati titik  $(a, A)$ .

Untuk  $0 \leq \theta \leq \theta_1$  dengan

$$x(\theta) = \alpha = a$$

Karena  $y(\theta) = A$  yang secara otomatis terpenuhi. Untuk  $y(x)$  yang diterima,  $\beta$  harus dipilih untuk memenuhi kondisi akhir lainnya pada  $x = b$ , yaitu  $y(\theta = \theta_1) = \gamma - B = A - B$  dengan  $x(\theta = \theta_1) = b$ .

Ini membutuhkan  $\sigma$  dan  $\theta_1$ , untuk memenuhi

$$\sigma(\theta - \sin \theta_1) = b - a \quad (4.12)$$

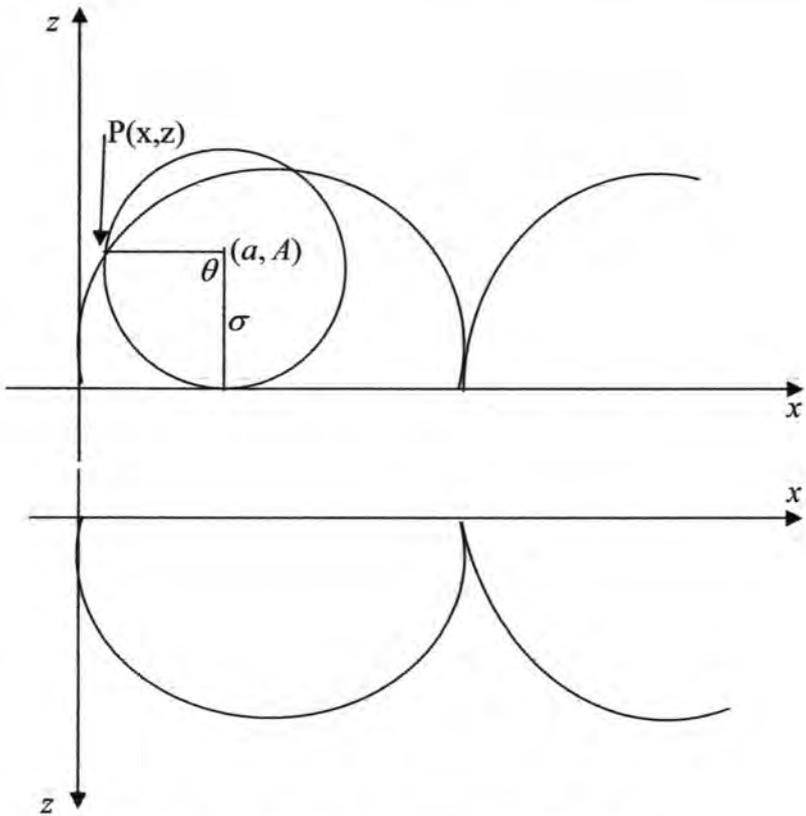
$$\sigma(1 - \cos \theta_1) = A - B > 0 \quad (4.13)$$

Hubungan antar persamaan (4.12) dan (4.13) dapat disusun kembali

$$\frac{b-a}{B-A} - \theta_1 = \frac{b-a}{B-A} \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \quad (4.14)$$

$$\sigma = \frac{A-B}{(1-\cos \theta_1)} \quad (4.15)$$

Pada sisi kanan persamaan (4.14) fungsi periodik dari  $\theta_1$ , sedangkan pada sisi kiri linier.



Gambar 4.2. Sikloida  $x = a + \sigma(\theta - \sin \theta)$ ,  
 $y = A - \sigma(1 - \cos \theta)$

Keterangan :

P suatu titik tetap pada lingkaran suatu roda yang berjari-jari  $\sigma$ . Roda menggelinding sepanjang sumbu-x positif dari system koordinat siku-siku dan P mula-mula berada dititik asal. Apabila roda menggelinding pada jarak yang diketahui, garis radial dari pusat  $(a, A)$  ke titik P berputar melalui sudut  $\theta$ .

#### 4.2 Pertidaksamaan Konstrain

Pertidaksamaan konstrain yang sering dipakai dalam menyelesaikan masalah dalam kalkulus variasi adalah  $y(x) \geq \varphi(x)$  pada  $[a,b]$  dimana konstrain itu meminimumkan ekstremal dari persamaan (4.6). Aplikasinya pada masalah *Brachistochrone* dengan *limited descent*. Yang dimaksud *limited descent* disini adalah pada *Brachistochrone* yang awal mengalami perubahan sehingga pada suatu titik tertentu akan mengalami penurunan yang terbatas atau *limited descent*. Sehingga pada suatu titik tertentu manik-manik akan berhenti. Dalam hal ini akan mempengaruhi waktu yang ditempuh. Akan ditentukan waktu minimum sebelum diberikan konstrain dan setelah diberikan suatu konstrain.

#### 4.3 Penerapan Pertidaksamaan Konstrain

Diketahui persamaan di bawah ini:

$$J[y] = \int_0^5 [(y')^2 + 4y] dx$$

dengan syarat

$$y(0) = 10$$

$$y(5) = 0$$

$$y \geq 6 - 2x \equiv \varphi(x)$$

Penyelesaian :

Diketahui :  $F = (y')^2 + 4y$

Dengan menggunakan persamaan diferensial euler didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 F - y'F_y &= c_1 \\
 (y')^2 + 4y - y'(2y') &= c_1 \\
 (y')^2 + 4y - 2(y')^2 &= c_1 \\
 -(y')^2 + 4y &= c
 \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas didapatkan persamaan :

$$\begin{aligned}
 x &= \int \frac{dy}{\sqrt{4y - c_1}} \\
 &= \int (4y - c_1)^{-1/2} dy \\
 &= 1/4 \frac{1}{-1/2 + 1} (4y - c_1)^{1/2} + c_2 \\
 &= \frac{1}{2} (4y - c_1)^{1/2} + c_2
 \end{aligned}$$

Didapatkan persamaan y nya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 y &= (x - c_2)^2 + \frac{1}{4}c_1 \\
 &= x^2 - 2xc_2 + c_2^2 + \frac{1}{4}c_1
 \end{aligned}$$

Persamaan y disubstitusikan dalam batas  $y(0)=10$  dan  $y(5)=0$ , didapatkan :

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 10 \\
 c_2^2 + \frac{1}{4}c_1 &= 10 \\
 c_1 &= 40 - 4c_2^2
 \end{aligned}$$

dan

$$y(5) = 0$$

$$25 - 10c_2 + c_2^2 + \frac{1}{4}c_1 = 0$$

$$25 - 10c_2 + c_2^2 + \frac{1}{4}(40 - 4c_2^2) = 0$$

$$25 - 10c_2 + c_2^2 + 10 - c_2^2 = 0$$

$$35 - 10c_2 = 0$$

$$c_2 = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

$$c_1 = -9$$

$c_1$  dan  $c_2$  disubstitusikan ke persamaan  $y$ , didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\hat{y}_f = x^2 - 2xc_2 + c_2^2 + \frac{1}{4}c_1$$

$$= x^2 - 2x \frac{7}{2} + \frac{49}{4} - \frac{9}{4}$$

$$= x^2 - 7x + \frac{40}{4}$$

$$= x^2 - 7x + 10$$

Sehingga  $J[\hat{y}_f]$  dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

$$J[\hat{y}_f] = \int_0^5 [(y')^2 + 4y] dx$$

$$= \int_0^5 (2x - 7)^2 + 4(x^2 - 7x + 10) dx$$

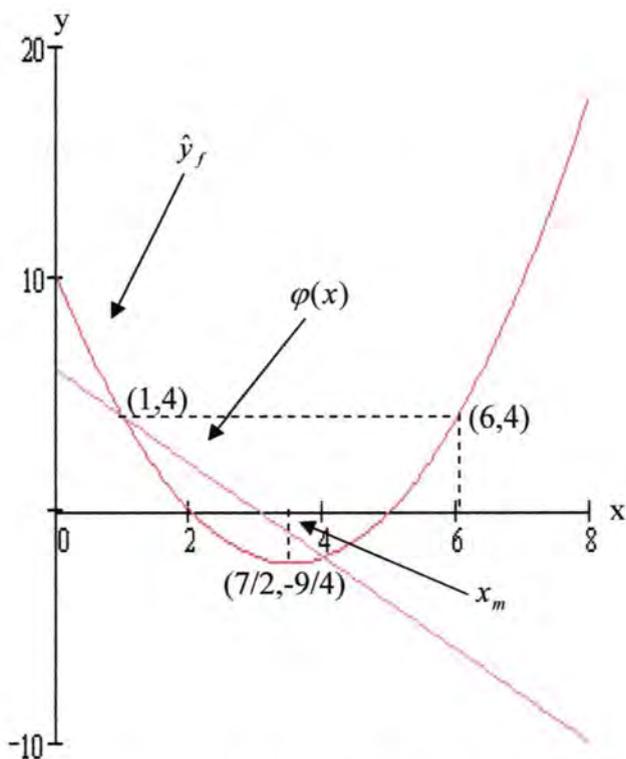
Nilai dari  $J[y]$  dapat dicari dengan mengintegrasikan  $J[y]$  :

$$\begin{aligned}
 J[\hat{y}_f] &= \int_0^5 8x^2 - 56x + 89 dx \\
 &= \frac{8}{3}x^3 - \frac{56}{2}x^2 + 89x \Big|_0^5 \\
 &= \frac{8}{3} \cdot 5^3 - \frac{56}{2} \cdot 5^2 + 89 \cdot 5 - 0 \\
 &= \frac{1000}{3} - \frac{1400}{2} + 445 \\
 &= \frac{470}{6} \\
 &= \frac{235}{3}
 \end{aligned}$$

Penyelesaian masalah ini, tanpa konstrain pertidaksamaan  $y \geq 6 - 2x$  adalah  $\hat{y}_f(x) = x^2 - 7x + 10$  dengan  $J[\hat{y}_f] = 235/3$ .  $\hat{y}_f(x)$  mencapai minimum pada saat  $x_m = 7/2$  dengan  $\hat{y}_f(x_m) = -9/4$  dimana kurang dari  $\varphi(x_m) = -1$ . Kenyataannya  $\hat{y}_f(x) \leq \varphi(x)$  untuk  $1 < x < 4$  (gambar 4.2).

Penyelesaian masalah ini dimana meminimize  $\hat{y}(x)$  menjadi  $\hat{y}_f(x)$  diluar interval  $[a, b]$  dengan konstrain pertidaksamaannya adalah sesuai dan menjadi  $\varphi(x)$  dimana tidak sesuai. Penyelesaiannya dinotasikan  $\hat{y}_r(x)$  dengan

$$\hat{y}_r(x) = \begin{cases} \hat{y}_f(x) & (0 \leq x \leq 1) \\ \varphi(x) & (1 \leq x \leq 4) \\ \hat{y}_f(x) & (4 \leq x \leq 5) \end{cases}$$

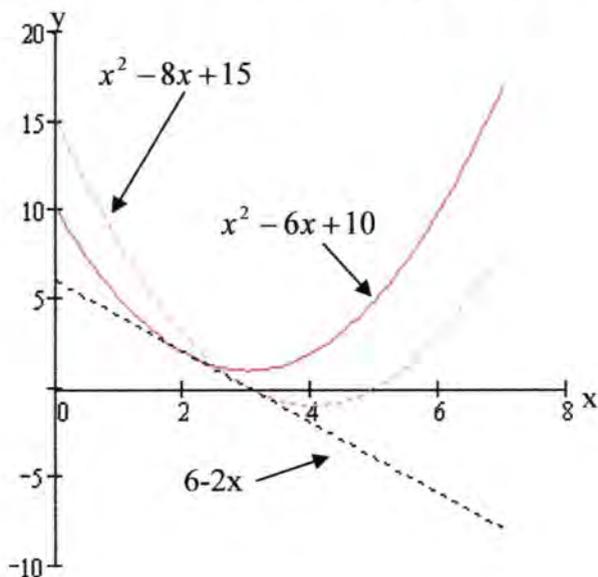


Gambar 4.3  $\hat{y}_f(x) = x^2 - 7x + 10$  dan  $\varphi(x) = 6 - 2x$

Setelah dianalisa  $J[\hat{y}_r]$  adalah  $262/3$ , sehingga nilainya lebih besar dari  $J[\hat{y}_f]$ . Karena  $\hat{y}_r(x)$  tidak meminumkan  $J[y]$  dalam perbandingan dengan fungsi pembanding lainnya. Contohnya  $J[\hat{y}_c]=248/3$  untuk

$$\hat{y}_c(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 10 & (0 \leq x \leq 2) \\ 6 - 2x & (2 \leq x \leq 3) \\ x^2 - 8x + 15 & (3 \leq x \leq 5) \end{cases}$$

Karena  $\hat{y}_c(x)$  sesuai pertidaksamaan konstrain  $y \geq 6 - 2x$  sehingga memenuhi persamaan  $y(0)=10$  dan  $y(5)=0$  (gambar 4.3)



Gambar 4.4 Kurva  $\hat{y}_c(x)$

#### 4.4 Teorema-teorema yang mendukung penyelesaian masalah

##### Teorema 4.4.1

Jika  $\hat{y}(x)$  meminimumkan  $J[y]$  dari masalah dasar dengan pertidaksamaan konstrain  $y(x) \geq \varphi(x)$  dalam  $[a, b]$ , maka  $\hat{y}(x)$  terdiri dari bagian ekstremal dari  $J[y]$  dan bagian  $\hat{y}(x) = \varphi(x)$ . Pada titik dimana menggabungkan dua perbedaan dari tipe bagian itu, maka  $\hat{y}(x)$  kontinu.

Bukti:

Dengan memisalkan ekstremal dari  $J[y]$  adalah

$$\min_y \left\{ \int_c^d F(x, y, y') dx \mid y(c) = \varphi(c), y(d) = \varphi(d) \right\}$$

Dimana dari persamaan itu didapatkan  $\hat{y}(c) = \varphi(c)$  dan  $\hat{y}(d) = \varphi(d)$  dan kontinu pada  $\hat{y}(x)$ , maka  $\hat{y}$  harus menjadi *piece-wise smooth* (PWS).

Untuk membuktikan  $\hat{y}(c) = \varphi(c)$  secara sistematis ditulis  $y$  dalam bentuk *slack function*  $z$  yaitu sebagai berikut:

$$y = \varphi(x) + [z(x)]^2 \quad (4.16)$$

Dimana  $y(x)$  memenuhi pertidaksamaan konstrain untuk setiap real nilai fungsi  $z(x)$ , sehingga ekstremal  $J[y]$  menjadi:

$$J[y] = \int_a^b F(x, \varphi + z^2, \varphi' + 2zz') dx$$

$$J[y] = \int_a^b f(x, z, z') dx \equiv \bar{J}[z]$$

Dengan mengganti fungsi  $f(x, z, z')$  menjadi  $f(x, u, v)$  maka

$$F = (x, \varphi + u^2, \varphi' + 2uv)$$

Persamaan differensial Euler untuk  $\bar{J}[z]$  adalah

$$\hat{f}_{,z} = (\hat{f}_{,z'})' \quad (4.17)$$

$(\bar{c}, \bar{d})$  maka penyelesaian  $\hat{y}(x) = \varphi(x)$  dalam  $(c, d)$  dengan  $\bar{c} \leq c < d \leq \bar{d}$  dan kontinu pada  $c$  dan  $d$ .

### **Teorema 4.4.3**

Titik optimal  $\hat{c}$  diantara  $\varphi(x)$  dan extremal dari  $J[y]$  ditentukan oleh  $\hat{F}(\hat{c}) - \phi(\hat{c}) - [\hat{y}'(\hat{c}) - \varphi'(\hat{c})]\hat{F}_{,y'}(\hat{c}) = 0$  dan dengan syarat kontinu di  $\hat{y}(x) = \varphi(x)$ .

Bukti:

Diketahui bentuk parametric sebagai berikut:

$$\begin{cases} x = x(\gamma) \\ y = y(\gamma) \end{cases} \quad (\alpha < \gamma < \beta)$$

Diberikan integral  $J[y]$  dalam bentuk

$$J = \int_{\alpha}^{\gamma} F(x, y, \frac{y}{x}) x^{\bullet} dt + \int_{\alpha}^{\gamma} F(x, \bar{\varphi}, \bar{\psi}) x^{\bullet} dt$$

Dimana  $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t)$  dan  $\bar{\psi}(t) = \varphi'(x(t))$  adalah fungsi yang diketahui.

Nilai stasioner dari  $J$ , adalah

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{\alpha}^{\gamma} \left\{ \hat{F}_{,x} \hat{x}^{\bullet} \delta x + \left( \hat{F} - \frac{\hat{y}}{\hat{x}} \hat{F}_{,y'} \right) \delta x^{\bullet} + \hat{x}^{\bullet} \hat{F}_{,y} \delta y + \hat{F}_{,y'} \delta y^{\bullet} \right\} dt \\ + \int_{\gamma}^{\beta} \left\{ \hat{x}^{\bullet} F_{,x}(\bar{x}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}) \delta x + F(\bar{x}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}) \delta x^{\bullet} \right\} dt = 0 \end{aligned}$$

(4.21)

Setelah mengintegrasikan bagian diatas dan mengamati dengan persamaan Euler Lagrange maka didapatkan kondisi akhir  $\delta x = \delta y = 0$  di  $\alpha$  dan  $\beta$ .

Persamaan (4.21) secara sederhana dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left[ (\hat{F} - \hat{y}'\hat{F}_{,y'}) \delta x + \hat{F}_{,y'} \delta y \right]_{t=\gamma} = [F(\bar{x}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}) \delta x]_{t=\gamma} \quad (4.22)$$

Dengan  $\hat{x}(\gamma) = \hat{c}$ , di  $t = \gamma$ , diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\delta y = \delta \varphi = \varphi'(\hat{c}) \delta x(\gamma),$$

sehingga persamaan (4.22) menjadi

$$\hat{F}(\hat{c}) - \phi(\hat{c}) - [\hat{y}'(\hat{c}) - \varphi'(\hat{c})] \hat{F}_{,y'}(\hat{c}) = 0 \quad (4.23)$$

Kondisi transversality untuk  $\hat{c}$  adalah

$$\phi(\hat{c}) = F(\hat{c}, \varphi(\hat{c}), \varphi'(\hat{c})) \quad (4.24)$$

#### **Teorema 4.4.4**

Jika  $\hat{F}_{,yy'}(\hat{c}, \varphi(\hat{c}), z) > 0$  dari

$|z - \hat{y}'(\hat{c})| \leq |\varphi'(\hat{c}) - \hat{y}'(\hat{c})|$ , maka  $\hat{y}'(x) = \varphi'(x)$ .

Bukti:

Karena  $\hat{y}(x) = \varphi(x)$  dari teorema 4.3.3 maka

$$f(z) \equiv F(\hat{c}, \varphi(\hat{c}), z) = F(\hat{c}, \hat{y}(c), z)$$

dan

$$f^*(z) \equiv F_{,y'}(\hat{c}, \varphi(\hat{c}), z) = F_{,y'}(\hat{c}, \hat{y}(c), z)$$

Kondisi Optimal switching dari persamaan (4.19) adalah

$$f(\varphi'(\hat{c})) - f(\hat{y}'(\hat{c})) - [\varphi'(\hat{c}) - \hat{y}'(\hat{c})] f^*(\hat{y}'(\hat{c})) = 0 \quad (4.25)$$

Dengan teorema Taylor's, sisi kiri dari persamaan (4.21) sama dengan

$$f^{**}(\bar{z}) [\varphi'(\hat{c}) - \hat{y}'(\hat{c})]^2 / 2$$

untuk nilai  $\bar{z}$  dengan

$$|\bar{z} - \hat{y}'(\hat{c})| \leq |\varphi'(\hat{c}) - \hat{y}'(\hat{c})|$$

Dari kondisi persamaan (4.21) bahwa setiap

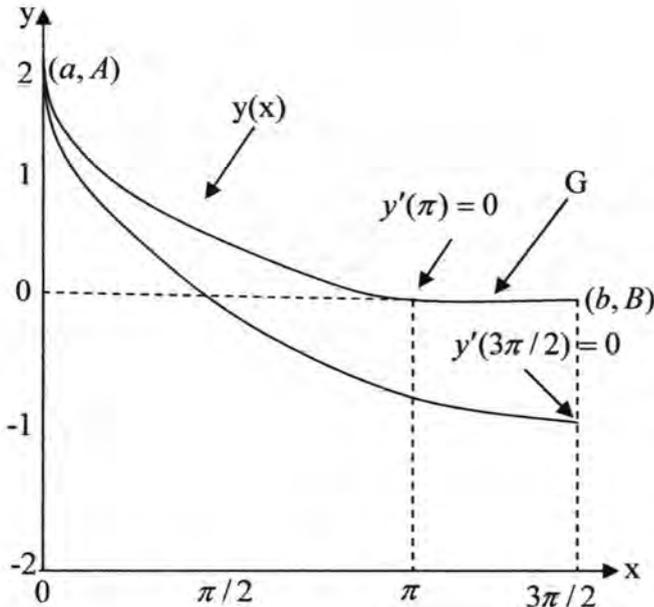
$$f^{**}(\bar{z}) \equiv F_{,yy'}(\hat{c}, \hat{y}(\hat{c}), \bar{z}) = 0$$

Maka teorema diatas terbukti dengan

$$\varphi'(\hat{c}) = \hat{y}'(\hat{c})$$

#### 4.5 Masalah Brachistochrone dengan Limited descent

Masalah Brachistochrone adalah suatu masalah dimana manik-manik meluncur dengan waktu yang minimum, tetapi *Brachistochrone* yang dimaksud dalam Tugas Akhir ini adalah *Brachistochrone* yang dimodifikasi yaitu dengan peluncuran manik-manik yang dibatasi oleh suatu konstrain sehingga pada suatu titik tertentu akan mengalami penurunan yang sangat kecil (*limited descent*) dan akhirnya berhenti. Karena dengan adanya suatu konstrain mengakibatkan perubahan pada waktu tempuh manik-manik itu. Yang mana dibatasi oleh  $b$  tertentu dan  $y(b)$  tidak spesifik (*unspecified*) tetapi  $y(x)$  dibatasi tidak kurang dari  $G$  ( $< A$ ), Dimana  $G$  adalah meluncurnya manik-manik Sehingga  $y(x) \geq G$  untuk semua  $x$  di  $[a, b]$ . Oleh karena itu  $G$  akan berhenti pada suatu titik tertentu, hal ini terlihat dalam gambar (4.4).



Gambar 4.5 Brachistochone dengan Limited Descent

Dengan diberikan persamaan

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2g(A - y)}} dx \quad (4.26)$$

dan persamaan sikloida

$$x = a + \sigma(\theta - \sin \theta), \quad y = A - \sigma(1 - \cos \theta) \quad (0 < \theta < \theta_1) \quad (4.27)$$

Dalam masalah *Brachistochrone* dengan *limited descent* ini penyelesaian sikloida dapat diselesaikan jika  $A - G$  lebih besar. Karena maksimum pada  $\theta = \pi$  terlihat pada gambar 4.4. Maka persamaan sikloida menjadi:

$$A - y = 2\sigma \quad \text{dan} \quad x - a = \pi\sigma \quad (4.28)$$

Karena manik-manik berhenti dititik  $(b, B)$  maka dari persamaan (4.28) diperoleh:

$$A - G = \frac{2(b - a)}{\pi}$$

Oleh karena itu konstrain yang menyebabkan *Brachistochrone* mengalami *limited descent* adalah

$$A - G \geq \frac{2(b - a)}{\pi} \quad (4.29)$$

Penyelesaian untuk  $\hat{y}(x)$  yang merupakan penyelesaian extremal dari  $J[y]$  untuk  $a \leq x \leq c$  dan  $\hat{y} = G$  untuk  $c \leq x \leq b$ . Dimana  $\hat{y} = G$  memberikan penyelesaian monotone menurun. Untuk menentukan titik peralihan  $c$  yang meminimize  $y$  adalah:

$$\hat{y} = \begin{cases} Y(x) & (a \leq x \leq c) \\ G & (c \leq x \leq b) \end{cases} \quad (4.30)$$

Dimana  $Y(x)$  adalah persamaan sikloida yaitu dari persamaan (4.27) dengan  $\theta_1$  dan  $\sigma$  ditentukan oleh  $y(\theta_1) = G$ ,  $x(\theta_1) = c$ . Menurut teorema (4.3.4) bahwa *optimal switch point*  $c = \hat{c}$  ditentukan oleh:

$$Y'(\hat{c}) = \varphi'(\hat{c}) = 0 \quad (4.31)$$

Karena  $\hat{F}_{,y'y'} > 0$

Dari persamaan (4.27) diturunkan terhadap  $\theta$ , didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{d\theta} = -\sigma \sin \theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = \sigma(1 - \cos \theta)$$

Dimana  $\theta = \pi$  sehingga  $\frac{dx}{d\theta} = 2\sigma$ , maka didapatkan

$$G = A - 2\sigma \text{ atau } \sigma = \frac{1}{2}(A - G)$$

dari  $y - A = 2\sigma$  dimana  $y = G$ .

Pada persamaan (4.30) kurva  $Y(x)$  dibentuk dalam parametric sebagai berikut:

$$\begin{cases} x(\theta) = a + \frac{1}{2}(A-G)(\theta - \sin \theta) \\ y(\theta) = A - \frac{1}{2}(A-G)(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad (0 < \theta < \pi) \quad (4.32)$$

Switch point dari  $c$  adalah  $\hat{c}$  diperoleh dari:

$$\hat{c} = x(\pi) = a + \frac{1}{2}(A-G)\pi \quad (4.33)$$

Waktu turunnya manik-manik  $J(\hat{y})$  dapat dihitung dengan mengintegrasi  $\hat{F}$  terhadap  $\theta$  (kecuali  $x$ ) dalam range  $[a, \hat{c}]$ :

$$J[\hat{y}] = \int_0^\pi \sqrt{\frac{(x^*)^2 + (y^*)^2}{2g(A-y)}} d\theta + \int_{\hat{c}}^b \sqrt{\frac{dx}{2g(A-G)}} \quad (4.34)$$

Dimana  $(\ )^* \equiv d(\ )/d\theta$

Dengan diketahui:

$$(x^*)^2 = \left( \frac{1}{2}(A-G)(1 - \cos \theta) \right)^2$$

$$(x^*)^2 = \frac{1}{4}(A-G)^2(1 - \cos \theta)^2$$

$$(y^*)^2 = \left( -\frac{1}{2}(A-G)(\sin \theta) \right)^2$$

$$(y^*)^2 = \frac{1}{4}(A-G)^2(\sin^2 \theta)$$

sehingga

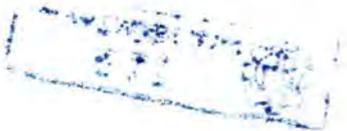
$$\begin{aligned}(x^*)^2 + (y^*)^2 &= \frac{1}{4}(A-G)^2 \{(1 - \cos \theta)^2 + (\sin^2 \theta)\} \\ &= \frac{1}{4}(A-G)^2 \{1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta\} \\ &= \frac{1}{4}(A-G)^2 (2 - 2\cos \theta) \\ &= \frac{1}{2}(A-G)^2 (1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J[\hat{y}] &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{(x^*)^2 + (y^*)^2}{2g(A-y)}} d\theta \\
&= \int_0^\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(A-G)^2(1-\cos)}{2g(A-y)}} d\theta \\
&= \int_0^\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(A-G)^2(1-\cos)}{2g\left\{A - \left(A - \frac{1}{2}(A-G)(1-\cos\theta)\right)\right\}}} d\theta \\
&= \int_0^\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(A-G)^2(1-\cos\theta)}{2g\left\{\frac{1}{2}(A-G)(1-\cos\theta)\right\}}} d\theta \\
&= \int_0^\pi \sqrt{\frac{A-G}{2g}} d\theta \\
&= \sqrt{\frac{A-G}{2g}} \{\pi - 0\} \\
&= \pi \sqrt{\frac{A-G}{2g}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J[\hat{y}] &= \int_{\hat{c}}^b \frac{dx}{\sqrt{2g(A-G)}} \\ &= \frac{b - \hat{c}}{\sqrt{2g(A-G)}} \\ &= \frac{b - \left\{ a + \frac{1}{2}(A-G)\pi \right\}}{\sqrt{2g(A-G)}} \\ &= \frac{b - a - \frac{1}{2}(A-G)\pi}{\sqrt{2g(A-G)}} \end{aligned}$$

Sehingga untuk integral

$$\begin{aligned}
 J[\hat{y}] &= \int_0^\pi \sqrt{\frac{(x^*)^2 + (y^*)^2}{2g(A-y)}} d\theta + \int_a^b \sqrt{\frac{dx}{2g(A-G)}} \\
 &= \pi \sqrt{\frac{A-G}{2g}} + \frac{b-a - \frac{1}{2}(A-G)\pi}{\sqrt{2g(A-G)}} \\
 &= \frac{\pi\sqrt{A-G}\sqrt{A-G}}{\sqrt{2g(A-G)}} + \frac{b-a - \frac{1}{2}(A-G)\pi}{\sqrt{2g(A-G)}} \\
 &= \frac{\pi(A-G) + b-a - \frac{1}{2}(A-G)\pi}{\sqrt{2g(A-G)}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\pi(A-G) + (b-a)}{\sqrt{2g(A-G)}} \\
 &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{A-G}{2g}} + \frac{b-a}{\sqrt{2g(A-G)}}
 \end{aligned}$$



#### 4.6 Penerapan Pertidaksamaan Konstrains dalam Masalah Brachistochrone

Masalah Brachistochrone dengan suatu konstrain adalah suatu masalah dimana manik-manik meluncur dari titik (1,2) berhenti pada titik  $(\pi, 0)$ . Dengan konstrain  $\sqrt{1+2a^2} < 1+a^2$  dimana  $a$  bilangan real dan  $a > 0$ . Akan diselidiki waktu turunnya manik-manik sebelum menggunakan dan sesudah digunakan konstrain yang disebutkan dalam permasalahan di atas. Akan dicari nilai dari  $G$  yaitu dimana manik-manik itu akan berhenti:

$$\begin{aligned} G &= A - \frac{2(b-a)}{\pi} \\ &= 2 - \frac{2(3.14-1)}{3.14} \\ &= 0.64 \end{aligned}$$

Selanjutnya menentukan waktu minimum yang ditempuh manik-manik sebelum menggunakan konstrain:

$$\begin{aligned} T_{\min} &= \sqrt{\pi(b-a)/g} \\ &= 0.82 \end{aligned}$$

sedangkan kalau menggunakan konstrain:

$$\begin{aligned} J[\hat{y}] &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{A-G}{2g}} + \frac{b-a}{\sqrt{2g(A-G)}} \\ &= \frac{3.14}{2} \sqrt{\frac{2-0.64}{20}} + \frac{3.14-1}{\sqrt{20(2-0.64)}} \\ &= 0.83 \end{aligned}$$

Dengan melihat perbedaan nilai yang diatas maka  $T_{\min} < J[\hat{y}]$ .

konstrain  $\sqrt{1+2a^2} < 1+a^2$  tidak berlaku jika  $a = 0$ .



Jika manik-manik berhenti pada saat  $G = 0$  untuk  $a = 0$  sehingga  $T_{\min} = 0.99$  sedangkan  $J[\hat{y}] = 0.5$ . Oleh karena itu  $T_{\min} > J[\hat{y}]$ .

Dengan diketahuinya waktu minimum ( $T_{\min}$ ) yang ditempuh manik-manik sampai berhenti sebelum menggunakan konstrain adalah  $\sqrt{\pi(b-a)/g}$ . Dimana  $T_{\min}$  independent dari posisi awal dari manik-manik. Dalam hal ini dengan bantuan konstrain  $\sqrt{1+2a^2} < 1+a^2$  dengan  $a$  bilangan real dan  $a > 0$ . Dengan adanya hal itu maka  $J[\hat{y}]$  mengurangi  $T_{\min}$  untuk  $G = A - 2(b-a)/\pi$  Turunnya manik-manik dapat dimodelkan dalam bentuk matematis yaitu  $G = A - 2(b-a)/\pi$

## **BAB V**

# **KESIMPULAN DAN SARAN**

AL-AMBIYU  
XEROX

## BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan dapat diambil suatu kesimpulan yaitu

1. Kurva yang dihasilkan dari masalah *Barchistochrone limited descent* adalah kurva 4.5 dengan konstrain

$A - G \geq \frac{2(b-a)}{\pi}$ . Setelah dianalisa waktu turunnya

manik-manik sampai berhenti yaitu

$$J[\hat{y}] = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{A-G}{2g}} + \frac{b-a}{\sqrt{2g(A-G)}}.$$

2. Perbandingan waktu tempuh manik-manik tanpa konstrain dengan menggunakan konstrain adalah  $T_{\min} < J[\hat{y}]$  dengan kostrain  $\sqrt{1+2a^2} < 1+a^2$ , sehingga  $J[\hat{y}]$  mengurangi  $T_{\min}$  untuk  $G = A - 2(b-a)/\pi$ .

### 5.2 Saran

Dalam penulisan tugas akhir ini diharapkan semakin banyak orang tertarik pada kalkulus variasi. Untuk selanjutnya dalam penulisan tugas akhir diharapkan lebih baik dan lebih luas lagi tentang masalah yang dibahas dalam kalkulus variasi. Khususnya pada masalah *Brachistochrone* yang lain.

The background of the page is a repeating pattern of the ITS logo and the text 'ITS Institut Teknologi Sepuluh Nopember' in a light blue color. The logo consists of a circular emblem with a stylized figure inside, surrounded by the acronym 'ITS' and the full name of the institution.

# DAFTAR PUSTAKA

AL-AMUDY  
XEROX

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Andrej. C., dan Elena C. 2003. **Calculus Of Variations And Application Lecture Notes Draft.**
- [2] Gelfand. I. M., dan Fomin. S. V. 2000. **Calculus of Variations.** Dover Publications, Inc. Mineola, New York.
- [3] Kusumawati. I. 2005. **Penyelesaian Masalah Brachistochrone yang Didasari Optika Geometri.** Tugas Akhir. Jurusan Matematika ITS.
- [4] Pipes. A. L., dan Lawrence R. H. 1991. **Matematika Terapan untuk Para Insinyur dan Fisikawan Jilid 2.** Gadjah Mada University Press.
- [5] Soehardjo. 1996. **Matematika IV.** Jurusan Matematika Fmipa ITS.
- [6] Wan. Frederick. Y. M. 1995. **Introduction To The Calculus Of Variation And Its Application.** Chamann & Hall. New York.
- [7] Weinstock. R. 1974. **Calculus Of Variation With Applications to Physics And Engineering.** Dover Publications, Inc. New York.

## **BIODATA PENULIS**



Penulis dilahirkan di Magetan, 17 Nopember 1983, merupakan anak pertama dari 1 bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu di TK Dharma Wanita Kiringan I, SD Negeri Kiringan I, SLTP Negeri 2 Takeran dan SMU Negeri 1 Madiun. Setelah lulus dari SMU Negeri 1 Madiun tahun 2003, Penulis mengikuti ujian masuk perguruan tinggi yang diselenggarakan oleh ITS dan diterima di Jurusan Matematika FMIPA-ITS pada tahun 2003 dan terdaftar dengan NRP.1203 109 014.

Di Jurusan Matematika ini Penulis mengambil Bidang Minat Riset Operasi dan Simulasi. Penulis sempat aktif di beberapa kegiatan baik yang diselenggarakan oleh Jurusan maupun Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA).