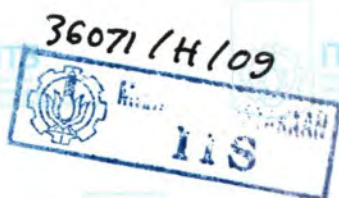




**ITS**  
Institut  
Teknologi  
Sepuluh Nopember



RSMA  
515.35  
Wul  
a-1  
2009

**TUGAS AKHIR - SM 1330**

**ANALISA STABILITAS MODEL PREDATOR-PREY  
DI DALAM KEMOSTAT DENGAN FUNGSI  
RESPON UMUM**

**NURLITA CATUR WULANDHANI**  
NRP. 1204 100 054

**Dosen Pembimbing**  
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si.

PERPUSKRAA ITS	
Tgl. terima	10-8-2009
crima Dari	H
No. Induk	609

**JURUSAN MATEMATIKA**  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2009



**ITS**

Institut  
Teknologi  
Sepuluh Nopember

**FINAL PROJECT - SM 1330**

# **STABILITY ANALYSIS OF PREDATOR-PREY MODEL IN A CHEMOSTAT WITH GENERAL RESPONSE FUNCTION**

**NURLITA CATUR WULANDHANI**  
NRP. 1204 100 054

Supervisor  
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si.

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS**  
Faculty of Mathematics and Natural Science  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya 2009

# LEMBAR PENGESAHAN

## ANALISA STABILITAS MODEL *PREDATOR-PREY* DI DALAM KEMOSTAT DENGAN FUNGSI RESPON UMUM

### TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada  
Bidang Studi Analisis Terapan  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

**NURLITA CATUR WULANDHANI**  
**NRP. 1204 100 054**

Disetujui oleh Pembimbing Tugas Akhir:

**Drs. M. Setijo Winarko, M.Sc.**  
**NIP 131 879 385**



**SURABAYA**  
**MEI, 2009**

## **ANALISA STABILITAS MODEL *PREDATOR-PREY* DI DALAM KEMOSTAT DENGAN FUNGSI RESPON UMUM**

**Nama Mahasiswa** : Nurlita Catur Wulandhani  
**NRP** : 1204100054  
**Jurusan** : Matematika ITS  
**Dosen Pembimbing** : Drs. M. Setijo Winarko, M. Si.

### **ABSTRAK**

Ruang pertumbuhan dalam kemostat memungkinkan terjadinya interaksi mangsa-pemangsa yang bisa dimodelkan secara matematis. Dengan adanya laju perpindahan dan fungsi respon dalam model matematis yang digambarkan, maka mengakibatkan sistem tidak konservatif (tidak memenuhi hukum kekekalan energi). Sehingga untuk mengetahui stabilitas sistem, dilakukan melalui dua tahapan yaitu stabilitas lokal terlebih dahulu kemudian stabilitas global. Dalam menganalisa stabilitas lokal digunakan kriteria Routh-Hurwitz, dan stabilitas global dengan kondisi steady state yang bebas dari predator melalui konstruksi fungsi Liapunov. Analisa persistensi melengkapi analisa stabilitas yang dilakukan terhadap model interaksi mangsa pemangsa di dalam kemostat dengan fungsi respon umum, sehingga bisa diidentifikasi kesetimbangan sistem dalam keadaan sebenarnya.

***Kata kunci: kemostat, mangsa-pemangsa, stabilitas.***

**STABILITY ANALYSIS OF PREDATOR-PREY MODEL  
IN A CHEMOSTAT WITH GENERAL RESPONSE  
FUNCTION**

**Name** : Nurlita Catur Wulandhani  
**NRP** : 1204 100 054  
**Department** : Mathematics ITS  
**Supervisor** : Drs. M. Setijo Winarko, M. Si.

**ABSTRACT**

Growth medium in a chemostat enabling predator-prey interaction which can be modeled mathematically. With a removal rates and response functions of used mathematical model, it caused unconservative system. To know its stability, hence divided on two parts such as local stability then global stability. Local stability of steady states is studied by using Routh-Hurwitz criterion, and used constructing of Lyapunov function in the study of global stability, include predator-free steady state. Persistence analysis completed stability analysis of predator-prey model in a chemostat with general response functions, so could identify system balancelly state in fact.

*Keyword: chemostat, predator-prey, stability.*

## KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Alloh SWT, Sang Pencipta dan Pengatur,serta Maha Pengampun segala dosa, yang telah ridlo memberikan berbagai kemudahan bagi penulis dari awal hingga akhir terselesaikannya Tugas Akhir yang berjudul "**Analisa Stabilitas Model Predator-Prey Di Dalam Kemostat Dengan Fungsi Respon Umum**". Teriring sholawat dan salam untuk Nabi Muhammad SAW dan para shohabat, sebagai pembawa dan pejuang risalah Islam yang menjadi cahaya kehidupan bagi seluruh umat manusia melalui penegakkan syariah dan daulah yang menaungi berkembangnya *tsaqofah* dan ilmu pengetahuan umat muslim.

Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat dalam menempuh program SI-Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya guna mendapat gelar Sarjana Sains. Dalam proses penyusunan Tugas Akhir ini, tidak lepas dari partisipasi berbagai pihak yang telah banyak membantu. Oleh karenanya, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Ayah, Siran Dinata, dan Ibu, Samiarti, S. Pd, tercinta, serta kakak-kakakku tersayang, khususnya Nurlina Tri Apsari, S.KM, yang setia menjadi *driver*, motivator dan memberikan bantuan moral, materi, mental serta spiritual yang berkesinambungan,
2. Bapak Prof. DR. Basuki Widodo, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika ITS beserta seluruh dosen dan karyawan Jurusan Matematika ITS,
3. Bapak Drs. M. Setijo Winarko, M. Si. selaku dosen pembimbing, yang telah begitu sabar meluangkan waktunya dan memberikan banyak arahan selama tahap bimbingan,
4. Ibu Dra. Nur Asiyah, M. Si, Ibu Rinurwati, M. Si, Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M. Si selaku dosen penguji Tugas Akhir ini,



5. Ibu Dra. Mardijah, M. Si selaku dosen wali yang begitu banyak memberi perhatian dari semester awal hingga akhir.

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan dan membutuhkan kritik dan saran guna perbaikan di masa depan. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi pembaca dan mampu memberikan sedikit kontribusi dalam perkembangan *tsaqofah* Islam menyongsong tegaknya *Daulah Khilafah Islam*. Amin.

Surabaya, Mei 2009

Penulis

## DAFTAR ISI

	Halaman
JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN.....	iii
ABSTRAK.....	iv
KATA PENGANTAR.....	vi
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR GAMBAR.....	x
DAFTAR NOTASI.....	xi
BAB I PANDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Perumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan .....	2
1.5 Manfaat .....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Kemostat .....	5
2.2 Penelitian Sistem <i>Predator-Prey</i> .....	7
2.3 Keujudan dan Ketunggalan Penyelesaian .....	10
2.4 Titik Keseimbangan dan Kestabilan.....	
2.4.1 Titik Keseimbangan .....	12
2.4.2 Kestabilan .....	13
2.5 Linearisasi.....	13
2.6 Akar-akar Karakteristik .....	14
2.7 Kriteria Routh-Hurwitz .....	18
2.8 Fungsi Liapunov .....	19
2.9 Persistensi .....	24
BAB III METODOLOGI	
3.1 Langkah Pengerjaan.....	27
3.2 Diagram Alir Penelitian.....	28



BAB IV	PEMBAHASAN	
4.1	Model Interaksi <i>Predator-Prey</i> .....	31
4.2	Sifat Penyelesaian Sistem.....	33
4.3	Titik Kesetimbangan.....	34
4.4	Analisa Stabilitas Sistem .....	
	4.4.1 Stabilitas Lokal.....	36
	4.4.2 Stabilitas Global .....	41
4.5	Persistensi Sistem .....	44
BAB V	KESIMPULAN DAN SARAN	
5.1	Kesimpulan.....	47
5.2	Saran.....	48
DAFTAR PUSTAKA.....		50

## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Bagan Kemostat .....	6
Gambar 2.2 Pengaruh $p =  \mathbf{J} $ , $s = \text{Tr } \mathbf{J}$ , dan $s^2 - 4p = \Delta$ Terhadap Stabilitas.....	18
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian.....	29

## DAFTAR SIMBOL

Notasi	Nama
$x$	Konsentrasi <i>prey</i> (mangsa)
$y$	Konsentrasi <i>predator</i> (pemangsa)
$s$	Konsentrasi nutrisi
$\varepsilon_1$	Laju kematian <i>prey</i>
$\varepsilon_2$	Laju kematian <i>predator</i>
$\gamma_1$	Konstanta pembanding laju pertumbuhan <i>prey</i> terhadap nutrisi
$\gamma_2$	Konstanta pembanding laju pertumbuhan <i>predator</i> terhadap nutrisi
$\gamma_3$	Konstanta pembanding laju pertumbuhan <i>predator</i> terhadap <i>prey</i>
$F_1$	Fungsi laju pertumbuhan <i>prey</i> terhadap nutrisi
$F_2$	Fungsi laju pertumbuhan <i>predator</i> terhadap nutrisi
$F_3$	Fungsi laju pertumbuhan <i>predator</i> terhadap <i>prey</i>
$D$	Laju aliran fluida yang keluar masuk sistem
$D_1$	Laju aliran fluida yang menghanyutkan <i>prey</i>
$D_2$	Laju aliran fluida yang menghanyutkan <i>predator</i>
$f_1$	Laju pertumbuhan <i>prey</i> terhadap nutrisi setelah dilalui aliran fluida sistem
$f_2$	Laju pertumbuhan <i>predator</i> terhadap nutrisi setelah dilalui aliran fluida sistem
$f_3$	Laju pertumbuhan <i>predator</i> terhadap <i>prey</i> setelah dilalui aliran fluida sistem
$s^\circ$	Konsentrasi input nutrisi
$\lambda_s$	Penyelesaian tunggal dari $f_1(s) = D_1$
$\lambda_x$	Penyelesaian tunggal dari $f_2(s) + f_3(x) = D_2$

$s^*$	Penyelesaian tunggal dari $f_2(s) + f_3(x) = D_2$
$E_1$	Titik setimbang ke-satu
$E_2$	Titik setimbang ke-dua
$E_c$	Titik setimbang ke-tiga
<b>J</b>	Matriks Jacobian
$R_+$	Himpunan bilangan real positif
$C$	Fungsi diferensiabel kontinu
$V$	Fungsi Liapunov
$\phi$	Himpunan domain $V$
$M$	Subset invarian terbesar
$R^3$	Himpunan ruang tiga dimensi
<b>J</b> ( $E_1$ )	Matriks Jacobian pada titik $E_1$
<b>J</b> ( $E_2$ )	Matriks Jacobian pada titik $E_2$
<b>J</b> ( $E_c$ )	Matriks Jacobian pada titik $E_c$

*"Kenabian akan terjadi di tengah kalian seperti yang dikehendaki Alloh. Kemudian Alloh akan menghapusnya jika menghendaki menghapus. Kemudian akan ada **khilafah** di atas manhaj nubuwah, lalu **khilafah** itu menjadi seperti yang dikehendaki Alloh. Kemudian Alloh menghapusnya jika menghendaki menghapus." Kemudian akan ada kerajaan yang memegang teguh (Islam), lalu kerajaan itu menjadi seperti yang dikehendaki Alloh. Kemudian Alloh menghapusnya jika menghendaki menghapus. Kemudian akan ada kerajaan diktator, lalu kerajaan itu menjadi seperti yang dikehendaki Alloh. Kemudian Alloh menghapusnya jika menghendaki menghapus. Kemudian **khilafah** akan terjadi ( lagi) di atas manhaj nubuwah."*

[HR. Ahmad dan Al Bazar]

## BAB I

# PENDAHULUAN

# BAB I PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tak diketahui. Persamaan diferensial sering digunakan untuk membangun model matematik yang menggambarkan kehidupan nyata. Sebagai contoh, turunan dalam Fisika muncul sebagai kecepatan dan percepatan, dalam Biologi sebagai laju pertumbuhan populasi, dalam Kimia sebagai laju reaksi kimia, dan dalam Ekonomi sebagai laju perubahan biaya hidup.

Setelah model matematik tersusun dalam bentuk persamaan diferensial, langkah selanjutnya ialah menyelesaikan persamaan diferensial untuk menganalisa perilaku masalah yang sebenarnya, termasuk analisa stabilitas, yaitu analisa untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan untuk waktu  $t$  yang besar.

Salah satu aplikasi persamaan diferensial adalah model sistem interaksi *predator-prey* yang ada dalam kemostat. Kemostat (*chemostat; chemical environment is static*) adalah mekanisme yang digunakan untuk mengontrol pertumbuhan mikroorganisme [15]. Kemostat merupakan aplikasi dalam bidang Kimia yang didalamnya mengandung interaksi *predator-prey* dan dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial.

Analisa akan lebih mudah dilakukan jika sistem berada dalam kondisi statis. Pada suatu waktu tertentu stabilitas sistem dapat dicari lewat titik kesetimbangannya secara langsung. Namun jika sistem berada dalam kondisi dinamis, seperti adanya fungsi respon balik dan laju perpindahan yang kontinu, maka ini akan menyebabkan perubahan sistem, sehingga untuk bisa menganalisa kestabilannya dibutuhkan metode yang khusus.

Beberapa *paper* yang telah mengulas analisa kualitatif dari sistem interaksi *predator-prey* dalam kemostat

adalah Bingtuan Li dan Yang Kuang [9], serta Hassan M. El-Owaidy dan Ashraf A. Moniem [5]. Pada Tugas Akhir ini, dilakukan analisa stabilitas sistem, dan persistensi dari sistem interaksi *predator-prey* yang terjadi dalam kemostat.

## 1.2 Rumusan Permasalahan

Pada Tugas Akhir ini, dianalisa sistem persamaan diferensial yang menggambarkan suatu rantai makanan dalam kemostat berupa satu *predator* dan satu *prey* serta adanya nutrisi, dengan *predator* mengkonsumsi *prey* dan nutrisi, sedangkan *prey* mengkonsumsi nutrisi.

Dari uraian pada latar belakang di atas maka dapat dirumuskan permasalahan pada Tugas Akhir ini adalah

- a. Bagaimana sifat-sifat penyelesaian dari sistem
- b. Bagaimana eksistensi dan kestabilan setiap titik kesetimbangan dari sistem, dan
- c. Apakah sistem persisten

## 1.3 Batasan Masalah

Dalam Tugas Akhir ini diberi batasan masalah parameter yang mempengaruhi sistem sebenarnya, seperti volume ruang pertumbuhan, kapasitas oksigen yang terbuang, konsentrasi bahan gizi, pH, dan kepadatan sel yang dianggap konstan serta tidak berpengaruh dalam sistem.

## 1.4 Tujuan

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Menunjukkan sifat-sifat penyelesaian sistem
2. Mengetahui keberadaan dan stabilitas titik kesetimbangan dari sistem
3. Mendapatkan persistensi dari model sistem.

## 1.5 Manfaat

Manfaat yang diperoleh setelah diselesaikannya Tugas Akhir ini adalah hasil-hasil analisa berlaku untuk semua fungsi respon, mengingat bentuknya yang umum dan lebih luas dari model-model yang telah dibahas sebelumnya.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Penyusunan tugas akhir dapat diringkas berdasarkan sistematika penulisan sebagai berikut :

- BAB I : PENDAHULUAN  
 Pada bab pertama berisi latar belakang pembahasan materi pokok tugas akhir ini, rumusan masalah yang akan dibahas, tujuan dari pembahasan masalah, dan manfaat yang dapat diperoleh, serta sistematika penulisan tugas akhir.
- BAB II : TINJAUAN PUSTAKA  
 Di dalamnya berisi uraian tentang hal-hal yang melandasi pembahasan masalah dan teori-teori yang akan digunakan sebagai pedoman untuk menyelesaikan permasalahan yang dibahas, meliputi kemostat, penelitian sistem *predator-prey*, keujudan dan ketunggalan penyelesaian, titik kesetimbangan, kestabilan, akar-akar karakteristik, linearisasi, kriteria Routh-Hurwitz, dan fungsi Liapunov.
- BAB III : METODOLOGI  
 Bab ini memuat tahapan pengerjaan yang dilakukan dalam penyusunan tugas akhir dan diringkas dalam bentuk diagram alir.
- BAB IV : ANALISA DAN PEMBAHASAN  
 Pada bab ini seluruh proses pembahasan masalah diuraikan dengan terlebih dahulu



mentransformasi sistem yang akan dipelajari, kemudian menyelidiki sifat penyelesaian sistem, menentukan titik kesetimbangan sistem dan eksistensinya. Setelah itu beranjak pada analisa stabilitas sistem yang terbagi menjadi dua yaitu lokal dan global, serta terakhir mencari persistensi sistem.

**BAB V : KESIMPULAN DAN SARAN**

Bab yang terakhir berisi kesimpulan sebagai jawaban dari rumusan permasalahan yang diajukan, dan saran untuk pengembangan tugas akhir dengan pokok permasalahan yang berbeda di masa yang akan datang.

*"Dan hendaklah ada di antara kamu segolongan umat yang menyeru kepada kebajikan, menyuruh kepada yang ma'ruf dan mencegah dari yang mungkar. Mereka itulah orang-orang yang beruntung."*

[TQS. Al-Imron:104]

## BAB II

# TINJAUAN PUSTAKA

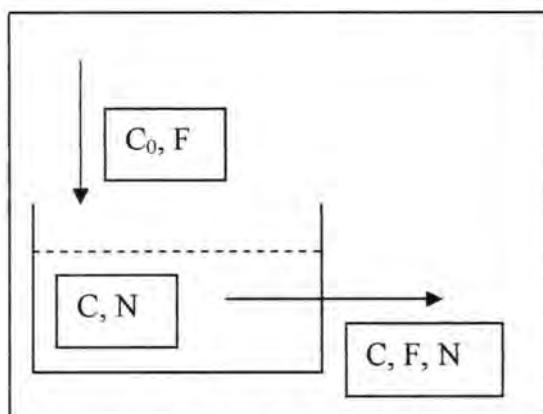
## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Di dalam bab ini diuraikan tentang hal-hal yang berkaitan dengan kemostat, model interaksi *predator-prey*, titik-titik kesetimbangan sistem, linearisasi sistem non linear, akar-akar karakteristik, dan stabilitas serta teori-teori yang menunjang pembahasan analisa stabilitas model *predator-prey* di dalam kemostat.

### 2.1 Kemostat

Kemostat (*chemostat; chemical environment is static*) adalah suatu kultur organisme dengan mekanisme tertentu yang digunakan dalam mikrobiologi untuk memantau laju pertumbuhan mikroba. Kemostat terdiri dari dua bagian utama, yaitu reservoir nutrisi yang steril dan proses pertumbuhan yang terjadi dalam ruang yang digunakan. Medium yang steril diberikan nutrisi agar menjadi ruang pertumbuhan, kemudian lajunya selalu dikontrol. Pengendalian nutrisi merupakan faktor yang penting bagi pertumbuhan organisme dalam medium hingga mencapai konsentrasi tertentu, sehingga terjadi keseimbangan pertumbuhan organisme dalam mengkonsumsi nutrisi sampai pada suatu tingkat laju (G. David Tilman, [15]).

Bagan di bawah ini menggambarkan masukan dan keluaran dalam kemostat. Nutrisi yang ada di dalam reaktor sejumlah  $N$  dengan konsentrasi  $C$  dialiri fluida dengan laju  $F$  dan konsentrasi  $C_0$ , menyebabkan terjadi proses pertumbuhan organisme, seperti bakteri, dan nutrisi yang hanyut akan keluar bersama dengan fluida dengan jumlah, konsentrasi dan laju tertentu.



Gambar 2.1 Bagan kemostat [14]

Dalam kemostat sederhana, digunakan medium berupa fluida yang aliran keluar masuknya konstan sehingga volume didalam kemostat konstan. Model sederhana dalam kemostat digambarkan sebagai berikut: [11] Misal  $S$  adalah konsentrasi nutrisi,  $x$  adalah konsentrasi mikroorganismenya, dan  $r(S)$  adalah laju konsentrasi konsumsi nutrisi oleh mikroorganismenya. Fungsi respon umum yang pertama kali diperkenalkan oleh Monod pada tahun 1950 dan biasa digunakan adalah

$$r(S) = \frac{mS}{a + S}$$

dengan  $m > 0$  dan  $a > 0$ ,  $r(0) = 0$ , serta  $r(S)$  mendekati nilai limit  $m$  untuk  $S$  menuju tak hingga. Jika  $S^{(0)}$  adalah konsentrasi nutrisi yang masuk dalam sistem, maka persamaan diferensial yang menggambarkan interaksi nutrisi dengan mikroorganismenya adalah

$$\dot{S} = (S^{(0)} - S)D - \frac{\beta m S x}{a + S}$$

$$\dot{x} = \frac{m S x}{a + S} - D x$$

dengan  $D$  adalah konstanta laju aliran fluida yang keluar masuk sistem. Sehingga dari persamaan turunan  $S$  menggambarkan perubahan konsentrasi nutrisi setelah dilalui aliran fluida yang

dikurangi oleh konsentrasi nutrisi dan mikroorganisme dari hasil adanya fungsi respon. Demikian juga dari persamaan turunan  $x$  tampak konsentrasi nutrisi dan mikroorganisme dengan adanya fungsi respon yang dikurangi dengan konsentrasi mikroorganisme yang hanyut bersama dengan laju aliran fluida. Misal diasumsikan semua parameter bernilai positif dan  $m > D$ , maka laju  $r(S)$  untuk nilai  $S$  besar menghasilkan konsentrasi yang lebih banyak daripada yang hanyut oleh laju perpindahan aliran fluida yang keluar sistem.

Analisa secara kualitatif (menggunakan pendekatan sistem dinamik) digunakan untuk mengetahui titik kesetimbangannya, kestabilannya, mencari apakah ada *limit cycle* (trayektori tertutup). Kemudian dapat dikembangkan berbagai macam bentuk interaksi dengan model yang berbeda, termasuk salah satunya yang dibahas dalam tugas akhir ini.

## 2.2 Penelitian Sistem Predator-Prey [10]

Dari interaksi dua populasi dapat dibangun kompetisi secara langsung antara dua spesies, dengan bentuk persamaan umum

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1(r_1 + a_{11}N_1 + a_{12}N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2(r_2 + a_{21}N_1 + a_{22}N_2)\end{aligned}\quad \dots(2.1)$$

untuk  $r_1 > 0, r_2 > 0$

*Predator-prey* merupakan salah satu bentuk interaksi dua populasi yang masuk dalam model predasi. Model ini diperkenalkan pertama kali oleh Lotka (1925) kemudian dibahas lebih mendalam oleh Volterra (1926) dengan model sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1(r_1 - b_1N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2(-r_2 + b_2N_1)\end{aligned}\quad \dots(2.2)$$

dengan :  $N_1(t)$  = konsentrasi *prey* (mangsa) pada waktu  $t$   
 $N_2(t)$  = konsentrasi *predator* (pemangsa) pada waktu  $t$   
 $r_1$  = laju pertumbuhan *prey* (mangsa)  
 $r_2$  = laju kematian *predator* (pemangsa)

Untuk mencegah pertumbuhan mangsa yang berlebihan akibat kematian pemangsa, maka ditambahkan interaksi spesies yang sama,  $-cN_1^2$  dalam persamaan mangsa. Sedangkan laju kelahiran pemangsa diabaikan karena laju kematiannya dominan, sehingga menurut Volterra (1931) persamaannya adalah

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1(r_1 - cN_1 - b_1N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2(-r_2 + b_2N_1)\end{aligned}\quad \dots(2.3)$$

Model diatas dirumuskan kembali dalam bentuk umum oleh Kolmogorov (1936), kemudian dari sini mendapatkan banyak pengembangan, diantaranya oleh Kimura (1953) dengan memperhatikan penyebaran populasi, dan oleh Leslie dan Gower (1960), dirumuskan

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1(r_1 - b_1N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2\left[r_2 - b_2\left(\frac{N_2}{N_1}\right)\right]\end{aligned}\quad \dots(2.4)$$

dengan laju kematian pemangsa tergantung dari ukuran relatif dari dua populasi.

Holling (1965) menyertakan fungsi respon dari pemangsa, dan juga ada model untuk *prey-cover* dengan menambahkan kasus adanya  $k$  mangsa yang tidak dapat dimakan pemangsa, sehingga pemangsa hanya bisa memakan  $N_1 - k$  mangsa dengan bentuk model

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= r_1N_1 - b_1N_2(N_1 - k) \\ \frac{dN_2}{dt} &= -r_2N_2 + b_2N_2(N_1 - k)\end{aligned}\quad \dots(2.5)$$

Pengembangan terus dilakukan dan beberapa diantaranya sudah pernah dibahas dalam Tugas Akhir yang telah lalu, diantaranya model mangsa-pemangsa dengan dipengaruhi fungsi *feedback* u [7] dalam bentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(b - ax - \frac{\alpha y}{1 + \beta x}) - u_1 \\ \frac{dy}{dt} &= y(-d + \frac{c\alpha x}{1 + \beta x} - ey) - u_2\end{aligned}\quad \dots(2.6)$$

dengan:

- $x$  = jumlah mangsa
- $y$  = jumlah pemangsa
- $a$  = konstanta yang menyatakan tingkat persaingan populasi mangsa dengan mangsa
- $b$  = laju kelahiran per kapita populasi prey
- $c$  = konstanta proporsi ( $0 < c < 1$ )
- $d$  = laju kematian per kapita populasi pemangsa
- $e$  = konstanta yang menyatakan tingkat persaingan populasi pemangsa dengan pemangsa
- $\alpha$  = nilai besar kecilnya pemangsaan mangsa oleh pemangsa
- $\beta$  = tingkat kejenuhan pemangsaan mangsa oleh pemangsa
- $u_1$  = kontrol umpan balik mangsa
- $u_2$  = kontrol umpan balik pemangsa

Serta model mangsa-pemangsa dengan adanya eksploitasi mangsa adalah [13]

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= q - y - \frac{BS}{z + hS} - \frac{S}{a} \\ \frac{dB}{dt} &= rB(1 - \frac{z + hS}{kS})\end{aligned}\quad \dots(2.7)$$

dengan:

- $S$  = jumlah mangsa
- $B$  = jumlah pemangsa
- $q$  = jumlah mangsa baru per satuan waktu
- $y$  = laju eksploitasi mangsa yang dilakukan manusia

- $z$  = koefisien waktu pencarian  
 $h$  = waktu pengendalian  
 $a$  = rata-rata umur mangsa per tahun  
 $r$  = laju kelahiran pemangsa  
 $k$  = kapasitas pendukung dari lingkungan terhadap spesies predator

Sedangkan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah interaksi mangsa-pemangsa dalam lingkup kemosat yang dipengaruhi fungsi respon dan perubahan laju perpindahan.

### 2.3 Keujudan dan Ketunggalan Penyelesaian

Sebelum lebih jauh melakukan analisa stabilitas, maka terlebih dahulu diperiksa keujudan dan ketunggalan penyelesaian sistem. Misalkan terdapat dua fungsi berbentuk:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2)\end{aligned}\quad \dots(2.8)$$

yang memenuhi syarat awal

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0 \quad \dots(2.9)$$

Berdasarkan Teorema Keujudan dan Ketunggalan, maka suatu penyelesaian dikatakan ujud dan tunggal setelah memenuhi kondisi Lipschitz sebagaimana yang dijelaskan dalam definisi dan teorema berikut.

#### Definisi 2.1 [6]

Misalkan  $f(t, x_1, x_2)$  suatu fungsi yang didefinisikan di dalam suatu daerah  $\mathfrak{R}$  dari ruang

Euclides  $R^3$  yang berdimensi tiga. Dapat dikatakan bahwa  $f(t, x_1, x_2)$  memenuhi syarat Lipschitz (menurut  $x_1$  dan  $x_2$ ) dalam  $\mathfrak{R}$  jika ada konstanta  $L_1$  dan  $L_2$ , sedemikian hingga

$$|f(t, x_1, x_2) - f(t, y_1, y_2)| \leq L_1|x_1 - y_1| + L_2|x_2 - y_2|$$

untuk semua titik  $(t, x_1, x_2)$ ,  $(t, y_1, y_2)$  di dalam  $\mathfrak{R}$  (region).

Konstanta  $L_1$  dan  $L_2$  disebut konstanta Lipschitz. Bila turunan



parsial  $\partial f/\partial x_1$  dan  $\partial f/\partial x_2$  ada dan kontinu, maka  $f$  memenuhi syarat Lipschitz.

Dimana dengan  $f$  memiliki turunan parsial  $\partial f/\partial x_1$  dan  $\partial f/\partial x_2$  yang bersifat terbatas untuk semua titik  $(t, x_1, x_2)$  di dalam  $\mathfrak{R}$  (region). Kemudian untuk sebarang  $(t, x_1, x_2), (t, y_1, y_2) \in \mathfrak{R}$ , terdapat  $\xi_1$  dan  $\xi_2$ , dengan  $\xi_1$  berada di antara  $x_1$  dan  $y_1$  serta  $\xi_2$  berada di antara  $x_2$  dan  $y_2$ , sedemikian hingga

$$f(t, x_1, x_2) - f(t, y_1, y_2) = (x_1 - y_1) \frac{\partial f(t, \xi_1, x_2)}{\partial x_1} + (x_2 - y_2) \frac{\partial f(t, x_1, \xi_2)}{\partial x_2}$$

mengakibatkan

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, x_2) - f(t, y_1, y_2)| &= |x_1 - y_1| \left| \frac{\partial f(t, \xi_1, x_2)}{\partial x_1} \right| + |x_2 - y_2| \left| \frac{\partial f(t, x_1, \xi_2)}{\partial x_2} \right| \\ &\leq L_1 |x_1 - y_1| + L_2 |x_2 - y_2| \end{aligned}$$

dengan  $(t, \xi_1, x_2), (t, x_1, \xi_2) \in \mathfrak{R}$ . Sehingga dapat dikatakan  $f$  memenuhi kondisi Lipschitz.

### **Teorema 2.1** [6]

Misalkan tiap-tiap fungsi  $f_1(t, x_1, x_2)$  dan  $f_2(t, x_1, x_2)$  kontinu dan memenuhi syarat Lipschitz (menurut  $x_1$  dan  $x_2$ ) di dalam daerah

$$\mathfrak{R} = \left\{ (t, x_1, x_2) : \begin{array}{l} |t - t_0| \leq A \\ |x_1 - x_1^0| \leq B \\ |x_2 - x_2^0| \leq C \end{array} \right\}. \quad \dots(2.10)$$

Maka masalah nilai awal (2.8)-(2.9) mempunyai penyelesaian tunggal yang terdefinisi di dalam suatu selang  $a < t < b$  di sekitar titik  $t_0$ .

## 2.4 Titik Kesetimbangan dan Kestabilan

### 2.4.1 Titik Kesetimbangan

Pada bagian ini akan dibahas sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y) \quad \dots(2.11)$$

dengan fungsi-fungsi  $f$  dan  $g$  tidak memuat parameter waktu,  $t$ , disebut sistem otonomus [6]. Titik  $(\bar{x}, \bar{y})$  disebut titik kesetimbangan (atau titik kritis, dan dikenal juga dengan titik tetap) dari Sistem (2.11) jika

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad g(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, akibatnya jika titik  $(\bar{x}, \bar{y})$  merupakan titik setimbang dari (2.11), maka sepasang fungsi konstan

$$x(t) \equiv \bar{x}, \quad y(t) \equiv \bar{y} \quad \dots(2.12)$$

merupakan penyelesaian dari (2.11) untuk semua waktu  $t$ .

Sehingga berlaku untuk Sistem Persamaan Diferensial (2.11), misalkan fungsi  $f$  dan  $g$  kontinu dan memenuhi syarat Lipschitz (menurut  $x$  dan  $y$ ) di dalam suatu daerah dari bidang  $xy$ . Maka menurut Teorema 2.1, jika  $(\bar{x}, \bar{y})$  sebarang titik di  $\mathcal{R}$  (*region*) dan jika  $t_0$  sebarang bilangan riil, ada suatu penyelesaian tunggal

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

dari Sistem (2.11), yang terdefinisi di dalam suatu selang  $a < t < b$  yang memuat  $t_0$  dan memenuhi syarat awal

$$x(t_0) = x^0, \quad y(t_0) = y^0. \quad \dots(2.13)$$

Jelas bahwa penyelesaian (2.13) menentukan sebuah kurva di ruang tiga dimensi  $t, x, y$ . Kurva tersebut disebut trayektori atau orbit dari penyelesaian (2.13) di bidang  $xy$ . Pasangan  $(x, y)$  disebut fase dari sistem dan bidang  $xy$  disebut bidang fase [6].

## 2.4.2 Kestabilan

Setelah mendapatkan titik kesetimbangan, maka dengan memperhatikan Persamaan (2.11), kestabilan titik kesetimbangan dari Sistem (2.11) didefinisikan sebagai berikut:

### Definisi 2.3 [6]

Titik kesetimbangan  $(\bar{x}, \bar{y})$  dari Sistem (2.11) disebut stabil jika untuk setiap bilangan

$\varepsilon > 0$  ada suatu  $\delta > 0$  sedemikian hingga setiap penyelesaian  $(x(t), y(t))$  dari (2.11) yang pada  $t = 0$ , memenuhi  $[x(0) - \bar{x}]^2 + [y(0) - \bar{y}]^2 < \delta$ , berakibat  $[x(t) - \bar{x}]^2 + [y(t) - \bar{y}]^2 < \varepsilon$ .

### Definisi 2.4 [6]

Sebuah titik kesetimbangan  $(\bar{x}, \bar{y})$  atau penyelesaian konstan (2.12) disebut stabil asimtotis jika titik itu stabil dan terdapat tambahan  $\delta_0$  sedemikian hingga setiap penyelesaian  $(x(t), y(t))$  dari (2.11) yang pada  $t = 0$  memenuhi

$$[x(0) - \bar{x}]^2 + [y(0) - \bar{y}]^2 < \delta_0 \quad \dots(2.14)$$

ujud untuk semua  $t \geq 0$  dan memenuhi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}, \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y} \quad \dots(2.15)$$

### Definisi 2.5 [6]

Sebuah titik yang tidak stabil disebut tak stabil.

## 2.5 Linearisasi

Perhatikan kembali Sistem (2.11) dengan titik kesetimbangan  $(\bar{x}, \bar{y})$  dimana

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad g(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Dengan menggunakan deret Taylor di sekitar  $x = \bar{x}$  dan  $y = \bar{y}$ , maka Sistem (2.11) dapat ditulis



$$\dot{x} = f(\bar{x}, \bar{y}) + (x - \bar{x}) \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + (y - \bar{y}) \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2 \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x^2} + \dots$$

$$\dot{y} = g(\bar{x}, \bar{y}) + (x - \bar{x}) \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + (y - \bar{y}) \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^2 \frac{\partial^2 g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x^2} + \dots$$

misalkan :  $x - \bar{x} = u$  dan  $y - \bar{y} = v$ . Karena  $\dot{x} = \dot{u}$  dan  $\dot{y} = \dot{v}$ , maka linearisasi dari Sistem (2.11) adalah

$$\dot{u} = u \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + v \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \quad \dots(2.16)$$

$$\dot{v} = u \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} + v \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}$$

jika :  $a = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}$ ,  $b = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}$ ,  $c = \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x}$ , dan  $d = \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y}$

maka dalam bentuk matriks ditulis

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \\ \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Dalam hal ini  $\begin{pmatrix} \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \\ \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \end{pmatrix}$  disebut matriks

Jacobian yang dihitung di titik  $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$

## 2.6 Akar – akar Karakteristik

Jika diketahui matriks Jacobian dari suatu sistem adalah

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \\ \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \end{pmatrix}$$

maka dengan menyelesaikan  $|\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ , didapatkan akar-akar karakteristik  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ . Sistem Persamaan (2.16) mempunyai

titik setimbang (titik tetap) tunggal  $(0, 0)$  jika  $ad - bc \neq 0$ . Akar-akar karakteristik digunakan untuk mengetahui stabilitas titik kesetimbangan  $(0, 0)$ . Jika  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah akar-akar karakteristik yang diperoleh dari:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} \quad \dots(2.17)$$

dan karena  $a+d = \text{Tr } \mathbf{J}$  serta  $ad-bc = |\mathbf{J}|$  maka Persamaan (2.17) menjadi:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\text{Tr } \mathbf{J} \pm \sqrt{(\text{Tr } \mathbf{J})^2 - 4|\mathbf{J}|}). \quad \dots(2.18)$$

Jika  $\Delta = (\text{Tr } \mathbf{J})^2 - 4|\mathbf{J}|$ , maka Persamaan (2.18) menjadi:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\text{Tr } \mathbf{J} \pm \sqrt{\Delta}).$$

Sehingga sifat-sifat titik kritis  $(0, 0)$  dapat diperoleh dengan memperhatikan tanda  $\text{Tr } \mathbf{J}$  dan  $|\mathbf{J}|$ .

### **Teorema 2.2** [12]

Misalkan sistem linear

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned} \quad \dots (2.19)$$

dengan  $ad - bc \neq 0$ , sehingga titik  $(0,0)$  adalah satu-satunya titik kesetimbangan dari sistem.

1. Jika kedua akar karakteristik bernilai real dan negatif atau kompleks sekawan dengan bagian real bernilai negatif, maka titik kesetimbangan  $(0,0)$  stabil asimtotis.
2. Jika kedua akar karakteristik bernilai imajiner murni, maka titik kesetimbangan  $(0,0)$  stabil (netral)

3. Jika kedua akar karakteristik bernilai real dan positif atau kompleks sekawan dengan bagian real bernilai positif, maka titik kesetimbangan  $(0,0)$  tidak stabil.

Di sisi lain, suatu sistem persamaan diferensial dikatakan tak linear jika dalam persamaan tersebut terdapat suatu fungsi yang memuat parameter  $x$  dan  $y$  secara bersamaan. Diketahui sistem taklinear

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by + P_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + Q_1(x, y),\end{aligned}\quad \dots (2.20)$$

dengan  $a, b, c, d$  adalah konstanta real,  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ , dan  $P_1, Q_1$  keduanya mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu untuk semua  $(x, y)$  serta berlaku

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{P_1(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{Q_1(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

maka Sistem (2.19) merupakan linearisasi Sistem (2.20). Sistem (2.20) dan (2.19) mempunyai titik kesetimbangan terisolasi  $(0, 0)$  dengan  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah akar-akar persamaan karakteristik dari (2.19).

### **Teorema 2.3** [12]

Berdasarkan nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  diperoleh hal-hal sebagai berikut.

1. Jika  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah real dan negatif atau kompleks sekawan dengan bagian realnya bernilai negatif, maka  $(0, 0)$  adalah titik tetap stabil asimtotis untuk (2.19) dan (2.20)
2. Jika  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai imajiner murni, maka titik tetap  $(0, 0)$  stabil untuk (2.19), tetapi kemungkinan stabil asimtotis, stabil, atau takstabil untuk (2.20).

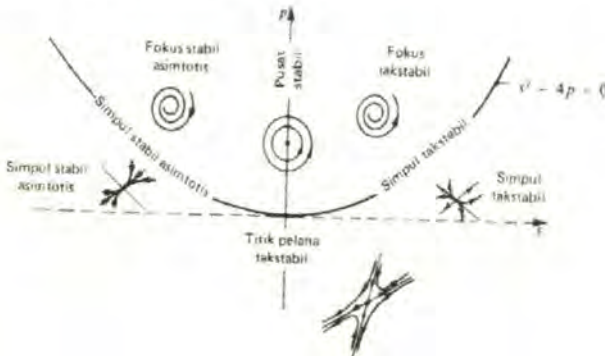
3. Jika  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai real dan ada yang positif atau kompleks sekawan dengan bagian realnya bernilai positif, maka titik tetap  $(0, 0)$  takstabil untuk (2.20) dan (2.19).

**Teorema 2.4** [12]

Berdasarkan nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  diperoleh hal-hal sebagai berikut.

1. Titik tetap  $(0, 0)$  dari sistem taklinear (2.20) bertipe sama dengan titik tetap  $(0, 0)$  dari Sistem (3.19) dalam kasus-kasus berikut.
  - a. Jika akar-akar karakteristik  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai real, berlainan, dan bertanda sama maka  $(0, 0)$  adalah titik simpul (*node*) dari (2.20) dan (2.19).
  - b. Jika akar-akar karakteristik  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai real, berlainan, dan berlawanan tanda maka  $(0, 0)$  adalah titik pelana (*saddle*) untuk (2.19) dan (2.20).
  - c. Jika akar-akar karakteristik  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  bernilai real dan sama dan Sistem (2.19) tidak memenuhi  $a = d \neq 0, b = c = 0$  maka  $(0, 0)$  adalah titik simpul (*node*) dari (2.19) dan (2.20).
  - d. Jika akar-akar karakteristik  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  kompleks sekawan dengan bagian realnya tidak sama dengan nol maka  $(0, 0)$  adalah titik spiral dari (2.19) dan (2.20).
2. Titik tetap  $(0, 0)$  dari sistem taklinear (2.20) tidak harus bertipe sama dengan titik tetap  $(0, 0)$  dari sistem (2.19) dalam kasus-kasus berikut.
  - a. Jika akar-akar karakteristik  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  real dan sama serta Sistem (2.19) memenuhi  $a = d \neq 0, b = c = 0$ , maka  $(0, 0)$  adalah titik simpul dari (2.19) akan tetapi mungkin simpul atau mungkin spiral dari (2.20).
  - b. Jika akar-akar karakteristik  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  imajiner murni, maka  $(0, 0)$  adalah titik pusat (*center*) dari (2.19) akan tetapi mungkin pusat atau mungkin spiral dari (2.20).

Secara umum, hubungan antara akar-akar karakteristik, kestabilan dan bentuk trayektori dari sistem taklinear dapat diringkas dalam bentuk diagram stabilitas di bawah ini



Gambar 2.2 Pengaruh  $p = |\mathbf{J}|$ ,  $s = \text{Tr } \mathbf{J}$ , dan  $s^2 - 4p = \Delta$  Terhadap Stabilitas dan Tipe Titik Tetap [6]

## 2.7 Kriteria Routh-Hurwitz

Diberikan sistem homogen linier

$$x' = A(t)x \quad \dots(2.21)$$

dengan  $A(t)$  kontinu untuk setiap  $t > \bar{t}$ . Kestabilan Sistem (2.21) juga dapat dicari dengan menyelidiki bagian real dari akar persamaan polinomial-nya. Marden (1966) pernah membahas hingga polinomial berderajat tinggi.

**Kriteria Routh-Hurwitz** [2]

Jika

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

adalah persamaan polinomial dengan koefisien real. Ambil  $D_1, \dots, D_n$  yang menotasikan determinan berikut ini



$$D_1 = a_1$$

...

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix} \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

dengan  $a_j = 0$  jika  $j > n$ . Sehingga jika  $D_k > 0, k = 1, \dots, n$ , maka penyelesaian persamaan

$$P(z) = 0$$

mempunyai akar-akar kompleks yang bagian real-nya negatif.

### **Teorema 2.5** [2]

Kondisi yang diperlukan agar Sistem (2.21) stabil adalah semua penyelesaian dari

$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$ , mempunyai akar-akar karakteristik dengan bagian real negatif sehingga  $a_1, a_2, \dots, a_n$  positif, dimana  $a_1, a_2, \dots, a_n$  adalah koefisien yang bernilai real.

Dengan kata lain, nilai-nilai karakteristik dari matriks  $A$  adalah akar-akar karakteristik dari polinomial  $\det(\lambda I - A) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ , dengan  $a_0 = 1$ . Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat dipakai untuk mengecek langsung kestabilan melalui koefisien  $a_i$  tanpa menghitung akar-akar dari polinomial yang ada.

## **2.8 Fungsi Liapunov**

Pendekatan yang dapat diambil untuk mengetahui kestabilan titik kesetimbangan baik hiperbolik (yaitu titik tetap yang matriks Jacobiannya mempunyai nilai eigen dengan bagian realnya tidak sama dengan nol) maupun takhiperbolik adalah dengan mencari fungsi Liapunov. Fungsi Liapunov mempunyai

kurva tertutup yang mengelilingi titik kesetimbangan sehingga dari sebarang titik di kurva tersebut akan diperhatikan suatu lintasan di sekitar titik kesetimbangan. Teori kestabilan Liapunov diantaranya dijelaskan oleh Liapunov (1892) serta LaSalle dan Lefshetz (1961). Sebelum mengetahui definisi dari fungsi Liapunov, diberikan definisi-definisi yang berkaitan terlebih dahulu.

Pada suatu sistem dimensi- $n$

$$x' = f(t, x) \quad \dots(2.22)$$

dengan  $f$  terdefinisi dan memenuhi kondisi Lipschitz terhadap  $x$  di beberapa titik pada himpunan

$$S = \{(t, x) / t_1 < t, |x| < a\}$$

dengan  $a$  adalah konstanta positif dan  $t_1$  konstan. Diasumsikan  $x(t) \equiv 0$  penyelesaian (2.20), sehingga  $f(t, 0) = 0$  untuk setiap  $t > t_1$ . Selanjutnya akan diuraikan bagaimana Liapunov bisa digunakan untuk mempelajari stabilitas penyelesaian  $x(t) \equiv 0$  dari (2.22). Bentuk fungsi bernilai riil

$$V(t, x_1, \dots, x_n) = V(t, x)$$

yang memiliki domain

$$S_1 = \{(t, x) / t_2 < t, |x| < A\}$$

dengan  $t_2 > t_1$  dan  $0 < A < a$  dan asumsikan

- (1)  $V(t, x)$  memiliki turunan parsial pertama yang kontinu terhadap  $t, x_1, \dots, x_n$  pada setiap titik di  $S_1$
- (2)  $V(t, 0, \dots, 0) = 0$  untuk  $t > t_2$

### Definisi 2.6 [2]

Fungsi  $V$  semidefinit positif [negatif] pada  $S_1$  jika  $\forall (t, x) \in S_1$ ,

$$V(t, x) \geq 0 \quad [\leq 0]$$

Fungsi  $W(x) = W(x_1, \dots, x_n)$  memenuhi hipotesa yang sama sebagaimana  $V(t, x)$ , tetapi diasumsikan bebas dari parameter  $t$ , dikatakan definit positif [negatif] pada  $S_1$  jika

$W(x) > 0$  [ $< 0$ ],  $\forall t \ni 0 < |x| < A$  dan jika  $W(0) = 0$ .

Fungsi  $V(t, x)$  definit positif [negatif] pada  $S_t$  jika ada fungsi  $W(x)$  yang definit positif, sehingga  $\forall(t, x) \in S_1$ ,

$$V(t, x) \geq W(x) \quad [-V(t, x) \geq W(x)].$$

Fungsi  $V(t, x)$  terbatas jika ada konstanta  $M > 0$  sehingga  $\forall(t, x) \in S_1$ ,

$$|V(t, x)| < M.$$

Fungsi  $V(t, x)$  mempunyai batas atas yang kecil sekali (*infinitesimal upper bound*) jika  $V(t, x)$  terbatas dan  $\varepsilon > 0$  berakibat ada  $\delta > 0 \ni |x| < \delta \wedge t > t_2 \rightarrow |V(t, x)| < \varepsilon$ .

### Definisi 2.7 [2]

Jika  $V(t, x)$  memiliki domain  $S$ , fungsi

$$\dot{V} = \dot{V}(t, x_1, \dots, x_n) = \dot{V}(t, x)$$

didefinisikan

$$\dot{V}(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) + \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla V \cdot f + V_t$$

dengan  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  adalah komponen ke- $i$  dari fungsi  $f(t, x)$  pada Persamaan (2.22).

Jika fungsi  $V(t, x)$  memenuhi kondisi definit dan fungsi  $\dot{V}(t, x)$  juga definit dengan tanda yang berlawanan, maka  $V(t, x)$  disebut fungsi Liapunov. Selanjutnya teorema yang menjelaskan relasi keberadaan fungsi Liapunov terhadap kestabilan.

### Teorema 2.6 [2]

*Teorema Stabilitas.* Jika ada fungsi  $V(t, x)$  yang definit positif pada  $S$  dan jika  $\dot{V}(t, x)$  semidefinit negatif pada  $S$ ,

maka  $x(t) \equiv 0$  penyelesaian yang stabil untuk Persamaan (2.22).

**Teorema 2.7 [2]**

*Teorema Stabil Asimtotis.* Jika ada fungsi  $V(t,x)$  yang definit positif pada  $S$  dan jika  $\dot{V}(t,x)$  mempunyai batas atas yang kecil sekali (*infinitesimal upper bound*) serta  $\dot{V}(t,x)$  definit negatif pada  $S$ , maka  $x(t) \equiv 0$  penyelesaian yang stabil asimtotis untuk Persamaan (2.22).

**Teorema 2.8 [2]**

*Teorema tak Stabil.* Jika ada fungsi  $V(t,x)$  dengan domain  $S$  yang memenuhi hipotesa berikut :

- (1)  $V(t,x)$  mempunyai batas atas yang kecil sekali (*infinitesimal upper bound*)
- (2)  $\dot{V}(t,x)$  definit positif pada  $S$ ,
- (3) terdapat  $T > t_1$  sehingga jika  $\tilde{t} \geq T$  dan  $h$  konstanta positif, maka terdapat  $c \in R^n$  sedemikian hingga  $|c| < h$  dan  $V(\tilde{t}, c) > 0$

maka  $x(t) \equiv 0$  tak stabil.

**Teorema 2.9 [2]**

*Teorema Stabil Asimtotis Global.* Jika ada fungsi  $V(t,x)$  dengan domain  $S$  yang memenuhi hipotesa berikut :

- (1)  $V(t,x)$  mempunyai batas atas yang kecil sekali (*infinitesimal upper bound*) pada beberapa titik dalam himpunan  $S_1 = \{(t,x) / t_1 < t, |x| < a\}$ , dengan  $a$  konstanta positif.
- (2)  $\dot{V}(t,x)$  definit negatif pada  $S$ ,

- (3)  $V(t, x)$  definit positif terhadap  $S$ , dimana terdapat fungsi  $W(x)$  memenuhi  $W(0) = 0$ , maka  $W(x) > 0$  jika sehingga  $|x| \neq 0$  dan  $\forall (t, x) \in S$  berlaku  $V(t, x) \geq W(x)$ ,
- (4)  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} W(x) = \infty$

Sehingga  $x(t) \equiv 0$  penyelesaian yang stabil asimtotis global untuk Persamaan (2.22).

Pada dasarnya, suatu sistem dikatakan stabil jika trayektori penyelesaian di sekitar titik setimbang mendekati titik tersebut. Stabilitas sistem dapat dianalisa secara lokal dan global. Stabilitas lokal adalah perilaku lokal dari trayektori di sekitar titik setimbang dimana setiap trayektori mendekati titik tersebut, dan untuk mencarinya diselidiki dulu keterbatasan penyelesaian sistem [1]. Sedangkan untuk stabilitas global, salah satunya dapat dianalisa dengan menggunakan teorema LaSalle yang berkorelasi dengan Liapunov. Hubungan antara fungsi Liapunov dan kestabilan digambarkan pada definisi dan Teorema Liapunov-LaSalle berikut

**Definisi 2.8 [8]**

Misalkan

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad \dots(2.23)$$

adalah sistem persamaan diferensial berdimensi  $n$ . Fungsi  $f(x)$  terdefinisi di  $G^*$ , himpunan terbuka di  $\mathbb{R}^n$ , dan  $G$  adalah himpunan bagian dari  $G^*$ . Fungsi  $V(x): G \rightarrow \mathbb{R}$  dikatakan fungsi Liapunov untuk Persamaan (2.23) di  $G$  jika

1.  $V$  kontinu dan dapat diturunkan di setiap titik  $x \in G$ ,

2.  $\dot{V} = \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2.13)} = \nabla V \leq 0$  di  $G$ .

**Teorema 2.10 [8]**

Misalkan  $V$  adalah fungsi Liapunov dari Persamaan (2.23) pada daerah  $G$ . Fungsi  $E = \{x \mid \dot{V}(x) = 0, x \in G \cap G^*\}$  dan  $M$  adalah himpunan invarian terbesar di  $E$ . Maka setiap trayektori terbatas (untuk  $t \geq 0$ ) dari Persamaan (2.21) yang ada di  $G$  mendekati himpunan  $M$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .

**2.9 Persistensi**

Ambil  $\xi$  adalah ruang metrik yang kompak dengan  $d$  metrik dan  $E$  subset tertutup dari  $\xi$  dengan batas  $\partial E$  dan  $\overset{\circ}{E}$ . Terdapat pula fungsi kontinu  $F$  yang terdefinisi pada  $E$  sedemikian hingga  $\partial E$  invarian di bawah  $F$ .  $F = (E, R, \pi)$  dengan  $R$  bilangan riil,  $\pi : E \times R \rightarrow E$  pemetaan kontinu sehingga  $\pi(\pi(x, t), s) = \pi(x, t + s), \forall x \in E, s, t \in R$  dan  $\pi(\partial E \times R) \subset \partial E$ .  $F$  dipisahkan oleh  $\partial F$  terhadap  $\partial E$ . Beberapa fungsi tersebar luas dalam aplikasi untuk model perilaku dinamik sebagai satu kesatuan yang selalu non negatif. Sebagai contoh  $\xi = R^n; E = R_+^n$ , bagian sistem yang non negatif berada pada  $R^n$  dan  $x \in E$  merepresentasikan  $n$  komponen populasi yang interaksinya dimodelkan fungsi  $F$ .

Dari penjelasan diatas, maka dapat digambarkan persistensi sistem merupakan kondisi dimana tidak ada komponen populasi yang punah dalam suatu sistem[1]. Secara geometri, sistem dikatakan persisten jika trayektori dari setiap komponen populasi menjauhi sumbu koordinat.

Kemudian beberapa teori persisten yang berkaitan dengan pembahasan dalam tugas akhir ini akan dibahas dengan terlebih dulu diberikan  $F: R_+^n \rightarrow R^n$  Lipschitz lokal dan sistem persamaan  $x' = F(x)$ . Himpunan  $X \subset R_+^n$  disebut invarian maju jika semua penyelesaian dengan  $x(0) \in X$  terdefinisi untuk

setiap  $t \geq 0$  dan  $x(t) \in X$  untuk setiap  $t \geq 0$ .  $X$  dinamakan invarian jika semua penyelesaian dengan  $x(0) \in X$  terdefinisi untuk setiap  $t \in R$  dan  $x(t) \in X$  untuk setiap  $t \in R$ . Salah satu contoh invarian adalah titik kesetimbangan suatu sistem persamaan diferensial.

### Definisi 2.9 [3]

Asumsikan  $X$  subset invarian maju terhadap  $R_+^n$ ,  $X = X_1 \cup X_2$ ,  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , dengan  $X_2$  subset tertutup relatif terhadap  $X$  dan  $X_1$  invarian maju. Ambil  $Y_2 \subseteq X_2$ .

- $Y_2$  dinamakan *uniform weak repeller* untuk  $X_1$  jika terdapat  $\delta > 0$ , sehingga

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} d(x(t), Y_2) \geq \delta$$

untuk semua penyelesaian  $x(t)$  dengan  $x(0) \in X_1$ .

- $Y_2$  dinamakan *uniform strong repeller* untuk  $X_1$  jika terdapat  $\delta > 0$ , sehingga

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} d(x(t), Y_2) \geq \delta$$

untuk semua penyelesaian  $x(t)$  dengan  $x(0) \in X_1$ .

### Teorema 2.11 [3]

Misal  $F: R_+^n \rightarrow R^n$  Lipschitz lokal kontinu,  $X \subseteq R_+^n$ .  $X$  invarian maju untuk  $x' = F(x)$ . Ambil  $X = X_1 \cup X_2$ ,  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ , dengan  $X_2$  subset tertutup relatif terhadap  $X$  dan  $X_1$  invarian maju. Asumsikan terdapat himpunan kompak  $C$  di  $R^n$ ,  $C \subseteq X$ , dengan semua penyelesaian  $x' = F(x)$  dalam  $X$  menuju  $d(x(t), C) \rightarrow 0$  ketika  $t \rightarrow \infty$ .

$M$  himpunan terbatas dari kesetimbangan dalam  $X_2$ . Asumsikan bahwa penyelesaian berawal dan ada dalam  $X_2$  untuk setiap waktu

yang konvergen terhadap salah satu titik kesetimbangan di  $M$ . Setiap kesetimbangan di  $M$  membentuk himpunan invarian yang terisolasi di  $X$  dan merupakan *weak repeller* untuk  $X_1$  sehingga  $M$  tidak siklik (*acyclic*) dalam  $X_2$ . Maka  $X_2$  dikatakan *uniform strong repeller* untuk  $X_1$ .

Beberapa definisi berikut memperjelas macam persistensi yang mungkin terjadi dalam suatu sistem.

**Definisi 2.10** [1]

$F$  dikatakan persisten lemah jika untuk setiap  $x \in \overset{\circ}{E}$ ,  
 $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > 0$ .

**Definisi 2.11** [1]

$F$  dikatakan persisten jika untuk setiap  $x \in \overset{\circ}{E}$ ,  
 $\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) > 0$ .

**Definisi 2.12** [1]

$F$  dikatakan persisten seragam jika terdapat  $\varepsilon_0 > 0$  sedemikian hingga untuk setiap  $x \in \overset{\circ}{E}$ ,  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} d(\pi(x, t), \partial E) \geq \varepsilon_0$ .



*"Lihat segalanya lebih dekat, dan kau bisa menilai lebih bijaksana.  
Mengapa bintang bersinar ... mengapa air mengalir ... mengapa dunia  
berputar .. Lihat segalanya lebih dekat, dan kau akan mengerti."*

(Petualangan Sherina)

## BAB III

# METODOLOGI

## BAB III METODOLOGI

Pada bab ini akan dijelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam menganalisa stabilitas model *predator prey* dalam kemostat.

### 3.1 Langkah Pengerjaan

Langkah-langkah pengerjaan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut.

1. Menguraikan Landasan Teori

Pada tahap ini akan dilakukan identifikasi permasalahan serta pengumpulan referensi yang menunjang penelitian. Referensi yang dipakai adalah buku, jurnal ilmiah, maupun *web site* internet, dalam hal ini tentang sistem mangsa-pemangsa dan hal-hal yang dibutuhkan dalam analisa kualitatif (keujudan dan ketunggalan titik tetap, linearisasi, kestabilan, dan fungsi Liapunov).

2. Menyelidiki Sifat Penyelesaian Sistem

Pada tahap ini terlebih dahulu model predator prey yang ada di transformasikan kemudian dari sistem persamaan yang telah dibentuk akan diselidiki sifat penyelesaiannya apakah bernilai positif dan terbatas.

3. Mencari Titik-Titik Keseimbangan Sistem

Melalui analisa kualitatif akan dicari titik-titik keseimbangan sistem pada kondisi *steady state* dan eksistensi masing-masing titik keseimbangan. Stabilitas lokal dari titik-titik keseimbangan bisa didapatkan dengan menentukan nilai eigen atau melalui kriteria Routh-Hurwitz.

4. Analisa Stabilitas Global

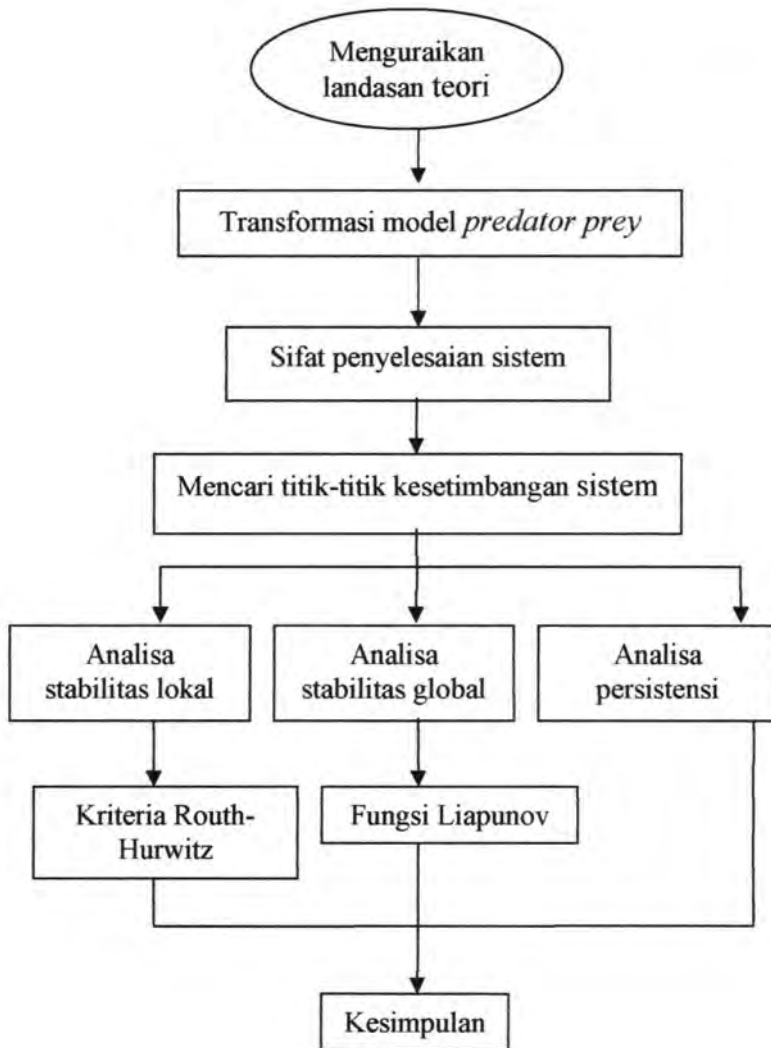
Stabilitas global merupakan salah satu yang dapat dianalisa dari titik tetap sistem dinamik dengan mengkonstruksikan fungsi Liapunov.

### 5. Kesimpulan

Pada tahap ini dilakukan penyimpulan terhadap hasil analisa yang didapat.

### 3.2 **Diagram Alir Penelitian**

Diagram alir penelitian untuk menganalisa model interaksi *predator-prey* di dalam kemostat tersebut dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

*"Ketahuilah bahwa Allah SWT membedakan manusia karena kesanggupannya berpikir, yang merupakan sumber dan puncak segala kemuliaan dan ketinggian di atas makhluk lain. Penyebabnya adalah adanya pengertian, idrak, yaitu kesadaran dalam diri tentang hal yang terjadi di luar dirinya. Manusia memahami apa yang ada di luar dirinya dengan kekuatan pemahaman melalui pikirannya. Akal merupakan rahmat dari Allah khusus untuk manusia, dan karena akal pula jati diri manusia dibedakan dengan makhluk lainnya."*

(Ibnu Khaldun, 1986))

## **BAB IV**

# **ANALISA DAN PEMBAHASAN**

## BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini terlebih dahulu akan diuraikan tentang sifat penyelesaian sistem dan stabilitas titik kesetimbangan sistem setelah sistem ditransformasi dengan kondisi laju kematian *predator* dan *prey* yang kecil (mendekati nol).

### 4.1 Model Interaksi *Predator-Prey*

Sistem persamaan yang menggambarkan interaksi *predator-prey* di dalam kemostat dengan fungsi respon umum adalah

$$\begin{aligned} s'(t) &= (s^\circ - s(t))D - \frac{1}{\gamma_1} F_1(s(t))x(t) - \frac{1}{\gamma_2} F_2(s(t))y(t), \\ x'(t) &= x(t) \left( F_1(s(t)) - D - \varepsilon_1 \right) - \frac{1}{\gamma_3} F_3(x(t))y(t), \quad \dots (4.1) \\ y'(t) &= y(t) \left( F_2(s(t)) + F_3(x(t)) - D - \varepsilon_2 \right) \end{aligned}$$

dengan  $s(0) > 0$ ,  $x(0) > 0$ ,  $y(0) > 0$ , dan

$s(t)$  = konsentrasi nutrisi pada waktu  $t > 0$

$x(t)$  = konsentrasi *prey* pada waktu  $t > 0$

$y(t)$  = konsentrasi *predator* pada waktu  $t > 0$

$s^\circ$  = konsentrasi input dari nutrisi

$F_1$  = laju pertumbuhan *prey* terhadap nutrisi

$F_2$  = laju pertumbuhan *predator* terhadap nutrisi

$F_3$  = laju pertumbuhan *predator* terhadap *prey*

$D$  = laju aliran fluida yang keluar masuk sistem

$\varepsilon_1$  = laju kematian *prey*

$\varepsilon_2$  = laju kematian *predator*

$\gamma_1 =$  konstanta pembandingan laju pertumbuhan *prey* terhadap nutrisi

$\gamma_2 =$  konstanta pembandingan laju pertumbuhan *predator* terhadap nutrisi

$\gamma_3 =$  konstanta pembandingan laju pertumbuhan *predator* terhadap *prey*

Jika laju kematian dari *predator* dan *prey* sangat kecil, yaitu  $\varepsilon_i = 0$ , untuk  $i=1,2$  maka organisme yang hilang karena hanyut diasumsikan mempunyai laju yang sama dengan laju hilangnya nutrisi, sehingga laju perpindahan dari organisme ini merupakan gabungan antara laju aliran kemostat dengan laju kematian organisme. Diasumsikan untuk fungsi respon  $F_i$  memenuhi :

$$F_i : R_+ \rightarrow R_+, \quad \dots (4.2)$$

$$F_i(0) = 0, \quad \dots (4.3)$$

$$F_i \text{ diferensiabel kontinu,} \quad \dots (4.4)$$

$$F_1'(s) > 0, F_2'(s) > 0, \forall s \geq 0 \text{ dan } F_3'(x) > 0 \\ \text{untuk } x \geq 0. \quad \dots (4.5)$$

Selanjutnya diberikan perubahan skala sebagai berikut  $s(t) \rightarrow s^\circ s(t), t \rightarrow t/D, x(t) \rightarrow s^\circ \gamma_1 x(t), y(t) \rightarrow s^\circ \gamma_2 y(t)$  dan  $\gamma_2 = \gamma_1 \gamma_3$  pada Persamaan (4.1), maka Persamaan (4.1) menjadi

$$s'(t) = 1 - s(t) - f_1(s(t))x(t) - f_2(s(t))y(t),$$

$$x'(t) = x(t)(f_1(s(t)) - D_1) - f_3(x(t))y(t), \quad \dots (4.6)$$

$$y'(t) = y(t)(f_2(s(t)) + f_3(x(t)) - D_2)$$

$$s(0) > 0, x(0) > 0, y(0) > 0$$

dengan

$$D_i = 1 - \frac{\varepsilon_i}{D}, f_i(s) = \frac{F_i(s^\circ s)}{D}, i = 1, 2$$

$$f_3(x) = \frac{F_3(\gamma_1 s^\circ x)}{D}$$

Dan  $f_i$  sebagai fungsi respon dari organisme ke- $i$  setelah dilalui fluida yang mengalir dalam sistem kemostat dan memungkinkan adanya organisme yang hanyut, dengan  $i=1$  merupakan fungsi respon dari laju pertumbuhan *prey* terhadap nutrisi,  $i=2$  untuk fungsi respon dari laju pertumbuhan *predator* terhadap nutrisi, dan  $i=3$  untuk fungsi respon dari laju pertumbuhan *predator* terhadap *prey*. Sehingga  $f_i$  fungsi yang memenuhi (4.2) - (4.5).

Karena  $s(t)$ ,  $x(t)$  dan  $y(t)$  pada (4.1) dan (4.6) merupakan persamaan yang termuat dalam fungsi polinomial dan bukan merupakan fungsi pecahan, jelas bahwa ketiga fungsi kontinu di semua domain dari bidang  $xyz$  [4]. Sehingga turunan parsial pertama dari masing-masing adalah polinomial dan kontinu di semua domain  $\mathfrak{R}$  (*region*) dari bidang  $xyz$ . Misalkan titik  $(\bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$  adalah titik kesetimbangan dari (4.6), maka sepasang fungsi konstan, merupakan penyelesaian dari Sistem (4.6) untuk semua. Artinya, Sistem (4.6) memenuhi Teorema Keujudan dan Ketunggalan. Dengan kata lain, ada titik kesetimbangan  $(\bar{s}, \bar{x}, \bar{y})$  yang merupakan penyelesaian tunggal di bidang  $xyz$  dari sistem (4.6) untuk semua  $t$ .

## 4.2 Sifat Penyelesaian Sistem

Berikut ini dibuktikan bahwa penyelesaian sistem bernilai positif dan terbatas.

**Lemma 4.1** Solusi  $(s(t), x(t), y(t))$  dari (4.6) bernilai positif, dan  $s(t) < 1$  untuk  $t$  yang bernilai besar.

**Bukti** : Asumsikan bahwa Lemma 4.1 salah. Ambil  $t_1 = \min\{t : t > 0, x(t)y(t) = 0\}$ . Pertama diasumsikan  $x(t_1) = 0$  dan  $y(t) > 0$  untuk  $t \in [0, t_1]$ . Terdapat suatu nilai  $A = \min_{0 \leq t \leq t_1} \{f_1(s(t)) - D_1 - (f_2(x(t))/x(t))y(t)\}$  sehingga untuk  $t \in [0, t_1]$ ,  $x'(t) \geq Ax(t)$  mengakibatkan  $x(t_1) \geq x(0)e^{At_1} > 0$ , yang bersifat kontradiksi dengan asumsi



yang diambil. Karena kontradiksi, maka asumsi yang diambil salah dan Lemma 4.1 benar.

**Lemma 4.2** Untuk  $\varepsilon > 0$ , solusi  $(s(t), x(t), y(t))$  dari (4.6) memenuhi

$$\frac{1}{D_{\max}} - \varepsilon \leq s(t) + x(t) + y(t) \leq \frac{1}{D_{\min}} + \varepsilon, \quad \dots (4.7)$$

untuk  $t$  yang besar, dengan

$$D_{\max} = \max\{1, D_1, D_2\} \text{ dan } D_{\min} = \min\{1, D_1, D_2\} \dots (4.8)$$

**Bukti** : Ambil sebarang  $\varepsilon > 0$ . Dengan menjumlah 3 persamaan dalam sistem (4.6) didapatkan

$$s'(t) + x'(t) + y'(t) = 1 - (s(t) + D_1x(t) + D_2y(t))$$

sehingga

$$1 - D_{\max}(s(t) + x(t) + y(t)) \leq (s'(t) + x'(t) + y'(t)) \leq 1 - D_{\min}(s(t) + x(t) + y(t))$$

$$\Leftrightarrow 1 - D_{\max}(s(t) + x(t) + y(t)) \leq 1 - (s(t) + D_1x(t) + D_2y(t)) \leq 1 - D_{\min}(s(t) + x(t) + y(t))$$

$$\Leftrightarrow D_{\max}(s(t) + x(t) + y(t)) \geq (s(t) + D_1x(t) + D_2y(t)) \geq D_{\min}(s(t) + x(t) + y(t))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{D_{\max}}(s(t) + x(t) + y(t)) \leq (s(t) + D_1x(t) + D_2y(t)) \leq \frac{1}{D_{\min}}(s(t) + x(t) + y(t))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{D_{\max}}(s(t) + x(t) + y(t)) \leq \left( s(t) + \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{D}\right)x(t) + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{D}\right)y(t) \right) \leq \frac{1}{D_{\min}}(s(t) + x(t) + y(t))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{D_{\max}} \leq s(t) + x(t) - \frac{\varepsilon_1}{D}x(t) + y(t) - \frac{\varepsilon_2}{D}y(t) \leq \frac{1}{D_{\min}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{D_{\max}} + \frac{\varepsilon_1}{D}x(t) \leq s(t) + x(t) + y(t) \leq \frac{1}{D_{\min}} + \frac{\varepsilon_2}{D}y(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{D_{\max}} - \varepsilon \leq (s(t) + x(t) + y(t)) \leq \frac{1}{D_{\min}} + \varepsilon$$

Ini menyebabkan penyelesaian  $(s(t), x(t), y(t))$  terbatas.

### 4.3 Titik Kesetimbangan

Dalam sistem rantai makanan *predator-prey* yang dimodelkan dalam (4.6) didapatkan 3 titik kesetimbangan, yaitu :

1. Titik kesetimbangan pertama adalah belum terjadi proses pertumbuhan mikroorganisme dalam medium yang telah diberikan nutrisi, sehingga didapatkan titik kesetimbangan  $E_1(1,0,0)$ .
2. Titik kesetimbangan kedua adalah sistem bebas dari *predator*, tetapi ada *prey*, maka titik kesetimbangannya adalah  $E_2(\lambda_s, (1-\lambda_s)/D_1, 0)$ , dengan  $\lambda_s$  didefinisikan sebagai penyelesaian yang tunggal dari  $f_1(s) = D_1$
3. Titik kesetimbangan ketiga terjadi ketika semua komponen sudah mengalami pertumbuhan baik nutrisi, *prey*, dan *predator*. Titik kesetimbangannya adalah  $E_c(s^*, \lambda_x, \lambda_x(f_1(s^*) - D_1)/(D_2 - f_2(s^*)))$ , dengan  $\lambda_x$  dan  $s^*$  didefinisikan sebagai penyelesaian tunggal dari  $f_2(s) + f_3(x) = D_2$  dan memenuhi persamaan

$$s^* + f_1(s^*)\lambda_x + \frac{f_2(s^*)}{f_3(\lambda_x)}(f_1(s^*) - D_1)\lambda_x = 1 \quad \dots(4.9)$$

dengan  $s \in (0,1)$ .

Sedangkan untuk kondisi bebas dari *prey* dan ada *predator* tidak terdapat titik kesetimbangannya.

Untuk mendapatkan eksistensi masing-masing titik kesetimbangan maka setiap komponen yang menyusun sistem harus bernilai positif dan memastikan titik tersebut berada pada *steady state*, yaitu kondisi setimbang yang menjaga keberlangsungan sistem. Pada titik kesetimbangan pertama, jika semua komponen yang hanyut dalam laju aliran fluida bernilai positif maka  $E_1$  selalu eksis. Jika  $f_1$  fungsi naik dengan  $f_1(0) = 0$ , maka  $\lambda_s$  penyelesaian tunggal dari  $f_1(s) = D_1$  dengan  $0 < \lambda_s < 1$  dan

$$f_1(\lambda_s) = D_1 \Leftrightarrow D_1 < f_1(1) \quad \dots(4.10)$$

maka terjadi *steady state* yang bebas *predator* pada titik  $E_2 = (\lambda_s, (1 - \lambda_s) / D_1, 0)$ , selain itu tidak terdapat kondisi *steady state* yang lain.

Sedangkan nutrisi, *prey*, dan *predator* bersama-sama mencapai kondisi *steady state* ketika  $f_1(s) < D_1, \forall s > 0$  maka  $\lambda_s = +\infty$ . Pada saat  $f_2$  dan  $f_3$  bertambah naik dengan  $f_2(0) = f_3(0) = 0, s^*$  dan  $\lambda_x$  penyelesaian tunggal dari  $f_2(s) + f_3(x) = D_2$  ada, dan memenuhi

$$f_2(s^*) + f_3(\lambda_x) = D_2 \Leftrightarrow f_2(1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) > D_2 \dots (4.11)$$

maka eksistensi  $E_c$  dihasilkan dalam 2 keadaan, yaitu:

1.  $D_2 - f_2(s^*) = f_3(\lambda_x) > 0$
2.  $f_1(s^*) - D_1 > 0 \vee s^* > \lambda_s$

Dengan catatan bahwa

$$F(s) = 1 - s - f_1(s)\lambda_x - f_2(s)\lambda_x \frac{f_1(s) - D_1}{D_2 - f_2(s)} \dots (4.12)$$

merupakan fungsi turun terhadap  $S$  dengan  $F(0) = 1 > 0, F(s^*) = 0$  dan  $F(\lambda_s) = 1 - \lambda_s - D\lambda_x$ , sehingga

$s^* > \lambda_s \Leftrightarrow \lambda_x < (1 - \lambda_s) / D_1$ . Dalam kasus  $f_2(s) + f_3(x) < D_2, \forall s, x > 0$  diambil  $\lambda_x = +\infty$  berakibat  $E_2$  ada jika dan hanya jika  $\lambda_s < 1$  dan  $E_c$  ada jika dan hanya jika  $\lambda_s < 1$  dan  $\lambda_x < (1 - \lambda_s) / D_1$ .

#### 4.4 Analisa Stabilitas Sistem

##### 4.4.1 Stabilitas Lokal

Selanjutnya untuk mengetahui stabilitas lokal pada saat *steady state* akan dicari melalui nilai eigen dari matriks Jacobian.

Untuk mendapatkan matriks Jacobian dari Sistem Persamaan (4.6), dimisalkan

$$f(s, x, y) = 1 - s(t) - f_1(s(t))x(t) - f_2(s(t))y(t)$$

$$g(s, x, y) = x(t)(f_1(s(t)) - D_1) - f_3(x(t))y(t),$$

$$h(s, x, y) = y(t)(f_2(s(t)) + f_3(x(t)) - D_2)$$

Matriks Jacobian dari (4.6) berbentuk

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(s, x, y)}{\partial s} & \frac{\partial f(s, x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(s, x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(s, x, y)}{\partial s} & \frac{\partial g(s, x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(s, x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h(s, x, y)}{\partial s} & \frac{\partial h(s, x, y)}{\partial x} & \frac{\partial h(s, x, y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 - xf_1'(s) - yf_2'(s) & -f_1(s) & -f_2(s) \\ xf_1'(s) & f_1(s) - D_1 - yf_3'(x) & -f_3(x) \\ yf_2'(s) & yf_3'(x) & f_2(s) + f_3(x) - D_2 \end{bmatrix} \dots (4.13)$$

Pada  $E_1(1, 0, 0)$ ,

$$\mathbf{J}(E_1) = \begin{bmatrix} -1 - xf_1'(s) - yf_2'(s) & -f_1(s) & -f_2(s) \\ xf_1'(s) & f_1(s) - D_1 - yf_3'(x) & -f_3(x) \\ yf_2'(s) & yf_3'(x) & f_2(s) + f_3(x) - D_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{J}(E_1) = \begin{bmatrix} -1 & -f_1(1) & -f_2(1) \\ 0 & f_1(1) - D_1 & 0 \\ 0 & 0 & f_2(1) - D_2 \end{bmatrix}$$

Tampak bahwa matriks diatas merupakan matriks segitiga bawah, sehingga dapat dipastikan nilai eigen-nya berada pada diagonal matriks dan bernilai negatif jika dan hanya jika  $f_1(1) - D_1 < 0$  dan  $f_2(1) - D_2 < 0$  atau ekuivalen dengan  $\lambda_s > 1$  dan  $\lambda_x > 0$ ,  $s^* > 1$ . Karena nilai eigen negatif, maka titik kesetimbangan stabil asimtotis.

Ketika  $E_2$  ada, matriks Jacobian pada  $E_2$  ( $\lambda_s, (1 - \lambda_s) / D_1, 0$ ) berbentuk

$$\mathbf{J}(E_2) = \begin{bmatrix} -1 - xf_1'(s) - yf_2'(s) & -f_1(s) & -f_2(s) \\ xf_1'(s) & f_1(s) - D_1 - yf_3'(x) & -f_3(x) \\ yf_2'(s) & yf_3'(x) & f_2(s) + f_3(x) - D_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{J}(E_2) = \begin{bmatrix} -1 - \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} & -f_1(\lambda_s) & -f_2(\lambda_s) \\ \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} & 0 & -f_3\left(\frac{1-\lambda_s}{D_1}\right) \\ 0 & 0 & f_2(\lambda_s) + f_3\left(\frac{1-\lambda_s}{D_1}\right) - D_2 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks  $\mathbf{J}(E_2)$  adalah

$$|\mathbf{J}(E_2) - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 - \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} - \lambda & -f_1(\lambda_s) & -f_2(\lambda_s) \\ \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} & -\lambda & -f_3\left(\frac{1-\lambda_s}{D_1}\right) \\ 0 & 0 & f_2(\lambda_s) - f_3\left(\frac{1-\lambda_s}{D_1}\right) - D_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - 0 + f_2(\lambda_s) - f_3\left(\frac{1-\lambda_s}{D_1}\right) - D_2 - \lambda \begin{vmatrix} -1 - \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} - \lambda & -f_1(\lambda_s) \\ \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (f_2(\lambda_s) - f_3\left(\frac{1-\lambda_s}{D_1}\right) - D_2 - \lambda) \left( -1 - \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} - \lambda \right) - (-f_1(\lambda_s)) \left( \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} \right) = 0,$$

dapat dituliskan

$$(f_2(\lambda_s) - f_3\left(\frac{1-\lambda_s}{D_1}\right) - D_2 - \lambda) = 0, \text{ atau}$$

$$\left( -1 - \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} - \lambda \right) (-\lambda) - (-f_1(\lambda_s)) \left( \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} \right) = 0.$$

$$\text{Untuk } \left( -1 - \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} - \lambda \right) (-\lambda) - (-f_1(\lambda_s)) \left( \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda + \left( \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} \right) \lambda + \lambda^2 + f_1(\lambda_s) \left( \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \left( 1 + \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} \right) \lambda + f_1(\lambda_s) \left( \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} \right) = 0 \dots (4.14)$$

Dengan menggunakan rumus abc,  $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , maka

dari Persamaan (4.14) dapat ditentukan  $a = 1; b = 1 + \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1}$ ; dan  $c = f_1(\lambda_s) \left( \frac{(1-\lambda_s)f_1'(\lambda_s)}{D_1} \right)$ . Sehingga

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left(1 + \frac{(1-\lambda_s)f'_1(\lambda_s)}{D_1}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{(1-\lambda_s)f'_1(\lambda_s)}{D_1}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot f_1(\lambda_s) \left(\frac{(1-\lambda_s)f'_1(\lambda_s)}{D_1}\right)}}{2 \cdot 1}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\left(1 + \frac{(1-\lambda_s)f'_1(\lambda_s)}{D_1}\right) \pm \sqrt{\left(1 + 2 \frac{(1-\lambda_s)f'_1(\lambda_s)}{D_1}\right) - 4 f_1(\lambda_s) \left(\frac{(1-\lambda_s)f'_1(\lambda_s)}{D_1}\right)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\left(1 + \frac{(1-\lambda_s)f'_1(\lambda_s)}{D_1}\right) \pm \sqrt{1 + (2 - 4 f_1(\lambda_s)) \left(\frac{(1-\lambda_s)f'_1(\lambda_s)}{D_1}\right)}}{2}$$

diperoleh

$$\lambda_1 = \frac{-\left(1 + \frac{(1-\lambda_s)f'_1(\lambda_s)}{D_1}\right) + \sqrt{1 + (2 - 4 f_1(\lambda_s)) \left(\frac{(1-\lambda_s)f'_1(\lambda_s)}{D_1}\right)}}{2}, \text{ dan}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\left(1 + \frac{(1-\lambda_s)f'_1(\lambda_s)}{D_1}\right) - \sqrt{1 + (2 - 4 f_1(\lambda_s)) \left(\frac{(1-\lambda_s)f'_1(\lambda_s)}{D_1}\right)}}{2}.$$

Untuk  $(f_2(\lambda_s) - f_3\left(\frac{1-\lambda_s}{D_1}\right) - D_2 - \lambda) = 0$  didapatkan nilai eigen ketiga, yaitu

$$\lambda_3 = f_2(\lambda_s) + f_3\left(\frac{1-\lambda_s}{D_1}\right) - D_2$$

Dari uraian mendapatkan nilai eigen diatas dan dengan mengamati matriks  $\mathbf{J}(E_2)$ , maka determinan dari matriks  $2 \times 2$  sebelah kiri atas bernilai positif dan *trace*-nya negatif sehingga nilai eigen bagian real bernilai negatif. Nilai eigen ketiga dari  $\mathbf{J}(E_2)$  yang berada pada pojok kanan bawah adalah  $f_2(\lambda_s) + f_3\left(\frac{1-\lambda_s}{D_1}\right) - D_2$  mengakibatkan  $E_2$  stabil asimtotis jika dan hanya jika  $f_2(\lambda_s) + f_3\left(\frac{1-\lambda_s}{D_1}\right) < D_2$  atau  $(1 - \lambda_s)/D_1 < \lambda_s, \lambda_s < s^*$ .

Yang terakhir, ketika  $E_c$  ada maka matriks Jacobian-nya

$$J(E_c) = \begin{bmatrix} -1 - \lambda_x f_1'(s^*) - \frac{(f_1(s^*) - D_1) \lambda_x f_2'(s^*)}{(D_2 - f_2(s^*))} & -f_1(s^*) & -f_2(s^*) \\ \lambda_x f_1'(s^*) & f_1(s^*) - D_1 - \frac{(f_1(s^*) - D_1) \lambda_x f_3'(\lambda_x)}{(D_2 - f_2(s^*))} & -f_3(\lambda_x) \\ \frac{(f_1(s^*) - D_1) \lambda_x f_2'(s^*)}{(D_2 - f_2(s^*))} & \frac{(f_1(s^*) - D_1) \lambda_x f_3'(\lambda_x)}{(D_2 - f_2(s^*))} & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks diatas dapat direpresentasikan dalam persamaan polinomial yang nilai eigen dari  $J(E_c)$  memenuhi

$$\mu^3 + a_1 \mu^2 + a_2 \mu + a_3 = 0,$$

dengan

$$a_1 = 1 + \lambda_x f_1'(s^*) + \left( \frac{\lambda_x f_3'(\lambda_x)}{f_3(\lambda_x)} - 1 \right) (f_1(s^*) - D_1) + \lambda_x f_2'(s^*) \left( \frac{f_1(s^*) - D_1}{D_2 - f_2(s^*)} \right),$$

$$a_2 = \left\{ 1 + \lambda_x f_1'(s^*) + \lambda_x f_2'(s^*) \left( \frac{f_1(s^*) - D_1}{D_2 - f_2(s^*)} \right) \right\} \left\{ \left( \frac{\lambda_x f_3'(\lambda_x)}{f_3(\lambda_x)} - 1 \right) (f_1(s^*) - D_1) + \right.$$

$$\left. \lambda_x f_2(s^*) f_2'(s^*) \left( \frac{f_1(s^*) - D_1}{D_2 - f_2(s^*)} \right) + \lambda_x f_1(s^*) f_1'(s^*) + \lambda_x f_3'(\lambda_x) (f_1(s^*) - D_1) \right\}$$

dan

$$a_3 = \lambda_x f_2(s^*) \left( \frac{f_1(s^*) - D_1}{D_2 - f_2(s^*)} \right) \times \left\{ \lambda_x f_1'(s^*) f_3'(\lambda_x) + f_2'(s^*) \left( \frac{\lambda_x f_3'(\lambda_x)}{f_3(\lambda_x)} - 1 \right) (f_1(s^*) - D_1) \right\}$$

$$+ \lambda_x f_2'(s^*) \left( \frac{f_1(s^*) - D_1}{D_2 - f_2(s^*)} \right) \left\{ \lambda_x f_3'(\lambda_x) (f_1(s^*) - D_1) + f_1(s^*) (f_2(s^*) - D_2) \right\}$$

$$+ \lambda_x f_3'(\lambda_x) (f_1(s^*) - D_1) (1 + \lambda_x f_1'(s^*))$$

Kriteria Routh-Hurwitz menyatakan  $E_c$  stabil asimtotis jika dan hanya jika  $a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$ .

Berdasarkan hasil pembahasan diatas diperoleh ringkasan sebagai berikut.

Jika  $\lambda_s > 1$  maka hanya ada titik kesetimbangan  $E_1$  yang stabil asimtotis. Jika  $\lambda_s < 1$  dan  $(1 - \lambda_s) / D_1 < \lambda_x$  maka terdapat 2 titik kesetimbangan, yaitu  $E_1$  yang tidak stabil dan  $E_2$  yang stabil

asimtotis. Jika  $\lambda_s < 1$  dan  $(1 - \lambda_s)/D_1 > \lambda_x$ , maka terdapat tiga titik kesetimbangan yaitu  $E_1$  dan  $E_2$  yang tidak stabil serta  $E_c$  yang stabil asimtotis jika  $a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$ .

#### 4.4.2 Stabilitas Global

Untuk membuktikan apakah  $E_1$  stabil asimtotis global hanya jika  $E_1$  ada serta apakah jika hanya  $E_1$  dan  $E_2$  ada maka  $E_2$  stabil asimtotis global, maka akan dikonstruksikan fungsi Liapunov dan memakai aplikasi dari teorema Liapunov-LaSalle. Demikian juga dengan kemungkinan yang ketiga yaitu ketika  $E_1, E_2$ , dan  $E_c$  ada, maka memungkinkan  $E_c$  stabil asimtotis global dengan menunjukkan sistem persisten seragam pada sub bab selanjutnya.

Teorema berikut menunjukkan  $E_1$  merupakan *global attractor* jika  $E_1$  merupakan satu-satunya *steady state* (dengan syarat  $1 < \lambda_s$ ).

##### Teorema 4.1

Jika  $\lambda_s > 1$ , maka penyelesaian dari (4.6) memenuhi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (s(t), x(t), y(t)) = (1, 0, 0).$$

Bukti : Lemma 4.1 menyatakan  $s(t) < 1$  dengan  $t$  yang bernilai besar dan  $f_1(1) - D_1 < 0$  atau  $1 < \lambda_s$ , terdapat  $\alpha > 0$  sehingga  $x'(t) < -\alpha x(t)$  untuk nilai  $t$  cukup besar dan  $\alpha = \min_{0 \leq t} \{D_1 - f_1(s) + (y/x)f_3(x)\}$ , dengan kata lain

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0. \text{ Kemudian dari persamaan (4.6) yang ketiga dapat}$$

ditemukan bahwa  $y' < -\beta y(t)$  dengan  $\beta = \min_{0 \leq t} \{D_2 - f_2(s)\}$

sehingga  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ . Dari 2 persamaan ini kemudian dibawa

ke persamaan (4.6) yang kesatu dan menghasilkan  $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = 1$ .



Teorema selanjutnya berlaku jika sistem memiliki 2 titik kesetimbangan dengan  $E_2$  sebagai *global attractor*.

**Teorema 4.2**

Jika  $\lambda_s < 1$  dan  $D_{\min}^{-1} < \lambda_s + \lambda_x$ , maka penyelesaian dari (4.6) memenuhi  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (s(t), x(t), y(t)) = (\lambda_s, (1 - \lambda_s) / D_1, 0)$ .

**Bukti :** Dari Teorema 4.1 diketahui bahwa syarat  $E_1$  dan  $E_2$  eksis adalah jika  $(\lambda_s + \lambda_x) D_{\min} > 1$  sehingga  $\lambda_s + D_1 \lambda_x > 1$ . Sedangkan  $D_{\min}^{-1} < \lambda_s + \lambda_x$  berakibat  $(1 - \lambda_s) / D_1 < \lambda_x$ . Misalkan diambil  $D_{\max} < d_1$  dan  $D_{\min} > d_2$  sedemikian hingga  $d_2^{-1} < \lambda_s + \lambda_x$  dan Pertidaksamaan (4.7) menunjukkan  $d_1^{-1} < s(t) + x(t) + y(t) < d_2^{-1}$  untuk nilai  $t$  yang besar. Ambil

$$\alpha = 1 + \max_{\substack{0 \leq x \leq \frac{1-\lambda_x}{D_1} \\ 0 \leq s \leq \lambda_s}} \left\{ \frac{f_3(x) \left( \frac{1-\lambda_x}{D_1} - x \right)}{x(D_2 - f_2(s) - f_3(s))} \right\} \quad \dots (4.15)$$

dan

$$\beta = 1 + \max_{\substack{\lambda_s \leq x \leq \frac{1}{D_{\min}} + 1 \\ s^* \leq s \leq 1}} \left\{ \frac{\alpha(f_2(s) + f_3(s) - D)}{(D_2 - f_2(s))} \right\} \quad \dots (4.16)$$

serta bentuk fungsi  $C(u)$  sebagai fungsi yang diferensiabel kontinu dengan  $C'(u)$  didefinisikan

$$C'(u) = \begin{cases} 0 & u \leq \frac{1}{d_2} - \lambda_x, \\ \frac{\beta}{\lambda_s + \lambda_x - \frac{1}{d_2}} \left( u - \left( \frac{1}{d_2} - \lambda_x \right) \right) & \frac{1}{d_2} - \lambda_x \leq u < \lambda_x, \\ \beta & u \geq \lambda_x \end{cases} \quad \dots (4.17)$$

$C'(u)$  linier pada  $\left[ \frac{1}{d_2} - \lambda_x, \lambda_x \right]$ . Untuk  $x + y \leq \frac{1}{d_2} - \lambda_x$  jika  $s \geq \lambda_s$  berakibat jika  $s \geq \lambda_s$ , maka  $C'(x + y) = 0$ .

Kemudian didefinisikan fungsi Liapunov  $V(s, x, y)$

$$V = \int_{\lambda_s}^s \frac{(f_1(\xi) - D_1)(1 - \lambda_s)}{D_1(1 - \xi)} d\xi + x - x^* \ln x + \alpha y + C(x + y) \dots (4.18)$$

Pada himpunan

$$\phi = \left\{ (s, x, y) : s \in (0, 1), x, y \in (0, +\infty), s + x + y \in \left( \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2} \right) \right\}$$

dengan  $x^* = \frac{1 - \lambda_s}{D_1}$ .

Turunan  $V$  terhadap waktu di sekitar penyelesaian persamaan diferensial yang diberikan adalah

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \left\{ C'(x + y) + 1 - \frac{(1 - \lambda_s)(f_1(s) + \frac{y}{x} f_2(s))}{D_1(1 - s)} \right\} (f_1(s) - D_1)x \\ & + \left\{ \frac{f_3(x)}{x} \left( \frac{1 - \lambda_s}{D_1} - x \right) + \alpha(f_2(s) + f_3(x) - D_2) \right\} y \dots (4.19) \\ & + (f_3(s) - D_2)C'(x + y)y \end{aligned}$$

Untuk mempelajari bentuk dari  $\dot{V}$  akan diselidiki beberapa komponen yang ada sesuai dengan teorema kestabilan asimtotis global Liapunov. Diantaranya

$$\left( 1 - \frac{(1 - \lambda_s)(f_1(s) + \frac{y}{x} f_2(s))}{D_1(1 - s)} \right) (f_1(s) - D_1)x$$

bernilai negatif untuk  $0 < s < 1$  dan mendekati 0 untuk  $s \in [0, 1)$  jika dan hanya jika  $s = \lambda_s$ . Sedangkan  $C'(x + y)(f_1(s) - D_1)x$  bernilai negatif untuk  $s \in [0, 1)$ , selama  $C'(x + y) = 0$  untuk  $s \geq \lambda_s$ , dan  $C'(u) \geq 0$  untuk  $u \geq 0$ , serta  $f_1(s) - D_1 < 0$  untuk  $s < \lambda_s$ . Sehingga dapat dikatakan komponen pertama dari  $\dot{V}$  selalu bernilai negatif dan mendekati 0 untuk  $s \in [0, 1)$  jika dan hanya jika  $s = \lambda_s$ . Kemudian untuk komponen yang kedua didefinisikan terlebih dahulu

$$G(s, x, y) = \frac{f_3(x)}{x} \left( \frac{1 - \lambda_s}{D_1} - x \right) + \alpha(f_2(s) + f_3(x) - D_2) - (D_2 - f_2(s))C'(x + y) \dots (4.20)$$

Dengan catatan bahwa  $(D_2 - f_2(s))C'(x+y)$  selalu bernilai positif. Jika  $0 < x \leq (1 - \lambda_s)/D_1$  dan  $0 < s \leq \lambda_s$ , dengan definisi  $\alpha$  didapatkan

$$G(s, x, y) = (f_2(s) + f_3(x) - D_2) - (D_2 - f_2(s))C'(x+y) < 0.$$

Jika  $(1 - \lambda_s)/D_1 < x \leq \lambda_x$  dan  $\lambda_s < s \leq s^*$  maka ketiga komponen  $G(s, x, y)$  bernilai negatif dan dapat dituliskan  $G(s, x, y) < 0$ . Jika  $x \geq \lambda_x$  dan  $s \geq s^*$  dan  $C'(x+y) = \beta$ , maka dengan definisi  $\beta$  didapatkan

$$G(s, x, y) = \frac{f_3(x)}{x} \left( \frac{1 - \lambda_s}{D_1} - x \right) - (D_2 - f_2(s)) < 0.$$

Sehingga  $G(s, x, y) < 0$  untuk  $x \geq 0$  dan  $s \geq 0$ .

Dari Lemma 4.1, setiap penyelesaian Persamaan (4.6) yang terbatas termuat di dalam  $\phi$ . Berdasarkan Teorema 2.10, penyelesaian Persamaan (4.6) mendekati himpunan  $\psi$  dengan  $M$  subset invarian terbesar dari  $\eta = \{(s, x, y) \in \phi : \dot{V} = 0\}$ . Himpunan  $\eta$  tersusun hanya satu titik berbentuk  $(\lambda_s, x, 0)$  dengan  $x \in [0, \infty)$ . Jika  $\dot{V}$  terbatas dengan titik yang bersifat unik dari bentuk  $(\lambda_s, x, 0) \in M$ , maka  $s(t) = \lambda_s$  dan  $y(t) = 0$  sehingga  $0 = s'(t) = 1 - \lambda_s - f_1(\lambda_s)x(t)$  dan  $x = (1 - \lambda_s)/D_1$ . Akibatnya  $M = \{E_2\}$  melengkapi bukti Teorema 4.2 diatas.

#### 4.5 Persistensi Sistem

Yang terakhir, untuk mengetahui persistensi sistem dibuktikan melalui teorema di bawah ini.

##### **Teorema 4.3**

Jika  $\lambda_s < 1$  dan  $(1 - \lambda_s)/D_1 > \lambda_x$  maka Sistem (4.6) persisten seragam.

Bukti : Sistem (4.6) persisten seragam berarti sesuai dengan Definisi 2.17, akan ditunjukkan terdapat sebarang konstanta  $\varepsilon > 0$  sehingga

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} s(t) \geq \varepsilon, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq \varepsilon,$$

$$\text{dan } \liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq \varepsilon \quad \dots(4.21)$$

Ambil

$$X_1 = \left\{ (s, x, y) \mid 0 \leq s \leq 1, 0 < x \leq \frac{1}{D_{\min}} + 1, 0 < y \leq \frac{1}{D_{\min}} + 1 \right\},$$

$$Y_1 = \left\{ (s, x, 0) \mid 0 \leq s \leq 1, 0 < x \leq \frac{1}{D_{\min}} + 1 \right\},$$

$$Y_2 = \left\{ (s, 0, y) \mid 0 \leq s \leq 1, 0 < y \leq \frac{1}{D_{\min}} + 1 \right\}.$$

dan

$$X_2 = Y_1 \cup Y_2$$

Maka berdasarkan penjelasan dalam sub bab 2.9,  $X_1$  dan  $X_2$  adalah dua subset  $R^3$  yang disjoint, dengan  $X_2$  kompak,  $X = X_1 \cup X_2$  kompak, dan  $X_1$  serta  $X_2$  invarian positif untuk Persamaan (4.6). Dari lemma 4.2 diperoleh  $Y_1, Y_2$ , dan  $X_1$  merupakan *global attractor* di dalam gabungan bidang  $s - x$  dan bidang  $s - y$  dan dalam  $R^3$ . Sedangkan  $X_2$  merupakan *uniformly strong repeller* terhadap  $X_1$ , yang didalamnya memuat dua titik kesetimbangan, yaitu  $E_1$  dan  $E_2$ .  $E_1$  sadel di dalam  $R^3$  dan jenis kestabilannya berada pada  $\{(s, 0, y), y \geq 0\}$ .  $E_2$  sadel di dalam  $R^3$  dan jenis kestabilannya berada pada  $\{(s, x, 0), x > 0\}$ . Sehingga  $E_1$  dan  $E_2$  merupakan *weak repellers* terhadap  $X_1$ .

Struktur jenis kestabilan  $E_1$  dan  $E_2$  (dengan  $E_2$  *global attractor* dalam bidang  $s - x$ ) mengakibatkan satu sama lain bukan rantai yang siklik di dalam batasan  $X_2$ . Dengan  $X_2$  merupakan *uniformly strong repeller* terhadap  $X_1$ , maka terdapat

$\delta_1 > 0$  dan  $\delta_2 > 0$  sehingga  $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq \delta_1$  dan  $\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \delta_2$  dengan  $\delta_1$  dan  $\delta_2$  tidak bergantung pada nilai awal  $X_1$ . Kemudian terdapat juga  $\delta_3 > 0$  sehingga  $\liminf_{t \rightarrow \infty} s(t) \geq \delta_3$  dengan  $\delta_3$  tidak bergantung pada nilai awal  $X_1$ . Misalkan terdapat  $\varepsilon > 0$ , yang dimana  $\varepsilon \geq \delta_1$ ,  $\varepsilon \geq \delta_2$ , dan  $\varepsilon \geq \delta_3$  maka terbukti bahwa  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} s(t) \geq \varepsilon$ ,  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq \varepsilon$ , dan  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} y(t) \geq \varepsilon$ .

*"Sesungguhnya telah datang kepadamu seorang rasul dari kaummu sendiri, berat terasa olehnya penderitaanmu, sangat menginginkan (keimanan dan keselamatan) bagimu, amat belas kasihan lagi penyayang terhadap orang-orang mukmin."*

[TQS: At-Taubah:128]

## BAB V

# KESIMPULAN DAN SARAN

## BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya tentang analisa stabilitas pada model *predator-prey* di dalam kemostat dengan fungsi respon umum dapat disimpulkan bahwa dengan adanya satu *predator* yang memangsa nutrisi dan *prey* serta satu *prey* yang mengonsumsi nutrisi, maka:

1. Penyelesaian dari sistem yang menggambarkan rantai makanan sederhana di dalam kemostat bersifat positif dan terbatas. Sehingga dengan sistem mempunyai penyelesaian positif di awal, maka sistem bisa mencapai kondisi persisten seiring pertambahan waktu. Demikian juga dengan keterbatasan penyelesaian sistem, yang dapat membantu dalam mengidentifikasi kestabilan sistem pada kondisi-kondisi tertentu.
2. Terdapat tiga titik kesetimbangan sistem pada kondisi *steady state*. Jika keberadaan titik kesetimbangan tersebut tunggal, maka hanya titik itulah yang stabil asimtotis secara lokal maupun global. Demikian juga jika hanya terdapat dua atau tiga titik kesetimbangan maka hanya salah satu saja yang merupakan titik stabil asimtotis lokal sekaligus sebagai penentu stabilitas global sistem yang bersifat stabil asimtotis global. Artinya pada kondisi inilah, ketika titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotis global, maka seluruh organisme komponen penyusun sistem yang *steady state* akan senantiasa tumbuh dan berkembang secara sinergis, baik dari segi antara pertumbuhan *predator* dan atau *prey*, maupun ketersediaan nutrisi. Dengan kata lain, jika hanya ada  $E_1$ , maka  $E_1$  stabil. Kemudian jika terdapat  $E_1$  dan  $E_2$ , maka  $E_2$  yang bersifat stabil, dan terakhir jika terdapat  $E_1$ ,  $E_2$ , dan  $E_c$  maka titik ketiga yang menentukan stabilitas sistem.

3. Persistensi sistem terwujud jika ke-tiga titik kesetimbangan sistem ada dengan salah satu titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotis global dan nilai limit inferior untuk waktu yang mendekati tak hingga dari setiap persamaan sistem, yaitu *predator*, *prey* dan nutrisi bernilai positif.

## 5.2 SARAN

Dalam tugas akhir yang disusun, model yang dianalisa menggunakan fungsi respon umum, maka untuk selanjutnya bisa dianalisa model sistem yang serupa dengan jenis fungsi respon yang berbeda. Atau penelitian bisa dikembangkan pada rantai makanan dengan kasus *predator* yang hanya mengonsumsi *prey* dan *prey* yang mengonsumsi nutrisi.



*"Ada tujuh golongan yang akan dinaungi Allah di bawah naungan-Nya, pada hari yang tidak ada naungannya kecuali naungan-Nya, yaitu pemimpin yang adil; Pemuda yang senantiasa beribadah kepada Allah semasa hidupnya; Seseorang yang hatinya senantiasa terpaut dengan masjid; Dua orang yang saling mencintai karena Allah; Seorang laki-laki yang diajak oleh seorang perempuan cantik dan berkedudukan untuk berzina tetapi dia berkata, "Aku takut kepada Allah!"; Seorang yang memberi sedekah tetapi dia merahasiakannya seolah-olah tangan kanannya tidak mengetahui apa yang diberikan oleh tangan kirinya; dan seseorang yang mengingat Allah di waktu sunyi sehingga bercucuran air matanya."*

[HR. Bukhari dan Muslim]

## DAFTAR PUSTAKA

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Butler, G. dan Waltman, P. Juni 1986. **Persistence in Dynamical System**, <URL: [http://www.mathcs.emory.edu/~waltmanjde\\_1986.pdf](http://www.mathcs.emory.edu/~waltmanjde_1986.pdf)>, diakses pada tanggal 15 Maret 2009.
- [2] Cronin, J. 1992. **Differential Equations: Introduction and Qualitative Theory, Second Edition, Revised and Expanded**. New York: Marcel Dekker, Inc.
- [3] Dhirasakdanon, T. dan Thieme. H.R. Oktober 2006. **Persistence of Vertically Transmitted Parasite Strains Which Protect Against More Virulent Horizontally ransmitted Strains**, <URL: <http://www.math.la.asu.edu/~thiemeprotect06oc16web.pdf>>, diakses pada tanggal 21 Maret 2009.
- [4] Dosen-dosen Jurusan Matematika. 2004. **Kalkulus I, Edisi ke 4**. Jurusan Matematika FMIPA ITS. Surabaya
- [5] El-Owaidy, H. M. dan Moniem, A.A. 2003. **On Food Chain In A Chemosat With Distinct Removal Rates**, <URL: <http://www.math.nthu.edu.tw/~amen/>>.
- [6] Finizio, N. dan Ladas, G. 1982. **Ordinary Differential Equation with Modern Applications (2<sup>nd</sup> edition)**. California: Wadsworth Publishing Company.
- [7] Gau, G. 2007. Analisa Kualitatif Pada Model Predator Prey Yang Dipengaruhi Kontrol Umpan Balik. **Tesis Jurusan Matematika FMIPA-ITS**. Surabaya.
- [8] Kuang. Oktober 2004. **Lectures 20**, <URL: <http://math.la.asu.edu/~kuang/class/494/Lecture20.pdf>>, diakses pada tanggal 15 Maret 2009.
- [9] Li, B. dan Kuang, Y. 2000. **Simple Food Chain In A Chemostat With Distinct Removal Rates**, <URL: <http://math.la.asu.edu/~kuang/paper/blikjman.pdf>>.
- [10] Renshaw, E. 1991. **Modelling Biological Populations in Space and Time**. Cambridge: Cambridge University Press

- [11] Robinson, R.C. 2004. **An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discretes**. New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- [12] Ross, S.L. 1984. **Differential Equation (3<sup>rd</sup> edition)**. New York: John Wiley & Sons.
- [13] Setiowati, Y. 2006. Masalah Eksploitasi Optimal Pada Sistem Predator Prey. **Tugas Akhir Jurusan Matematika FMIPA-ITS**. Surabaya
- [14] Strandberg, P.E. Juli 2003. **The Chemostat**, <URL: <http://www.midgard.liu.se/~b00perst/chemostat.pdf>>.
- [15] Wikipedia. **Chemostat**. <URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/chemostat>>.
- [16] Wolkowicz, G. dan Zhiqi, L. Februari 1992. **Global Dynamics of a Mathematical Model of Competition in the Chemostat: General Response Function and Differential Death Rates**, <URL: <http://links.jstor.org/sici?sici=0036-1399%28199202%2952%3A1%3C222%3AGDOAMM%3E2.0.Co%3B2-P>>.

### *Ucapan terima kasih...*

Karena keterbatasan pada bagian sebelumnya, maka halaman ini penulis persembahkan bagi orang-orang yang belum penulis sebutkan, tapi memberikan kontribusi yang cukup besar dalam penyusunan Tugas Akhir ini maupun selama masa perkuliahan. Diantaranya :

1. Kakak-kakak tersayang, *mas* Urip Hanjuni Widayanto, S. S, *mbak* Santi Peni Lestari, S. S, *mas* Widodo Dwi Widiyanto, S. T, dan keponakan satu-satunya, Farah Ayumna Rasyidina, yang rajin memberi semangat,
2. *Mbak* Ilmi, *mbak* Salma, *mbak* Sadidah, *mbak* Majida, *mbak* Ririn, *mbak* Rifa, Lutfi, Novita, *de* Ima, *de* Ida, dan *de* Zum, yang telah membuat penulis belajar banyak hal dalam kehidupan dengan amanah dakwah dan kuliah serta saudara-saudara seaqidah dalam memperjuangkan *Syariah* dan *Khilafah* yang ada di kampus dan yang menjadi tim sukses keputrian (*alm*) LP3M-ITS '06-'08,
3. *Mbak* Rosyidah, *mbak* Fatma, *mbak* Zahwa, *de* Tri, yang membuat penulis lebih memahami kompleksitas kehidupan dengan dakwah di masyarakat, serta saudara-saudara seperjuangan yang ada di wilayah S.Bar, yang senantiasa mengingatkan dan memotivasi untuk menyelesaikan TA dengan segala pengertiannya,
4. Mita Hapsari Jannah (*jazakillah* atas *file-filenya* dan semangatnya), Zakiyatun Nisa, Umi Kulsum, Zumrotus Sya'diyah, dan Nailul Iffah beserta teman-teman Angkatan 2004 yang lain, semoga kita dipertemukan kembali dalam *jannah-Nya* dengan ukhuwah yang hanya karena Allah semata,
5. *Mbak* Nurul'03, dan Ari'05 serta seluruh pengurus Kajian Jurusan Ibnu Muqhlah periode '05-'06 yang telah membuat penulis belajar berorganisasi,
6. *Secret admirer*, atas bantuan semangatnya secara tidak langsung,

7. Dila'04, *mbak* Wicak'03, dan *mbak* Mufidah'03 yang membantu *finishing touch* dalam penyelesaian Tugas Akhir ini,
8. Raras, Eric, Ita, Oki, Ridha, dan Bunda, yang setia menjadi teman dari SMA hingga sekarang.

Semoga yang telah dilakukan semua pihak, kelak menambah timbangan amal kebaikan masing-masing di akhirat dalam menuju surga Allah SWT.

## BIODATA PENULIS



Penulis dilahirkan di Surabaya, 31 Mei 1986, merupakan anak bungsu dari 4 bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu di TK Al-Hikmah Surabaya, SD Negeri Simomulyo IV/101 Surabaya, SLTP Negeri 12 Surabaya dan SMA Negeri 6 Surabaya. Setelah lulus SMA pada tahun 2004, Penulis mengikuti ujian SPMB dan diterima pada tahun yang sama di Jurusan Matematika

FMIPA-ITS. Di Jurusan Matematika, Penulis mengambil Bidang Minat Analisis Terapan. Penulis sempat aktif sebagai pengurus di Kajian Jurusan Matematika Ibnu Muqhlah, dan Lembaga Swadaya Mahasiswa Lembaga Pembentukan dan Pengembangan Pemikiran Mahasiswa (LSM LP3M) ITS. Untuk perbaikan karya penulis di masa yang akan datang, diharapkan *attention* melalui [liel\\_chuez@yahoo.com](mailto:liel_chuez@yahoo.com).