

**TUGAS AKHIR - KA 184801**

**PEMODELAN DAN SIMULASI UNTUK MENENTUKAN  
INSENTIF OPTIMAL BERBASIS WAKAF BAGI OPERATOR  
TAKAFUL DENGAN IMBAL HASIL INVESTASI STOKASTIK**

**KELVIN**  
NRP 06311840000028

Dosen Pembimbing

**Wawan Hafid S., S.Si, M.Si, M.Act.Sc**

NIP 1992201911068

**Endah Rokhmati M. P., Ph.D**

NIP 197612132002122001

**PROGRAM STUDI SARJANA SAINS AKTUARIA  
DEPARTEMEN AKTUARIA  
FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA**

2022





**TUGAS AKHIR - KA 184801**

**PEMODELAN DAN SIMULASI UNTUK MENENTUKAN  
INSENTIF OPTIMAL BERBASIS WAKAF BAGI OPERATOR  
TAKAFUL DENGAN IMBAL HASIL INVESTASI STOKASTIK**

**KELVIN**  
NRP 06311840000028

Dosen Pembimbing

**Wawan Hafid S., S.Si, M.Si, M.Act.Sc**

NIP 1992201911068

**Endah Rokhmati M. P., Ph.D**

NIP 197612132002122001

**PROGRAM STUDI SARJANA SAINS AKTUARIA**

DEPARTEMEN AKTUARIA

FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA

2022





**FINAL PROJECT - KA 184801**

**MODELING AND SIMULATION TO DETERMINE  
THE OPTIMAL WAQF-BASED INCENTIVE FOR  
ISLAMIC INSURANCE OPERATOR  
WITH STOCHASTIC INVESTMENT RETURN**

**KELVIN**  
NRP 06311840000028

Advisor

**Wawan Hafid S., S.Si, M.Si, M.Act.Sc**

NIP 1992201911068

**Endah Rokhmati M. P., Ph.D**

NIP 197612132002122001

**STUDY PROGRAM BACHELOR OF ACTUARIAL SCIENCE**

ACTUARIAL DEPARTMENT

FACULTY OF SCIENCE AND DATA ANALYTICS

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

SURABAYA

2022



## LEMBAR PENGESAHAN

### PEMODELAN DAN SIMULASI UNTUK MENENTUKAN INSENTIF OPTIMAL BERBASIS *WAKAF* BAGI OPERATOR TAKAFUL DENGAN IMBAL HASIL INVESTASI STOKASTIK

#### TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
memperoleh gelar Sarjana Ilmu Aktuaria pada  
Program Studi Sarjana Sains Aktuaria  
Departemen Aktuaria  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh : **KELVIN**  
NRP. 0631184000028

Disetujui oleh Tim Penguji Tugas Akhir :

- |  |               |   |
|--|---------------|---|
| 1. Wawan Hafid S., S.Si, M.Si, M.Act.Sc        | Pembimbing    | (  ) |
| 2. Endah Rokhmati M. P., Ph.D                  | Ko-pembimbing | (  ) |
| 3. Dr. Soehardjoepri, M.Si                     | Penguji       | (  ) |
| 4. Galuh Oktavia Siswono, S.Si, M.Si, M.Act.Sc | Penguji       | (  ) |

**SURABAYA**  
**Juli, 2022**

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

# APPROVAL SHEET

## MODELING AND SIMULATION TO DETERMINE THE OPTIMAL WAQF-BASED INCENTIVE FOR ISLAMIC INSURANCE OPERATOR WITH STOCHASTIC INVESTMENT RETURN

### FINAL PROJECT

Submitted to fulfill one of the requirements  
for obtaining a degree Bachelor of Actuarial Science at  
Undergraduate Study Program of Actuarial Science  
Department of Actuarial Science  
Faculty of Science and Data Analytics  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

By: **KELVIN**  
NRP. 0631184000028

Approved by Final Project Examiner Team:

- |  |            |   |
|--|------------|---|
| 1. Wawan Hafid S., S.Si, M.Si, M.Act.Sc        | Advisor    | (  ) |
| 2. Endah Rokhmati M. P., Ph.D                  | Co-Advisor | (  ) |
| 3. Dr. Soehardjoepri, M.Si                     | Examiner   | (  ) |
| 4. Galuh Oktavia Siswono, S.Si, M.Si, M.Act.Sc | Examiner   | (  ) |

**SURABAYA**  
**July, 2022**

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

## PERNYATAAN ORISINILITAS

Yang bertanda tangan dibawah ini:

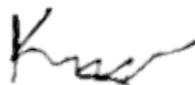
Nama mahasiswa / NRP : Kelvin / 06311840000028  
Departemen : Aktuaria  
Dosen Pembimbing / NIP : Wawan Hafid S., S.Si, M.Si, M.Act.Sc /  
1992201911068

Dengan ini menyatakan bahwa Tugas Akhir dengan judul “Pemodelan dan Simulasi untuk Menentukan Insentif Optimal Berbasis *Wakaf* bagi Operator Takaful dengan Imbal Hasil Investasi Stokastik” adalah hasil karya sendiri, bersifat orisinal, dan ditulis dengan mengikuti kaidah penulisan ilmiah.

Bilamana di kemudian hari ditemukan ketidaksesuaian dengan pernyataan ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan yang berlaku di Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Mengetahui  
Dosen Pembimbing

Surabaya, Juli 2022  
Mahasiswa



(Wawan Hafid S., S.Si, M.Si, M.Act.Sc)  
NIP. 1992201911068

(Kelvin)  
NRP. 06311840000028

Dosen Ko-Pembimbing



(Endah Rokhmati M. P., Ph.D)  
NIP. 197612132002122001

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

## STATEMENT OF ORIGINALITY

The undersigned below:

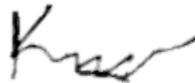
Name of student / NRP : Kelvin / 06311840000028  
Department : Aktuaria  
Advisor / NIP : Wawan Hafid S., S.Si, M.Si, M.Act.Sc /  
1992201911068

Hereby declare that Final Project with the tittle of “Modeling And Simulation To Determine The Optimal Waqf-Based Inventive For Islamic Insurance Operator With Stochastic Investment Return” is the result of my own work, is original, and written by following rules of scientific writing.

If in the future there is a discrepancy with this statement, then I am willing to accept sanctions in accordance with the provisions that apply at Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Acknowledged  
Advisor

Surabaya, Juli 2022  
Student



(Wawan Hafid S., S.Si, M.Si, M.Act.Sc)  
NIP. 1992201911068

(Kelvin)  
NRP. 06311840000028

Co-Advisor



(Endah Rokhmati M. P., Ph.D)  
NIP. 197612132002122001

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

**PEMODELAN DAN SIMULASI UNTUK MENENTUKAN INSENTIF OPTIMAL  
BERBASIS *WAKAF* BAGI OPERATOR TAKAFUL DENGAN IMBAL HASIL  
INVESTASI STOKASTIK**

**Nama / NRP : Kelvin / 0631184000028**  
**Departemen : Aktuaria FSAD-ITS**  
**Pembimbing : Wawan Hafid S., S.Si., M.Si., MAct.Sc.**  
**Endah Rokhmati M. P., Ph. D**

**Abstrak**

Penentuan insentif optimal bertujuan untuk meningkatkan kinerja operator sehingga dapat menyelesaikan masalah keagenan pada asuransi syariah, penelitian ini berfokus pada pengaruh insentif operator terhadap peserta dan operator yang digambarkan melalui fungsi utilitas. Model matematika dibentuk berdasarkan dua akad, yaitu akad *wakalah* dan akad *wakalah* berbasis *wakaf*. Insentif operator diasumsikan mengikuti proses stokastik dengan *geometric Brownian motion*. Preferensi risiko dari peserta dan operator takaful diasumsikan *risk-averse* (menghindari risiko). Penelitian diawali dengan pembentukan model akad *wakalah* dan akad *wakalah* berbasis *wakaf*, kemudian akan diperoleh fungsi utilitas peserta dan operator dari *payoff* yang terbentuk dari model awal, kemudian dicari kondisi ketika fungsi utilitas optimal untuk kedua pihak. Hasil penelitian ini menyimpulkan bahwa dalam model *wakalah* dan *wakalah* berbasis *wakaf* dapat memotivasi operator untuk menambah jumlah peserta sehingga dapat mengurangi risiko yang ditanggung masing-masing peserta secara individu, akan tetapi model *wakalah* dan *wakalah* berbasis *wakaf* tidak dapat memotivasi operator untuk meningkatkan upaya *underwriting*.

**Kata Kunci:** Asuransi Syariah, *Wakalah*, *Wakaf*, Insentif, *Geometric Brownian Motion*

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

**MODELING AND SIMULATION TO DETERMINE THE OPTIMAL WAQF-BASED  
INCENTIVE FOR ISLAMIC INSURANCE OPERATOR WITH STOCHASTIC  
INVESTMENT RETURN**

**Name / NRP : Kelvin / 0631184000028**  
**Department : Actuarial Science FSCIENTICS-ITS**  
**Advisor : Wawan Hafid S., S.Si., M.Si., MAct.Sc.**  
**Endah Rokhmati M. P., Ph.D**

**Abstract**

Determination of optimal incentives aims to improve operator performance to solve agency problems in sharia insurance, this study focuses on the effect of operator incentives on participants and operators which is described by the utility function. The mathematical model is formed based on two contracts, namely the wakalah contract and the *wakalah-waqf* contract. Operator incentives are assumed to follow a stochastic process with geometric Brownian motion. The risk preferences of takaful participants and operators are assumed to be risk-averse. The study begins with the formation of a *wakalah* contract model and a *wakalah-waqf* contract model, then the utility function of participants and operators will be searched for the payoff formed from the initial model, then look for the condition when the utility function is optimal for both parties. The results of this study conclude that the *wakalah* and *wakalah-waqf* models can motivate operators to increase the number of participants so as to reduce the risk borne by each participant individually, but the wakalah and waqf-based models cannot motivate operators to increase underwriting efforts.

**Keywords:** Sharia Insurance, *Wakalah* , *Waqf*, Incentive, Geometric Brownian Motion

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

## KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis haturkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa karena atas berkat, rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini yang berjudul "Pemodelan dan Simulasi untuk Menentukan Insentif Optimal Berbasis *Wakaf* bagi Operator Takaful dengan Imbal Hasil Investasi Stokastik " sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Aktuaria FSAD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Penyusunan tugas akhir ini mendapat doa, bimbingan, dan bantuan besar dari berbagai pihak. Oleh sebab itu, dengan segenap hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Puji syukur dan terima kasih kepada Tuhan YME karena atas kasih dan karunia-nya maka penulisan tugas akhir ini dapat terselesaikan
2. Yang terhormat, Bapak Dr. Drs. Soehardjoepri, M.Si. selaku Kepala Departemen Aktuaria FSAD ITS dan juga selaku penguji pertama dalam tugas akhir ini yang memberikan kritikan dan masukan agar tugas akhir ini dapat berjalan dengan baik.
3. Yang terhormat, Bapak Wawan Hafid Syaifudin, S.Si, M.Si, M.Act.Sc selaku pembimbing pertama dalam tugas akhir ini yang selalu memberi saran, masukan, kritik, dan motivasi yang tiada hentinya kepada penulis.
4. Yang terhormat, Ibu Endah Rokhmah M. P., S.Si, MT, Ph.D selaku pembimbing kedua selaku pembimbing pertama dalam tugas akhir ini yang selalu memberi saran, masukan, kritik, dan motivasi yang tiada hentinya kepada penulis.
5. Yang terhormat, Ibu Galuh Oktavia Siswono S.Si, M.Si, M.Act.Sc selaku penguji kedua dalam tugas akhir ini yang memberikan kritikan dan masukan agar tugas akhir ini dapat berjalan dengan baik.
6. Yang terhormat, Ibu Ulil Azmi, S.Si, M.Si dan Almarhumah Ibu Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes selaku dosen wali yang telah banyak memberikan saran yang membangun kepada penulis mulai perkuliahan hingga penyelesaian tugas akhir.
7. Yang terhormat, Bapak dan Ibu dosen serta para staf Departemen Aktuaria FSAD ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
8. Kedua orang tua penulis Leman Partono dan Ai Tjheng Tjhandra serta saudari Siska, saudari Sindy dan saudari Tasya yang penulis cintai dan sayangi yang selalu mendoakan, memberikan motivasi dan dukungan bagi penulis baik selama dalam penyusunan skripsi maupun selama menempuh pendidikan.
9. Teman-teman Arkagana yang membantu dan memberikan dukungan sejak awal memulai studi hingga penyusunan tugas akhir.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang turut mendoakan, mendukung, memberi motivasi, kritikan dan saran sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa penulisan tugas akhir ini belum sempurna karena keterbatasan dari penulis. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk lebih menyempurnakan karya ilmiah ini. Semoga karya ilmiah ini bermanfaat bagi pembaca dan semua pihak.

Jakarta, 13 Juni 2022



Penulis

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

## DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN .....	iii
APPROVAL SHEET .....	v
PERNYATAAN ORISINILITAS .....	vii
STATEMENT OF ORISINILITY .....	ix
Abstrak .....	xi
Abstract .....	xiii
KATA PENGANTAR .....	xv
DAFTAR ISI .....	xvii
DAFTAR GAMBAR .....	xix
DAFTAR TABEL .....	xxi
DAFTAR LAMPIRAN .....	xxi
DAFTAR SIMBOL .....	xxiii
<b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan Penelitian .....	3
1.5 Manfaat Penelitian .....	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....</b>	<b>5</b>
2.1 Penelitian Terdahulu .....	5
2.2 Asuransi Syariah .....	5
2.3 Teori Expected Utility .....	8
2.4 Rata-rata Geometrik .....	9
2.5 Geometric Brownian Motion .....	9
2.6 Teknik Optimasi .....	10
2.7 Simulasi .....	10
2.8 Biaya Operasional .....	10
2.9 Pendapatan dari Investasi Dana Takaful .....	10
<b>BAB III METODE PENELITIAN .....</b>	<b>11</b>
3.1 Studi Literatur .....	11
3.2 Membentuk Model Matematika dari Insentif Operator Takaful .....	11
3.3 Penyelesaian Model Matematika Insentif Operator Takaful .....	11
3.4 Simulasi Model .....	12
3.5 Penarikan Kesimpulan .....	12
<b>BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN .....</b>	<b>15</b>
4.1 Pembentukan Model Insentif Operator Takaful .....	15
4.1.1 Model Matematika pada Akad <i>Wakalah</i> Murni .....	16
4.1.2 Model Matematika pada Akad <i>Wakalah</i> Berbasis <i>Wakaf</i> .....	20
4.2 Penentuan Insentif Optimal Operator Takaful .....	24
4.2.1 Insentif Optimal pada Akad <i>Wakalah</i> Murni .....	24
4.2.2 Insentif Optimal pada Akad <i>Wakalah</i> Berbasis <i>Wakaf</i> .....	25
4.3 Simulasi Numerik Tingkat Pengembalian ( $i$ ) .....	26
4.4 Simulasi Utilitas Operator .....	28
4.4.1 Simulasi Utilitas Operator Terhadap Porsi Bagi Hasil Operator ( $\beta$ ) .....	28
4.4.2 Simulasi Utilitas Operator Terhadap Porsi Premi Untuk Upah <i>Wakalah</i> ( $\alpha$ ) .....	29
4.4.3 Simulasi Utilitas Operator Terhadap Jumlah Peserta ( $n$ ) .....	29

4.4.4 Simulasi Utilitas Operator Terhadap Porsi Dana <i>Wakaf</i> Untuk Investasi ( $k$ ) .....	30
4.5 Simulasi Utilitas Peserta.....	30
4.5.1 Simulasi Utilitas Peserta Terhadap Porsi Bagi Hasil Operator ( $\beta$ ) .....	30
4.5.2 Simulasi Utilitas Peserta Terhadap Porsi Premi Untuk Upah <i>Wakalah</i> ( $\alpha$ ).....	31
<b>BAB V KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>	<b>33</b>
5.1 Kesimpulan.....	33
5.2 Saran.....	33
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>35</b>
<b>LAMPIRAN.....</b>	<b>37</b>
<b>BIODATA PENULIS.....</b>	<b>48</b>

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b> Skema Akad <i>Wakalah</i> Murni .....	7
<b>Gambar 2.2</b> Skema Model Takaful Berbasis <i>Wakaf</i> .....	8
<b>Gambar 3.1</b> Diagram Alir Pengerjaan Tugas Akhir .....	13
<b>Gambar 4.1</b> Model Akad <i>Wakalah</i> Murni .....	17
<b>Gambar 4.2</b> Model Akad <i>Wakalah</i> Berbasis <i>Wakaf</i> .....	21
<b>Gambar 4.3</b> Simulasi <i>Geometric Brownian Motion</i> Tingkat Pengembalian (i).....	27
<b>Gambar 4.4</b> Simulasi Fungsi Utilitas Operator Terhadap $\beta$ .....	28
<b>Gambar 4.5</b> Simulasi Fungsi Utilitas Operator Terhadap $\alpha$ .....	29
<b>Gambar 4.6</b> Simulasi Fungsi Utilitas Operator Terhadap $n$ .....	29
<b>Gambar 4.7</b> Simulasi Fungsi Utilitas Operator Terhadap $k$ .....	30
<b>Gambar 4.8</b> Simulasi Fungsi Utilitas Peserta Terhadap $\beta$ .....	31
<b>Gambar 4.9</b> Simulasi Fungsi Utilitas Peserta Terhadap $\alpha$ .....	31

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 2.1</b> Perbedaan Asuransi Syariah dan Asuransi Konvensional .....	6
<b>Tabel 4.1</b> Nilai parameter simulasi GBM .....	27
<b>Tabel 4.2</b> Nilai Parameter Simulasi Utilitas Operator .....	28
<b>Tabel 4.3</b> Nilai Parameter Simulasi Utilitas Peserta .....	30

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

## DAFTAR LAMPIRAN

<b>Lampiran 1</b>	Penurunan Formula Model Akad Wakalah Murni.....	37
<b>Lampiran 2</b>	Penurunan Fungsi Utilitas Operator untuk Model Akad Wakalah Murni .....	38
<b>Lampiran 3</b>	Penurunan Fungsi Utilitas Peserta untuk Model Akad Wakalah Murni .....	39
<b>Lampiran 4</b>	Penurunan Formula Model Akad Wakalah Berbasis Wakaf .....	40
<b>Lampiran 5</b>	Penurunan Fungsi Utilitas Peserta untuk Model Akad Wakalah Murni .....	41
<b>Lampiran 6</b>	Penurunan Fungsi Utilitas Operator untuk Model Akad Wakalah Murni .....	42
<b>Lampiran 7</b>	<i>Syntax</i> untuk Simulasi <i>Geometric Brownian Motion</i> .....	43
<b>Lampiran 8</b>	<i>Syntax</i> untuk Simulasi Utilitas .....	44

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

## DAFTAR SIMBOL

No.	Simbol	Keterangan
1.	$U$	Fungsi Utilitas
2.	$A$	Koefisien penghindaran risiko
3.	$\sigma$	Volatilitas
4.	$COE$	<i>Combined Operating Expense</i>
5.	$n$	Jumlah peserta takaful
6.	$c$	Klaim rata-rata
7.	$u$	Imbalan atas usaha operator takaful
8.	$e_u$	Upaya <i>underwriting</i>
9.	$\epsilon_c$	<i>random noise</i> (i.i.d) klaim
10.	$IITF$	<i>investment income from tabarru' fund</i>
11.	$i$	Rate keuntungan investasi
12.	$I$	Dana yang diinvestasikan/dana investasi
13.	$\epsilon_i$	<i>random noise</i> (i.i.d) investasi
14.	$C$	Standar biaya pribadi
15.	$c_p$	Kemiringan biaya marginal untuk mendapatkan peserta
16.	$W_w$	Upah <i>Wakalah</i>
17.	$\alpha$	Porsi premi untuk upah <i>wakalah</i>
18.	$P$	Total kontribusi
19.	$p$	Rata-rata kontribusi peserta
20.	$k$	Porsi dana <i>wakaf</i> untuk investasi
21.	$DT$	Dana tabarru'
22.	$DR$	Dana risiko
23.	$T_I$	Total dana investasi
24.	$x_o$	<i>Payoff</i> operator
25.	$x_p$	<i>Payoff</i> peserta
26.	$U_p$	Fungsi utilitas peserta
27.	$U_o$	Fungsi utilitas operator
28.	$var(x_o)$	Varians <i>payoff</i> operator
29.	$var(x_p)$	Varians <i>payoff</i> peserta
30.	$E(x_o)$	Ekspektasi <i>payoff</i> operator
31.	$E(x_p)$	Ekspektasi <i>payoff</i> peserta
32.	$\psi$	Koefisien penghindaran risiko peserta
33.	$\phi$	Koefisien penghindaran risiko operator
34.	$DW$	Dana <i>wakaf</i>
35.	$R$	Modal wakaf
36.	$\beta$	Porsi bagi hasil operator
37.	$W_u$	Bagi hasil investasi operator

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

# BAB I

## PENDAHULUAN

Bab I menjelaskan gambaran umum dari penulisan tugas akhir meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan tugas akhir.

### 1.1 Latar Belakang

Perkembangan dunia perbankan dan perasuransian syariah sedang banyak terjadi di banyak negara, termasuk di Indonesia. Perusahaan asuransi pelopor asuransi berbasis syariah adalah Asuransi Takaful yang berdiri pada 1994. Perasuransian syariah berkembang pesat khususnya sejak 2010-2011 di mana dengan terbitnya Fatwa Dewan Syariah Nasional N0:21/DSN-MUI/X/2001 tentang Pedoman Umum Asuransi Syariah semakin mendorong perkembangan perasuransian syariah. Asuransi syariah adalah usaha saling melindungi dan tolong menolong antara sejumlah orang atau pihak melalui investasi dalam bentuk aset dan/atau *tabarru'* yang memberikan pola pengembalian untuk menghadapi risiko tertentu melalui akad (perikatan) yang sesuai dengan syariah (Sumarti, 2018). Secara umum, perbedaan utama asuransi syariah dan asuransi konvensional terletak pada konsep fundamental dan perbedaan pengelolaan risiko. Aspek fundamental asuransi konvensional merupakan jual beli perjanjian antara peserta dan perusahaan asuransi. Di sisi lain, asuransi syariah didefinisikan sebagai kegiatan tolong menolong dan tidak bertujuan komersial. Berdasarkan aspek pengelolaan risiko, asuransi konvensional mengelola risiko dengan cara transfer risiko yang artinya memindahkan risiko dari peserta ke perusahaan asuransi. Hal tersebut berbeda dengan asuransi syariah yang mengelola risiko dengan cara antar peserta berbagi risiko yang artinya risiko ditanggung bersama oleh perusahaan dan peserta asuransi (Puspitasari, 2016). Untuk produk-produk asuransi syariah biasanya ada produk takaful kesehatan, takaful umum dan takaful keluarga. Produk takaful umum adalah untuk kebakaran, kendaraan, dan *engineering*, sedangkan produk takaful keluarga adalah untuk jiwa (Malik, 2019).

Pembentukan perjanjian asuransi dalam asuransi syariah selalu diawali dengan adanya akad yang artinya ikatan antara kedua belah pihak yang melakukan transaksi yang didasari atas keyakinan dan kepercayaan antara keduanya untuk mencapai tujuan yang telah disepakati bersama tanpa ada unsur pemaksaan. Menurut Fatwa DSN No. 21, akad asuransi terdiri dari akad *tijarah* dan *tabarru'*. Praktik asuransi syariah akad *tijarah* merupakan tabungan peserta asuransi yang diinvestasikan sebagai dana tabungan peserta yang wajib dikembalikan dan diserahkan kepada peserta. Akad *tabarru'* merupakan kumpulan dana kebajikan untuk saling menolong dan saling membantu. Pada akad sesuai dengan prinsip syariah tidak mengandung *gharar* (penipuan), *maysir* (perjudian), dan *riba'* (Ashal, 2017).

Perusahaan asuransi syariah atau operator takaful bekerja untuk mendapatkan hasil dari mengoperasikan akad. Insentif keuangan yang ditawarkan kepada operator takaful dibatasi agar sesuai dengan Hukum Islam. Pada praktiknya, insentif yang diterima oleh operator berasal dari 3 skema. Pertama kontrak *wakalah* dimana operator mengelola takaful untuk menerima insentif diawal, kedua *mudharabah* (bagi hasil) di mana operator takaful menerima insentif dalam pendapatan investasi dari teknis cadangan, dan ketiga kontrak *mudharabah* yang dimodifikasi (*surplus-sharing*) di mana operator takaful menerima insentif dalam surplus asuransi. Kebanyakan operator takaful menggunakan gabungan dari ketiga akad ini dalam operasi mereka. Tugas akhir ini hanya berfokus pada penggunaan akad *wakalah* dan akad *wakalah* berbasis *wakaf*.

Hubungan antara pemegang polis dan operator takaful bisa diibaratkan dengan hubungan pemilik dan agen yang dikenal dengan istilah *agency problem* (masalah keagenan) di mana operator takaful merupakan operator dan pemegang polis merupakan pemilik. Akad utama yang

digunakan dalam takaful adalah akad *wakalah*. Ini secara harfiah berarti kontrak keagenan di mana pemilik mengontrak agen untuk melakukan tugas dengan imbalan biaya yang telah disepakati sebelumnya. Pada takaful yang mengandung akad *wakalah*, terdapat konflik yang harus diatasi. Agen didorong oleh kebutuhan untuk memaksimalkan insentif di mana *wakalah fee* (insentif untuk operator takaful) ditentukan sebagai persentase dari premi pendapatan. Masalah yang bahaya adalah ketika peningkatan insentif ini dicapai melalui *underwriting* yang buruk dan penetapan harga premi yang tidak tepat. Insentif yang lebih tinggi tidak hanya menghasilkan *wakalah fee* yang lebih tinggi, tetapi juga menghasilkan defisit dalam dana risiko. Pada takaful, defisit dalam dana risiko meliputi untuk rekening pemegang polis, bukan operator takaful. Sangat jelas permasalahan keagenan pada kasus ini tidak menyelaraskan kepentingan agen dan pemilik. Salah satu faktor yang bisa meningkatkan kinerja karyawan untuk mitigasi masalah keagenan adalah insentif yang diterima (Gonulal, 2012). Insentif disini kemudian akan direpresentasikan sebagai *payoff* yang kemudian nilai *payoff* akan dinyatakan sebagai suatu fungsi utilitas berdasarkan teori *expected utility*. Pemberian insentif yang optimal kepada operator takaful akan meningkatkan kinerja operator menjadi salah satu solusi untuk mengurangi masalah keagenan. Penentuan insentif digunakan metode optimasi kepada fungsi utilitas yang dalam matematika biasanya merupakan upaya memaksimalkan atau meminimumkan fungsi. Pembentukan fungsi utilitas berbeda sesuai preferensi risiko sehingga kita perlu memahami sifat dari pemegang polis sebagai pemilik dana dalam kontribusi. Menurut Eric Briys (1990), individu yang *risk-averse* (menghindari risiko) cenderung mencari solusi untuk mengurangi kerugian finansial yang mungkin diterima dengan cara mengurangi keparahan kerugian yang terjadi dan mengurangi kemungkinannya terjadinya kerugian. Penelitian Ehrlich pada tahun 1972 menunjukkan bahwa pelanggan tipe *risk-averse* akan selalu melakukan investasi dalam mengurangi keparahan kerugian yang terjadi dengan memilih produk asuransi (Ehrlich, 1972). Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa untuk pemegang polis cenderung memiliki preferensi risiko *risk-averse* atau menghindari risiko.

Memodelkan *payoff* dibutuhkan nilai imbal hasil investasi masa depan. Penentuan imbal hasil investasi terdapat 2 model yang umum digunakan yaitu model deterministik dan model stokastik. Pemodelan deterministik secara fundamental kurang baik karena tidak mempertimbangkan variabel yang dapat berpengaruh dari waktu ke waktu, sedangkan model stokastik dapat mencerminkan skenario ekonomi pada dunia nyata yang memberikan berbagai kemungkinan imbal hasil yang terjadi (Van, 2002). Penelitian Paulsten menunjukkan banyak permasalahan yang rumit dapat dipecahkan dengan memasukkan model stokastik untuk imbal hasil dari investasi karena model stokastik dapat memprediksi berbagai kemungkinan masa depan (Paulsten, 1997). Investasi menurut syariah harus mengikuti prinsip investasi syariah yang melarang risiko berlebihan yang menimbulkan kerugian (*gharar*), dan risiko tinggi tidak dapat dibenarkan dengan laba atas investasi yang tinggi (*maysir*). Selain itu, investor syariah tidak bisa menentukan nilai laba atas investasi karena akan dianggap sebagai riba, tetapi investor syariah dapat memaksimalkan laba atas investasi mereka untuk probabilitas kerugian tertentu dan diketahui. Oleh karena itu, lebih cocok bagi investor syariah untuk mempertimbangkan model stokastik untuk imbal hasil di mana pengembaliannya maksimal dan risiko tetap dioptimalkan (Masri, 2018).

Tugas akhir ini akan menjabarkan model matematika dari insentif yang akan diterima oleh operator takaful berdasarkan akad *wakalah* dan akad *wakalah* berbasis *wakaf* yang digunakan oleh operator takaful. Untuk imbal hasil investasi diasumsikan stokastik, kemudian akan ditentukan akad bagaimanakah yang akan memberikan insentif optimal menggunakan metode optimasi uji turunan dan simulasinya.

## 1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana mendapatkan model matematika dari insentif pada akad *wakalah* dan akad *wakalah* berbasis *wakaf* yang akan diterima oleh operator takaful?
2. Bagaimana mendapatkan dan menganalisa nilai insentif optimal pada akad *wakalah* dan akad *wakalah* berbasis *wakaf* yang akan diterima oleh operator takaful?
3. Bagaimana analisa hasil simulasi dari model insentif pada akad *wakalah* dan akad *wakalah* berbasis *wakaf* yang akan diterima oleh operator takaful?

## 1.3 Batasan Masalah

1. Dalam menentukan insentif optimal hanya berdasarkan pada akad *wakalah* dan akad *wakalah* berbasis *wakaf*.
2. Imbal hasil investasi dalam tugas akhir ini diasumsikan bersifat stokastik dengan mengikuti model *geometric Brownian motion*.
3. Operator takaful dan pemegang polis diasumsikan sebagai *risk-averse*
4. Premi yang dibayarkan oleh para pemegang polis merupakan single premium dan diasumsikan besarnya sama.
5. Simulasi dilakukan menggunakan software R dan hanya menggunakan parameter yang sudah ditentukan di dalam tugas akhir ini.

## 1.4 Tujuan Penelitian

1. Mendapatkan model matematika dari insentif pada akad *wakalah* dan akad *wakalah* berbasis *wakaf* yang akan diterima oleh operator takaful.
2. Mendapatkan insentif optimal berbasis *wakaf* yang akan diterima oleh operator takaful jika hasil investasi bersifat stokastik.
3. Menganalisa hasil simulasi dari model insentif pada akad berbasis *wakaf* yang akan diterima oleh operator takaful jika hasil investasi bersifat stokastik.

## 1.5 Manfaat Penelitian

1. Menambah pengetahuan pembaca dalam takaful sehingga dapat memahami mengenai model insentif bagi operator takaful yang berbasis *wakaf*.
2. Membantu peneliti dalam mengaplikasikan metode optimasi dan simulasi dalam memecahkan masalah dalam bidang asuransi syariah.
3. Membantu regulator untuk memahami dan memudahkan pengawasan dalam bidang asuransi syariah.
4. Memberikan gambaran kepada perusahaan asuransi syariah untuk menentukan insentif optimal yang dapat diterima dengan memberikan kinerja terbaik untuk mitigasi permasalahan keagenan untuk mencapai kepentingan bersama antara pemegang polis dan operator takaful.

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini memuat tentang teori-teori utama maupun pendukung yang digunakan dalam penyelesaian masalah dalam tugas akhir, antara lain yaitu penelitian terdahulu, asuransi syariah, teori *expected utility*, *geometric Brownian motion* dan teknik optimasi.

### 2.1 Penelitian Terdahulu

Penelitian yang mencari insentif optimal untuk operator takaful telah dilakukan oleh Hayat Khan yang dipublikasi pada tahun 2014. Penelitian ini menganalisa pengaruh insentif operator takaful dalam mitigasi permasalahan keagenan (*agency problem*) antara peserta asuransi dan operator takaful. Sumber insentif yang dimaksud berasal dari *wakalah*, *mudharabah*, dan *surplus-sharing*. Penelitian ini menyimpulkan bahwa semua insentif yang ditawarkan kepada operator takaful harus memasukkan *surplus-sharing*. Menawarkan *mudharabah* dalam bentuk *surplus-sharing* akan optimal hanya pada saat investasi cadangan teknis melebihi pengembalian yang sama atas usaha yang dilakukan dalam risiko *underwriting*. Model penggabungan *wakalah* juga direkomendasikan karena dapat mendorong operator takaful untuk menambah peserta asuransi yang akan menyebabkan berkurangnya rata-rata risiko klaim pemegang polis (Khan, 2014).

Pada tahun 2019, Artikel yang dituliskan Hayat Khan menjelaskan kembali insentif optimal operator takaful dalam bentuk kerangka kerja analitis yang sederhana, non-teknis untuk menganalisa model bisnis alternatif yang bisa digunakan oleh regulator untuk mencapai kepentingan bersama antara pemegang polis dan operator takaful. Pada artikel ini disarankan penggunaan gabungan *wakalah-surplus-sharing* menjadi opsi yang optimal untuk operator takaful. Biaya *wakalah* bisa mengurangi permasalahan seleksi yang merugikan perusahaan dan biaya *wakalah* yang berlebihan bisa digunakan untuk memproteksi operator takaful baru (Khan, 2019).

Penelitian yang meneliti pengaruh model takaful yang berbeda terhadap operator takaful dilakukan oleh Maryaam Saeed yang dipublikasi pada tahun 2019. Penelitian ini menggunakan data insentif pada tahun 2008 sampai dengan tahun 2017 dari Pakistan dan Malaysia. Penelitian ini melakukan *review* hasil grafik dan hasilnya model *wakalah* berbasis *wakaf* yang menghasilkan insentif tertinggi. Terdapat banyak ulama syariah juga menyepakati penggunaan model *wakalah* berbasis *wakaf* dimana jumlah surplus sepenuhnya menjadi milik peserta (Saeed, 2019).

Pada tahun 2021, Ningsih meneliti tentang penentuan insentif optimal yang bertujuan untuk meningkatkan kinerja operator, mengingat bahwa kumpulan premi yang dibayarkan oleh peserta, tetap menjadi milik peserta dan operator hanya bertugas untuk mengelola uang tersebut. Pembentukan model dengan model *wakalah* murni, *mudharabah*, dan *wakalah* berbasis *wakaf*. Hasil penelitian Agustini menunjukkan *wakalah* murni dan *wakalah* berbasis *wakaf* dapat memotivasi operator meningkatkan untuk meningkatkan banyaknya peserta takaful sampai mencapai peserta optimal (Ningsih, 2021).

### 2.2 Asuransi Syariah

Menurut Fatwa Dewan Syariah Nasional N021/ DSN-MUI/ X/ 2001 Tentang Pedoman Umum Asuransi Syariah, asuransi syariah adalah usaha saling melindungi dan tolong menolong di antara sejumlah orang atau pihak melalui investasi dalam bentuk asset dan atau *tabarru'* yang memberikan pola pengembalian untuk menghadapi risiko tertentu melalui akad (perikatan) yang sesuai dengan syariah (Sumarti, 2018). Asuransi syariah atau disebut takaful adalah alternatif untuk asuransi konvensional yang didasarkan pada gagasan solidaritas sosial,

kerjasama, dan ganti rugi bersama atas kerugian para anggota. Hal tersebut merupakan kesepakatan di antara sekelompok orang yang setuju untuk bersama-sama mengganti kerugian atau kerusakan yang mungkin menimpa salah satu dari mereka dari dana yang mereka sumbangkan secara kolektif. Tujuan utama takaful adalah untuk membawa keadilan bagi semua pihak yang terlibat, dan tujuannya kontrak adalah untuk membantu pemegang polis melalui masa-masa sulit. Penghasilan profit bukan tujuan utama, sambil berbagi setiap keuntungan yang dihasilkan secara kebetulan dapat diterima (Hussain, 2011).

Berikut perbedaan antara asuransi syariah dan asuransi konvensional yang ditunjukkan pada Tabel 2.1 (Sumarti, 2018).

**Tabel 2.1** Perbedaan Asuransi Syariah dan Asuransi Konvensional

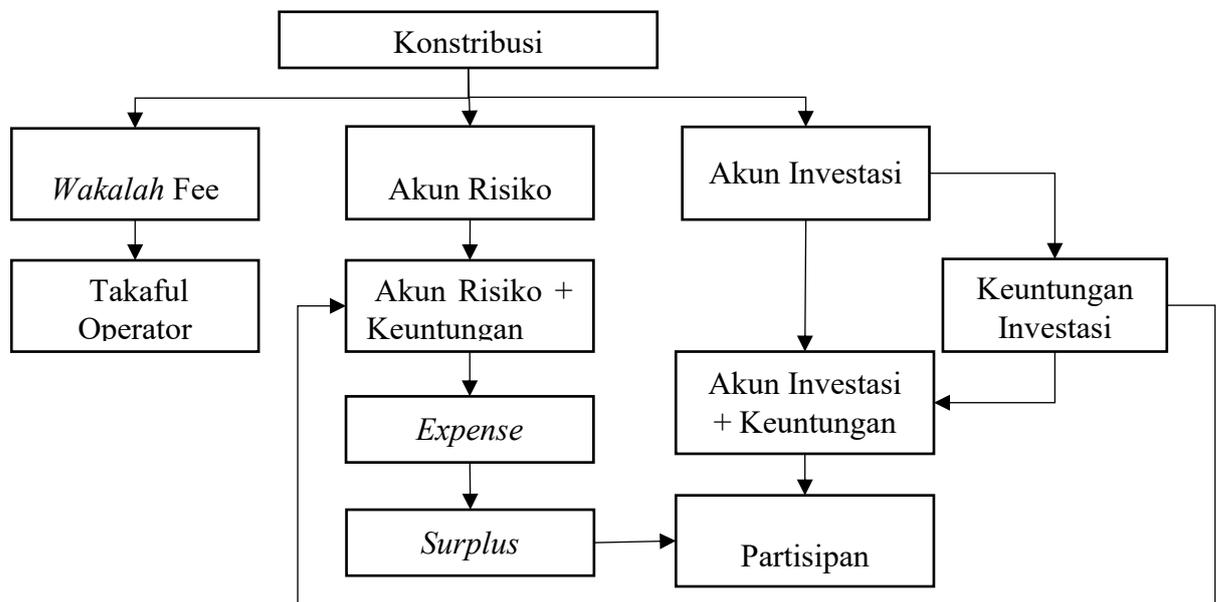
No.	Keterangan	Asuransi Syariah	Asuransi Konvensional
1.	Dewan Pengawas	Dewan Pengawas Syariah	Tidak ada
2.	Akad	Akad <i>tabarru</i> dan akad <i>tijarah</i> (mudharabah, <i>wakalah</i> , wadiah, syirkah, dan sebagainya).	Investasi berdasarkan bunga
3.	Kepemilikan dana yang terkumpul/premi	Milik peserta, perusahaan Amanah memegang mengelola	Milik perusahaan, bebas menentukan investasinya
4.	Keuntungan	Sistem bagi hasil ( <i>mudharabah</i> )	Milik perusahaan
5.	Sumber Pembayaran Klaim	Rekening <i>tabarru</i>	Rekening perusahaan
6.	Jaminan/risk (risiko)	<i>sharing of risk</i>	<i>Transfer of risk</i>
7.	Loading (Komisi Agen)	Diambil dari dana pemegang saham, atau dari sekitar 20-30% dari premi tahun pertama sehingga nilai tunai tahun pertama terbentuk	Nilainya cukup besar terutama untuk komisi agen, yang bisa menyerap premi tahun pertama dan kedua sehingga nilai tunai pada tahun pertama dan kedua biasanya belum ada
8.	Sumber pembayaran klaim	Dari rekening <i>tabarru</i> , yaitu peserta saling menanggung sehingga menanggung bersama risiko	Dari rekening perusahaan sebagai konsekuensi penanggung terhadap tertanggung

Terdapat berbagai model berbeda yang dapat digunakan dalam perusahaan asuransi syariah, salah satunya adalah model *mudharabah* yang menjelaskan bahwa semua pemegang polis harus setuju untuk berbagi keuntungan (atau kerugian). Pada model ini, operator tidak perlu membayar komisi tetapi akan menerima gaji yang akan dibayar dari bagian keuntungan yang dibuat oleh perusahaan. Rasio pembagian ditentukan terlebih dahulu. Biasanya total biaya dibebankan kepada pemegang saham di bawah *mudharabah*. Model kedua adalah model *wakalah*, model ini menggambarkan bahwa surplus dana pemegang polis investasi masuk ke pemegang polis. Peserta membayar biaya *wakalah* dari kontribusi yang menutupi total biaya

operator bisnis dan insentif operator. Biaya *wakalah* ditentukan oleh perusahaan asuransi syariah. Pemberian insentif kepada operator untuk tata kelola yang baik dilakukan dengan biaya manajemen dibayarkan sesuai tingkat pertunjukan. Model ketiga adalah model *wakalah* berbasis *wakaf*. Menurut model ini, dana *wakaf* dibuat sebagai hukum yang terpisah dengan kontribusi jumlah peserta dan jumlah yang disetorkan ke dana ini dianggap sebagai sumbangan *tabarru'*. Tujuan dari dana ini adalah untuk memberikan keringanan kepada peserta dari kerugian yang ditentukan sesuai dengan: syarat dan ketentuan dana *wakaf*. Ketiga model ini yang digunakan perusahaan asuransi untuk mendapatkan pendapatan yang disebut operator takaful (Puspitasari, 2016).

### 2.2.1 Akad *Wakalah*

Akad *wakalah* merupakan akad pelimpahan kekuasaan yang diberikan peserta asuransi sebagai pihak bertanggung kepada perusahaan asuransi sebagai penanggung sehingga pihak asuransi mendapat insentif atas pengelolaan dana premi. Akad ini terjadi ketika peserta asuransi memberikan kuasa kepada perusahaan asuransi syariah dalam pengelolaan maupun manajemen operasional serta dalam berbagai objek transaksi (Alam, 2020). Dana takaful merupakan principal dan memilih perusahaan takaful sebagai *wakeel*. Setelah dana takaful terbentuk, operator mengundang orang untuk berpartisipasi dalam dana takaful yang memberikan berbagai proteksi. Kontribusi setiap orang dihitung berdasarkan jenis dan jumlah pertanggunganan yang diminta oleh peserta. Kontribusi peserta masuk dalam dana takaful, sebagai imbalan untuk menyediakan layanan ini, operator takaful dikompensasikan dalam bentuk biaya *wakalah* yang merupakan persentase dari kontribusi peserta (Malik, 2019). Berikut model *wakalah* murni menurut Zuriah dan Hendon pada tahun 2009 pada Gambar 2.1 (Salman, 2017).

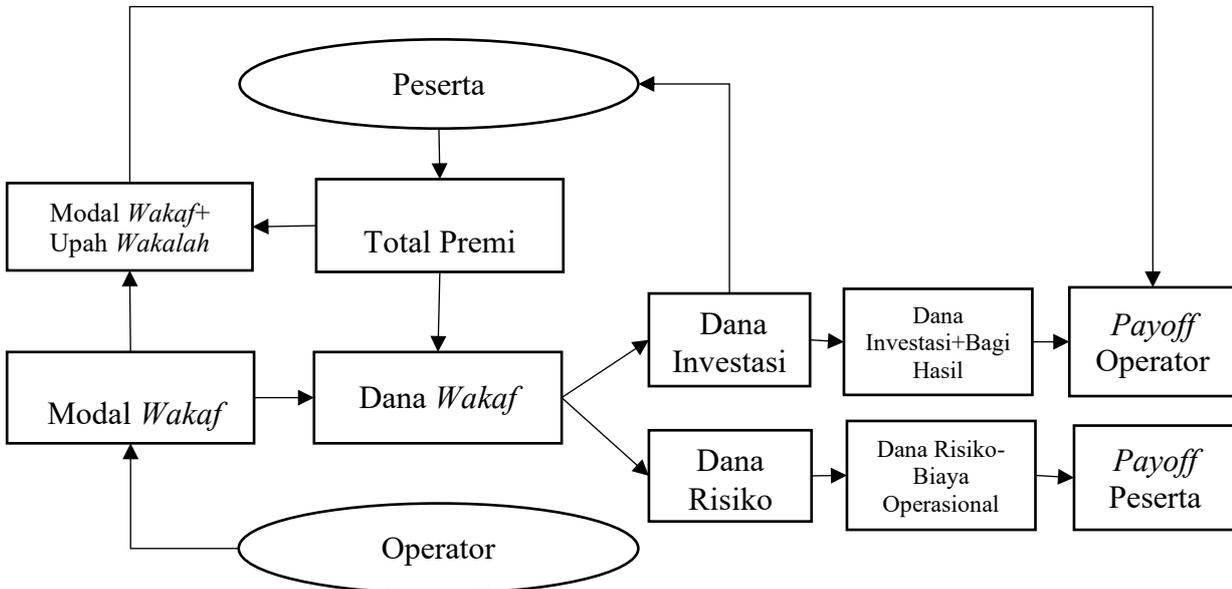


Gambar 2.1 Skema Akad *Wakalah* Murni

### 2.2.2 Akad *Wakalah* Berbasis *Wakaf*

Istilah *wakaf* mengacu pada hal-hal yang utuh di dalamnya namun menghasilkan pendapatan yang melayani tujuan amal. Di bawah model ini, diperlukan injeksi dana awal untuk membuat sebuah dana *wakaf* (Jamaldeen, 2012). Setelah dana *wakaf* dibuat, operator takaful dapat mengoperasikan berdasarkan akad *mudharabah*, *wakalah*, maupun *hybrid*. Pada kasus ini digunakan akad *wakalah*. Perbedaannya dibanding model biasa adalah dana *wakaf* tidak

dimiliki siapapun (Salman, 2017). Berikut skema model takaful berbasis *wakaf* pada Gambar 2.2 (Ningsih, 2021).



**Gambar 2.2** Skema Model Takaful Berbasis *Wakaf*

Terdapat beberapa ketentuan untuk bagian dana *wakaf* pada Gambar 2.2.

1. Kontribusi dari *wakaf* dan pendapatan yang dihasilkan dari aset *wakaf* harus dipisahkan menjadi tiga akun, yaitu rekening *wakaf* tetap (WFA), rekening dana risiko *wakaf* (WRFA) dan biaya *wakalah*.
2. Operator takaful sebagai pengelola dana akan menerima biaya *wakalah* yang sama dengan konsep model *wakalah* murni.
3. Para kontributor tidak akan membagi surplus seperti model *mudharabah* murni. Milik mereka bagian surplus akan diakumulasikan di WFA. Surplus ini dari WRFA. Tujuan mengumpulkan bagian surplus di WFA adalah untuk memastikan bahwa *wakaf* asli dana yang disumbangkan dapat dipulihkan dan dipertahankan selamanya. Selain itu, bagi hasil dari investasi WFA dan WRFA akan terakumulasi dalam WFA.
4. Defisit dalam WRFA harus diberikan pinjaman oleh operator takaful secara gratis tanpa bunga.

### 2.3 Teori Expected Utility

Utilitas merupakan preferensi atau nilai guna pengambil keputusan dengan mempertimbangkan faktor risiko berupa angka yang mewakili nilai *payoff* sebenarnya berdasarkan keputusan. Angka utilitas terbesar mewakili alternatif yang paling disukai, sedangkan angka utilitas terkecil menunjukkan alternatif yang paling tidak disukai (Pangestuti, 2014). Teori *expected utility* adalah model yang mewakili preferensi atas obyek berisiko, dengan rata-rata tertimbang utilitas yang ditetapkan untuk setiap hasil yang mungkin, di mana bobotnya adalah probabilitas dari setiap hasil. Motivasi utama untuk memperkenalkan teori *expected utility* adalah untuk menjelaskan sikap-sikap orang terhadap risiko. Pada umumnya ada 3 kategori tergantung sikap yang diambil, pertama adalah orang yang pengambil risiko (*risk*

taker), kedua adalah orang netral (*risk neutral*), dan ketiga adalah orang penghindar risiko (*risk averse*) (Machine, 1987). Metode kuantitatif dan praktis yang biasanya dipakai untuk mendapatkan nilai utilitas dari suatu *pay off*

$$U = E(r) - \frac{1}{2} A\sigma^2 \quad (2.1)$$

dimana  $U$  adalah nilai utilitas yang diberikan sebuah investasi,  $E(r)$  adalah ekspektasi *return*,  $\sigma^2$  merupakan volatilitas yang dikuadratkan, dan  $A$  adalah koefisien penghindaran risiko yang nilainya dari 1 sampai 5 tergantung sikap yang diambil orang dalam menghadapi risiko (Langford, 2016).

#### 2.4 Rata-rata Geometrik

Rata-rata geometrik merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menghitung nilai rata-rata dari tingkat pengembalian (*return*). Secara umum, rata-rata geometrik didefinisikan sebagai berikut (Vogel, 2022).

$$\text{Rata - rata Geometrik} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i)}{n}\right), x > 0 \quad (2.2)$$

$$x_i = 1 + R_i,$$

dimana  $R_i$  adalah tingkat imbal hasil ke- $i$  dan  $n$  menyatakan banyaknya periode penghitungan.

#### 2.5 Geometric Brownian Motion

*Brownian motion* adalah kumpulan variabel acak  $X(t), t \geq 0$ ,  $t$  adalah waktu dan  $X(t)$  dapat diinterpretasikan sebagai keadaan proses pada waktu  $t$ . dengan *drift* parameter  $\mu$  dan varians parameter  $\sigma^2$  dapat disebut *Brownian motion* jika memenuhi:

1.  $X(0)$  adalah konstan
2. Untuk semua variabel  $y$  dan  $t$  positif, variabel acak  $X(t+y) - X(y)$  adalah independent dari proses sampai dengan waktu  $y$  dan memiliki distribusi normal dengan *mean*  $\mu t$  dan varians  $t\sigma^2$

*Brownian motion* dinilai memiliki 2 kekurangan, pertama tidak cocok saat terdapat nilai negatif pada hasil *Brownian motion* dan yang kedua asumsi bahwa variabel acak memiliki distribusi normal tidak cocok pada penerapan lapangan sehingga muncul *Geometric Brownian Motion* (GBM) sebagai pengganti (Ross, 2011). Model GBM didefinisikan sebagai berikut (Shreve, 1996).

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\sigma B(t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\}, \quad \mu, \sigma > 0 \quad (2.3)$$

sedemikian sehingga

$$f(t, x) = S(0) \exp\left\{\sigma x + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\}, \quad \mu, \sigma > 0 \quad (2.4)$$

dimana  $f(x, t)$  adalah nilai pada *step* ke- $t$ ,  $S(0)$  adalah nilai awal yang ditentukan,  $t$  adalah jumlah *step*, dan  $\mu$  serta  $\sigma$  masing-masing merupakan nilai rata-rata dan standar deviasi yang ditentukan di awal.

## 2.6 Teknik Optimasi

Optimasi menurut kamus besar bahasa Indonesia (optimalisasi) diartikan sebagai pengoptimalan, yaitu proses, cara, pembuatan untuk menghasilkan yang paling baru. Optimasi berasal dari kamus bahasa Inggris yaitu *optimization* yang berarti optimal. Terdapat banyak cara untuk menyelesaikan masalah untuk mendapatkan hasil terbaik, cara untuk mendapatkan hasil terbaik ini disebut teknik optimasi. Teknik optimasi digunakan untuk mendapatkan hasil terbaik dengan usaha minimal, hasil terbaik disini bisa diartikan hasil tertinggi pada kasus keuntungan dan hasil terendah dalam kasus kerugian (Prakarsa, 2019).

Penyelesaian permasalahan optimasi dapat dilakukan dalam bentuk persamaan matematika dan kemudian diselesaikan dengan teknik pemrograman matematika. Pada tugas akhir ini penulis akan menggunakan teknik optimasi kalkulus yang menerapkan turunan parsial untuk menyelesaikan masalah insentif optimal operator takaful.

## 2.7 Simulasi

Simulasi merupakan proses pengolahan data dengan menggunakan rangkaian model-model simbolik pada pengoperasian sistem tiruan tidak mengharuskan dan tidak mengajukan penggunaan formula atau fungsi-fungsi dan persamaan tertentu sebagai model simbolik penyelesaian persoalan, tetapi sebaliknya simulasi yang terdiri dari tahapan-tahapan dan Langkah-langkah pengolahan data haruslah dilengkapi dengan model-model simbolik yang sesuai memberikan hasil pengoperasian system tiruan dalam bentuk data output yang berguna untuk penyelesaian persoalan. Sesuai dengan konsep simulasi sistem, solusi untuk suatu persoalan dalam bentuk keadaan yang kurang baik ataupun keadaan yang tidak optimal dapat disusun dalam bentuk rancangan pengembangan sistem dan bentuk rancangan perbaikan pengelolaan dan pengoperasian sistem. Solusi untuk mewujudkan keadaan yang lebih baik dapat diperoleh berdasarkan hasil analisis dan pengujian rancangan pengembangan. Model konseptual simulasi merupakan simulasi sebagai imitasi sistem melalui penyusunan model-model yang diperlukan pada pengoperasian sistem sebagai imitasi modifikasi dari suatu sistem riil untuk mendapatkan hasil sebagai bahan pertimbangan pada penentuan solusi atas suatu persoalan (Khotimah, 2015).

Proses tahapan dalam mengembangkan model dan simulasi sebagai berikut, pertama memahami sistem yang akan disimulasikan, tahap kedua mengembangkan model matematika dari sistem, tahap ketiga mengembangkan model matematika untuk simulasi, tahap keempat menyusun *flow chart* untuk diimplementasikan dalam program computer, tahap kelima menguji dan memvalidasi hasil *output* simulasi, pada tahap terakhir dilakukan eksekusi program simulasi untuk mencapai tujuan (Khotimah, 2015).

## 2.8 Biaya Operasional

Biaya operasional dapat diartikan setiap biaya yang terkait dengan pengeluaran umum, penjualan, dan fungsi administrasi bisnis. Dalam asuransi biasanya biaya ini termasuk biaya klaim yang dibayarkan dan pengeluaran operasional lain yang dibutuhkan (Bragg, 2012).

## 2.9 Pendapatan dari Investasi Dana Takaful

Pendapatan investasi adalah uang yang diterima dalam pembayaran bunga, dividen, dan keuntungan lainnya yang dibuat melalui sarana investasi (Bowman, 2007). Pendapatan dari investasi dana takaful dapat diartikan sebagai uang yang diterima melalui investasi uang yang berada dalam dana takaful dengan keuntungan tertentu.

## BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menguraikan mengenai langkah-langkah sistematis yang dilakukan dalam proses pengerjaan tugas akhir. Metode penelitian ini terdiri atas lima tahap.

### 3.1 Studi Literatur

Pada tahap pertama ini dilakukan identifikasi permasalahan dan pencarian referensi yang dapat menunjang penelitian seperti konsep asuransi syariah, perbedaan konsep asuransi syariah dengan asuransi konvensional, akad-akad yang umumnya digunakan dalam asuransi syariah, prinsip model *wakalah* dan konsep pemberian insentif kepada operator takaful. Selain itu juga dilakukan pencarian terkait teknik optimasi melalui uji turunan dan teori *expected utility* untuk membantu penentuan insentif optimal. Referensi yang dipakai adalah buku, jurnal ilmiah, maupun artikel dari internet yang berkaitan dengan permasalahan. Terakhir, dilakukan pengkajian terkait model matematika dari pemberian insentif operator takaful yang telah dilakukan pada penelitian sebelumnya yang modelnya akan dikembangkan oleh penulis menjadi model insentif operator takaful yang berbasis *wakaf* pada penelitian ini.

### 3.2 Membentuk Model Matematika dari Insentif Operator Takaful

Pada tahap ini dilakukan pengembangan model matematika terkait pemberian insentif kepada operator takaful pada akad *wakalah* dan *wakalah* berbasis *wakaf*. Pemodelan matematika ini dilakukan dengan membentuk fungsi utilitas dari pendapatan (*payoff*) operator dan fungsi utilitas dari pendapatan (*payoff*) peserta asuransi syariah menggunakan teori *expected utility*. Pendapatan yang akan diterima operator takaful ini berasal dari kompensasi akad yang telah disepakati dengan memperhatikan pengeluaran biaya dari pihak operator yang mendukung berjalannya operasional takaful di luar kendali perusahaan, seperti biaya iklan, biaya *underwriting*, dan investasi cadangan teknis. Proses pemodelan akan dipermudah dengan dibuat diagram operasional asuransi untuk masing-masing akad. Pada pengembangan model ini, uang yang terkumpul sebagai dana takaful akan dibagi menjadi dua dana terpisah, yaitu dana risiko dan dana investasi. Bagian imbal hasil dari investasi disini diasumsikan stokastik mengikuti *Geometric Brownian Motion* (GBM).

Pada tugas akhir ini operator takaful dan pemegang polis diasumsikan sebagai *risk-averse* serta menggunakan imbal hasil bersifat stokastik. Model matematika yang terbentuk merupakan fungsi utilitas dari pendapatan operator takaful dengan akad *wakalah* dan akad *wakalah* berbasis *wakaf*. Sebelum membentuk fungsi utilitas, akan dilakukan pendefinisian total biaya operasional dan pendapatan dari investasi takaful terlebih dahulu.

### 3.3 Penyelesaian Model Matematika Insentif Operator Takaful

Pada tahap ini dilakukan penyelesaian model matematika insentif operator takaful pada akad *wakalah* dan *wakalah* berbasis *wakaf* dengan menggunakan uji turunan untuk menentukan akad manakah yang memberikan insentif optimal kepada operator takaful. Penyelesaian dilakukan untuk model matematika *wakalah* dan *wakalah* berbasis *wakaf*. Pada model insentif operator takaful ini, hal yang paling berpengaruh yang kemudian disebut sebagai variabel adalah jumlah pemegang polis atau anggota takaful yang ikut serta dalam asuransi syariah, upaya *underwriting*, dan proporsi dari ekspektasi cadangan teknis. Nilai fungsi utilitas operator yang optimal diperoleh dengan cara menurunkan fungsi tersebut secara parsial terhadap

variabel-variabel tersebut sehingga terbentuk *first order conditions* (FOCs). FOCs ini kemudian diselesaikan untuk memperoleh nilai-nilai variabel yang menyebabkan pendapatan operator syariah yang berbasis *wakaf* menjadi optimal.

Pada model ini penentuan insentif optimal tidak hanya untung kepentingan operator takaful saja, tetapi kita juga mementingkan kepentingan peserta asuransi, sehingga untuk fungsi utilitas peserta akan dianalisis dengan substitusi nilai variabel optimal pada fungsi utilitas peserta terlebih dahulu. Setelah itu kita perlu mengoptimalkan fungsi utilitas dengan cara diturunkan secara parsial terhadap suatu nilai proporsi. Nilai proporsi pada akad *wakalah* murni dan akad *wakalah* berbasis *wakaf* nilainya sebesar nilai proporsi upah *wakalah*.

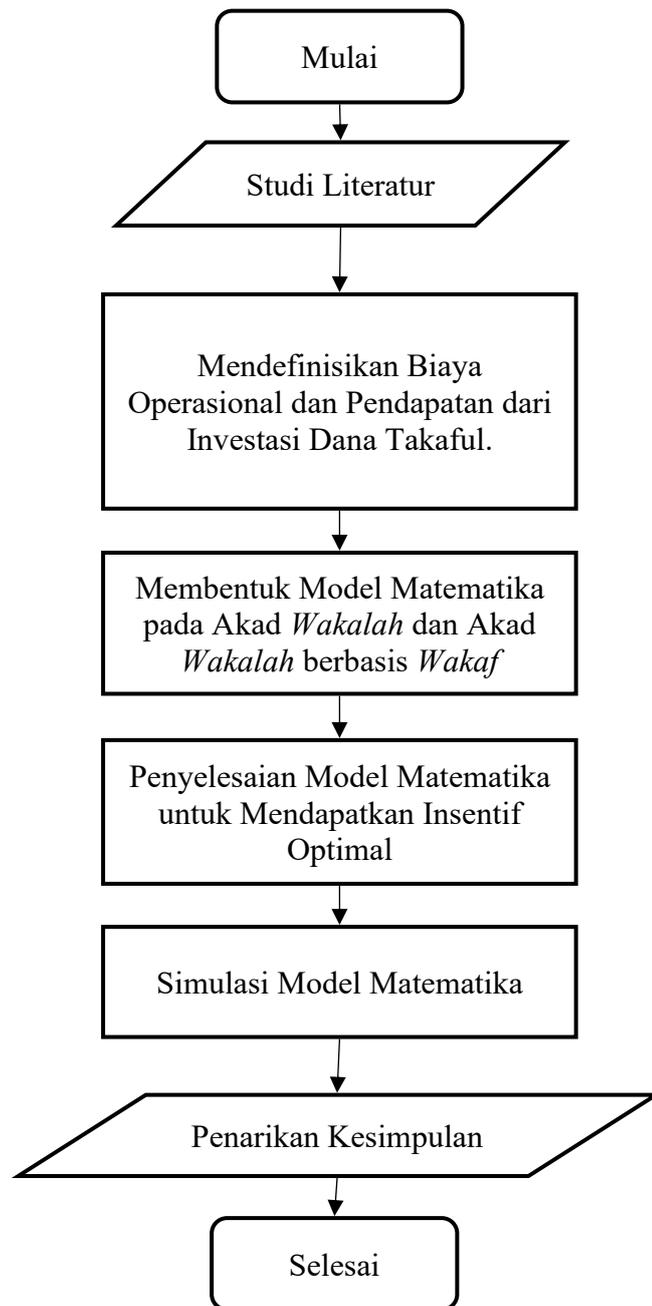
### **3.4 Simulasi Model**

Pada tahap ini dilakukan simulasi model yang telah terbentuk menggunakan *software* R untuk melakukan validasi dan melihat perilaku model. Simulasi ini dilakukan dengan menentukan nilai-nilai dari parameter-parameter yang kemudian hasilnya akan kita analisa secara analitik dan visual dari grafik untuk menentukan dalam kondisi bagaimanakah yang dapat menghasilkan insentif optimal kepada operator takaful. Visual yang dibentuk pada tahap ini merupakan grafik simulasi fungsi utilitas peserta dan simulasi fungsi utilitas operator yang bertujuan agar penulis dapat melihat pada kondisi seperti apa insentif yang optimal dapat tercapai.

### **3.5 Penarikan Kesimpulan**

Setelah didapatkan model matematika beserta hasil simulasi model, maka selanjutnya dilakukan penarikan kesimpulan dari pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya yaitu pada kondisi bagaimanakah operator yang dapat menghasilkan insentif optimal kepada operator takaful yang berbasis *wakaf* dan penulisan saran sebagai bahan masukan untuk penelitian selanjutnya.

Berikut ini adalah diagram alir pengerjaan tugas akhir yang ditunjukkan pada Gambar 3.1



**Gambar 3.1** Diagram Alir Pengerjaan Tugas Akhir

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

## BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai pemodelan matematika dari akan *wakalah* murni dan akad *wakalah* berbasis *wakaf*, dari model matematika yang telah diperoleh akan diselesaikan dengan teknik optimasi uji turunan dan dilakukan proses simulasi dengan asumsi imbal hasil stokastik untuk mendapatkan insentif optimal bagi operator takaful. Bab ini terdiri dari Pembentukan Model Insentif Operator Takaful, Penentuan Insentif Optimal Operator Takaful, dan Simulasi Model Insentif Operator Takaful.

### 4.1 Pembentukan Model Insentif Operator Takaful

Perusahaan asuransi syariah yang kemudian akan disebut operator takaful merupakan pihak yang disewa oleh pemegang polis yang kemudian akan disebut peserta takaful untuk mengelola operasional takaful. Operator takaful diharapkan untuk melakukan upaya menyeleksi calon peserta takaful baru dengan upaya *underwriting* dan melakukan investasi dari dana investasi. Sebagai imbal hasil dari upaya yang dilakukan operator takaful untuk peserta takaful, operator akan mendapatkan upah atas pekerjaan yang dilakukan sesuai dengan akad yang telah ditentukan diawal.

Penulis ingin mendefinisikan perhitungan dasar pada gabungan biaya operasional asuransi (COE – *Combined Operating Expenses*) yang merupakan gabungan biaya operasional peserta (*underwriting* expense) dan beban klaim bersih yang timbul. Upaya *underwriting* yang baik dapat mengurangi risiko kesalahan klasifikasi kategori risiko calon peserta dan kesalahan dalam penentuan kontribusi yang dibayarkan. Upaya *underwriting* ( $e_u$ ) dapat diinterpretasikan sebagai waktu rata-rata dalam hari yang digunakan untuk *underwriting*. Misalkan  $c$  adalah klaim rata-rata ketika upaya *underwriting* minimum dan  $e_u$  adalah upaya *underwriting* yang dilakukan oleh operator yang dapat diartikan sebagai waktu rata-rata yang dihabiskan, melebihi dan di atas tingkat minimum untuk menyaring pemegang polis sebelum memasukkan peserta asuransi ke dalam kelompok takaful. *Underwriting* yang cermat dapat mengurangi kemungkinan risiko seleksi dan klasifikasi sehingga diasumsikan bahwa klaim rata-rata menurun dalam upaya yang dilakukan oleh operator. Dengan demikian, gabungan biaya operasional yang sesuai menjadi:

$$COE = n(c - ue_u) + \epsilon_c \quad (4.1)$$

dimana  $c$  adalah klaim rata-rata ketika upaya *underwriting* minimal dalam satuan rupiah,  $e_u$  adalah upaya *underwriting* dalam satuan waktu,  $u$  adalah imbalan atas usaha operator takaful dalam satuan rupiah,  $n$  adalah jumlah peserta takaful dalam satuan polis, dan  $\epsilon_c$  adalah *random noise identically independent distribution* (i.i.d) dengan distribusi  $\epsilon_c \sim N(0, \sigma_c^2)$ .  $\sigma_c^2$  menggambarkan variansi yang tidak terduga pada klaim.

Kegiatan investasi juga dilakukan oleh operator takaful menggunakan dana investasi. Investasi yang dilakukan akan menghasilnya keuntungan sebesar rate  $i$  dengan noise  $\epsilon_i$ , Total keuntungan yang dihasilkan dari investasi (*investment income from tabarru' fund*) dituliskan dalam Persamaan 4.2.

$$IITF = iI + \epsilon_i \quad (4.2)$$

dimana  $i$  adalah rate keuntungan investasi dalam persentase,  $I$  adalah dana yang diinvestasikan dalam satuan rupiah, dan  $\epsilon_i$  adalah *random noise* (i.i.d) dengan distribusi  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ .

Selain biaya operasional asuransi, terdapat juga biaya yang dikeluarkan oleh operator takaful untuk menunjang pengelolaan operasional asuransi syariah. Standar biaya pribadi operator dapat dituliskan dalam Persamaan 4.3.

$$C = \frac{c_p}{2}n^2 + \frac{1}{2}(ne_u)^2 + \frac{1}{2}I^2 \quad (4.3)$$

Suku pertama dari kanan merupakan biaya yang dikeluarkan untuk mendapatkan peserta dimana  $c_p$  adalah kemiringan dari biaya marginal untuk mendapatkan peserta dalam satuan rupiah. Suku kedua merupakan biaya *underwriting* dan suku terakhir merupakan biaya dari aktifitas investasi. Spesifikasi kuadratik dari  $n$ ,  $e_u$ , dan  $I$  mengartikan setiap penambahan usaha pribadi operator menimbulkan biaya lebih besar. Suku pertama dari kanan dapat diartikan bahwa setiap penambahan peserta takaful memerlukan usaha lebih.

#### 4.1.1 Model Matematika pada Akad *Wakalah* Murni

Pada model *wakalah* murni, operator takaful bertindak sebagai agent yang disewa oleh peserta takaful untuk mengelola operasional takaful, sebagai gantinya operator akan dibayarkan upah sesuai dengan yang telah disepakati diawal akad oleh kedua pihak. Upah yang diterima oleh operator merupakan persentase dari total kontribusi peserta seperti pada Persamaan 4.4

$$W_w = \alpha P \quad (4.4)$$

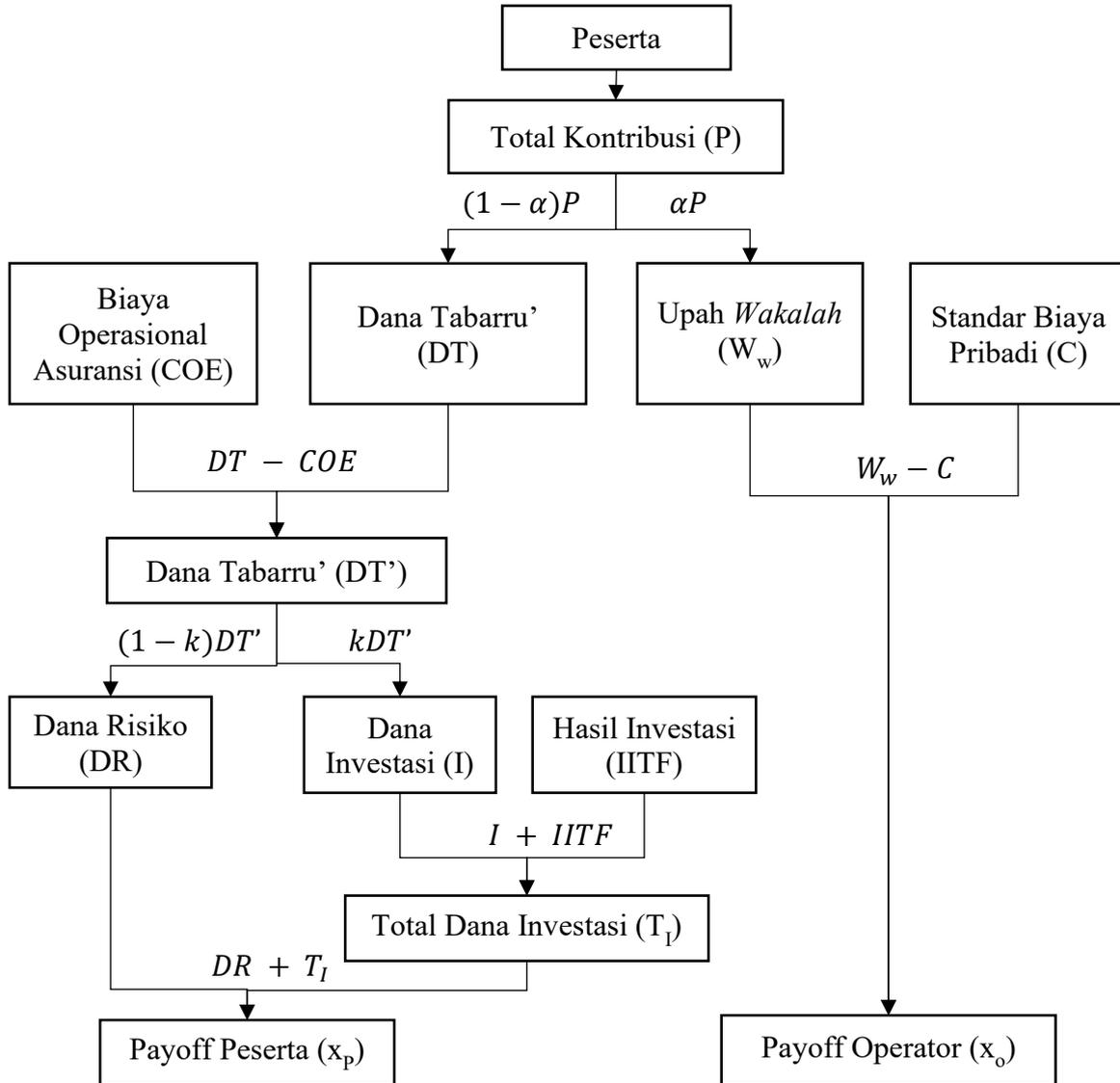
dengan  $P$  adalah total kontribusi dalam rupiah dan  $\alpha$  persentase upah untuk operator takaful.

Pada model *wakalah* murni masing-masing peserta yang ingin membeli kontrak asuransi dan telah memenuhi kondisi tertentu (sesuai ketentuan perusahaan asuransi yang memberikan layanan) akan memberikan berkontribusi sejumlah tertentu yang dinotasikan  $P$ . Total kontribusi yang dibayarkan akan dipotong sebesar upah *wakalah* ( $\alpha P$ ) untuk operator takaful, kemudian upah *wakalah* akan dikurangi oleh standar biaya pribadi pada Persamaan 4.3 akan menjadi *payoff* peserta. Sisa dari total kontribusi setelah dipotong upah *wakalah* sebesar  $(1 - \alpha)P$  akan dimasukkan kedalam dana *tabarru'* ( $DT$ ). Kemudian dari dana *tabarru'* akan dipotong biaya operasional asuransi ( $DT'$ ).  $DT'$  yang diperoleh akan dibagi kedalam 2 dana, yaitu dana investasi dan dana risiko dengan proporsi sebesar  $k$  untuk dana investasi ( $I$ ) dan sisanya sebesar proporsi  $(1 - k)$  akan menjadi dana risiko ( $DR$ ). Investasi akan dilakukan oleh operator dengan *expected* dana investasi yang kemudian akan didapatkan keuntungan sebesar *rate*  $i$ . Total dana investasi sesuai Persamaan 4.5 dan dana risiko sepenuhnya akan menjadi *payoff* peserta. Secara garis besar, model akad *wakalah* murni diilustrasikan seperti pada Gambar 4.1.

Berdasarkan Gambar 4.1, dapat dilihat bahwa pada model *wakalah* murni, masing-masing peserta diharuskan untuk membayar kontribusi sebesar  $P$  yang kemudian akan dibagi menjadi dua dengan porsi sebesar  $\alpha$  untuk upah *wakalah* ( $W_w$ ) dan  $(1 - \alpha)$  untuk dana *Tabarru'* ( $DT$ ). Secara matematis, hal tersebut dapat dinyatakan,

$$W_w = \alpha P \quad (4.5)$$

$$DT = P - W_w = P - \alpha P = (1 - \alpha)P. \quad (4.6)$$



**Gambar 4.1** Model Akad *Wakalah* Murni

setelah itu, untuk mendapatkan *Payoff* Operator maka perlu menambahkan parameter standar biaya pribadi ( $C$ ). *Payoff* Operator ( $X_0$ ) didefinisikan sebagai hasil sisa upah *wakalah* setelah dikurangi dengan biaya pribadi, sehingga secara matematis dapat dinyatakan,

$$X_0 = W_w - C. \quad (4.7)$$

di sisi lain, dana *Tabarru'* ( $DT$ ) yang peroleh masih belum bisa dianggap sebagai keseluruhan dana yang dapat digunakan untuk membayar manfaat maupun aktifitas investasi. Hal itu dikarenakan adanya biaya operasional asuransi ( $COE$ ) yang seluruhnya dibayar dari dana *Tabarru'*. Oleh sebab itu, dana *Tabarru'* yang bersih ( $DT'$ ) secara matematis dinyatakan,

$$DT' = DT - COE. \quad (4.8)$$

setelah didapatkan dana *Tabarru'* bersih, selanjutnya dana tersebut akan dipecah menjadi dua dengan porsi sebesar  $k$  untuk investasi ( $I$ ) dan sisanya sebagai dana risiko ( $DR$ ) yang digunakan untuk membayarkan manfaat. Secara matematis, definisi tersebut dinyatakan,

$$I = k(DT') \quad (4.9)$$

Sehingga dana risiko dapat dituliskan sesuai Persamaan 4.10

$$DR = DT' - I = (1 - k)DT'. \quad (4.10)$$

Dana investasi yang diperoleh nantinya akan diinvestasikan pada aset syariah bebas risiko dengan tingkat imbal hasil tertentu. Jika hasil investasi dinotasikan dengan  $IITF$ , maka total dana investasi ( $T_I$ ) dapat dinyatakan,

$$T_I = I - IITF. \quad (4.11)$$

Pada bagian terakhir,  $payoff$  peserta didefinisikan sebagai total dana risiko yang ditambahkan dengan total dana investasi. Dengan demikian,  $payoff$  peserta ( $X_p$ ) secara matematis dapat dinyatakan dengan,

$$x_p = DR + T_I. \quad (4.12)$$

berdasarkan penjelasan diatas maka diperoleh  $payoff$  operator dapat ditulis sebagai sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x_o &= W_w - C \\ &= \alpha np - \left( \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} I^2 \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$Payoff$  peserta ( $X_p$ ) pada Persamaan 4.12 dapat dituliskan menjadi Persamaan 4.14

$$x_p = (1 - \alpha)np - (n(c - ue_u) + \epsilon_c) + ikn[(1 - \alpha)p - (c - ue_u)] + \epsilon_i \quad (4.14)$$

Sesuai dengan batasan masalah, peserta (pemegang polis) dan operator takaful (operator takaful) diasumsikan memiliki preferensi risiko *risk-averse*. Fungsi utilitasnya mengikuti Persamaan 2.1 dengan dilakukan substitusi  $payoff$  peserta dan  $payoff$  operator. Persamaan 4.15 adalah fungsi utilitas peserta model *wakalah* murni dan Persamaan 4.16 adalah fungsi utilitas operator model *wakalah* murni.

$$U_p = E(x_p) - \frac{1}{2} \psi var(x_p) \quad (4.15)$$

$$U_o = E(x_o) - \frac{1}{2} \phi var(x_o) \quad (4.16)$$

Variabel  $\phi$  melambangkan koefisien penghindaran risiko operator dan  $\psi$  melambangkan koefisien penghindaran risiko peserta. Nilai varians dari  $payoff$  operator dapat diperoleh dengan menghitung varians pada Persamaan 4.13 sehingga didapatkan

$$var(x_o) = var\left(\alpha np - \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} I^2\right) \quad (4.17)$$

karena  $\alpha$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $c_p$ ,  $e_u$ , dan  $I$  adalah konstan, maka Persamaan 4.17 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 4.18.

$$var(x_o) = 0 \quad (4.18)$$

Berdasarkan Persamaan 4.18, diperoleh nilai varians  $payoff$  operator sesuai adalah nol yang berarti bahwa dengan skema *wakalah* murni operator tidak akan menanggung risiko. Penyebabnya adalah karena operator menerima upah diawal dan tidak dipengaruhi oleh hasil investasi dari dana investasi. Varians  $payoff$  peserta diperoleh dengan cara yang sama dengan menghitung varians pada Persamaan 4.14 sehingga didapatkan.

$$\begin{aligned} var(x_p) &= (1 - \alpha)np - (n(c - ue_u) + \epsilon_c) + ikn[(1 - \alpha)p - (c - ue_u)] + \epsilon_i \\ &= (1 - \alpha)^2 var(P) + var(COE) + var(IITF) - 2(1 - \alpha) \\ &\quad cov(P, COE) + 2(1 - \alpha)cov(P, IITF) - 2cov(COE, IITF) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Karena  $P$  independen terhadap  $COE$ , serta  $P$  independen terhadap  $IITF$  maka  $cov(P, IITF) = cov(P, COE) = 0$ , sehingga Persamaan 4.19 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 4.20

$$\begin{aligned} var(x_p) &= (1 - \alpha)^2 var(P) + var(COE) + var(IITF) - 2cov(COE, IITF) \\ &= (1 - \alpha)^2 var(np) + var(n(c - ue_u)) + var(\epsilon_c) + \\ &\quad var(ikn[(1 - \alpha)p - (c - ue_u)]) + var(\epsilon_i) - 2cov(COE, IITF) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Karena  $\alpha, n, p, c, u, e_u,$  dan  $k$  adalah konstan. *Noise*  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  dan *noise*  $\epsilon_c \sim N(0, \sigma_c^2)$  merupakan *identically independent distribution* (i.i.d) yang berdistribusi normal maka didapatkan nilai varians *payoff* peserta sebagai berikut.

$$\text{var}(x_p) = \sigma_c^2 + \sigma_i^2 - 2\sigma_{ic} \quad (4.21)$$

Berikutnya, diasumsikan bahwa  $\epsilon_i$  dan  $\epsilon_c$  independent, maka varians *payoff* peserta dapat ditulis ulang menjadi

$$\text{var}(x_p) = \sigma_c^2 + \sigma_i^2 \quad (4.22)$$

Selanjutnya, varians operator disubstitusikan dari Persamaan 4.22 dan *payoff* operator dari Persamaan 4.15 ke dalam fungsi utilitas pada Persamaan 4.20 sedemikian sehingga persamaan fungsi utilitasnya dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned} U_o &= E \left( \alpha np - \left( \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} I^2 \right) \right) - \frac{1}{2} \phi(0) \\ &= E \left( \alpha np - \left( \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} (kn[p(1-\alpha) - (c - ue_u)])^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Misalkan  $f(c, i)$  adalah fungsi peluang bersama dari variabel acak  $\epsilon_i$  dan  $\epsilon_c$ , jadi  $f_{\epsilon_c}(c)$  adalah fungsi peluang *marginal* dari variabel acak  $\epsilon_c$  dan  $f_{\epsilon_i}(i)$  adalah fungsi peluang *marginal* dari variabel acak  $\epsilon_i$ , maka

$$U_o = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha np - \left( \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} (kn[p(1-\alpha) - (c - ue_u)])^2 \right) f(c, i) dc di \quad (4.24)$$

karena  $\alpha, n, c_p, p, c, e_u, u, i, k$  adalah konstan, maka Persamaan 4.24 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 4.25.

$$\begin{aligned} U_o &= \left( \alpha np - \frac{c_p}{2} n^2 - \frac{1}{2} (ne_u)^2 - \frac{1}{2} (kn[p(1-\alpha) - (c - ue_u)])^2 \right) \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(c, i) dc di \\ &= \alpha np - \frac{c_p}{2} n^2 - \frac{1}{2} (ne_u)^2 - \frac{1}{2} (kn[p(1-\alpha) - (c - ue_u)])^2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Setelah didapatkan utilitas operator, berikutnya dilakukan estimasi utilitas peserta. Pada fungsi utilitas peserta model *wakalah* murni, varians peserta disubstitusikan dari Persamaan 4.22 dan *payoff* peserta dari Persamaan 4.14 ke dalam fungsi utilitas pada Persamaan 4.15 sedemikian sehingga persamaan fungsi utilitasnya dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned} U_p &= E((1-\alpha)np - (n(c - ue_u) + \epsilon_c) + kn[(1-\alpha)p - (c - ue_u)] + \epsilon_i) \\ &\quad - \frac{1}{2} \psi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1-\alpha)np - nc + nue_u + knp(1-\alpha) - knnc + knue_u \\ &\quad f(c, i) dc di - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_c f(c, i) dc di + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_i f(c, i) dc di - \frac{1}{2} \\ &\quad \psi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Karena  $\alpha, n, p, c, u, e_u, i,$  dan  $k$  adalah konstan, maka Persamaan 4.26 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 4.27

$$U_p = [(1-\alpha)np - nc + nue_u + knp(1-\alpha) - knnc + knue_u] \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(c, i) dcdi - \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_c \int_{-\infty}^{\infty} f(c, i) didc \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_i \int_{-\infty}^{\infty} f(c, i) dc di - \frac{1}{2} \psi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2) \\
& = [(1 - \alpha)np - nc + nue_u + iknp(1 - \alpha) - iknc + iknue_u] - E(\epsilon_c) \\
& + E(\epsilon_i) - \frac{1}{2} \psi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2)
\end{aligned}$$

Karena  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  dan  $\epsilon_c \sim N(0, \sigma_c^2)$  ini (i.i.d) berdistribusi normal sehingga  $E(\epsilon_c) = E(\epsilon_i) = 0$ , maka Persamaan 4.27 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 4.28.

$$\begin{aligned}
U_p & = [(1 - \alpha)np - nc + nue_u + iknp(1 - \alpha) - iknc + iknue_u] \\
& - \frac{1}{2} \psi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

#### 4.1.2 Model Matematika pada Akad *Wakalah* Berbasis *Wakaf*

Model *wakalah* berbasis *wakaf* yang dibentuk mengikuti model yang umum digunakan di negara Pakistan, di mana operator takaful akan membentuk dana *wakaf* pada awal, kemudian peserta melakukan kontribusi dengan konsep *tabarru'* kedalam dana *wakaf* sehingga terbentuk dana *wakaf* pada Persamaan 4.44. Dana *wakaf* yang terkumpul akan digunakan untuk membantu peserta yang membutuhkan bantuan (dalam bentuk klaim yang dibayarkan dari dana *wakaf*). Sebagai upah mengelola dana wakaf yang diinvestasikan, operator akan menerima upah *wakalat ul istismar* dari IITF seperti yang terlihat pada Persamaan 4.45

$$DW = R + (1 - \alpha)P \tag{4.29}$$

$$W_u = \beta IITF \tag{4.30}$$

Berdasarkan Gambar 4.2, pada awalnya operator akan melakukan injeksi dana awal yaitu modal *wakaf* senilai  $R$  untuk membentuk dana *wakaf*. Dana *wakaf* yang terbentuk ini tidak dimiliki oleh siapapun dan nilainya tidak boleh lebih rendah dari modal *wakaf* yang ditanamkan diawal tetapi boleh digunakan untuk melakukan investasi pada instrument investasi syariah. Selanjutnya calon peserta takaful akan menyumbangkan total kontribusi sebesar  $P$ , total kontribusi ini akan dipotong sebesar  $\alpha P$  untuk upah *wakalah* operator takaful dan sisanya masuk kedalam dana *wakaf*. Secara matematis, dana *wakaf* awal dinyatakan dengan,

$$W_w = \alpha P \tag{4.31}$$

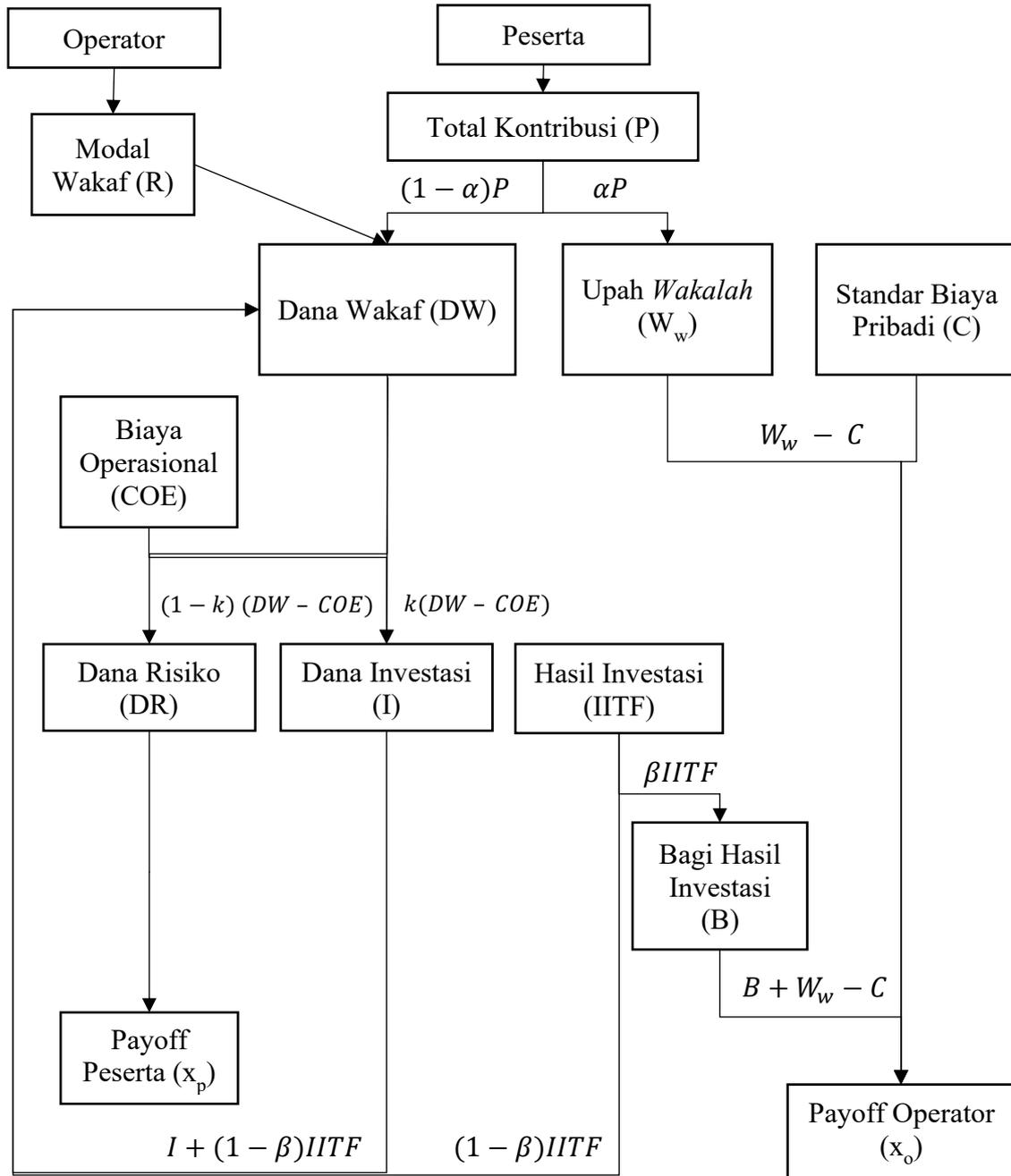
$$DW = P - W_w + R = P - \alpha P + R = (1 - \alpha)P + R. \tag{4.32}$$

Setelah itu, untuk mendapatkan *Payoff* Operator awal maka perlu menambahkan parameter standar biaya pribadi  $C$ . *Payoff* Operator awal ( $x_0$ ) didefinisikan sebagai hasil sisa upah *wakalah* setelah dikurangi dengan biaya pribadi, sehingga secara matematis dapat dinyatakan,

$$x_0 = W_w - C. \tag{4.33}$$

Di sisi lain, dana *wakaf'* ( $DW$ ) yang peroleh masih belum bisa dianggap sebagai keseluruhan dana yang dapat digunakan untuk membayar manfaat maupun aktifitas investasi. Hal itu dikarenakan adanya biaya operasional asuransi ( $COE$ ) yang seluruhnya dibayar dari dana *Tabarru'*. Oleh sebab itu, dana *Tabarru'* yang bersih ( $DT'$ ) secara matematis dinyatakan,

$$DT' = DT - COE. \tag{4.34}$$



**Gambar 4.2** Model Akad *Wakalah* Berbasis *Wakaf*

Setelah didapatkan dana *Tabarru'* bersih, selanjutnya dana tersebut akan dipecah menjadi dua dengan porsi sebesar  $k$  untuk investasi ( $I$ ) dan sisanya sebagai dana risiko ( $DR$ ) yang digunakan untuk membayarkan manfaat. Secara matematis, definisi tersebut dinyatakan,

$$I = k(DT') \quad (4.35)$$

$$DR = DT' - I = DT' - k(DT') = (1 - k)DT'. \quad (4.36)$$

Pada model *wakalah* berbasis *wakaf*, peserta tidak berhak atas semua aktifitas investasi sehingga *payoff* peserta dinyatakan oleh parameter dana risiko ( $DR$ ). Selanjutnya, dana investasi yang diperoleh nantinya akan diinvestasikan pada aset syariah bebas risiko dengan tingkat imbal hasil tertentu. Hasil investasi ( $IITF$ ) akan dibagi menjadi dua dengan porsi sebesar  $\beta$  untuk bagi hasil investasi dengan operator ( $B$ ) dan sisanya akan diberikan pada dana

wakaf. Dengan demikian, secara matematis dana wakaf akhir ( $DW$ ) dan *payoff* operator akhir ( $X_p$ ) dinyatakan,

$$DW = R + (1 - \alpha)P + I + (1 - \beta)IITF \quad (4.37)$$

$$X_o = B + W_w - C. \quad (4.38)$$

Berdasarkan penjelasan diatas maka diperoleh *payoff* peserta dapat ditulis sebagai sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x_p &= DR \\ &= (1 - k)([(1 - \alpha)np + R] - [(n(c - ue_u) + \epsilon_c)]) \end{aligned} \quad (4.39)$$

*Payoff* operator dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x_o &= \alpha P - C + \beta IITF \\ &= \alpha np - \left[ \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} (k[(1 - \alpha)np + R - n(c - ue_u)])^2 \right] \\ &\quad + ik\beta[(1 - \alpha)np + R - n(c - ue_u)] + \beta\epsilon_i \end{aligned} \quad (4.40)$$

Fungsi utilitas model akad wakalah berbasis wakaf yang mengikuti Persamaan 2.1 didapatkan dengan melakukan substitusi *payoff* peserta dan *payoff* operator. Persamaan 4.41 adalah fungsi utilitas peserta model wakalah berbasis wakaf dan Persamaan 4.42 adalah fungsi utilitas operator model wakalah berbasis wakaf.

$$U_p = E(x_p) - \frac{1}{2} \psi var(x_p) \quad (4.41)$$

$$U_o = E(x_o) - \frac{1}{2} \phi var(x_o) \quad (4.42)$$

Nilai varians dari *payoff* peserta dapat diperoleh dengan menghitung varians pada Persamaan 4.39 sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} var(x_p) &= var[(1 - k)(DW - COE)] \\ &= var[(1 - k)([1 - \alpha]P + R) - (1 - k)(COE)] \end{aligned} \quad (4.43)$$

misalkan  $(1 - k)([1 - \alpha]P + R) = A$ , maka

$$var(x_p) = var(A) - (1 - k)^2 var(COE) + 2(1 - k)cov(A, COE) \quad (4.44)$$

di mana semua komponen  $A$  yaitu  $\alpha$ ,  $k$ ,  $P$ , dan  $R$  merupakan konstan dan  $A$  independen terhadap  $COE$  sehingga Persamaan 4.44 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 4.45

$$\begin{aligned} var(x_p) &= (1 - k)^2 var(n(c - ue_u) + \epsilon_c) \\ &= (1 - k)^2 [var(n(c - ue_u)) + var(\epsilon_c)] \end{aligned} \quad (4.45)$$

di mana variabel  $n$ ,  $c$ ,  $u$ , dan  $e_u$  merupakan variabel konstan dan *noise*  $\epsilon_c \sim N(0, \sigma_c^2)$  merupakan *identically independent distribution* (i.i.d) yang berdistribusi normal sehingga Persamaan 4.45 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 4.46

$$var(x_p) = (1 - k)^2 \sigma_c^2 \quad (4.46)$$

Berikutnya, varians *payoff* operator diperoleh dengan cara yang sama dengan menghitung varians pada Persamaan 4.40 sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} var(x_o) &= var(\alpha P - C + \beta IITF) \\ &= \alpha^2 var(P) - var(C) + \beta^2 var(IITF) + 2\alpha^2 cov(P, C) \\ &\quad + 2\alpha^2 \beta^2 cov(P, IITF) + 2\beta^2 cov(C, IITF) \end{aligned} \quad (4.47)$$

$P$  independent terhadap  $IITF$ ,  $P$  independen terhadap  $C$ , dan  $C$  independen terhadap  $IITF$ , maka Persamaan 4.47 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 4.48

$$\begin{aligned} var(x_o) &= \alpha^2 var(np) - var\left(\frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} I^2\right) \\ &\quad + \beta^2 var(ikn[p(1 - \alpha) + R - (c - ue_u)]) + var(\epsilon_i) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Variabel  $\alpha$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $c_p$ ,  $e_u$ ,  $I$ ,  $i$ ,  $k$ ,  $R$ ,  $c$ , dan  $u$  merupakan variabel konstan dan *noise*  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  merupakan *identically independent distribution* (i.i.d) yang berdistribusi normal sedemikian sehingga Persamaan 4.48 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 4.49.

$$\text{var}(x_o) = \beta^2 \sigma_i^2 \quad (4.49)$$

Selanjutnya varians peserta disubstitusikan dari Persamaan 4.46) dan *payoff* peserta dari Persamaan 4.39 ke fungsi utilitas pada Persamaan 4.41) sedemikian sehingga persamaan fungsi utilitas peserta pada model *wakalah* berbasis *wakaf* dapat dinyatakan dengan,

$$\begin{aligned} U_p &= E\left((1-k)\left([(1-\alpha)np + R] - [(n(c - ue_u) + \epsilon_c)]\right)\right) - \frac{1}{2}\psi[(1-k)^2\sigma_c^2] \\ &= E(np - \alpha np + R - knp + \alpha knp - kR - nc + nue_u + knc - knue_u \\ &\quad + [1-k] + \epsilon_c) - \frac{1}{2}\psi[(1-k)^2\sigma_c^2] \end{aligned} \quad (4.50)$$

misalkan  $f(c)$  adalah fungsi peluang dari variabel acak  $\epsilon_c$ , maka Persamaan 4.50) dapat disederhanakan menjadi Persamaan 4.51.

$$\begin{aligned} U_p &= \int_{-\infty}^{\infty} (np - \alpha np + R - knp + \alpha knp - kR - nc + nue_u + knc - knue_u \\ &\quad + [1-k]\epsilon_c) f(c) dc - \frac{1}{2}\psi[(1-k)^2\sigma_c^2] \end{aligned} \quad (4.51)$$

Karena variabel  $n, p, e_u, R, k, c$ , dan  $u$  merupakan variabel konstan serta *noise*  $\epsilon_c \sim N(0, \sigma_c^2)$  merupakan *identically independent distribution* (i.i.d) yang berdistribusi normal dengan  $E(\epsilon_c) = 0$ , maka Persamaan 4.51 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 4.52.

$$\begin{aligned} U_p &= np - \alpha np + R - knp + \alpha knp - kR - nc + nue_u + knc - knue_u \\ &\quad - \frac{1}{2}\psi(1-k)^2\sigma_c^2 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Pada fungsi utilitas operator model *wakalah* berbasis *wakaf*, varians operator disubstitusikan dari Persamaan 4.49 dan *payoff* operator dari Persamaan 4.40 ke fungsi utilitas pada Persamaan 4.42 sedemikian sehingga persamaan fungsi utilitas dinyatakan sebagai,

$$\begin{aligned} U_o &= E\left(\alpha np - \left[\frac{c_p}{2}n^2 + \frac{1}{2}(ne_u)^2 + \frac{1}{2}(k[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)])^2\right] \right. \\ &\quad \left. + ik\beta[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)] + \beta\epsilon_i - \frac{1}{2}\phi\beta^2\sigma_i^2 \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Misalkan  $f(i)$  adalah fungsi peluang dari variabel acak  $\epsilon_i$ , maka Persamaan 4.53 dapat disederhanakan menjadi Persamaan 4.54.

$$\begin{aligned} U_o &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha np - \frac{c_p}{2}n^2 - \frac{1}{2}(ne_u)^2 - \frac{1}{2}(k[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)])^2 \right. \\ &\quad \left. + ik\beta[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)] + \beta\epsilon_i\right) f(i) di - \frac{1}{2}\phi\beta^2\sigma_i^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha np - \frac{c_p}{2}n^2 - \frac{1}{2}(ne_u)^2 - \frac{1}{2}(k[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)])^2 + \right. \\ &\quad \left. ik\beta[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)]\right) f(i) di + \int_{-\infty}^{\infty} \beta\epsilon_i f(i) di - \frac{1}{2}\phi\beta^2\sigma_i^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Karena variabel  $\alpha, n, c_p, p, e_u, R, k, c, i$ , dan  $u$  merupakan variabel konstan serta *noise*  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  merupakan *identically independent distribution* (i.i.d) yang berdistribusi normal dengan  $E(\epsilon_i) = 0$ , maka didapatkan fungsi utilitas operator untuk model *wakalah* berbasis *wakaf* pada Persamaan 4.55.

$$\begin{aligned} U_o &= \alpha np - \frac{c_p}{2}n^2 - \frac{1}{2}(ne_u)^2 - \frac{1}{2}(k[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)])^2 \\ &\quad + ik\beta[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)] - \frac{1}{2}\phi\beta^2\sigma_i^2 \end{aligned} \quad (4.55)$$

Fungsi utilitas operator pada Persamaan 4.55 dan fungsi utilitas peserta pada Persamaan 4.52 menunjukkan bahwa masing-masing pihak utilitasnya terpengaruhi oleh satu jenis *noise*, pihak operator adalah *noise* dari investasi dan pihak peserta terpengaruhi risiko *noise* dari klaim.

#### 4.2 Penentuan Insentif Optimal Operator Takaful

Berdasarkan model matematika akad *wakalah* dan akad *wakalah* berbasis *wakaf* yang telah diperoleh, penulis akan mencari model dimana insentif operator akan optimal untuk kedua akad secara terpisah. Operator takaful akan memilih variabel  $n$ ,  $e_u$ , dan  $k$  untuk memaksimalkan utilitas dari operator, ini dapat diartikan bahwa operator takaful akan mencoba memilih jumlah peserta, upaya *underwriting*, dan proporsi investasi yang menghasilkan insentif optimal. Fungsi utilitas operator dapat ditulis sebagai Persamaan 4.56.

$$U_o = f(n, e_u, k) \quad (4.56)$$

Insentif optimal merupakan tujuan yang ingin diperoleh sehingga fungsi utilitas operator takaful akan diturunkan terhadap masing-masing variabel  $n$ ,  $e_u$ , dan  $k$  kemudian setiap turunan parsial yang didapatkan akan sama dengan nol untuk membentuk *first order conditons* (FOCs).

Penentuan nilai insentif optimal dari operator takaful juga akan mempengaruhi insentif yang diterima peserta, untuk mendapatkan insentif optimal yang tidak merugikan kedua pihak, maka penulis membentuk fungsi utilitas peserta dengan memperhatikan variabel  $n$ ,  $e_u$ , dan  $k$  yang dipilih oleh operator. Fungsi utilitas peserta sendiri, merupakan sebuah fungsi yang memilih variabel proporsi upah *wakalah* ( $\alpha$ ) dan proporsi bagi hasil operator dalam *wakalah* berbasis *wakaf* ( $\beta$ ) yang menghasilkan insentif optimal untuk peserta seperti yang dituliskan dalam Persamaan 4.57.

$$U_p = f(\alpha, \beta) \quad (4.57)$$

##### 4.2.1 Insentif Optimal pada Akad *Wakalah* Murni

Berdasarkan penjelasan pada subbab 4.1.2, maka Persamaan 4.35 yang menyatakan fungsi utilitas operator akan diturunkan terhadap variabel  $n$ ,  $e_u$ , dan  $k$  kemudian turunan parsial yang didapat akan sama dengan nol membentuk FOCs. Hasil turunan parsial dapat dilihat pada Persamaan 4.58, 4.59, dan 4.60.

$$\frac{\partial U_o}{\partial n} = \alpha p - c_p n - e_u^2 n - k^2 n (p(1 - \alpha) - (c - u e_u))^2 = 0 \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial U_o}{\partial e_u} = -n^2 e_u - k^2 n^2 u (u e_u + (1 - \alpha) p - c) = 0 \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial U_o}{\partial k} = -n^2 (u e_u + (1 - \alpha) p - c)^2 k = 0 \quad (4.60)$$

FOCs yang terbentuk pada persamaan diatas diselesaikan dengan bantuan *software* Mathematica dan diperoleh hasil pada Persamaan 4.61, 4.62, dan 4.63.

$$k = 0 \quad (4.61)$$

$$e_u = 0 \quad (4.62)$$

$$n = \frac{\alpha p}{c_p} \quad (4.63)$$

Setelah didapatkan nilai dari  $n$ ,  $e_u$ , dan  $k$ , selanjutnya disubstitusikan ke dalam fungsi utilitas peserta pada Persamaan 4.28 sehingga diperoleh,

$$U_p = [(1 - \alpha) \frac{\alpha p}{c_p} p - \frac{\alpha p}{c_p} c + \frac{\alpha p}{c_p} u(0) + i(0) \frac{\alpha p}{c_p} p(1 - \alpha) - i(0) n c + i(0) \frac{\alpha p}{c_p} u(0)] - \frac{1}{2} \phi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2) \quad (4.64)$$

$$= \left[ \frac{\alpha p^2}{c_p} - \frac{\alpha^2 p^2}{c_p} - \frac{\alpha p c}{c_p} + \right] - \frac{1}{2} \phi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2)$$

Kemudian dilakukan penurunan dan disama dengankan nol untuk membentuk FOCs seperti yang terlihat pada Persamaan 4.64, untuk melihat dengan  $n$ ,  $e_u$ , dan  $k$  yang dipilih secara optimal oleh operator, berapa proporsi *wakalah* yang optimal untuk peserta.

$$\frac{dU_p}{d\alpha} = \left[ \frac{p^2}{c_p} - \frac{2\alpha p^2}{c_p} - \frac{pc}{c_p} \right] = 0 \quad (4.65)$$

Persamaan 4.65 diselesaikan untuk mencari proporsi *wakalah*, maka ditemukan hasil pada Persamaan 4.66.

$$\alpha^* = \frac{p - c}{2p} \quad (4.66)$$

Pada Persamaan 4.66 terlihat bahwa semakin besar premi yang dibayarkan dibanding rata-rata klaim, maka operator akan menerima upah *wakalah* yang lebih besar. Sebaliknya jika premi nilainya relatif lebih kecil dibanding rata-rata klaim maka upah *wakalah* yang diterima oleh operator akan semakin kecil. Pada Persamaan 4.62 terlihat bahwa dengan model *wakalah* murni, operator tidak termotivasi untuk melakukan upaya *underwriting* yang lebih dari minimum. Operator juga tidak termotivasi untuk menambah proposi investasi pada model *wakalah* murni karena tidak mendapatkan insentif tambahan, sehingga *wakalah* murni hanya memotivasi operator untuk menambah jumlah pemegang polis saja.

#### 4.2.2 Insentif Optimal pada Akad *Wakalah* Berbasis *Wakaf*

Sesuai yang telah dijelaskan sebelumnya, Persamaan 4.25 fungsi utilitas operator akan diturunkan terhadap variabel  $n$ ,  $e_u$ , dan  $k$  kemudian turunan parsial yang didapat akan sama dengan nol membentuk FOCs. Hasil turunan parsial dapat dilihat pada Persamaan 4.67, 4.68, dan 4.69.

$$\frac{\partial U_o}{\partial n} = \alpha p - c_p n - e_u^2 n + (1 - \alpha) \beta i k p - \beta i k (c - u e_u) - k^2 ((1 - \alpha) p + u e_u - c) ((1 - \alpha) n p + R - n(c - u e_u)) = 0 \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial U_o}{\partial n} = -e_u n^2 + \beta i k n u - k^2 n u ((1 - \alpha) n p + R - n(c - u e_u)) = 0 \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial U_o}{\partial k} = (1 - \alpha) \beta i n p + \beta i R - \beta i n (c - u e_u) - k ((1 - \alpha) n p + R - n(c - u e_u))^2 = 0 \quad (4.69)$$

FOCs yang terbentuk pada persamaan diatas diselesaikan dengan bantuan *software* Mathematica dan diperoleh hasil pada Persamaan 4.70, 4.71, dan 4.72.

$$k = \frac{\beta c_p i}{-\alpha c p + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2 + c_p R} \quad (4.70)$$

$$e_u = 0 \quad (4.71)$$

$$n = \frac{\alpha p}{c_p} \quad (4.72)$$

Setelah didapatkan nilai dari  $n$ ,  $e_u$ , dan  $k$ , berikutnya disubstitusikan ke dalam fungsi utilitas peserta pada Persamaan 4.52 sehingga dihasilkan persamaan

$$U_p = \frac{-\alpha c p + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2}{c_p} + R + \frac{\alpha \beta c i p - \alpha \beta i p^2 + \alpha^2 \beta i p^2 - \beta c_p i R}{-\alpha c p + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2 + c_p R} \quad (4.73)$$

$$-\frac{\psi}{2} \left( 1 - \frac{\beta i c_p}{-\alpha c p + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2 + c_p R} \right)^2 \sigma_c^2.$$

Setelah itu, dilakukan penurunan dan disama dengankan nol untuk membentuk FOCs seperti yang terlihat pada Persamaan 4.74 dan 4.75, untuk melihat dengan  $n$ ,  $e_u$ , dan  $k$  yang dipilih secara optimal oleh operator, berapa proporsi *wakalah* dan proporsi bagi hasil operator dalam *wakalah* berbasis *wakaf* yang optimal untuk peserta. Proses turunan ini juga dibantu oleh *software* Mathematica.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_p}{\partial \alpha} &= \frac{-c p + p^2 - 2\alpha p^2}{c_p} \\ &+ \frac{(-p c + p^2 - 2\alpha p^2)(-\alpha \beta c i p + \alpha \beta i p^2 - \alpha^2 \beta i p^2 + \beta c_p i R)}{(-\alpha c p + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2 + c_p R)^2} \\ &+ \frac{\beta c i p - \beta i p^2 + 2\alpha \beta i p^2}{-\alpha c p + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2 + c_p R} \quad (4.74) \\ &- \frac{\beta c_p i (-p c + p^2 - 2\alpha p^2) \psi \left( 1 - \frac{\beta c_p i}{-\alpha p c + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2 + c_p R} \right) \sigma_c^2}{(-\alpha c p + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2 + c_p R)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_p}{\partial \beta} &= \frac{-c_p i R + c_p i \psi \left( 1 - \frac{\beta c_p i}{-\alpha c p + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2 + c_p R} \right) \sigma_c^2}{-\alpha c p + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2 + c_p R} \\ &+ \frac{\alpha c i p - \alpha i p^2 + \alpha^2 i p^2}{-\alpha c p + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2 + c_p R} = 0 \quad (4.75) \end{aligned}$$

FOCs yang terbentuk pada Persamaan 4.74 dan 4.75 diselesaikan dengan bantuan *software* Mathematica dan didapatkan nilai upah *wakalah* dan proporsi bagi hasil operator dalam *wakalah* berbasis *wakaf* sesuai pada Persamaan 4.76 dan 4.77.

$$\alpha^* = \frac{p - c}{2p} \quad (4.76)$$

$$\beta^* = - \frac{0,0625(c^2 - 2pc + p^2 + 4c_p R)(c^2 - 2pc + p^2 + 4c_p R)^{(4.75)} \psi \sigma_c^2}{c_p^2 i \psi \sigma_c^2} \quad (4.77)$$

Persamaan 4.76 bahwa nilai upah *wakalah* optimal untuk model *wakalah* murni dan model *wakalah* berbasis *wakaf* sama. Proporsi bagi hasil operator dalam *wakalah* berbasis *wakaf* bisa dilihat pada Persamaan 4.77 ini bentuknya sedikit kompleks jika dilihat langsung dari persamaan saja, untuk mempermudah interpretasinya maka akan dilakukan simulasi grafik yang simpel. Pada model ini jika kita perhatikan, nilai upaya *underwriting* ( $e_u$ ) yang didapatkan adalah nol, ini dapat diartikan bahwa pada model *wakalah* berbasis *wakaf* juga tidak dapat memotivasi operator untuk menambahkan upaya *underwriting*.

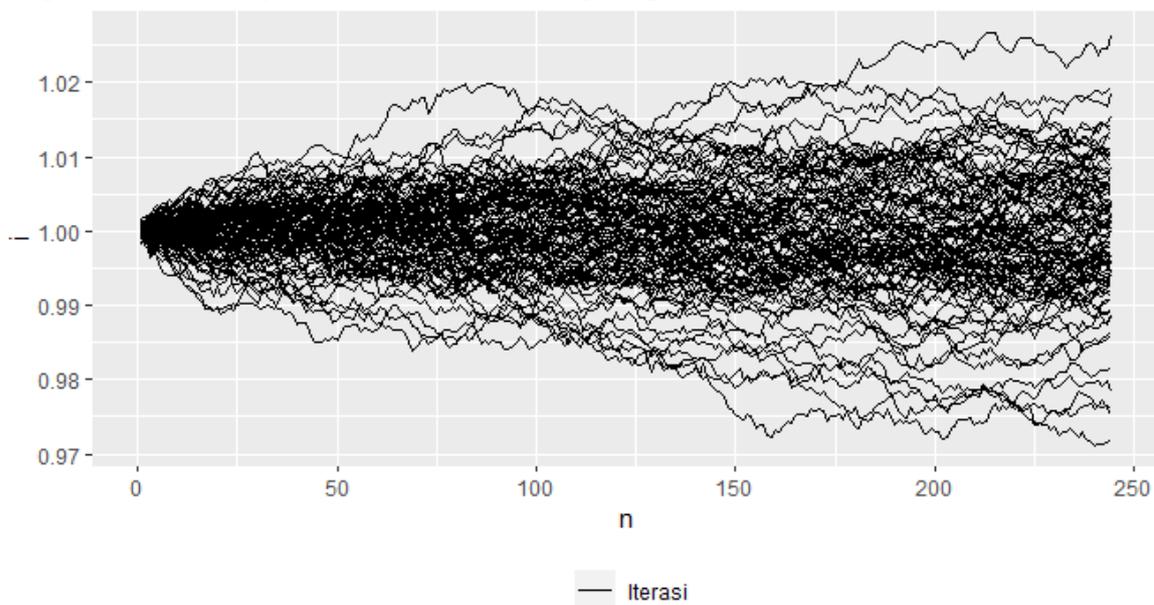
### 4.3 Simulasi Numerik Tingkat Pengembalian ( $i$ )

Simulasi numerik dilakukan guna memperoleh nilai  $i$  menggunakan metode *Geometric Brownian Motion* (GBM) dengan total iterasi sebanyak 100. Terdapat beberapa parameter yang ditentukan secara konstan seperti pada Tabel 4.1.

**Tabel 4.1** Nilai Parameter Simulasi GBM

Parameter	Nilai	Keterangan
$n$	243	Lama waktu hingga jatuh tempo diasumsikan tahunan sehingga nilai $n$ ditentukan sebesar 243 hari.
$S_0$	1	Modal investasi dianggap sebagai persentase penuh modal awal sehingga ditentukan sebesar 100%.
$\mu$	0,000215	Nilai $\mu$ ditentukan dengan menghitung rata-rata secara geometrik pada sebuah instrumen investasi bebas risiko (dipilih salah satu reksadana pasar uang dengan rentang data dari 1 Januari 2021 hingga 31 Desember 2022) yang dihitung berdasarkan Persamaan 2.2).
$\sigma$	0,00997	Nilai $\sigma$ ditentukan dengan menghitung standar deviasi pada instrumen investasi yang sama yang digunakan pada penentuan nilai $\mu$ .

Setelah ditentukan beberapa nilai parameter sesuai Tabel 4.1, dilanjutkan dengan simulasi menggunakan GBM. Proses simulasi menggunakan formula seperti pada Persamaan 2.2 dengan jumlah pengulangan sebanyak 100 kali. Sebagai contoh, hasil simulasi satu kali pengulangan dengan iterasi sebanyak 100 diilustrasikan seperti pada Gambar 4.3.



**Gambar 4.3** Simulasi *Geometric Brownian Motion* Tingkat Pengembalian ( $i$ )

Berdasarkan Gambar 4.3, terlihat bahwa simulasi menghasilkan nilai dengan tren meningkat. Nilai awal simulasi berada di sekitar satu dan semakin menyebar seiring berjalannya jumlah  $n$ . Setelah melakukan simulasi seperti pada Gambar 4.3 sebanyak 100 kali, selanjutnya akan dihitung nilai rata-rata dari parameter  $i$ . Hasil penghitungan nilai rata-rata memperoleh nilai sebesar 1,000065. Dengan kata lain, nilai parameter tingkat pengembalian ( $i$ ) yang diperoleh adalah sebesar 0,000065 atau sekitar 0,0065%. Nilai  $i$  yang diperoleh selanjutnya digunakan untuk melakukan simulasi numerik dari Utilitas Operator dan Peserta terhadap beberapa variabel penyusunnya.

#### 4.4 Simulasi Utilitas Operator

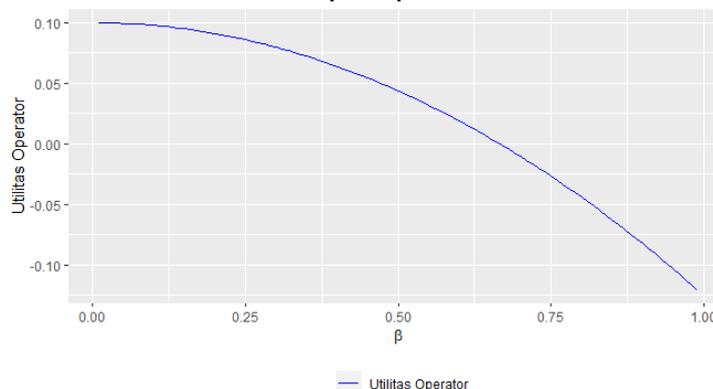
Simulasi dilakukan untuk melihat pengaruh perubahan nilai porsi bagi hasil operator ( $\beta$ ), porsi premi yang dialokasikan untuk upah *wakalah* ( $\alpha$ ), jumlah peserta ( $n$ ), dan porsi dana *wakaf* yang dialokasikan untuk investasi ( $k$ ) terhadap nilai Utilitas Operator. Proses simulasi dilakukan berdasarkan formula pada Persamaan 4.55. Terdapat beberapa penentuan nilai tetap dari beberapa parameter yaitu:

**Tabel 4.2** Nilai Parameter Simulasi Utilitas Operator

Parameter	Nilai	Satuan	Keterangan
$p$	1	Juta Rupiah	Besar premi yang harus dibayarkan peserta asuransi.
$c$	0,8	Juta Rupiah	Rata-rata besar klaim per peserta jika upaya <i>underwriting</i> minimal
$c_p$	0,05	Juta Rupiah	Biaya tambahan untuk mendapatkan peserta
$u$	0,03	Juta Rupiah	<i>Return Underwriting</i>
$i$	$i_{GBM}$	-	Nilai <i>return</i> yang diperoleh dari simulasi <i>Geometric Brownian Motion</i> (GBM)
$\sigma_i$	0,00997	-	Standar deviasi instrumen investasi syariah bebas risiko
$R$	10	Juta Rupiah	Modal <i>wakaf</i>
$\beta$	0,1	-	Proporsi bagi hasil investasi untuk operator
$\phi$	5	-	Koefisien penhindaran risiko operator
$\psi$	5	-	Koefisien penhindaran risiko peserta

##### 4.4.1 Simulasi Utilitas Operator Terhadap Porsi Bagi Hasil Operator ( $\beta$ )

Simulasi Utilitas Operator terhadap porsi bagi hasil operator ( $\beta$ ) dilakukan untuk memperoleh informasi dampak perubahan nilai  $\beta$  terhadap nilai Utilitas Operator.  $\beta$  merupakan nilai porsi sedemikian sehingga memiliki nilai yang berada diantara nol dan satu. Oleh karena itu, simulasi dilakukan dengan mengatur nilai  $\beta$  sebanyak 99 dengan rentang 0,01 hingga 0,99. Hasil simulasi diilustrasikan seperti pada Gambar 4.4.

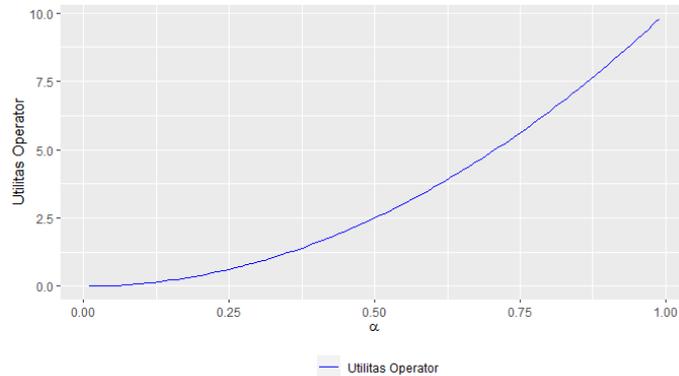


**Gambar 4.4** Simulasi Fungsi Utilitas Operator Terhadap  $\beta$

Berdasarkan Gambar 4.4, terlihat bahwa semakin besar nilai  $\beta$  maka akan semakin menurunkan nilai Utilitas Operator. Penurunan nilai utilitas operator karena suku ke-6 yang terkait dengan varians dari kiri pada Persamaan 4.55 yang mengurangi lebih banyak daripada suku ke-5 (keuntungan investasi), dimana suku ke-5 kecil karena nilai  $i$  kecil. Artinya bahwa semakin besar porsi bagi hasil yang diterima operator dari hasil investasi maka akan semakin mengurangi nilai kepuasan bagi operator.

#### 4.4.2 Simulasi Utilitas Operator Terhadap Porsi Premi Untuk Upah *Wakalah* ( $\alpha$ )

Simulasi Utilitas Operator terhadap porsi premi untuk upah *wakalah* ( $\alpha$ ) dilakukan untuk memperoleh informasi dampak perubahan nilai  $\alpha$  terhadap nilai Utilitas Operator. Sama halnya dengan  $\beta$ ,  $\alpha$  merupakan nilai porsi sedemikian sehingga memiliki nilai yang berada diantara nol dan satu. Oleh karena itu, simulasi dilakukan dengan mengatur nilai  $\alpha$  sebanyak 99 dengan rentang diantara 0,01 hingga 0,99. Hasil simulasi diilustrasikan seperti pada Gambar 4.5.

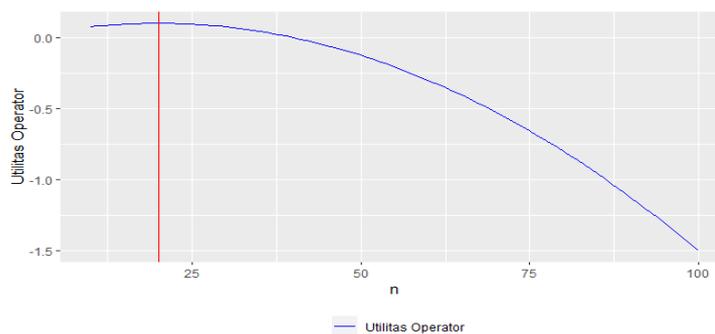


**Gambar 4.5** Simulasi Fungsi Utilitas Operator Terhadap  $\alpha$

Sama halnya dengan  $\beta$ , berdasarkan Gambar 4.5 terlihat bahwa semakin besar nilai  $\alpha$  maka akan semakin meningkatkan nilai Utilitas Operator. Kenaikan nilai utilitas operator terjadi karena bila porsi yang didapat operator makin besar maka bagi hasil yang didapat juga semakin besar yang mana sesuai pada Persamaan 4.55. Artinya bahwa semakin besar porsi premi yang dialokasikan untuk upah *wakalah* maka akan semakin menambah nilai kepuasan bagi operator.

#### 4.4.3 Simulasi Utilitas Operator Terhadap Jumlah Peserta ( $n$ )

Simulasi Utilitas Operator terhadap jumlah peserta ( $n$ ) dilakukan untuk memperoleh informasi dampak banyaknya peserta asuransi terhadap nilai Utilitas Operator.  $n$  menunjukkan lama upaya *underwriting* dalam hari sehingga simulasi dilakukan dengan mengatur jumlah  $n$  sebanyak 91 dengan rentang 10 hingga 100. Hasil simulasi diilustrasikan seperti pada Gambar 4.6.

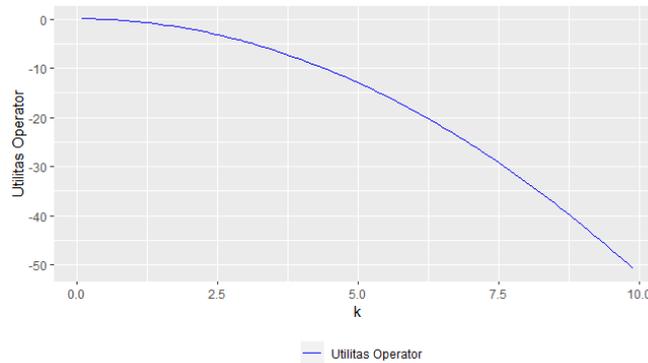


**Gambar 4.6** Simulasi Fungsi Utilitas Operator Terhadap  $n$

Berdasarkan Gambar 4.6, terdapat pembalikan tren nilai Utilitas Operator dari yang awalnya meningkat menjadi menurun. Nilai maksimum pada Utilitas Operator menunjukkan lama upaya *underwriting* yang optimal untuk meningkatkan kepuasan operator asuransi. Nilai  $n$  optimum yang didapat sebanyak 20 peserta sesuai dengan Persamaan 4.63. Dengan demikian, nilai  $n$  lebih baik untuk ditentukan tidak terlalu besar ataupun tidak terlalu kecil dan dapat menggunakan fungsi utilitas untuk memperoleh nilai optimalnya.

#### 4.4.4 Simulasi Utilitas Operator Terhadap Porsi Dana *Wakaf* Untuk Investasi ( $k$ )

Simulasi Utilitas Operator terhadap porsi dana *wakaf* untuk investasi ( $k$ ) dilakukan untuk memperoleh informasi dampak perubahan nilai  $k$  terhadap nilai Utilitas Operator.  $k$  juga menyatakan besaran porsi sehingga simulasi dilakukan dengan mengatur nilai  $k$  sebanyak 99 dengan rentang diantara 0,01 hingga 0,99. Hasil simulasi diilustrasikan seperti pada Gambar 4.7.



**Gambar 4.7** Simulasi Fungsi Utilitas Operator Terhadap  $k$

Berbanding terbalik dengan  $\alpha$  dan  $\beta$ , berdasarkan Gambar 4.7 terlihat bahwa semakin besar nilai  $k$  maka akan membuat nilai Utilitas Operator semakin kecil. Penurunan nilai utilitas operator terjadi karena suku ke-4 (biaya investasi) dari kiri pada Persamaan 4.55 dapat mengurangi nilai  $k$  lebih banyak dibandingkan suku ke-5 (keuntungan investasi), dimana suku ke-5 kecil karena nilai  $i$  kecil. Artinya bahwa semakin besar porsi dana *wakaf* yang dialokasikan untuk investasi maka akan semakin mengurangi nilai kepuasan bagi operator.

#### 4.5 Simulasi Utilitas Peserta

Simulasi dilakukan untuk melihat pengaruh perubahan nilai  $\beta$  dan  $\alpha$  terhadap nilai Utilitas Peserta. Proses simulasi dilakukan berdasarkan formula pada Persamaan 4.73. Terdapat beberapa penentuan nilai tetap dari beberapa parameter yaitu:

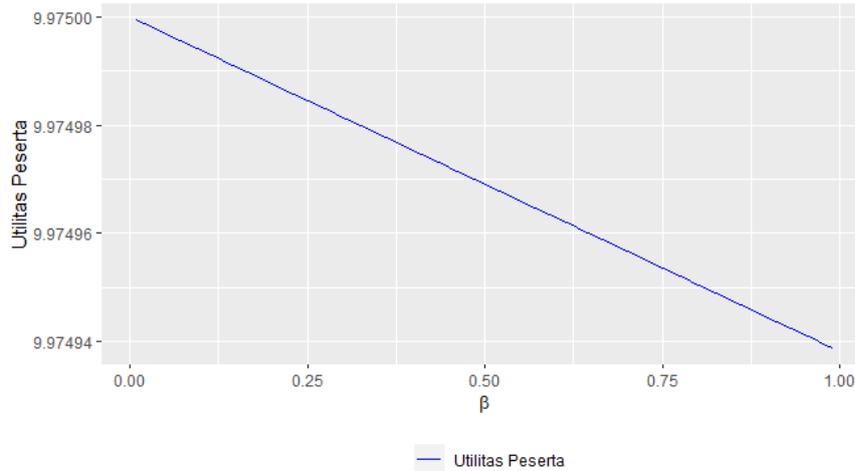
**Tabel 4.3** Nilai Parameter Simulasi Utilitas Peserta

Parameter	Nilai	Satuan	Keterangan
$p$	1	Juta Rupiah	Besar premi yang harus dibayarkan peserta asuransi.
$c$	0,8	Juta Rupiah	Rata-rata besar klaim per peserta jika upaya <i>underwriting</i> minimal
$c_p$	0,05	Juta Rupiah	Biaya tambahan untuk mendapatkan peserta
$u$	0,03	Juta Rupiah	<i>Return Underwriting</i>
$i$	$i_{GBM}$	-	Nilai <i>return</i> yang diperoleh dari simulasi <i>Geometric x</i> (GBM)
$\sigma_i$	0,00997	-	Standar deviasi instrumen investasi syariah bebas risiko
$R$	10	Juta Rupiah	Modal <i>wakaf</i>
$\beta$	0,1	-	Proporsi bagi hasil investasi untuk operator
$\phi$	5	-	Koefisien penhindaran risiko operator
$\psi$	5	-	Koefisien penhindaran risiko peserta

##### 4.5.1 Simulasi Utilitas Peserta Terhadap Porsi Bagi Hasil Operator ( $\beta$ )

Simulasi Utilitas Peserta terhadap porsi bagi hasil operator ( $\beta$ ) dilakukan untuk memperoleh informasi dampak perubahan nilai  $\beta$  terhadap nilai Utilitas Operator. Simulasi

untuk Utilitas Peserta juga dilakukan dengan mengatur nilai  $\beta$  sebanyak 99 dengan rentang diantara 0,01 hingga 0,99. Hasil simulasi diilustrasikan seperti pada Gambar 4.8

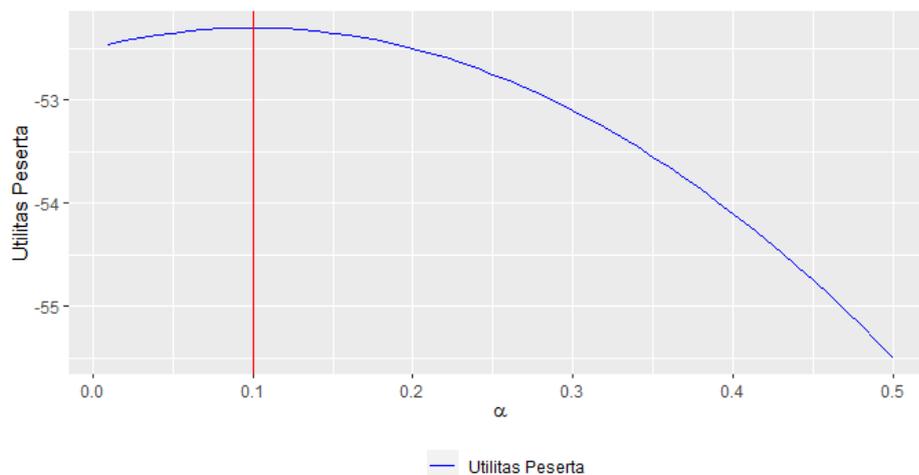


**Gambar 4.8** Simulasi Fungsi Utilitas Peserta Terhadap  $\beta$

Sama halnya dengan Utilitas Operator, nilai  $\beta$  memiliki pengaruh yang negatif terhadap Utilitas Peserta. Berdasarkan Gambar 4.8 terlihat bahwa semakin besar nilai  $\beta$  maka akan semakin menurunkan nilai Utilitas Peserta. Penurunan nilai utilitas peserta terjadi karena semakin besar  $\beta$ , di mana proporsi untuk peserta semakin kecil. Artinya bahwa semakin besar porsi bagi hasil yang diterima operator dari hasil investasi maka akan membuat nilai kepuasan peserta semakin menurun.

#### 4.5.2 Simulasi Utilitas Peserta Terhadap Porsi Premi Untuk Upah *Wakalah* ( $\alpha$ )

Simulasi Utilitas Peserta terhadap porsi premi untuk upah *wakalah* ( $\alpha$ ) dilakukan untuk memperoleh informasi dampak perubahan nilai  $\alpha$  terhadap nilai Utilitas Operator. Simulasi untuk Utilitas Peserta dilakukan dengan mengatur nilai  $\alpha$  sebanyak 50 dengan rentang diantara 0,01 hingga 0,5. Hasil simulasi diilustrasikan seperti pada Gambar 4.9



**Gambar 4.9** Simulasi Fungsi Utilitas Peserta Terhadap  $\alpha$

Berdasarkan Gambar 4.9, terdapat pembalikan tren nilai Utilitas Peserta dari yang awalnya meningkat menjadi menurun. Nilai maksimum pada Utilitas Peserta menunjukkan porsi premi yang dialokasikan untuk upah *wakalah* yang optimal untuk meningkatkan kepuasan peserta asuransi. Nilai optimum  $\alpha$  yang diperoleh sebesar 0,1 sesuai dengan Persamaan 4.76. Dengan

demikian, besar porsi  $\alpha$  lebih baik untuk ditentukan tidak terlalu besar ataupun tidak terlalu kecil dan dapat menggunakan fungsi utilitas untuk memperoleh nilai optimalnya.

## BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Pada bab ini penulis memberikan beberapa kesimpulan yang didapatkan berdasarkan penelitian yang dilakukan pada tugas akhir ini.

1. Pada model matematika akad *wakalah* berbasis *wakaf* didapatkan fungsi utilitas operator dan fungsi utilitas peserta sebagai berikut:

$$U_o = \alpha np - \frac{c_p}{2} n^2 - \frac{1}{2} (ne_u)^2 - \frac{1}{2} (k[(1 - \alpha)np + R - n(c - ue_u)])^2 \\ + ik\beta[(1 - \alpha)np + R - n(c - ue_u)] - \frac{1}{2} \phi\beta^2\sigma_i^2$$

$$U_p = np - \alpha np + R - knp + \alpha knp - kR - nc + nue_u + knc - knue_u \\ - \frac{1}{2} \psi(1 - k)^2\sigma_c^2$$

Model *wakalah* murni memotivasi operator untuk menambah jumlah peserta takaful yang bisa mengurangi risiko yang ditanggung masing-masing peserta dan menambah proporsi investasi dana, akan tetapi model *wakalah* berbasis *wakaf* tidak memotivasi operator untuk menambah upaya *underwriting* karena operator takaful tidak akan memperoleh insentif tambahan dari aktivitas *underwriting* dalam model yang dibentuk penulis.

2. Pada model matematika akad *wakalah* berbasis *wakaf* didapatkan insentif optimal upah *wakalah* dan proporsi bagi hasil sebagai berikut:

$$\beta^* = - \frac{0,0625(c^2 - 2pc + p^2 + 4c_p R)(c^2 - 2pc + p^2 + 4c_p R - 4c_p \psi \sigma_c^2)}{c_p^2 i \psi \sigma_c^2}$$

$$\alpha^* = \frac{p - c}{2p}$$

3. Pada model matematika akad *wakalah* berbasis *wakaf* memotivasi operator untuk menambah jumlah peserta takaful yang bisa mengurangi risiko yang ditanggung masing-masing peserta dan menambah proporsi investasi dana, akan tetapi model *wakalah* berbasis *wakaf* tidak memotivasi operator untuk menambah upaya *underwriting* karena operator takaful tidak akan memperoleh insentif tambahan dari aktifitas *underwriting* dalam model yang dibentuk penulis. Hasil simulasi model akad *wakalah* berbasis *wakaf* menunjukkan bahwa untuk upah *wakalah* akan mencapai nilai fungsi utilitas yang optimal untuk kedua pihak pada saat proporsi upah *wakalah*  $\alpha = 0.1$ , akan tetapi untuk porsi bagi hasil yang diterima operator dari hasil investasi ( $\beta$ ) tidak dapat disimpulkan kondisi yang optimal.

### 5.2 Saran

Pembentukan model akad *wakalah* berbasis *wakaf* penulis masih belum mempertimbangkan kemungkinan defisit untuk dana *wakaf*, apabila terjadi defisit maka pihak operator harus memberikan pinjaman tanpa bunga (*qard e hasana*) kepada dana *wakaf* untuk menutupi defisit, saran untuk penelitian selanjutnya bisa mencoba membentuk model dengan mempertimbangkan kemungkinan dana *wakaf* defisit. Model penulis juga menunjukkan bahwa hanya dengan akad *wakalah* berbasis *wakaf* tidak dapat menghasilkan kondisi optimal yang menguntungkan kedua pihak, pada penelitian berikutnya bisa memodelkan gabungan dari beberapa akad *hybrid* atau *mudharabah* modifikasi. Dalam simulasi masih belum menggunakan data-data aktual, penelitian selanjutnya bisa menggunakan data-data aktual untuk menghasilkan insentif optimal.

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

## DAFTAR PUSTAKA

- Alam, A. & Hidayati, S. (2020). Akad Dan Kesesuaian Fitur *Wakaf* Produk Asuransi Jiwa Syariah. *Equilibrium: Jurnal Ekonomi Syariah*, 8.
- Ashal, F. F. (2017). Kedudukan Akad *Tijarah* Dan Akad *Tabarru'* Dalam Asuransi Syariah. *Jurnal Ekonomi dan Bisnis Islam*, 3(2), 238-52.
- Bragg, S. M. (2012). *Business Ratios And Formulas: A Comprehensive Guide*. England: John Wiley & Sons.
- Briys, E. & Schlesinger, H. (1990). Risk Aversion And The Propensities For Self-Insurance And Self-Protection. *Southern Economic Journal*, 458-67.
- Desi P. C. (2014). *Aplikasi Teori Utilitas Untuk Melihat Minat Pembelian Produk Asuransi Pendidikan*. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
- Ehrlich, Isaac, & Becker, B. S. (1972). Market Insurance, Self-Insurance, And Self-Protection. *Journal Of Political Economy*, 80(4).
- Gonulal, S. O. (2012). *Takaful And Mutual Insurance: Alternative Approaches To Managing Risks*. Washington: World Bank Publications.
- Hussain, M. M. & Pasha, A. T. (2011). Conceptual And Operational Differences Between General Takaful And Conventional Insurance. *Australian Journal of Business and Management Research*, 1(8), 23-8.
- Jamaldeen, F. (2012). *Islamic Finance For Dummies*. England: John Wiley & Sons.
- Khan, H. (2015). Optimal Incentives For Takaful (Islamic Insurance) Operators. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 109, 135-44.
- Khan, H. (2019). A Nontechnical Guide On Optimal Incentives For Islamic Insurance Operators. *Journal of Risk and Financial Management*, 12(3), 127.
- Khotimah, B. K. (2015). *Teori Simulasi Dan Pemodelan: Konsep Aplikasi Dan Terapan*. Ponorogo: Wade Group.
- Langford, C. K. (2016). *The Risk Aversion Coefficient*. <https://www.disnat.com/en/learning/expert-articles/charles-k-langford/the-risk-aversion-coefficient>.
- Machina, M. J. (1987). Choice Under Uncertainty: Problems Solved And Unsolved. *Journal of Economic Perspectives*, 1(1), 121-54.
- Malik, A., & Ullah, K. (2019). *Introduction to Takaful*. Singapore: Springer.
- Masri, H. (2018). A Shariah-Compliant Portfolio Selection Model. *Journal of the Operational Research Society*, 69(10), 1568-75.
- Ningsih, A. F. (2021). Pemodelan Dan Simulasi Untuk Menentukan Insentif Optimal Berbasis *Wakaf* Bagi Operator Asuransi Syariah. Surabaya.
- Paulsen, J. & Gjessing, H. K. (1997). Ruin Theory With Stochastic Return On Investments. *Advances in Applied Probability*, 29(4), 965-85.
- Prakarsa, M. T., Wahyuni, D., Rachman, N. & Mujahidin, I. (2019). Optimasi Sistem Komunikasi Dari Ht Dengan Hp Dalam Pelaksanaan Tugas Operasi Tni Ad Menggunakan Metode Dtmf. *Jurnal Apl. Sains, Informasi, Elektron dan Komputer*, 3(1).
- Puspitasari, N. (2011). Sejarah Dan Perkembangan Asuransi Islam Serta Perbedaannya Dengan Asuransi Konvensional. *Jurnal Ekonomi Akuntansi dan Manajemen*, 10(2).
- Ross, S. M. (2011). *An Elementary Introduction To Mathematical Finance*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Saeed, M. (2019). Effect of Takaful Models on Performance of Takaful Operators. Available at SSRN 3500383.
- Salman, S. A. & Htay, S. N. N. (2014). Introducing Waqf Based Takaful Model In India. *Tazkia Islamic Finance and Business Review*, 7(2).

- Shreve, S. E. (1996). *Stochastic Calculus and Finance*. lecture notes.
- Sumarti, N. (2018). *Matematika Keuangan Syariah*. Padang: Universitas Andalas.
- Van, W. J. G. & Kleijnen, J. P. (2002). Deterministic Versus Stochastic Sensitivity Analysis In Investment Problems: An Environmental Case Study. *European Journal of Operational Research*, 141(1), 8-20.
- Vogel, R. M. (2022). The geometric mean?. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 51(1), 82-94.
- Young, D. R. (2006). *Financing Nonprofits: Putting Theory Into Practice*. Rowman: Altamira Press.

## LAMPIRAN

### Lampiran 1 Penurunan Formula Model Akad Wakalah Murni

#### Payoff operator:

$$\begin{aligned} x_o &= W_w - C \\ &= \alpha P - C \\ &= \alpha np - \left( \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} I^2 \right) \end{aligned}$$

#### Payoff peserta:

$$\begin{aligned} x_p &= DR + T_i \\ &= (1 - k)[(1 - \alpha)np - (n(c - ue_u) + \epsilon_c)] + k(1 - \alpha)np - \\ &\quad (n(c - ue_u) + \epsilon_i) + ik(1 - \alpha)np - (n(c - ue_u)) + \epsilon_i \\ &= (1 - \alpha)np - (n(c - ue_u) + \epsilon_c) + ikn[(1 - \alpha)p - (c - ue_u)] + \epsilon_i \end{aligned}$$

#### Varians operator:

$$var(x_o) = var\left(\alpha np - \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} I^2\right)$$

karena  $\alpha$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $c_p$ ,  $e_u$ , dan  $I$  adalah konstan, maka

$$var(x_o) = 0$$

#### Varians peserta:

$$\begin{aligned} var(x_p) &= (1 - \alpha)np - (n(c - ue_u) + \epsilon_c) + ikn[(1 - \alpha)p - (c - ue_u)] + \epsilon_i \\ &= (1 - \alpha)P - COE + IITF \\ &= (1 - \alpha)^2 var(P) + var(COE) + var(IITF) \\ &\quad - 2(1 - \alpha)cov(P, COE) + 2(1 - \alpha)cov(P, IITF) \\ &\quad - 2cov(COE, IITF) \end{aligned}$$

Karena  $P$  independen terhadap  $COE$ , serta  $P$  independen terhadap  $IITF$  maka  $cov(P, IITF) = cov(P, COE) = 0$ , sehingga

$$\begin{aligned} var(x_p) &= (1 - \alpha)^2 var(P) + var(COE) + var(IITF) - 2cov(COE, IITF) \\ &= (1 - \alpha)^2 var(np) + var(n(c - ue_u) + \epsilon_c) \\ &\quad + var(ikn[(1 - \alpha)p - (c - ue_u) + \epsilon_i]) \\ &\quad - 2cov(COE, IITF) \\ &= (1 - \alpha)^2 var(np) + var(n(c - ue_u)) + var(\epsilon_c) \\ &\quad + var(ikn[(1 - \alpha)p - (c - ue_u)]) + var(\epsilon_i) \\ &\quad - 2cov(COE, IITF) \end{aligned}$$

Karena  $\alpha$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $c$ ,  $u$ ,  $e_u$ , dan  $k$  adalah konstan. Noise  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  dan noise  $\epsilon_c \sim N(0, \sigma_c^2)$  merupakan *identically independent distribution* (i.i.d) yang berdistribusi normal maka didapatkan nilai varians *payoff* peserta sebagai berikut.

$$var(x_p) = \sigma_c^2 + \sigma_i^2 - 2\sigma_{ic}$$

Berikutnya, diasumsikan bahwa  $\epsilon_i$  dan  $\epsilon_c$  independent, maka varians *payoff* peserta dapat ditulis ulang menjadi

$$var(x_p) = \sigma_c^2 + \sigma_i^2$$

**Lampiran 2** Penurunan Fungsi Utilitas Operator untuk Model Akad Wakalah Murni

$$\begin{aligned}
 U_o &= E \left( \alpha n p - \left( \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (n e_u)^2 + \frac{1}{2} I^2 \right) \right) - \frac{1}{2} \phi(0) \\
 &= E \left( \alpha n p - \left( \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (n e_u)^2 + \frac{1}{2} (k n [p(1 - \alpha) - (c - u e_u)])^2 \right) \right)
 \end{aligned}$$

Misalkan  $f(c, i)$  adalah fungsi peluang bersama dari variabel acak  $\epsilon_i$  dan  $\epsilon_c$ , jadi  $f_{\epsilon_c}(c)$  adalah fungsi peluang *marginal* dari variabel acak  $\epsilon_c$  dan  $f_{\epsilon_i}(i)$  adalah fungsi peluang *marginal* dari variabel acak  $\epsilon_i$ , maka

$$\begin{aligned}
 U_o &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha n p \\
 &\quad - \left( \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (n e_u)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} (k n [p(1 - \alpha) - (c - u e_u)])^2 \right) f(c, i) dc di
 \end{aligned}$$

karena  $\alpha, n, c_p, p, c, e_u, u, i, k$  adalah konstan, maka

$$\begin{aligned}
 U_o &= \left( \alpha n p - \frac{c_p}{2} n^2 - \frac{1}{2} (n e_u)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (k n [p(1 - \alpha) - (c - u e_u)])^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(c, i) dc di \\
 &= \alpha n p - \frac{c_p}{2} n^2 - \frac{1}{2} (n e_u)^2 - \frac{1}{2} (k n [p(1 - \alpha) - (c - u e_u)])^2
 \end{aligned}$$

**Lampiran 3** Penurunan Fungsi Utilitas Peserta untuk Model Akad Wakalah Murni

$$\begin{aligned}
U_p &= E((1 - \alpha)np - (n(c - ue_u) + \epsilon_c) + kn[(1 - \alpha)p - (c - ue_u)] + \epsilon_i) \\
&\quad - \frac{1}{2}\psi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((1 - \alpha)np - (n(c - ue_u) + \epsilon_c) + kn[(1 - \alpha)p - (c - ue_u)] \\
&\quad + \epsilon_i) f(c, i) dc di - \frac{1}{2}\psi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \alpha)np - nc + nue_u + knp(1 - \alpha) - iknc + knue_u - \epsilon_c \\
&\quad + \epsilon_i f(c, i) dc di - \frac{1}{2}\psi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(1 - \alpha)np - nc + nue_u + knp(1 - \alpha) - iknc \\
&\quad + knue_u f(c, i) - \epsilon_c f(c, i) + \epsilon_i f(c, i)] dc di - \frac{1}{2}\psi(\sigma_c^2 \\
&\quad + \sigma_i^2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \alpha)np - nc + nue_u + knp(1 - \alpha) - iknc \\
&\quad + knue_u f(c, i) dc di - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_c f(c, i) dc di \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_i f(c, i) dc di - \frac{1}{2}\psi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2)
\end{aligned}$$

Karena  $\alpha, n, p, c, u, e_u, i,$  dan  $k$  adalah konstan, maka

$$\begin{aligned}
U_p &= [(1 - \alpha)np - nc + nue_u + knp(1 - \alpha) - iknc \\
&\quad + knue_u] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(c, i) dc di - \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_c \int_{-\infty}^{\infty} f(c, i) didc \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_i \int_{-\infty}^{\infty} f(c, i) dc di - \frac{1}{2}\psi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2) \\
&= [(1 - \alpha)np - nc + nue_u + knp(1 - \alpha) - iknc + knue_u] - E(\epsilon_c) \\
&\quad + E(\epsilon_i) - \frac{1}{2}\psi(\sigma_c^2 + \sigma_i^2)
\end{aligned}$$

Karena  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  dan  $\epsilon_c \sim N(0, \sigma_c^2)$  ini (i.i.d) berdistribusi normal sehingga  $E(\epsilon_c) = E(\epsilon_i) = 0$ , maka

$$\begin{aligned}
U_p &= [(1 - \alpha)np - nc + nue_u + knp(1 - \alpha) - iknc + knue_u] - \frac{1}{2}\psi(\sigma_c^2 \\
&\quad + \sigma_i^2)
\end{aligned}$$

**Lampiran 4** Penurunan Formula Model Akad Wakalah Berbasis Wakaf

**Payoff operator:**

$$\begin{aligned}
 x_o &= \alpha P - C + \beta IITF \\
 &= \alpha np - \left[ \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} (k[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)])^2 \right] \\
 &\quad + \beta [ik[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)] + \epsilon_i] \\
 &= \alpha np - \left[ \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} (k[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)])^2 \right] \\
 &\quad + ik\beta [(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)] + \beta \epsilon_i
 \end{aligned}$$

**Payoff peserta:**

$$\begin{aligned}
 x_p &= DR \\
 &= (1-k)(DW - COE) \\
 &= (1-k)([(1-\alpha)np + R] - [(n(c - ue_u) + \epsilon_c)])
 \end{aligned}$$

**Varians peserta:**

$$\begin{aligned}
 var(x_p) &= var[(1-k)(DW - COE)] \\
 &= var[(1-k)([1-\alpha]P + R) - (1-k)(COE)]
 \end{aligned}$$

misalkan  $(1-k)([1-\alpha]P + R) = A$ , maka

$$var(x_p) = var(A) - (1-k)^2 var(COE) + 2(1-k)cov(A, COE)$$

karena semua komponen  $A$  yaitu  $\alpha$ ,  $k$ ,  $P$ , dan  $R$  merupakan konstan dan  $A$  independent terhadap  $COE$ , maka

$$\begin{aligned}
 var(x_p) &= (1-k)^2 var(n(c - ue_u) + \epsilon_c) \\
 &= (1-k)^2 [var(n(c - ue_u)) + var(\epsilon_c)]
 \end{aligned}$$

karena variabel  $n$ ,  $c$ ,  $u$ , dan  $e_u$  merupakan variabel konstan dan *noise*  $\epsilon_c \sim N(0, \sigma_c^2)$  merupakan *identically independent distribution* (i.i.d) yang berdistribusi normal, maka

$$var(x_p) = (1-k)^2 \sigma_c^2$$

**Varians operator:**

$$\begin{aligned}
 var(x_o) &= var(\alpha P - C + \beta IITF) \\
 &= \alpha^2 var(P) - var(C) + \beta^2 var(IITF) + 2\alpha^2 cov(P, C) \\
 &\quad + 2\alpha^2 \beta^2 cov(P, IITF) + 2\beta^2 cov(C, IITF)
 \end{aligned}$$

$P$  independent terhadap  $IITF$ ,  $P$  independent terhadap  $C$ , dan  $C$  independent terhadap  $IITF$ , maka

$$\begin{aligned}
 var(x_o) &= \alpha^2 var(np) - var\left(\frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} I^2\right) \\
 &\quad + \beta^2 var(ikn[p(1-\alpha) + R - (c - ue_u)]) + \epsilon_i \\
 &= \alpha^2 var(np) - var\left(\frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} I^2\right) \\
 &\quad + \beta^2 [var(ikn[p(1-\alpha) + R - (c - ue_u)]) + var(\epsilon_i)]
 \end{aligned}$$

karena variabel  $\alpha$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $c_p$ ,  $e_u$ ,  $I$ ,  $i$ ,  $k$ ,  $R$ ,  $c$ , dan  $u$  merupakan variabel konstan dan *noise*  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  merupakan *identically independent distribution* (i.i.d) yang berdistribusi normal, maka

$$var(x_o) = \beta^2 \sigma_i^2$$

**Lampiran 5** Penurunan Fungsi Utilitas Peserta untuk Model Akad Wakalah Murni

$$\begin{aligned}
 U_p &= E\left((1-k)\left([(1-\alpha)np + R] - [(n(c - ue_u) + \epsilon_c)]\right)\right) - \frac{1}{2}\psi[(1-k)^2\sigma_c^2] \\
 &= E(np - \alpha np + R - knp + \alpha knp - kR - nc + nue_u + knc - knue_u \\
 &\quad + [1-k]\epsilon_c) - \frac{1}{2}\psi[(1-k)^2\sigma_c^2]
 \end{aligned}$$

misalkan  $f(c)$  adalah fungsi peluang dari variabel acak  $\epsilon_c$ , maka

$$\begin{aligned}
 U_p &= \int_{-\infty}^{\infty} (np - \alpha np + R - knp + \alpha knp - kR - nc + nue_u + knc - knue_u \\
 &\quad + [1-k]\epsilon_c)f(c)dc - \frac{1}{2}\psi[(1-k)^2\sigma_c^2] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (np - \alpha np + R - knp + \alpha knp - kR - nc + nue_u + knc \\
 &\quad - knue_u)f(c)dc - \int_{-\infty}^{\infty} [1-k]\epsilon_c f(c)dc \\
 &\quad - \frac{1}{2}\psi[(1-k)^2\sigma_c^2]
 \end{aligned}$$

Karena variabel  $\alpha$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $e_u$ ,  $R$ ,  $k$ ,  $c$ , dan  $u$  merupakan variabel konstan serta *noise*  $\epsilon_c \sim N(0, \sigma_c^2)$  merupakan *identically independent distribution* (i.i.d) yang berdistribusi normal dengan  $E(\epsilon_c) = 0$ , maka

$$\begin{aligned}
 U_p &= (np - \alpha np + R - knp + \alpha knp - kR - nc + nue_u + knc \\
 &\quad - knue_u) \int_{-\infty}^{\infty} f(c)dc - [1-k]E(\epsilon_c) - \frac{1}{2}\psi[(1-k)^2\sigma_c^2] \\
 &= np - \alpha np + R - knp + \alpha knp - kR - nc + nue_u + knc - knue_u \\
 &\quad - \frac{1}{2}\psi(1-k)^2\sigma_c^2
 \end{aligned}$$

**Lampiran 6** Penurunan Fungsi Utilitas Operator untuk Model Akad Wakalah Murni

$$U_o = E \left( \alpha np - \left[ \frac{c_p}{2} n^2 + \frac{1}{2} (ne_u)^2 + \frac{1}{2} (k[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)]^2) \right] \right. \\ \left. + ik\beta[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)] + \beta\epsilon_i \right) - \frac{1}{2} \phi\beta^2\sigma_i^2$$

Misalkan  $f(i)$  adalah fungsi peluang dari variabel acak  $\epsilon_i$ , maka

$$U_o = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha np - \frac{c_p}{2} n^2 - \frac{1}{2} (ne_u)^2 - \frac{1}{2} (k[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)]^2) \\ + ik\beta[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)] + \beta\epsilon_i] f(i) di - \frac{1}{2} \phi\beta^2\sigma_i^2 \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \alpha np - \frac{c_p}{2} n^2 - \frac{1}{2} (ne_u)^2 - \frac{1}{2} (k[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)]^2) \right. \\ \left. + ik\beta[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)] \right) f(i) + \beta\epsilon_i f(i) di \\ - \frac{1}{2} \phi\beta^2\sigma_i^2 \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \alpha np - \frac{c_p}{2} n^2 - \frac{1}{2} (ne_u)^2 - \frac{1}{2} (k[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)]^2) \right. \\ \left. + ik\beta[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)] \right) f(i) di + \int_{-\infty}^{\infty} \beta\epsilon_i f(i) di \\ - \frac{1}{2} \phi\beta^2\sigma_i^2$$

Karena variabel  $\alpha$ ,  $n$ ,  $c_p$ ,  $p$ ,  $e_u$ ,  $R$ ,  $k$ ,  $c$ ,  $i$ , dan  $u$  merupakan variabel konstan serta *noise*  $\epsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  merupakan *indentially independent distribution* (i.i.d) yang berdistribusi normal dengan  $E(\epsilon_i) = 0$ , maka

$$U_o = \left( \alpha np - \frac{c_p}{2} n^2 - \frac{1}{2} (ne_u)^2 - \frac{1}{2} (k[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)]^2) \right. \\ \left. + ik\beta[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)] \right) \int_{-\infty}^{\infty} f(i) di + \beta E(\epsilon_i) \\ - \frac{1}{2} \phi\beta^2\sigma_i^2 \\ = \alpha np - \frac{c_p}{2} n^2 - \frac{1}{2} (ne_u)^2 - \frac{1}{2} (k[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)]^2) \\ + ik\beta[(1-\alpha)np + R - n(c - ue_u)] - \frac{1}{2} \phi\beta^2\sigma_i^2$$

## Lampiran 7 Syntax untuk Simulasi *Geometric Brownian Motion*

```
#Simulasi Numerik i GBM
gbm.f = function(n,S0,mu,sigma){
  t=1 #time horizon
  t.s = seq(0,t,length=n+1) #time step
  dt = t/n #change in time
  Bt = sqrt(dt)*cumsum(rnorm((n+1),0,1))
  St = S0*exp((mu-sigma^2/2)*t.s+sigma*Bt)
  St #display result of GBM
}

rt <- matrix(c(1:3100),ncol = 100)
mean.rt <- list()

cmean <- rep(0,3100*100)
for (l in 1:100) {
  for (j in 1:100) {
    kk <- gbm.f(n=30,S0=1,mu=0.1,sigma=0.015)
    rt[,j] <- kk
  }
  mean.rt[[l]] <- rt
}

for (j in 1:100) {
  cmean <- cbind(cmean,mean.rt[[j]])
}
mean(cmean)
df.GBM <- data.frame(mean.rt[[1]])
df.GBM
g <- ggplot(df.GBM,aes(x=c(1:31)))
for (i in 1:99) {
  dat <- data.frame(df.GBM[,i])
  colnames(dat) <- "X"
  g <- g+geom_line(aes(x=c(1:31),y=X),data = dat)
}
colgbm <- ("Iterasi"="black")
g+xlab("n")+ylab("i")+geom_line(aes(y=df.GBM[,100],color="Iterasi"))+
  scale_color_manual(values = colgbm)+labs(color="")+
  theme(legend.position = "bottom")
```

## Lampiran 8 *Syntax* untuk Simulasi Utilitas

```
#Penentuan Nilai Variabel
p=1
c=0.8
cp=0.05
eu=160
u=500
i=mean(cmean-1)
sigi=0.25
R=10
sigi=0.25
beta <- seq(0.01,0.99,0.01)
psio <- 2
psip=2
a <- (p-c)/2*p
```

```
#Simulasi Uo terhadap beta
Uow.beta <- rep(0,99)
for (i in 1:99) {
  Uow.beta[i] <- (0.5*a^2*p^2)/cp-(0.5*beta[i]^2*cp^2*i^2*(-((a*c*p)/cp) +
    ((1 - a)*a*p^2)/cp + R)^2)/(-a*c*p + a*p^2 - a^2*p^2
+ cp*R)^2-
  (a*beta[i]^2*c*i^2*p)/(-a*c*p + a*p^2 - a^2*p^2 + cp*R) +
  ((1 - a)*a*beta[i]^2*i^2*p^2)/(-a*c*p + a*p^2 - a^2*p^2+ cp*R) +
  (beta[i]^2*cp*i^2*R)/(-a*c*p + a*p^2 - a^2*p^2 + cp*R) -
  0.5*beta[i]^2*psio*sigi^2
}
Uow.beta
```

```
#Simulasi Uo terhadap alfa
beta <- 0.1
a <- seq(0.01,0.99,0.01)
Uow.alfa <- rep(0,99)
for (i in 1:99) {
  Uow.alfa[i] <- (0.5*a[i]^2*p^2)/cp-(0.5*beta^2*cp^2*i^2*(-((a[i]*c*p)/cp) +
    ((1 - a[i])*a[i]*p^2)/cp + R)^2)/(-a[i]*c*p + a[i]*p^2
- a[i]^2*p^2 + cp*R)^2-
  (a[i]*beta^2*c*i^2*p)/(-a[i]*c*p + a[i]*p^2 - a[i]^2*p^2 + cp*R) +
  ((1 - a[i])*a[i]*beta^2*i^2*p^2)/(-a[i]*c*p + a[i]*p^2 - a[i]^2*p^2+ cp*R) +
  (beta^2*cp*i^2*R)/(-a[i]*c*p + a[i]*p^2 - a[i]^2*p^2 + cp*R) -
  0.5*beta^2*psio*sigi^2
}
Uow.alfa
```

### Lampiran 8 Syntax untuk Simulasi Utilitas (lanjutan)

```
#Simulasi Uo terhadap n
a <- (p-c)/2*p
k <- (beta*cp*i)/(-a*c*p+a*p^2-a^2*p^2+c*R)
n <- seq(1,10,0.1)
Uow.n <- rep(0,91)
for (j in 1:91) {
  Uow.n[j]=a*n[j]*p-cp/2*n[j]^2-1/2*(n[j]*0)^2-1/2*(k*((1-a)*n[j]*p+R-n[j]*(c-
u*0)))^2+
  i*k*beta*((1-a)*n[j]*p+R-n[j]*(c-u*0))-
  1/2*psio*beta^2*sigi^2
}
Uow.n
```

```
#Simulasi Uo terhadap k
k <- seq(0.01,0.99,0.01)
n <- a*p/cp
Uow.k <- rep(0,99)
for (j in 1:99) {
  Uow.k[j]=a*n*p-cp/2*n^2-1/2*(n*0)^2-1/2*(k[j]*((1-a)*n*p+R-n*(c-u*0)))^2+
  i*k[j]*beta*((1-a)*n*p+R-n*(c-u*0))-
  1/2*psio*beta^2*sigi^2
}
Uow.k
```

```
#Simulasi Up terhadap beta
beta <- seq(0.01,0.99,0.01)
a <- 0.25

Upw.beta <- rep(0,99)
for (j in 1:99) {
  Upw.beta[j] <- (-a*c*p+a*p^2-a^2*p^2)/cp+R+(a*beta[j]*c*i*p-a*beta[j]*i*p^2+
a^2*beta[j]*i*p^2
-beta[j]*cp*i*R)/(-a*c*p+a*p^2-a^2*p^2+cp*R)-
psip/2*(1-(beta[j]*i*cp)/(-a*c*p+a*p^2-a^2*p^2+cp*R))^2*psip^2
}
Upw.beta
```

```
#Simulasi Up terhadap alfa
beta <- 0.05
a <- seq(0.01,0.5,0.01)

Upw.alfa <- rep(0,50)
for (j in 1:50) {
  Upw.alfa[j] <- (-a[j]*c*p+a[j]*p^2-a[j]^2*p^2)/cp+R+(a[j]*beta*c*i*p-
a[j]*beta*i*p^2+
a[j]^2*beta*i*p^2
-beta*cp*i*R)/(-a[j]*c*p+a[j]*p^2-a[j]^2*p^2+cp*R)-
```

## Lampiran 8 *Syntax* untuk Simulasi Utilitas (lanjutan)

```
psip/2*(1-(beta*i*cp)/(-a[j]*c*p+a[j]*p^2-a[j]^2*p^2+cp*R))^2*psip^2
}
Upw.alfa
```

```
#Pembuatan Grafik
cola <- c("Utilitas Operator"="blue")
df <- data.frame(Uow.beta,seq(0.01,0.99,0.01))
colnames(df) <- c("B","A")
ggplot(df,aes(x=A))+ #Uo~beta
  geom_line(aes(y=B,color="Utilitas Operator"))+
  scale_color_manual(values = cola)+
  labs(color="")+
  xlab(expression(beta))+ylab("Utilitas Operator")+
  theme(legend.position = "bottom")

cola <- c("Utilitas Operator"="blue")
df <- data.frame(Uow.alfa,seq(0.01,0.99,0.01))
colnames(df) <- c("B","A")
ggplot(df,aes(x=A))+ #Uo~alfa
  geom_line(aes(y=B,color="Utilitas Operator"))+
  scale_color_manual(values = cola)+
  labs(color="")+
  xlab(expression(alpha))+ylab("Utilitas Operator")+
  theme(legend.position = "bottom")

cola <- c("Utilitas Operator"="blue")
df <- data.frame(Uow.n,seq(1,10,0.1))
colnames(df) <- c("B","A")
ggplot(df,aes(x=A*10))+ #Uo~n
  geom_line(aes(y=B,color="Utilitas Operator"))+
  scale_color_manual(values = cola)+
  labs(color="")+
  xlab("n")+ylab("Utilitas Operator")+
  theme(legend.position = "bottom")+
  geom_vline(xintercept = 24,col="red")

cola <- c("Utilitas Operator"="blue")
df <- data.frame(Uow.k,seq(0.01,0.99,0.01))
colnames(df) <- c("B","A")
ggplot(df,aes(x=A*10))+ #Uo~k
  geom_line(aes(y=B,color="Utilitas Operator"))+
  scale_color_manual(values = cola)+
  labs(color="")+
  xlab("k")+ylab("Utilitas Operator")+
  theme(legend.position = "bottom")

cola <- c("Utilitas Peserta"="blue")
df <- data.frame(Upw.beta,seq(0.01,0.99,0.01))
```

### Lampiran 8 *Syntax* untuk Simulasi Utilitas (lanjutan)

```
colnames(df) <- c("B","A")
ggplot(df,aes(x=A))+ #Up~beta
  geom_line(aes(y=B,color="Utilitas Peserta"))+
  scale_color_manual(values = cola)+
  labs(color="")+
  xlab(expression(beta))+ylab("Utilitas Peserta")+
  theme(legend.position = "bottom")

cola <- c("Utilitas Peserta"="blue")
df <- data.frame(Upw.alfa,seq(0.01,0.5,0.01))
colnames(df) <- c("B","A")
ggplot(df,aes(x=A))+ #Up~beta
  geom_line(aes(y=B,color="Utilitas Peserta"))+
  scale_color_manual(values = cola)+
  labs(color="")+
  xlab(expression(alpha))+ylab("Utilitas Peserta")+
  theme(legend.position = "bottom")+
  geom_vline(xintercept = 0.1,col="red")
```

*(“Halaman sengaja dikosongkan”)*

## BIODATA PENULIS



Penulis dilahirkan di Pontianak pada tanggal 16 November 2000, dan merupakan anak terakhir dari 4 bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari, SDN 06 Mempawah Timur (2006-2012), SMPN 01 Mempawah Hilir (2012-2015), dan SMAN 01 Mempawah Hilir (2015-2018). Setelah lulus dari SMA pada tahun 2018, penulis mengikuti SBMPTN, dan diterima di Departemen Aktuaria Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) dan terdaftar dengan nomor registrasi peserta (NRP) 0631184000028. Selama masa perkuliahan penulis aktif pada kegiatan akademik, dan non-akademik. Kegiatan akademik yang pernah penulis lakukan adalah menjadi asisten dosen untuk mata kuliah Pengantar Ilmu Komputasi (2019). Kegiatan non-akademik yang pernah dilakukan penulis, diantaranya mengikuti organisasi, Kerja Praktik, dan COOP. Organisasi yang pernah diikuti penulis diantaranya adalah Tim Pembina Kerohanian Buddha (TPKB) sebagai Staf Kerohanian (2019), dan Himpunan Mahasiswa Aktuaria ITS (HIMASAKTA ITS) sebagai Kepala Departemen Advokasi dan Kesejahteraan Mahasiswa (2019-2020). Penulis pernah melakukan KP di Badan Pusat Statistika (BPS) cabang Mempawah sebagai staff fungsi produksi, dan COOP di PT. Reasuransi Indonesia Utama (IndonesiRE) sebagai Intern Pricing.

Adapun mengenai informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini, dapat ditanyakan kepada penulis melalui email penulis, yaitu [kelvinlim464646@gmail.com](mailto:kelvinlim464646@gmail.com).