



**TESIS - TM185400**

**ANALISA DINAMIS INERTIA WHEEL PENDULUM  
MENGUNAKAN SLIDING MODE CONTROL**

**BAYU ADHI SAPUTRO**

**NRP. 6007201030**

**Dosen Pembimbing I**

**Dr. Eng. Unggul Wasiwitono, ST, M.Eng.Sc**

**NIP. 197805102001121001**

**Dosen Pembimbing II**

**Ir. Hendro Nurhadi, Dipl.Ing, Ph.D**

**NIP. 197511202002121002**

**Program Studi Magister**

**Departemen Teknik Mesin**

**Fakultas Teknologi Industri Dan Rekayasa Sistem**

**Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

**2022**





**TESIS - TM185400**

**ANALISA DINAMIS INERTIA WHEEL PENDULUM  
MENGUNAKAN SLIDING MODE CONTROL**

**Bayu Adhi Saputro**  
NRP. 6007201030

Dosen Pembimbing I  
**Dr. Eng. Unggul Wasiwitono, ST, M.Eng.Sc**  
NIP. 197805102001121001

Dosen Pembimbing II  
**Ir. Hendro Nurhadi, Dipl.Ing, Ph.D**  
NIP. 197511202002121002

**Program Studi Magister**

Departemen Teknik Mesin

Fakultas Teknologi Industri Dan Rekayasa Sistem

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2022





**THESIS - TM185400**

***DYNAMIC ANALYSIS OF WHEEL PENDULUM  
INERTIA USING SLIDING MODE CONTROL***

*Bayu Adhi Saputro*  
NRP. 6007201030

*Advisor*

**Dr. Eng. Unggul Wasiwitono, ST, M.Eng.Sc**  
NIP. 197805102001121001

*Co-Advisor*

**Ir. Hendro Nurhadi, Dipl.Ing, Ph.D**  
NIP. 197511202002121002

***Study Program Master***

*Mechanical Engineering Department*

*Faculty Of Industrial and System Engineering*

*Institut Teknologi Sepuluh Nopember*

*Surabaya*

*2022*





**LEMBAR PENGESAHAN TESIS**

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar

**Magister Teknik (M.T)**

di

**Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Oleh

**Bayu Adhi Saputro**

**NRP. 6007201030**

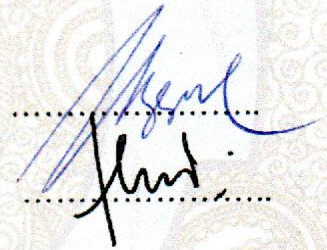
Tanggal Ujian: 12 Juli 2022

Periode Wisuda: September 2022

Disetujui oleh

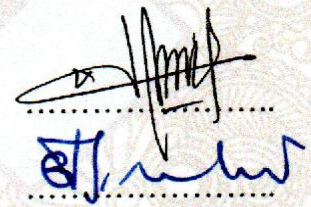
Pembimbing:

1. Dr. Eng. Unggul Wasiwitono, ST, M.Eng.Sc  
NIP. 197805102001121001
2. Ir. Hendro Nurhadi, Dipl.Ing, Ph.D  
NIP. 197511202002121002

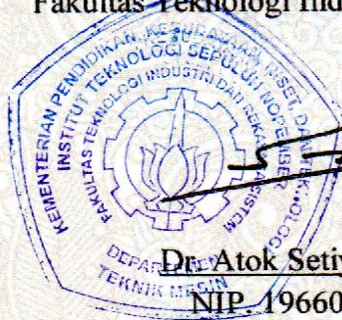


Penguji:

1. Latifah Nurahmi, ST, M.Sc, Ph.D  
NIP. 198611162020122012
2. Ir. Bambang Pramujati, ST, M.Sc, Ph.D  
NIP. 197303222001121001



Kepala Departemen Teknik Mesin  
Fakultas Teknologi Industri dan Rekayasa Sistem



**Dr. Atok Setiyawan, M.Eng.Sc**  
NIP. 19660402198903100











# **ANALISA DINAMIS *INERTIA WHEEL PENDULUM* MENGGUNAKAN *SLIDING MODE CONTROL***

Nama Mahasiswa : Bayu Adhi Saputro

NRP : 6007201030

Dosen Pembimbing I : Dr. Eng. Unggul Wasiwitono, ST, M.Eng.Sc

Dosen Pembimbing II : Ir. Hendro Nurhadi, Dipl.Ing, Ph.D

## **ABSTRAK**

Honda Riding Assist dan Segway HT memiliki sebuah kesamaan yaitu keduanya menggunakan prinsip kerja dari *inverted pendulum*. Prinsip kerja *inverted pendulum* berdasar pada hukum kekekalan momentum, jika tidak ada resultan gaya luar yang diberikan pada suatu objek atau sistem, momentum sudut objek tersebut akan kekal.

*Inverted pendulum* merupakan sistem yang nonlinear maka diperlukan sistem kendali yang mendukung nonlinearitas dari *inverted pendulum* salah satunya *sliding mode control* (SMC). SMC sendiri adalah suatu metode control untuk mengatasi ketidakpastian pada sistem control. SMC memiliki kelebihan pada tingkat *robustness* saat menghadapi variasi parameter dan disturbance baik disturbance dari dalam maupun dari luar. Desain kendali SMC memiliki beberapa tahapan yaitu memodelkan persamaan nonlinear, mendesain *sliding surface* dan implementasi *control law* pada sistem.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa SMC mampu menstabilkan *inertia wheel pendulum*. Hasil respon menunjukkan bahwa SMC mampu menstabilkan sistem dengan sudut awal maksimal  $14^0$ . Namun terjadi fenomena *chattering* pada sistem. *Chattering* yang terjadi dapat diatasi dengan penerapan fungsi saturasi sebagai pengganti signum.

**Kata Kunci:** *Inertia Wheel Pendulum, Balancing, SMC*

*(Halaman sengaja dikosongkan)*

***DYNAMIC ANALYSIS OF WHEEL PENDULUM INERTIA USING  
SLIDING MODE CONTROL***

*Name* : Bayu Adhi Saputro  
*NRP* : 6007201030  
*Advisor* : Dr. Eng. Unggul Wasiwitono, ST, M.Eng.Sc  
*Co-Advisor* : Ir. Hendro Nurhadi, Dipl.Ing, Ph.D

***ABSTRACT***

*Honda Riding Assist and Segway HT have one thing in common, namely that they both use the working principle of an inverted pendulum. The working principle of the inverted pendulum is based on the law of conservation of momentum, if there is no resultant external force exerted on an object or system, the angular momentum of the object will be conserved.*

*Inverted pendulum is a nonlinear system, so we need a control system that supports the nonlinearity of the inverted pendulum, one of which is sliding mode control (SMC). SMC itself is a control method to overcome uncertainty in the control system. SMC has advantages in the level of robustness when facing parameter variations and disturbances, both internal and external disturbances. SMC control design has several stages, namely modeling nonlinear equations, designing sliding surfaces and implementing control laws on the system.*

*The results showed that SMC was able to stabilize the inertia of the pendulum wheel. The response results show that SMC is able to stabilize the system with a maximum initial angle of 140. However, a chattering phenomenon occurs in the system. Chattering that occurs can be overcome by applying the saturation function as a substitute for signum.*

***Keywords: Inertia Wheel Pendulum, Balancing, SMC***



*(Halaman sengaja dikosongkan)*

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadiran Allah yang telah memberikan rahmat, hidayah dan ridho-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini dengan judul “***Analisa Dinamis Inertia Wheel Pendulum Menggunakan Sliding Mode Control***”. Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan akademis dalam menempuh pendidikan Program Studi Magister S2 Teknik Mesin, Fakultas Teknologi Industri dan Rekayasa Sistem, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Penyusunan tesis ini tidak lepas dari peran dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu dengan terselesaikannya tesis ini penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada:

1. Kedua orang tua penulis, Alm. Priyono dan Suwarti serta Yeni Dian Ade Fatmawati dan Nanang Mutasim Billah yang selalu memberikan semangat dan doa kepada penulis. Tanpa kasih sayang dari mereka penulis tidak akan bisa menyelesaikan tugas akhir ini.
2. Bapak Dr. Eng. Unggul Wasiwitono, ST, M.Eng.Sc selaku dosen pembimbing tesis yang telah memberikan ilmu, nasihat, dan bimbingan kepada penulis selama ini dengan penuh kesabaran.
3. Bapak Ir. Hendro Nurhadi, Dipl.Ing, Ph.D selaku dosen pembimbing kedua tesis yang telah memberikan arahan dan nasihat kepada penulis.
4. Bapak Ir. Bambang Pramujati, ST, M.Sc, Ph.D dan Ibu Latifah Nurahmi, ST, M.Sc, Ph.D selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan masukan untuk penulis guna penyempurnaan tesis ini.
5. Rizaldy Hakim Ash Shiddieqy, ST, MT yang selalu memberikan dukungan kepada penulis baik di dalam atau di luar kehidupan kampus.
6. Segenap dosen dan karyawan Departemen Teknik Mesin FTIRS ITS yang telah mencurahkan segala tenaga dan pikiran dalam rangka proses akademik dan non-akademik selama penulis menempuh pendidikan magister di Departemen Teknik Mesin.
7. Seluruh rekan-rekan S2 Teknik Mesin angkatan 2020 yang selalu menjadi garda terdepan ketika penulis mengalami paceklik inspirasi.

8. Rekan-rekan M56 khususnya LBMM Begals yang selalu memberikan motivasi dan senantiasa mengangkat penulis ketika terjatuh.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam proses dalam penyusunan Tugas Akhir yang tidak dapat disebutkan satu persatu

Dengan selesainya laporan tugas akhir ini, penulis menyadari bahwa penelitian tugas akhir ini belum sempurna sehingga penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun untuk perbaikan demi kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini memberikan manfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan bagi semua pihak.

Surabaya, 26 Juli 2022

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>ABSTRAK</b> .....	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>iii</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>v</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>vii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>ix</b>
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	<b>xi</b>
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	<b>xii</b>
<b>BAB I</b> .....	<b>1</b>
<b>PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1    Latar Belakang .....	1
1.2    Rumusan Masalah .....	3
1.3    Tujuan.....	3
1.4    Batasan Masalah.....	3
1.5    Manfaat Penelitian.....	4
<b>BAB II</b> .....	<b>5</b>
<b>DASAR TEORI</b> .....	<b>5</b>
2.1    Penelitian Terdahulu .....	5
2.2    Inertia Wheel Pendulum.....	7
2.3    Motor BLDC .....	8
2.4    Persamaan Lagrange .....	10
2.5    Persamaan Nonlinear.....	10
2.6    Stabilitas .....	12
2.6.1    Stabilitas Lyapunov .....	14
2.6.2    Lyapunov Asymptotic Stability .....	15
2.6.3    Lyapunov Uniform Asymptotic Stability .....	16
2.6.4    Lyapunov Global Asymptotic Stability .....	16
2.7    Controlability .....	17
2.8    Observability .....	17
2.9    Sliding Mode Control.....	18

2.9.1	Fungsi Switching .....	19
2.9.2	Sliding Surface .....	19
2.9.3	Control Law .....	20
2.9.4	Chattering .....	21
2.10	Spesifikasi Performasi Sistem.....	22
<b>BAB III .....</b>		<b>25</b>
<b>METODE PENELITIAN.....</b>		<b>25</b>
3.1	Studi Literatur .....	25
3.2	Diagram Alir .....	25
3.3	Persamaan Gerak Sistem.....	27
3.3.1	Persamaan Gerak Inertia Wheel Pendulum .....	27
3.3.2	Persamaan Gerak dengan Pendekatan Torsi Motor.....	33
<b>BAB IV.....</b>		<b>37</b>
<b>HASIL PENELITIAN .....</b>		<b>37</b>
4.1	Desain Kendali Sliding Mode Control.....	37
4.2	Stabilitas.....	40
4.3	Analisa Simulasi Invertia Wheel Pendulum .....	41
<b>BAB V .....</b>		<b>48</b>
<b>KESIMPULAN DAN SARAN.....</b>		<b>49</b>
5.1	Kesimpulan .....	49
5.2	Saran .....	49
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>		<b>51</b>
<b>LAMPIRAN .....</b>		<b>53</b>
<b>BIODATA PENULIS .....</b>		<b>55</b>



## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 1.1</b> Inverted Pendulum.....	2
<b>Gambar 2.1</b> Prototype Reaction Wheel Pendulum Spong et al (2001) [18] .....	5
<b>Gambar 2.2</b> Hasil Respons dengan CSMC [19].....	6
<b>Gambar 2.3</b> Hasil Respon pada Variasi Sudut Awal $5^0$ dan $12^0$ [8].....	7
<b>Gambar 2.4</b> Model Inertia Pendulum [8] .....	7
<b>Gambar 2.5</b> Motor BLDC .....	8
<b>Gambar 2.6</b> Prinsip Kerja BLDC .....	9
<b>Gambar 2.7</b> Sistem Nonlinear .....	11
<b>Gambar 2.8</b> Equilibrium State .....	13
<b>Gambar 2.9</b> Letak Eigenvalue .....	13
<b>Gambar 2.10</b> Interpretasi Stabilitas Lyapunov [23] .....	14
<b>Gambar 2.11</b> Contoh Stabilitas Lyapunov pada Inverted Pendulum [23] .....	15
<b>Gambar 2.12</b> Interpretasi Lyapunov Asymptotic Stability [23].....	16
<b>Gambar 2.13</b> Hubungan Asymptotic dengan Uniform Asymptotic [23] .....	16
<b>Gambar 2.14</b> Hubungan Asymptotic dengan Global Asymptotic [23] .....	17
<b>Gambar 2.15</b> Blok Diagram SMC.....	19
<b>Gambar 2.16</b> Kondisi Sliding .....	21
<b>Gambar 2.17</b> Chattering pada Sistem Kendali SMC [19] .....	22
<b>Gambar 2.18</b> Spesifikasi Performasi .....	24
<b>Gambar 3.1</b> Flowchart Penelitian .....	25
<b>Gambar 3.2</b> Flowchart Desain Kendali SMC.....	26
<b>Gambar 3.3</b> Freebody Diagram Prototype .....	27
<b>Gambar 4.1</b> Respons terhadap Variasi Sudut Awal .....	43
<b>Gambar 4.2</b> Respon Input Voltage terhadap Variasi Sudut Awal.....	44
<b>Gambar 4.3</b> Grafik Phase Plot terhadap Variasi Sudut Awal.....	44
<b>Gambar 4.4</b> Kondisi Sliding pada Variasi Sudut Awal.....	45
<b>Gambar 4.5</b> Grafik Respons dengan Fungsi Saturasi.....	46
<b>Gambar 4.6</b> Phase Plot Sudut $14^0$ dengan Fungsi Saturasi .....	47

*(Halaman sengaja dikosongkan)*

## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 4.1</b> Parameter Input .....	42
<b>Tabel 4.2</b> Settling Time dari Response .....	47

*(Halaman sengaja dikosongkan)*

## DAFTAR SIMBOL

<b>Simbol</b>	<b>Parameter</b>	<b>Satuan</b>
$m_m$	Massa Motor	$kg$
$m_r$	Massa Roda Inersia	$kg$
$m_p$	Massa Pendulum	$kg$
$I_m$	Momen Inersia Motor	$kg\ m^2$
$I_r$	Momen Inersia Roda	$kg\ m^2$
$I_p$	Momen Inersia Pendulum	$kg\ m^2$
$l_m$	Panjang COG Motor	$m$
$l_r$	Panjang COG Roda	$m$
$l_p$	Panjang COG Pendulum	$m$
$g$	Percepatan Gravitasi	$m/s^2$
$K_T$	Konstanta Torsi Motor	$Nm/A$
$R_m$	Hambatan Armature	$\Omega$



*(Halaman sengaja dikosongkan)*

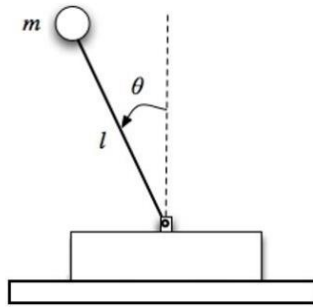
# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Pada tahun 2017 tepatnya pada suatu acara bertajuk *Consumer Electric Show* di Las Vegas, Honda Motor Co. selaku pabrikan kendaraan bermotor melakukan gebrakan baru dengan mengenalkan teknologi terbarunya yang bernama Honda Riding Assist [1]. Honda Riding Assist merupakan teknologi *self-balancing* pada kendaraan roda dua milik Honda. Teknologi tersebut memungkinkan motor menemukan titik keseimbangannya. Pada pengaplikasiannya, motor dapat berdiri dalam keadaan tegak pada saat mesin dalam kondisi mati dan juga pada kondisi putaran rendah. Hal serupa ditemukan pula pada Segway Inc. Segway merupakan pabrikan kendaraan roda dua yang mengaplikasikan teknologi *self-balancing* sebagai kendaraan bermuatan satu orang (*human transporter*) atau lebih dikenal dengan sebutan Segway HT (*Segway Human Transporter*). Segway Inc. mulai memasarkan *human transporter* pada tahun 2015 dengan nama Ninebot, hingga pada Juni 2020 Segway Inc. menyatakan berhenti memproduksi *two-wheeled human transporter* mereka.

Honda Riding Assist dan Segway HT memiliki sebuah kesamaan yaitu keduanya menggunakan prinsip kerja dari *inverted pendulum* [2]. *Inverted pendulum* pada keduanya diaplikasikan dengan menggunakan sensor kemiringan, *gyroscope* dan beberapa perangkat pendukung lainnya. *Inverted pendulum* merupakan sistem kendali non linier yang memiliki ketidakstabilan yang tinggi [3]. Prinsip kerja *inverted pendulum* berdasar pada hukum kekekalan momentum, jika tidak ada resultan gaya luar yang diberikan pada suatu objek atau sistem, momentum sudut objek tersebut akan kekal. Konsep ini digunakan dalam kontrol stabilitas satelit di mana jika orientasi satelit ingin diubah, reaksi roda bisa diaktifkan (berputar) dan diterapkan torsi pada satelit sehingga tercapai kontrol orientasi [4].



**Gambar 1.1** Inverted Pendulum

Gambar 1.1 merupakan contoh dari *inverted pendulum*. Terdapat beberapa sistem *inverted pendulum* yang banyak dijumpai sebagai topik penelitian diantaranya *inverted pendulum* dengan roda [5] [6], *inverted pendulum* dengan *cart* yang bergerak [7] dan *inverted pendulum* menggunakan roda reaksi [8]. Dari beberapa jenis *inverted pendulum* yang disebutkan di atas, stabilitas pada *inverted pendulum* menjadi bahasan yang cukup menarik dikalangan peneliti. Beberapa penelitian mengangkat topik sistem kendali untuk *inverted pendulum*. *Inverted pendulum* tergolong sistem nonlinear dimana *inverted pendulum* memiliki titik keseimbangan yang tidak stabil pada posisi tegak [9]. Didefinisikan *inverted pendulum* memiliki dua posisi keseimbangan yaitu saat tegak ke bawah ( $0^0$ ) dan tegak ke atas ( $180^0$ ) [10]. Aspek yang perlu dikontrol dari *inverted pendulum* adalah menstabilkan posisi pendulum pada titik keseimbangan atas. Guna mendukung tujuan tersebut, beberapa metode control dapat diimplementasikan ke *inverted pendulum* contohnya menggunakan sistem kendali PID [11], fuzzy [12], LQR [13], LQR-PID [14], *sliding mode control* [8] dan beberapa mekanisme kendali yang lain.

Berdasar pada pernyataan sebelumnya bahwa *inverted pendulum* merupakan sistem yang nonlinear [9] maka diperlukan sistem kendali yang mendukung nonlinearitas dari *inverted pendulum* salah satunya *sliding mode control* (SMC). SMC sendiri adalah suatu metode control untuk mengatasi ketidakpastian pada sistem control. SMC memiliki kelebihan pada tingkat robustness saat menghadapi variasi parameter dan disturbance baik disturbance

dari dalam maupun dari luar [15]. Desain kendali SMC memiliki 2 tahapan yaitu mendesain sliding surface dan implementasi *control law* pada sistem [16].

Fokus dari penelitian ini adalah untuk merancang dan mendapatkan pengontrol yang paling sesuai untuk menstabilkan *inertia wheel pendulum* dalam posisi tegak dan stabil menggunakan roda inersia. Keseimbangan *inertia wheel pendulum* dapat digunakan untuk menyeimbangkan *body* seperti robot atau kendaraan, sehingga kedepannya diharapkan metode stabilisasi ini dapat dimanfaatkan dengan maksimal.

## 1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah pada penelitian ini sebagai berikut

1. Bagaimana mendesain sistem kendali *inertia wheel pendulum* agar stabil pada posisi equilibrium?
2. Bagaimana performa sistem kendali *sliding mode control* pada *inertia wheel pendulum*?

## 1.3 Tujuan

Adapun tujuan pada penelitian ini sebagai berikut

1. Mendesain sistem kendali untuk menyeimbangkan *inertia wheel pendulum* agar stabil pada posisi equilibrium.
2. Mengetahui performa sistem kendali *sliding mode control* pada *inertia wheel pendulum*.

## 1.4 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini sebagai berikut

1. Sistem stabilisasi *inertia wheel pendulum* memanfaatkan *inertia wheel*.
2. Simulasi menggunakan *software MATLAB*.
3. Sistem kendali yang digunakan yaitu *sliding mode control*.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Adapun manfaat pada penelitian ini sebagai berikut

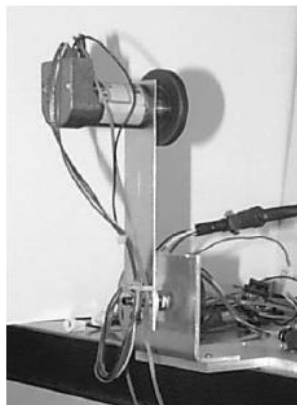
1. Sebagai acuan untuk penelitian berikutnya terkait stabilisasi *inertia wheel pendulum*.
2. Hasil penelitian digunakan sebagai acuan implementasi *inertia wheel* pada *inertia wheel pendulum*.

## BAB II

### DASAR TEORI

#### 2.1 Penelitian Terdahulu

*Inverted pendulum* memiliki dua posisi keseimbangan yaitu saat tegak ke bawah ( $0^{\circ}$ ) dan tegak ke atas ( $180^{\circ}$ ) [10]. Aspek yang perlu dikontrol dari *inverted pendulum* adalah menstabilkan posisi pendulum pada titik keseimbangan atas. *Inverted pendulum* memiliki karakteristik sifat nonlinear dengan instabilitas yang tinggi [17]. Beberapa penelitian mengangkat topik sistem kendali untuk *inverted pendulum*. *Inverted pendulum* tergolong sistem nonlinear dimana *inverted pendulum* memiliki titik keseimbangan yang tidak stabil pada posisi tegak [9]. *Inverted pendulum* juga mengalami pembaharuan dari segi sistem mekanikal. Beberapa penelitian terkait *inverted pendulum* mulai mengaplikasikan roda sebagai media mentransmisikan torsi. Torsi sendiri digunakan untuk membantu *inverted pendulum* bergerak ke posisi tegak atas. Disinilah fungsi roda, roda digunakan sebagai pemicu munculnya torsi. Torsi dihasilkan dengan bantuan inersia yang ada pada roda. Sistem mekanikal tersebut pertama kali dikenalkan oleh Spong et al (2001) [18] dengan nama *reaction wheel pendulum*. Salah satu yang dibahas pada penelitian tersebut adalah bagaimana cara menstabilkan *reaction wheel pendulum* pada posisi tegak atas seperti ditunjukkan pada gambar 2.1.

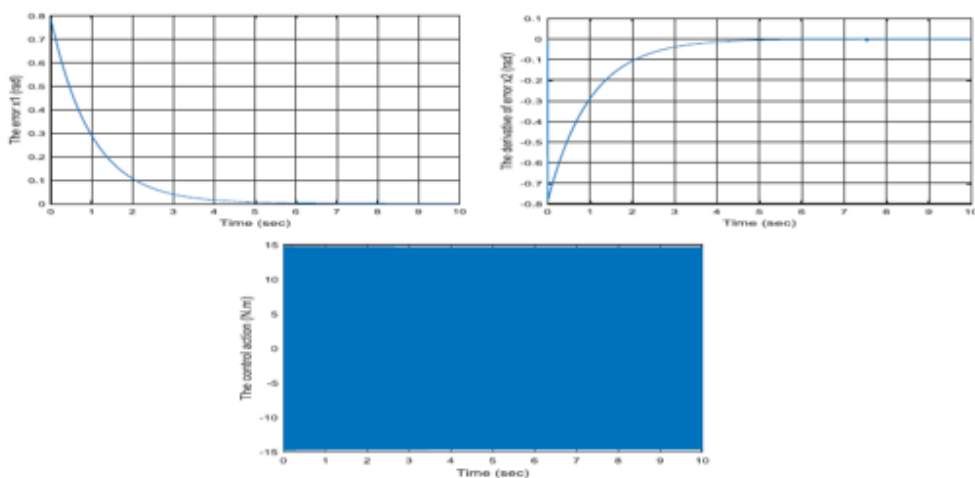


**Gambar 2.1** Prototype Reaction Wheel Pendulum Spong et al (2001) [18]

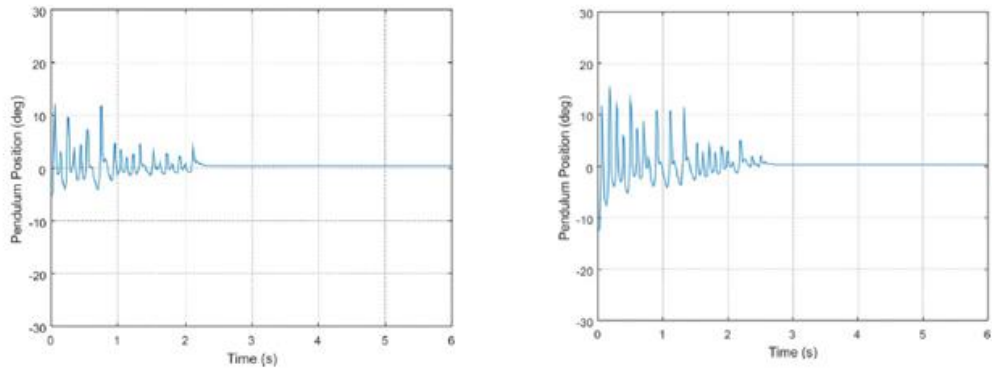
Upaya untuk menstabilkan *inverted pendulum* menjadi bahasan yang menarik dikalangan peneliti. Guna mendukung tujuan tersebut, beberapa metode control diimplementasikan ke *inverted pendulum* contohnya menggunakan sistem kendali PID [11], fuzzy [12], LQR [13], LQR-PID [14], *sliding mode control* (SMC) [8] dan beberapa mekanisme kendali yang lain.

Alfiana et al (2021) [14] mendesain control stabilisasi *inverted wheel pendulum* dengan menggunakan metode LQR dan PID. Didapatkan sistem kendali LQR dan PID dapat membawa pendulum ke posisi tegak dengan sudut awal maksimal 14.5 degree. Pada penelitian Alfiana, ditemukan fenomena *integrator windup* dimana integrator dan aktuator saling bersaturasi.

Dina et al (2021) [19] mengaplikasikan sistem kendali *classical sliding mode control* (CSMC) terhadap *uncertain pendulum*. Hasil respon yang dihasilkan ditunjukkan pada gambar 2.2. Hasil dari penelitian tersebut didapatkan sudut pendulum dapat stabil pada 6 detik dan kecepatan sudut dapat stabil pada 7 detik. Yusie et al (2018) [8] menerapkan sistem kendali SMC pada *reaction wheel pendulum*. Penelitian dilakukan dengan variasi sudut awal. Didapatkan hasil bahwa sistem kendali SMC mampu menstabilkan *reaction wheel pendulum* dengan sudut awal terbesar  $12^0$  dengan settling time sebesar 2.5 detik sesuai gambar 2.3.



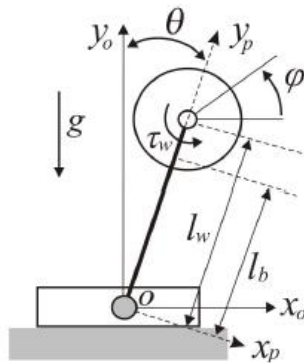
**Gambar 2.2** Hasil Respons dengan CSMC [19]



**Gambar 2.3** Hasil Respon pada Variasi Sudut Awal  $5^0$  dan  $12^0$  [8]

## 2.2 Inertia Wheel Pendulum

*Inertia wheel* merupakan sebuah *flywheel* yang digunakan untuk menghasilkan kontrol dengan menggunakan motor sebagai aktuator. Dengan mengaplikasikan torsi pada *flywheel*, torsi tersebut akan membantu pendulum berputar menuju ke posisi tegak vertikal atas seperti yang ditunjukkan pada gambar 2.4.



**Gambar 2.4** Model Inertia Pendulum [8]

Pendulum dikendalikan dengan menggerakkan roda reaksi dan mengubah percepatan rotasi roda menjadi torsi yang bekerja di pendulum. Tujuan dari pendulum roda reaksi adalah untuk menstabilkan pendulum pada kesetimbangan tegaknya. Sementara itu, *reaction wheel pendulum* adalah



sebuah sistem *underactuated* dimana momen inersia dari *rigid body* terhadap sumbunya memiliki persamaan sebagai berikut

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (2.1)$$

Dimana  $m_i$  adalah titik massa pada jarak  $r_i$  dari sumbu rotasi

### 2.3 Motor BLDC

*Brushless DC* (BLDC) motor merupakan pilihan ideal untuk aplikasi yang membutuhkan keandalan yang tinggi, efisiensi tinggi, dan rasio *power-to-volume* yang tinggi. Secara umum, motor BLDC dianggap sebagai motor dengan performa tinggi yang mampu menghasilkan torsi yang besar pada rentang kecepatan yang besar. BLDC motor adalah turunan dari motor DC yang paling umum digunakan, yaitu motor DC dengan sikat, dan mereka memiliki kurva karakteristik torsi dan kecepatan yang sama. Perbedaan utama antara keduanya adalah penggunaan sikat. BLDC motor tidak memiliki sikat dan harus terkomutasi secara elektronik. Adapun salah satu contoh motor BLDC ditunjukkan pada gambar 2.5.



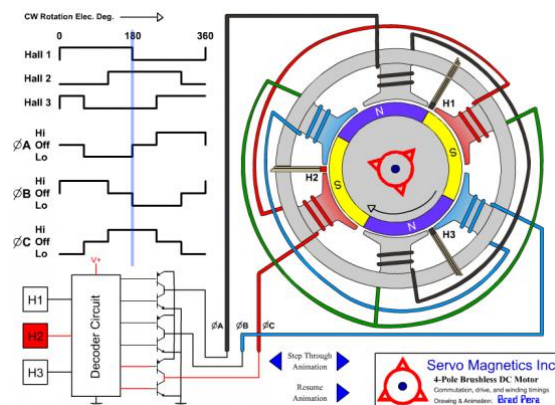
**Gambar 2.5** Motor BLDC

Komutasi merupakan perubahan fase arus motor pada waktu yang tepat untuk menghasilkan torsi rotasional. Dalam motor DC dengan sikat, motor memiliki komutator fisik yang digerakkan dengan sikat untuk memindahkan

rotor. Dalam motor BLDC, kekuatan arus listrik magnet permanen menyebabkan motor untuk bergerak, sehingga komutator fisik tidak diperlukan.

Motor BLDC sangat handal karena tidak memiliki sikat yang bisa aus dan harus diganti. Ketika dioperasikan dalam kondisi optimal, usia motor dapat lebih dari 10.000 jam. Untuk aplikasi jangka panjang, hal ini bisa menjadi keuntungan yang besar. Setiap kali motor rusak atau perlu diganti, plant atau bagian dari plant harus dimatikan. Hal ini membutuhkan waktu dan uang, tergantung pada berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk mengganti komponen yang aus atau bagian dan rusak agar plant dapat berjalan seperti semula. Meskipun motor BLDC memakan biaya lebih dari motor DC dengan sikat, hal ini akan sepadan seiring dengan banyaknya waktu dan uang yang dihabiskan motor DC dengan sikat jika sikat aus. Prinsip kerja

Motor BLDC sebenarnya sama dengan motor listrik DC konvensional. Perbedaan hanya terletak pada penggunaan *brush* (sikat). Pada motor DC konvensional, sikat dan komutator mekanik digunakan dalam proses komutasi. Sedangkan motor BLDC sudah menggunakan teknologi elektronik dalam proses komutasinya, yaitu sensor Hall dan kontroler. Prinsip kerja BLDC ditunjukkan dalam bentuk visual pada gambar 2.6.



**Gambar 2.6** Prinsip Kerja BLDC

## 2.4 Persamaan Lagrange

Dalam menyatakan persamaan differensial mengenai gerak partikel atau sistem dapat dibentuk menggunakan penerapan hukum gerak Newton atau menggunakan persamaan Lagrange. Hukum gerak Newton sebagai landasan terhadap semua mekanika gerak linear, rotasi, hingga hukum gas ideal, memiliki prinsip-prinsip kuat yang ditulis oleh Newton. Akan tetapi jika aspek yang terlibat semakin banyak maka perhitungan akan semakin sulit untuk dilakukan. Persamaan Lagrange mengkombinasikan antara energi kinetik yang dilambangkan dengan ( $T$ ) dan energi potensial yang dilambangkan dengan ( $V$ ) sehingga persamaanya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$L = T - V \quad (2.2)$$

Pada persamaan Lagrange koordinat posisi dan kecepatan merupakan variabel independen, dan turunan persamaan Lagrange dapat diturunkan secara parsial. Jika  $q$  merupakan koordinat sistem dan  $u$  merupakan besaran yang diberikan maka persamaan Lagrange dapat diperoleh menggunakan metode *virtual displacement*, dimana partikel diasumsikan berpindah dengan jarak yang sangat kecil dengan batasan yang ada pada sistem dan kerja yang dilakukan dapat dinyatakan secara matematis

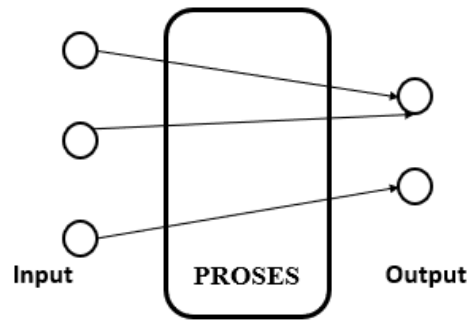
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta L}{\delta q_i} = \tau_i \quad (2.3)$$

Dimana  $\tau_i$  merupakan torsi aktuator

## 2.5 Persamaan Nonlinear

Sistem nonlinear merupakan system yang memiliki ketidakpastian tinggi (*uncertainty*), sulit dikontrol, sensitif dan susah untuk diprediksi. Gambar 2.7 menunjukkan bahwa dengan dua input berlainan dapat menghasilkan output yang sama dan satu input dalam proses dapat menghasilkan output yang sama.

Hal ini yang menjadikan system nonlinear memiliki tingkat kesensitifan yang tinggi.



**Gambar 2.7** Sistem Nonlinear

Dalam sistem kendali *Multi Input Multi Output* (MIMO) atau sistem kendali yang memiliki input dan output yang banyak biasanya menggunakan *state space* sebagai penggambaran model dari sistemnya. Persamaan *state space* terdiri dari input ( $u$ ), *state vector* ( $x$ ), output ( $y$ ), dan penurunan derivative ( $\dot{x}$ ). Bentuk *state space* untuk suatu linear *time invariant* memiliki bentuk umum:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.4)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.5)$$

Dimana A adalah matriks sistem, B adalah matriks input, C adalah matriks output, dan D adalah matriks *feedforward*. Persamaan *state space* sendiri merupakan persamaan untuk melinearisasikan suatu model. Persamaan *state space* disusun atas dua fungsi dimana persamaan 2.4 merupakan persamaan nonlinearitas dan persamaan 2.5 merupakan persamaan garis linear. Sehingga linearisasi dari *state space* merujuk pada persamaan 2.5. Khali et al (2010) [20] menyatakan suatu persamaan nonlinear sebagai berikut

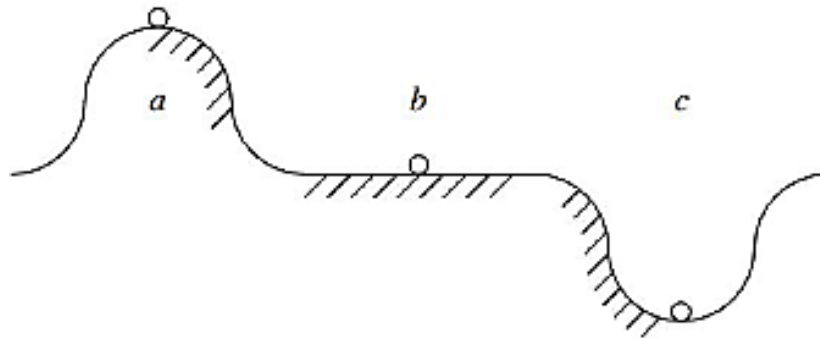
$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.6)$$

Dimana  $x$  merupakan state variabel,  $u$  adalah control input,  $f(x)$  merupakan fungsi yang memiliki ketidaktentuan (*uncertainty*) dan  $g(x)$  merupakan fungsi nonlinear yang memiliki batas (*bounded*).

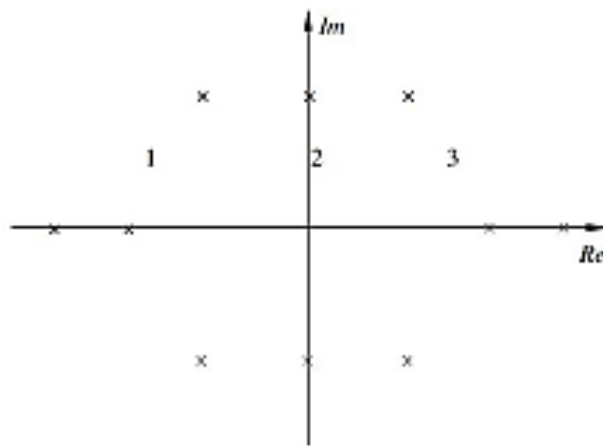
## 2.6 Stabilitas

Stabilitas dibagi menjadi 2 tipe, yaitu *internal stability* dan *external stability*. Untuk tipe pertama, *internal stability*, melibatkan perilaku kuantitatif dari respon *zero input state* dimana respon tersebut terkait dengan *state equation homogeneous* yang hanya bergantung pada keadaan awal. Pengaturan stabilitas dapat dilakukan pada *state equation homogeneous* nonlinear maupun linear secara eksplisit dengan melibatkan nilai *eigenvalue* matriks A pada sistem dinamis.

Persamaan keadaan nonlinier dapat memiliki beberapa keadaan kesetimbangan terisolasi masing-masing dengan sifat stabilitas yang berbeda. Pada gambar 2.8 titik a menunjukkan suatu keseimbangan yang *unstable*. Bola dengan sempurna berada diatas permukaan melengkung dan akan tetap dalam keadaan diam apabila tidak ada gangguan. Namun, gangguan sekecil apapun dapat menyebabkan bola berguling dari posisi awal. Titik b menggambarkan keseimbangan yang stabil dalam arti bola hanya akan bergerak sedikit dari posisi diam dipermukaan datar saat mengalami gangguan sekecil apapun. Sedang titik c menggambarkan keseimbangan *asymptotically stable* dimana bola pada awalnya diam dipermukaan melengkung dan apabila diberi gangguan kecil, bola tidak akan menyimpang terlalu jauh dari posisi setimbang.



**Gambar 2.8** Equilibrium State



**Gambar 2.9** Letak Eigenvalue

Dengan nilai *eigenvalue* matriks A sebagai berikut

$$\lambda(s) = |sI - A| \quad (2.7)$$

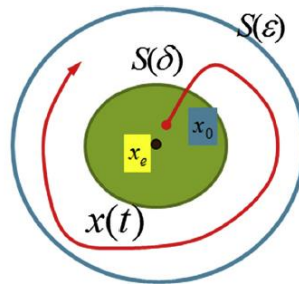
Dengan kesimbangan  $x = 0$ , sistem dikatakan stabil jika semua nilai *eigenvalue* berada pada bagian riil nonpositif dan pada posisi nol. Sistem dikatakan *globally asymptotically stable* jika dan hanya jika *eigenvalue* dari matriks A berada di bagian riil negatif. Gambar 2.9 mengilustrasikan posisi *eigenvalue* pada suatu bidang. Kasus 1 menggambarkan letak *eigenvalue* di bagian riil negatif, sehingga sistem dikatakan *asymtotically stable*. Kasus 2

menunjukkan nilai *eigenvalue* berada pada sumbu imajiner dan tidak berulang, dengan demikian sistem dikatakan stabil. Sedangkan pada kasus 3 terdapat satu atau lebih *eigenvalue* dibagian riil positif, dengan demikian sistem dianggap tidak stabil.

Tipe stabilitas yang kedua adalah *external stability* atau dikenal dengan istilah *bounded-Input, bounded-output stability* (BIBO). Tipe ini memiliki ciri-ciri dimana *state equation* dengan respon output *zero-state* merupakan sinyal yang dibatasi untuk setiap sinyal input yang dibatasi.

### 2.6.1 Stabilitas Lyapunov

Analisis stabilitas juga dapat dilakukan dengan pendekatan berbasis energi atau dikenal dengan stabilitas Lyapunov. Lyapunov pertama kali dikenalkan oleh Aleksandr Lyapunov dalam disertasinya berjudul “*The General Problem of Stability of Motion*” [21]. Disertasi dari Lyapunov menganalisa stabilitas dari sistem dinamis nonlinear [22]. Gambar 2.8 menunjukkan interpretasi dari stabilitas Lyapunov.



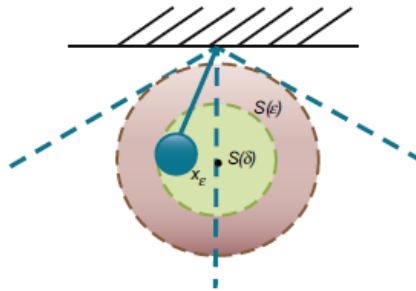
**Gambar 2.10** Interpretasi Stabilitas Lyapunov [23]

Kondisi awal  $x_0$  diasumsikan berada didekat daerah berbentuk bola dengan state equilibrium  $x_e$  sebagai titik tengah dan arbitrary  $\delta$  dari radius. Ketika  $t$  cenderung menuju tak hingga maka sistem akan terletak pada sekitar titik tengah dengan arbitrary  $\epsilon$  sebagai radius. Maka sistem tersebut dalam kondisi stabil secara Lyapunov.

Stability pada *state equation* dengan permasalahan pada pendekatan matematis dari stabilitas Lyapunov sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, t) \\ x_e &= 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

Untuk  $\varepsilon > 0$ , maka  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ . Stabilitas keadaan equilibrium mengacu pada perilaku kualitatif lintasan yang dimulai di sekitar keadaan equilibrium. Salah satu dari penerapan stabilitas Lyapunov dapat dijumpai pada aplikasi *inverted pendulum* yang ditunjukkan pada gambar 2.11. Ketika pendulum mendapat *external force* maka akan terjadi simpangan pendulum dari titik kesetimbangannya. Perpindahan posisi pendulum dianggap sebagai *trajectory system* dan momen yang dihasilkan oleh *external force* dianggap sebagai *initial value*  $t_0$ .

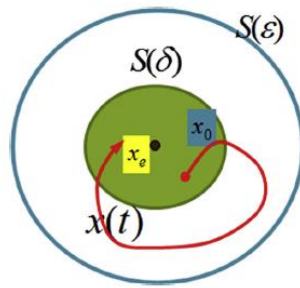


**Gambar 2.11** Stabilitas Lyapunov pada Inverted Pendulum [23]

### 2.6.2 Lyapunov Asymptotic Stability

Kondisi awal  $x_0$  diasumsikan berada didekat daerah berbentuk bola dengan *state equilibrium*  $x_e$  sebagai titik tengah dan arbitrary  $\delta$  dari radius. Ketika  $t$  cenderung menuju tak hingga maka kondisi system dapat dikonvergensi menuju titik setimbang  $x_e$ . Skema kasus ini disebut *Lyapunov Asymptotic Stability* yang ditunjukkan pada gambar 2.12.

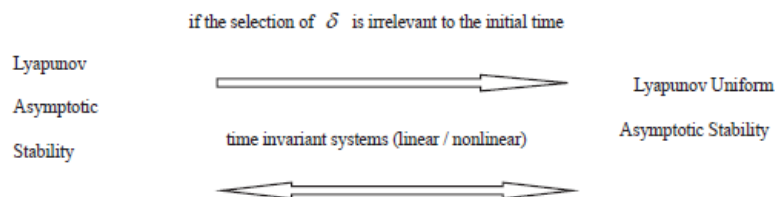




**Gambar 2.12** Interpretasi Lyapunov Asymptotic Stability [23]

### 2.6.3 Lyapunov Uniform Asymptotic Stability

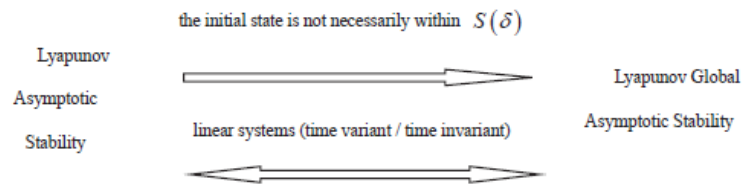
Pada definisi *Lyapunov Asymptotic Stability* jika sistem trayektori pada tiap waktu tidak bergerak pada trayektori  $S(\epsilon)$  maka skema kasus ini disebut *Lyapunov Uniform Asymptotic Stability*. Hubungan *Lyapunov asymptotic stability* dengan *Lyapunov uniform asymptotic stability* dapat dilihat pada gambar 2.13.



**Gambar 2.13** Hubungan Asymptotic dengan Uniform Asymptotic [23]

### 2.6.4 Lyapunov Global Asymptotic Stability

Pada definisi *Lyapunov Asymptotic Stability* jika sistem trayektori pada tiap posisi tidak bergerak pada trayektori  $S(\epsilon)$  dan terkonvergensi ke titik setimbang  $x_e$  maka skema kasus ini disebut *Lyapunov Uniform Asymptotic Stability*. Hubungan *Lyapunov asymptotic stability* dengan *Lyapunov global asymptotic stability* dapat dilihat pada gambar 2.14.



**Gambar 2.14** Hubungan Asymptotic dengan Global Asymptotic [23]

## 2.7 Controlability

Sistem dikatakan *controllable* pada saat  $t = t_0$  jika dapat ditentukan sinyal pengendalian tanpa kendala yang akan memindahkan suatu keadaan awal ke keadaan akhir acak dalam selang waktu  $t_0 < t < t_1$ . Jika setiap keadaan sistem terkendali, maka sistem dikatakan terkendali sempurna. Untuk mengetahui suatu sistem *controllable* atau tidak, perlu dipertimbangkan  $p - input$  berdimensi  $n$  pada state equation, dimana linear *time-invariant* memiliki turunan *state equation* sebagai berikut.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.8)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.9)$$

Pasangan (A, B) dikatakan *controllable* jika untuk setiap *initial state*  $x(0) = x_0$  dan setiap final state  $x_1$  terdapat input yang mentransfer  $x_0$  ke  $x_1$  dalam waktu yang terbatas. Sebuah model *state space continuous time-invariant* linear dikatakan *controllable* jika dan hanya jika

$$\text{rank}[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n \quad (2.10)$$

dimana *rank* adalah jumlah independen linear dalam matriks dan  $n$  merupakan jumlah *state variables*.

## 2.8 Observability

Suatu sistem dikatakan dapat diamati (*observable*) jika setiap keadaan awal dari *state vector*  $x(t_0)$  dapat digunakan untuk mengati keluaran  $y(t)$  dengan

interval waktu yang terbatas. Sistem tersebut dikatakan *observable* jika semua keadaan awal yang mungkin dimiliki sistem dapat diamati. Linear *time-invariant* memiliki turunan persamaan state sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{2.10}$$

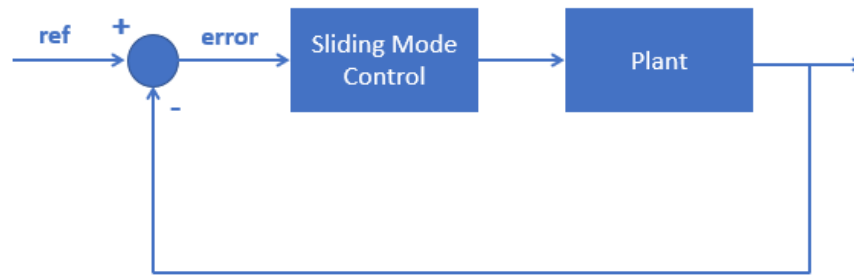
Definisi: state  $x_0 \in R^n$  dikatakan *unobservable* jika respons input  $x_0$  dengan *initial state*  $x(t_0) = x_0$  adalah  $y(t) \equiv 0$  untuk semua nilai  $t \geq t_0$ . Persamaan state dikatakan *observable* jika dan hanya jika

$$\text{rank}[C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}] = n\tag{2.11}$$

dimana *rank* adalah jumlah independen linear dalam matriks dan  $n$  merupakan jumlah state variabel.

## 2.9 Sliding Mode Control

*Sliding Mode Control* (SMC) adalah kontrol umpan balik penskalaran berkecepatan tinggi yang dapat diterapkan pada sistem linier maupun nonlinear. Blok diagram sederhana dari SMC dapat dilihat pada gambar 2.15. SMC terdiri dari dua langkah yaitu desain *stable sliding surface* yang menggerakkan sistem sehingga memiliki kinerja yang diinginkan (dikenal sebagai *reaching phase*) dan desain *control law* untuk memaksa lintasan sistem ke permukaan *sliding* yang dipilih dalam waktu terbatas dan mempertahankan gerakan sliding di atasnya (dikenal sebagai *sliding phase*). Perancangan pengendali SMC berkaitan dengan beberapa fungsi dan kondisi sebagai berikut.



**Gambar 2.15** Blok Diagram SMC

### 2.9.1 Fungsi Switching

Tahapan pertama dalam mendesain sistem kendali SMC adalah menentukan fungsi *switching*. Diberikan sistem dinamis sebagai berikut

$$x^{(n)}(t) = f(x, t) + b(x, t) \cdot u \quad (2.12)$$

Dimana  $u$  merupakan control input,  $x$  merupakan variabel keadaan,  $x^{(n)}$  adalah turunan order- $n$ ,  $f$  adalah fungsi nonlinier dan  $b$  merupakan fungsi *gain*. Jika  $x_d$  merupakan  $x$  yang diinginkan maka tracking error dinyatakan dengan

$$e(t) = x(t) - x_d(t) \quad (2.13)$$

Fungsi *switching* ini didapat dari pertambahan turunan terhadap waktu dengan lambda dan kemudian dipangkatkan  $n - 1$  yang selanjutnya dikalikan dengan *tracking error*. Fungsi *switching* ini digunakan untuk menentukan besarnya nilai  $u$  agar memenuhi kondisi *sliding*.

### 2.9.2 Sliding Surface

Fungsi *switching* disebut dengan permukaan *sliding (sliding surface)* jika memenuhi

$$S(x, t) = 0 \quad (2.14)$$

Dengan  $x$  suatu konstanta positif yang dipilih agar persamaan di atas menjadi permukaan yang stabil. Permukaan sliding berupa garis yang merupakan komponen penting dari SMC sebagai tempat trayektori kendaraan meluncur dari kondisi awal menuju keadaan yang diinginkan. Untuk sistem berorde-2 ( $n = 2$ ) *sliding surface* dapat ditulis

$$S(x, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{2-1} e(t)$$

$$S(x, t) = \frac{de}{dt} + \lambda e(t) = \dot{e} + \lambda e(t)$$

$$S(x, t) = \dot{e} + \lambda e(t) = 0 \quad (2.15)$$

Persamaan di atas menunjukkan suatu garis lurus pada bidang  $e$  dan  $\dot{e}$ . *Sliding surface* membagi bidang menjadi dua bagian yaitu  $S < 0$  dan  $S > 0$ . Agar trayektori keadaan dapat meluncur maka sistem harus dalam kondisi *sliding*.

### 2.9.3 Control Law

Perancangan *control law* pada SMC dilakukan sedemikian hingga  $e(t)$  bergerak menuju permukaan sliding dan meluncur pada permukaan tersebut untuk semua  $t \geq 0$ . Untuk memperoleh *control law* digunakan suatu fungsi yang merupakan fungsi Lyapunov, dimana fungsi yang dikonstruksi merupakan fungsi definit positif, yaitu

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (2.16)$$

Dengan  $V(0) = 0$  dan  $V > 0$  untuk  $S = 0$ . Kondisi yang memenuhi syarat kestabilan sistem merupakan turunan pertama dari persamaan 2.16 yang bersifat definit negatif yaitu

$$\dot{V} = S\dot{S} \leq -\eta|S| \quad (2.17)$$

Pertidaksamaan 2.17 disebut kondisi *sliding*. Kondisi diatas dapat ditulis dalam bentuk

$$S\dot{S} \leq 0 \quad (2.18)$$

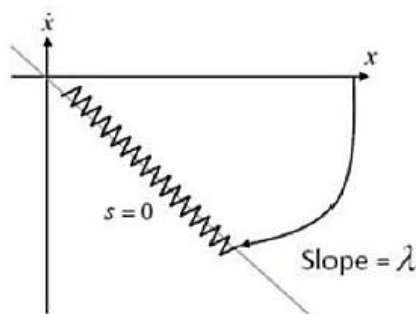
atau,

$$\dot{S} \cdot \text{sgn}(S) \leq -\eta \quad (2.19)$$

Dengan suatu  $\eta$  konstanta positif dengan  $\text{sgn}(S)$  dapat didefinisikan begai berikut

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{jika } x < 0 \\ 0, & \text{jika } x = 0 \\ 1, & \text{jika } x > 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Kondisi sliding dalam SMC divisualisasikan dalam bentuk grafik  $x$  terhadap  $\dot{x}$  pada gambar 2.16. Nilai  $x$  merupakan *error* sedangkan  $\dot{x}$  merupakan turunan dari *error*.

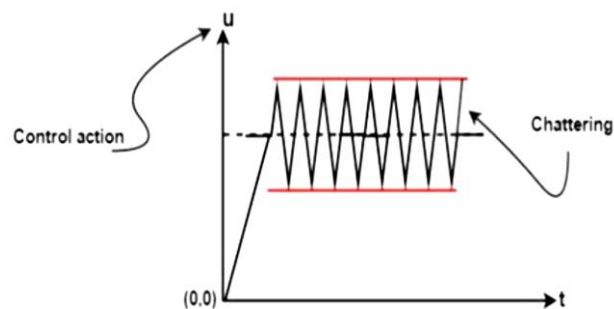


**Gambar 2.16** Kondisi Sliding

#### 2.9.4 Chattering

Pada penggunaan sistem kendali SMC akan dijumpai fenomena yang tidak diinginkan yaitu terjadinya osilasi pada sekitar daerah stabil dimana

osilasi yang terjadi pada *finite amplitude* dan *finite frequency* [24]. Fenomena ini disebut *chattering*. *Chattering* merupakan fenomena yang berbahaya bagi sistem karena *chattering* menyebabkan keausan tinggi pada sistem mekanis, *losses energy* yang besar dan memicu kenaikan temperatur pada *power circuit*. *Chattering* yang terjadi pada sistem ditunjukkan pada gambar 2.17



**Gambar 2.17** Chattering pada Sistem Kendali SMC [19]

Menurut Utkin et al (2006) [24] *chattering* kemungkinan disebabkan oleh dua hal yaitu:

- a. Perubahan dinamis yang cepat yang diabaikan oleh model yang ideal. Pada *unmodeled system* nilai konstanta yang bernilai sangat kecil (mendekati nol) sering diabaikan. Nilai konstanta kecil tersebut sering dijumpai pada mekanisme servo, sensor dan *data processors*.
- b. Penggunaan *digital controllers* dengan *finite sampling rate* dapat menyebabkan *discretization chattering*. *Discretization chattering* pada waktu diskrit sistem terjadi akibat diskontinuitas yang terjadi pada kontrol.

## 2.10 Spesifikasi Performasi Sistem

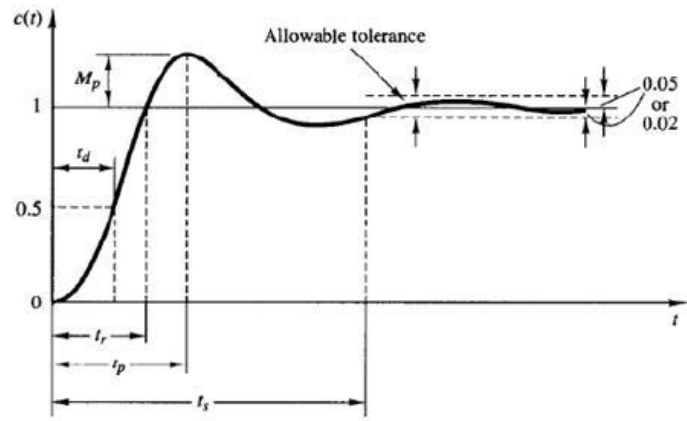
Performasi suatu sistem pengendali dapat dilakukan tidak hanya dengan mengamati kestabilannya, melainkan juga dilihat dari beberapa unsur yang umumnya disebut karakteristik *transient response* dan respon pada keadaan tunak (*steady state*).

*Transient response* adalah respon sistem yang berlangsung dari keadaan awal sampai keadaan akhir yang terdiri dari:

1. Waktu tunda (*delay time*),  $td$ : waktu yang diperlukan respon untuk mencapai setengah harga akhir yang pertama kali.
2. Waktu naik (*rise time*),  $tr$ : waktu yang diperlukan respon untuk naik dari 10 sampai 90%, 5 sampai 95%, atau 0 sampai 100% dari harga akhirnya. Untuk sistem orde dua dengan karakteristik redaman kurang, biasanya digunakan waktu naik 0 – 100%. Untuk sistem dengan karakteristik redaman lebih, biasanya digunakan waktu naik 10 – 90%.
3. Waktu puncak (*peak time*),  $tp$ : waktu yang diperlukan respon untuk mencapai puncak lewatan yang pertama kali.
4. Lewatan maksimum (*maximum overshoot*),  $Mp$ : harga puncak maksimum dari kurva respon yang diukur dari satu.
5. Waktu penetapan (*settling time*),  $ts$ : waktu yang diperlukan kurva respon untuk mencapai dan menetap dalam daerah di sekitar harga akhir yang ukurannya ditentukan dengan persentase mutlak dari harga akhir. Kriteria persentase kesalahan yang digunakan ditentukan dari sasaran disain sistem yang dikembangkan.

*Steady state error* adalah perbedaan antara nilai aktual dengan nilai referensi ketika respon sudah dalam keadaan *steady state*. *Steady state error* dapat dicari dengan cara mencari selisih antara nilai aktual dengan nilai referensi kemudian dibagi dengan nilai referensi dikali 100%. *Transient response* dan *steady state error* dalam suatu grafik respons dapat dilihat pada gambar 2.18.





**Gambar 2.18** Spesifikasi Performasi

## BAB III

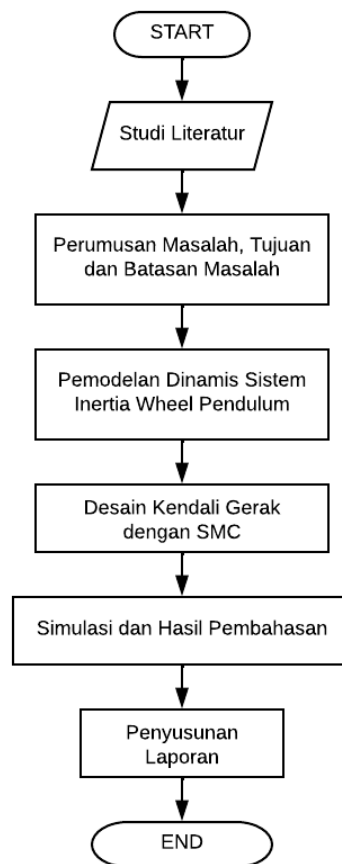
### METODE PENELITIAN

#### 3.1 Studi Literatur

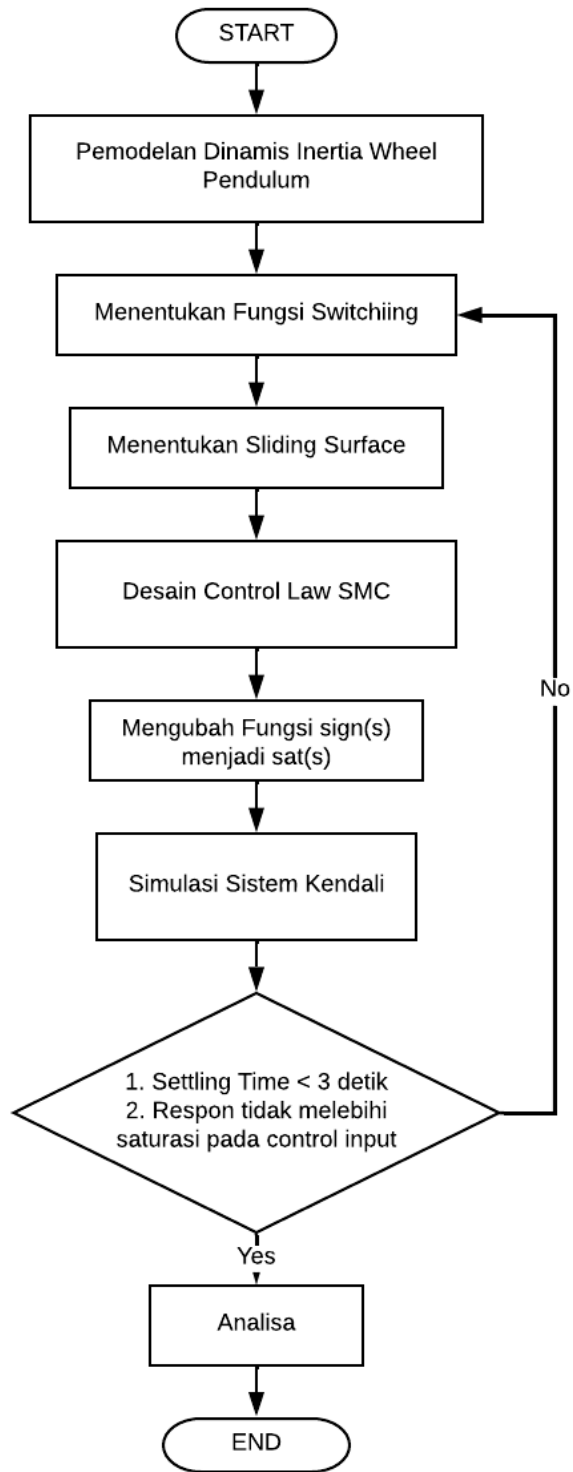
Pada tahap ini dilakukan studi literatur dari berbagai sumber seperti jurnal ilmiah, buku, laporan tugas akhir atau tesis terdahulu yang berkaitan dengan permasalahan yang ada. Dengan tujuan untuk mempelajari lebih dalam mengenai model kinematika dan dinamika dari *inertia wheel pendulum* dan desain kendali dengan metode *sliding mode control* (SMC).

#### 3.2 Diagram Alir

Adapun langkah penelitian berupa diagram alir ditunjukkan pada gambar 3.1 sedangkan diagram alir sistem kendali SMC ditunjukkan pada gambar 3.2.



**Gambar 3.1** Flowchart Penelitian

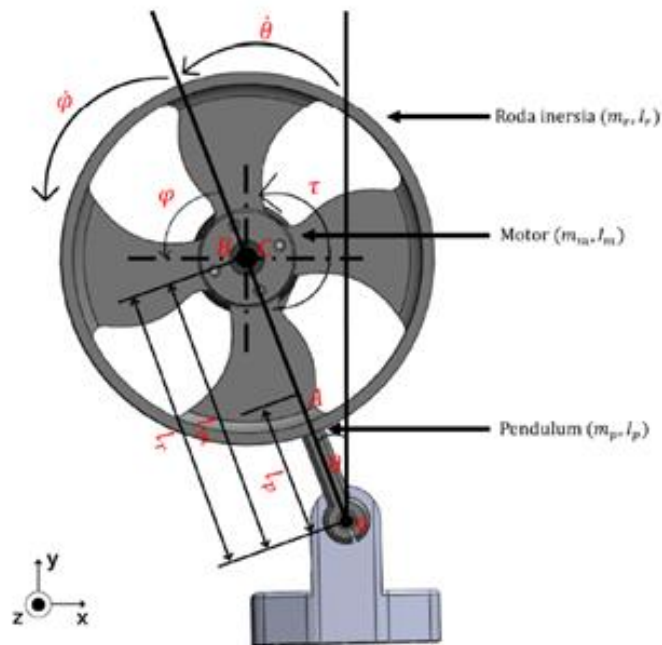


**Gambar 3.2** Flowchart Desain Kendali SMC

### 3.3 Persamaan Gerak Sistem

#### 3.3.1 Persamaan Gerak Inertia Wheel Pendulum

Persamaan gerak *inertia wheel pendulum* diturunkan dengan menggunakan pendekatan Lagrange. Pendekatan Lagrange sendiri mengacu pada energi yang dihasilkan pada sistem. Adapun bentuk dari *freebody diagram inertia wheel pendulum* ditunjukkan pada gambar 3.3.



**Gambar 3.3** Freebody Diagram Prototype

Adapun tahapan penurunan persamaan gerak sebagai berikut

1. Posisi *center of gravity* dari pendulum

$$x_A = l_p \sin \theta \quad (3.1)$$

$$y_A = l_p \cos \theta \quad (3.2)$$

Diperoleh kecepatan pendulum dari turunan pertama posisi pendulum

$$\dot{x}_A = l_p \cos \theta \dot{\theta} \quad (3.3)$$

$$\dot{y}_A = -l_p \sin \theta \dot{\theta} \quad (3.4)$$

Energi kinetik pada pendulum dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{y}_A^2 \\ &= \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p (l_p \cos \theta \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_p (-l_p \sin \theta \dot{\theta})^2 \\ &= \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p l_p^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p l_p^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p l_p^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Dimana  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , maka diperoleh energi kinetik pada pendulum

$$T_p = \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\theta}^2 \quad (3.5)$$

2. Posisi *center of gravity* dari roda

$$x_B = l_r \sin \theta \quad (3.6)$$

$$y_B = l_r \cos \theta \quad (3.7)$$

Diperoleh kecepatan roda dari turunan pertama posisi roda

$$\dot{x}_B = l_r \cos \theta \dot{\theta} \quad (3.8)$$

$$\dot{y}_B = -l_r \sin \theta \dot{\theta} \quad (3.9)$$

Energi kinetik pada pendulum dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 T_r &= \frac{1}{2} I_r (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{x}_B^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{y}_B^2 \\
 &= \frac{1}{2} I_r (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_r l_r^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_r l_r^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \\
 T_r &= \frac{1}{2} I_r (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_r l_r^2 \dot{\theta}^2
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

3. Posisi *center of gravity* dari motor

$$x_c = l_m \sin \theta \tag{3.11}$$

$$y_c = l_m \cos \theta \tag{3.12}$$

Diperoleh kecepatan motor dari turunan pertama posisi roda

$$\dot{x}_c = l_m \cos \theta \dot{\theta} \tag{3.13}$$

$$\dot{y}_c = -l_m \sin \theta \dot{\theta} \tag{3.14}$$

Energi kinetik pada pendulum dinyatakan dalam persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 T_m &= \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_m \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} m_m \dot{y}_c^2 \\
 &= \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_m l_m^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_m l_m^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \\
 T_m &= \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_m l_m^2 \dot{\theta}^2
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

#### 4. Energi kinetik total

Energi kinetik total didapatkan dari penjumlahan energi kinetik pada pendulum, roda dan motor. Sehingga diperoleh energi kinetik total sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 T &= T_p + T_r + T_m \\
 &= \frac{1}{2}I_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_p l_p^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_r(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_r l_r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}m_m l_m^2 \dot{\theta}^2 \\
 T &= \left( \frac{1}{2}I_p + \frac{1}{2}m_p l_p^2 + \frac{1}{2}m_r l_r^2 + \frac{1}{2}I_m + \frac{1}{2}m_m l_m^2 \right) \dot{\theta}^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}I_r(\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta} + \dot{\theta}^2)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

#### 5. Energi potensial

$$\begin{aligned}
 V &= m_p l_p g \cos \theta + m_r l_r g \cos \theta + m_m l_m g \cos \theta \\
 V &= (m_p l_p + m_r l_r + m_m l_m) g \cos \theta
 \end{aligned}$$

#### 6. Persamaan Lagrange

$$\begin{aligned}
 L &= T - V \\
 &= \left( \frac{1}{2}I_p + \frac{1}{2}m_p l_p^2 + \frac{1}{2}m_r l_r^2 + \frac{1}{2}I_m + \frac{1}{2}m_m l_m^2 \right) \dot{\theta}^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}I_r(\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta} + \dot{\theta}^2) \\
 &\quad - (m_p l_p + m_r l_r + m_m l_m) g \cos \theta
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Persamaan gerak Lagrangian dengan menurunkan Lagrangian terhadap koordinat  $\theta$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = (m_p l_p + m_r l_r + m_m l_m) g \sin \theta$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta} &= 2 \left( \frac{1}{2} I_p + \frac{1}{2} m_p l_p^2 + \frac{1}{2} m_r l_r^2 + \frac{1}{2} I_m + \frac{1}{2} m_m l_m^2 \right) \dot{\theta} + 2 \frac{1}{2} I_r \dot{\phi} \\
&\quad + 2 \frac{1}{2} I_r \dot{\theta} \\
&= (I_p + m_p l_p^2 + m_r l_r^2 + I_m + m_m l_m^2 + I_r) \dot{\theta} + I_r \dot{\phi} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) &= (I_p + m_p l_p^2 + m_r l_r^2 + I_m + m_m l_m^2 + I_r) \ddot{\theta} + I_r \ddot{\phi} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\
(I_p + m_p l_p^2 + m_r l_r^2 + I_m + m_m l_m^2 + I_r) \ddot{\theta} + I_r \ddot{\phi} \\
- (m_p l_p + m_r l_r + m_m l_m) g \sin \theta &= 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Persamaan gerak Lagrangian dengan menurunkan Lagrangian terhadap koordinat  $\phi$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= 2 \frac{1}{2} I_r \dot{\phi} + 2 \frac{1}{2} I_r \dot{\theta} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= I_r \ddot{\phi} + I_r \ddot{\theta} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \phi} \right) &= \tau \\
I_r \ddot{\phi} + I_r \ddot{\theta} &= \tau
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Jika,

$$\begin{aligned}
M_1 &= I_p + m_p l_p^2 + I_r + m_r l_r^2 + \frac{1}{2} I_m + m_m l_m^2 \\
M_2 &= m_p l_p + m_r l_r + m_m l_m
\end{aligned}$$

maka diperoleh persamaan sebagai berikut

$$M_1 \ddot{\theta} + I_r \ddot{\phi} - M_2 g \sin \theta = 0 \tag{3.20}$$

$$I_r \ddot{\phi} + I_r \ddot{\theta} = \tau \tag{3.21}$$



Sehingga persamaan 3.21 dapat ditulis menjadi

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau}{I_r} - \ddot{\phi} \quad (3.22)$$

Substitusi persamaan 3.22 ke 3.20 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \left( M_1 \frac{\tau}{I_r} - M_1 \ddot{\phi} \right) + I_r \ddot{\phi} - M_2 g \sin \theta &= 0 \\ (I_r - M_1) \ddot{\phi} - M_2 g \sin \theta &= -\frac{M_1}{I_r} \tau \\ (I_r - M_1) \ddot{\phi} &= M_2 g \sin \theta - \frac{M_1}{I_r} \tau \\ \ddot{\phi} &= \frac{M_2 g}{(I_r - M_1)} \sin \theta - \frac{M_1}{I_r(I_r - M_1)} \tau \end{aligned} \quad (3.23)$$

Substitusi persamaan 3.23 ke 3.22 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{\tau}{I_r} - \frac{M_2 g}{(I_r - M_1)} \sin \theta + \frac{M_1}{I_r(I_r - M_1)} \tau \\ \ddot{\theta} &= \frac{(I_r - M_1)}{I_r(I_r - M_1)} \tau - \frac{M_2 g}{(I_r - M_1)} \sin \theta + \frac{M_1}{I_r(I_r - M_1)} \tau \\ \ddot{\theta} &= -\frac{M_2 g}{(I_r - M_1)} \sin \theta + \frac{M_1 + (I_r - M_1)}{I_r(I_r - M_1)} \tau \\ \ddot{\theta} &= -\frac{M_2 g}{(I_r - M_1)} \sin \theta + \frac{1}{I_r(I_r - M_1)} \tau \end{aligned} \quad (3.24)$$

7. Didefinisikan persamaan nonlinear pada *inertia wheel pendulum* yaitu  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  dan  $x_3 = \dot{\phi}$  sehingga

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{M_2 g}{(I_r - M_1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{I_r(I_r - M_1)} \end{bmatrix} \tau \quad (3.25)$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\tau \quad (3.26)$$

### 3.3.2 Persamaan Gerak dengan Pendekatan Torsi Motor

1. Torsi yang dihasilkan oleh motor didefinisikan dengan rumus sebagai berikut

$$\tau_w - \tau_L = I_m \ddot{\phi} \quad (3.27)$$

Persamaan diatas terdiri atas dua nilai torsi motor dimana  $\tau_w$  yang merupakan torsi elektromagnetik dan  $\tau_L$  yang merupakan *load torque*. Diketahui persamaan  $\tau_w$  sebagai berikut

$$\tau_w = \eta K t i \quad (3.28)$$

Dimana  $K t$  merupakan konstanta dari motor yang bernilai konstan. Nilai arus  $i$  dapat didekati dengan pendekatan hukum Lenz dimana

$$i = (V_s + V_{emf})/R \quad (3.29)$$

$V_s$  merupakan *supply voltage* sedangkan  $V_{emf}$  merupakan tegangan *back-emf* yang timbul dari gaya gerak listrik pada motor dengan syarat nilai  $emf < 0$  (nilai  $emf$  berharga negatif). Sedangkan  $R$  merupakan hambatan *armature* yang dihasilkan oleh motor. Berdasarkan pengaplikasian Hukum Lenz pada sirkuit motor, didapatkan persamaan

$$\begin{aligned} net\ voltage &= supply\ voltage + backemf \\ V_n &= V_s + backemf \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sehingga persamaan 3.29 dapat dituliskan ulang menjadi

$$i = \frac{V_n}{R} \quad (3.31)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan 3.30 ke 3.27, didapatkan

$$\tau_w = \eta Kt \frac{V_n}{R} \quad (3.32)$$

Diketahui  $\eta$  adalah rasio gear dari motor. Pada prototype, *reaction wheel* disambungkan bertumpu pada motor dengan bantuan baut. Putaran yang terjadi pada motor BLDC ditransmisikan ke *reaction wheel* secara langsung. Sehingga berdasarkan pernyataan tersebut dapat disimpulkan rasio gear pada motor bernilai  $\eta = 1:1$ . Jika  $V_n = V$  maka didapatkan persamaan

$$\tau_w = Kt \frac{V}{R} \quad (3.33)$$

Selanjutnya persamaan torsi elektromagnetik disubstitusikan kembali ke dalam persamaan 3.27. Sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \tau_w - \tau_L &= I_m \ddot{\phi} \\ \tau_L &= \tau_w - I_m \ddot{\phi} \\ \tau_L &= Kt \frac{V}{R} - I_m \ddot{\phi} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Persamaan 3.34 disubstitusikan ke dalam persamaan 3.23. Diasumsikan nilai  $\tau_L = \tau$ , sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{M_2 g}{(I_r - M_1)} \sin \theta - \frac{M_1}{I_r (I_r - M_1)} \left( Kt \frac{V}{R} - I_m \ddot{\phi} \right) \\ \ddot{\phi} &= \frac{M_2 g}{(I_r - M_1)} \sin \theta - \frac{M_1 Kt}{I_r (I_r - M_1) R} V + \frac{M_1 I_m}{I_r (I_r - M_1)} \ddot{\phi} \end{aligned}$$

$$\ddot{\phi} - \frac{M_1 I_m}{I_r(I_r - M_1)} \ddot{\phi} = \frac{M_2 g}{(I_r - M_1)} \sin \theta - \frac{M_1 K t}{I_r(I_r - M_1)R} V$$

$$\ddot{\phi} \left(1 - \frac{M_1 I_m}{I_r(I_r - M_1)}\right) = \frac{M_2 g}{(I_r - M_1)} \sin \theta - \frac{M_1 K t}{I_r(I_r - M_1)R} V \quad (3.35)$$

Jika,

$$Z_1 = 1 - \frac{M_1 I_m}{I_r(I_r - M_1)} \quad (3.36)$$

Maka,

$$\ddot{\phi} = \frac{M_2 g}{Z_1(I_r - M_1)} \sin \theta - \frac{M_1 K t}{Z_1 I_r(I_r - M_1)R} V \quad (3.37)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan di atas ke persamaan 3.22 dan 3.34, maka didapatkan juga persamaan

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau}{I_r} - \ddot{\phi}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_r} \left( K t \frac{V}{R} - I_m \ddot{\phi} \right) - \ddot{\phi}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{K t}{I_r R} V - \frac{I_m}{I_r} \ddot{\phi} - \ddot{\phi}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{K t}{I_r R} V - \left( \frac{I_m}{I_r} + 1 \right) \ddot{\phi} \quad (3.38)$$

Persamaan 3.37 disubstitusikan ke 3.38, didapatkan

$$\ddot{\theta} = \frac{K t}{I_r R} V - \left( \frac{I_m}{I_r} + 1 \right) \left( \frac{M_2 g}{Z_1(I_r - M_1)} \sin \theta - \frac{M_1 K t}{Z_1 I_r(I_r - M_1)R} V \right) \quad (3.39)$$

Jika,

$$Z_2 = \left( \frac{I_m}{I_r} + 1 \right) \quad (3.40)$$

maka persamaan 3.40 menjadi

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{Kt}{I_r R} V - Z_2 \left( \frac{M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} \sin \theta - \frac{M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R} V \right) \\ \ddot{\theta} &= \frac{Kt}{I_r R} V - \frac{Z_2 M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} \sin \theta + \frac{Z_2 M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R} V \\ \ddot{\theta} &= \left( \frac{Kt}{I_r R} + \frac{Z_2 M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R} \right) V - \frac{Z_2 M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} \sin \theta \quad (3.41) \end{aligned}$$

Didefinisikan bahwa state variable yaitu  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ . Sehingga didapatkan persamaan sistem nonlinear dari *inertia wheel pendulum* sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{Z_2 M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} \sin x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Kt}{I_r R} + \frac{Z_2 M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R} \end{bmatrix} v \quad (3.42)$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v \quad (3.43)$$

## BAB IV

### HASIL PENELITIAN

#### 4.1 Desain Kendali Sliding Mode Control

Sistem kendali yang digunakan pada penelitian ini adalah *sliding mode control* (SMC). Sistem kendali SMC digunakan agar *inertia wheel pendulum* dapat kembali ke posisi equilibrium. Merujuk pada penurunan persamaan Lagrange didapatkan model persamaan nonlinear yang selanjutnya digunakan sebagai desain kendali SMC. Adapun dalam persamaan nonlinear terdapat beberapa parameter-parameter yang perlu terpenuhi nilainya. Nilai dari parameter didapatkan secara pengukuran dan perhitungan matematis.

Langkah awal untuk mendesain sistem kendali SMC yaitu mendesain *switching function*. Diberikan sebuah persamaan nonlinier sederhana dari Khali [20] sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dimana  $x$  merupakan state variable,  $u$  adalah control input,  $f(x)$  merupakan fungsi yang memiliki ketidaktentuan (*uncertain*) dan  $g(x)$  merupakan fungsi nonlinear yang memiliki batas (*bounded*). Berdasar pernyataan tersebut maka perlu didefinisikan state variabel sebagai berikut

$$\begin{aligned}[x_1 \quad x_2]^T &= [\theta \quad \dot{\theta}]^T \\ [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2]^T &= [\dot{\theta} \quad \ddot{\theta}]^T\end{aligned}\tag{4.2}$$

Mengacu pada persamaan 3.33 didapatkan hubungan persamaan

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 = \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\theta}\end{aligned}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{Z_2 M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} \sin x_1 + \left( \frac{Kt}{I_r R} + \frac{Z_2 M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R} \right) v \quad (4.3)$$

$$\dot{x}_2 = f(x) + g(x)u$$

Berikutnya diperlukan desain *sliding surface* atau *sliding manifold* [15] dimana persamaan *sliding surface* adalah

$$s = ax_1 + x_2 \quad (4.4)$$

Dimana  $a$  harus memenuhi kriteria *Hurwitz* yakni  $a > 0$ , sedangkan  $s$  merupakan *sliding variable*. Selanjutnya, guna mengkondisikan *inertia wheel pendulum* pada posisi setimbang atas, maka nilai  $x_1$  dan  $x_2$  harus sama dengan 0. Sehingga

$$s = ax_1 + x_2 = 0$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = -ax_1 + s \quad (4.5)$$

Sedangkan nilai derivative dari *sliding surface* didapatkan

$$\dot{s} = a\dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

$$\dot{s} = ax_2 + f(x) + g(x)u \quad (4.6)$$

Persamaan 4.3 disubstitusikan ke persamaan 4.6, sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut

$$\dot{s} = ax_2 - \frac{Z_2 M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} \sin x_1 + \left( \frac{Kt}{I_r R} + \frac{Z_2 M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R} \right) v \quad (4.7)$$

Selanjutnya dilakukan implementasi *control law* dengan pendekatan *reaching law* pada design SMC. Penggunaan *control law* akan mempengaruhi *reaching phase* dan *sliding phase*. *Reaching phase* akan membawa sistem ke *sliding surface* sedangkan *sliding phase* akan membawa sistem ke posisi

equilibrium. Berdasarkan Liu [25] diberikan persamaan *control law* SMC sebagai berikut

$$\dot{s} = -k \operatorname{sign}(s) \quad (4.7)$$

Dimana  $k > 0$ , dan  $k$  merepresentasikan *constant rate*. Dengan menghubungkan persamaan 4.7 dan 4.8, didapatkan

$$\begin{aligned} ax_2 + f(x) + g(x)u &= -k \operatorname{sign}(s) \quad (4.8) \\ ax_2 - \frac{Z_2 M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} \sin x_1 + \left( \frac{Kt}{I_r R} + \frac{Z_2 M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R} \right) u + k \operatorname{sign}(s) &= 0 \\ - \left( \frac{Kt}{I_r R} + \frac{Z_2 M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R} \right) u &= ax_2 - \frac{Z_2 M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} + k \operatorname{sign}(s) \\ u &= - \frac{1}{\left( \frac{Kt}{I_r R} + \frac{Z_2 M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R} \right)} \left( ax_2 + \frac{Z_2 M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} \sin x_1 \right. \\ &\quad \left. + k \operatorname{sign}(s) \right) \quad (4.9) \\ u &= \frac{1}{\left( \frac{Kt}{I_r R} + \frac{Z_2 M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R} \right)} \left( -ax_2 - \frac{Z_2 M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} \sin x_1 - k \operatorname{sign}(s) \right) \end{aligned}$$

Dimana  $a$  harus memenuhi kriteria Hurwitz yakni  $a > 0$ , maka persamaan menjadi

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{g(x)} (ax_2 - f(x) - k \operatorname{sign}(s)) \\ u &= \frac{1}{\left( \frac{Kt}{I_r R} + \frac{Z_2 M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R} \right)} \left( ax_2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{Z_2 M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} \sin x_1 - k \operatorname{sign}(s) \right) \quad (4.10) \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan *control input* sistem kendali SMC sebagai berikut



$$u = \frac{1}{\frac{Kt}{I_r R} + \frac{Z_2 M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R}} \left( ax_2 - \frac{Z_2 M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} \sin x_1 - k \operatorname{sign}(s) \right) \quad (4.11)$$

Untuk meminimalisir terjadinya *chattering*, maka nilai fungsi *signum* dapat digantikan dengan fungsi saturasi. Fungsi saturasi ini pada dasarnya adalah penerapan *boundary layer* sebagai batas atas dan batas bawah sistem untuk meminimalisir terjadinya *chattering*. Sehingga didapatkan,

$$u = \frac{1}{\frac{Kt}{I_r R} + \frac{Z_2 M_1 Kt}{Z_1 I_r (I_r - M_1) R}} \left( ax_2 - \frac{Z_2 M_2 g}{Z_1 (I_r - M_1)} \sin x_1 - k \operatorname{sat}(s) \right) \quad (4.12)$$

## 4.2 Stabilitas

Stabilitas dari suatu sistem dapat dilihat dari berbagai pendekatan teoritis. Salah satu pendekatan untuk mencari stabilitas dapat menggunakan persamaan Lyapunov. Guna memenuhi kriteria stabilitas sistem implementasi persamaan Lyapunov perlu memperhatikan ketentuan dimana nilai  $\dot{V} \leq 0$  dimana  $V$  merupakan turunan fungsi Lyapunov. Diketahui fungsi Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (4.13)$$

Didapatkan derivative dari fungsi Lyapunov, selanjutnya disubstitusikan ke persamaan 4.6 sehingga

$$\dot{V} = s\dot{s} \quad (4.14)$$

$$\dot{V} = s(ax_2 + f(x) + g(x)u) \quad (4.15)$$

Karenanya, *control input* dari kendali SMC dapat dituliskan menjadi

$$u = \frac{1}{g(x)} (ax_2 - f(x) - k \operatorname{sign}(s)) \quad (4.16)$$

Merujuk pada persamaan 4.10 yang sama dengan persamaan 4.16, maka penggunaan *control law* dapat dikatakan sebagai fungsi stabilitas sistem seperti fungsi Lyapunov.

### 4.3 Analisa Simulasi Inertia Wheel Pendulum

Pada bagian ini dilakukan simulasi kendali SMC pada inertia wheel pendulum dengan menggunakan media *software MATLAB Simulink*. Pemodelan inertia wheel pendulum menggunakan persamaan nonlinear dari *inertia wheel pendulum* sesuai persamaan 3.42 kemudian dihubungkan dengan sistem kendali SMC sesuai persamaan 4.10. Selanjutnya pemodelan diimplementasikan ke dalam *Simulink* dengan bagan berdasarkan parameter input yang telah ditentukan. Adapun pendekatan *control law* yang digunakan dalam simulasi menggunakan pendekatan fungsi *signum* yaitu *constant rate control law*. Tujuan dari simulasi yang dilakukan yaitu menstabilkan *inertia wheel pendulum* ke posisi vertikal atas ( $180^\circ$ ). Adapun diagram blok pada *Simulink* ditunjukkan pada lampiran I dan parameter input ditunjukkan pada tabel 4.1.

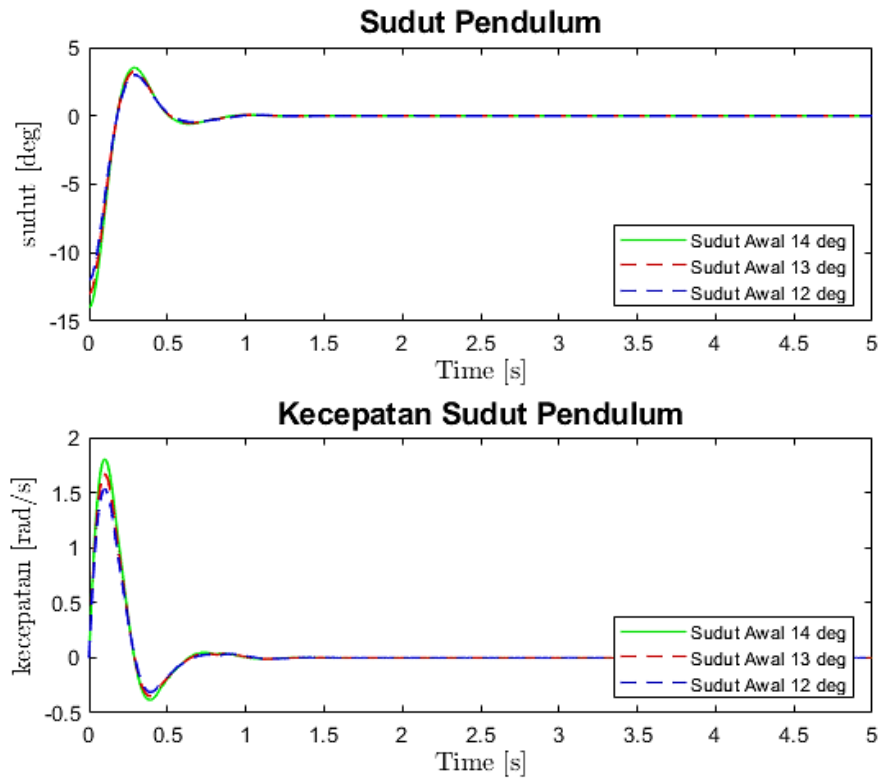
Simulasi dilakukan pada *software MATLAB Simulink* dilakukan dengan memberikan variasi sudut awal pada  $12^\circ$ ,  $13^\circ$ , dan  $14^\circ$ . Pada blok diagram *Simulink control input di-feedback* dan kemudian masuk ke dalam *subsystem state variable* sebagai nilai *error* dari sistem yang perlu dikendalikan dan dikoreksi. Selanjutnya dilakukan analisis hubungan antara sudut awal yang diberikan terhadap respons dari state variabel sistem sampai sistem kembali pada posisi tegak ke atas. Simulasi selanjutnya dilakukan untuk mengetahui berapa simpangan maksimum sampai saturasi *input voltage*. Pada model yang telah dibuat, *input voltage (u)* akan dibatasi outputnya (saturasi) dengan batas atas dan bawah sesuai dengan spesifikasi maksimum *voltage* yang dimiliki oleh motor.

**Tabel 4.1** Parameter Input

No	Simbol	Parameter	Nilai
1	$m_p$	Massa pendulum	0.023
2	$I_p$	Momen inersia pendulum	0.000050783
3	$m_m$	Massa motor BLDC	0.122
4	$I_m$	Momen inersia motor BLDC	0.000033139
5	$m_r$	Massa roda inersia	0.12
6	$I_r$	Momen inersia roda	0.000603826
7	$l_p$	Panjang <i>COG</i> pendulum	0.0783
8	$l_m$	Panjang <i>COG</i> motor BLDC	0.12
9	$l_r$	Panjang <i>COG</i> roda inersia	0.12
10	$g$	Percepatan gravitasi	9.8
11	$a$	Konstata <i>sliding</i>	10
12	$k$	Konstanta <i>signum</i>	2
13	$sat$	<i>Boundary layer thickness</i>	0.0027
14	$K_t$	Konstanta torsi motor BLDC	0.00389331
15	$R$	Hambatan	11.4
16	$V$	Maksimum <i>voltage</i> motor	22

Gambar 4.1 merupakan grafik respon dari state variabel sudut pendulum ( $\theta$ ) dan kecepatan pendulum ( $\dot{\theta}$ ). Dari grafik tersebut didapatkan bahwa implementasi desain kendali SMC pada sistem mampu membawa *inertia wheel pendulum* setimbang di posisi *unstable*. Besarnya sudut awal yang diberikan pada sistem berbanding lurus dengan kenaikan *overshoot* yang dihasilkan. Pada dasarnya ketiga variasi sudut yang diberikan pada sistem menghasilkan respon yang cepat ditinjau dari sudut pendulum maupun kecepatan pendulum. Namun dengan cepatnya respon yang diberikan berdampak pada besarnya energi yang dikeluarkan agar sistem menuju ke posisi stabil. Semakin besar nilai sudut awal

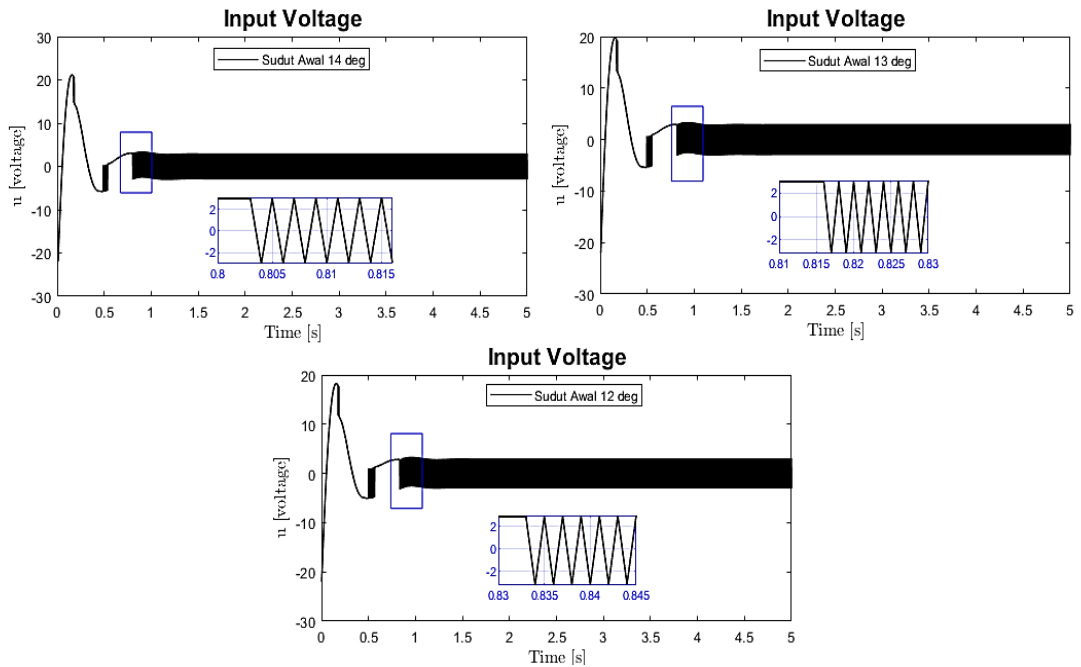
yang diberikan maka semakin besar energi yang dikeluarkan agar sistem menuju posisi stabil.



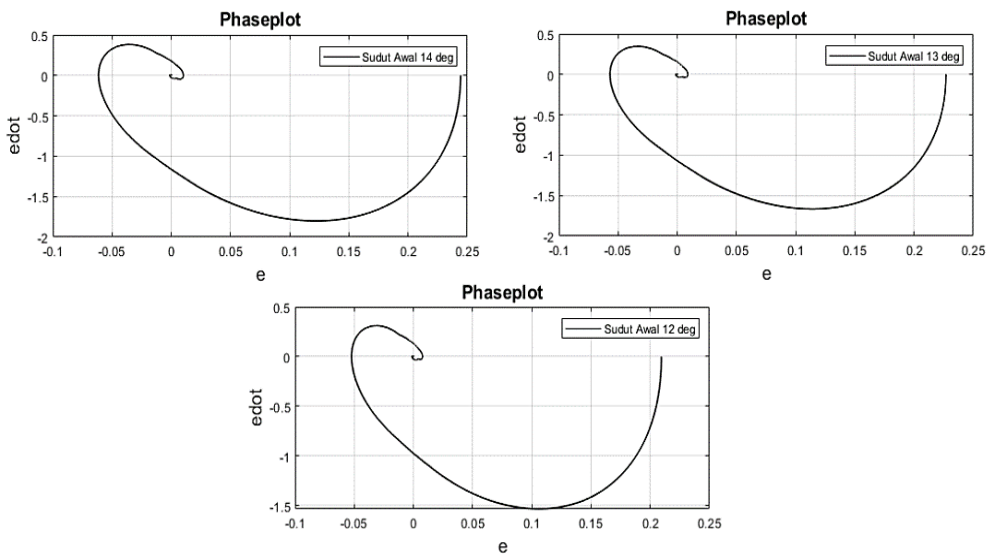
**Gambar 4.1** Respons terhadap Variasi Sudut Awal

Gambar 4.2 merupakan grafik respon input voltage terhadap waktu pada masing-masing variasi sudut awal yaitu  $12^\circ$ ,  $13^\circ$ , dan  $14^\circ$ . Input voltage yang dihasilkan semakin naik seiring dengan kenaikan variasi sudut awal pendulum. Namun pada variasi sudut awal  $14^\circ$ , besar input voltage belum melewati nilai saturasi yang diizinkan. Adapun saturasi input voltage yang diberikan sebesar maksimum voltage yang dapat diterima oleh motor berdasar pada spesifikasi motor. Pada bagian gambar yang diperbesar ulang, ditemukan fenomena *chattering*. *Chattering* merupakan fenomena yang sering dijumpai pada sistem kendali SMC. *Chattering* merupakan fenomena yang berbahaya bagi sistem karena *chattering* menyebabkan keausan tinggi pada sistem mekanis, *losses energy* yang besar dan memicu kenaikan temperatur pada *power circuit*.

*Chattering* kemungkinan disebabkan karena perubahan gerak dinamis yang cepat pada model yang dianggap ideal pada simulasi.

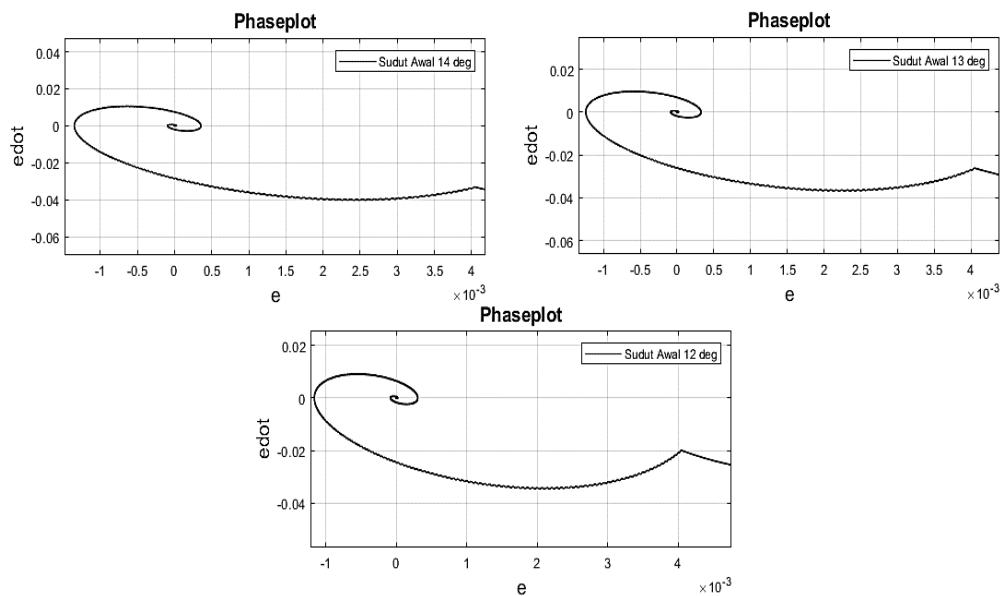


**Gambar 4.2** Respon Input Voltage terhadap Variasi Sudut Awal



**Gambar 4.3** Grafik Phase Plot terhadap Variasi Sudut Awal

Gambar 4.3 merupakan grafik *phase plot*. *Phase plot* sendiri merupakan grafik *error* terhadap turunan *error*. Pada grafik di atas menjelaskan bagaimana sistem menuju posisi stabil. Posisi stabil pada sistem sendiri harus memenuhi syarat dimana  $[x_1 \ x_2]^T = [\theta \ \dot{\theta}]^T$  sama dengan nol. Sehingga dapat dikatakan grafik *phase plot* di atas dapat dijadikan sebagai visualisasi dari kestabilan sistem *inertia wheel pendulum* menuju titik setimbang.

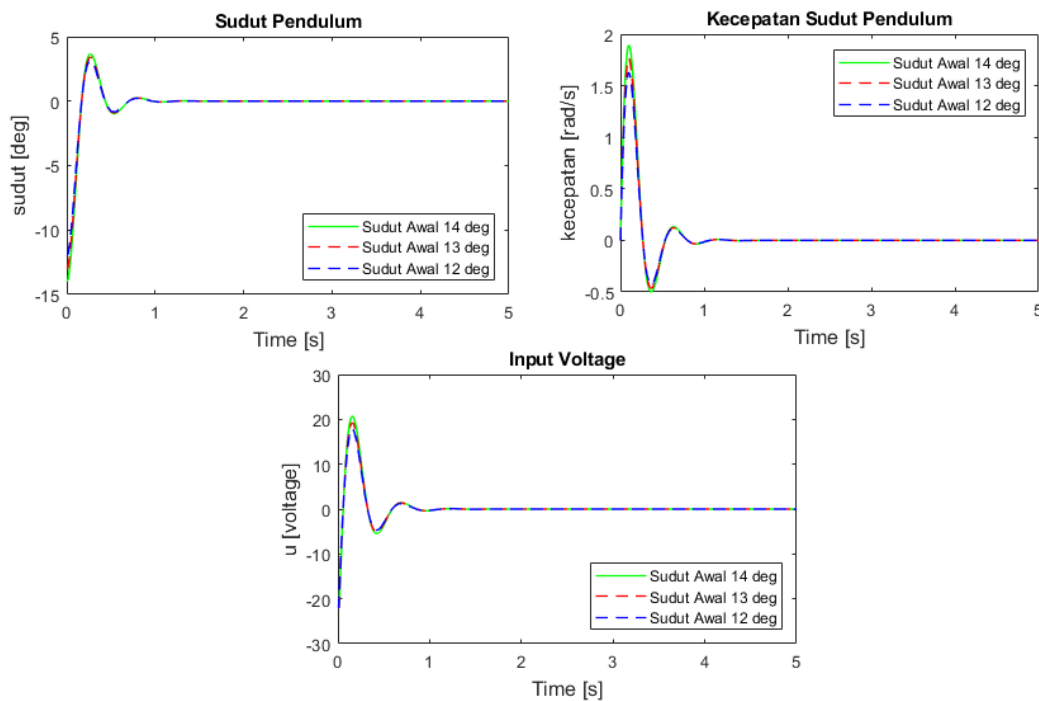


**Gambar 4.4** Kondisi Sliding pada Variasi Sudut Awal

Gambar 4.4 merupakan hasil perbesaran grafik pada *phase plot* pada tiap variasi sudut awal. Dapat dijumpai terdapat fenomena *chattering* pada grafik perbesaran *phase plot* tiap variasi sudut awal. Fenomena tersebut merupakan fase sistem memasuki kondisi *sliding*, sehingga dijumpai bentuk alur grafik osilasi pada *finite frequency* dan *finite amplitude* tertentu menyerupai *chattering*. Ditinjau dari perubahan variasi sudut awal, semakin besar sudut awal maka semakin besar harga turunan *error* yang dibutuhkan sistem untuk mulai memasuki *sliding phase*.

Guna meminimalisir efek *chattering* maka fungsi *signum* diubah menjadi fungsi saturasi untuk meminimalisir terjadinya *chattering*. Sehingga fungsi

saturasi diimplementasikan ke dalam model *Simulink* sesuai lampiran II. Pada blok diagram *Simulink* ditunjukkan dengan mengganti blok *signum* dengan blok *saturation*. Penerapan fungsi saturasi akan memberikan *boundary layer* dalam sistem berbentuk batas atas dan batas bawah saat terjadinya *chattering*. Sehingga penerapan fungsi saturasi dapat meminimalisir terjadinya *chattering*. Selain itu dengan adanya fungsi saturasi, *losses energy* yang dihasilkan oleh aktuator untuk mempertahankan sistem agar stabil akan berkurang sehingga tidak menimbulkan kerusakan dan keausan pada aktuator.



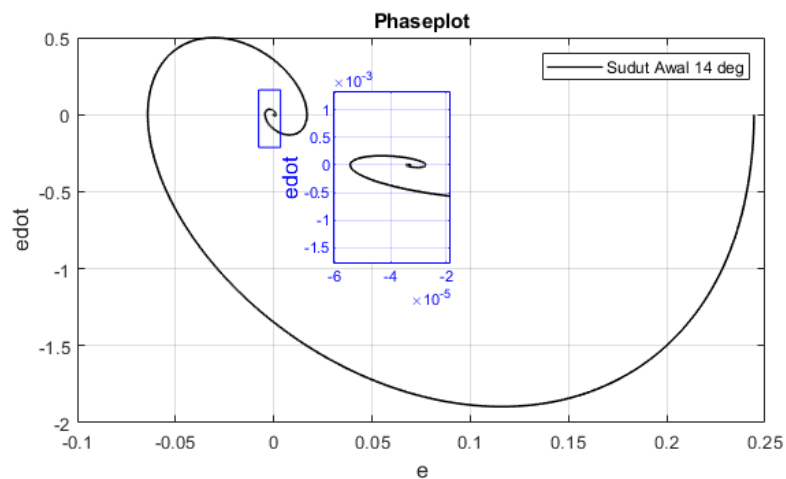
**Gambar 4.5** Grafik Respons dengan Fungsi Saturasi

Gambar 4.5 merupakan grafik respons sudut pendulum, kecepatan sudut pendulum dan input *voltage* setelah diimplementasikan fungsi saturasi pada sistem kendali SMC. Dapat dilihat pada gambar 4.5 tidak menunjukkan adanya *chattering* pada sistem. Sudut dari pendulum mencapai posisi yg stabil pertama kalinya pada waktu 1.515 detik. Sedangkan untuk kecepatan sudut pendulum dan input *voltage* dapat mencapai posisi stabil masing-masing saat 2.18 detik dan 1.26 detik.

**Tabel 4.2** Settling Time dari Response

<i>Settling Time</i> dari Response			
Sudut Awal	Sudut	Kecepatan Sudut	<i>Voltage</i>
14 <sup>0</sup>	1.515 s	2.18 s	1.26 s
13 <sup>0</sup>	1.515 s	2.18 s	1.26 s
12 <sup>0</sup>	1.515 s	2.18 s	1.26 s

Gambar 4.6 merupakan grafik *phase plot* pada sudut awal terbaik yaitu 14<sup>0</sup>. Dapat dilihat pada perbesaran grafik *phase plot*, tidak tampak *chattering* pada grafik tersebut akibat implementasi penggunaan fungsi saturasi. Gambar 4.8 juga memvisualisasikan kestabilan dimana grafik *error* terhadap turunan *error* menuju ke titik setimbang dimana sudut pendulum ( $\theta$ ) dan kecepatan pendulum ( $\dot{\theta}$ ) sama dengan nol. Sehingga dapat disimpulkan penggunaan fungsi saturasi dapat meminimalisir terjadinya *chattering* pada model.



**Gambar 4.6** Phase Plot Sudut 14<sup>0</sup> dengan Fungsi Saturasi



*(Halaman sengaja dikosongkan)*

## BAB V

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasar hasil analisis yang telah dilakukan dapat ditarik kesimpulan

1. Sistem kendali *sliding mode control* (SMC) dapat menstabilkan *inertia wheel pendulum* pada posisi *unstable*.
2. Hasil simulasi didapatkan bahwa respon sudut pendulum dan kecepatan sudut pendulum mampu diberikan sudut awal maksimal pada  $14^0$ . *Settling time* yang dihasilkan keduanya pada sudut awal  $14^0$  masing-masing sebesar 1.515 s dan 2.18 s. Pada respon input *voltage* yang dihasilkan simulasi, didapatkan pada sudut awal  $14^0$ , sistem belum melewati batas saturasi *voltage* yang telah ditetapkan. Hasil yang didapatkan sesuai dengan desain kriteria.

#### 5.2 Saran

Adapun saran yang dapat dijadikan acuan pada penelitian selanjutnya yaitu

1. Hasil simulasi menunjukkan sistem kendali *sliding mode control* (SMC) menimbulkan *chattering*, tapi pada penelitian ini dilakukan pendekatan fungsi saturasi agar *chattering* berkurang. Namun terdapat beberapa metode reduksi *chattering* yang dapat diterapkan sebagai pertimbangan pada penelitian selanjutnya.

*(Halaman sengaja dikosongkan)*

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] D. Sakamoto, R. Uchida and K. Tsuda , "Problem Presentation of Echo Phenomenon on Social Listening and Proposal of Avoidance Method for It," in *International Conference on Knowledge Based and Intelligent Information and Engineering System*, Marseille, 2017.
- [2] O. Boubaker and R. Iriarte, *The Inverted Pendulum in Control Theory and Robotics : From Theory to New Innovations*, London: The Institution of Engineering and Technology, 2018.
- [3] A. Baiti, Mashoedah, M. Zakarijah, Suprpto and N. Ahwan , "The Design of Inverted Pendulums as Learning Sources of," in *Journal of Physics : Conference Series*, 2019.
- [4] O. Patil, S. Jadhav and R. Ramakrishnan, "Development of Reaction Wheel Controlled Self Balancing Bicycle for Improving Vehicle Stability Control," *Advance in Automotive Technologies*, pp. 187-195, 2021.
- [5] S. Jeong, N. Maeda and K. Kozai, "Driving Assist Control of Wheeled Inverted Pendulum Wheelchair using an Active Seat Slider," *International Conference on Control, Automation and Systems*, pp. 162-167, 2019.
- [6] S. Kim and S. J. Kwon, "Dynamic Modelling of a Two Wheeled Inverted Wheel Pendulum Balancing Mobile Robot," *International Journal of Control, Automation and Systems*, pp. 926-933, 2015.
- [7] M.-G. Yoon, "Dynamics and Stabilization of a Spherical Inverted Pendulum on a Wheeled Cart," *International Journal of Control, Automation and Systems*, pp. 1271-1279, 2010.
- [8] Y. Rizal, R. Mantala, S. Rachman and Nurmahaludin, "Balance Control of Reaction Wheel Pendulum Based on Second-Order Sliding Mode Control," *International Conference on Applied Science and Technology*, pp. 51-56, 2018.
- [9] M. Olivares and P. Albertos, "Linear Control of the Flywheel Inverted Pendulum," *ISA Transactions*, pp. 1396-1403, 2014.
- [10] N. Muskinja and B. Tovornik, "Swinging Up and Stabilization of a Real Inverted Pendulum," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, pp. 631-639, 2006.
- [11] J. Scerri, "Modeling and Control of a Reaction Wheel Pendulum with Visual Feedback," *International Conference on Control, Automation and Diagnosis*, pp. 24-29, 2017.
- [12] L. Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control : Design and Stability Analysis*, United Kingdom: Prentice Hall Professional Technical Reference, 1994.

- [13] M. Ho, Y. Rizal and Y. Chen, "Balance Control of a Unicycle Robot," *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pp. 1186-1191, 2014.
- [14] A. N. Hidayati and U. Wasiwitono, "Modeling and Control of Inertia Wheel Pendulum System with LQR and PID Control," *International Seminar on Intelligent Technology and Its Application*, 2021.
- [15] V. Utkin, J. Guldner and J. Shi, *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*, Florida: Taylor & Francis Group, 2019.
- [16] V. Utkin, "Variable Structure System with Sliding Modes," *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 212-222, 1977.
- [17] P. Bakarac, M. Klauco and M. Fikar, "Comparison of Inverted Pendulum Stabilizatuon with PID, LQ and MPC Control," *Cybernetics & Informatics (K&I)*, pp. 1-6, 2018.
- [18] M. W. Spong, P. Corke and R. Lozano, "Nonlinear Control of the Reaction Wheel Pendulum," *Automatica*, pp. 1845-1851, 2001.
- [19] D. . H. Tohma and A. K. Hamoudi, "Design of Adaptive Sliding Mode Controller for Uncertain Pendulum System," *Engineering and Technology Journal*, pp. 355-369, 2021.
- [20] H. Khali, *Nonlinear Systems 3rd Edition*, Taiwan: Pearson Education Taiwan Ltd, 2010.
- [21] A. Lyapunov, *The General Problem of the Stability of Motion*, London: Taylor & Francis, 1992.
- [22] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, New York: Oxford University Press, 1984.
- [23] Y. Li, J. Zhang and Q. Wu, *Adaptive Sliding Mode Neural Network Control for Nonlinear Systems*, London: Academic Press, 2019.
- [24] V. Utkin and H. Lee, "Chattering Problem in Sliding Mode Control Systems," *12nd IFAC Conf. on Analysis and Design of Hybrid Systems*, 2006.
- [25] J. Liu, *Sliding Mode Control using Matlab*, Beijing: Academic Press, 2017.





## BIODATA PENULIS



Penulis yang bernama lengkap Bayu Adhi Saputro dilahirkan di Malang, 26 Juni 1996. Penulis merupakan anak dari Alm. Priyono dan Suwarti yang merupakan anak ke-2 dari 2 bersaudara dimana memiliki saudara bernama Yeni Dian Ade Fatmawati serta kakak ipar bernama Nanang Mutasim Billah. Pendidikan formal penulis dimulai di TK Sunan Giri Malang (2000-2002). Kemudian berlanjut di SDN Merjosari 2 Malang (2002-2008). Setelah lulus pendidikan sekolah dasar, penulis melanjutkan sekolah di SMPN 4 Malang (2008-2011) dan dilanjutkan ke sekolah menengah atas di SMAN 5 Malang (2011-2013). Kemudian penulis melanjutkan pendidikan Sarjana Teknik Mesin, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (2013-2019). Pada September 2020 penulis melanjutkan pendidikan Magister Teknik Mesin di Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Selama perkuliahan magister penulis tidak hanya duduk diam mendapatkan pendidikan formal di kelas, namun juga berusaha mengembangkan *softskill* dan *hardskill*. Penulis aktif mengikuti riset penelitian di bawah naungan PUI MIA ITS dan PT ITS Tekno Sains.

Dengan diterbitkannya buku tesis ini, penulis berharap akan dapat memberikan sumbangsih ilmu pengetahuan melalui media penelitian yang telah dilakukan. Info lebih lanjut terkait penelitian ini dapat menghubungi penulis melalui email [adhibayusap@gmail.com](mailto:adhibayusap@gmail.com).