

TUGAS AKHIR - TM 184835

**RANCANG BANGUN DAN ANALISIS DINAMIS
SISTEM *INERTIA WHEEL PENDULUM* DENGAN
METODE PENGENDALIAN LQR**

Billy Indrawan
NRP 02111840000009

Dosen Pembimbing
Dr. Eng Unggul Wasiwitono, ST., M.Eng.Sc.
NIP. 197805102001121001

Program Studi Sarjana
Departemen Teknik Mesin
Fakultas Teknologi Industri dan Rekayasa Sistem
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
Surabaya
2022



TUGAS AKHIR - TM 184835

**RANCANG BANGUN DAN ANALISIS DINAMIS
SISTEM *INERTIA WHEEL PENDULUM* DENGAN
METODE PENGENDALIAN LQR**

Billy Indrawan
NRP 02111840000009

Dosen Pembimbing
Dr. Eng Unggul Wasiwitono, ST., M.Eng.Sc.
NIP. 197805102001121001

Program Studi Sarjana
Departemen Teknik Mesin
Fakultas Teknologi Industri dan Rekayasa Sistem
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
Surabaya
2022



FINAL PROJECT - TM 184835

DESIGN AND DYNAMIC ANALYSIS OF WHEEL PENDULUM INERTIA SYSTEM WITH LQR CONTROL METHOD

Billy Indrawan

NRP 02111840000009

Dosen Pembimbing

Dr. Eng Unggul Wasiwitono, ST., M.Eng.Sc.

NIP. 197805102001121001

Study Program Bachelor

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Industrial Technology and Systems Engineering

INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER

Surabaya

2022

LEMBAR PENGESAHAN

**RANCANG BANGUN DAN ANALISIS DINAMIS SISTEM *INERTIA WHEEL*
PENDULUM DENGAN METODE PENGENDALIAN LQR**


PROPOSAL TUGAS AKHIR


Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Memperoleh gelar Sarjana Teknik pada
Program Studi S-1 sarjana
Departemen Teknik Mesin
Fakultas Teknologi Industri dan Rekayasa Sistem
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh: Billy Indrawan
NRP. 0211184000009


Disetujui oleh Tim Penguji Proposal Tugas Akhir:

1. Dr. Eng. Unggul Wasiwitono, S.T., M.Eng.Sc.
NIP. 197805102001121001
2. Bambang Pramujati, S.T., M.Sc.Eng., Ph.D
NIP. 196912031994031001
3. Ari Kurniawan Saputra, S.T., M.T.
NIP. 198604012015041001
4. Dr. Latifah Nurahmi, S.T., M.Sc.
NIP. 1986201712037


Pembimbing


Penguji


Penguji


Penguji

**SURABAYA
JULI 2022**

APPROVAL SHEET

DESIGN AND DYNAMIC ANALYSIS OF WHEEL PENDULUM INERTIA SYSTEM WITH LQR CONTROL METHOD

FINAL PROJECT PROPOSAL

Submitted to fulfill one of the requirements
For obtaining a degree Bachelor of Engineering at
Undergraduate Study Program of bachelor
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Industrial Technology and Systems Engineering
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

By: Billy Indrawan
NRP. 0211184000009

Approved by Final Project Proposal Examiner Team:

1. Dr. Eng. Unggul Wasiwitono, S.T., M.Eng.Sc.

NIP. 197805102001121001


Advisor

2. Bambang Pramujati, S.T., M.Sc.Eng., Ph.D.

NIP. 196912031994031001


Examiner

3. Ari Kurniawan Saputra, S.T., M.T.

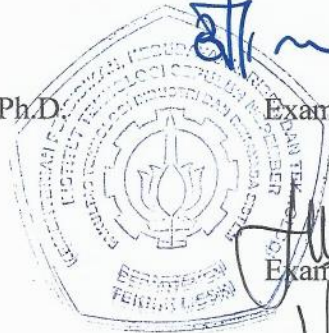
NIP. 198604012015041001


Examiner

4. Dr. Latifah Nurahmi, S.T., M.Sc.

NIP. 1986201712037


Examiner



SURABAYA

JULY 2022

PERNYATAAN ORISINALITAS

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama Mahasiswa / NRP : Billy Indrawan / 0211184000009

Departemen : Teknik Mesin

Dosen Pembimbing/NIP : Dr. Eng Unggul Wasiwitono, ST., M.Eng.Sc
/197805102001121001

dengan ini menyatakan bahwa Tugas Akhir dengan judul “RANCANG BANGUN DAN ANALISIS DINAMIS SISTEM INERTIA WHEEL PENDULUM DENGAN METODE PENGENDALIAN LQR” adalah hasil karya sendiri, bersifat orisinal, dan ditulis dengan mengikuti kaidah penulisan ilmiah.

Bilamana di kemudian hari ditemukan ketidaksesuaian dengan pernyataan ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan yang berlaku di Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, 27 Juli 2022

Mengetahui,

Dosen Pembimbing

(Dr. Eng Unggul Wasiwitono, ST., M.Eng.Sc)

NIP. 197805102001121001



Mahasiswa,

(Billy Indrawan)

NRP. 0211184000009

STATEMENT OF ORIGINALITY

The undersigned below:

Name of Student /NRP : Billy Indrawan / 0211184000009

Department : Mechanical Engineer

Supervisor/NIP : Dr. Eng Unggul Wasiwitono, ST., M.Eng.Sc

/197805102001121001

hereby declare that the Final Project with the title of “DESIGN AND DYNAMIC ANALYSIS OF WHEEL PENDULUM INERTIA SYSTEM WITH LQR CONTROL METHOD” is the result of my own work, is original, and is written by following the rules of scientific writing.

If in the future there is a discrepancy with this statement, then I am willing to accept sanctions in accordance with the provisions that apply at Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, July 27 2022

Acknowledged,

Supervisor

(Dr. Eng Unggul Wasiwitono, ST., M.Eng.Sc)

NIP. 197805102001121001



Student,

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Billy Indrawan', written in a cursive style.

(Billy Indrawan)

NRP. 0211184000009

RANCANG BANGUN DAN ANALISIS DINAMIS SISTEM *INERTIA WHEEL PENDULUM* DENGAN METODE PENGENDALIAN LQR

Nama Mahasiswa / NRP : Billy Indrawan / 0211184000009
Departemen : Teknik Mesin FTIRS-ITS
Dosen Pembimbing : Dr. Eng. Unggul Wasiwitono, S.T., M.Eng.Sc

Abstrak

Sistem kontrol telah menjadi bagian integral dari masyarakat modern. Hampir setiap aspek kehidupan sehari – hari kurang lebih dipengaruhi oleh beberapa jenis sistem kontrol. Untuk menghasilkan performa yang unggul dan menekan biaya, namun sembari mempertimbangkan kebutuhan pengguna sangat dibutuhkan dapat dilakukan suatu pendekatan dalam mendesain sistem kontrol yaitu pendekatan metodologi desain berbasis model. Dengan menggunakan pendekatan desain berbasis model, pada insinyur dapat membuat model, menguji, dan menemukan kesalahan di tiap tahapan pengujian. Menggunakan desain berbasis kontrol juga dapat melihat respons atau perilaku dari sistem dengan berbagai strategi sistem kontrol.

Inverted Pendulum (IP) yang merupakan sistem yang tidak stabil secara inheren. IP mempunyai pusat massa lebih tinggi dari pusat pivotnya dan harus secara aktif distabilkan agar tetap tegak. Hal tersebut menjadikan sistem ini banyak dipakai sebagai model untuk memvalidasi performa berbagai algoritma kontrol. IP telah diteliti selama bertahun – tahun dan berbagai metode penyeimbang telah diterapkan seperti Menyeimbangkan pendulum dengan roda inersia atau *Inersia Wheel Pendulum* (IWP), Pendulum yang dilengkapi dengan sistem kereta (*cart*) atau *inverted pendulum cart system* (IPCS), dan *Wheel Inverted Pendulum* (WIP). Pada penelitian ini menggunakan sistem *Inertia Wheel Pendulum* untuk mengayunkan dan menyeimbangkan pendulum ke posisi vertikal ke atas karena IWP memiliki persamaan gerak yang relatif sederhana jika dibandingkan dengan model IP lainnya. Sistem kontrol di desain dengan menurunkan persamaan gerak sistem IWP dengan persamaan *lagrange*, kemudian persamaan gerak tersebut dilinierisasi untuk memudahkan mendesain sistem kontrol lalu dinyatakan dengan persamaan *state space*. Hasil penurunan persamaan gerak digunakan untuk mendesain sistem kendali. Sistem kontrol yang digunakan yaitu LQR untuk mengetahui performa simulasi dan percobaan dalam menyeimbangkan sistem IWP pada posisi vertikal ke atas.

Hasil analisis menunjukkan sistem IWP yang dikontrol dengan *gain* yang didapat menggunakan metode LQR mampu mengembalikan sistem IWP pada posisi vertikal ke atas saat simulasi dan percobaan. Respons hasil simulasi dan percobaan sistem IWP dengan menunjukkan sudut awal maksimal sistem IWP dapat menyeimbangkan pada posisi vertikal ke atas adalah 12° . Perbandingan hasil simulasi dan percobaan terbaik yaitu pada respons sistem IWP saat diberikan sudut awal 11° dimana *transient response* dari kedua hasil saling berdekatan. Kontrol *swing-up* dan *balancing* yang diterapkan mampu mengayunkan pendulum dari posisi vertikal ke bawah hingga stabil pada posisi vertikal ke atas tanpa harus memberikan sudut awal.

Kata Kunci: *Inertia Wheel Pendulum, Inverted Pendulum, Self-Balancing, Swing-up, LQR*

DESIGN AND DYNAMIC ANALYSIS OF WHEEL PENDULUM INERTIA SYSTEM WITH LQR CONTROL METHOD

Student Name / NRP : Billy Indrawan / 0211184000009
Departement : Mechanical Engineering FTIRS – ITS
Advisor : Dr. Eng. Unggul Wasiwitono, S.T., M.Eng.Sc

Abstract

Control systems have become an integral part of modern society. Almost every aspect of daily life is less affected by some kind of control system. In order to produce superior performance and reduce costs, while taking into account the much-needed user needs, an approach in designing control systems can be applied, namely a model-based design methodology approach. By using a model-driven design approach, engineers can model, test, and find faults at every stage of the test. Using control-based design can also see the response or behavior of the system with various control system strategies.

Inverted Pendulum (IP) which is an inherently unstable system. The IP has a center of mass higher than the center of its pivot and must be actively balanced to remain upright. This makes this system widely used as a model to validate the performance of various control algorithms. IP has been researched for many years and various stabilization methods have been applied such as Balancing the pendulum with an inertial wheel or Inertial Wheel Pendulum (IWP), Pendulum equipped with a cart system (cart) or inverted pendulum cart system (IPCS), and Wheel Inverted Pendulum (WIP). In this study, the Inertia Wheel Pendulum system is used to swing and balance the pendulum to an upward vertical position because the IWP has a relatively simple equation of motion when compared to other IP models. The control system is designed by deriving the equation of motion of the IWP system with the Lagrange equation, then the equation of motion is linearized to facilitate the design of the control system and then expressed by the state space equation. The results of the derivation of the equation of motion are used to design the control system. The control system used is LQR to determine the performance of simulations and experiments in balancing the IWP system in an upward vertical position.

The results of the analysis show that the IWP system which is controlled with gain obtained using the LQR method is able to return the IWP system to an upward vertical position during simulations and experiments. The response of the simulation and experimental results of the IWP system by showing that the initial angle of the IWP system can balance the vertical position up is 12° . The best comparison between simulation and experimental results is the response of the IWP system when given an initial angle of 11° where the temporary response of the two results is close to each other. The swing-up and balancing controls applied are able to swing the pendulum from a vertical position down to balance in a vertical position up without having to provide an initial angle.

Keywords: *Inertia Wheel Pendulum, Inverted Pendulum, Self-Balancing, Swing-up, LQR*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis diberi kesempatan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul: **“RANCANG BANGUN DAN ANALISIS DINAMIS SISTEM INERTIA WHEEL PENDULUM DENGAN METODE PENGENDALIAN LQR”**. Tugas Akhir ditujukan untuk memenuhi salah satu persyaratan kelulusan pendidikan Sarjana di Departemen Teknik mesin FT-IRS ITS Surabaya. terselesaikannya Tugas Akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan baik secara moral dan material dari berbagai pihak. Oleh karena itu melalui kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih Kepada :

1. Keluarga penulis, yang telah mendukung secara moril maupun materil serta doa yang selalu dipanjatkan demi Kesehatan, keselamatan dan kelancarannya dalam menempuh studi di Departemen Teknik mesin FT-IRS ITS Surabaya.
2. Bapak Dr. Eng Unggul Wasiwitono, ST., M.Eng.Sc selaku dosen wali dan pembimbing tugas akhir yang telah memberikan waktu, bimbingan, nasihat, dan motivasi selama proses pembelajaran hingga selesainya tugas akhir ini.
3. Bapak dan Ibu Dosen Penguji yang telah memberikan saran dan masukan untuk penulis guna menyempurnakan tugas akhir ini..
4. Teman – teman Lembaga Kajian Kerohanian (LKKI) Departemen Teknik Mesin Ash Shaff yang selama 4 tahun perkuliahan selalu jadi tempat belajar dan berbagi kepada banyak orang.
5. Seluruh teman – teman laboratorium Rekayasa Sistem Kontrol (RSK), khususnya kepada mas Candra, mas Khafid, mas Bayu, mas Rizal, mas Kafi dan mas Lazu yang telah menemani dalam pembuatan tugas akhir ini di laboratotium.
6. Semua pihak lainnya yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Berkas keterlibatannya lah penulis dapat mencapai pencapaian sejauh ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan tugas akhir ini masih banyak terdapat kekurangan, maka penulis mengharapakan masukan – masukan yang bermanfaat. Penulis sangat berharap supaya penelitian ini bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan.

Surabaya, 27 Juli 2022

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	i
HALAMAN SAMPUL	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS	vi
ABSTRAK	viii
KATA PENGANTAR	x
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR SIMBOL	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Dasar Teori	9
2.2.1 <i>Angular Momentum</i>	9
2.2.2 <i>Persamaan Lagrange</i>	10
2.2.3 <i>Motor Brushless Direct Current (BLDC)</i>	11
2.2.4 <i>Transformasi Park-Clarke</i>	12
2.2.5 <i>Persamaan State-Space</i>	14
2.2.6 <i>Stability</i>	14
2.2.7 <i>Controllability</i>	15
2.2.8 <i>Linear Quadratic Regulator (LQR)</i>	16
BAB III METODOLOGI	17
3.1 Diagram Alir Penelitian	17
3.2 Diagram Alir Perancangan Sistem Kontrol IWP	18
3.3 Model Prototipe <i>Inertia Wheel Pendulum (IWP)</i>	19
3.4 Persamaan Gerak Sistem Dinamis	22
3.4.1 Persamaan Gerak <i>Inverted Pendulum</i> dengan Roda Inersia.....	22
3.4.2 Persamaan Gerak Motor BLDC	27
3.4.3 Model State-Space Sistem IWP Dilengkapi dengan Dinamika Motor.....	29
3.5 Karakteristik Sistem IWP	29

3.5.1	<i>Stability</i>	30
3.5.2	<i>Controllability</i>	31
3.6	Desain dan Simulasi Sistem Kontrol	31
3.6.1	<i>Root Mean Square</i> untuk Menentukan Pembobotan Matriks Q dan R	32
3.6.2	Strategi Ayun Sistem IWP.....	32
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN		35
4.1	Desain Sistem Kontrol LQR	35
4.1.1	Pengaruh Pembobotan Matriks Q dan R	35
4.1.2	Pemilihan Nilai <i>Gain K</i>	39
4.1.3	Analisis Karakteristik <i>Closed-loop</i> IWP System.....	42
4.2	Simulasi Sistem IWP dengan Simulink	42
4.3	Percobaan Prototipe Sistem IWP dengan Kontrol LQR.....	45
4.3.1	Verifikasi Sensor <i>Encoder</i>	46
4.3.2	Percobaan Sistem Kontrol kepada Prototipe Sistem IWP	46
4.4	Analisis Hasil Simulasi dan Percobaan Sistem IWP	49
4.5	Percobaan dan Analisis <i>Swing-up</i> dan <i>Balancing</i> Sistem IWP	53
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN		55
5.1	Kesimpulan	55
5.2	Saran	55
DAFTAR PUSTAKA		56
LAMPIRAN		57
Biodata Penulis		57

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Segway Personal Transporter sebagai Moda Transportasi	1
Gambar 1.2 Ilustrasi (a) Inverted Pendulum dan (b) Menyeimbangkan Tongkat yang Dimodelkan sebagai Inverted Pendulum	2
Gambar 2.1 (a) Konvensi Koordinat untuk Pendulum Roda Inersia dan (b) Peralatan Percobaan Penyeimbang Pendulum pada Titik Kesetimbangan Tidak Stabil.....	5
Gambar 2.2 Konfigurasi Percobaan IWP.....	6
Gambar 2.3 <i>Self Balancing</i> pada Sepeda Listrik menggunakan IWP (a) Model dan (b) Prototipe	7
Gambar 2.4 (a) Strategi Kontrol untuk Menyeimbangkan dengan IWP dan (b) Hasil Simulasi Model IWP untuk Menyeimbangkan Sepeda Motor Listrik dengan Matlab Simulink.....	8
Gambar 2.5 Performa Dinamis IWP untuk Menjaga Kesetimbangan ke Atas dengan a) Simpangan Awal Sebesar 10° dan (b) Simpangan Awal Sebesar -10°	8
Gambar 2.6 (a) Prototipe Reacting Wheel Balanced Inverted Pendulum dan (b) Hasil Respons Sistem Simulasi dan Ekperimen dengan Memberikan Simpangan 25°	8
Gambar 2.7 Hasil Respons Sistem Simulasi dan Percobaan dengan Memberikan (a) Simpangan $26,1^\circ$ dan (b) Simpangan $26,7^\circ$	9
Gambar 2.8 Aturan Tangan Kanan untuk Arah Vektor Kecepatan Sudut ω (a) Membalikkan Arah Rotasi Membalikkan Arah Vektor Kecepatan Sudut ω . (b) Tanda dari ωz untuk Rotation along the z-axis	10
Gambar 2.9 Rangkaian Motor DC	12
Gambar 2.10 Hubungan transformator 3 fasa.....	13
Gambar 2.11 Blok Diagram Model State-Space.....	14
Gambar 2.12 Block Diagram of LQR.....	16
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian	17
Gambar 3.2 Diagram Alir Perancangan Sistem Kontrol LQR.....	18
Gambar 3.3 (a) Model Prototipe IWP dan (b) Komponen – Komponen Prototipe IWP.....	19
Gambar 3.4 Dimensi Roda Inersia.....	19
Gambar 3.5 Dimensi Motor BLDC iPower GBM4108-120T	20
Gambar 3.6 Dimensi Pendulum	20
Gambar 3.7 Dimensi <i>Shaft</i>	20
Gambar 3.8 Dimensi <i>Bearing</i>	21
Gambar 3.9 Dimensi <i>Base Plate</i>	21
Gambar 3.10 <i>Free Body Diagram</i> IWP	22
Gambar 3.11 Blok Diagram Sistem IWP.....	32
Gambar 3.12 Wilayah Operasi dari Strategi Kontrol yang Digunakan	33
Gambar 3.13 Strategi Kontrol <i>Swing-Up</i> IWP.....	34
Gambar 4.1 Matlab Simulink untuk Desain Sistem IWP	35
Gambar 4.2 Respons Posisi Sudut Pendulum Terhadap Variasi Pembobotan Matriks Q Pada Sudut Awal 45°	36
Gambar 4.3 Respons Input voltase Sistem IWP Terhadap Variasi Pembobotan Matriks R Pada Sudut Awal 45°	38
Gambar 4.4 Pengaruh Pembobotan q_1 dan q_2 dengan $r = 1$ terhadap RMS <i>State Variable</i> Pada Sudut Awal 45°	40

Gambar 4.5 Pengaruh Pembobotan q_1 dan q_2 dengan $r = 1000$ terhadap RMS <i>State ariable</i> Pada Sudut Awal 45°	41
Gambar 4.6 Respons <i>State Variable</i> Sistem IWP saat Diberikan Sudut Awal $10^\circ, 11^\circ$, dan 12°	43
Gambar 4.7 Respons Posisi Sudut Pendulum (θ) dan Input Voltase (u) Tersaturasi Terhadap Variasi Sudut Awal 20°	44
Gambar 4.8 Prototipe Sistem IWP	45
Gambar 4.9 Respons <i>State Variable</i> Sistem IWP saat Diberikan Sudut Awal $10^\circ, 11^\circ$, dan 12°	47
Gambar 4.10 Posisi Vertikal ke Atas Sistem IWP saat Percobaan	48
Gambar 4.11 Respons <i>State Variable</i> Sistem IWP saat Diberikan Sudut Awal 13°	48
Gambar 4.12 Respons Simulasi dan Percobaan <i>State Variable</i> Sistem IWP dengan Input voltase Tidak Dibatasi (<i>unsaturated</i>) saat Diberikan Sudut Awal Awal 10°	49
Gambar 4.13 Respons Simulasi dan Percobaan <i>State Variable</i> Sistem IWP dengan Input voltase Tidak Dibatasi (<i>unsaturated</i>) saat Diberikan Sudut Awal Awal 11°	51
Gambar 4.14 Respons Simulasi dan Percobaan <i>State Variable</i> Sistem IWP dengan Input voltase Tidak Dibatasi (<i>unsaturated</i>) saat Diberikan Sudut Awal Awal 12°	52
Gambar 4.15 Kondisi Awal Sistem IWP Pada Posisi Vertikal ke Bawah	53
Gambar 4.16 Respons <i>Swing-Up</i> dan <i>Balancing</i> Kontrol Sistem IWP	54

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Perbandingan Strategi Kontrol untuk IWP.	6
Tabel 3.1 Parameter Performansi Posisi Sudut Pendulum Sistem IWP.....	18
Tabel 3.2 Komponen – Komponen Prototipe Prototipe IWP	21
Tabel 3.3 Nilai Parameter dari sistem IWP	29
Tabel 4.1 <i>Transient Response</i> Posisi Sudut Pendulum (θ) Terhadap Pembobotan Matriks Q37	
Tabel 4.2 <i>Transient Response</i> Input Voltase Sistem IWP Terhadap Pembobotan Matriks R.38	
Tabel 4.3 Performansi Hasil Simulasi Posisi Sudut Pendulum (θ) Sistem IWP	41
Tabel 4.4 Performa dari Hasil Simulasi Posisi Sudut Pendulum Sistem IWP dengan Variasi Sudut Awal	44
Tabel 4.5 Performa dari Hasil Simulasi Sistem IWP dengan Sudut Awal 20°	45
Tabel 4.6 Hasil Pembacaan Sensor Encoder dan Tachometer.....	46
Tabel 4.7 Performa dari Hasil Percobaan Sistem IWP dengan Variasi Sudut Awal.....	47
Tabel 4.8 Performa dari Hasil Percobaan Sistem IWP dengan Sudut Awal 13°	49
Tabel 4.9 Performa dari Hasil Percobaan dan Simulasi Sistem IWP dengan Sudut Awal 10°50	
Tabel 4.10 Performa dari Hasil Percobaan dan Simulasi Sistem IWP dengan Sudut Awal 11°	52
Tabel 4.11 Performa dari Hasil Percobaan dan Simulasi Sistem IWP dengan Sudut Awal 12°	53

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Parameter	Satuan
m_p	Massa pendulum	kg
I_p	Momen inersia pendulum	$kg.m^2$
m_m	Massa motor BLDC	kg
I_m	Momen inersia motor BLDC	$kg.m^2$
m_r	Massa roda inersia	kg
I_r	Momen inersia roda	$kg.m^2$
l_p	Panjang COG pendulum	m
l_m	Panjang COG motor BLDC	m
l_r	Panjang COG roda inersia	m
g	Percepatan gravitasi	m/s^2
R	Hambatan	Ω
K_m	Konstanta torsi motor BLDC	$N.m/A$
K_e	Konstanta <i>back of emf</i>	$V.s/rad$
ω_m	Kecepatan putar	rad/s
d	Diameter poros motor (<i>Hollow Shaft</i>)	m
v_a	Tegangan motor	V
i	Arus listrik	A
τ_m	Torsi motor BLDC	$N.m$
L	Induktansi	Ω
b_m	Konstanta gesek motor viscous	

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem kendali atau sistem kontrol adalah suatu sistem yang menghasilkan nilai tertentu sebagai keluarannya melalui pengendalian ataupun perubahan ketentuan dari masukan sistem. Digunakan untuk mengendalikan, memerintah, dan mengatur keadaan dari suatu sistem, maka dari itu diperlukan sistem kontrol dengan performa yang unggul sambil mempertimbangkan kebutuhan pengguna dan menekan biaya. Salah satu cara untuk mencapai sistem dengan performa yang lebih tinggi dan biaya yang lebih rendah adalah dengan memperbarui pendekatan metodologi desain sistem yang kompleks. Dengan menggunakan pendekatan desain berbasis model, para insinyur dapat membuat model sistem dan dapat mensimulasikan model sistem kapan saja untuk mendapatkan informasi bagaimana perilaku sistem dan menguji beberapa skenario *what if* tanpa risiko, tanpa penundaan, dan tanpa ketergantungan pada perangkat keras yang mahal. Pendekatan ini memungkinkan para insinyur untuk mensimulasikan dan menguji perangkat keras dan perangkat lunak pada tahap awal siklus pengembangan, dan kesalahan yang ditemukan dapat dengan mudah diperbaiki dan akan lebih murah (Narkhede et al., 2021, p. 20).

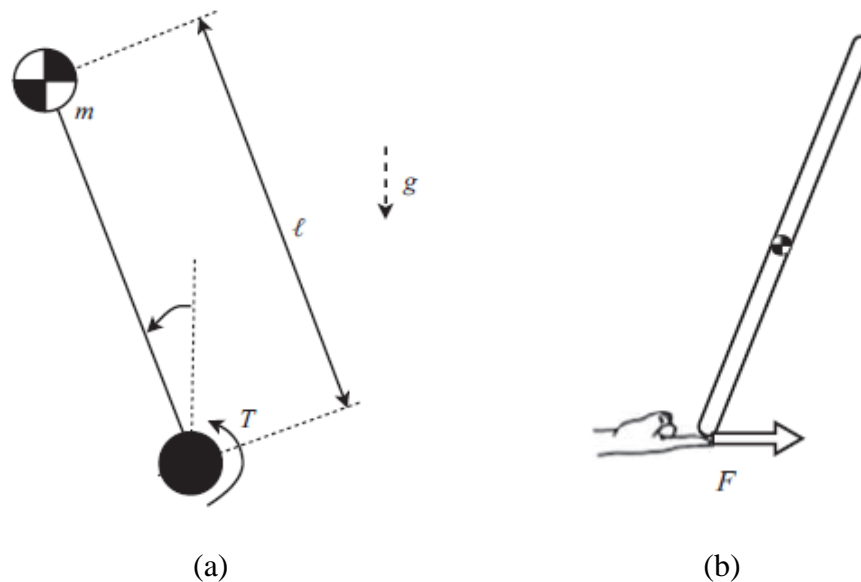
Pemodelan sistem adalah metodologi di mana setiap model mewakili perspektif yang berbeda dari sistem dengan membuat model konseptual dari sistem kontrol. Contoh sistem yang dimodelkan adalah *Inverted Pendulum* (IP). Prinsip IP menurut hukum kekekalan momentum, jika tidak ada resultan gaya luar yang diberikan pada suatu objek atau sistem, momentum sudut objek tersebut akan kekal. Konsep ini digunakan dalam kontrol stabilitas satelit di mana jika orientasi satelit ingin diubah, maka roda reaksi diputar agar diterapkannya torsi dari roda reaksi terhadap satelit sehingga tercapai kontrol orientasi. Prinsip serupa dapat digunakan untuk menyeimbangkan segway PT yang dapat dilihat pada Gambar 1.1 (Patil et al., 2021, p. 189).



Gambar 1.1 Segway Personal Transporter sebagai Moda Transportasi (Faddek, 2020)

Inverted Pendulum (IP) adalah permasalahan kontrol klasik yang dikategorikan sebagai sistem yang tidak stabil dan nonlinier yang paling intuitif, mudah dideskripsikan, dan dapat direalisasikan dalam dinamika dan teori kontrol. IP juga sering digunakan sebagai model percobaan untuk memvalidasi performa algoritma kontrol. IP merupakan pendulum yang memiliki pusat massa di atas titik pivotnya yang ditunjukkan pada Gambar 1.2 (a). Untuk dapat membuat IP tetap pada posisi tegak lurus dan stabil salah satu metodenya yaitu

dengan memberikan torsi pada titik pivotnya. Dengan menggerakkan titik pivot secara horizontal dapat mengubah laju rotasi massa yang dipasang pada bandul pada sumbu yang sejajar dengan sumbu pivot dan dengan demikian menghasilkan torsi pada pendulum. Demonstrasi sederhana untuk memindahkan titik pivot IP yaitu dengan menyeimbangkan tongkat yang terbalik sebagai model IP di ujung jari yang ditunjukkan pada Gambar 1.2 (b) (Boubaker & Iriarte, 2017, p. 1).



Gambar 1.2 Ilustrasi (a) Inverted Pendulum dan (b) Menyeimbangkan Tongkat yang Dimodelkan sebagai Inverted Pendulum (Boubaker & Iriarte, 2017).

IP telah diteliti selama bertahun – tahun dan berbagai metode stabilisasi telah diterapkan seperti dengan menggerakkan pendulum dan menaruh pendulum pada kendaraan, telah menginisiasi peneliti – peneliti untuk menemukan bagaimana mencapai kedua metode stabilisasi tersebut. Menyeimbangkan pendulum dengan roda inersia pertama kali diperkenalkan pada tahun 2001. Pendulum dengan roda inersia berupa piringan yang menempel di ujung pendulum ini, dapat bebas berputar pada sumbu yang sejajar dengan sumbu rotasi pendulum. Fokus utama dalam penelitian ini yaitu bagaimana mengayunkan pendulum ke atas (*swing up*) dan menyeimbangkannya di posisi terbalik (*Inverted Pendulum*) dengan menggunakan roda inersia. Hal ini dapat dicapai dengan memberikan torsi yang dihasilkan oleh percepatan sudut piringan yang digunakan untuk mengontrol sistem secara aktif dalam mengayunkan pendulum ke atas dan menyeimbangkan pendulum dalam posisi terbalik (Spong et al., 2001, p. 1845). Pendulum yang dilengkapi dengan sistem kereta (*cart*) atau *inverted pendulum cart system* (IPCS) merupakan perangkat yang terdiri dari pendulum yang terbalik yang titik pivotnya dipasang pada kereta (*cart*) dan bebas berputar di titik pivotnya. Sistem kereta (*cart*) ini dapat bergerak secara horizontal dan tegak lurus terhadap sumbu pendulum. Tujuan pengendalian IPCS adalah untuk menyeimbangkan IP dengan menerapkan gaya pada kereta (*cart*). Sehingga, kereta (*cart*) bergerak horizontal dan menghasilkan torsi yang berlawanan arahnya di pusat massa pendulum terhadap torsi, yang berasal dari berat komponen, di pivotnya pendulum (Ibañez et al., 2005, p. 367). Model IP beroda atau *Wheel Inverted Pendulum* (WIP) telah dikembangkan untuk dapat menyeimbangkan dengan sendiri menggunakan pergerakan dari roda, WIP ini terdiri dari sepasang roda yang identik, sasis, aktuator roda, IP, dan unit kontrol gerak. Aktuator roda memutar roda bersamaan dengan disangga oleh sasis, unit kontrol gerak mengontrol aktuator

roda untuk menggerakkan kendaraan dan menstabilkan IP. Dengan konfigurasi tersebut, kendaraan mempunyai kemampuan untuk menyeimbangkan dengan kedua roda dan berputar di tempat (Li et al., 2013, p. 37). *Inertia Wheel Pendulum* (IWP) adalah termasuk nonlinier *Underactuated Mechanical System* (UMS) dengan titik kesetimbangan tidak stabil pada posisi tegak. Sistem ini terdiri dari roda berputar yang dipasang pada ujung pendulum. Meskipun merupakan sistem yang sederhana, IWP telah digunakan dalam banyak aplikasi praktis, misalnya sebagai mekanisme untuk menyeimbangkan robot *unicycle*, robot pendulum roda tunggal, atau robot rubik. Masalah kontrol sistem IWP biasanya terbagi dalam dua kategori, yaitu kontrol stabilisasi pada posisi tegak dan kontrol ayun ke posisi tegak. IWP menarik perhatian beberapa peneliti dalam rekayasa sistem kontrol khususnya sebagai *testbed* yang digunakan untuk mengembangkan strategi kontrol baru.

Fokus penelitian ini adalah untuk merancang, membuat dan menganalisis prototipe IWP dan menerapkan metode pengendalian untuk mengayunkan pendulum dari posisi vertikal ke bawah menjadi vertikal ke atas dengan mengayunkan (*swing up*) pendulum dan menjaga kestabilan pendulum pada posisi IP dengan menggunakan roda inersia diujung pendulum. Kestabilan *inverted pendulum* khususnya IWP dapat digunakan untuk menyeimbangkan *body* seperti robot atau kendaraan dan juga dapat digunakan sebagai bahan pembelajaran untuk memahami dan menerapkan pengendalian pada suatu model sistem, sehingga kedepannya diharapkan metode stabilisasi dari IP ini dapat dimanfaatkan sebagai peralatan laboratorium untuk mata kuliah terkait sistem pengendalian.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan beberapa rumusan masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana menyeimbangkan *inverted pendulum* pada posisi vertikal ke atas?
2. Bagaimana dinamika *inertia wheel pendulum* menggunakan sistem pengendalian LQR saat simulasi dan percobaan?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini diantaranya sebagai berikut:

1. Sistem stabilisasi dan *swing up* yang digunakan menggunakan roda inersia.
2. Simulasi menggunakan Simulink MATLAB
3. Sistem kontrol stabilisasi pada prototipe IWP menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui bagaimana menyeimbangkan *inverted pendulum* pada posisi vertikal ke atas
2. Mengetahui dinamika metode pengendalian LQR saat simulasi dan implementasi pada prototipe sistem *inertia wheel pendulum*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

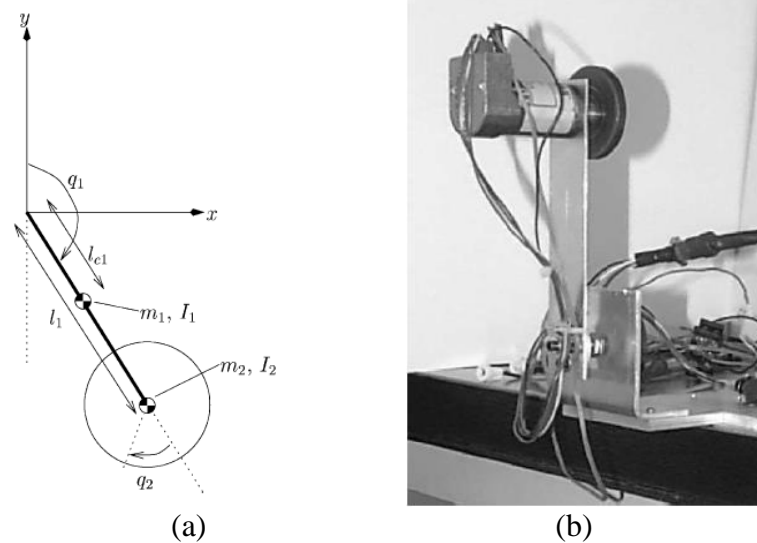
1. Penelitian dapat digunakan sebagai referensi untuk penelitian berikutnya sehubungan dengan penstabil *inverted pendulum* dengan memanfaatkan roda inersia.
2. Hasil penelitian dapat digunakan sebagai peraga dari praktikum pada mata kuliah terkait sistem pengendalian.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Terdahulu

Pendulum atau dalam bahasa latin *pendere* adalah seutas tali atau batang tak bermassa dengan Panjang (ℓ) yang digantung sebuah massa (m) atau biasa disebut *bob* pada suatu titik. Sehingga dapat berayun dengan bebas. Jika pendulum dipindahkan dari titik ke kestabilannya, gaya gravitasi yang diterapkan pada massa bandul akan menghasilkan percepatan untuk kembali ke titik kesetimbangan. Sistem pendulum sederhana, seperti *crane payload* dan jam pendulum, mempunyai pusat massa dibawah titik pivotnya tidak seperti sistem IP yang merupakan sistem yang tidak stabil secara inheren. IP mempunyai pusat massa lebih tinggi dari pusat pivotnya dan harus secara aktif distabilkan agar tetap tegak. Torsi harus diterapkan pada titik pivotnya dengan arah yang bellawanan dengan torsi akibat massa pada pendulum yang menuju titik kesetimbangan (Boubaker & Iriarte, 2017, p. 1).

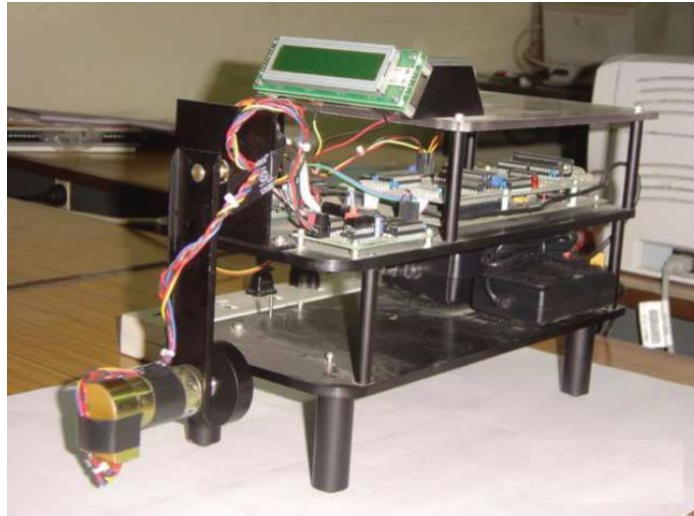
Pada tahun 2001, Spong et al. (2001, p. 1845) memperkenalkan *Reacting Wheel Pendulum* yang merupakan sistem mekanik yang terdiri dari pendulum fisik dengan piringan simetris yang terpasang diujung pendulum yang ditunjukkan pada Gambar 2.1 (a). Piringan ini digerakkan oleh motor DC dan torsi kopling yang dihasilkan oleh percepatan sudut piringan ditransmisikan ke pendulum untuk dapat digunakan untuk mengontrol sistem secara aktif.



Gambar 2.1 (a) Konvensi Koordinat untuk Pendulum Roda Inersia dan (b) Peralatan Percobaan Penyeimbang Pendulum pada Titik Kesetimbangan Tidak Stabil (Spong et al., 2001).

Pada penelitian ini membahas dua pendekatan kontrol untuk *swing up* pendulum sampai pada posisi IP dan menyeimbangkannya agar tetap stabil pada posisi tegak yang ditunjukkan pada Gambar 2.1 (b). Hal ini dapat diraih dengan strategi kontrol *switch* yang menggunakan pengendalian nonlinier berbasis pasif untuk *swing up* pendulum dan linearisasi umpan balik untuk menyeimbangkan pendulum pada posisi terbalik. Pengendalian nonlinier dirancang untuk mengayunkan pendulum supaya ayunan pendulum pada akhirnya memasuki batas sudut yang telah ditentukan untuk memulai atau *switch* pengendalian untuk menyeimbangkan IP, yang pada gilirannya dirancang untuk menstabilkan pendulum secara tegak pada keadaan

terbalik. Menentukan kapan harus beralih antara pengendalian mengayunkan dan kestabilan IP berdasarkan batas sudut yang ditentukan.



Gambar 2.2 Konfigurasi Percobaan IWP (Srinivas & Behera, 2008).

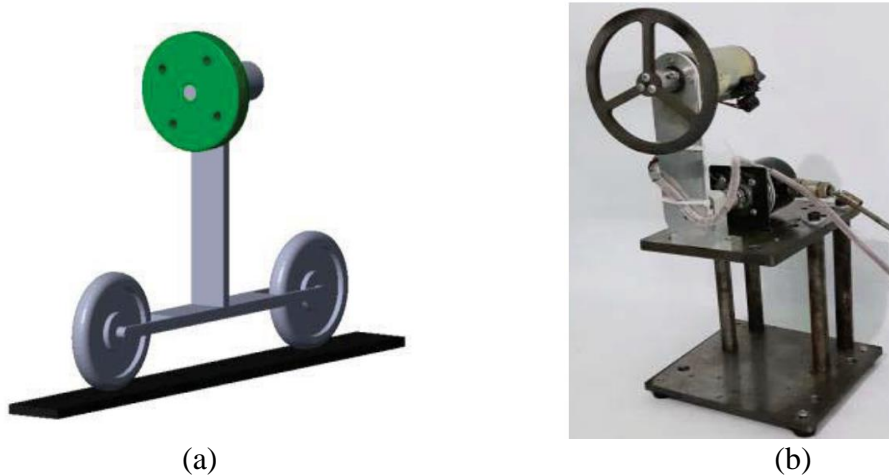
Saat ini, telah dilakukan berbagai strategi untuk mengembangkan metode kontrol yang tepat untuk dapat menstabilkan sistem *Inersia Wheel Pendulum* (IWP) ditunjukkan oleh penelitian Srinivas & Bahera (2008, p. 1165) pada Gambar 2.2. Strategi yang digunakan pada sistem IWP terdiri dari 2 yaitu untuk *swing up* pendulum menggunakan roda inersia dan menyeimbangkan IP pada posisi tegak. Strategi kontrol *swing up* pendulum menggunakan roda inersia memiliki beberapa pendekatan yang dapat digunakan seperti *energy-based swing up control*, *passivity-based control* (PBC), *Interconnection and Damping assignment* (IDA), dan *sinusoidal control*. Strategi kontrol yang memperlakukan osilasi sebagai gangguan dari titik kesetimbangan stabil bawah. Kontroler didesain sedemikian rupa sehingga subsistem pada pendulum menerima input *sinusoidal* melalui subsistem roda. Oleh karena itu disebut sebagai strategi kontrol *swing-up sinusoidal*. Strategi kontrol menggunakan pendekatan IDA-PBC yaitu dengan membuat hukum kontrol *swing up* untuk input torsi dengan akurasi tinggi yang dibatasi untuk diterapkan secara *real time*. Respons sistem dari 2 strategi yang telah dilakukan akan dibandingkan dengan penelitian sebelumnya terkait pendekatan menggunakan *energy-based swing up control* dan *passivity-based control* (PBC) yang ditunjukkan pada Tabel 2.1. Hasil dari tabel 2.1 menunjukkan bahwa respons dari sistem menggunakan pengendalian IDA – PBC untuk simulasi dan percobaan dalam mengayunkan pendulum lebih bagus dengan parameter seperti waktu dan jumlah ayunan yang dibutuhkan untuk mencapai batas sudut yang ditentukan.

Tabel 2.1 Perbandingan Strategi Kontrol untuk IWP (Srinivas & Behera, 2008).

Control strategy	Swing-up (s)		No. of swings		Total time (s)	
	Simulation	Experiment	Simulation	Experiment	Simulation	Experiment
Sinusoidal swing-up	60	27	≈55	28(1/2)	58	28
IDA-PBC swing-up	3.9	3.9	4(1/2)	4(1/2)	4.5	4.9
PBC	5.15	6.15	4(1/2)	6(1/2)	6.9	6.5
Energy based control	300	–	>400	–	>300	–

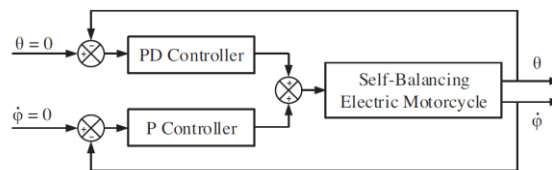
Pada sistem IWP yang menggunakan *swing up*, pada saat ayunan pendulum memasuki batasan sudut yang telah ditentukan dan pusat massa sudah diatas titik pivot maka sistem

pengendalian akan beralih menjadi metode pengendalian untuk menyeimbangkan IP untuk tetap tegak. Metode – metode pengendalian yang dapat digunakan bermacam – macam seperti yang banyak digunakan yaitu *Proportional Integral Derivative* (PID), *Linear Quadratic Regulator* (LQR), *Full State Feedback*, *Linear Quadratic Gaussian* (LQG) dan masih banyak lagi. Metode tersebut digunakan untuk memvalidasi performa algoritma kontrol pada saat diterapkan pada IP dengan melihat bagaimana respons dari sistem. Pada penelitian Quang Khanh Ho & Cong Bang Pham (2018, p. 687) menerapkan IWP untuk menyeimbangkan sepeda motor listrik yang ditunjukkan pada Gambar 2.3.

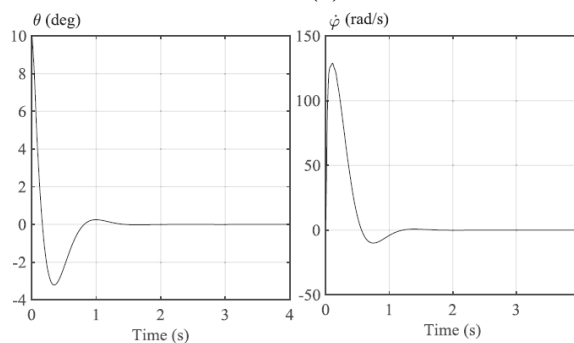


Gambar 2.3 *Self Balancing* pada Sepeda Listrik menggunakan IWP (a) Model dan (b) Prototipe (Ho & Pham, 2018)

Model dari sepeda motor dibuat untuk mempelajari respons atau perilaku dari sistem dinamis serta untuk menerapkan algoritma kontrol yang tepat sebelum diterapkan pada prototipe yang akan dibuat. Oleh dari itu, model matematika motor dan IP harus diturunkan sehingga mendapatkan persamaan nonlinier. Model nonlinier IWP lalu diimplementasikan ke dalam model Simulink lalu disimulasikan untuk melihat respons sistem dengan memvariasikan input voltase kepada motor, panjang pendulum, inersia roda, dan massa roda inersia. Sistem pengendalian yang digunakan pada simulasi yaitu PD (*Proportional Derivative*) untuk roll pendulum dan P (*Proportional*) untuk kecepatan putar sudut motor dan hasil simulasi model IWP dapat dilihat pada Gambar 2.4.



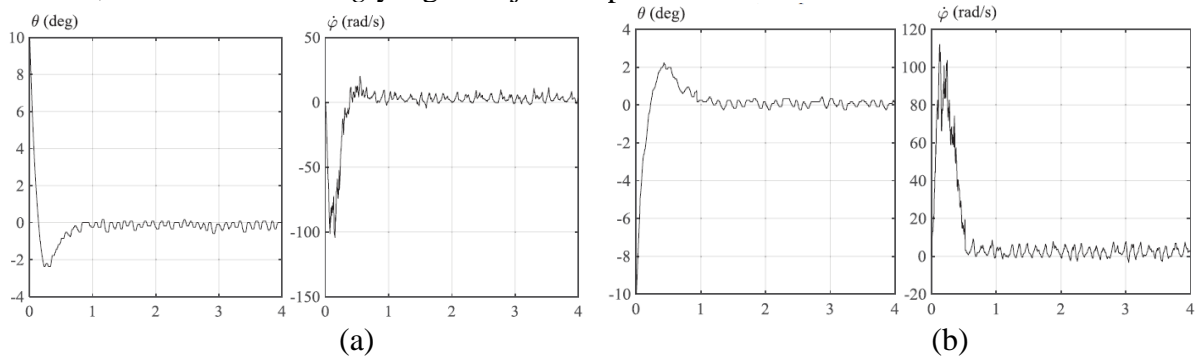
(a)



(b)

Gambar 2.4 (a) Strategi Kontrol untuk Menyeimbangkan dengan IWP dan (b) Hasil Simulasi Model IWP untuk Menyeimbangkan Sepeda Motor Listrik dengan Matlab Simulink

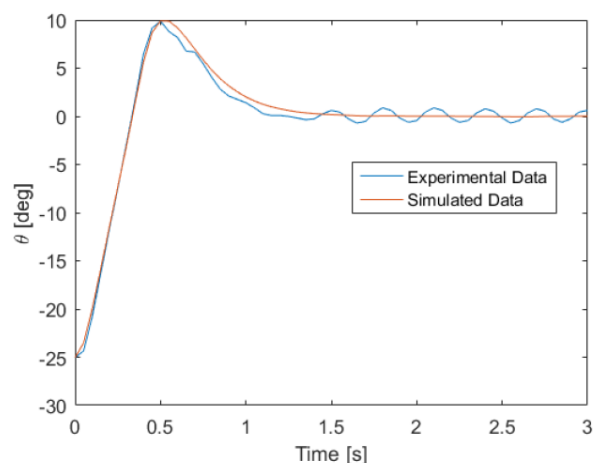
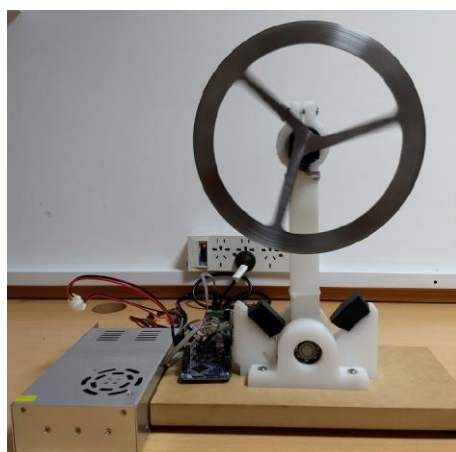
Hasil respons sistem dari percobaan menunjukkan bahwa prototipe IWP dapat menyeimbangkan dengan simpangan $\pm 10^\circ$ sama halnya dengan respons sistem dari simulasi. Namun, memiliki *chattering* yang ditunjukkan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Performa Dinamis IWP untuk Menjaga Kestabilan pada Posisi Tegak dengan a) Simpangan Awal Sebesar 10° dan (b) Simpangan Awal Sebesar -10° (Ho & Pham, 2018)

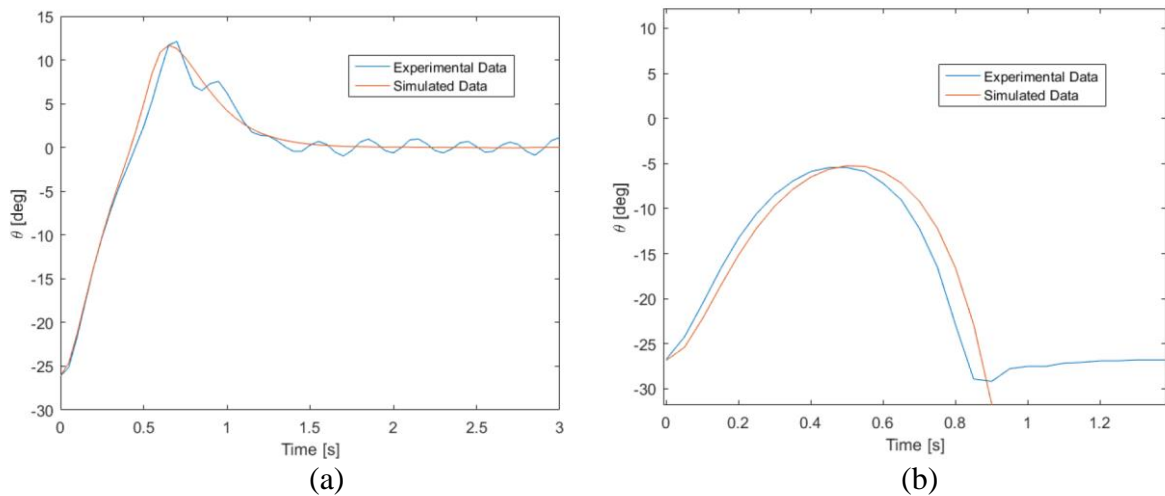
Untuk Sistem pengendalian yang menggunakan *discrete time full state feedback* dengan *gain* konstan dihitung menggunakan LQR dapat dilihat pada penelitian Gonzalo Belascuen & Nahuel Aguilar (2018, p. 1) yang ditunjukkan pada Gambar 2.6. Fokus pada penelitian ini yaitu pada optimalisasi pemulihan sudut dan performa sistem dalam menyeimbangkan pendulum dengan memberikan sudut awalan. Dengan 4 metode yang digunakan untuk mengoptimasi dari performa sistem yaitu:

1. Menganalisis bagaimana dimensi pendulum yang berbeda memengaruhi kinerja sistem.
2. Menganalisis bagaimana menemukan dimensi optimal dari roda inersia untuk motor listrik tertentu.
3. Mengidentifikasi koefisien motor yang optimal.
4. Membandingkan berbagai opsi motor dan menemukan yang paling cocok untuk penerapan.



Gambar 2.6 (a) Prototipe Reacting Wheel Balanced Inverted Pendulum dan (b) Hasil Respons Sistem Simulasi dan Ekperimen dengan Memberikan Simpangan 25° (Belascuen & Aguila, 2018).

Gambar 2.7 menunjukkan hasil percobaan. Dapat dilihat bahwa respons percobaan sangat dekat dengan respons simulasi. Perbedaan utama terletak pada kondisi terjadinya *chattering*, disebabkan pada percobaan menghadirkan osilasi akibat gesekan statis pada motor listrik. Sudut pemulihan yang diprediksi dari hasil simulasi juga cocok dengan sudut pemulihan pada hasil percobaan. Pada Gambar 2.7 Dua percobaan percobaan dengan memberikan simpangan $26,1^\circ$ dan $26,7^\circ$. Hasil respons simulasi dan percobaan mampu menstabilkan mulai dari $26,1^\circ$. Tetapi tidak dapat menyeimbangkan apabila diberikan simpangan $26,7^\circ$ Hasil respons sistem menunjukkan bahwa hasil dari simulasi dengan percobaan menunjukkan perilaku yang sesuai dengan satu sama lain. Hal ini menandakan bahwa sudut pemulihan yang tepat berada di antara dua nilai ini dan dari simulasi memperkirakan sudut pemulihan yang tepat kurang dari $0,6^\circ$.



Gambar 2.7 Hasil Respons Sistem Simulasi dan Percobaan dengan Memberikan (a) Simpangan $26,1^\circ$ dan (b) Simpangan $26,7^\circ$ (Belascuen & Aguila 2018).

2.2 Dasar Teori

2.2.1 Angular Momentum

Menurut Kleppner dan Kolenkow (2014, p. 241), Ketika mempertimbangan sebuah sistem dari benda, telah ditunjukkan bahwa gaya eksternal yang bekerja pada pusat massa sistem adalah sama dengan turunan waktu dari momentum total sistem.

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}_{sys}}{dt} \quad (2.1)$$

Konsep momentum sudut pada titik partikel massa (m) dengan linier momentum (\vec{p}) pada titik (S), didefinisikan oleh persamaan sebagai berikut:

$$\vec{L}_S = \vec{r}_S \times \vec{p} \quad (2.2)$$

Dimana \vec{r}_S adalah vektor dari point (S) ke titik partikel massa. Torsi pada titik (S) yang bekerja pada partikel adalah sama dengan laju perubahan momentum sudut terhadap titik (S) dari partikel.

$$\vec{\tau}_S = \frac{d\vec{L}_S}{dt} \quad (2.3)$$

Untuk kasus benda tegar yang mengalami rotasi pada sumbu tetap terhadap sumbu z dengan kecepatan sudut $\vec{\omega} = \omega_z \hat{k}$. Benda tegar dibagi menjadi N elemen yang diberi label indeks $i, i = 1, 2, \dots, N$, indeks i^{th} elemen memiliki massa m_i dan vektor posisi $\vec{r}_{S,i}$. Benda tegar memiliki momen inersia I_S pada titik (S) pada sumbu tetap (sering dianggap sebagai sumbu z, tetapi tidak selalu), yang berotasi dengan kecepatan sudut $\vec{\omega}$ pada sumbu rotasi. Momentum sudut merupakan jumlah vektor dari momentum sudut individu.

$$\vec{L}_S = \sum_{i=1}^{i=N} \vec{L}_{S,i} = \sum_{i=1}^{i=N} \vec{r}_{S,i} \times \vec{p}_i \quad (2.4)$$

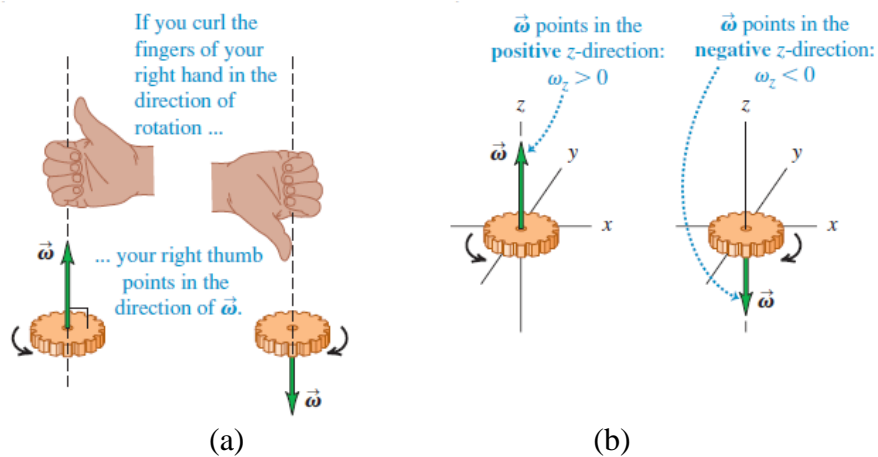
Ketika sumbu rotasi adalah sumbu z, komponen z dari momentum sudut $\vec{L}_{S,z}$, pada titik (S) maka persamaan momentum sudut menjadi.

$$\vec{L}_{S,z} = I_S \omega_z \quad (2.5)$$

Torsi pada komponen z terhadap titik (S), $\tau_{S,z}$, merupakan turunan waktu dari komponen z dari momentum sudut terhadap titik (S). Sehingga, persamaan torsi pada benda tegar yang berotasi pada sumbu z dapat ditulis sebagai berikut:

$$\tau_{S,z} = \frac{dL_{S,z}}{dt} = I_S \frac{d\omega_z}{dt} = I_S \alpha_z \quad (2.6)$$

Ketika rotasi sejajar dengan salah satu sumbu utama benda tegar, arah vektor momentum sudut adalah sumbu rotasi dari suatu benda dan dinyatakan positif pada arah putar mengencangkan sekrup atau menggunakan aturan tangan kanan yang ditunjukkan pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Aturan Tangan Kanan untuk Arah Vektor Kecepatan Sudut $\vec{\omega}$ (a) Membalikkan Arah Rotasi Membalikkan Arah Vektor Kecepatan Sudut $\vec{\omega}$. (b) Tanda dari ω_z untuk Rotation along the z-axis (Young et al., 2011).

2.2.2 Persamaan Lagrange

Dalam menyatakan persamaan differensial mengenai gerak partikel atau sistem dapat dibentuk menggunakan penerapan hukum gerak Newton atau menggunakan persamaan Lagrange. Hukum gerak Newton sebagai landasan terhadap semua mekanika gerak linier, rotasi, hingga hukum gas ideal, memiliki prinsip-prinsip kuat yang ditulis oleh Newton. Akan tetapi jika aspek yang terlibat banyak maka perhitungan akan semakin sulit untuk dilakukan (Thomas et al., 2018). Persamaan gerak *Lagrangian* adalah fungsi yang menggambarkan

keadaan sistem dinamis dalam hal koordinat posisi dan turunan waktunya dan juga perbedaan antara energi potensial dan energi kinetik. Untuk sistem mekanik dapat diturunkan dengan memilih satu set koordinat umum (q_i) dan menggunakan penyamarataan gaya. Persamaan Lagrangian L didefinisikan sebagai berikut:

$$L = T - V \quad (2.7)$$

dimana,

$$T = T_t - T_r \quad (2.8)$$

$$T_t = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v^2 \quad (2.9)$$

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \omega^2 \quad (2.10)$$

$$V = mgh \quad (2.11)$$

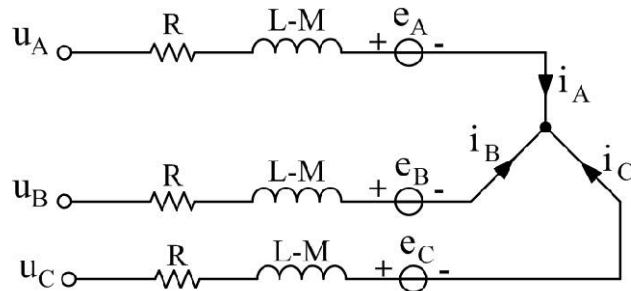
T_t adalah energi kinetik translasi, T_r adalah energi kinetik rotasi, dan V adalah potensial energi sistem. Energi kinetik adalah energi gerak sistem. Sedangkan energi potensial sistem mencerminkan energi interaksi antar partikel, yaitu berapa banyak energi yang dimiliki oleh satu partikel karena pengaruh – pengaruh lain dan pengaruh eksternal lainnya. Persamaan Lagrange tersebut diturunkan sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.12)$$

2.2.3 Motor *Brushless Direct Current* (BLDC)

Motor BLDC merupakan salah satu jenis motor-sinkron. Medan magnet yang dihasilkan oleh rotor dan stator motor ini berada pada frekuensi yang sama. Motor BLDC terdiri dari belitan pada stator dan magnet permanen pada rotor. Motor ini tidak memiliki komutator mekanik untuk mengubah arah arus magnetisasinya. Motor ini umumnya dikendalikan menggunakan inverter sumber 3 fasa. Motor BLDC dikontrol menggunakan pensaklaran inverter 3 fasa. Pensaklaran inverter membutuhkan posisi rotor yang tepat untuk menghidupkannya. Posisi rotor dapat diketahui dengan menggunakan Kontrol Torsi Motor Brushless Direct Current (BLDC) Menggunakan sensor posisi rotor yang diubah secara berurutan setiap 60 derajat.

Rangkaian ekivalen motor BLDC brushless menggunakan sistem 3 fasa dengan setiap fase yang terdiri dari resistansi, induktansi, dan sumber tegangan secara seri, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Rangkaian Motor DC

Berdasarkan pada rangkaian pembanding pada gambar diatas maka dapat diperoleh persamaan berikut:

$$u_A = i_A R + (L - M) \frac{d}{dt} i_A + e_A \quad (2.13)$$

$$u_B = i_B R + (L - M) \frac{d}{dt} i_B + e_B \quad (2.14)$$

$$u_C = i_C R + (L - M) \frac{d}{dt} i_C + e_C \quad (2.15)$$

Dimana, u_A , u_B , dan u_C adalah tegangan fasa A, B, dan C. R adalah resistansi stator. L dan M adalah *self-inductance* dan *mutual inductance*. i_A , i_B , dan i_C adalah arus fasa A, B, dan C. e_A , e_B , dan e_C adalah tegangan ggl balik (*back emf*) fasa A, B, dan C. Matriks dari persamaan tegangan fasa motor DC brushless dapat ditunjukkan sebagai:

$$\begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L - M & 0 & 0 \\ 0 & L - M & 0 \\ 0 & 0 & L - M \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_C \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.2.4 Transformasi Park-Clarke

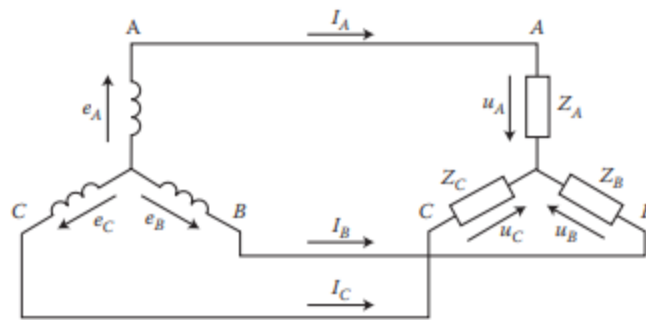
Sistem 3 fasa memiliki 3 sumber tegangan identik dan saling berhubungan yang ditunjukkan pada Gambar 2.10. Antar fasanya memiliki perbedaan sudut 120 derajat atau $2\pi/3$. Sistem 3 fasa yang banyak diimplementasikan yaitu sistem 3 fasa tanpa urutan 0 karena pemanfaatan operasional yang mudah. Perbedaan fasa dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$e_A = V_s \sin \omega t \quad (2.17)$$

$$e_B = V_s \left(\sin \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (2.18)$$

$$e_C = V_s \left(\sin \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (2.19)$$

Dimana, V_s adalah tegangan sumber. ωt adalah sudut fasa.



Gambar 2.10 Hubungan transformator 3 fasa

Transformasi Clarke dan park digunakan untuk mengubah koordinat motor induksi dari tiga fasa ke dalam koordinat dua fasa. Hal ini memudahkan dalam melakukan kontrol sistem perangkat elektronika daya yang memanfaatkan sistem 3 fasa tetapi bisa dikontrol dalam sistem dua fasa.

1) *Transformasi Clarke*

Transformasi clarke atau juga dikenal dengan transformasi bidang alpha beta dikenalkan oleh Edith Clarke. Transformasi ini merupakan transformasi space vector dengan domain waktu (tegangan, arus, fluks dll) dari sistem koordinat tiga fasa (abc) menjadi dua bidang referensi dua fasa yang diam ($\alpha\beta$). Transformasi matriks digunakan untuk koordinat langsung vector x dengan menghilangkan perbedaan fasa $2\pi/3$ dari sumber tiga fasa, representasi matematis yang didapatkan yaitu:

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_\gamma \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Dimana, $x_{\alpha\beta\gamma}$ adalah parameter dalam domain $\alpha\beta\gamma$. x_{abc} adalah parameter dalam domain abc.

2) *Transformasi Park*

Tranformasi Park pertama kali ditemukan oleh R. H. Park. Transformasi ini juga sering disebut transformasi dq0. Transformasi dq0 merepresentasikan domain 2 fasa dan menggunakan sudut θ pada mesin listrik. Titik 0 menyatakan komponen urutan fasa-nol. Pada keadaan fasa seimbang, tidak ada komponen urutan fasa-nol. Pada beberapa kasus, analisis menggunakan koordinat kartesian pada pemrosesan komponen elektronika daya dan persamaan matematis yang sesuai dari sistem yang dianalisis merupakan pilihan yang tepat. Sebagai contoh untuk analisis rangkaian listrik, sebaiknya gunakan parameter frekuensi jaringan. Sedangkan pada mesin sinkron menggunakan persamaan Park, yang direpresentasikan dalam sistem koordinat yang berputar dengan kecepatan poros penggerak motor. Dalam hal ini, proses elektromagnetik pada mesin sinkron dijelaskan dengan persamaan diferensial dengan konstanta koefisien, bukan koefisien periodik sehingga menyederhanakan analisis. Rumus untuk torsi elektromagnetik motor yang

berbentuk produk dari dua *variable* menjadi lebih sederhana. Sumbu rotasi sistem koordinat dq yang terukur adalah sumbu A dari sistem koordinat tiga fase atau ekuivalen, sumbu α dari Cartesian tak bergerak sistem koordinat $\alpha\beta$ [9]. Konversi sistem koordinat $\alpha\beta$ ke sistem dq dapat dinyatakan sebagai berikut.

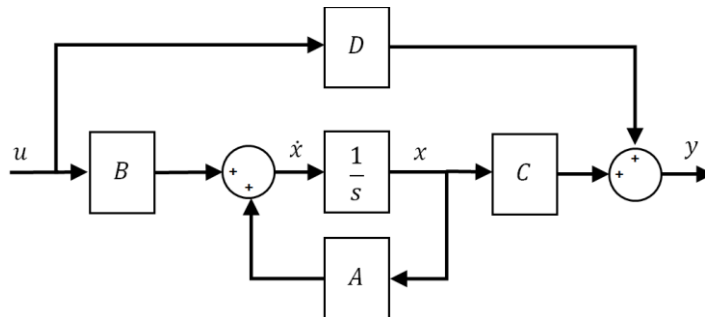
$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Dimana, $x_{\alpha\beta}$ adalah parameter dalam domain $\alpha\beta$. x_{dq} adalah parameter dalam domain dq. θ adalah sudut koordinat sistem.

2.2.5 Persamaan *State-Space*

Semua sistem dapat dinyatakan dengan persamaan diferensial. *State variable* mewakili seluruh *state* sistem pada waktu tertentu. Jumlah minimum *state variable* yang diperlukan untuk mewakili suatu sistem biasanya sama dengan urutan pendefinisian sistem persamaan diferensial. Dalam teknik kontrol, representasi *state-space* adalah model matematis dari sistem fisik sebagai *variable* input, *output*, dan *state* yang terkait dengan persamaan diferensial orde pertama atau persamaan diferensial lain. Sistem kontrol yang kompleks dengan input dan *output* lebih dari satu atau disebut dengan *Multi Input Multi Output* (MIMO) menggunakan *state-space* untuk menggambarkan model dari sistemnya. Bentuk representasi *state-space* paling umum untuk sistem linier dengan n *state variable* ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$



Gambar 2.11 Blok Diagram Representasi *State-Space*

Dimana, blok diagram model *state-space* yang ditunjukkan pada Gambar 2.11, terdiri dari input (u), *state vektor* (x) dan output (y). Terdapat A sebagai matriks sistem, B sebagai matriks input, C sebagai matriks output, dan D sebagai matriks *feedforward*.

2.2.6 *Stability*

Stabilitas adalah salah satu sifat paling penting dari sistem dinamis. Ada beberapa kemungkinan definisi *stability*, sebagian besar dari *stability* melibatkan pengaruh titik kesetimbangan untuk sistem yang diatur menggunakan persamaan keadaan *Linear Time Invariant* (LTI).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx(t) + Du(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dalam stabilitas pada sistem kontrol dapat dibagi menjadi 2 tipe, yaitu stabilitas internal dan stabilitas eksternal. Stabilitas internal, melibatkan perilaku kuantitatif dari respons *zero-input state* dimana respons tersebut terkait dengan persamaan *state* homogeneous yang hanya didasarkan pada keadaan awal. Stabilitas *external* mempelajari perilaku *input-output*. Khususnya, mengkarakterisasi persamaan keadaan di mana respons keluaran *zero-state* adalah sinyal terbatas untuk setiap input terbatas atau yang disebut *bounded-input, bounded-output stability*. Untuk *stability* keadaan stabil untuk persamaan keadaan homogen dimulai dengan menganalisis persamaan keadaan nonlinier sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t)] \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{2.24}$$

Dimana $x(t) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ menunjukkan vektor keadaan sistem, D adalah set terbuka yang berisi *origin*, dan $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah medan vektor konitu pada D. Misalkan f memiliki kestabilan pada x_e sehingga $f[x_e] = 0$ maka

1. Kesetimbangan ini dikatakan *Lyapunov stable*, jika untuk setiap $\epsilon > 0$, ada $\delta > 0$ seperti jika $\|x(0) - x_e\| < \delta$, maka untuk setiap $t \geq 0$ didapatkan $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$.
2. Kesetimbangan sistem di atas dikatakan *asymptotically stable* jika *Lyapunov stable* dan ada $\delta > 0$ sehingga jika $\|x(0) - x_e\| < \delta$, kemudian $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$.
3. Kesetimbangan sistem di atas dikatakan *exponentially stable* jika *asymptotically stable* dan ada $\alpha > 0, \beta > 0, \delta > 0$ sehingga jika $\|x(0) - x_e\| < \delta$, kemudian $\|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x(0) - x_e\| e^{-\beta t}$ untuk setiap $t \geq 0$

Secara konseptual, arti dari istilah-istilah di atas adalah sebagai berikut:

1. *Lyapunov stability* pada keadaan stabil berarti bahwa solusi mulai "cukup dekat" dengan kestabilan (dalam jarak δ) tetap "cukup dekat" selamanya (dalam jarak ϵ)
2. *Asymptotic stability* berarti bahwa solusi yang mulai cukup dekat tidak hanya tetap cukup dekat tetapi juga akhirnya menyatu ke kesetimbangan.
3. *Exponential stability* berarti bahwa solusi tidak hanya konvergen, tetapi pada kenyataannya konvergen lebih cepat dari atau setidaknya secepat tingkat tertentu yang diketahui $\alpha \|x(0) - x_e\| e^{-\beta t}$.

2.2.7 Controllability

Sistem yang direpresentasi *state-space* dalam Persamaan (2.25) disebut *controllable* pada saat $t = t_0$ jika dapat ditentukan pengendalian tanpa kendala yang akan membebaskan suatu keadaan awal keadaan akhir acak dalam selang waktu terhingga $t_0 \leq t \leq t_1$. Jika setiap keadaan sistem terkontrol, maka sistem dikatakan terkontrol sempurna. Untuk mengetahui suatu sistem dengan persamaan *state-space* dikatakan *controllable* atau tidak, maka perlu ditentukan matriks *controllability* sebagai berikut:

$$\text{rank} [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = n\tag{2.25}$$

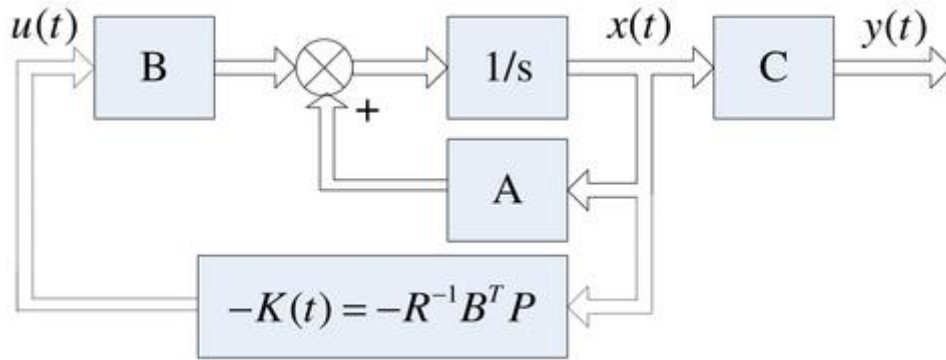
Dimana, *rank* adalah jumlah independent linier dalam matriks dan n adalah jumlah *state variable*. Matriks *controllability* selanjutnya disebut P ini dibangun langsung dari matriks A dan B dari persamaan *state-space*. Teorema menegaskan bahwa *controllability* untuk persamaan *state-space* dapat dicapai dengan P memiliki *full-row rank*.

2.2.8 Linear Quadratic Regulator (LQR)

Metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR) dapat menjadi pendekatan yang tepat untuk merancang kontroler, terutama untuk sistem yang rumit dan memiliki persyaratan ketat terkait dalam hal performa. Metode ini mencari kontroler yang optimal dengan meminimalkan fungsi biaya. Dengan R adalah matriks pembobotan input, dan Q adalah matriks pembobotan *state* vektor yang merupakan parameter fungsi biaya. Input kontrol dipengaruhi oleh matriks R yang positif serta matriks yang definit. Sementara *state* vektor sistem dipengaruhi oleh matriks Q , yang merupakan matriks non-negatif dan definit. Representasi *state-space* dari sistem digunakan dalam metode LQR dan dengan menyelesaikan persamaan aljabar Riccati akan memperoleh input kontrol yang optimal.

Sistem linier diberikan oleh representasi *state-space* dalam Persamaan (2.25). Dimana A dan B adalah dua matriks konstan yang dihitung dari model dinamis. Untuk pendekatan kontrol optimal adalah dengan menemukan hukum umpan balik keadaan yang meminimalkan biaya fungsional.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) dt \quad (2.26)$$



Gambar 2.12 Block Diagram of LQR

Blok diagram sistem pengendalian LQR ditunjukkan pada Gambar 2.12. Dimana P dapat dievaluasi dengan menggunakan *Algebraic Riccati Equation* (ARE).

$$A^T P - P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (2.27)$$

Untuk mencari *state feedback gain* K dan input sistem dapat dicari dengan persamaan aljabar Riccati dengan memasukkan nilai P pada persamaan *feedback gain* K dan input sistem dalam ditemukan.

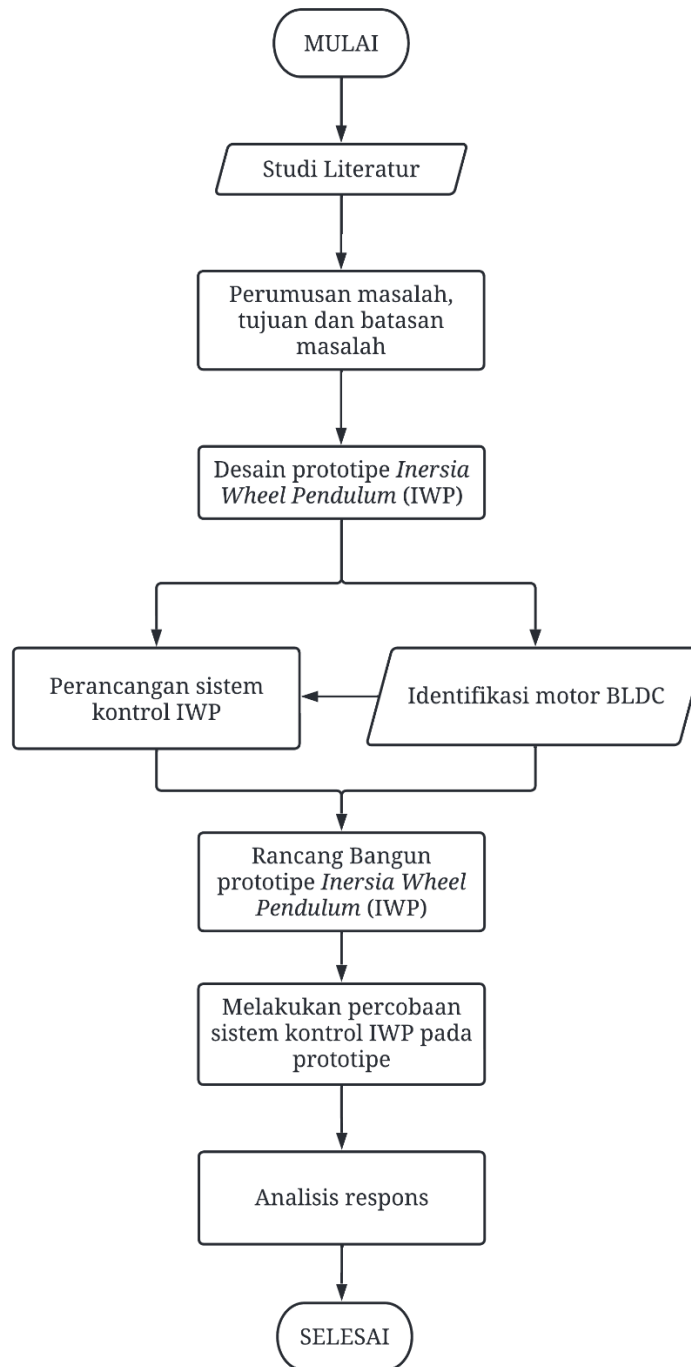
$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.28)$$

$$u = -Kx \quad (2.29)$$

BAB III METODOLOGI

3.1 Diagram Alir Penelitian

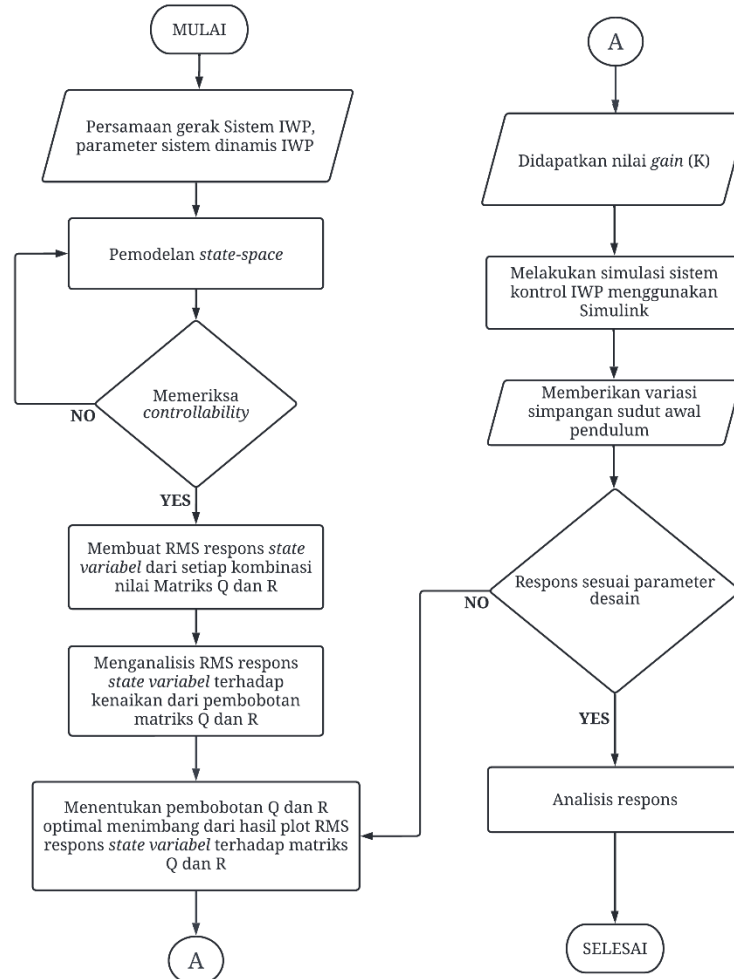
Pada penelitian ini dilakukan analisis pada prototipe *Inersia Wheel Pendulum* (IWP) dalam mengayunkan dan menyeimbangkan pendulum pada posisi vertikal ke atas. Dalam menganalisis respons dari sistem IWP dengan metode pengendalian LQR diperlukan beberapa tahapan seperti yang digambarkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

3.2 Diagram Alir Perancangan Sistem Kontrol IWP

Pada perancangan sistem kontrol menggunakan metode LQR, diperlukan beberapa tahapan yang digambarkan dalam diagram alir pada Gambar 3.2 dalam menentukan parameter *gain* (K) untuk digunakan pada kontrol *full state feedback*.



Gambar 3.2 Diagram Alir Perancangan Sistem Kontrol LQR

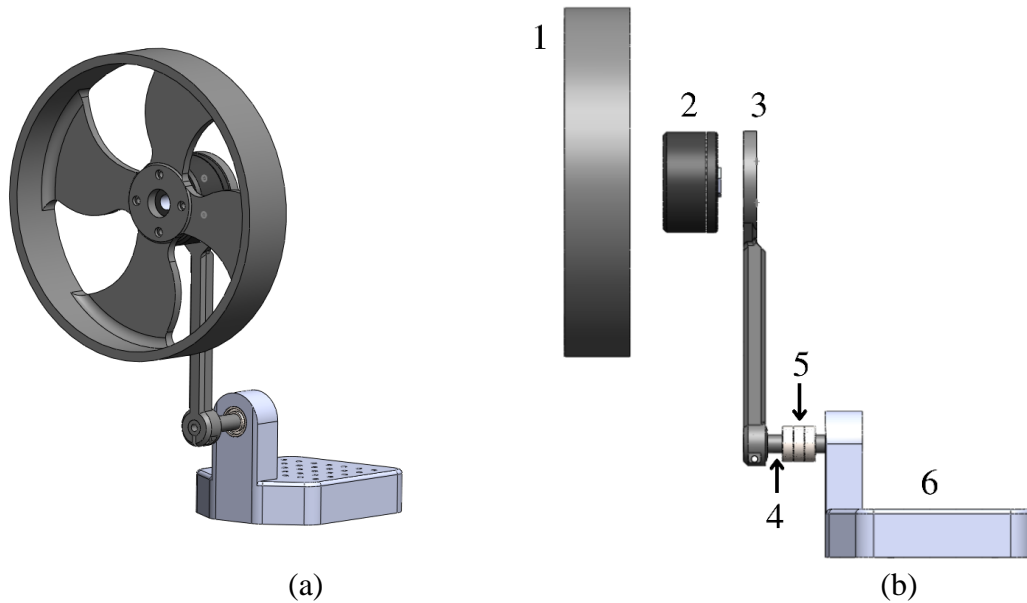
Untuk melihat performa dari sistem kontrol yang diterapkan pada sistem IWP diperlukan parameter untuk menilai bahwa respons mempunyai performa yang baik. Berikut merupakan table parameter performansi dari sistem IWP yang akan dinilai dapat dilihat pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Parameter Performansi Posisi Sudut Pendulum Sistem IWP

Parameter Performa	Sistem IWP
<i>Settling time</i>	< 1.5s
<i>Rise time</i>	< 0.5s
<i>% Overshoot</i>	< 23%
<i>Steady State Error</i>	< 5%

3.3 Model Prototipe *Inertia Wheel Pendulum (IWP)*

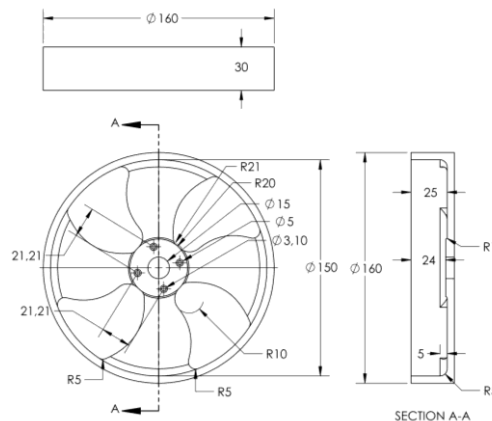
Model *Inertia Wheel Pendulum* terdiri dari pendulum dengan roda terpasang diujung pendulum yang di desain menggunakan *software 3D CAD*. Gambar 3.3(a) menunjukkan model prototipe desain IWP yang telah dibuat.



Gambar 3.3 (a) Model Prototipe IWP dan (b) Komponen – Komponen Prototipe IWP

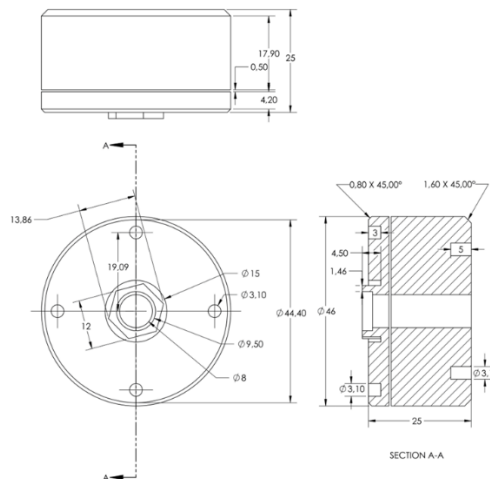
Prototipe *Inertia Wheel Pendulum (IWP)* terdiri dari beberapa bagian seperti roda inersia, pendulum, *shaft*, dan *base plate*. Dibawah ini akan dijelaskan sistem dari masing – masing bagian tersebut yang ditunjukkan pada Gambar 3.3(b).

1. Roda inersia sebagai kontrol pendulum untuk mencapai posisi tegak vertikal ke atas yang ditunjukkan pada Gambar 3.4. Dengan dipasangnya roda inersia pada motor BLDC maka saat motor berputar menyebabkan roda inersia juga ikut berputar, dengan massa, dan jari – jari roda inersia memberikan inersia roda dikalikan dengan percepatan putaran roda inersia akan menghasilkan torsi yang besar apabila dibandingkan dengan hanya motor BDLC yang berputar.



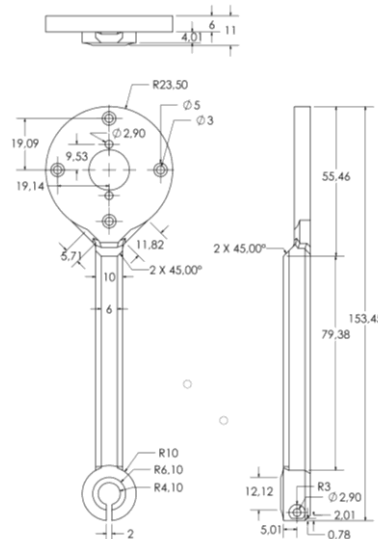
Gambar 3.4 Dimensi Roda Inersia

2. Motor BLDC sebagai sumber penggerak roda inersia. Digunakan untuk menghasilkan torsi pada sistem IWP yang ditunjukkan pada Gambar 3.5.



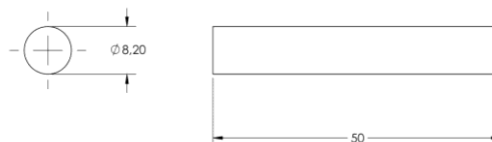
Gambar 3.5 Dimensi Motor BLDC iPower GBM4108-120T

3. Pendulum sebagai benda fisik yang digerakkan oleh roda inersia yang ditunjukkan pada Gambar 3.6. Digunakan sebagai penghubung (*link*) antara motor BLDC dan *shaft*.



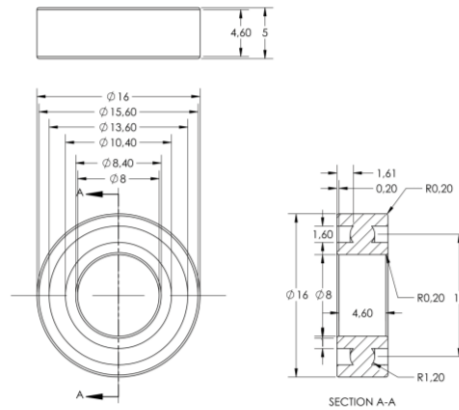
Gambar 3.6 Dimensi Pendulum

4. *Shaft* sebagai transmisi putaran dari pendulum menuju titik tumpu yang ditunjukkan pada Gambar 3.7. Selain itu, *shaft* juga berfungsi sebagai penopang dari berat yang dimiliki oleh pendulum, motor BLDC, dan roda inersia.



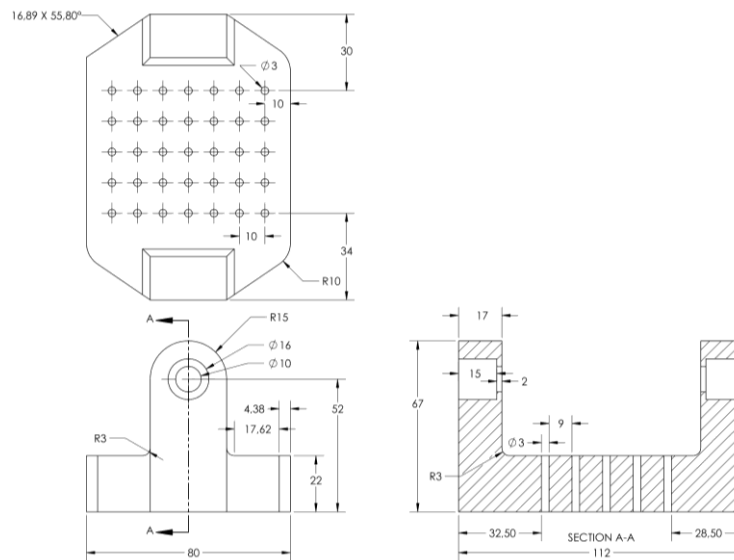
Gambar 3.7 Dimensi *Shaft*

5. *Bearing* sebagai titik tumpu pada sistem IWP yang digunakan untuk menahan atau mendukung suatu poros untuk tetap padaudukannya yang ditunjukkan pada Gambar 3.8. Selain itu, bearing juga berfungsi untuk mengurangi gesekan yang terjadi antara poros yang berputar dengan tumpuannya (bagian komponen yang diam yang menopang poros).



Gambar 3.8 Dimensi *Bearing*

6. *Base plate* sebagai penghubung kepada pondasi prototipe IWP sehingga sistem IWP yang telah dibuat dapat stabil dan kokoh yang ditunjukkan pada Gambar 3.9.



Gambar 3.9 Dimensi *Base Plate*

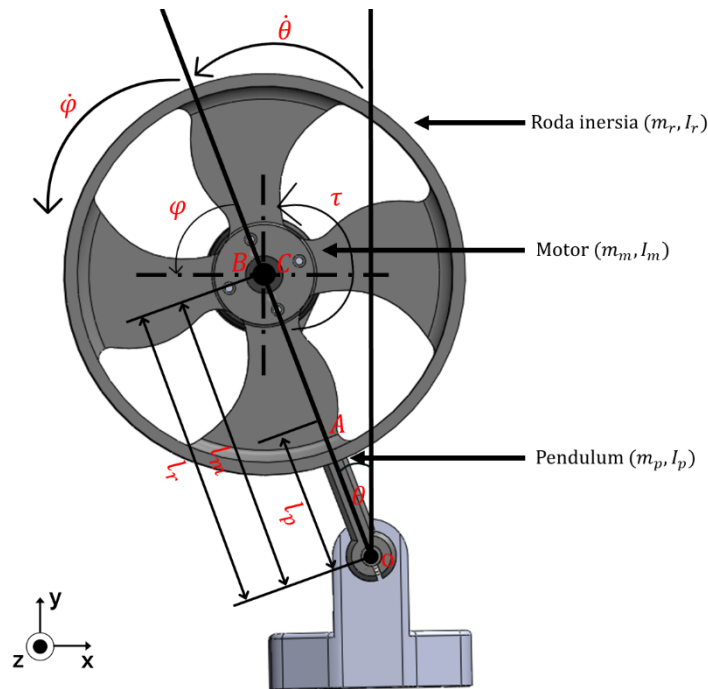
Tabel 3.2 Komponen – Komponen Prototipe Prototipe IWP

No	Komponen	Jumlah	Satuan
1	<i>Base plate</i>	1	buah
2	<i>Bearing</i> ukuran	3	buah
3	<i>Shaft</i> pejal	1	buah
4	Pendulum	1	buah
5	Motor BLDC iPower GBM4108-120T	1	buah
6	Roda inersia	1	buah
7	Encoder AMT 103-V	2	buah
8	Arduino Uno	1	buah
9	Arduino SimpleFOCShield v.2.0.3	1	buah
10	<i>Variable DC power supply</i>	1	buah

3.4 Persamaan Gerak Sistem Dinamis

3.4.1 Persamaan Gerak *Inverted Pendulum* dengan Roda Inersia

Secara umum, dinamika IWP dapat diturunkan dengan menggunakan pendekatan *Lagrange-Euler*. Pendekatan *Lagrange-Euler* memperlakukan IWP sebagai satu kesatuan dan melakukan analisis menggunakan persamaan lagrangian yaitu mencari selisih antara energi kinetik dan energi potensial dari sistem IWP. *Free body diagram* sistem IWP dapat dilihat pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10 *Free Body Diagram* IWP

Keterangan tanda dituliskan sebagai berikut:

- m_p = massa pendulum
- m_r = massa roda inersia
- m_m = massa motor
- I_p = inersia pendulum terhadap titik O
- I_r = inersia roda inersia terhadap titik O
- I_m = inersia motor terhadap titik O
- l_p = jarak COG pendulum terhadap titik O
- l_r = jarak COG roda inersia terhadap titik O
- l_m = jarak COG motor terhadap titik O
- θ = posisi sudut pendulum
- $\dot{\theta}$ = kecepatan sudut pendulum
- φ = posisi sudut motor
- $\dot{\varphi}$ = kecepatan roda inersia

1. Posisi *Center of Gravity* (COG) pendulum

$$x_A = l_p \sin \theta \quad (3.1)$$

$$y_A = l_p \cos \theta \quad (3.2)$$

Didapatkan kecepatan pendulum dengan menurunkan persamaan posisi terhadap waktu.

$$\dot{x}_A = l_p \cos\theta \dot{\theta} \quad (3.3)$$

$$\dot{y}_A = -l_p \sin\theta \dot{\theta} \quad (3.4)$$

Energi kinetik pada pendulum dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2} m_p \dot{y}_A^2 \\ T_p &= \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p (l_p \cos\theta \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_p (-l_p \sin\theta \dot{\theta})^2 \\ T_p &= \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p l_p^2 \cos^2\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p l_p^2 \sin^2\theta \dot{\theta}^2 \\ T_p &= \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p l_p^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

dimana $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, sehingga diperoleh energi kinetik pada pendulum sebagai berikut.

$$T_p = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\theta}^2 \quad (3.6)$$

2. Posisi *Center of Gravity* (COG) roda inersia

$$x_B = l_r \sin\theta \quad (3.7)$$

$$y_B = l_r \cos\theta \quad (3.8)$$

Didapatkan kecepatan roda inersia dengan menurunkan persamaan posisi terhadap waktu.

$$\dot{x}_B = l_r \cos\theta \dot{\theta} \quad (3.9)$$

$$\dot{y}_B = -l_r \sin\theta \dot{\theta} \quad (3.10)$$

Energi kinetik pada roda inersia dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{2} I_B (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{x}_B^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{y}_B^2 \\ T_r &= \frac{1}{2} I_B (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_r (l_r \cos\theta \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_r (-l_r \sin\theta \dot{\theta})^2 \\ T_r &= \frac{1}{2} I_B (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_r l_r^2 \cos^2\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_r l_r^2 \sin^2\theta \dot{\theta}^2 \\ T_r &= \frac{1}{2} I_B (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_r l_r^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

dimana $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, sehingga diperoleh energi kinetik pada roda inersia sebagai berikut.

$$T_r = \frac{1}{2}I_B(\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_r l_r^2 \dot{\theta}^2 \quad (3.12)$$

3. Posisi *Center of Gravity* (COG) Motor

$$x_C = l_m \sin \theta \quad (3.13)$$

$$y_C = l_m \cos \theta \quad (3.14)$$

Didapatkan kecepatan motor dengan menurunkan persamaan posisi terhadap waktu.

$$\dot{x}_C = l_m \cos \theta \dot{\theta} \quad (3.15)$$

$$\dot{y}_C = -l_m \sin \theta \dot{\theta} \quad (3.16)$$

Energi kinetik pada motor dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{1}{2}I_C \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_m \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2}m_m \dot{y}_C^2 \\ T_m &= \frac{1}{2}I_C \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_m (l_m \cos \theta \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_m (-l_m \sin \theta \dot{\theta})^2 \\ T_m &= \frac{1}{2}I_C \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_m l_m^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_m l_m^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \\ T_m &= \frac{1}{2}I_C \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_m l_m^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

dimana $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, sehingga diperoleh energi kinetik pada motor sebagai berikut.

$$T_m = \frac{1}{2}I_C \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_m l_m^2 \dot{\theta}^2 \quad (3.18)$$

4. Energi kinetik dan energi potensial total IWP

- Energi kinetik total

$$\begin{aligned} T &= T_p + T_r + T_m \\ T &= \frac{1}{2}I_A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_p l_p^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_B (\dot{\phi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_r l_r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_C \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_m l_m^2 \dot{\theta}^2 \\ T &= \left(\frac{1}{2}I_A + \frac{1}{2}m_p l_p^2 + \frac{1}{2}I_B + \frac{1}{2}m_r l_r^2 + \frac{1}{2}I_C + \frac{1}{2}m_m l_m^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_B (\dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

- Energi potensial total

$$\begin{aligned} V &= m_p l_p g \cos \theta + m_r l_r g \cos \theta + m_m l_m g \cos \theta \\ V &= (m_p l_p + m_r l_r + m_m l_m) g \cos \theta \end{aligned} \quad (3.20)$$

5. Persamaan *Lagrange*

$$L = T - V$$

$$L = \left(\frac{1}{2}I_A + \frac{1}{2}m_p l_p^2 + \frac{1}{2}I_B + \frac{1}{2}m_r l_r^2 + \frac{1}{2}I_C + \frac{1}{2}m_m l_m^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_B(\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}) - (m_p l_p + m_r l_r + m_m l_m)g \cos \theta \quad (3.21)$$

Persamaan gerak *lagrangian* diperoleh dengan menurunkan *lagrange function* terhadap koordinat $q_i = \theta$ dan $q_i = \varphi$.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = (m_p l_p + m_r l_r + m_m l_m)g \sin \theta \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2 \left(\frac{1}{2}I_A + \frac{1}{2}m_p l_p^2 + \frac{1}{2}I_B + \frac{1}{2}m_r l_r^2 + \frac{1}{2}I_C + \frac{1}{2}m_m l_m^2 \right) \dot{\theta} + I_B \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (I_A + m_p l_p^2 + I_B + m_r l_r^2 + I_C + m_m l_m^2) \dot{\theta} + I_B \dot{\varphi} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_B \dot{\varphi} + I_B \dot{\theta} \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = (I_A + m_p l_p^2 + I_B + m_r l_r^2 + I_C + m_m l_m^2) \ddot{\theta} + I_B \ddot{\varphi} \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I_B \ddot{\varphi} + I_B \ddot{\theta} \quad (3.27)$$

Berdasarkan Persamaan (2.12) diperoleh persamaan *lagrange* terhadap koordinat $q_i = \theta$ dan $q_i = \varphi$ sebagai berikut.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_i$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_i$$

dimana $Q_i = 0$ untuk koordinat $q_i = \theta$ dan $Q_i = \tau$ untuk koordinat $q_i = \varphi$, maka persamaan *lagrange* dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\left((I_A + m_p l_p^2 + I_B + m_r l_r^2 + I_C + m_m l_m^2) \ddot{\theta} + I_B \ddot{\varphi} \right) - (m_p l_p + m_r l_r + m_m l_m)g \sin \theta = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \tau$$

$$I_B \ddot{\varphi} + I_B \ddot{\theta} = \tau \quad (3.29)$$

Jika $M_1 = I_A + m_p l_p^2 + I_B + m_r l_r^2 + I_C + m_m l_m^2$ dan $M_2 = m_p l_p + m_r l_r + m_m l_m$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$M_1 \ddot{\theta} + I_B \ddot{\phi} - M_2 g \sin \theta = 0 \quad (3.30)$$

$$I_B \ddot{\phi} + I_B \ddot{\theta} = \tau \quad (3.31)$$

Sehingga persamaan 3.31 dapat ditulis sebagai berikut

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau}{I_B} - \ddot{\phi} \quad (3.32)$$

Persamaan 3.32 disubstitusikan ke persamaan 3.30, maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} M_1 \left(\frac{\tau}{I_B} - \ddot{\phi} \right) + I_B \ddot{\phi} - M_2 g \sin \theta &= 0 \\ (I_B - M_1) \ddot{\phi} - M_2 g \sin \theta &= -M_1 \frac{\tau}{I_B} \\ \ddot{\phi} &= \frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} \sin \theta - \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} \tau \end{aligned} \quad (3.33)$$

Persamaan 3.33 disubstitusikan ke persamaan 3.32, maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{\tau}{I_B} - \left(\frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} \sin \theta - \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} \tau \right) \\ \ddot{\theta} &= -\frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} \sin \theta + \frac{(I_B - M_1)}{I_B (I_B - M_1)} \tau + \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} \tau \\ \ddot{\theta} &= -\frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} \sin \theta + \frac{M_1 + (I_B - M_1)}{I_B (I_B - M_1)} \tau \\ \ddot{\theta} &= -\frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} \sin \theta + \frac{1}{(I_B - M_1)} \tau \end{aligned} \quad (3.34)$$

Diasumsikan ketika IWP bergerak akan memiliki simpangan sudut yang sangat kecil $\theta \approx 0$, sehingga linearisasi dapat dilakukan di sekitar titik kesetimbangan yang tidak stabil yang dapat membuat model lebih cocok untuk mendesain sistem kontrol. Sehingga persamaan gerak IWP sebagai berikut.

$$\ddot{\phi} = \frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} \theta - \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} \tau \quad (3.35)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} \theta + \frac{1}{(I_B - M_1)} \tau \quad (3.36)$$

6. Persamaan *state-space* IWP

Didefinisikan bahwa *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ yang lalu diturunkan terhadap waktu, maka diperoleh persamaan *state variable* sebagai berikut.

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \quad (3.37)$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} \theta + \frac{1}{(I_B - M_1)} \tau \quad (3.38)$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\varphi} = \frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} \theta - \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} \tau \quad (3.39)$$

Matriks A dan B pada *state space* dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} & 0 & 0 \\ \frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{(I_B - M_1)} \\ -\frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} \end{bmatrix} \tau \quad (3.40)$$

3.4.2 Persamaan Gerak Motor BLDC

Pada penelitian ini, Motor BLDC digunakan sebagai penggerak untuk sistem IWP. Motor BLDC ini digunakan untuk memutar roda inersia untuk mengayunkan pendulum dan menstabilkan pada posisi vertikal ke atas. Input pada subsistem ini yaitu nilai tegangan (v_a) sedangkan outputnya berupa posisi sudut motor BLDC (φ) dan torsi (τ). Persamaan pada motor BLDC untuk membangun model matematis dari sistem elektromekanis dapat ditunjukkan sebagai:

$$T_e - T_L = I_c \ddot{\varphi} + B_v \dot{\varphi} \quad (3.41)$$

Dimana, T_L adalah *load torque*, I adalah momen inersia motor, dan B_v adalah koefisien *viscous friction*.

$$T_e = k_m i \quad (3.42)$$

Dimana, k_m adalah konstanta torsi pada motor dan i adalah nilai arus lilitan motor. Ketika poros berputar, tegangan *back emf* (v_e) dihasilkan dan sebanding dengan kecepatan sudut poros dengan faktor konstanta k_e .

$$v_e = k_e \dot{\varphi} \quad (3.43)$$

Dimana, k_e adalah konstanta *back emf*. Berdasarkan Hukum kedua Kirchoff's, diperoleh persamaan.

$$v_a = Ri + L \frac{di}{dt} + k_e \dot{\varphi} \quad (3.44)$$

Mengingat nilai induktansi L dari motor BLDC sangat kecil, umumnya sangat rendah jika dibandingkan dengan resistansi R . Oleh karena itu, nilai induktansi L dapat diabaikan.

$$\frac{v_a}{R} - \frac{k_e}{R} \dot{\varphi} = i \quad (3.45)$$

Persamaan 3.45 di subsitusikan ke persamaan 3.41.

$$\begin{aligned}
k_m \left(\frac{v_a}{R} - \frac{k_e}{R} \dot{\phi} \right) - T_L &= I_C \ddot{\phi} + B_v \dot{\phi} \\
I_C \ddot{\phi} &= \frac{k_m}{R} v_a - \left(\frac{k_m k_e}{R} + B_v \right) \dot{\phi} - T_L
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Diasumsikan bahwa faktor gesekan *viscous bearing* sangat rendah sehingga dapat diabaikan dan $T_L = \tau$.

$$\begin{aligned}
I_C \ddot{\phi} &= \frac{k_m}{R} v_a - \frac{k_m k_e}{R} \dot{\phi} - \tau \\
\tau &= \frac{k_m}{R} v_a - \frac{k_m k_e}{R} \dot{\phi} - I_C \ddot{\phi}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Persamaan 3.47 disubstitusikan ke 3.35, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} \theta - \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} \left(\frac{k_m}{R} v_a - \frac{k_m k_e}{R} \dot{\phi} - I_C \ddot{\phi} \right) \\
\ddot{\phi} &= \frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} \theta - \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m}{R} v_a + \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m k_e}{R} \dot{\phi} + \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} I_C \ddot{\phi} \\
\left(1 - \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} I_C \right) \ddot{\phi} &= \frac{M_2 g}{(I_B - M_1)} \theta - \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m}{R} v_a + \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m k_e}{R} \dot{\phi}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Jika $\Pi_1 = 1 - \frac{M_1}{I_B (I_B - M_1)} I_C$, persamaan 3.48 dapat ditulis sebagai berikut.

$$\ddot{\phi} = \frac{M_2 g}{\Pi_1 (I_B - M_1)} \theta - \frac{M_1}{\Pi_1 I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m}{R} v_a + \frac{M_1}{\Pi_1 I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m k_e}{R} \dot{\phi} \tag{3.49}$$

Persamaan 3.47 disubstitusikan ke 3.32, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{1}{I_B} \left(\frac{k_m}{R} v_a - \frac{k_m k_e}{R} \dot{\phi} - I_C \ddot{\phi} \right) - \ddot{\phi} \\
\ddot{\theta} &= \frac{k_m}{I_B R} v_a - \frac{k_m k_e}{I_B R} \dot{\phi} - \left(\frac{I_C}{I_B} + 1 \right) \ddot{\phi}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Persamaan 3.49 disubstitusikan ke 3.50, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= \frac{k_m}{I_B R} v_a - \frac{k_m k_e}{I_B R} \dot{\phi} - \left(\frac{I_C}{I_B} + 1 \right) \left(\frac{M_2 g}{\Pi_1 (I_B - M_1)} \theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{M_1}{\Pi_1 I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m k_e}{R} \dot{\phi} \right)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Jika $\Pi_2 = \frac{I_C}{I_B} + 1$, persamaan 3.51 dapat ditulis sebagai berikut.

$$\ddot{\theta} = \frac{k_m}{I_B R} v_a - \frac{k_m k_e}{I_B R} \dot{\phi} - \frac{\Pi_2 M_2 g}{\Pi_1 (I_B - M_1)} \theta + \frac{\Pi_2 M_1}{\Pi_1 I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m}{R} v_a - \frac{\Pi_2 M_1}{\Pi_1 I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m k_e}{R} \dot{\phi} \quad (3.52)$$

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{k_m}{I_B R} + \frac{\Pi_2 M_1}{\Pi_1 I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m}{R} \right) v_a - \left(\frac{k_m k_e}{I_B R} + \frac{\Pi_2 M_1}{\Pi_1 I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m k_e}{R} \right) \dot{\phi} - \frac{\Pi_2 M_2 g}{\Pi_1 (I_B - M_1)} \theta \quad (3.53)$$

3.4.3 Model State-Space Sistem IWP Dilengkapi dengan Dinamika Motor

Didefinisikan bahwa *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ yang lalu diturunkan terhadap waktu, maka diperoleh persamaan *state variable* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\theta} = x_2 & (3.54) \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\theta} = \left(\frac{k_m}{I_B R} + \frac{\Pi_2 M_1}{\Pi_1 I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m}{R} \right) v_a - \left(\frac{k_m k_e}{I_B R} + \frac{\Pi_2 M_1}{\Pi_1 I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m k_e}{R} \right) \dot{\phi} - \frac{\Pi_2 M_2 g}{\Pi_1 (I_B - M_1)} \theta & (3.55) \end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{\phi} = \frac{M_2 g}{\Pi_1 (I_B - M_1)} \theta - \frac{M_1}{\Pi_1 I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m}{R} v_a + \frac{M_1}{\Pi_1 I_B (I_B - M_1)} \frac{k_m k_e}{R} \dot{\phi} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\Pi_2 M_2 g}{\Pi_1 (I_B - M_1)} & 0 & -\left(\frac{k_m k_e}{I_B R} + \frac{\Pi_2 M_1 k_m k_e}{\Pi_1 I_B R (I_B - M_1)} \right) \\ \frac{M_2 g}{\Pi_1 (I_B - M_1)} & 0 & \frac{M_1 k_m k_e}{\Pi_1 I_B R (I_B - M_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_m}{I_B R} + \frac{\Pi_2 M_1 k_m}{\Pi_1 I_B R (I_B - M_1)} \\ -\frac{M_1 k_m}{\Pi_1 I_B R (I_B - M_1)} \end{bmatrix} v_a & (3.57) \end{aligned}$$

3.5 Karakteristik Sistem IWP

Karakteristik didapat dengan memeriksa *stability* dan *controllability* sebelum dilakukannya pembuatan sistem kontrol IWP. Untuk mendapatkan karakteristik tersebut diperlukannya nilai parameter – parameter IWP yang digunakan untuk memodelkan dinamika sistem fisik dan pengendali. Nilai parameter – parameter ini dapat dilihat pada Tabel 3.3.

Tabel 3.3 Nilai Parameter dari sistem IWP

No	Simbol	Parameter	Nilai	Satuan
1.	m_p	Massa pendulum	0.023	kg
2.	I_p	Momen inersia pendulum	0.000050783	$kg.m^2$
3.	m_m	Massa motor BLDC	0.122	kg

4.	I_m	Momen inersia motor BLDC	0.000033139	$kg.m^2$
5.	m_r	Massa roda inersia	0.120	kg
6.	I_r	Momen inersia roda	0.000603826	$kg.m^2$
7.	l_p	Panjang COG pendulum	0.0783	m
8.	l_m	Panjang COG motor BLDC	0.12	m
9.	l_r	Panjang COG roda inersia	0.12	m
10.	g	Percepatan gravitasi	9.81	m/s^2
11.	R	Hambatan	11.4	Ω
12.	K_m	Konstanta torsi motor BLDC	0.00389330983377	$N.m/A$
13.	K_e	Konstanta <i>back of emf</i>	0.106259183	$V.s/rad$

3.5.1 Stability

Stabilitas adalah salah satu sifat terpenting dari sistem dinamis. Ada beberapa kemungkinan definisi stabilitas. Kebanyakan dari mereka melibatkan gagasan tentang titik ekuilibrium. Yang pertama adalah gagasan internal tentang stabilitas dan melibatkan perilaku kualitatif dari respons *zero-input state*.

- Respons dari persamaan keadaan homogen yang hanya bergantung pada keadaan awal.
- Kriteria stabilitas eksplisit yang melibatkan nilai eigen dari matriks dinamis sistem A
- *Energy-based stability analysis (Lyapunov stability theory)*

Salah satu hal pertama yang ingin kami lakukan adalah menganalisis stabilitas *open-loop system* (tanpa kontrol apa pun). *Poles* atau nilai *eigen* dari matriks sistem A akan digunakan untuk menentukan stabilitas sistem. Untuk sistem ini berdasarkan *state space representation* yang ditunjukkan pada Persamaan (3.58).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 80.87 & 0 & 0.7174 \\ -76.66 & 0 & -5.1250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6.7515 \\ 48.2311 \end{bmatrix} v_a \quad (3.58)$$

Nilai *eigen* dapat dicari secara sederhana dengan menggunakan perintah Matlab ($\lambda = \text{eig}(A)$). *Poles* atau nilai eigen dari *open-loop IWP system* yaitu:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 8.7700 \\ -9.6456 \\ -4.2494 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Stabilitas sistem menggunakan persamaan lyapunov untuk menguji stabilitas. karakterisasi ekivalen stabilitas diperoleh yaitu:

$$A^T P + P A = -Q \quad (3.60)$$

Dimana, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sehingga nilai matriks P diketahui untuk menentukan stabilitas sistem. Untuk melihat suatu sistem itu apakah stabil atau unstabil dapat dilihat dengan

mencari nilai *eigenvalue* dari matriks A dari sistem IWP. Hasil dari matriks P diperoleh dengan menggunakan fungsi matlab untuk Lyapunov *stability analysis* (*lyap(A', Q)*) maka didapatkan matriks P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix}$$

$$P = 10^3 \begin{bmatrix} 0.4908 & -0.5000 & 3.5199 \\ -0.5000 & -42.2164 & 55.6658 \\ 3.5199 & 55.6658 & -52.5561 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Pada Persamaan (3.59) terdapat satu nilai *eigen* pada matriks A yang mempunyai nilai positif. Oleh karena itu, matriks P merupakan *not positive definite* yang dapat diartikan bahwa sistem tidak stabil. Untuk menstabilkan sistem, dibutuhkan sistem kontrol dengan menambahkan *gain* (K) sesuai kebutuhan sehingga sistem dalam stabil dan nilai eigen sistem IWP yang baru dapat berada pada bagian negative dan matriks P menjadi *positive definite*.

3.5.2 Controllability

Pada sistem IWP didefinisikan bahwa *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ jadi matriks A mempunyai ordo matriks 3x3 sedangkan matriks B mempunyai ordo matriks 3x1 karena hanya memiliki satu input (u) dan 3 *state variable*. Jika matriks A dan B tidak memiliki *full rank* maka persamaan state space $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$ tidak dapat dikendalikan.

Dengan menggunakan Persamaan (2.25), maka diperoleh matriks *controllability* serta matriks *ranknya* sebagai berikut:

$$Co = [B \ AB \ A^2B]$$

$$Co = \begin{bmatrix} 0 & -0.0068 & 0.0346 \\ -0.0068 & 0.0346 & -0.7233 \\ 0.0482 & -0.2472 & 1.7844 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -0.0068 & 0.0346 \\ -0.0068 & 0.0346 & -0.7233 \\ 0.0482 & -0.2472 & 1.7844 \end{bmatrix}$$

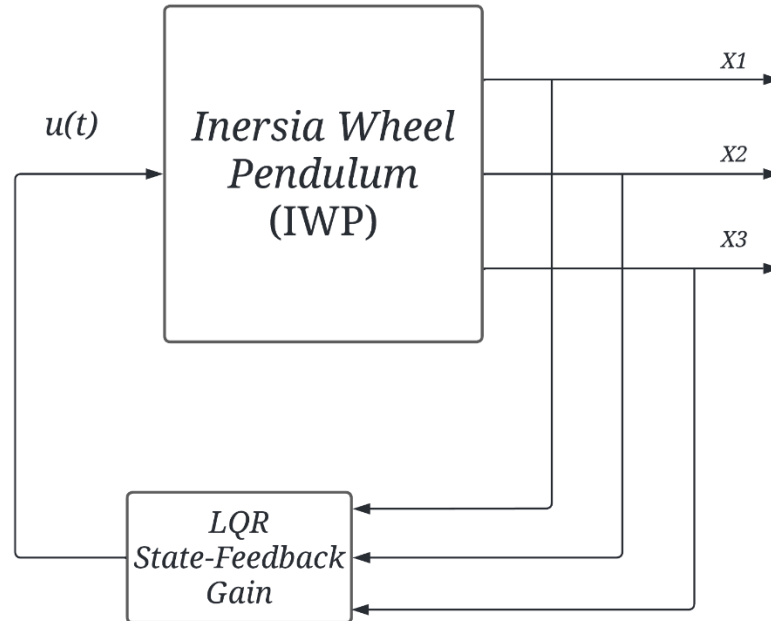
$$\text{rank} [Co] = 3 \quad (3.62)$$

Dari Persamaan (3.62), *rank* dari matriks Co adalah 3 yang mempunyai nilai yang sama dengan ordo dari sistem ($n = 3$). Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa sistem IWP dapat dikendalikan (*controllable*),

3.6 Desain dan Simulasi Sistem Kontrol

Pada Gambar 3.11 menunjukkan blok diagram sistem kontrol dengan menggunakan sistem kontrol LQR dengan nilai *gain* didapat dengan memberikan pembebanan matriks Q dan matriks R sehingga akan mempengaruhi terhadap *output* dan input dari sistem IWP. Dalam menentukan matriks pembebanan Q dan R untuk merancang kontrol LQR, harus mempertimbangkan kemampuan atau spesifikasi dari motor BLDC yang digunakan untuk

memutar roda inersia. Maka dari itu, dalam menentukan pembebanan Q dan R , kemampuan motor BLDC dan inersia komponen IWP menjadi parameter utama yang harus diperhatikan dalam penelitian ini untuk mendapatkan *gain* yang optimum.



Gambar 3.11 Blok Diagram Sistem IWP

3.6.1 *Root Mean Square* untuk Menentukan Pembobotan Matriks Q dan R

Untuk memudahkan dalam menentukan pembobotan matriks Q dan R maka dapat dilakukan dengan membuat *Root Mean Square* (RMS) respons *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \phi]^T$ untuk nilai *gain* (K) yang didapat dari kombinasi pembobotan Q dan R . Secara statistik, *root mean square* (RMS) adalah akar kuadrat dari rata-rata aritmatika kuadrat dari sekelompok nilai. Rumus untuk *Root Mean Square* diberikan di bawah ini untuk mendapatkan nilai RMS dari sekumpulan nilai data. Untuk sekelompok nilai n yang melibatkan $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ adalah sebagai berikut:

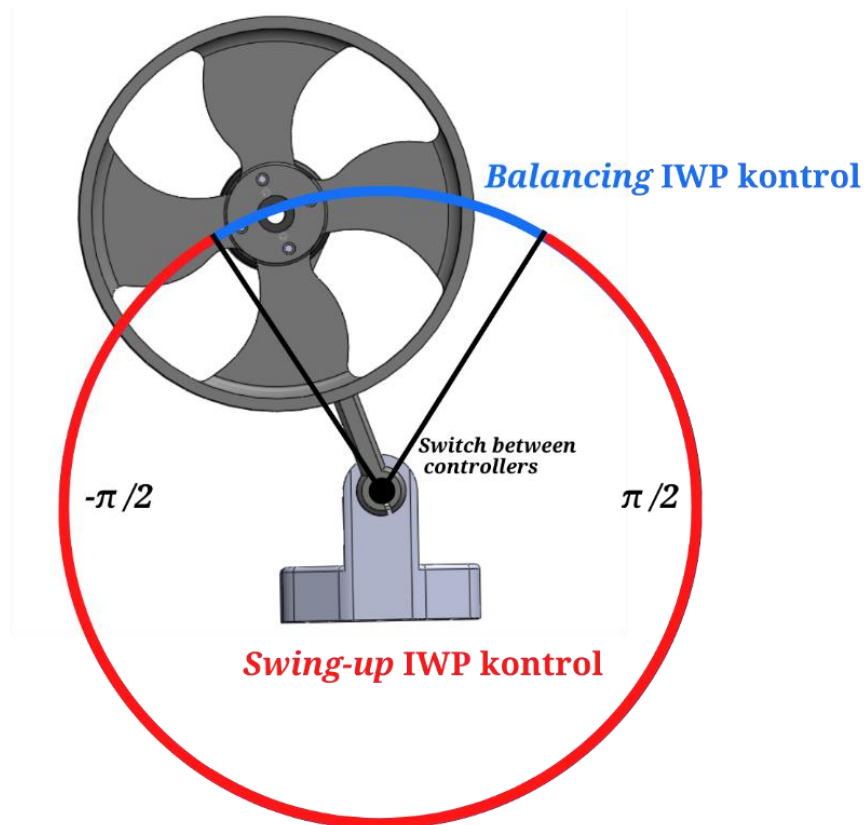
$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \quad (3.62)$$

Dengan dilakukannya RMS terhadap respons *state variable* dengan *gain* (K) yang didapatkan dari kombinasi matriks pembobotan Q dan R maka respons dari *state variable* yang berupa kumpulan data untuk waktu tertentu akan direpresentasikan dalam satu nilai RMS. Selanjutnya akan dianalisis hubungan antara nilai RMS *state variable* sistem IWP yang akan semakin besar apabila kombinasi matriks pembobotan Q dan R juga semakin besar sehingga dari hubungan tersebut dapat ditentukan secara nilai *gain* (K) dari pembobotan Q dan R yang optimal.

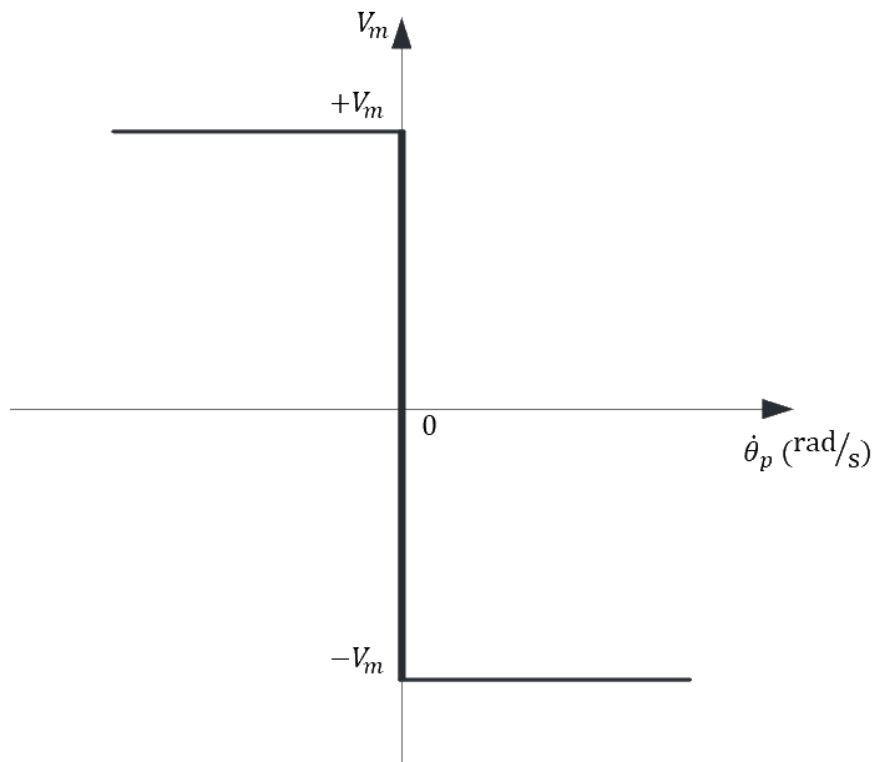
3.6.2 Strategi Ayun Sistem IWP

Kontrol *swing-up* digunakan untuk mengayunkan pendulum dengan memberikan input tegangan (v) ke motor BLDC sehingga terdapat percepatan roda inersia akan menghasilkan torsi putar yang di transmisikan ke pivot pendulum. Pendulum akan terus mengayun sampai

pada batas posisi sudut yang ditentukan. Apabila mencapai batas tersebut maka sistem kontrol akan beralih dari kontrol *swing-up* menjadi sistem *balancing* IWP yang ditunjukkan pada Gambar 3.10. Strategi kontrol *swing-up* digunakan untuk mengayunkan pendulum dengan cepat ke posisi *inverted pendulum* dengan memberikan input tegangan (v) positif dan negatif ke motor BLDC sehingga arah putaran roda inersia akan berubah pada saat notasi (positif atau negatif) dari nilai kecepatan putar pendulum ($\dot{\theta}_p$) berubah dan akan selalu berlawanan arah yang ditunjukkan pada Gambar 3.11. Pada saat kecepatan pendulum mempunyai nilai positif (arah ayunan pendulum *counterclockwise*) maka input voltase negatif diberikan ke motor BLDC sehingga akan memutar roda inersia dengan arah sebaliknya yaitu (*clockwise*) dan sebaliknya apabila kecepatan pendulum mempunyai nilai negatif (arah ayunan pendulum *clockwise*).



Gambar 3.12 Wilayah Operasi dari Strategi Kontrol yang Digunakan

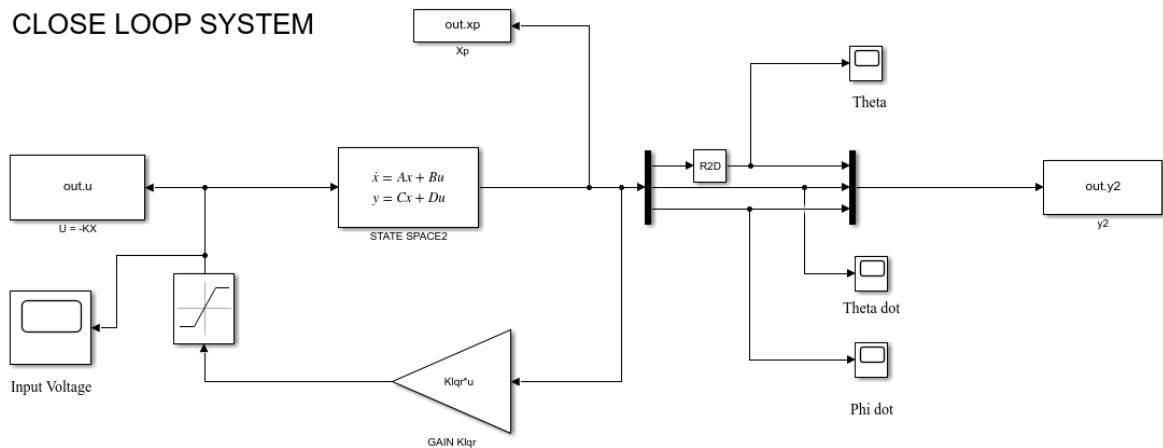


Gambar 3.13 Strategi Kontrol *Swing-Up* IWP

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Desain Sistem Kontrol LQR

Sistem kontrol LQR didesain untuk digunakan pada sistem *Inertia Wheel Pendulum* untuk menstabilisasi pendulum pada posisi vertikal ke atas. Desain IWP yang dilengkapi dengan sistem kontrol LQR diimplementasikan dalam bentuk model simulink yang dapat dilihat pada Gambar 4.1. Sistem kontrol LQR hanya dapat digunakan pada sistem yang dapat dikontrol (*controllable*).



Gambar 4.1 Matlab Simulink untuk Desain Sistem IWP

Untuk sistem ini berdasarkan *state space representation* yang ditunjukkan pada Persamaan (3.58).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 80.87 & 0 & 0.7174 \\ -76.66 & 0 & -5.1250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6.7515 \\ 48.2311 \end{bmatrix} v_a$$

4.1.1 Pengaruh Pembobotan Matriks Q dan R

Metode LQR merupakan salah satu jenis sistem kontrol optimal dimana akan dicari nilai *gain* K optimal yang mampu menghasilkan nilai fungsi biaya (*J*) minimum. Perhitungan *gain* K dilakukan dengan menggunakan persamaan Riccati seperti ditunjukkan pada Persamaan (2.38). Dalam penyelesaian persamaan tersebut perlu dilakukan pembobotan matriks Q dan R terlebih dahulu.

Ada beberapa ketentuan dalam pembobotan tersebut, dimana Matriks Q adalah matriks simetris, semidefinit positif dan real ($Q > 0$). Dalam sistem ini, matriks Q merupakan matriks berordo (3x3) yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix}$$

Matriks Q merupakan matriks diagonal dengan komponen-komponen q_n . Sedangkan matriks R adalah matriks pembobot input dengan persyaratan: matriks simetris, definit positif dan real ($R > 0$) serta memiliki ordo (1x1). Matriks R dapat ditulis sebagai berikut:

$$R = [r]$$

Matriks R merupakan matriks diagonal dengan komponen r . Matriks pembobotan Q dan R pada sistem kontrol LQR sangat penting dimana pembobotan tersebut akan berpengaruh secara langsung pada hasil simulasi. Pada sistem IWP, terdapat 4 *variable* yang membentuk matriks pembobotan, yaitu q_1, q_2, q_3 dan r . *Variable* q_1, q_2 dan r sangat berpengaruh terhadap respons *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \ddot{\theta}]^T$ serta input voltase (u). Oleh karena itu nilai dari q_3 diberikan nilai konstan sebesar 0.0001. Dalam mencari pembobotan matriks Q dan R yang optimal, pertama – tama dapat dilakukan dengan menganalisis pengaruh dari besarnya pembobotan matriks Q dan R terhadap respons *state variable*. Dalam menganalisis pengaruh pembobotan matriks Q maka dilakukan pemberian nilai konstan terhadap matriks R sehingga variasi pembobotan nilai q_1, q_2 dan r dengan akan dilakukan dengan nilai sebagai berikut:

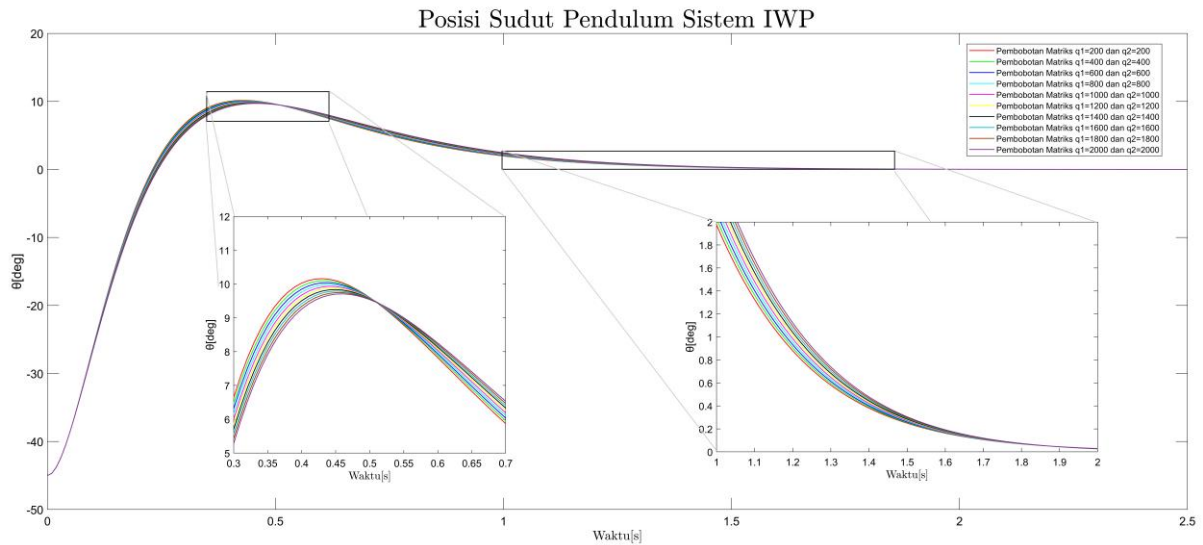
$$R = [1000]$$

$$Nu = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$$q_1 = 200j ; 1 \leq j \leq 10$$

$$q_2 = 200k ; 1 \leq k \leq 10$$

$$q_3 = 0.0001$$



Gambar 4.2 Respons Posisi Sudut Pendulum (θ) Terhadap Variasi Pembobotan Matriks Q Pada Sudut Awal 45°

Pada Gambar 4.2 ditunjukkan respons posisi sudut pendulum (θ) terhadap variasi pembobotan besar nilai matriks Q pada sudut awal pendulum 45° dengan matriks R bernilai konstan. Dapat ditunjukkan bahwa semakin besar nilai variasi pembobotan Q maka *transient response* posisi sudut pendulum (θ) akan semakin lambat, namun sistem kontrol dapat menyeimbangkan pendulum pada posisi vertikal ke atas. Semakin besar nilai matriks Q maka pengaruh terhadap *rise time, %overshoot, settling time, peak time* dan *steady state error* menunjukkan respon yang semakin lambat, namun sangat kecil selisihnya seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.2. Dalam mendesain gain (K) untuk dapat sesuai dengan parameter performansi sistem IWP maka penentuan pembobotan matriks Q ini sangat penting untuk mencapai *transient response* yang ingin dicapai.

Tabel 4.1 *Transient Response* Posisi Sudut Pendulum (θ) Terhadap Pembobotan Matriks Q

No	Pembobotan Matriks			Root Mean Square	Settling time (s)	Rise Time (s)	%Overshoot	Peak	Peak Time (s)	SSE
	q_1	q_2	r							
1	200	200	1000	6.5662	1.1946	0.1598	22.56	10.15	0.43	6.6519e-08
2	400	400		6.5703	1.2016	0.1607	22.43	10.0957	0.43	4.9172e-08
3	600	600		6.5746	1.2084	0.1617	22.3	10.0363	0.44	3.3585e-08
4	800	800		6.5789	1.2152	0.1627	22.18	9.9836	0.44	1.9886e-08
5	1000	1000		6.5832	1.2218	0.1636	22.06	9.9309	0.44	8.2043e-09
6	1200	1200		6.5877	1.2283	0.1646	21.95	9.8799	0.44	1.3249e-09
7	1400	1400		6.5921	1.2347	0.1655	21.85	9.8351	0.45	8.5623e-09
8	1600	1600		6.5967	1.2410	0.1664	21.75	9.7902	0.45	1.3363e-08
9	1800	1800		6.6013	1.2472	0.1673	21.65	9.7459	0.45	1.5575e-08
10	2000	2000		6.6059	1.2533	0.1682	21.57	9.7079	0.46	1.5040e-08

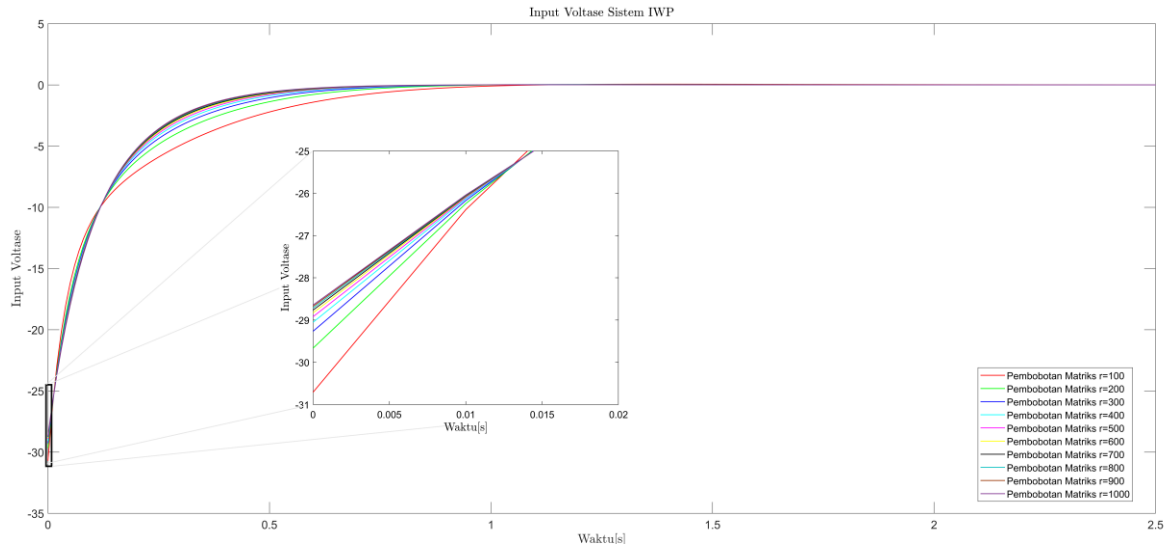
Pada Tabel 4.1 ditunjukkan besaran dari *transient response* seperti *rise time*, *%overshoot*, *settling time*, *peak time* dan *steady state error* posisi sudut pendulum (θ) pada saat diberikan sudut awal sebesar 45° terhadap pembobotan matriks Q. *Transient response* menunjukkan hasil yang semakin lambat seiring naiknya pembobotan matriks Q ini sesuai dengan Gambar 4.2. Metode *Root Mean Square* (RMS) digunakan untuk mendapatkan satu nilai RMS dari sekumpulan nilai data posisi sudut pendulum. Pada Tabel 4.1 terdapat kolom RMS yang menunjukkan besaran nilai RMS untuk setiap variasi pembobotan matriks Q, semakin besar nilai RMS maka *transient response* untuk respons posisi pendulum (θ) akan semakin lambat. Hal ini disebabkan semakin cepat respons mencapai *set point* atau output yang diinginkan maka jumlah data yang akan diakar kuadrat dari rata-rata aritmatika kuadrat akan semakin sedikit sehingga nilainya yang akan dihasilkan akan lebih kecil dibanding dengan data dari respons yang lambat untuk mencapai *set point* atau output (jumlah data akan bertambah).

Dalam menganalisis pengaruh pembobotan matriks R maka dilakukan pemberian nilai konstan terhadap matriks Q sehingga variasi pembobotan nilai q_1 , q_2 dan r dengan akan dilakukan dengan nilai sebagai berikut:

$$R = [r]; 100 \leq r \leq 1000$$

$$Nu = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$



Gambar 4.3 Respons Input voltase (u) Sistem IWP Terhadap Variasi Pembobotan Matriks R Pada Sudut Awal 45°

Tabel 4.2 Transient Response Input Voltase Sistem IWP Terhadap Pembobotan Matriks R

No	Pembobotan Matriks			Root Mean Square	Initial input (V)	Settling time (s)	Rise Time (s)	%Overshoot	Peak	Peak Time (s)	SSE
	q_1	q_2	r								
1	1000	1000	100	3.2686	30.708	0.7583	0.4147	0.188127	0.05777	1.380	2.8470e-07
2			200	3.2014	29.666	0.6444	0.3423	0.121317	0.03599	1.250	5.7343e-09
3			300	3.1826	29.266	0.5942	0.3132	0.089182	0.0261	1.190	2.5811e-09
4			400	3.1744	29.053	0.5648	0.2977	0.070217	0.0204	1.170	1.9256e-09
5			500	3.1700	28.921	0.5453	0.2882	0.057744	0.0167	1.160	1.0894e-09
6			600	3.1673	28.831	0.5313	0.2819	0.048455	0.01397	1.150	5.3477e-10
7			700	3.1655	28.766	0.5208	0.2774	0.041612	0.01197	1.150	1.8688e-10
8			800	3.1643	28.716	0.5126	0.2740	0.036426	0.01046	1.150	3.2627e-11
9			900	3.1634	28.6769	0.5060	0.2713	0.032012	0.00918	1.140	1.7309e-10
10			1000	3.1627	28.6454	0.5005	0.2691	0.028556	0.00818	1.130	2.6392e-10

Pada Gambar 4.3 ditunjukkan respons input voltase (u) sistem IWP terhadap variasi pembobotan besar nilai matriks R pada sudut awal pendulum 45° dengan matriks Q bernilai konstan. Dapat ditunjukkan bahwa semakin besar nilai variasi pembobotan R maka *transient response* posisi sudut pendulum (θ) akan semakin cepat, namun sistem kontrol dapat menyeimbangkan pendulum pada posisi vertikal ke atas. Semakin besar nilai matriks R maka pengaruh input awal yang diberikan terhadap sistem akan semakin kecil, namun *rise time*, *%overshoot*, *settling time*, *peak time* dan *steady state error* menunjukkan respon yang

semakin cepat, namun sangat kecil selisihnya seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.3. Dalam mendesain gain (K) untuk dapat sesuai dengan parameter perfomansi sistem IWP maka penentuan pembobotan matriks R ini sangat penting untuk mencapai *transient response* yang ingin dicapai dengan input awal yang semakin kecil, namun *transient response* akan semakin cepat.

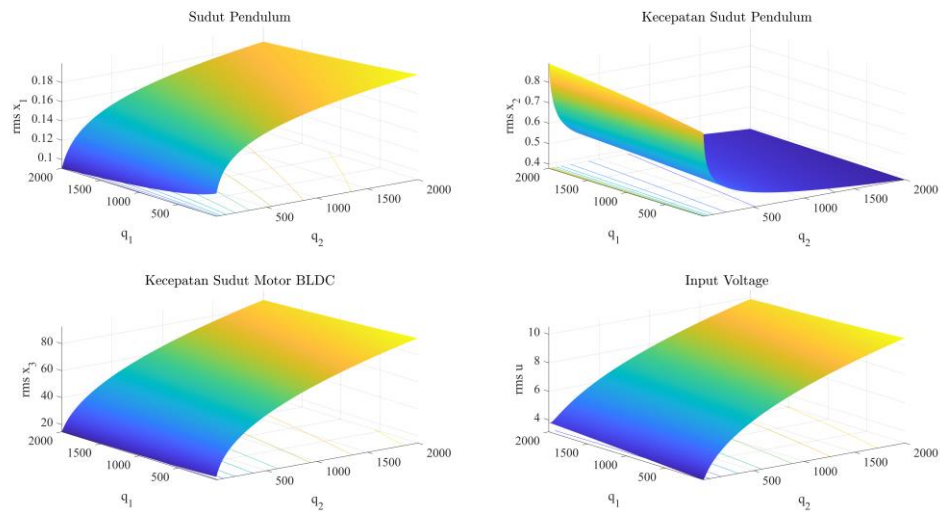
Pada Tabel 4.2 ditunjukkan besaran dari *transient response* seperti *rise time*, *%overshoot*, *settling time*, *peak time* dan *steady state error* posisi sudut pendulum (θ) pada saat diberikan sudut awal sebesar 45° terhadap pembobotan matriks R . *Transient response* menunjukkan hasil yang semakin cepat seiring naiknya pembobotan matriks R ini sesuai dengan Gambar 4.3. Pada Tabel 4.2 terdapat kolom RMS yang menunjukkan besaran nilai RMS untuk setiap variasi pembobotan matriks R , semakin besar nilai RMS maka *transient response* untuk respons posisi pendulum (θ) akan semakin lambat. Hal ini disebabkan semakin cepat respons mencapai *set point* atau output yang diinginkan maka jumlah data yang akan diakar kuadrat dari rata-rata aritmatika kuadrat akan semakin sedikit sehingga nilainya yang akan dihasilkan akan lebih kecil dibanding dengan data dari respons yang lambat untuk mencapai *set point* atau output (jumlah data akan bertambah).

4.1.2 Pemilihan Nilai Gain K

Penentuan pembobotan matriks Q dan R berpengaruh terhadap *transient response* dari sistem IWP oleh karena itu dibutuhkan suatu metode yang digunakan untuk mengevaluasi untuk setiap kombinasi matriks Q dan R . Metode yang digunakan yaitu *Root Mean Square* (RMS) yang sebelumnya sudah di analisis bahwa untuk kombinasi pembobotan matriks Q dengan matriks R bernilai konstan, semakin besar matriks Q maka semakin besar pula nilai RMS yang menunjukkan *transient response* dari sistem IWP akan semakin lambat. Kemudian, untuk kombinasi pembobotan matriks R dengan matriks Q bernilai konstan dapat dilihat bahwa semakin besar matriks R maka semakin kecil nilai RMS yang menunjukkan *transient response* dari sistem IWP akan semakin cepat. Untuk mendapatkan nilai gain (K) yang optimal maka akan dilakukan plottingan grafik RMS untuk semua *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ serta input voltase (u) dengan sudut awal 45° dengan konfigurasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} R &= [1] \\ Nu &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ q_1 &= 10j ; 1 \leq j \leq 200 \\ q_2 &= 1k ; 1 \leq j \leq 2000 \\ q_3 &= 0.0001 \end{aligned}$$

Maka, didapatkan grafik RMS sebagai berikut:



Gambar 4.4 Pengaruh Pembobotan q_1 dan q_2 dengan $r = 1$ terhadap RMS *State Variable* Pada Sudut Awal 45°

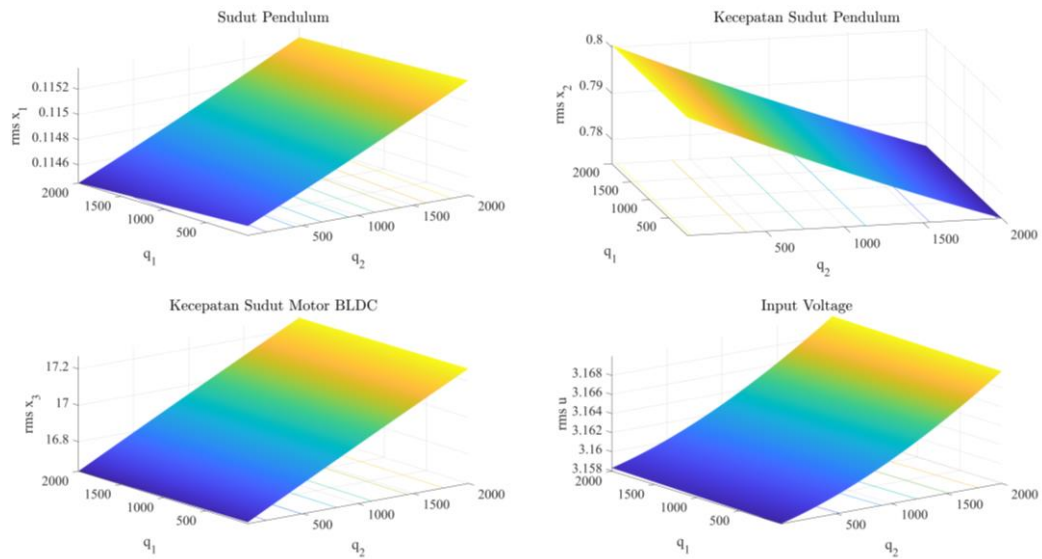
Pada Gambar 4.4 ditunjukkan RMS dengan pembobotan q_1 dan q_2 terhadap *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ serta input voltase (u) pada sudut awal pendulum 45° . Pada RMS posisi sudut pendulum (θ) dan kecepatan sudut motor BDLC ($\dot{\theta}$), apabila pembobotan q_1 dan q_2 masing – masing memiliki nilai yang besar maka *transient response* posisi sudut pendulum (θ) dan kecepatan sudut motor BDLC ($\dot{\theta}$) akan semakin lambat untuk mencapai ke posisi vertikal ke atas. Namun, apabila pembobotan q_1 dan q_2 bernilai besar maka *transient response* kecepatan sudut pendulum ($\dot{\theta}$) akan semakin cepat. Pada RMS input voltase (u) dapat dilihat apabila pembobotan q_1 dan q_2 bernilai besar maka input voltase (u) yang dibutuhkan sistem untuk menyeimbangkan pendulum membutuhkan nilai besar dapat dilihat pada Gambar 4.4. Oleh karena itu, harus ditinjau dengan spesifikasi dari motor yang akan digunakan. Penentuan pembobotan Q yang mempertimbangkan *state variable* dan input voltase yang mempunyai besar sebagai berikut:

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

Kemudian, mencari nilai matriks R yang optimal dengan konfigurasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R &= [1000] \\ Nu &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ q_1 &= 10^j ; 1 \leq j \leq 200 \\ q_2 &= 1^k ; 1 \leq k \leq 2000 \\ q_3 &= 0.0001 \end{aligned}$$

Maka, didapatkan grafik RMS sebagai berikut:



Gambar 4.5 Pengaruh Pembobotan q_1 dan q_2 dengan $r = 1000$ terhadap RMS State Variable Pada Sudut Awal 45°

Pada Gambar 4.5 ditunjukkan RMS dengan pembobotan q_1 dan q_2 terhadap *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ serta input u pada sudut awal pendulum 45° . Dari gambar tersebut diketahui bahwa nilai RMS *state variable* mengalami penurunan pada range q_1 dan q_2 apabila dibandingkan dengan Gambar 4.4. Hal ini terjadi matriks R mempengaruhi input yang masuk ke dalam sistem IWP, semakin besar matriks R input voltase yang dapat diberikan kepada sistem IWP akan semakin kecil sehingga semua nilai RMS *state variable* akan semakin berkurang. Nilai optimal pada sistem IWP tercapai saat diperoleh hasil sudut pendulum (θ) dan input (u) minimum. Dari proses pembobotan matriks Q dan R tersebut maka digunakan matriks sebagai berikut:

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$R = [1000]$$

Untuk *feedback gain* K matrix didapatkan dengan Persamaan (2.28). Namun, sebelum bisa mendapatkan nilai K, Matriks P terlebih dahulu perlu dievaluasi dengan menggunakan Persamaan (2.27). Selanjutnya nilai dari matriks pembobot dan matriks P digunakan untuk mencari nilai *gain* K. Dalam menghitung nilai *gain* digunakan *software* MATLAB untuk membantu dalam perhitungannya. Diperoleh nilai *gain* K sebagai berikut:

$$K = [36.8242 \quad 4.4312 \quad 0.2125]$$

Dengan performansi sebagai berikut:

Tabel 4.3 Performansi Hasil Simulasi Posisi Sudut Pendulum (θ) Sistem IWP

No	Pembobotan Matriks		Settling time (s)	Rise Time (s)	%Overshoot	Peak	Peak Time (s)	SSE
	Q	R						

1	$\begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$	1000	1.2218	0.1636	22.0686	9.9309	0.44	8.2043e-09
---	--	------	--------	--------	---------	--------	------	------------

Berdasarkan Tabel 4.3 performansi hasil simulasi posisi sudut pendulum (θ) sistem IWP dengan gain (K) yang dapat sudah masuk dalam parameter performansi yang sudah ditentukan diawal. Oleh karena itu, nilai gain ini akan digunakan pada percobaan dan akan dibandingkan hasilnya dengan hasil simulasi sistem IWP.

4.1.3 Analisis Karakteristik *Closed-loop* IWP System

Analisis stabilitas sistem dilakukan dengan metode analissi *eigenvalue*. Nilai eigen dapat dicari secara sederhana dengan menggunakan perintah Matlab ($\lambda = eig(A - Bu.K)$). *Poles* atau nilai eigen dari *open-loop* IWP system yaitu:

$$\lambda = \begin{bmatrix} -15.4316 + 0.0000i \\ -4.6805 + 1.1777i \\ -4.6805 - 1.1777i \end{bmatrix}$$

Nilai *eigenvalue* negatif dapat dikatakan bahwa sistem tersebut asimtotis stabil, karenanya sistem tersebut dapat dikatakan *bounded-input, bounded output stable*. Dengan menggunakan Persamaan (2.25), maka diperoleh matriks *controllability* matriks *ranknya* sebagai berikut:

$$Co = \begin{bmatrix} 0 & -0.0007 & 0.0167 \\ -0.0007 & 0.0167 & -0.3017 \\ 0.0048 & -0.1196 & 1.8173 \end{bmatrix}$$

$$rank \begin{bmatrix} 0 & -0.0007 & 0.0167 \\ -0.0007 & 0.0167 & -0.3017 \\ 0.0048 & -0.1196 & 1.8173 \end{bmatrix}$$

$$rank [Co] = 3$$

Dari persamaan diatas *rank* dari matriks Co adalah 3 yang mempunyai nilai yang sama dengan ordo dari sistem ($n = 3$). Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa sistem IWP dapat dikendalikan (*controllable*).

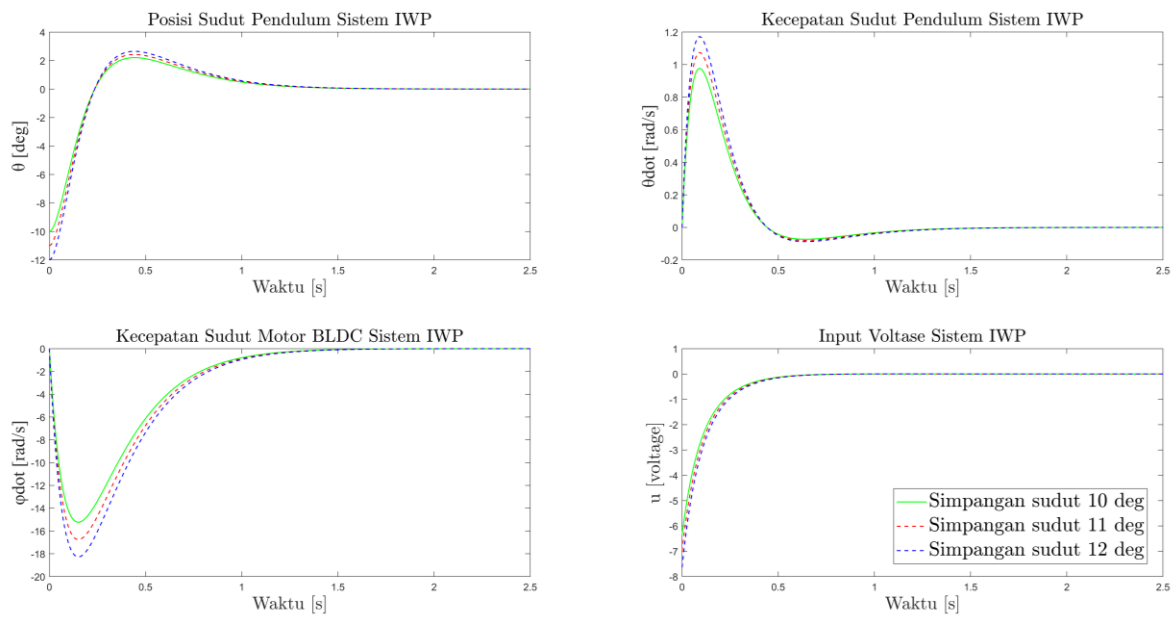
4.2 Simulasi Sistem IWP dengan Simulink

Model nonlinear sistem IWP ditunjukkan pada Gambar 4.1 yang dibuat menggunakan Simulink. Persamaan *state space* yang telah diturunkan seperti ditunjukkan pada Persamaan (3.58) digunakan untuk mencari *gain* dari sistem kontrol LQR yang diterapkan. *Gain* tersebut kemudian diaplikasikan pada sistem nonlinear IWP untuk mengetahui perilaku atau respons dari *state variable* pada sistem dinamis IWP. Simulasi dilakukan di MATLAB dan Simulink dengan sistem kontrol yang digunakan yaitu LQR dengan variasi sudut awal 10° , 11° , dan 12° . Kemudian di analisis hubungan antara yang diberikan terhadap respons *state variable* sistem IWP sampai sistem kembali stabil pada posisi vertikal ke atas. Simulasi selanjutnya dilakukan untuk mengetahui berapa sudut awal maksimum sampai input voltase *saturasi*. Pada model blok diagram yang telah dibuat, input voltase (u) sebelumnya akan dibatasi

outputnya (saturasi) dengan batas atas dan bawah yang merupakan *supply voltage limit* dikali 0.7. Angka ini didapat karena melihat perilaku daripada motor BLDC yang digunakan.

$$u = \pm 8.4 V$$

Dimana *supply voltage limit* adalah batas *voltase* yang masuk ke dalam kontroller mempunyai nilai 12 volt. Penentuan nilai maksimum pada permasalahan *saturated* input yaitu menyesuaikan dengan *voltase* motor BLDC yang digunakan oleh sistem IWP. Berikut hasil simulasi model nonlinear sistem IWP menggunakan Simulink yang telah dilakukan.



Gambar 4.6 Respons *State Variable* Sistem IWP saat Diberikan Sudut Awal $10^\circ, 11^\circ$, dan 12°

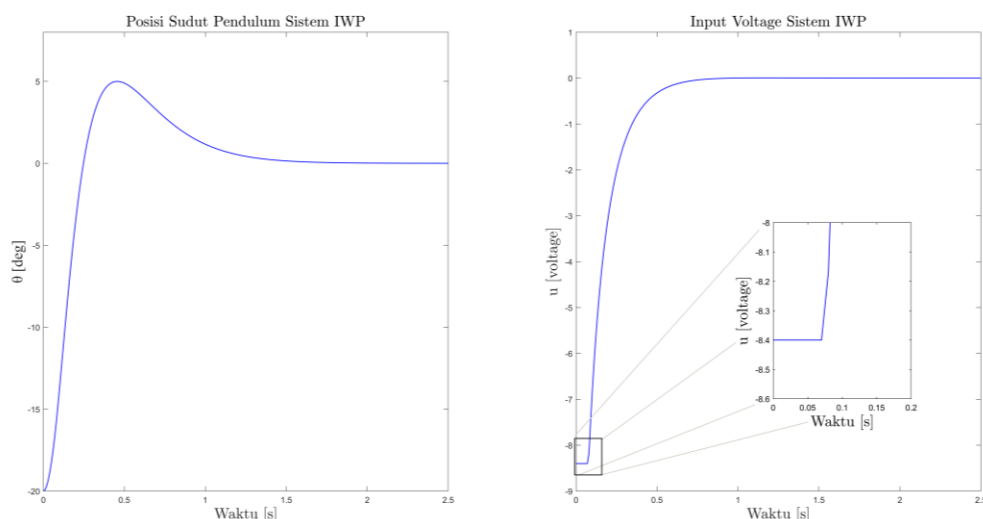
Pada Gambar 4.6 ditunjukkan respons *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ serta input voltase (u) sistem IWP yang dihasilkan dari pengaplikasian sistem kontrol LQR dengan input yang belum dibatasi (*unsaturated*) dengan kondisi awal *state variable* sebagai berikut:

$$[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [n \ 0 \ 0]^T; \quad n = \{10^\circ, 11^\circ, 12^\circ\}$$

Pada gambar di atas menunjukkan bahwa sistem kontrol LQR mampu membawa sistem IWP pada ke posisi vertikal ke atas pada saat diberikan variasi sudut awal sebesar 10° , 11° , dan 12° . Semakin besar sudut awal yang diberikan, maka input awal yang masuk ke sistem akan semakin besar dan *transient response* posisi sudut pendulum (θ) memiliki nilai besaran yang sama yang ditunjukkan pada Tabel 4.4, namun memiliki selisih *Steady State Error* (SSE) kecil antara ketiga respons dengan sudut awal yang berbeda. Respons *state variable* kecepatan sudut pendulum ($\dot{\theta}$) dan kecepatan sudut motor BLDC ($\dot{\phi}$) memiliki *trend* respons yang sama pada saat sistem IWP mengembalikan posisi ke vertikal ke atas. Input voltase yang diberikan kepada motor BLDC masih di bawah input saturasinya sehingga grafik respons input voltase tidak terdapat pada nilai yang konstan saat waktu tertentu.

Tabel 4.4 Performa dari Hasil Simulasi Posisi Sudut Pendulum Sistem IWP dengan Variasi Sudut Awal

	Sudut Awal (θ)	Initial input (V)	Settling time (s)	Rise Time (s)	%Overshoot	Peak	Peak Time (s)	SSE
Posisi Sudut Pendulum Sistem IWP	10°	6.366	1.2218	0.1636	22.068	2.2068	0.440	1.8232e-09
	11°	7.002	1.2218	0.1636	22.0682	2.4275	0.440	2.0055e-09
	12°	7.638	1.2218	0.1636	22.0683	2.6482	0.440	2.1878e-09



Gambar 4.7 Respons Posisi Sudut Pendulum (θ) dan Input Voltase (u) Tersaturasi Terhadap Variasi Sudut Awal 20°

Pada Gambar 4.7 ditunjukkan respons *state variable* posisi sudut pendulum (θ) dan input voltase (u) sistem IWP dengan input yang dibatasi (*saturated*) dengan kondisi awal *state variable* sebagai berikut:

$$[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [20^\circ \ 0 \ 0]^T$$

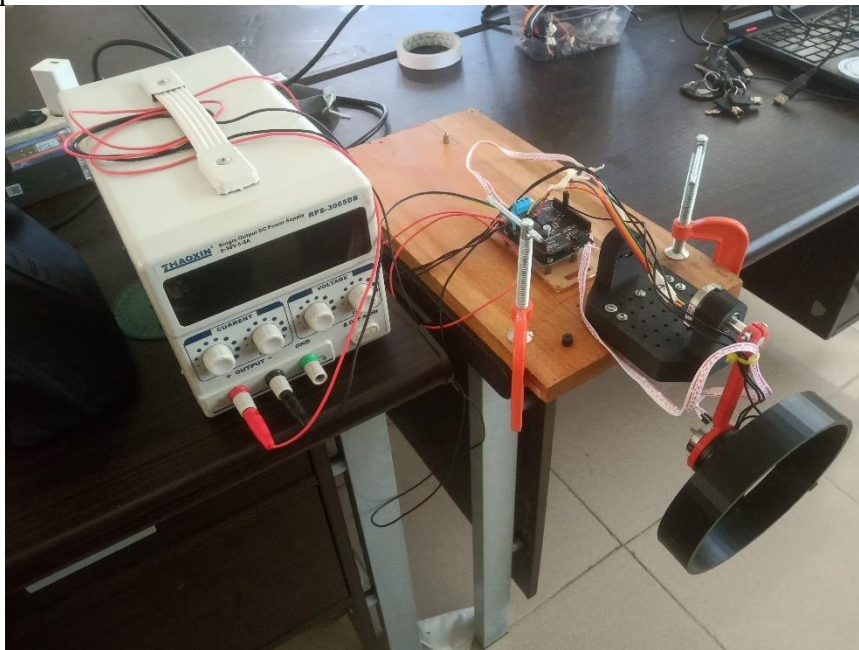
Pada gambar di atas menunjukkan bahwa saat sistem IWP diberikan sudut awal sebesar 20°, input voltase yang masuk ke dalam sistem akan memiliki nilai yang sama yaitu sebesar 8.4 V selama kurang lebih 0.075 detik dan berhasil menyeimbangkan sistem IWP pada posisi vertikal ke atas. Input voltase akan memiliki nilai konstan sampai pada waktu tertentu apabila input (u) pada sistem melebihi batas saturasi yang diberikan. Hal ini dapat dilihat jelas pada Gambar 4.7 dimana pada saat sistem IWP diberikan simpangan sebesar 20° maka input voltase awal akan dibatasi nilainya. Hasil respons sistem dengan simpangan 20° menunjukkan bahwa sistem IWP masih dapat kembali ke posisi vertikal ke atas yang ditunjukkan pada Tabel 4.5.

Tabel 4.5 Performa dari Hasil Simulasi Sistem IWP dengan Sudut Awal 20°

	Sudut Awal (θ)	Initial input (V)	Settling time (s)	Rise Time (s)	%Overshoot	Peak	Peak Time (s)	SSE
Posisi Sudut Pendulum Sistem IWP	20°	8.4	1.2658	0.1650	24.98	4.9971	0.460	4.4546e-09
Input Voltase Sistem IWP	20°	8.4	0.5860	0.2811	24.98	0.004138	1.17	1.4307e-10

4.3 Percobaan Prototipe Sistem IWP dengan Kontrol LQR

Sistem kontrol LQR yang telah didesain akan diimplementasi pada prototipe untuk melihat apakah sistem pendulum roda inersia dapat kembali ke posisi vertikal ke atas dengan menggunakan kontrol LQR yang sebelumnya telah didesain dan bagaimana respons sistem untuk setiap *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ dari sistem IWP. Prototipe Sistem IWP dapat dilihat pada Gambar 4.8.



Gambar 4.8 Prototipe Sistem IWP

Sistem kontrol LQR yang telah didesain digunakan pada prototipe sistem IWP untuk menstabilisasi pendulum pada posisi vertikal ke atas. Dengan nilai *gain* K sebagai berikut:

$$K = [36.8242 \quad 4.4312 \quad 0.2125]$$

Percobaan sistem kontrol stabilisasi dilakukan dengan dua perlakuan yaitu simpangan dan input voltase. Nilai simpangan yang digunakan yaitu

$$\theta_{\text{simpangan}} = 10^\circ \rightarrow 13^\circ$$

Dengan saturasi input voltase yang merupakan *supply voltage limit* dikali 0.7. Angka yang diberikan sebagai berikut:

$$u = \pm 8.4 V$$

Dimana *supply voltage limit* mempunyai nilai 12 volt.

4.3.1 Verifikasi Sensor Encoder

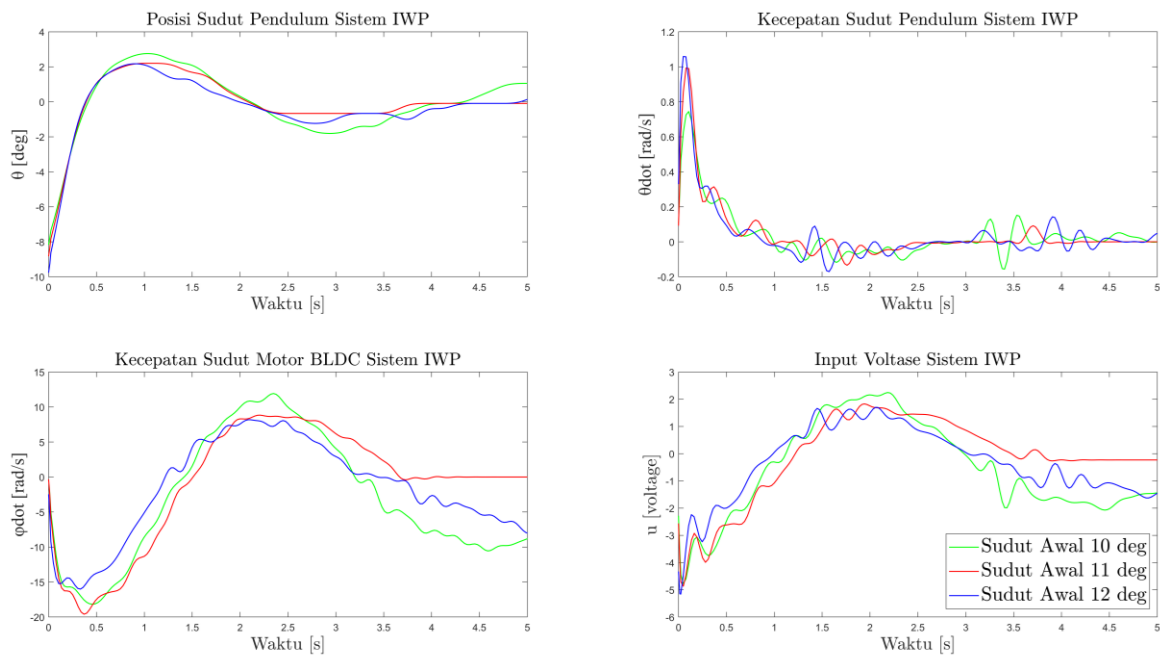
Pada verifikasi sensor *encoder* dilakukan pengamatan terhadap kecepatan motor BLDC menggunakan *tachometer* dan sensor *encoder*, dimana pembacaan kecepatan motor BLDC yang ditangkap oleh *tachometer* akan dibandingkan dengan pembacaan kecepatan motor BLDC yang ditangkap oleh sensor *encoder*. Dari data tersebut akan dicari persentase kesalahan pembacaan kecepatan motor BLDC dari sensor *encoder* terhadap *tachometer*. Hasil verifikasi sensor *encoder* dapat dilihat pada Tabel 4.2. Pada Tabel 4.6 pembacaan kecepatan putar motor BLDC dengan sensor *encoder* dan *tachometer* memiliki selisih yang kecil sehingga dalam membuat prototipe sistem IWP, sensor *encoder* AMT 103-V yang digunakan sebagai *feedback state variable* dapat digunakan.

Tabel 4.6 Hasil Pembacaan Sensor Encoder dan Tachometer

No	Kecepatan Motor BLDC (rad/s)		Selisih	%Kesalahan
	Pembacaan Encoder selama 30 detik	Pembacaan Tachometer		
1	126.35	127.65	1.3042	1.021637366
2	116.85	117.81	0.9590	0.814029488
3	106.55	107.65	1.1000	1.021830005
4	94.65	95.92	1.2700	1.324020017
5	84.80	85.97	1.1700	1.360939863

4.3.2 Percobaan Sistem Kontrol kepada Prototipe Sistem IWP

Prototipe sistem IWP dibuat berdasarkan model 3D menggunakan *software* Solidwork dengan parameter – parameter yang ditunjukkan pada Tabel 3.4. Percobaan dilakukan dengan memberikan simpangan pada pendulum sehingga sensor *encoder* pada pendulum membaca posisi sudut pendulum (θ) dan kecepatan sudut pendulum ($\dot{\theta}$) dan sensor *encoder* pada motor BLDC membaca kecepatan sudut motor BLDC ($\dot{\phi}$). Ketika posisi sudut pendulum menunjukkan posisi sudut awal yang ditentukan maka kontroller dalam hal ini Arduino UNO R3 akan memulai kontrol stabilitasi dengan metode LQR yang telah dirancang menggunakan Arduino IDE. Dari sistem akan mendeteksi adanya *error* yang dinyatakan dalam posisi sudut, dari *error* tersebut akan masuk dalam kontroller dan akan memberikan input voltase kepada motor BLDC sehingga dari putaran roda inersia digunakan untuk menyeimbangkan prototipe Sistem IWP.



Gambar 4.9 Respons *State Variable* Sistem IWP saat Diberikan Sudut Awal 10°, 11°, dan 12°

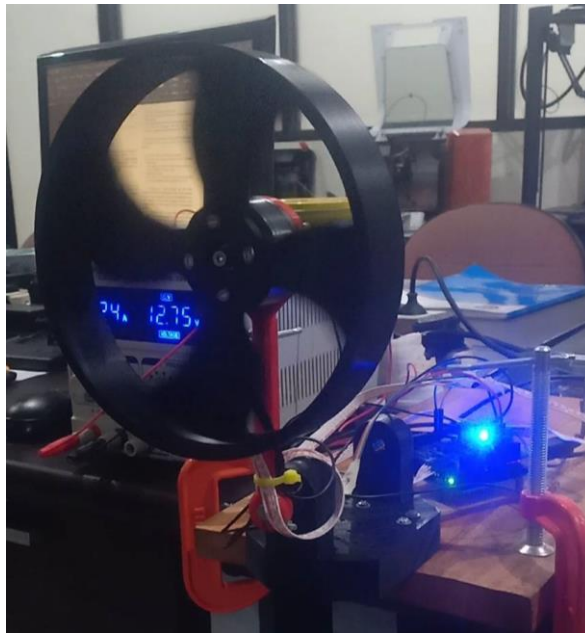
Pada Gambar 4.9 menunjukkan respons *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ serta input voltase (u) sistem IWP yang diterapkan sistem kontrol LQR pada prototipe sistem IWP dengan kondisi awal *state variable* sebagai berikut:

$$[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [n \ 0 \ 0]^T; \quad n = \{10^\circ, 11^\circ, 12^\circ\}$$

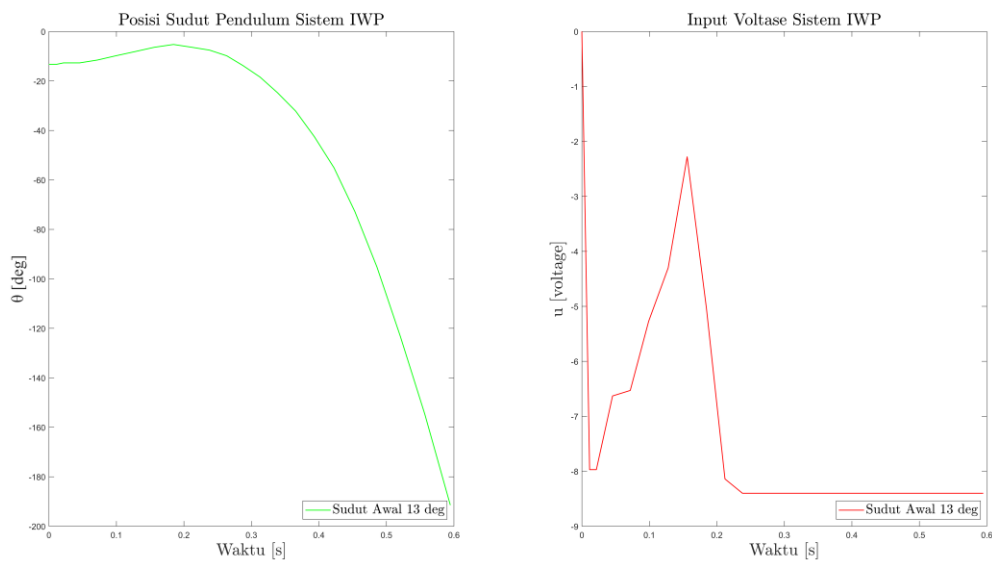
Respons hasil percobaan prototipe sistem IWP menunjukkan bahwa sistem kontrol LQR mampu membawa prototipe sistem IWP bergerak ke posisi vertikal ke atas saat diberikan sudut awal sebesar 10°, 11°, dan 12° dengan input voltase tidak terbatas (*unsaturated*) yang ditunjukkan pada Gambar 4.10. Semakin besar sudut awal yang diberikan maka input voltase (u) awal yang masuk ke sistem akan semakin besar dan respons yang didapatkan mempunyai *trend* garis yang serupa saat sistem IWP mengembalikan posisi ke vertikal ke atas. *Transient response* posisi sudut pendulum sistem IWP dengan sudut awal 11° dan 12° memiliki nilai dengan selisih kecil kecuali pada *settling time* yang memiliki selisih yang besar sedangkan *transient response* sistem IWP dengan sudut awal 10° tidak dapat dicari nilai *settling time* karena respons mempunyai SSE lebih besar daripada *setpoint*. Hal ini ditunjukkan pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Performa dari Hasil Percobaan Sistem IWP dengan Variasi Sudut Awal

	Sudut Awal (θ)	Initial input (V)	Settling time (s)	Rise Time (s)	%Overshoot	Peak	Peak Time (s)	SSE
Posisi Sudut Pendulum Sistem IWP	10°	6.170	NaN	0.3272	27.54	2.7540	1.0207	0.4818
	11°	6.770	3.7684	0.3103	22.068	2.2006	1.0268	0.0912
	12°	7.560	10.2866	0.2977	22.0683	2.1732	0.9061	0.0912



Gambar 4.10 Posisi Vertikal ke Atas Sistem IWP saat Percobaan



Gambar 4.11 Respons *State Variable* Sistem IWP saat Diberikan Sudut Awal 13°

Pada Gambar 4.11 menunjukkan respons *state variable* posisi sudut pendulum (θ) dan input voltase (u) sistem IWP saat diberikan sudut awal 13° dengan kondisi awal *state variable* sebagai berikut:

$$[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [13^\circ \ 0 \ 0]^T$$

Respons di atas menunjukkan bahwa sistem IWP tidak dapat membawa prototipe bergerak ke posisi vertikal ke atas saat diberikan sudut awal sebesar 13° dengan input voltase tidak terbatas (*unsaturated*). Pada gambar di atas terlihat input voltase awal (u) yang masuk ke dalam sistem IWP awalnya dapat membawa pendulum menuju titik kesetimbangannya, namun saat posisi sudut pendulum mencapai sudut 5.2° , pendulum kemudian jatuh dan tidak

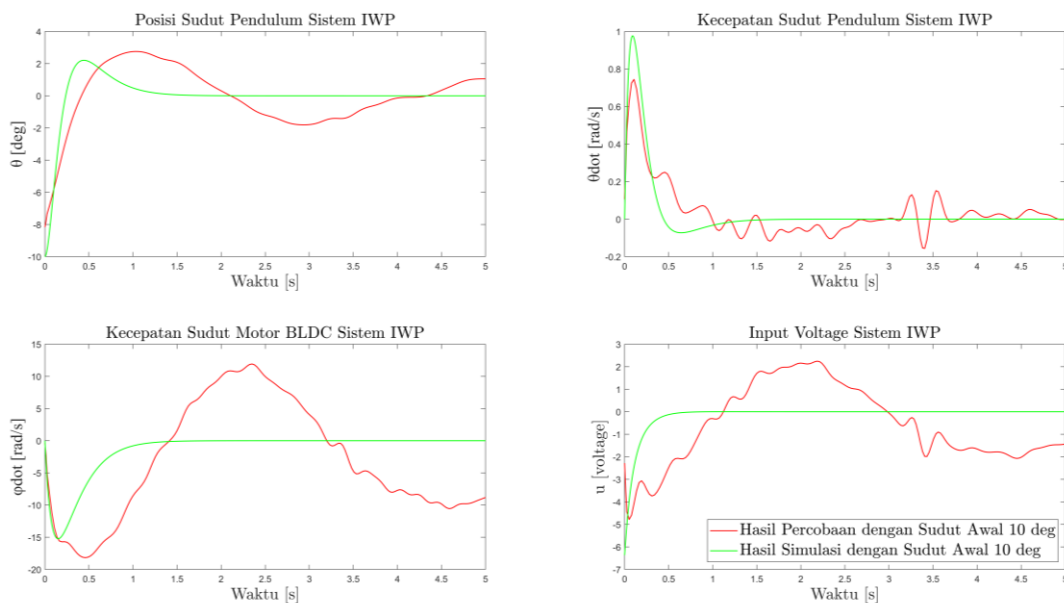
dapat stabil pada posisi vertikal ke atas. Pada posisi sudut pendulum bergerak jatuh, seketika input voltase (u) memberikan input maksimal 8.4 V untuk mencoba membawa kembali pendulum ke posisi vertikal ke atas, namun tidak berhasil. Pada Tabel 4.8 ditunjukkan performansi dari hasil percobaan sistem IWP dengan sudut awal 13° , terlihat pada tabel bahwa *transient response* posisi sudut pendulum dan input voltase (u) tidak dapat didefinisikan atau tidak terwakili karena sistem IWP dengan diberikan sudut 13° tidak dapat menyeimbangkan pada posisi vertikal ke atas. Oleh karena itu, sudut maksimal yang bisa diberikan pada prototipe sistem IWP adalah 12° .

Tabel 4.8 Performa dari Hasil Percobaan Sistem IWP dengan Sudut Awal 13°

	Sudut Awal (θ)	Initial input (V)	Settling time (s)	Rise Time (s)	%Overshoot	Peak	Peak Time (s)	SSE
Posisi Sudut Pendulum Sistem IWP	13°	8.4	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
Input Voltase Sistem IWP	13°	8.4	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN

4.4 Analisis Hasil Simulasi dan Percobaan Sistem IWP

Pada subbab ini, hasil respons simulasi dan percobaan penerapan sistem kontrol LQR dengan *gain* (K) yang sama akan dibandingkan untuk mengetahui hubungan antara keduanya. Analisis dilakukan dengan membandingkan grafik respons *state variable* terbaik saat diberi sudut awal yang sama.

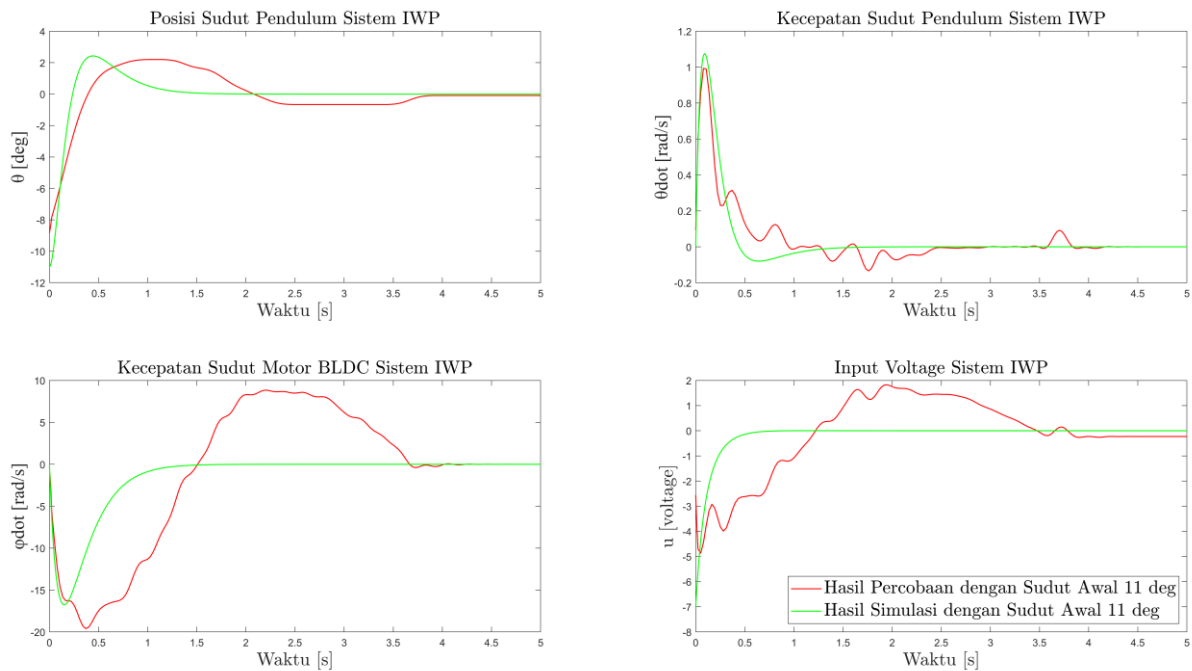


Gambar 4.12 Respons Simulasi dan Percobaan *State Variable* Sistem IWP saat Diberikan Sudut Awal 10°

Pada Gambar 4.12 menunjukkan respons hasil simulasi dan percobaan *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ serta input voltase (u) sistem IWP. Respons hasil percobaan dan simulasi menunjukkan *trend* yang cukup serupa, namun secara keseluruhan *transient response state variable* hasil percobaan lebih lambat apabila dibandingkan dengan hasil simulasi. Pada respons posisi sudut pendulum (θ) hasil percobaan tidak didapatkan nilai *settling time* karena respons berosilasi dan mempunyai SSE lebih besar daripada 5% daripada *setpoint*, tidak demikian halnya dengan hasil simulasi dengan *settling time* sistem IWP pada 1.2218 detik dan SSE yang sangat kecil serta mempunyai respons yang lebih untuk *rise time*, persentase *overshoot*, dan *peak time* apabila dibandingkan hasil percobaan ditunjukkan pada Tabel 4.9. Pada respons kecepatan sudut pendulum ($\dot{\theta}$) hasil percobaan memiliki respons yang lebih lambat serta berosilasi, namun memiliki *trend* yang serupa dan memiliki persentase *overshoot* yang lebih kecil apabila dibandingkan dengan hasil simulasi. Pada respons kecepatan sudut motor BLDC ($\dot{\phi}$) dan input voltase (u) percobaan dan simulasi menunjukkan perbedaan yang cukup signifikan karena respons hasil percobaan memiliki selisih *transient response* yang cukup besar terutama persentase *overshoot* apabila dibandingkan dengan hasil simulasi. Hal ini disebabkan input voltase (u) yang masuk ke sistem IWP memiliki *trend* yang tidak teratur sehingga menyebabkan respons dengan *trend* yang sama untuk kecepatan sudut motor BLDC ($\dot{\phi}$). Hal ini terjadi karena terdapat *linearisasi* sistem IWP pada saat dimodelkan sehingga karakteristik model mempunyai *modelling error* dan adanya faktor gangguan yang terjadi pada saat dilakukan percobaan pada prototipe sistem IWP.

Tabel 4.9 Performa dari Hasil Percobaan dan Simulasi Sistem IWP dengan Sudut Awal 10°

		Sudut Awal (θ)	Initial input (V)	Settling time (s)	Rise Time (s)	%Overshoot	Peak	Peak Time (s)	SSE
Posisi Sudut Pendulum Sistem IWP	Percobaan	10°	6.170	NaN	0.3272	27.54	2.7540	1.0207	0.4818
	Simulasi	10°	6.366	1.2218	0.1636	22.068	2.2068	0.440	1.82e-09

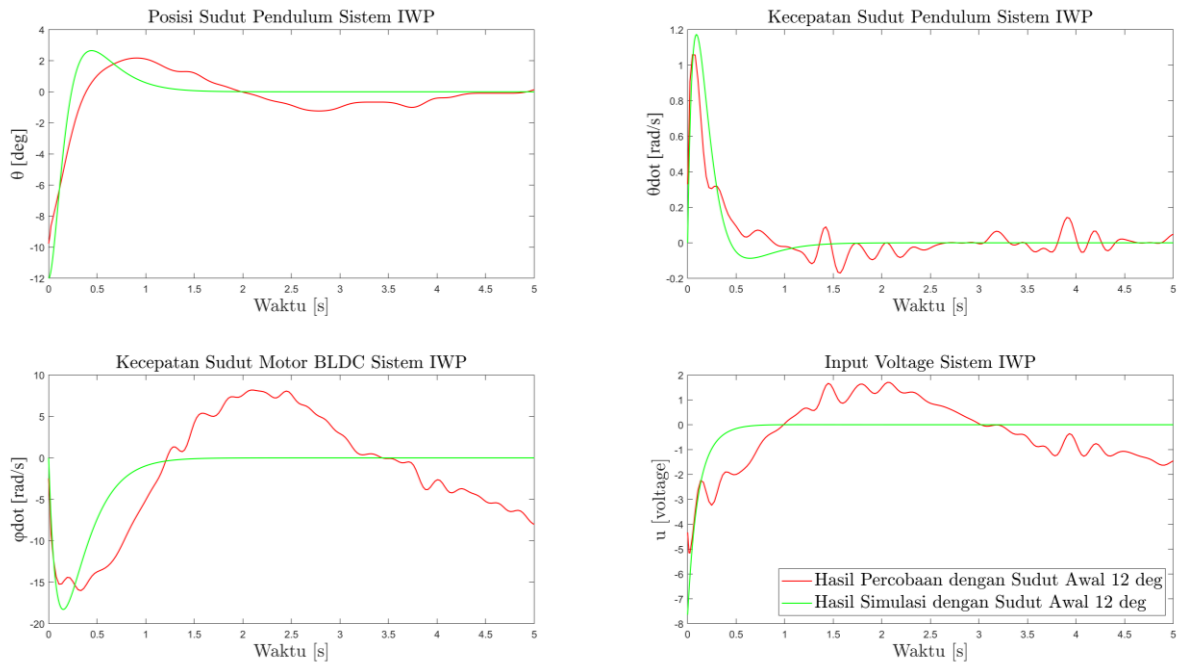


Gambar 4.13 Respons Simulasi dan Percobaan *State variable* Sistem IWP saat Diberikan Sudut Awal 11°

Pada Gambar 4.13 menunjukkan respons simulasi dan percobaan *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ serta input voltase (u) sistem IWP. Respons hasil percobaan dan simulasi menunjukkan *trend* yang cukup serupa, namun secara keseluruhan *transient response state variable* hasil percobaan lebih lambat apabila dibandingkan dengan hasil simulasi. Pada respons posisi sudut pendulum (θ) percobaan memiliki *transient response* dengan selisih tidak terlalu besar yang ditunjukkan pada Tabel 4.10. Hasil *rise time*, *settling time*, dan *peak time* hasil simulasi menunjukkan waktu yang lebih cepat dibandingkan hasil percobaan, namun persentase *overshoot* yang dimiliki hasil percobaan mempunyai nilai yang sama. Pada respons kecepatan sudut pendulum ($\dot{\theta}$) hasil percobaan memiliki respons yang beresilasi dan memiliki *trend* yang sama dengan hasil simulasi. Namun, Hasil percobaan memiliki %*overshoot* yang lebih kecil apabila dibandingkan dengan hasil simulasi. Pada respons kecepatan sudut motor BLDC ($\dot{\phi}$) dan input voltase (u) percobaan dan simulasi menunjukkan perbedaan yang cukup signifikan karena respons hasil percobaan memiliki selisih *transient response* yang cukup besar terutama persentase *overshoot* apabila dibandingkan dengan hasil simulasi. Hal ini disebabkan input voltase (u) pada percobaan yang masuk ke sistem IWP memiliki *trend* yang tidak teratur sehingga menyebabkan respons dengan *trend* yang sama untuk kecepatan sudut motor BLDC ($\dot{\phi}$). Hal ini terjadi karena terdapat *linearisasi* sistem IWP pada saat dimodelkan sehingga karakteristik model mempunyai *modelling error* dan adanya faktor gangguan yang terjadi pada saat dilakukan percobaan pada prototipe sistem IWP.

Tabel 4.10 Performa dari Hasil Percobaan dan Simulasi Sistem IWP dengan Sudut Awal 11°

		Sudut Awal (θ)	Initial input (V)	Settling time (s)	Rise Time (s)	%Overshoot	Peak	Peak Time (s)	SSE
Posisi Sudut Pendulum Sistem IWP	Percobaan	11°	6.770	3.7684	0.3103	22.068	2.2006	1.0268	0.0912
	Simulasi	11°	7.002	1.2218	0.1636	22.0682	2.4275	0.440	2.005e-09



Gambar 4.14 Respons Simulasi dan Percobaan *State Variable* Sistem IWP saat Diberikan Sudut Awal 12°

Pada Gambar 4.14 menunjukkan respons simulasi dan percobaan *state variable* $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ serta input voltase (u) sistem IWP. Respons hasil percobaan dan simulasi menunjukkan *trend* yang cukup serupa, namun secara keseluruhan *transient response state variable* hasil percobaan lebih lambat apabila dibandingkan dengan hasil simulasi. Pada respons posisi sudut pendulum (θ) percobaan memiliki *transient response* dengan selisih tidak terlalu besar yang ditunjukkan pada Tabel 4.11. Hasil *rise time*, *settling time*, dan *peak time* hasil simulasi menunjukkan waktu yang lebih cepat dibandingkan hasil percobaan, namun persentase *overshoot* yang dimiliki hasil percobaan mempunyai nilai yang sama. Pada respons kecepatan sudut pendulum ($\dot{\theta}$) hasil percobaan memiliki respons yang berosilasi dan memiliki *trend* yang sama dengan hasil simulasi. Namun, Hasil percobaan memiliki %*overshoot* yang lebih kecil apabila dibandingkan dengan hasil simulasi. Pada respons kecepatan sudut motor BLDC ($\dot{\phi}$) dan input voltase (u) percobaan dan simulasi menunjukkan perbedaan yang cukup signifikan karena respons hasil percobaan memiliki grafik dengan *transient response* yang cukup besar terutama persentase *overshoot* apabila dibandingkan dengan hasil simulasi. Hal ini disebabkan input voltase (u) pada percobaan yang masuk ke sistem IWP memiliki *trend* yang tidak teratur sehingga menyebabkan respons dengan *trend* yang sama untuk kecepatan sudut motor BLDC ($\dot{\phi}$). Hal ini terjadi karena

terdapat *linearisasi* sistem IWP pada saat dimodelkan sehingga karakteristik model mempunyai *modelling error* dan adanya faktor gangguan yang terjadi pada saat dilakukan percobaan pada prototipe sistem IWP.

Tabel 4.11 Performa dari Hasil Percobaan dan Simulasi Sistem IWP dengan Sudut Awal 12°

		Sudut Awal (θ)	Initial input (V)	Settling time (s)	Rise Time (s)	%Overshoot	Peak	Peak Time (s)	SSE
Posisi Sudut Pendulum Sistem IWP	Percobaan	12°	7.560	10.2866	0.2977	22.0683	2.1732	0.9061	0.0912
	Simulasi	12°	7.638	1.2218	0.1636	22.0683	2.6482	0.440	2.18e-09

4.5 Percobaan dan Analisis *Swing-up* dan *Balancing* Sistem IWP

Untuk menyeimbangkan sistem IWP dari posisi ekuilibrium (vertikal ke bawah) menuju posisi *unstable* (vertikal ke atas) dapat dilakukan dengan salah satunya yaitu mengayunkan pendulum sampai posisi vertikal ke atas (posisi awal pada vertikal ke bawah) yang ditunjukkan pada Gambar 4.15. Pada percobaan yang dilakukan yaitu mengayunkan sistem IWP hingga sampai sudut tertentu kemudian mencoba untuk menyeimbangkan sistem IWP pada posisi vertikal ke atas. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 3.12 dan strategi yang akan digunakan dapat dilihat pada Gambar 3.13.



Gambar 4.15 Kondisi Awal Sistem IWP Pada Posisi Vertikal ke Bawah

Sistem *swing up* yang akan digunakan yaitu dengan menetapkan input voltase yang akan diberikan untuk memutar motor BLDC. Nilai input voltase *swing-up* dinyatakan sebagai berikut:

$$u_{swing-up} = supply\ voltage\ limit * 0.45$$

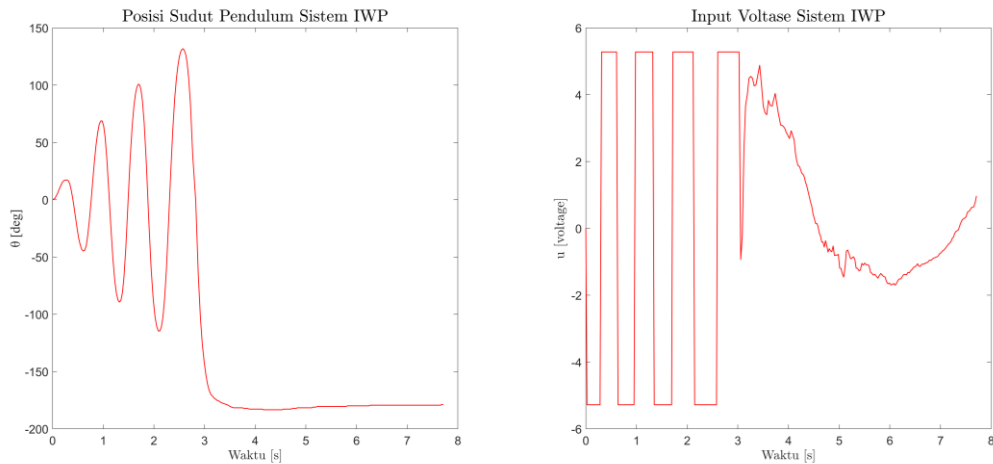
Dimana *supply voltage limit* mempunyai nilai 12 volt. Sehingga, nilai input voltase *swing-up* adalah

$$u_{swing-up} = 12\ V * 0.45$$

$$u_{swing-up} = 5.4V$$

Kontrol *balancing* yang digunakan yaitu Sistem kontrol LQR yang telah didesain digunakan pada prototipe sistem IWP untuk menstabilisasi pendulum pada posisi vertikal ke atas. Dengan nilai *gain* K sebagai berikut:

$$K = [36.8242 \quad 4.4312 \quad 0.2125]$$



Gambar 4.16 Respons *Swing-Up* dan *Balancing* Kontrol Sistem IWP

Gambar 4.16 menunjukkan respons kontrol *swing-up* dan *balancing* yang digunakan untuk mengayunkan serta menyeimbangkan sistem IWP menggunakan kontrol *swing-up* dan *balancing*. Respons pada saat sistem IWP mengayun dapat ditinjau pada besaran posisi sudut pendulum (θ) beresilasi lalu seiring waktu berjalan amplitudonya akan bertambah dan berhenti saat posisi sudut pendulum mencapai posisi vertikal ke atas. Hal ini dapat terjadi karena torsi yang diberikan oleh roda inersia dengan arah tertentu akan memberikan percepatan kepada pendulum dengan arah sebaliknya dari arah putaran roda inersia sesuai dengan Persamaan (3.36) dan torsi yang diberikan dan percepatan pendulum tersebut akan semakin berkurang apabila pendulum mendekati posisi vertikal ke atas. Nilai input voltase pada sistem IWP akan memiliki nilai konstan positif atau negatif sebesar 5.4 V. Hal ini berkorelasi dengan arah pendulum mengayun, apabila pendulum mengayun dengan arah *counterclockwise*, maka input voltase yang masuk pada sistem IWP bernilai negative sehingga akan memutar roda inersia dengan arah *clockwise*. Arah ayunan pendulum ini dapat diamati dengan melihat notasi dari kecepatan sudut pendulum sistem IWP ($\dot{\theta}$), apabila bernilai positif, maka artinya pendulum mengayun ke arah *counterclockwise* dan sebaliknya. Oleh dari itu, maka digunakan sensor *encoder* pada pendulum sebagai *feedback* posisi sudut pendulum (θ) dan kecepatan sudut pendulum ($\dot{\theta}$) sistem IWP. Berdasarkan logika *swing-up* tersebut maka dibuatlah strategi kontrol *swing-up* yang dapat dilihat pada Gambar 3.13 yang kemudian dituangkan dengan menuliskan algoritma kontrol pada Arduino IDE. Untuk strategi *switching* kontrol *swing-up* menjadi kontrol *balancing* dapat menggunakan logika sebagai berikut. Apabila pendulum yang sedang mengayun mencapai target posisi sudut (θ) yang telah ditentukan, maka kontrol *swing-up* diganti menjadi kontrol *balancing* untuk skema *switching* dapat dilihat pada Gambar 3.14. Hasil percobaan *swing-up* dan *balancing* menunjukkan bahwa strategi *switching* yang telah didesain mampu diterapkan dan membawa pendulum dari posisi vertikal ke bawah menjadi vertikal ke atas. Sistem IWP hanya membutuhkan waktu 3.5 detik untuk mengayunkan pendulum dan menyeimbangkan pada posisi vertikal ke atas serta input voltase yang diberikan masih dibawah batas voltase yang telah ditentukan.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Untuk menyeimbangkan *inverted* pendulum pada posisi vertikal ke atas digunakan metode *Inersia Wheel Pendulum* (IWP) serta sistem kontrol *Linear Quadratic Regulator*. Berdasarkan hasil analisis teoritis yang berasal dari menurunkan persamaan gerak sistem IWP menunjukkan bahwa pendulum dapat stabil apabila diberikan torsi reaksi daripada percepatan putar roda inersia yang digerakkan oleh motor BLDC, torsi reaksi inilah yang akan digunakan untuk melawan (*counter*) torsi yang dihasilkan oleh berat dari masing masing komponen sistem IWP yang mempunyai arah berlawanan.
2. Hasil percobaan dan simulasi sistem IWP menunjukkan bahwa sistem kontrol LQR mampu membawa sistem IWP pada ke posisi vertikal ke atas pada saat diberikan variasi sudut awal sebesar 10° , 11° , dan 12° . *Transient response* sistem IWP hasil simulasi memiliki performa lebih baik dibandingkan dengan hasil percobaan. Hal ini dilihat berdasarkan *transient response* untuk masing masing *state variable* sistem IWP, dimana respons posisi sudut pendulum (θ) dan kecepatan sudut pendulum ($\dot{\theta}$) percobaan memiliki *trend* serupa dengan simulasi yang telah dilakukan dengan perbandingan terbaik hasil percobaan dan simulasi yaitu pada sudut awal 11° sedangkan respons kecepatan motor BLDC ($\dot{\phi}$) dan input voltase (u) sistem IWP percobaan menunjukkan perbedaan yang cukup signifikan dengan selisih *transient response* yang cukup besar apabila dibandingkan dengan simulasi. Hal ini terjadi karena terdapat linearisasi pada saat memodelkan sistem IWP dan gangguan yang terjadi pada saat melakukan percobaan protitipe sistem IWP. Kontrol *swing-up* dan *balancing* yang diterapkan pada sistem IWP mampu mengayunkan pendulum dari posisi vertikal ke bawah hingga stabil pada posisi vertikal ke atas dengan hanya membutuhkan waktu 3.5 detik tanpa harus memberikan sudut awal.

5.2 Saran

Saran yang dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya agar didapatkan hasil penelitian yang lebih baik adalah :

1. Mencoba menggunakan sensor *absolute encoder* untuk mengambil data posisi pendulum (θ) dan kecepatan sudut pendulum ($\dot{\theta}$).
2. Mempelajari lebih dalam terkait aktuator dan driver motor BLDC yang ada dipasaran untuk mencari yang sesuai untuk penerapan IWP sebelum digunakan. Salah satu caranya dengan melakukan simulasi terlebih dahulu untuk melihat respons hasil simulasi dan percobaan aktuator motor BLDC.
3. Mengubah parameter seperti dimensi pendulum, dimensi roda inersia dan jenis bahan 3D printing yang lebih berat massa jenisnya contohnya resin.
4. Mencoba menerapkan sistem IWP pada benda fisik seperti sepeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Babu, S. S., & Pillai, A. S. (2016). Design and Implementation of Two-Wheeled Self-Balancing Vehicle Using Accelerometer and Fuzzy Logic. *Proceedings of the Second International Conference on Computer and Communication Technologies. Advances in Intelligent Systems and Computing*, 381,45-53. https://doi.org/10.1007/978-81-322-2526-3_6
- Belascuen, G., & Aguilar, N. (2018). Design, Modeling and Control of a Reaction Wheel Balanced Inverted Pendulum. 2018 IEEE Biennial Congress of Argentina (ARGENCON),1-9. <https://doi.org/10.1109/ARGENCON.2018.8646093>
- Boubaker, O., & Iriarte, R. (2017). The inverted pendulum in control theory and robotics: From theory to new innovations. *The Institution of Engineering and Technology*.
- Fadek, T. (2020, July 15). Lessons from the Awkward Life and Death of the Segway. *Bloomberg*. <https://www.bloomberg.com/news/articles/2020-07-15/rip-segway-the-dorky-grandfather-of-micromobility>
- Ho, Q. K., & Pham, C. B. (2018). Study on Inertia Wheel Pendulum Applied to Self-Balancing Electric Motorcycle. 2018 4th International Conference on Green Technology and Sustainable Development (GTSD), 687-692. <https://doi.org/10.1109/GTSD.2018.8595698>
- Huang, J., Guan, Z.-H., Matsuno, T., Fukuda, T., & Sekiyama, K. (2010). Sliding-Mode Velocity Control of Mobile-Wheeled Inverted-Pendulum Systems. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS*, 26,750-758. <https://doi.org/10.1109/TRO.2010.2053732>
- Ibañez, C. A., Frías, O. G., & Castañón, M. S. (2005). Lyapunov-Based Controller for the Inverted Pendulum Cart System. *Nonlinear Dynamics*, 40,367-374. <https://doi.org/10.1007/s11071-005-7290-y>
- Kleppner, D., & Kolenkow, R. (2014). *An Introduction to Mechanics*. Cambridge University Press.
- Li, Z., Yang, C., & Fan, L. (2013). *Advanced Control of Wheeled Inverted Pendulum Systems*. Springer.
- Narkhede, R., Balki, R., Kaikade, D., & Gundecha, A.D. (2021). Model-Based Design of Motion Control System. *ICT Analysis and Applications. Lecture Notes in Networks and Systems*, 154,19-33. https://doi.org/10.1007/978-981-15-8354-4_4
- Nise, N. S. (2014). *Control systems engineering (7th ed.)*. John Wiley & Sons.
- Patil, O., Jadhav, S., & Ramakrishnan, R. (2021). Development of Reaction Wheel Controlled Self-Balancing Bicycle for Improving Vehicle Stability Control. *Advances in Automotive Technologies. Lecture Notes in Mechanical Engineering*,187-195. https://doi.org/10.1007/978-981-15-5947-1_15
- Spong, M. W., Corke, P., & Lozano, R. (2001). Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum. *Automatica*, 37,1845-1851. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(01\)00145-5](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(01)00145-5)
- Srinivas, K. N., & Bahera Behera, L. (2008). Swing-up control strategies for a reaction wheel pendulum. *International Journal of Systems Science*, 39,1165-1177. <https://doi.org/10.1080/00207720802095137>
- Will, F., Davidson, J. N., Couchman, P., dan Bednall, D. 2011. "Tomorrow's car – for today's people : can tilting three wheeled vehicles be a solution for the problems of today and the future?" *SAE Technical Paper 2011-28-0001*, 1-14.
- Young, H. D., Freedman, R. A., & Ford, A. L. (2011). *University physics with modern physics*. Addison-Wesley.

LAMPIRAN

Biodata Penulis



Billy Indrawan merupakan nama lengkap dari penulis tugas akhir ini. Penulis yang lahir di Serang pada 15 Mei 2000 ini merupakan anak kedua dari pasangan Indra Syakti Amperawan dan Mia Martha. Penulis memulai Pendidikan formal di SDN Cijawa pada tahun 2006. Setelah lulus tahun 2012 penulis melanjutkan pendidikannya ke SMPN 1 Kota Serang hingga lulus pada tahun 2015. Kemudian, penulis melanjutkan ke SMA Negeri 1 Kota Serang hingga akhirnya lulus pada tahun 2018. Setelah menyelesaikan studi tingkat menengah atas, penulis melanjutkan studi S1 dan diterima di Program S1 Departemen Teknik Mesin di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan NRP 0211184000009.

Selama menuntut ilmu S1, penulis juga aktif ikut serta dalam berbagai kegiatan dan organisasi. Tahun 2019-2020 penulis menjadi Staff Departemen Pelayanan Umat Lembaga Lembaga Kajian Kerohanian Islam (LKKI) Departemen Teknik Mesin Ash Shaff. Tahun 2020-2021 penulis menjadi Ketua LKKI Departemen Teknik Mesin Ash Shaff. Penulis dapat dihubungi lewat nomor telfon 0895327282518 atau melalui e-mail billyasik15@gmail.com